



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Larbi Tébessi –Tébessa -

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et informatique



# Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

**Domaine:** Mathématiques et informatique

**Filière:** Mathématiques

**Option:** Equations aux dérivées partielles et applications

**Thème :**

**Synchronisation d'une classe des systèmes  
différentiels partiels d'ordre fractionnaire**

**Présenté par:**

**Abdelhak LASSOUED**

**Devant le jury:**

Mr. Belgacem REBIAI	Pr.	Université de Tébessa	Président
Mr. Adel OUANNAS	M.C.A	Université de Tébessa	Superviseur
Mr. Khaled BERRAH	M.C.B	Université de Tébessa	Examineur

**Date de soutenance:**

13/09/2020

**Note: 18 Mention: Excellent**

# Dédicace

*Je dédie cet événement marquant de ma vie à ma famille, son amour a fait de moi ce que je suis aujourd'hui.*

*A ma très chère mère*

*Quoi ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit, ta bienveillance me guide, ton affection me couvre et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force.*

*A mon très chère père*

*Pour le goût à l'effort qu'il a suscité en moi, de par sa rigueur, ceci est ma profonde gratitude pour ton éternel amour, que ce mémoire soit le meilleur cadeau que je puisse t'offrir.*

*A mes professeurs et tous qui me sont chers.*

# Remerciements

*Mes remerciements vont premièrement à **ALLAH** le tout-puissant pour la volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée durant ma vie, le Miséricordieux qui m'a donné la force, le courage et la réussite.*

*Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sentiments les plus sincères à mon superviseur Monsieur **Adel Ouannas**, maître de conférences A à l'université de Tébessa, Je tiens à le remercier pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteur de ce mémoire.*

*Je remercie chaleureusement Monsieur **Belgacem REBIAI**, Professeur à l'Université de Tébessa qui m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.*

*Je tiens à remercier vivement Monsieur **Khaled BERRAH**, maître de conférences B à l'université de Tébessa, pour avoir accepté d'être membres dans le jury et examiner mon mémoire.*

*Et tous les enseignants qui m'ont apporté leur aide au bon acheminement de parcours éducatif.*

**LASSOUED Abdelhak.**

# RÉSUMÉ

## ملخص

في هذه المذكرة، تمت دراسة مشكلة مزامنة فئة من الأنظمة التفاضلية الجزئية الزمكانية ذات رتبة كسرية، خاضعة للشروط الحدية المتجانسة لنيومان. باستخدام مقارنة ليابونوف الكسرية، تم اقتراح مراقبات تحكم خطية و غير خطية لمزامنة أنظمة من الصنف تفاعل-انتشار كسرية. كتطبيق رقمي، ندرس سلوكيات المزامنة الكاملة لأنظمة لنيول-ابشتاين الكسرية.

## كلمات مفتاحية

حساب التفاضل والتكامل الكسري، المزامنة، مقارنة ليابونوف الكسرية، أنظمة تفاعل-انتشار، أنظمة لنيول-ابشتاين.

## Résumé

Dans ce mémoire, le problème de synchronisation d'une classe des systèmes différentiels partiels d'ordre fractionnaire spatio-temporel est étudié. Soumis à des conditions aux limites homogènes de Neumann et en utilisant l'approche de Lyapunov fractionnaire, des schémas de contrôle non linéaires et linéaires ont été proposés pour synchroniser les systèmes de réaction-diffusion fractionnaires. Comme application numérique, nous étudions les comportements de synchronisation complète des systèmes fractionnaires de Lengyel-Epstein.

## Mots clés

Calcul fractionnaire, Synchronisation, L'approche fractionnaire de Lyapunov, Systèmes de réaction-diffusion, Systèmes de Lengyel – Epstein.

## Abstract

In this thesis, the problem of synchronization of a class of spatiotemporal fractional-order partial differential systems is studied. Subject to homogeneous Neumann boundary conditions and using fractional Lyapunov approach, nonlinear and linear control schemes have been proposed to synchronize fractional reaction–diffusion systems. As a numerical application, we investigate complete synchronization behaviors of fractional Lengyel–Epstein systems.

## Key words

Fractional calculus, Synchronization, Fractional Lyapunov approach, Reaction–diffusion systems, Lengyel–Epstein systems.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>vi</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>1</b>
1.1 Notions générales . . . . .	2
1.1.1 Formules de Green . . . . .	2
1.1.2 Fonction Gamma . . . . .	3
1.1.3 Fonction Bêta . . . . .	4
1.1.4 Espace de phase . . . . .	5
1.1.5 Point d'équilibre . . . . .	5
1.2 Équations aux dérivées partielles . . . . .	8
1.2.1 Systèmes de réaction-diffusion . . . . .	8
1.2.2 Exemples . . . . .	9
<b>2 Calcul fractionnaire</b>	<b>10</b>
2.1 Intégrales et dérivées fractionnaires . . . . .	11
2.1.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .	11
2.1.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo . . . . .	13
2.2 Stabilité des systèmes fractionnaires . . . . .	15
2.2.1 Stabilité des systèmes linéaires . . . . .	15
2.2.2 Stabilité des systèmes non linéaires . . . . .	18
2.2.3 Méthode directe de Lyapunov pour les systèmes fractionnaires . . . . .	20
<b>3 Synchronisation des systèmes de réaction-diffusion fractionnaires</b>	<b>24</b>
3.1 Théorie de synchronisation . . . . .	25
3.1.1 Systèmes maître et esclave . . . . .	25

3.1.2	Types de synchronisation . . . . .	25
3.1.3	Méthode du contrôleur actif . . . . .	27
3.2	Résultats de synchronisation . . . . .	28
3.2.1	Loi de contrôle non linéaire . . . . .	29
3.2.2	Loi de contrôle linéaire . . . . .	31
3.3	Applications numériques . . . . .	33
3.3.1	Cas non linéaires . . . . .	35
3.3.2	Cas linéaires . . . . .	36
	<b>Conclusion générale</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>

# Table des figures

1.1	Courbes intégrales pour l'équation du pendule simple dans l'espace des phases $(\theta, \dot{\theta})$ , où $\theta$ est en abscisse et $\dot{\theta}$ en ordonnée . . . . .	5
1.2	Schéma montrant un pendule simple. . . . .	7
2.1	Région de stabilité d'un système d'équations différentielles fractionnaires linéaire d'ordre $\alpha \in (0, 1)$ . . . . .	16
2.2	Région de stabilité d'un système d'équations différentielles fractionnaires linéaire d'ordre $\alpha \in (1, 2)$ . . . . .	16
3.1	Comportement dynamique de la solution $u_1$ . . . . .	34
3.2	Comportement dynamique de la solution $u_2$ . . . . .	34
3.3	L'évolution temporelle de l'erreur de synchronisation de contrôle non linéaire $e_1$ . . . . .	36
3.4	L'évolution temporelle de l'erreur de synchronisation de contrôle non linéaire $e_2$ . . . . .	36
3.5	L'évolution temporelle de l'erreur de synchronisation de contrôle linéaire $e_1$ . . . . .	37
3.6	L'évolution temporelle de l'erreur de synchronisation de contrôle linéaire $e_2$ . . . . .	38

# Introduction générale

Le phénomène de synchronisation a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs de différents domaines en raison de ses applications potentielles dans les sciences non linéaires [1]. La synchronisation est le processus de contrôler la sortie d'un système esclave dynamique afin de forcer ses variables à correspondre à celles d'un système maître correspondant dans le temps [2]. Différents types de schémas de contrôle ont été introduits dans le passé pour synchroniser des systèmes dynamiques tels qu'une synchronisation complète (anti-synchronisation) [3], synchronisation décalée [4], fonction de synchronisation projective [5], synchronisation généralisée [6], et synchronisation Q-S [7]. Récemment, le sujet de la synchronisation entre les systèmes dynamiques décrit par des équations différentielles d'ordre fractionnaire a commencé à attirer une attention croissante [8][9][10][11].

La plupart des efforts de recherche ont été consacrés à l'étude des problèmes de synchronisation dans les systèmes dynamiques non linéaires de faible dimension. La synchronisation des systèmes de haut dimension dans lesquels les variables d'état dépendent non seulement du temps mais aussi de la position spatiale reste un défi. Ces systèmes à haut dimension sont généralement modélisés dans le domaine spatio-temporel par des systèmes différentiels partiels. Récemment, la recherche de synchronisation s'est déplacée vers des systèmes dynamiques non linéaires de haut dimension [12][13][14][15]. Au cours des dernières années, certaines études ont étudié la synchronisation de systèmes spatialement étendus démontrant un chaos spatio-temporel comme les travaux présentés dans [16][17][18]. Les systèmes de réaction-diffusion ont joué un rôle important dans la modélisation de divers modèles spatio-temporels qui apparaissent dans les systèmes chimiques et biologiques [19][20]. Les systèmes de réaction-diffusion peuvent décrire une large classe de modèles spatio-temporels rythmiques observés dans les systèmes chimiques et biologiques, comme des impulsions circulantes sur un anneau, taches oscillantes, ondes cibles et spirales rotatives. La dynamique de synchronisation des systèmes de réaction-diffusion a été étudiée dans [21][22] en utilisant la théorie de la réduction de phase. Il a été démon-

tré que les systèmes de réaction-diffusion peuvent présenter une synchronisation de la même manière que les oscillateurs de faible dimension. L'effet de l'auto-synchronisation temporelle sur les oscillations uniformes dans un système réaction-diffusion a été présenté dans [23]. De plus, synchronisation généralisée [24], une approche basée sur la théorie des semi-groupes [25][26], approche des espaces fonctionnels [27], l'approche de synchronisation backstepping [28], l'approche de synchronisation théorique des graphes [29], transmission de signaux biologiques par commande synchrone [30], synchronisation impulsive de verrouillage [31], la synchronisation de type impulsif [32] et la stratégie de synchronisation adaptative hybride [33] pour les systèmes couplés réaction-diffusion ont été introduites. À notre connaissance, l'étude des comportements de synchronisation pour les systèmes de réaction-diffusion d'ordre fractionnaire reste à ce jour un domaine nouveau et pour la plupart inexploré. Cela nous a motivés à examiner le phénomène et à développer des lois de contrôle de synchronisation appropriées.

Ce mémoire présente le problème de synchronisation d'une classe des systèmes différentiels partiels d'ordre fractionnaire spatio-temporel. Ce travail est organisé de la manière suivante

**Dans le premier chapitre :** nous rappelons quelques notions et définitions utiles tout au long de ce mémoire, la stabilité de point d'équilibre et nous avons montré les systèmes de réaction-diffusion avec des exemples.

**Le deuxième chapitre :** est consacré à les approches des dérivées et intégrales fractionnaires (approche de Riemann-Liouville, Caputo) et leurs propriétés, la stabilité des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire.

**Dans le troisième chapitre :** ce chapitre est dédié à la présentation des systèmes maître et esclave, des différents types connus de synchronisation, et la méthode le plus usé. et nous exposons la synchronisation complète des systèmes de réaction-diffusion fractionnaires avec la suggestion des fonctions de contrôle linéaires et non linéaires et une application numérique sur les systèmes fractionnaires de Lengyel – Epstein.

# Chapitre 1

## Préliminaires

---

Dans ce chapitre, nous y reviendrons quelques définitions fondamentales, des propriétés nécessaires on a besoin aux chapitres à venir, et les équations aux dérivées partielles sont présentés.

---

## 1.1 Notions générales

**Définition 1.1** On pose  $\Omega$  un ouvert bornée dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , et  $f \in C^1(\Omega)$  tel que  $x = [x_1, \dots, x_n]$ .

La matrice **Jacobienne** de  $f$  écrit comme suit

$$Jf(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

On définit la **divergence** par

$$\operatorname{div}(f(x)) = \operatorname{tr}(Jf(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_i}, \quad (1.2)$$

**Définition 1.2**  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , le gradient de  $\varphi$  est  $\nabla\varphi(x) = \left[ \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_n} \right]$ .

**Définition 1.3** Maintenant on définit le **Laplacien** de  $\varphi$  par

$$\Delta\varphi(x) = \operatorname{div}(\nabla\varphi(x)) = \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_n^2}. \quad (1.3)$$

### 1.1.1 Formules de Green

La formule de Green est un outil fondamental pour la résolution des équations aux dérivées partielles. Elle coïncide, en dimension 1, avec la formule d'intégration par parties[34].

**Définition 1.4 (vecteur normale)** On appelle **normale** au domaine  $\Omega$  un champ de vecteurs  $\eta(x)$  défini sur le bord  $\Gamma$  (resp.  $\partial\Omega$ ) de  $\Omega$  tel qu'en tout point  $x \in \Gamma$  où le bord est régulier,  $\eta(x)$  soit orthogonal au bord et unitaire ( $\|\eta(x)\| = 1$ ). on appelle **normale extérieur** une normale qui poine vers l'extérieur du domaine en tout point.

**Définition 1.5 (dérivée normale)** On appelle **dérivée normale** d'une fonction régulière  $u$  sur le bord d'un domaine  $\Omega$  la fonction définie sur les points régulière de  $\Gamma$  par  $\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \nabla u(x) \cdot \eta(x)$  (produit scalaire du vecteur  $\nabla u(x)$  avec le vecteur  $\eta(x)$ ).

