République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

# La solution de certains types d'equation aux dérivées partielles

Présenté Par :
**Abidat Asma**
**Zerfaoui hanine**

Devant le jury :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Boukhalfa Elhafsi | MCB | Univérsité Larbi Tébessi | Président |
| Diab Zohir | MCB | Univérsité Larbi Tébessi | Examinatrice |
| Mr ,Elhadje Zeraoullia | Prof | Univérsité Larbi Tébessi | Encadreur |

Date de soutenance : /09/2020

بسم الله الرحمن الرحيم

**Je dédie ce modeste travail à :**

**A mes parents . Aucun hommage ne pourrait être à la hauteur de**

**l'amour Dont ils ne cessent de me combler. Que dieu leur procure**

**bonne santé et longue vie.**

**A mes chères sœurs  et bien sur A mes frères sans oublié ma grand-mère**

**A mes fidéles amies particulièrement C25 et Bahia**

**A mon binôme Asma et toutes les personnes qui ont été toujours à mes cotés .**

**Et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce**

**projet soit possible, je vous dis merci.**

*A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et*
*source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour*
*me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, à toi mon père Aissa*

*A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman sauad que j'adore.*

*Aux personnes dont j'ai bien aimé la présence dans ce jour, à mon frère Nouredine et ma sœur Basma, mes nièces Nour El Yakine et Ranime*

*A mes fidéles amies Billa ,Nessrine ,Fatma,*

*chahinez et khaoula*

*A mon binôme Hanine , je dédie ce*

*travail dont le grand plaisir leurs revient en*

*premier lieu pour*

*leurs conseils, aides, et encouragements.*

*Aux personnes qui m'ont toujours aidé et*

*encouragé, qui étaient*

*toujours à mes côtés.*

## Remerciements

**Tout d'abord merci à ALLAH de nous avoir donné la force pour terminer ce travail.**

**Nous tenons à remercier** ***Pr : Zeraoullia Elhadj*** **encadreur , d'avoir consacré beaucoup de**

**son temps à notre travail, pour ses conseils pertinents, et ses orientations judicieuses.**

**Mes remerciements distingués vont à Dr. ............ pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury. Mes remerciements vivement a Dr. .............. pour avoir acceptée d'examiner ce mémoire.**

**Nous adressons nos vifs remerciements à tous les enseignants du département de Mathématique**

**En fin NOUS remercions tout particulièrement mes parents, pour leur soutien inconditionnel tout au long de ces longues années d'études.**

# Résumée

Dans ce travail on s'interesse à la solution de certains types d'équation aux dérivées partielles en utilisant quelque propriétés et théories d'une équation différentielle se rapportant à une études d'une inclusion différentielles . celle si permet de définir les systèmes differentielle.

# TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

Une *équation aux dérivées partielles* (EDP) est une équation dont les solutions sont à priori des fonctions inconnues avec certaines conditions concernant leurs scalaires (la vitesse, l'énergie, la préssion,...etc.). Il éxiste une multitude d'EDP dont l'étude nécessite des théories différentes et spécifiques, on tent néanmoins de classifie les EDP en catégorie, selon les outils généraux qui permettent analyser leurs propriétés qualitatives et les problèmes qu'elle modélise .

En effet les EDP sont des objets mathématiques qui permettent de modéliser les phénomènes naturels, or ces grandeurs physiques où grandeurs assimilée à des fonctions dont leurs modèles mathématiques ont besoin de régularité au sens mathématiques. Alors, le développement de l'arsenal nécessaire a été aborder par les mathématiciens pendant Le xxe siècle (ou $20^{émme}$ siècle) qui est l'abeautissement à l'étude systèmatique actuel des EDP .La recherche fructieuse de L.Schwartz est considèré comme un pas de géant aux moment où il a découvert. La théorie du distribution (aux début des années 1950) d'autant plus au moins comparable et dû à L.Hormander pour la mise aux points du calcul pseudodirentiel (aux début des années 1970). En outre, il est à signaler que les EDP de meur un domaine de recherche vaste et actif . d'autre part, ces études (recherches) n'ont pas seulement un echo dans les science appliquées mais aussi ont une place prémordial dans le développement actuel du mathématique, dans la géometrie et l'analyse [1]. On discerne trois grandes catégories importantes d'EDP qui sont les équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes du second ordre dites *élliptiques*, *hyperbolique* òu *parabolique*, ce qui nous permet d'aborder d'une façon éxplicite le système différentiel qui est lui même un ensemble d'équation différentielle *couplée* utilisés pour modéliser des phénomènes naturels et artificiels de types périodiques. Dans ce sens, ils revêtent un grand intérêt de nombreux champs d'application. C'est le cas par exemple, de certains systèmes considérés en physique du solide [18], en mécanique céleste,en optique , en aéronautique , en automatique , en électrotechnique, en mécanique quantique.