**Définition 1.6 (Première formule de Green)** Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions régulières, tel que  $u \in C^2(\Omega)$  et  $v \in C^1(\Omega)$  on a

$$\int_{\Omega} \Delta u(x)v(x) dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u(x)}{\partial \eta} v(x) d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla u(x) \nabla v(x) dx. \quad (1.4)$$

**Définition 1.7 (Deuxième formule de Green)** Soit  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$  et  $v \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} (av(x)\Delta u(x) - bu(x)\Delta v(x)) dx = \int_{\Gamma} \left( av(x)\frac{\partial u(x)}{\partial \eta} - bu(x)\frac{\partial v(x)}{\partial \eta} \right) d\Gamma + \int_{\Omega} (b-a)\nabla u(x)\nabla v(x) dx, \quad (1.5)$$

où  $a$  et  $b$  des nombres réels.

**Remarque 1.1 (Formule d'Ostrogradsky)** Soit  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} u(x) dx = \int_{\Gamma} u(x)\eta(x) d\Gamma. \quad (1.6)$$

### 1.1.2 Fonction Gamma

**Définition 1.8** La fonction Gamma est définie sur le demi-plan  $\{s \in \mathbb{C} \text{ tel que } \operatorname{Re}(s) > 0\}$  par

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (1.7)$$

Dans le cas où  $s$  un entier, on trouve donc le lien avec la factorielle donné par

$$\Gamma(s) = (s-1)!. \quad (1.8)$$

#### Propriétés

(i)  $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$

(ii)  $\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} t^s e^{-t} dt$ , par un intégration par parties on obtient  $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$

(iii) La fonction gamma est infiniment dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et de plus sa formule de dérivée ( sa dérivée  $n$ -ième ) donnée par

$$\Gamma^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (1.9)$$

### 1.1.3 Fonction Bêta

La fonction Bêta est une type d'intégrale définie pour tous nombres complexes  $x$  et  $y$  de parties réelles strictement positives par

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (1.10)$$

Par le changement de variable  $u = 1 - t$

$$\beta(x, y) = \int_0^1 (1-u)^{x-1} u^{y-1} du, \quad (1.11)$$

d'où

$$\beta(x, y) = \beta(y, x),$$

la fonction Bêta est symétrique.

#### Propriétés

(i) Par le changement de variable  $t = \sin^2(\theta)$ , où  $dt = \sin(2\theta) d\theta = 2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta$  on obtient

$$\begin{aligned} \beta(x, y) &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-2}(\theta) \sin^{2y-2}(\theta) \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta, \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1}(\theta) \cos^{2y-1}(\theta) d\theta. \end{aligned} \quad (1.12)$$

(ii) Si  $x$  et  $y$  sont des entiers strictement positifs, cette équation se réécrit, en termes de factorielles

$$\beta(x, y) = \frac{(x-1)! \cdot (y-1)!}{(x+y-1)!}. \quad (1.13)$$

(iii) La fonction Bêta est liée à la fonction Gamma par l'équation suivante

$$\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \quad (1.14)$$

### 1.1.4 Espace de phase

**Définition 1.9** *Un espace des phases représente l'ensemble des valeurs qui peuvent prendre les variables d'un système. Sa dimension est égale au nombre de variables dudit système.*

*Par exemple, si l'on étudie la trajectoire d'un point dans un espace en trois dimensions en considérant la position et la vitesse du point à chaque instant, l'espace d'états sera de dimension six. En effet, les six variables seront :  $x, y, z, v_x, v_y, v_z$ . L'espace résultant sera donc (de manière très générale) isomorphe à  $\mathbb{R}^6$ , bien qu'il soit possible -et parfois pertinent- de considérer un espace plus restreint.*

**Exemple 1.1** *Un exemple sur l'espace des phases représenté par la Figure 1.1*

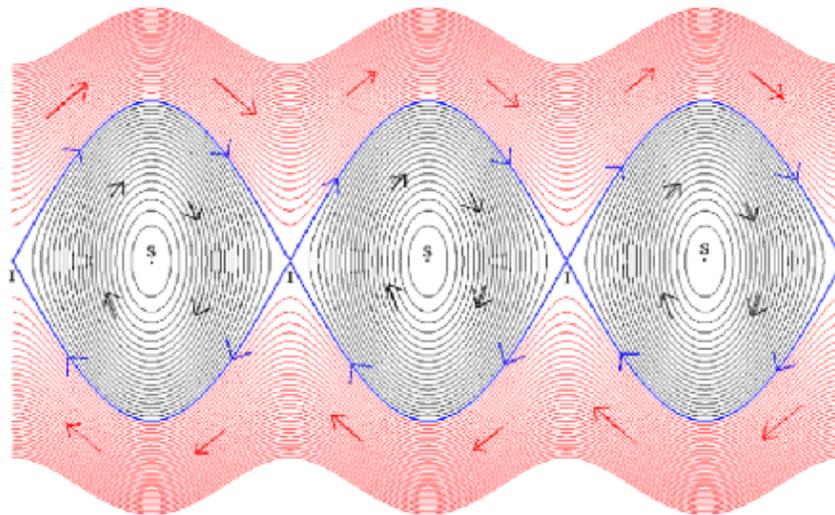


FIG. 1.1 – Courbes intégrales pour l'équation du pendule simple dans l'espace des phases  $(\theta, \dot{\theta})$ , où  $\theta$  est en abscisse et  $\dot{\theta}$  en ordonnée

### 1.1.5 Point d'équilibre

On introduit le système différentiel suivant

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1.15)$$

$I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , la fonction  $x$  définie sur l'intervalle  $I$  à valeurs dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction continue de  $I \times \Omega$  dans  $\mathbb{R}$ , le vecteur  $x(t)$  est appelé solution de (1.15).

**Définition 1.10** [35, 36] *Un point d'équilibre du système (1.15) est un point  $x_{eq}$  de l'espace des phases vérifiant*

$$f(x_{eq}) = 0, \quad (1.16)$$

pour tout  $t \geq t_0$ .

**Remarque 1.2** *Un système stable autour le point d'équilibre veut dire n'est pas affecté par des faibles perturbations, il reste au voisinage de ce point.*

Nous désignons  $x_e = 0$  et  $x_0$  l'état initiale du système (1.15).

**Définition 1.11** [35, 36] *Le point d'équilibre  $x_{eq} = 0$  du système (1.15) est stable si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ tel que } \|x_0\| < \delta(\varepsilon) \implies \|x(t, x_0)\| < \varepsilon, \quad (1.17)$$

où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne.

**Définition 1.12** [35, 36] *Le point d'équilibre  $x_{eq} = 0$  du système (1.15) est attractif si*

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t, x_0) = 0. \quad (1.18)$$

**Définition 1.13** [35, 36] *Le point d'équilibre  $x_{eq} = 0$  du système (1.15) est asymptotiquement stable s'il est stable et attractif.*

**Définition 1.14** [35, 36] *Le point d'équilibre  $x_{eq} = 0$  du système (1.15) est un point d'équilibre localement exponentiellement stable s'il existe deux constantes strictement positives  $\alpha$  et  $\beta$  telles que*

$$\|x(t, x_0)\| < \alpha \exp(-\beta t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x_0 \in \mathcal{B}_r,$$

$\mathcal{B}_r$  c'est la boule ouverte de centre zéro, de rayon  $r > 0$ .

Lorsque  $\mathcal{B}_r = \mathbb{R}^n$ , on parle de stabilité exponentielle globale.

**Définition 1.15** [37] *Soit  $V(t, x) : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction continue. Si*

(i)  $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \quad V(t, x) > 0.$

(ii)  $\forall t \in \mathbb{R}^+, V(t, x) = 0 \implies x = 0.$

(iii) *La fonction  $V(t, x)$  est de classe  $C^1$  et s'il existe un voisinage de l'origine  $\mathcal{V}_0$  tel que  $\forall x \in \mathcal{V}_0$ , (resp.  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ )*

$$\dot{V}(t, x) = \nabla V \cdot f(t, x) = \left( \frac{\partial V(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial V(t, x)}{\partial x} \right) f(t, x) \leq 0. \quad (1.19)$$

Alors  $V(t, x)$  est une fonction de Lyapunov locale (resp. globale) au sens large pour le système (1.15).

**Remarque 1.3** *Si  $\dot{V}(t, x) < 0$ , alors  $V$  est appelée fonction de Lyapunov au sens strict pour le système (1.15).*

**Théorème 1.1** [37] Si le système (1.15) admet une fonction de Lyapunov au sens large (respectivement au sens strict) alors l'origine est un point d'équilibre localement stable (respectivement asymptotiquement stable). Si la fonction de Lyapunov est globale, on parle alors de stabilité globale (respectivement stabilité asymptotique globale).

**Exemple 1.2** le pendule simple, Figure 1.2

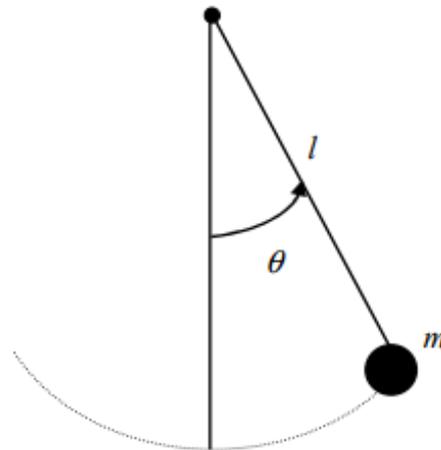


FIG. 1.2 – Schéma montrant un pendule simple.

On note  $\vec{g}$  l'accélération due à la pesanteur,  $l$  la longueur du pendule et  $m$  la masse de pendule.

$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  sa vitesse angulaire,  $v = l\dot{\theta}$  est la vitesse de la masse.

L'équation de pendule écrit comme suit

$$\ddot{\theta} + \omega \sin \theta = 0, \quad (1.20)$$

où  $\omega = \frac{g}{l}$ .

Sous forme d'un système d'ordre 1,

en choisissant les variables d'état  $x_1 = \theta$  et  $x_2 = \dot{\theta}$ , on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1. \end{cases} \quad (1.21)$$

Ce système admet l'origine comme point d'équilibre.

L'énergie du système ( la somme de l'énergie cinétique du pendule et de son énergie potentielle de pesanteur ) vaut

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1).$$

Il est facile de vérifier que la fonction de l'énergie  $E$  est de Lyapunov.

En effet

$$\begin{aligned}\dot{E}(x_1, x_2) &= x_2 \dot{x}_2 + \frac{g}{l} \dot{x}_1 \sin x_1, \\ &= -x_2 \left( \frac{g}{l} \sin x_1 \right) + x_2 \left( \frac{g}{l} \sin x_1 \right) \\ &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit d'après le Théorème 1.1 l'origine est globalement stable.

## 1.2 Équations aux dérivées partielles

### 1.2.1 Systèmes de réaction-diffusion

**Définition 1.16** [38] Une équation de type réaction-diffusion comprend un terme de réaction et un terme de diffusion, i.e, la forme typique est comme suite

$$u_t = D\Delta u + f(u), \quad (1.22)$$

$u = u(x, t)$  est une variable d'état et décrit densité/concentration d'une substance, une population ...etc en position  $x \in \Omega$  au temps  $t$ . Donc le premier terme sur le côté droit décrit la diffusion, notamment  $D$  comme coefficients de diffusion.

Le second terme,  $f(u)$  une fonction continue  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et décrit les processus vraiment changer de la présente  $u$ , i.e. elle arrive toujours quelque chose (naissance, décès, réaction chimique ...etc), ne diffusent pas seulement dans l'espace.

Il est également possible, que le terme de réaction dépend non seulement de  $u$ , mais aussi de la première dérivée de  $u$ , i.e.  $\nabla u$ , ou explicitement de  $x$ .

**Définition 1.17** Un système de réaction-diffusion est écrit comme suit

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u + f(u, v), \\ v_t = b\Delta v + g(u, v). \end{cases} \quad (1.23)$$

Tel que  $a, b \in \mathbb{R}$ , et on munit le système (1.23) par des conditions spatio-temporel (condition initiale, conedction de Neumann, condition de Cauchy, ...etc), pour faciliter l'étude de la possibilité d'existence et l'unicité de solution.

## 1.2.2 Exemples

### Modèles de combustion

[39] La combustion exothermique dans un gaz peut être modélisée par un système du type suivant

$$\begin{cases} Y_t - \gamma \Delta Y = -H(Y, T), \\ T_t - \zeta \Delta Y = qH(Y, T), \end{cases} \quad (1.24)$$

où  $Y$  est la concentration d'un seul réactif,  $T$  est la température et  $H(0, T) = 0$ ,  $H(Y, 0) \geq 0$ . Une fonction typique  $H$  est donnée par  $H(Y, T) = Y^m \exp(T)$ . Des équations similaires apparaissent pour différentes applications.

### Systèmes de Lotka-Volterra

[39] Une classe générale de systèmes Lotka-Volterra peut être écrite comme suit

$$\forall i = \widehat{1..m}, \quad (u_i)_t - d_i \Delta u_i = e_i u_i + u_i \sum_{1 \leq j \leq m} p_{ij} u_j, \quad (1.25)$$

avec  $e_i, p_{ij} \in \mathbb{R}$  et diverses conditions aux limites.

### Réactions chimiques quadratiques

[39] De nombreuses réactions chimiques, modélisées par la loi d'action de masse. Prenons d'abord un exemple typique. Nous considérons la réaction réversible



Ensuite, l'évolution des concentrations  $u_i$  de  $U_i$  est régie par le système réaction-diffusion suivant

$$\begin{cases} (u_1)_t - d_1 \Delta u_1 = -k^+ u_1 u_2 + k^- u_3 u_4 \\ (u_2)_t - d_2 \Delta u_2 = -k^+ u_1 u_2 + k^- u_3 u_4 \\ (u_3)_t - d_3 \Delta u_3 = k^+ u_1 u_2 - k^- u_3 u_4 \\ (u_4)_t - d_4 \Delta u_4 = k^+ u_1 u_2 - k^- u_3 u_4, \end{cases} \quad (1.27)$$

avec  $k^+, k^- > 0$ . avec des conditions aux limites.

# Chapitre 2

## Calcul fractionnaire

---

Dans ce chapitre, nous présenterons l'intégrale de Riemann-Liouville, La dérivée fractionnaire au sens de Caputo, et on approfondira la stabilité des systèmes fractionnaires linéaires et non-linéaires, et on énoncer le théorème de stabilité de Lyapunov.

---

## 2.1 Intégrales et dérivées fractionnaires

### 2.1.1 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

**Définition 2.1** [40] Supposons que la fonction  $f$  est continue et intégrable sur chaque intervalle fini  $[a, t]$ .

La notion de  $n$ -fois intégration à valeur non entière de  $n$  est définie par

$$\mathbf{I}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (2.1)$$

où  $\alpha > 0$

#### Propriétés

Voilà certaines propriétés célèbres

(i)  $\mathbf{I}^0 f(t) = f(t)$

(ii) La transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire Riemann-Liouville est décrite comme suit

$$\mathcal{L}\{\mathbf{I}^\alpha f(t)\} = \mathfrak{s}^{-\alpha} \mathbf{F}(\mathfrak{s}), \quad (\alpha > 0), \quad (2.2)$$

où  $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathbf{F}(\mathfrak{s})$ .

**Proposition 2.1** Si  $f$  une fonction est continue et intégrable, alors

$$\mathbf{I}^\alpha [\mathbf{I}^\beta f(t)] = \mathbf{I}^{\alpha+\beta} f(t). \quad (2.3)$$

Où  $\alpha, \beta > 0$ .

#### Preuve.

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^\alpha [\mathbf{I}^\beta f(t)] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \mathbf{I}^\beta f(\tau) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} \left[ \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^\tau (\tau - u)^{\beta-1} f(u) du \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Alors

$$\mathbf{I}_{a,t}^{\alpha} \left[ \mathbf{I}_{a,t}^{\beta} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^{\tau} (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-u)^{\beta-1} f(u) \, dud\tau, \quad (2.5)$$

on a

$$\begin{aligned} a &< u < \tau, \\ a &< \tau < t, \end{aligned}$$

alors

$$a < u < \tau < t.$$

Il résulte d'après le théorème de Fubini

$$\mathbf{I}^{\alpha} \left[ \mathbf{I}^{\beta} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) \int_u^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-u)^{\beta-1} d\tau du. \quad (2.6)$$

On fait le changement de variable suivant

$$s = \frac{\tau-u}{t-u}, \quad \tau = (t-u)s + u, \quad \text{d'où} \quad d\tau = (t-u) ds.$$

On obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^{\alpha} \left[ \mathbf{I}^{\beta} f(t) \right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) \int_0^1 (t-(t-u)s-u)^{\alpha-1} ((t-u)s)^{\beta-1} (t-u) ds du, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) \int_0^1 ((t-u)-(t-u)s)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta} s^{\beta-1} ds du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) \int_0^1 (t-u)^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} (t-u)^{\beta} s^{\beta-1} ds du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) \int_0^1 (t-u)^{\alpha+\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) (t-u)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds du. \end{aligned}$$

Comme

$$\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{\beta-1} ds = \beta(\alpha, \beta). \quad (2.7)$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I}^\alpha [\mathbf{I}^\beta f(t)] &= \frac{\beta(\alpha, \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) (t-u)^{\alpha+\beta-1} du \\
 &= \frac{\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(u) (t-u)^{\alpha+\beta-1} du \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(u) (t-u)^{\alpha+\beta-1} du \\
 &= \mathbf{I}^{\alpha+\beta} f(t).
 \end{aligned}$$

■

### 2.1.2 Dérivée fractionnaire au sens de Caputo

[40] La définition de l'intégrale fractionnaire du type Riemann-Liouville jouent un rôle important dans le développement de la théorie de dérivées fractionnaires et intégrales et son application en mathématiques pures ( solution d'équations différentielles pour des ordre entier, définitions de nouvelles classes des fonctions, sommation des séries, ...).

Mais, aux exigences de technologie moderne, exigerait certaines révision bien établis pour une approche purement mathématique. Ont apparu plusieurs œuvres, surtout dans la théorie de visco-élasticité et dans la mécanique des solides héréditaire, où les dérivées fractionnaires sont utilisés pour une meilleure description de les propriétés des matériaux. La modélisation mathématique basée sur amélioré les modèles rhéologiques naturellement mène à des équations différentielles d'ordre fractionnaires et à la nécessité de la formulation des conditions initiales à telles équations. Problèmes appliqués exigent de définir des dérivées fractionnaires permettant l'utilisation des conditions initiales interprétables physiquement, qui contiennent  $f(a), f'(a), \dots$

Malheureusement, l'approche de Riemann-Liouville conduit à des conditions initiales contenant les valeurs limites des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville au terminus inférieur  $t = a$ , par exemple

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{I}^{\alpha-1} f(t) &= b_1, \\
 \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{I}^{\alpha-2} f(t) &= b_2, \\
 &\vdots \\
 \lim_{t \rightarrow a} \mathbf{I}^{\alpha-n} f(t) &= b_n,
 \end{aligned}$$

où,  $b_i$  sont données constante,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

malgré le fait que les problèmes de valeur initiale avec telles conditions initiales peut être résolu mathématiquement avec succès, leurs solutions sont pratiquement inutile, parce que on ne connaît aucun interprétation physique pour ces types des conditions initiales.

Nous constatons ici des différends entre le bien établi et la théorie mathématique poli et besoins pratiques.

Une certaine solution à ce conflit a été proposé par M. Caputo premièrement dans son document [41] et deux ans plus tard dans son livre [42]

**Définition 2.2** [40] On définit la dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Caputo de la fonction  $f$  par

$${}^C \mathbf{D}_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad (2.8)$$

où  $n$  un entier et  $0 < n - 1 < \alpha < n$ .

D'une autre façon

$${}^C \mathbf{D}_t^\alpha f(t) = \mathbf{I}_t^{n-\alpha} \left( \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{d}{dt} \dots \frac{d}{dt}}_n f(t) \right). \quad (2.9)$$

**Corollaire 2.1** Pour  $\alpha \rightarrow n$  la dérivée de Caputo devient la dérivée  $n$ -ième classique de la fonction  $f(t)$ .

**Preuve.**

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C \mathbf{D}_t^\alpha f(t) = \lim_{\alpha \rightarrow n} \left( \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau \right). \quad (2.10)$$

En intégrant par partie on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C \mathbf{D}_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left[ \frac{-1}{n - \alpha} f^{(n)}(\tau) (t - \tau)^{n-\alpha} \Big|_a^t + \frac{1}{n - \alpha} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right], \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left[ \frac{1}{n - \alpha} f^{(n)}(a) (t - a)^{n-\alpha} + \frac{1}{n - \alpha} \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right], \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha) (n - \alpha)} \left[ f^{(n)}(a) (t - a)^{n-\alpha} + \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \frac{1}{\Gamma(n - \alpha + 1)} \left[ f^{(n)}(a) (t - a)^{n-\alpha} + \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right], \\
 &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau, \\
 &= f^{(n)}(a) + f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) = f^{(n)}(t),
 \end{aligned}$$

■

### Propriétés

(i)  ${}^C D_t^\alpha ({}^C D_t^m f(t)) = {}^C D_t^m ({}^C D_t^\alpha f(t)) = {}^C D_t^{\alpha+m} f(t).$

(ii) De même à la différentiation d'ordre entier, la différentiation fractionnaire est une opération linéaire

$${}^C D_t^\alpha [\lambda f(t) + \mu g(t)] = \lambda {}^C D_t^\alpha f(t) + \mu {}^C D_t^\alpha g(t). \quad (2.11)$$

(iii)  ${}^C D_t^\alpha [I^\alpha f(t)] = f(t)$  et  $I^\alpha [{}^C D_t^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!}.$

(iv) La transformée de Laplace de la dérivée de Caputo c'est

$$\mathcal{L} \{ {}^C D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad (2.12)$$

tel que  $F(s) = \mathcal{L} \{ f(t) \}.$  et  $(n - 1 < \alpha < n).$

## 2.2 Stabilité des systèmes fractionnaires

### 2.2.1 Stabilité des systèmes linéaires

Nous considérons le système linéaire des équations différentielles fractionnaires suivant

$${}^C D_t^{\tilde{\alpha}} x(t) = Ax(t), \quad (2.13)$$

où  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ , la matrice  $A \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ , et

$${}^C D_t^{\tilde{\alpha}} x(t) = [{}^C D_t^{\alpha_1} x_1(t), {}^C D_t^{\alpha_2} x_2(t), \dots, {}^C D_t^{\alpha_n} x_n(t)]^T,$$

où  $0 < \alpha_i \leq 1$  pour  $i = \overline{1..n}.$

**Théorème 2.1** [43] Nous aborderons le cas où  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ , le système (2.13) est asymptotiquement stable si et seulement si  $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{\alpha\pi}{2}.$

Les Figures 2.1 et 2.2 montrent les régions de stabilité.

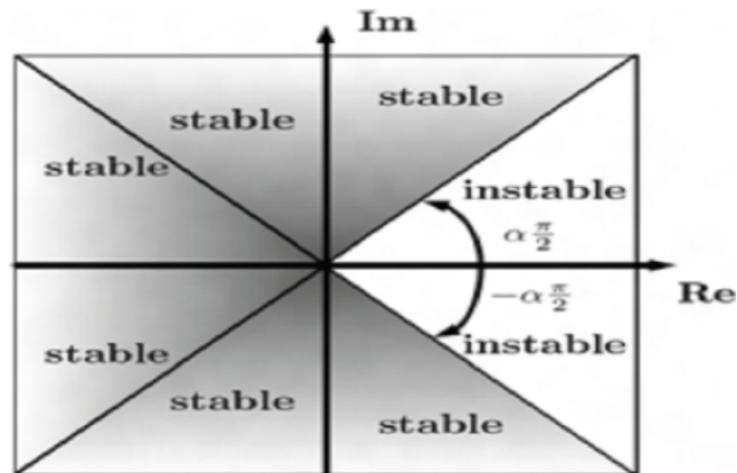


FIG. 2.1 – Région de stabilité d'un système d'équations différentielles fractionnaires linéaire d'ordre  $\alpha \in (0, 1)$

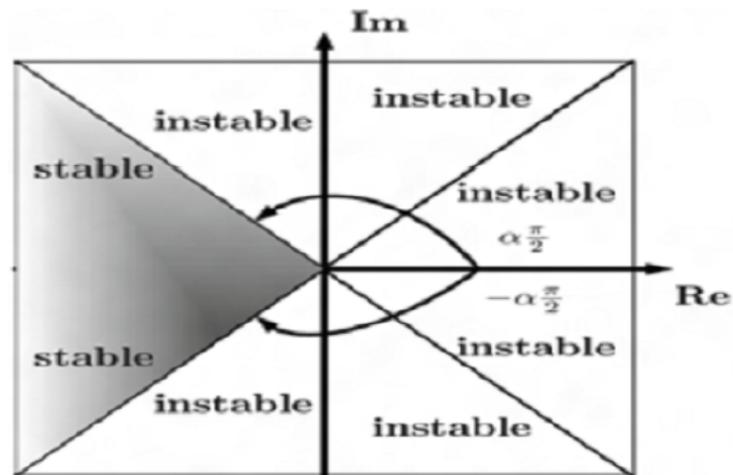


FIG. 2.2 – Région de stabilité d'un système d'équations différentielles fractionnaires linéaire d'ordre  $\alpha \in (1, 2)$

**Exemple 2.1** Traitons le système suivant

$$\begin{cases} {}^C D_t^{0.7} x_1(t) = -4x_1(t) - 3x_2(t), \\ {}^C D_t^{0.7} x_2(t) = -x_2(t), \end{cases} \quad (2.14)$$

alors notre matrice à étudier écrit comme suit

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $A$

$$\lambda_1 = -4 = 4(\cos(\pi) + i \sin(\pi)), \text{ et } \lambda_2 = -1 = \cos(\pi) + i \sin(\pi),$$

donc

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arg(4(\cos(\pi) + i \sin(\pi)))| = |\arg(\lambda_2)| = \pi > \frac{0.7\pi}{2}.$$

Alors on conclure d'après Théorème 2.1 le système (2.14) est asymptotiquement stable.

**Théorème 2.2** [43] Supposer que  $\alpha_1 \neq \alpha_2 \neq \dots \neq \alpha_n$  et  $0 < \alpha_i < 1$ .  $M$  est le plus petit multiple commun des dénominateurs de  $u_i$  de  $\alpha_i$  où  $\alpha_i = \frac{v_i}{u_i}$ ,  $u_i, v_i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , et mettre  $v = \frac{1}{M}$ . Alors la solution triviale de système (2.13) est asymptotiquement stable si et seulement si tout les racines du polynôme

$$\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - A),$$

satisfait  $|\arg(\text{spec}(A))| > \frac{v\pi}{2}$ .

**Exemple 2.2** Traitons le système suivant

$$\begin{cases} {}^C\mathbf{D}_t^{\frac{1}{2}} x_1(t) = -4x_1(t) - 3x_2(t), \\ {}^C\mathbf{D}_t^{\frac{1}{4}} x_2(t) = -x_2(t). \end{cases} \quad (2.15)$$

La matrice  $A$

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas le plus petit multiple commun entre 2 et 4 c'est  $M = 8$  alors

$$\det \begin{bmatrix} \lambda^4 + 4 & 3 \\ 0 & \lambda^2 + 1 \end{bmatrix} = 0,$$

les racines du polynôme caractéristique sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ \lambda_2 = -i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \\ \lambda_3 = 1 + i = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right), \\ \lambda_4 = -1 - i = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right), \\ \lambda_5 = -1 + i = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right), \\ \lambda_6 = 1 - i = \sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right). \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned}
 |\arg(\lambda_1)| &= \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{16}, \\
 |\arg(\lambda_2)| &= \frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{16}, \\
 |\arg(\lambda_3)| &= \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{16}, \\
 |\arg(\lambda_4)| &= \frac{5\pi}{3} > \frac{\pi}{16}, \\
 |\arg(\lambda_5)| &= \frac{3\pi}{4} > \frac{\pi}{16}, \\
 |\arg(\lambda_6)| &= \frac{7\pi}{4} > \frac{\pi}{16}.
 \end{aligned}$$

Le Théorème 2.2 est satisfait donc le système (2.15) est asymptotiquement stable.

## 2.2.2 Stabilité des systèmes non linéaires

Définissons un système des équations différentielles fractionnaires non linéaire comme suit

$${}^C \mathbf{D}_t^{\tilde{\alpha}} x(t) = f(x(t)), \quad (2.16)$$

avec  $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{\alpha} = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$ ,

${}^C \mathbf{D}_t^{\tilde{\alpha}} x(t) = [{}^C \mathbf{D}_t^{\alpha_1} x_1(t), {}^C \mathbf{D}_t^{\alpha_2} x_2(t), \dots, {}^C \mathbf{D}_t^{\alpha_n} x_n(t)]^T$  et  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , telle que  $f \in \mathcal{C}^2$ .

**Remarque 2.1** Le vecteur constant  $x_{eq}$  est un point d'équilibre du système différentiel fractionnaire (2.16) si et seulement si  $f(x_{eq}) = {}^C \mathbf{D}_t^{\alpha} x(t) \big|_{x(t)=x_{eq}}$ .

Sans perte de généralité, que le point d'équilibre soit  $x_{eq} = 0$ .

**Théorème 2.3** [44] Dans le cas où  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ , alors le point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (2.16) est asymptotiquement stable si et seulement si

$$|\arg(\text{spec}(Jf(0)))| > \frac{\alpha\pi}{2}.$$

**Exemple 2.3** Soit le système non linéaire des équations différentielles fractionnaires suivant

$$\begin{cases}
 {}^C \mathbf{D}_t^{\frac{1}{2}} x_1(t) = f_1(x(t)), \\
 {}^C \mathbf{D}_t^{\frac{1}{2}} x_2(t) = f_2(x(t)),
 \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\text{où } f(x(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_2(t) - x_1(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t) - 1) \\ x_1(t) - x_2(t)(x_1^2(t) - x_2^2(t) - 1) \end{bmatrix}.$$

La matrice jacobienne de  $f$  est

$$Jf(x(t)) = \begin{bmatrix} -3x_1^2(t) - x_2^2(t) + 1 & -4 - 2x_1(t)x_2(t) \\ 1 - 2x_1(t)x_2(t) & -x_1^2(t) + 3x_2^2(t) + 1 \end{bmatrix},$$

le point d'équilibre  $x_{eq} = (0,0)$  alors

$$Jf(0) = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

D'où les valeurs propres de la matrice  $Jf(0)$  sont  $\lambda_1 = 1 + 2i = \sqrt{5}(\cos(\arctan 2) + i \sin(\arctan 2))$  et  $\lambda_2 = 1 - 2i = \sqrt{5}(\cos(\arctan 2) - i \sin(\arctan 2))$ . Maintenant, allons vérifier la stabilité

$$|\arg(\lambda_1)| = |\arg(\lambda_2)| = \arctan 2 > \frac{\pi}{14}.$$

Donc le point d'équilibre  $x_{eq} = (0,0)$  est asymptotiquement stable.

**Théorème 2.4** [45] Si  $\alpha_i$  sont différents nombres rationnels, alors le point d'équilibre  $x_{eq}$  du système (2.16) est asymptotiquement stable toutes les racines  $\lambda$  de l'équation

$$\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - Jf(0)) = 0,$$

satisfait  $|\arg(\lambda)| > \frac{v\pi}{2}$ .

Où  $v = \frac{1}{M}$ , tel que  $M$  est le plus petit multiple commun des dénominateurs de  $\alpha_i$  où  $\alpha_i = \frac{v_i}{u_i}$ ,  $u_i, v_i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Exemple 2.4** Soit le système non linéaire des équations différentielles fractionnaires suivant

$$\begin{cases} {}^C D_t^{\frac{1}{3}} x_1(t) = f_1(x(t)), \\ {}^C D_t^{\frac{1}{2}} x_2(t) = f_2(x(t)), \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\text{où } f(x(t)) = \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) - x_2(t)(x_1^2(t) - x_2^2(t)) \\ 4x_2(t) - x_1(t)(x_1^2(t) + x_2^2(t)) \end{bmatrix}.$$

La matrice jacobienne de  $f$  est

$$Jf(x(t)) = \begin{bmatrix} 1 - 2x_1(t)x_2(t) & 3x_2^2(t) - x_1^2(t) \\ -3x_1^2(t) - x_2^2(t) & 4 - 2x_1(t)x_2(t) \end{bmatrix}.$$

Alors

$$Jf(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

dans ce cas le plus petit multiple commun entre 3 et 2 c'est  $M = 6$  alors

$$\det \begin{bmatrix} \lambda^2 + 1 & 0 \\ 0 & \lambda^3 + 4 \end{bmatrix} = 0 \iff (\lambda^2 + 1)(\lambda^3 + 4) = 0.$$

Les racines de l'équation sont

$$\begin{cases} \lambda_1 = i = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \\ \lambda_2 = -i = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \\ \lambda_3 = -4 = 4(\cos(\pi) + i \sin(\pi)), \\ \lambda_4 = 2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) = 2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right), \\ \lambda_5 = 2^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i\right) = 2^{\frac{2}{3}}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right). \end{cases}$$

Vérifions la condition du Théorème 2.4

$$\begin{aligned} |\arg(\lambda_1)| &= \frac{\pi}{2} > \frac{\nu\pi}{2} = \frac{\pi}{12}, \\ |\arg(\lambda_2)| &= \frac{3\pi}{2} > \frac{\pi}{12}, \\ |\arg(\lambda_3)| &= \pi > \frac{\pi}{12}, \\ |\arg(\lambda_4)| &= \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{12}, \\ |\arg(\lambda_5)| &= \frac{5\pi}{3} > \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

On conclure d'après Théorème 2.4 que  $x_{eq}$  est asymptotiquement stable.

### 2.2.3 Méthode directe de Lyapunov pour les systèmes fractionnaires

Soit le système des équations différentielles fractionnaires suivant

$${}^C \mathbf{D}_t^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (2.19)$$

où  $x(t) = [x(t)_1, x(t)_2, \dots, x(t)_n]$ , et  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

**Théorème 2.5** [46] *S'il existe une fonction de Lyapunov définie positive  $V(x(t))$  telle que  ${}^C \mathbf{D}_t^\alpha V(x(t)) \leq -\Theta(V(x(t)))$ , où  $\Theta \in \mathcal{K}$ , alors la solution triviale de système (2.19) est asymptotiquement stable.*

*De plus, une fonction  $\Psi(z)$  dit-on appartenir à la classe  $\mathcal{K}$  si et seulement si  $\Psi \in \mathcal{C}[[0, r), \mathbb{R}_+]$ ,  $r$  est un nombre réel positif,  $\Psi(0) = 0$  et  $\Psi(z)$  est strictement croissante monotone.*

**Théorème 2.6** [46] *S'il existe une fonction de Lyapunov définie positive  $V(x(t))$  telle que  ${}^C \mathbf{D}_t^\alpha V(x(t)) < 0$ , alors la solution triviale de système (2.19) est asymptotiquement stable.*

**Lemme 2.1** [47] Pour tout instant  $t \geq t_0$

$$\frac{1}{2} {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x^2(t) \leq x(t) {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x(t) \quad \forall \alpha \in (0, 1) \quad (2.20)$$

**Preuve.** [47] Pour démontrer que l'expression (2.20) est vrai, équivaut de prouver que

$$x(t) {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x(t) - \frac{1}{2} {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x^2(t) \geq 0. \quad (2.21)$$

Utilisons (2.8)

$${}^C\mathbf{D}_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{\dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}. \quad (2.22)$$

$$x(t) {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(t) \dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}. \quad (2.23)$$

Et de la même manière

$$\frac{1}{2} {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x^2(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha}. \quad (2.24)$$

Ainsi, l'expression (2.21) devient

$$\begin{aligned} x(t) {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x(t) - \frac{1}{2} {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x^2(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(t) \dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \\ &\quad - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{x(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left[ \int_{t_0}^t \frac{x(t) \dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} - \int_{t_0}^t \frac{x(\tau) \dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{[x(t) - x(\tau)] \dot{x}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \geq 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Définissons la variable  $y(\tau) = x(t) - x(\tau)$ , ce qui implique que  $\dot{y}(\tau) = \frac{dy(\tau)}{d\tau} = -\frac{dx(\tau)}{d\tau}$ . De cette façon, l'expression (2.21) peut être écrite comme suit

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y(\tau) \dot{y}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\alpha} \leq 0. \quad (2.26)$$

Intégrons par partie l'expression (2.26)

$$\begin{aligned} du &= y(\tau) \dot{y}(\tau) & u &= \frac{1}{2} y^2 \\ v &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} (t-\tau)^{-\alpha} & dv &= \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} (t-\tau)^{-\alpha-1} \end{aligned}$$

De cette façon, l'expression (2.26) peut être écrite comme suit

$$\left[ \frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} \right] \Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t} - \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}} \leq 0. \quad (2.27)$$

Multipliant Les deux extrémités de l'inégalité (2.27) par  $(-1)$

$$- \left[ \frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} \right] \Big|_{\tau=t_0}^{\tau=t} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}} \geq 0.$$

$$- \left[ \frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} \right] \Big|_{\tau=t} + \left[ \frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} \right] + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}} \geq 0. \quad (2.28)$$

Vérifions le premier terme de l'expression (2.28), qui a une telle indétermination en  $\tau = t$ , alors laissez-nous analyser la limite correspondante

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{y^2(\tau)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-\tau)^\alpha} = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[x(t) - x(\tau)]^2}{(t-\tau)^\alpha} = \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[x^2(t) - 2x(t)x(\tau) + x^2(\tau)]}{(t-\tau)^\alpha}.$$

Étant donné que la fonction est dérivable, La règle de L'Hôpital peut être appliqué ( car il résulte  $\frac{0}{0}$  ). Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[x^2(t) - 2x(t)x(\tau) + x^2(\tau)]}{(t-\tau)^\alpha} &= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[-2x(t)\dot{x}(\tau) + 2x(\tau)\dot{x}(\tau)]}{-\alpha(t-\tau)^{\alpha-1}} \\ &= \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\tau \rightarrow t} \frac{[2x(t)\dot{x}(\tau) - 2x(\tau)\dot{x}(\tau)](t-\tau)^{1-\alpha}}{-\alpha} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme  $y^2(t_0) \geq 0$ ,  $(t-t_0)^\alpha \geq 0$  et  $\Gamma(1-\alpha) \geq 0$  et  $\frac{y^2(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1}} \geq 0$ . Alors, l'expression (2.28) est réduite à

$$\frac{y^2(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^\alpha} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{y^2(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}} \geq 0 \quad (2.29)$$

L'expression (2.20) est clairement vrai, et ce conclut la preuve. ■

**Exemple 2.5** Soit le système non linéaire des équations différentielles fractionnaires suivant

$$\begin{cases} {}^C \mathbf{D}_t^\alpha x_1(t) = -x_1(t) + x_2^3(t), \\ {}^C \mathbf{D}_t^\alpha x_2(t) = -x_1(t) - x_2(t), \end{cases} \quad (2.30)$$

où  $0 < \alpha < 1$ ,  $x(t) = [x_1(t), x_2(t)]$ .

Nous avons établi une fonction de Lyapunov

$$V(x(t)) = \frac{1}{2}x_1^2(t) + \frac{1}{4}x_2^4(t).$$

La dérivée au sens fractionnaire de la fonction de Lyapunov donné par

$${}^C\mathbf{D}_t^\alpha V(x(t)) = \frac{1}{2} {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x_1^2(t) + \frac{1}{4} {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x_2^4(t).$$

Nous appliquons le Lemme 2.1

$$\begin{aligned} {}^C\mathbf{D}_t^\alpha V(x(t)) &\leq x_1(t) {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x_1(t) + \frac{1}{2} {}^C\mathbf{D}_t^\alpha \frac{1}{2}x_2^4(t) \\ &= x_1(t) {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x_1(t) + \frac{1}{2} {}^C\mathbf{D}_t^\alpha \left( \frac{1}{\sqrt{2}}x_2^2(t) \right)^2 \end{aligned}$$

Appliquons le Lemme 2.1 pour la deuxième fois

$$\begin{aligned} {}^C\mathbf{D}_t^\alpha V(x(t)) &\leq x_1(t) {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2^2(t) {}^C\mathbf{D}_t^\alpha \frac{1}{\sqrt{2}}x_2^2(t) \\ &= x_1(t) {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x_1(t) + x_2^2(t) \frac{1}{2} {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x_2^2(t) \\ &= x_1(t) (-x_1(t) + x_2(t)) + x_2^3(t) {}^C\mathbf{D}_t^\alpha x_2(t) \\ &= x_1(t) (-x_1(t) + x_2^3(t)) + x_2^3(t) (-x_1(t) - x_2(t)) \\ &= -x_1^2(t) - x_2^4(t) < 0 \end{aligned}$$

Donc, d'après le Théorème 2.6, le point d'équilibre  $x_{eq} = (0,0)$  est asymptotiquement stable.

## Chapitre 3

# Synchronisation des systèmes de réaction-diffusion fractionnaires

---

Ce chapitre contient quelques types de synchronisation et la méthode du contrôleur actif, et on étudiera le problème de la synchronisation d'une classe de systèmes différentiels partiels d'ordre fractionnaire spatio-temporel, en utilisant l'approche fractionnaire de Lyapunov, des schémas de contrôle non linéaires et linéaires.

---

## 3.1 Théorie de synchronisation

### 3.1.1 Systèmes maître et esclave

Considérons le système maître suivant

$${}^C D_t^\alpha X(t) = F(X(t)), \quad (3.1)$$

tel que  $X(t) = [x_i(t)]_{1 \leq i \leq n}^T$  est le vecteur d'état du système (3.1), et  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ .

Maintenant, présentons le système esclave comme suit

$${}^C D_t^\beta Y(t) = G(Y(t)) + U, \quad (3.2)$$

où  $Y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)]^T$  est le vecteur d'état du système (3.2), et  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $0 < \beta \leq 1$ , et pour  $U$  est le vecteur contrôle appartient à  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.1.2 Types de synchronisation

#### 1- Synchronisation complète

**Définition 3.1** [49] *Le problème de synchronisation complète est de déterminer le contrôleur  $U$  tel que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0. \quad (3.3)$$

**Remarque 3.1** *Si  $F = G$ , la relation devient une synchronisation complète identique.*

**Remarque 3.2** *Si  $F \neq G$ , c'est une synchronisation complète non identique.*

#### 2- Anti-Synchronisation

**Définition 3.2** [50] *On dit que deux systèmes sont en anti-synchronisation, si le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue, mais avec signes opposés, et la somme de ces vecteurs d'état de deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Alors, le problème d'anti-synchronisation est de trouver  $U$  tel que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) + X(t)\| = 0. \quad (3.4)$$

### 3- Synchronisation projective

**Définition 3.3** [51] On dit qu'on a une synchronisation projective ( notée par PS en anglais : **Projective Synchronization** ) entre les systèmes (3.1) et (3.2), s'il existe une matrice diagonale  $H = \text{diag} [h_1, \dots, h_n]$ , tels que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - H \times X(t)\| = 0. \quad (3.5)$$

**Remarque 3.3** Le cas où tous les  $h_i$  sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète.

**Remarque 3.4** Le cas où tous les  $h_i$  sont égaux à  $-1$  représente un cas d'anti-synchronisation.

### 4- Synchronisation généralisée

**Définition 3.4** [52] En comparaison avec la synchronisation identique, la synchronisation généralisée notée par GS (en anglais : **Generalized Synchronization**) peut donner une dynamique plus riche, car elle peut aussi envisager certains cas désynchronisés, dus aux disparités des paramètres, aux déformations des canaux de transmission et autres. En conséquence, les possibilités d'appliquer la GS peuvent être plus larges que la synchronisation identique.

Pour définir la GS, on a le système maître (3.1) et le système esclave donné dans (3.2).

S'il existe un contrôleur  $U$  et une fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , vérifient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - \phi(X(t))\| = 0. \quad (3.6)$$

Alors, les systèmes (3.1) et (3.2) se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction  $\phi$ .

**Remarque 3.5** La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective.

**Remarque 3.6** Si la fonction  $\phi$  est définie par  $\phi(X(t)) = \Lambda X(t)$  tel que  $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{n \times n}$ , on dit qu'on a une synchronisation **full-state hybrid projective** [53].

### 5- Synchronisation inverse généralisée

**Définition 3.5** [54] S'il existe un contrôleur  $U$  et une fonction  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , vérifient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - \varphi(Y(t))\| = 0, \quad (3.7)$$

alors, les systèmes (3.1) et (3.2) se synchronisent au sens inverse généralisé par rapport à la fonction  $\varphi$ .

**Remarque 3.7** Si la fonction  $\varphi$  est définie par  $\varphi(Y(t)) = \theta Y(t)$  tel que  $\theta = (\theta_{ij})_{n \times n}$ , on dit qu'on a une synchronisation **inverse full-state hybrid projective** [55].

## 6- Synchronisation Q-S

**Définition 3.6** [56] Nous disons qu'un système maître (3.1)  $n$ -dimensionnelle et un système esclave (3.2)  $m$ -dimensionnelle, sont en synchronisation  $Q - S$  dans la dimension  $d$ , s'il existe un contrôleur  $U$  et deux fonctions  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Q(X(t)) - S(Y(t))\| = 0. \quad (3.8)$$

**Remarque 3.8** La synchronisation  $Q-S$  est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes.

### 3.1.3 Méthode du contrôleur actif

La méthode du contrôleur actif est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques avec des dimensions différentes [57, 58]. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme.

Soit deux systèmes à synchroniser, maître et esclave, définis par

$${}^C D_t^p X(t) = F(X(t)), \quad (3.9)$$

et

$${}^C D_t^p Y(t) = G(Y(t)) + U, \quad (3.10)$$

où  $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^n$  sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement,  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $0 < p \leq 1$ , et  $U = [u_i]_{1 \leq i \leq n}$  est un contrôleur à déterminer.

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Cette erreur est obtenue comme suit

$$e(t) = Y(t) - X(t), \quad (3.11)$$

alors

$$\begin{aligned} {}^C D_t^p e(t) &= {}^C D_t^p Y(t) - {}^C D_t^p X(t) \\ &= G(Y(t)) - F(X(t)) + U. \end{aligned}$$

Si on peut écrire la quantité  $G(Y(t)) - F(X(t))$  de la façon suivante

$$G(Y(t)) - F(X(t)) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)), \quad (3.12)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit

$${}^C D_t^p e(t) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U, \quad (3.13)$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante et  $N$  une fonction non linéaire. Le contrôleur  $U$  est proposé comme suit

$$U = \mathbf{C} - N(X(t), Y(t)), \quad (3.14)$$

donc  $\mathbf{C}$  est le **contrôleur actif**, défini par

$$\mathbf{C} = -Le(t), \quad (3.15)$$

où  $L$  est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur

$${}^C D_t^p e(t) = (A - L) e(t). \quad (3.16)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (3.9) et le système esclave (3.10) est transformé en problème de zéro-stabilité du système (3.14).

Maintenant le Théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires continus.

**Théorème 3.1** [59] *Le système maître (3.9) et le système esclave (3.10) sont globalement synchronisés sous la loi de contrôle (3.14) si et seulement si la matrice de contrôle  $L$  est choisie telles que les valeurs propres de  $(A - L)$  se trouvant à l'intérieur du disque de l'unité.*

## 3.2 Résultats de synchronisation

Considérez les systèmes maître et esclave comme suit

$$\begin{cases} {}^C \mathbf{D}_t^\alpha u_1 = \sum_{j=1}^2 d_{1j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 a_{1j} u_j + f_1(u_1, u_2), \\ {}^C \mathbf{D}_t^\alpha u_2 = \sum_{j=1}^2 d_{2j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 a_{2j} u_j + f_2(u_1, u_2), \end{cases} \quad (3.17)$$

et

$$\begin{cases} {}^C \mathbf{D}_t^\alpha v_1 = \sum_{j=1}^2 d_{1j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 a_{1j} v_j + f_1(v_1, v_2) + U_1, \\ {}^C \mathbf{D}_t^\alpha v_2 = \sum_{j=1}^2 d_{2j} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 a_{2j} v_j + f_2(v_1, v_2) + U_2, \end{cases} \quad (3.18)$$

où  $[u_1(x, t), u_2(x, t)]^T$  et  $[v_1(x, t), v_2(x, t)]^T$  sont les états correspondants,  $x \in \Omega$  est un domaine borné dans  $\mathbb{R}^n$  avec frontière régulière  $\partial\Omega$ ,  $(d_{ij}) \in \mathbb{R}^2$ ,  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f_i$ ,  $i = 1, 2$ , sont des fonctions continues non linéaires,  $U_1$  et  $U_2$  sont des contrôleurs à concevoir. Le but du processus de synchronisation est de forcer l'erreur entre le système maître (3.17) et le système esclave (3.18) à zéro. Défini comme

$$\begin{cases} e_1 = v_1 - u_1, \\ e_2 = v_2 - u_2, \end{cases} \quad (3.19)$$

Nous obtenons la synchronisation complète. Nous supposons que les constantes diffusives  $(d_{ij})$  satisfont

$$d_{11}, d_{22} \geq 0 \quad \text{et} \quad d_{12} + d_{21} = 0, \quad (3.20)$$

et le système d'erreur satisfait les conditions aux limites homogènes de Neumann

$$\frac{\partial e_1}{\partial \eta} = \frac{\partial e_2}{\partial \eta} = 0 \quad \text{pour tout } x \in \partial\Omega. \quad (3.21)$$

Les dérivées partielles temporelles du système d'erreur (3.19) peuvent être dérivées comme suit

$$\begin{cases} {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e_1 = \sum_{j=1}^2 d_{1j} \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 a_{1j} e_j + f_1(v_1, v_2) - f_1(u_1, u_2) + U_1, \\ {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e_2 = \sum_{j=1}^2 d_{2j} \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 a_{2j} e_j + f_2(v_1, v_2) - f_2(u_1, u_2) + U_2. \end{cases} \quad (3.22)$$

Pour réaliser la synchronisation entre les systèmes maître et esclave (3.17) et (3.18), nous discutons de la stabilité asymptotique la solution zéro du système d'erreur donné dans (3.22). C'est-à-dire, dans les sous-sections suivantes, on trouve les contrôleurs  $U_1$  et  $U_2$  sous des formes non linéaires et linéaires, telle que la solution du système d'erreur (3.22) se rend à 0 lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

### 3.2.1 Loi de contrôle non linéaire

Dans cette sous-section, nous décrivons le problème du contrôle des systèmes maître et esclave couplés étant donné dans (3.17) et (3.18) utilisant des contrôleurs non linéaires.

**Théorème 3.2** [60] *Le système maître (3.17) et le système esclave (3.18) sont complètement synchronisés selon la loi du contrôle non linéaire suivante*

$$\begin{cases} U_1 = - \sum_{j=1}^2 c_{1j} (v_j - u_j) + f_1(u_1, u_2) - f_1(v_1, v_2), \\ U_2 = - \sum_{j=1}^2 c_{2j} (v_j - u_j) + f_2(u_1, u_2) - f_2(v_1, v_2), \end{cases} \quad (3.23)$$

où la matrice de contrôle  $C = (c_{ij})_{2 \times 2}$  est sélectionné telle que  $C - A$  est une matrice définie positive.

**Preuve.** [60] Remplacer la loi de contrôle donnée dans (3.23) en (3.22) donne

$$\begin{cases} {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e_1 = \sum_{j=1}^2 d_{1j} \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 (a_{1j} - c_{1j}) e_j, \\ {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e_2 = \sum_{j=1}^2 d_{2j} \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 (a_{2j} - c_{2j}) e_j. \end{cases} \quad (3.24)$$

Nous pouvons, maintenant, construire notre fonction Lyapunov comme

$$V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (e_1^2 + e_2^2) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 e_j^2, \quad (3.25)$$

puis

$${}^C \mathbf{D}_t^\alpha V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e_j^2, \quad (3.26)$$

et en utilisant le lemme 2.1

$$\begin{aligned} {}^C \mathbf{D}_t^\alpha V &\leq \int_{\Omega} (e_1 {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e_1 + e_2 {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e_2) \\ &= \int_{\Omega} \left[ e_1 \left( \sum_{j=1}^2 d_{1j} \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 (a_{1j} - c_{1j}) e_j \right) + e_2 \left( \sum_{j=1}^2 d_{2j} \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 (a_{2j} - c_{2j}) e_j \right) \right] \\ &= \int_{\Omega} \left[ e_1 \left( d_{11} \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} + d_{12} \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} \right) + e_1 [(a_{11} - c_{11}) e_1 + (a_{12} - c_{12}) e_2] \right. \\ &\quad \left. + e_2 \left( d_{21} \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} + d_{22} \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} \right) + e_2 [(a_{21} - c_{21}) e_1 + (a_{22} - c_{22}) e_2] \right] \\ &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^2 d_{jj} e_j \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \int_{\Omega} \left( d_{12} e_1 \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} + d_{21} e_2 \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} \right) + \int_{\Omega} e^T (A - C) e. \end{aligned}$$

En utilisant les formules de Green ( 1 et 2 ), on peut avoir

$$\begin{aligned} {}^C \mathbf{D}_t^\alpha V &\leq \sum_{j=1}^2 \int_{\partial\Omega} d_{jj} \frac{\partial e_j}{\partial \eta} e_j d\sigma - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} d_{jj} (\nabla e_j)^2 + \int_{\partial\Omega} \left( d_{12} \frac{\partial e_2}{\partial \eta} e_1 + d_{21} \frac{\partial e_1}{\partial \eta} e_2 \right) d\sigma \\ &\quad - \int_{\Omega} (d_{21} + d_{12}) \nabla e_1 \nabla e_2 + \int_{\Omega} e^T (A - C) e, \end{aligned}$$

où  $e = [e_1, e_2]^T$ , et en utilisant l'hypothèse donnée en (3.20), les conditions aux limites homogènes de Neumann (3.21), et le fait que  $C - A$  est une matrice définie positive, on obtient

$${}^C \mathbf{D}_t^\alpha V \leq - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} d_{jj} (\nabla e_j)^2 - \int_{\Omega} e^T (C - A) e < 0. \quad (3.27)$$

Du Théorème 2.6, nous pouvons conclure que la solution triviale du système d'erreur (3.22) est globalement asymptotiquement stable, et donc, le système maître (3.17) et le système esclave (3.18) sont globalement complètement synchronisés. ■

### 3.2.2 Loi de contrôle linéaire

Dans ce qui suit, une loi de contrôle linéaire est conçue pour la synchronisation des systèmes (3.17) et (3.18). Dans ce cas, nous supposons que

$$\begin{cases} |f_1(v_1, v_2) - f_1(u_1, u_2)| \leq \alpha_1 |v_1 - u_1| + \beta_1 |v_2 - u_2|, \\ |f_2(v_1, v_2) - f_2(u_1, u_2)| \leq \alpha_2 |v_1 - u_1| + \beta_2 |v_2 - u_2|, \end{cases} \quad (3.28)$$

où,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  et  $\beta_2$  sont des constantes positives.

**Théorème 3.3** [60] *Il existe une matrice de contrôle appropriée  $L = (l_{ij})_{2 \times 2}$  pour réaliser une synchronisation complète entre le système maître (3.17) et le système esclave (3.18) sous la loi de contrôle linéaire suivante*

$$\begin{aligned} U_1 &= -(\alpha_1 + 1 + l_{11})e_1 - l_{12}e_2, \\ U_2 &= -l_{21}e_1 - \left( \beta_2 + \frac{(\alpha_2 + \beta_1)^2}{4} - l_{22} \right) e_2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

**Preuve.** [60] Remplacer (3.29) en (3.22), la dynamique du système d'erreur devient

$$\begin{aligned} {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e_1 &= \sum_{j=1}^2 d_{1j} \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 (a_{1j} - l_{1j}) e_j + f_1(v_1, v_2) - f_1(u_1, u_2) - (\alpha_1 + 1) e_1, \\ {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e_2 &= \sum_{j=1}^2 d_{2j} \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 (a_{2j} - l_{2j}) e_j + f_2(v_1, v_2) - f_2(u_1, u_2) - \left( \beta_2 + \frac{(\alpha_2 + \beta_1)^2}{4} \right) e_2. \end{aligned} \quad (3.30)$$

En prenant la fonction de Lyapunov  $V = \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^T e$  et en utilisant le lemme 2.1, nous obtenons

$$\begin{aligned} {}^C \mathbf{D}_t^\alpha V &\leq \int_{\Omega} e^T {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e = \int_{\Omega} (e_1 {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e_1 + e_2 {}^C \mathbf{D}_t^\alpha e_2) \\ &= \int_{\Omega} \left[ e_1 \left( \sum_{j=1}^2 d_{1j} \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 (a_{1j} - l_{1j}) e_j + f_1(v_1, v_2) - f_1(u_1, u_2) - (\alpha_1 + 1) e_1 \right) \right. \\ &\quad \left. + e_2 \left( \sum_{j=1}^2 d_{2j} \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^2 (a_{2j} - l_{2j}) e_j + f_2(v_1, v_2) - f_2(u_1, u_2) - \left( \beta_2 + \frac{(\alpha_2 + \beta_1)^2}{4} \right) e_2 \right) \right] \\ &= \int_{\Omega} e_1 \left( d_{11} \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} + d_{12} \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} \right) + \int_{\Omega} e_2 \left( d_{21} \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} + d_{22} \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Omega} e_1 [(a_{11} - l_{11}) e_1 + (a_{12} - l_{12}) e_2] + \int_{\Omega} e_2 [(a_{21} - l_{21}) e_1 + (a_{22} - l_{22}) e_2] \\
 & + \int_{\Omega} e_1 [f_1(v_1, v_2) - f_1(u_1, u_2)] + \int_{\Omega} e_2 [f_2(v_1, v_2) - f_2(u_1, u_2)] \\
 & - \int_{\Omega} (\alpha_1 + 1) e_1^2 - \int_{\Omega} \left( \beta_2 + \frac{(\alpha_2 + \beta_1)^2}{4} \right) e_2^2 \\
 = & \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} d_{jj} \frac{\partial^2 e_j}{\partial x^2} e_j + \int_{\Omega} \left( d_{12} e_1 \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} + d_{21} e_2 \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} \right) + \int_{\Omega} e^T (A - L) e \\
 & + \int_{\Omega} (e_1 [f_1(v_1, v_2) - f_1(u_1, u_2)] + e_2 [f_2(v_1, v_2) - f_2(u_1, u_2)]) - \int_{\Omega} (\alpha_1 + 1) e_1^2 \\
 & - \int_{\Omega} \left( \beta_2 + \frac{(\alpha_2 + \beta_1)^2}{4} \right) e_2^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green ( 1 et 2 ) et l'hypothèse (3.20) et condition (3.21)

$$\begin{aligned}
 {}^C \mathbf{D}_t^{\alpha} V & \leq \sum_{j=1}^2 \int_{\partial \Omega} d_{jj} \frac{\partial e_j}{\partial \eta} e_j d\sigma - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} d_{jj} (\nabla e_j)^2 + \int_{\partial \Omega} \left( d_{12} \frac{\partial e_2}{\partial \eta} e_1 + d_{21} \frac{\partial e_1}{\partial \eta} e_2 \right) d\sigma \\
 & - \int_{\Omega} (d_{21} + d_{12}) \nabla e_1 \nabla e_2 + \int_{\Omega} e^T (A - L) e \\
 & + \int_{\Omega} (e_1 [f_1(v_1, v_2) - f_1(u_1, u_2)] + e_2 [f_2(v_1, v_2) - f_2(u_1, u_2)]) \\
 & - \int_{\Omega} \left[ (\alpha_1 + 1) e_1^2 - \left( \beta_2 + \frac{(\alpha_2 + \beta_1)^2}{4} \right) e_2^2 \right], \\
 = & - \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} d_{jj} (\nabla e_j)^2 + \int_{\Omega} e^T (A - L) e \\
 & + \int_{\Omega} (e_1 [f_1(v_1, v_2) - f_1(u_1, u_2)] + e_2 [f_2(v_1, v_2) - f_2(u_1, u_2)]) \\
 & - \int_{\Omega} \left[ (\alpha_1 + 1) e_1^2 + \left( \beta_2 + \frac{(\alpha_2 + \beta_1)^2}{4} \right) e_2^2 \right].
 \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (3.28), on obtient

$$\begin{aligned}
 {}^C \mathbf{D}_t^\alpha V &\leq -\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} d_{jj} (\nabla e_j)^2 + \int_{\Omega} e^T (A - L) e \\
 &\quad + \int_{\Omega} [|e_1| |f_1(v_1, v_2) - f_1(u_1, u_2)| + |e_2| |f_2(v_1, v_2) - f_2(u_1, u_2)| \\
 &\quad - (\alpha_1 + 1) e_1^2 - \left( \beta_2 + \frac{(\alpha_2 + \beta_1)^2}{4} \right) e_2^2] \\
 &\leq -\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} d_{jj} (\nabla e_j)^2 + \int_{\Omega} e^T (A - L) e \\
 &\quad + \int_{\Omega} \left[ \alpha_1 e_1^2 + \beta_1 |e_1| |e_2| + \alpha_2 |e_2| |e_1| + \beta_2 e_2^2 - (\alpha_1 + 1) e_1^2 - \left( \beta_2 + \frac{(\alpha_2 + \beta_1)^2}{4} \right) e_2^2 \right], \\
 &= -\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} d_{jj} (\nabla e_j)^2 + \int_{\Omega} e^T (A - L) e - \int_{\Omega} \left[ e_1^2 - (\beta_1 + \alpha_2) |e_1| |e_2| + \left( \frac{(\alpha_2 + \beta_1)^2}{2} \right) e_2^2 \right] \\
 &= -\sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} d_{jj} (\nabla e_j)^2 - \int_{\Omega} e^T (L - A) e - \int_{\Omega} \left( |e_1| - \left( \frac{(\alpha_2 + \beta_1)}{2} \right) |e_2| \right)^2.
 \end{aligned}$$

La matrice de contrôle  $L$  est choisie telle que  $A - L$  est une matrice définie négative. Maintenant, nous pouvons conclure que le système maître (3.17) et le système esclave (3.18) sont globalement complètement synchronisés. ■

### 3.3 Applications numériques

Dans cette section, nous donnons un exemple numérique montrant l'efficacité et l'exactitude de nos résultats. Considérez la paire suivante de système maître-esclave

$$\begin{cases}
 {}^C \mathbf{D}_t^\alpha u_1(t, x) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 5\gamma - u_1 - \frac{4u_1 u_2}{1+u_1^2}, \\
 {}^C \mathbf{D}_t^\alpha u_2(t, x) = \delta \left( d \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + u_1 - \frac{u_1 u_2}{1+u_1^2} \right),
 \end{cases} \quad (3.31)$$

et

$$\begin{cases}
 {}^C \mathbf{D}_t^\alpha v_1(t, x) = \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + 5\gamma - v_1 - \frac{4v_1 v_2}{1+v_1^2} + U_1, \\
 {}^C \mathbf{D}_t^\alpha v_2(t, x) = \delta \left( d \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + v_1 - \frac{v_1 v_2}{1+v_1^2} \right) + U_2,
 \end{cases} \quad (3.32)$$

où  $t > 0$ ,  $x \in [0, 13.3]$ , et  $[U_1, U_2]^T$  est la loi de contrôle à déterminer. Système (3.31) (c'est-à-dire, le système non contrôlé (3.32)) est appelé le système de Lengyel-Epstein d'ordre fractionnaire.

Quand  $\alpha = 0.97$ ,  $[\delta, \gamma, d] = [9.7607, 2.7034, 1.75]$ , et les conditions initiales associées au système (3.31) sont donnés par  $[u_1(0, x), u_2(0, x)] = [\theta + 0.2 \cos(5\pi x), 1 + \theta^2 + 0.6 \cos(5\pi x)]$ , les solutions sont présentées dans les Figures 3.1 et 3.2.

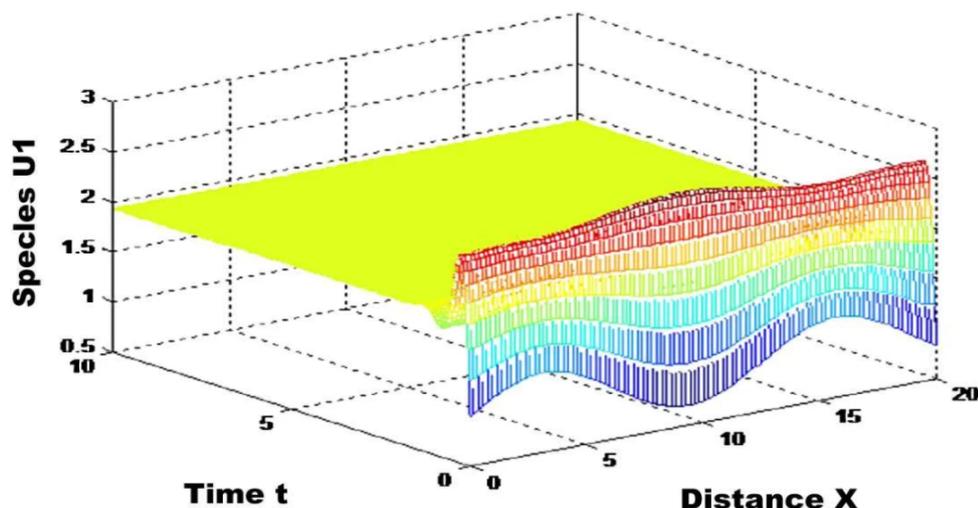


FIG. 3.1 – Comportement dynamique de la solution  $u_1$

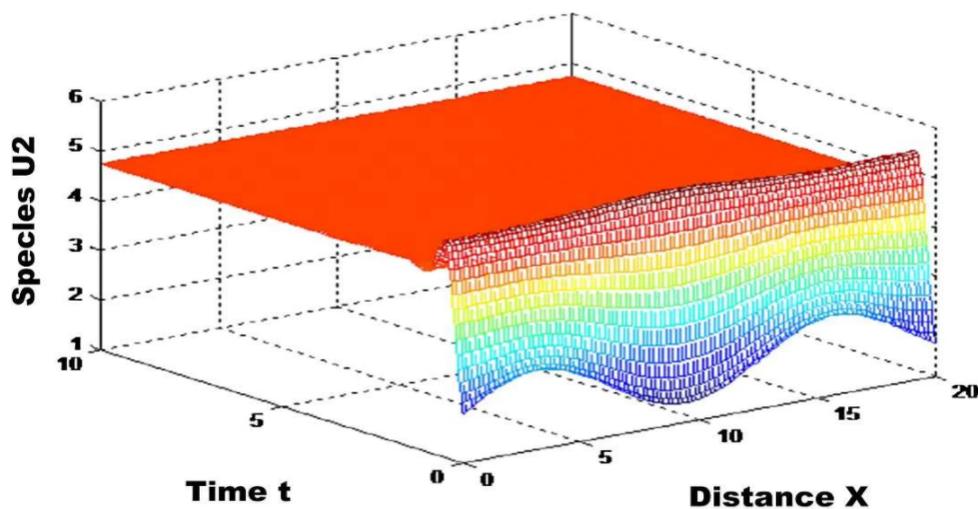


FIG. 3.2 – Comportement dynamique de la solution  $u_2$

Comparaison avec les systèmes maître-esclave donnés dans (3.31) et (3.32), puis les constantes  $(d_{ij})_{2 \times 2}$  et  $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$  donné par

$$(d_{ij})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta d \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

et

$$A = (a_{ij})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \delta & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Il est clair que l'hypothèse (3.28) est satisfaite.

### 3.3.1 Cas non linéaires

Selon le théorème 3.2, il existe une matrice de contrôle  $C$  dont la synchronisation complète peut être réalisée entre les systèmes (3.31) et (3.32). La matrice  $C$  peut être sélectionnée comme

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \delta & 3 \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

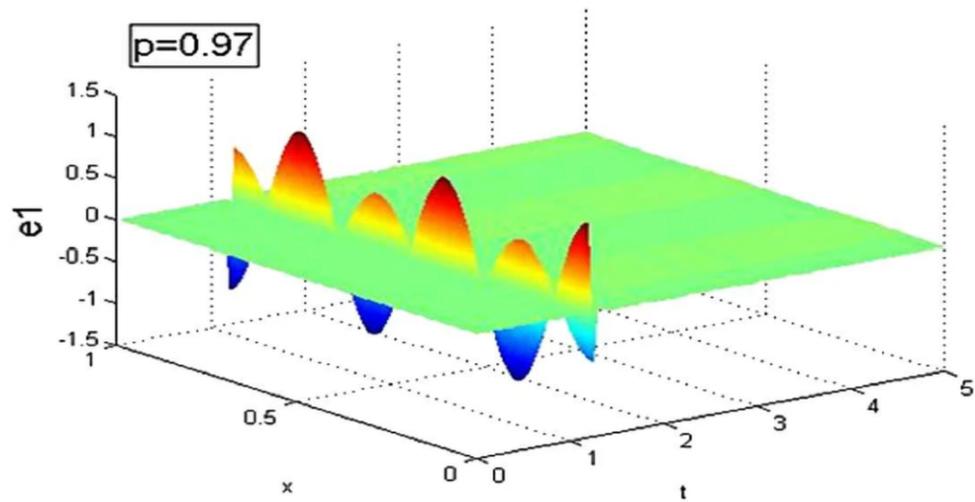
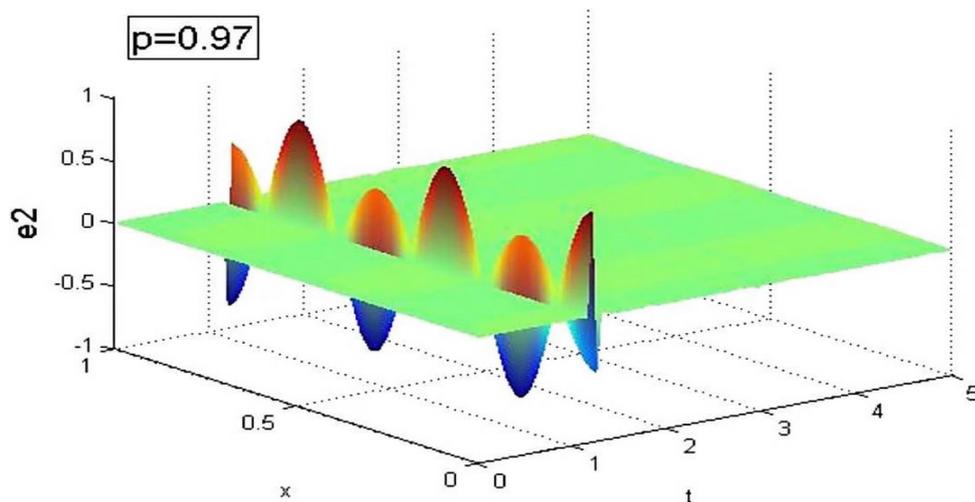
et donc, simplement,  $A - C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ , les valeurs propres de la matrice  $A - C$  sont  $\lambda_1 = -1$  et  $\lambda_2 = -3$ , ce qui donne que  $A - C$  est une matrice définie négative. Maintenant, basé sur les équations (3.23) et (3.24) et matrices (3.34) et (3.35), les contrôleurs peuvent être construits comme suit

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{4v_1v_2}{1+v_1^2} - \frac{4u_1u_2}{1+u_1^2}, \\ U_2 &= \delta(v_1 - u_1) + 3(v_2 - u_2) + \frac{\delta v_1v_2}{1+v_1^2} - \frac{\delta u_1u_2}{1+u_1^2}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

et le système d'erreur est donné par

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha e_1 &= \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} - e_1, \\ {}^C D_t^\alpha e_2 &= \delta d \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} - 3e_2. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Par conséquent, les systèmes (3.31) et (3.32) sont globalement complètement synchronisés et l'évolution temporelle des états de système d'erreur  $e_1$  et  $e_2$  est représentée sur les Figures 3.3 et 3.4.


 FIG. 3.3 – Évolution temporelle de l'erreur de synchronisation de contrôle non linéaire  $e_1$ 

 FIG. 3.4 – Évolution temporelle de l'erreur de synchronisation de contrôle non linéaire  $e_2$ 

### 3.3.2 Cas linéaires

Premièrement, l'hypothèse donnée dans l'équation (3.28) pour les systèmes maître-esclave (3.31) et (3.32) est satisfaite, et on peut facilement vérifier que

$$\begin{aligned} |f_1(v_1, v_2) - f_1(u_1, u_2)| &\leq |v_1 - u_1| + 4|v_2 - u_2|, \\ |f_2(v_1, v_2) - f_2(u_1, u_2)| &\leq |v_1 - u_1| + \delta|v_2 - u_2|. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Maintenant, selon le théorème 3.3, si nous choisissons la matrice de contrôle  $L$  comme

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \delta & 4 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Alors, les contrôleurs  $U_1$  et  $U_2$  peuvent être conçus comme

$$\begin{aligned} U_1 &= -3(v_1 - u_1), \\ U_2 &= -\delta(v_1 - u_1) - \left(\delta + \frac{9}{4}\right)(v_2 - u_2), \end{aligned} \quad (3.40)$$

$A - L = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ , les valeurs propres de la matrice  $A - L$  sont  $\lambda_1 = -2$  et  $\lambda_2 = -4$ , ce qui donne que  $A - L$  est une matrice définie négative. Par conséquent, les systèmes (3.31) et (3.32) sont globalement complètement synchronisés. Dans ce cas, le système d'erreur est décrit comme suit

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha e_1 &= \frac{\partial^2 e_1}{\partial x^2} - 4e_1 + \frac{4u_1 u_2}{1 + u_1^2} - \frac{4v_1 v_2}{1 + v_1^2}, \\ {}^C D_t^\alpha e_2 &= \delta d \frac{\partial^2 e_2}{\partial x^2} - \left(\delta + \frac{41}{4}\right) e_2 + \frac{\delta u_1 u_2}{1 + u_1^2} - \frac{\delta v_1 v_2}{1 + v_1^2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

L'évolution temporelle des états d'erreur  $e_1$  et  $e_2$  est représentée sur les Figures 3.5 et 3.6.

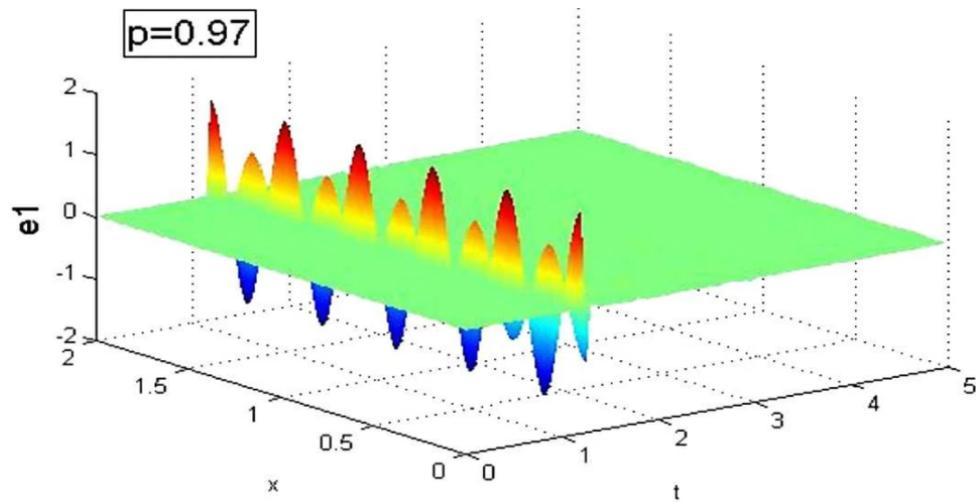
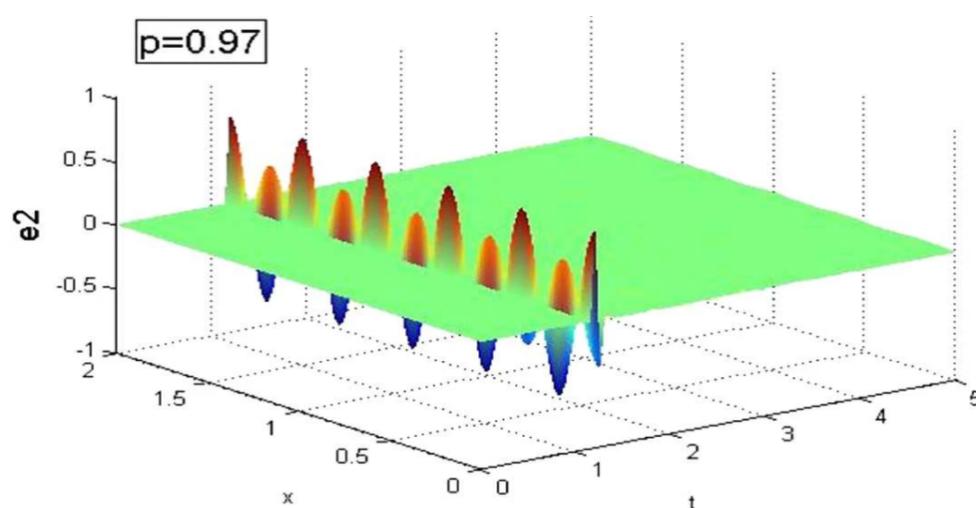


FIG. 3.5 – Évolution temporelle de l'erreur de synchronisation de contrôle linéaire  $e_1$

FIG. 3.6 – L'évolution temporelle de l'erreur de synchronisation de contrôle linéaire  $e_2$

# Conclusion générale

L'étude de mémoire, basé sur l'approche fractionnaire de Lyapunov et utilisant le concept maître-esclave, le contrôle de synchronisation pour une classe des systèmes différentiels partiels spatio-temporels fractionnaires. Première, un protocole de couplage spatio-temporel pour la synchronisation est suggéré, puis des nouvelles méthodes de contrôle comprenant des contrôles non linéaires et linéaires sont proposées pour réaliser une synchronisation complète entre des systèmes de réaction-diffusion d'ordre fractionnaire couplés. Dans les deux cas, les schémas de contrôle proposés stabilisent les états d'erreur de synchronisation où la solution zéro du système d'erreur devient globalement asymptotiquement stable.

Des conditions suffisantes convenables pour obtenir la synchronisation de systèmes Lengyel-Epstein fractionnaires couplés via des contrôles non linéaires et linéaires appropriés appliqués au système esclave et sont dérivées. Par conséquent, à partir des simulations numériques effectuées, en utilisant la fonction Matlab "Algorithme de transformation de l'analyse q-homotopie", nous pouvons observer que l'ajout des contrôleurs non linéaires et linéaires conçus au système fractionnaire contrôlé de Lengyel – Epstein met à jour la dynamique des systèmes couplés de sorte que les états du système se synchronisent. En comparant les simulations numériques illustrées aux Fig. 3.3,3.4,3.5 et 3.6, nous pouvons facilement observer que le schéma de contrôle linéaire réalise la synchronisation plus rapide que le cas non linéaire. Aussi, le schéma de contrôle non linéaire nécessite la suppression des termes non linéaires du système esclave, ce qui peut augmenter le coût des contrôleurs. Ainsi, le coût des contrôleurs dans le cas non linéaire est plus élevé que dans le cas linéaire.

L'étude confirme que le problème de la synchronisation complète dans des systèmes spatio-temporels d'ordre fractionnaire de haute dimension couplés peut être réalisé à l'aide de contrôleurs non linéaires et linéaires. Aussi, nous pouvons facilement voir que les résultats de recherche obtenus dans cet mémoire peuvent être étendus à de nombreux autres types de systèmes spatio-temporels fractionnaires avec des termes de réaction-diffusion.

# Bibliographie

- [1] Pikovsky, M., Rosenblum, M., Kurths, J. : Synchronization a Universal Concept in Nonlinear Sciences. Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [2] Luo, A. : A theory for synchronization of dynamical systems. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 14, 1901–1951 (2009).
- [3] Li, X., Leung, A., Han, X., Liu, X., Chu, Y. : Complete (anti-)synchronization of chaotic systems with fully uncertain parameters by adaptive control. Nonlinear Dyn. 63, 263–275 (2011).
- [4] Qun, L., Hai-Peng, P., Ling-Yu, X., Xian, Y. : Lag synchronization of coupled multidelay systems. Math. Probl. Eng. 2012,106830 (2012).
- [5] Cai, G., Hu, P., Li, Y. : Modified function lag projective synchronization of a financial hyperchaotic system. Nonlinear Dyn. 69, 1457–1464 (2012).
- [6] Ouannas, A., Odibat, Z. : Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems in discrete time. Nonlinear Dyn. 81, 765–771 (2015).
- [7] Ouannas, A., Azar, A., Vaidyanathan, S. : On a simple approach for Q–S synchronization of chaotic dynamical systems in continuous-time. Int. J. Comput. Sci. Math. 8, 20–27 (2017).
- [8] Ouannas, A., Al-sawalha, M., Ziar, T. : Fractional chaos synchronization schemes for different dimensional systems with non-identical fractional-orders via two scaling matrices. Optik 127, 8410–8418 (2016).
- [9] Ouannas, A., Azar, A., Vaidyanathan, S. : A robust method for new fractional hybrid chaos synchronization. Math. Methods Appl. Sci. 40, 1804–1812 (2017).
- [10] Ouannas, A., Odibat, Z. : Fractional analysis of co-existence of some types of chaos synchronization. Chaos Solitons Fractals 105, 215–223 (2017).

- 
- [11] Ouannas, A., Odibat, Z., Alsaedi, A., Hobiny, A., Hayat, T. : Investigation of Q–S synchronization in coupled chaotic incommensurate fractional order systems. *Chin. J. Phys.* 56, 1940–1948 (2018).
- [12] Junge, L., Parlitz, U. : Synchronization and control of couple complex Ginzburg–Landau equations using local coupling. *Phys. Rev. E* 61, 3736–3742 (2000).
- [13] Bragard, J., Arecchi, F., Boccaletti, S. : Characterization of synchronized spatiotemporal states in coupled nonidentical complex Ginzburg–Landau equations. *Int. J. Bifurc. Chaos* 10, 2381–2389 (2000).
- [14] Hramov, A., Koronovskii, A., Popov, P. : Generalized synchronization in coupled Ginzburg–Landau equations and mechanisms of its arising. *Phys. Rev. E* 72, 037201 (2005).
- [15] Wu, K., Chen, B.S. : Synchronization of partial differential systems via diffusion coupling. *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Regul. Pap.* 59, 2655–2668 (2012).
- [16] Kokarev, L., Tasev, Z., Stojanovski, T., Parlitz, U. : Synchronizing spatiotemporal chaos. *Chaos* 7, 635–643 (1997).
- [17] Kocarev, L., Tasev, Z., Parlitz, U. : Synchronization of spatiotemporal chaos of partial differential equations. *Phys. Rev.Lett.* 79, 51–54 (1997).
- [18] Bragard, J., Boccaletti, S., Mancini, H. : Asymmetric coupling effects in the synchronization of spatially extended chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* 91, 064103 (2003).
- [19] Mikhailov, A.S., Showalter, K. : Control of waves, patterns and turbulence in chemical systems. *Phys. Rep.* 425, 79–194 (2006).
- [20] Mikhailov, A.S., Ertl, G. : *Engineering of Chemical Complexity*. World Scientific, Singapore (2016).
- [21] Nakao, H., Yanagita, T., Kawamura, Y. : Phase-reduction approach to synchronization of spatiotemporal rhythms in reaction–diffusion systems. *Phys. Rev. X* 4, 021032 (2014).
- [22] Kawamura, Y., Shirasaka, S., Yanagita, T., Nakao, H. : Optimizing mutual synchronization of rhythmic spatiotemporal patterns in reaction–diffusion systems. *Phys. Rev. E* 96, 012224 (2017).
- [23] Beta, C., Mikhailov, A.S. : Controlling spatiotemporal chaos in oscillatory reaction–diffusion systems by time-delay autosynchronization. *Physica D* 199, 173–184 (2004).
- [24] Hramov, A.E., Koronovskii, A.A., Popov, P.V. : Generalized synchronization in coupled Ginzburg–Landau equations and mechanisms of its arising. *Phys. Rev. E* 72, 037201 (2005).

- [25] García, P., Acosta, A., Leiva, H. : Synchronization conditions for master-slave reaction diffusion systems. *Europhys. Lett.* 88, 60006 (2009).
- [26] Acosta, A., García, P., Leiva, H. : Synchronization of non-identical extended chaotic systems. *Appl. Anal.* 92, 740–751 (2013).
- [27] Ambrosio, B., Aziz-Alaoui, M.A. : Synchronization and control of coupled reaction–diffusion systems of the Fitzhugh–Nagumo type. *Comput. Math. Appl.* 64, 934–943 (2012).
- [28] Wu, K.N., Tian, T., Wang, L. : Synchronization for a class of coupled linear partial differential systems via boundary control. *J. Franklin Inst.* 353, 4062–4073 (2016).
- [29] Chen, T., Wang, R., Wu, B. : Synchronization of multi-group coupled systems on networks with reaction–diffusion terms based on the graph-theoretic approach. *Neurocomputing* 227, 54–63 (2017).
- [30] Zhou, L., Shen, J. : Signal transmission of biological reaction–diffusion system by using synchronization. *Front. Comput. Neurosci.* 11, 92 (2017).
- [31] Chen, H., Shi, P., Lim, C.C. : Pinning impulsive synchronization for stochastic reaction–diffusion dynamical networks with delay. *Neural Netw.* 106, 281–293 (2018).
- [32] Liu, L., Chen, W.H., Lu, X. : Impulsive  $H_\infty$  synchronization for reaction–diffusion neural networks with mixed delays. *Neurocomputing* 272, 481–494 (2018).
- [33] He, C., Li, J. : Hybrid adaptive synchronization strategy for linearly coupled reaction–diffusion neural networks with timevarying coupling strength. *Neurocomputing* 275, 1769–1781 (2018).
- [34] Munnier Alexandre. *Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles*. Institut Élie Cartan, Université Henri Poincaré, Nancy 1, B.P.239, F-54506.
- [35] Shankar Sastry. *Nonlinear Systems : Analysis, Stability and, Control*. Springer-Verlag, New York, 978-1-4757-3108-8 (1999).
- [36] Mathukumalli Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 2nd edition, 978-0136232803 (1993).
- [37] Ibrahima N'Doye. *Généralisation du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systèmes fractionnaires*. *Automatique / Robotique*. Université Henri Poincaré - Nancy I ; Université Hassan II Aïn Chock de Casablanca, (2017).
- [38] Kuttler Christina. *Reaction–Diffusion Equations and Their Application on Bacterial Communication*. *Handbook of Statistics*, (2017).

- [39] Michel Pierre. Reaction-Diffusion systems with positivity and mass control : global existence and singular limits. *Analytical and Numerical Aspects of Evolution Equations*, University Duisburg-Essen, (2011).
- [40] Igor Podlubny. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, New York, (1999).
- [41] Michele Caputo. Linear model of dissipation whose  $Q$  is almost frequency independent. Part II, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 13 :529–539 (1967).
- [42] Michele Caputo. *Elasticità e dissipazione*. Zanichelli Bologna, (1969).
- [43] C.B. Li, F.R., Zhang, : A survey on the stability of fractional differential equations. *Eur. Phys. J. Special Topics* 193, 27–47 (2011).
- [44] Ahmed, E., El-Sayed, A.M., El-Saka, H, : Equilibrium points, stability and numerical solutions of fractional-order predator–prey and rabies models. *J. Math. Anal. Appl.* 325(1) :542–553 (2007).
- [45] Tavazoei, M.S., Haeri, M.A, : note on the stability of fractional order systems. *Math. Comput. Simulation* 79 (5) :1566–1576 (2009).
- [46] Chen, D., Zhang, R., Liu, X., Ma, X. : Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 19, 4105–4121 (2014).
- [47] Aguila-Camacho, N., Duarte-Mermoud, M.A., Gallegos, J.A. : Lyapunov functions for fractional order systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 19, 2951–2957 (2014).
- [48] M. A. Aziz-Alaoui, “Synchronization of chaos,” *Encyclopedia of Mathematical Physics*, vol. 5, pp. 213-226, (2006).
- [49] Ouannas Adel. Co-existence of Various Types of Synchronization Between Hyper-chaotic Maps. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 16 (3) 312–321 (2016).
- [50] Ouannas Adel. Co-existence of Complete Synchronization and AntiSynchronization in a Class of Discrete Rational Chaotic Systems. *Far East J. Dyn Syst* 23 (1-2) 41-48 (2013).
- [51] Ouannas, A., Azar, A.T. Ziar, T. : On Inverse Full State Hybrid Function Projective Synchronization For Continuous-time Chaotic Dynamical Systems with Arbitrary Dimensions. *Differ Equ Dyn Syst* (2017).
- [52] Ouannas Adel. A New Generalized-Type of Synchronization for Discrete-Time Chaotic Dynamical Systems. *J. Comput. Nonlinear Dynam.* Nov 2015, 10(6) : 061019.
- [53] Ouannas Adel. On Full-State Hybrid Projective Synchronization of General Discrete Chaotic Systems. *Journal of Nonlinear Dynamics*, volume 2014.

- 
- [54] Ouannas, A., Odibat, Z. : On inverse generalized synchronization of continuous chaotic dynamical systems. *Int. J. Appl. Comput. Math.* 2016 ; **2**(1) :1-11.
- [55] Ouannas, A., Grassi, G. : Inverse full state hybrid projective synchronization for chaotic maps with different dimensions. *Chiness Physics B* **25** (9) 090503-6 (2016).
- [56] Ouannas Adel. A New Q-S Synchronization Scheme for Discrete Chaotic Systems. *Far East Journal of Applied Mathematics*, 84 (2) 89-94.
- [57] Hadi, T., Erjaee G.H. : Phase and anti-phase synchronization of fractional order chaotic systems via active control. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 16(10) :4079-4088 (2011).
- [58] Sachin, B., Varsha, D.G. : Synchronization of different fractional order chaotic systems using active control. *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.* 15 :3536-3546 (2010).
- [59] Gasri Ahlem. Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques. Université frères Mentouri de Constantine. (2018).
- [60] Ouannas, A., Wang, X., Pham, V. et al. Synchronization results for a class of fractional-order spatiotemporal partial differential systems based on fractional Lyapunov approach. *Bound Value Probl* 2019, 74 (2019).