Nous allons étudier dans ce mémoire la solution de certains types d'équation aux dérivées partielles.

Chapitre 1 : Ce chapitre est un chapitre introductif nous nous sommes attelés à la définition des notions et des rappels que nous allons utiliser par la suite, son objectif est d'octroyer une vision total sure les préporiétés et ses démonstrations (dérivées partielles,Fonction différentiable,Vecteur gradiant ...etc)

**Chapitre 2** : Dans le deuxième chapitre on s'intéresse aux systèmes des équations aux dérivées partielles, le système s'écrit :

$$X\prime(t) = A(t)x + B(t)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n$ et $B(t) \in \mathbb{R}^n$.

**Chapitre 3** : Contient deux parties : La premiére représente quelques examples et l'autre des applications.

# CHAPITRE 1

# CALCUL DIFFÉRENTIELLE

Une équation différentielle est une fonction inconnue d'une seule variables et ses dérivées $x', x'', ..., x^{(p)}$ et elle d'ordre de plus haut degré de dérivation $(p)$ ; dans ce chapitre va donner quelques notions prélimnaires afin de généraliser la notion de dérivée pour une fonction $f$ de plusieur variables ; le but est assurement de donnér une difénition qui vise à retrouver autant que possible toute les bonne propriétés de la dérivation d'une variable.

- En tout point $x_0$ où la fonction est dérivable, la dérivée doit permettre de définir une fonction simple qui approche bien $f$ au moins pour des points proches de $x_0$, comme c'est le cas pour l'application $x \mapsto f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)$ en dimension 1.
- Surtout on attend d'une fonction dérivable qu'elle soit continue.
- La dérivée doit permettre d'étudier les variations de $f$, localiser et étudier les extréma.

Pour tout les chapitre, on se donne un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, une fonction $f$ de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$ et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{U}$. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

## 1.1 Dérivées partielles

**Définition 1.1.1** *Soit $k \in [1, n]$.*

*On dit que la $k^{ième}$ dérivée partielle de $f$ existe au point $a$ si l'application*

$$t \mapsto f(a_1, ..., a_{k-1}, a_k + t, a_{k+1}, ..., a_n)$$

*(définie sur un voisinage de $0$ dans $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$) est dérivable en $0$. Dans ce cas on note*

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \quad \textit{ou } \partial_k f(a)$$

*pour cette dérivée.*

*On dit que la $k^{\text{ième}}$ dérivée partielle de $f$ éxiste sur $\mathcal{U}$ si elle éxiste en tout point de $\mathcal{U}$.*

Enfin il s'avère que les dérivées partielles ne sont que des dérivées au sens usuel. Pour dériver ayant trait à une variable on examine que toutes les autres sont des constantes et on dérive alors par rapport à la variable qui nous conserne comme on habituellement.

**Remarque 1.1** *On note $(x, y)$ et $(x, y, z)$ plutôt que $(x_1, x_2)$ et $(x_1, x_2, x_3)$ les points de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ respectivement. On note $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ou $\partial_x f$ la dérivée partielle par rapport à la première variable.*

## 1.2 Fonctions différentiables

**Définition 1.2.1** *On dit que $f$ est différentiable en $a$ s'il existe une application linéaire $d_a f$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ telle que*

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + o_{h \hookrightarrow o}(\|h\|)$$

*En autre façon dit il existe une application $\varepsilon_a$ définie sur un voisinage de $0$ dans $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ telle que $\varepsilon_a(h) \to_{h \to 0} 0$ et*

$$f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \, \varepsilon_a(h)$$

**Remarque 1.2** *On citera parfois $df(a)$ au lieu de $d_a f$. On rappelle qu'en dimension finie,toutes les applications linéaires sont continues. En particulier cela désigne que dimensions finies toutes les applications linéaires sont continues. Cela signifie en particulier que*

$$|||d_a(f)||| = \sup_{h \neq 0} \frac{\|d_a(f)\|}{\|h\|}$$

*est bien défini.*

**Remarque 1.3** *Si $f$ est différentiable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.*

**Preuve.** Avec les notations de la Définition 1.2.1 on a $h \in \mathbb{R}^n$ et

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leq \|d_a f(h)\| + \|h\| \, \|\epsilon_a(h)\| \leq \|h\| \left(\|d_a f(h)\| + \|\varepsilon_a(h)\|\right) \to_{h \to 0} 0$$

$\blacksquare$

**Proposition 1.2.1** *Si $f$ est différentiable en $a$, alors elle est dérivable en $a$ suivant tout vecteur $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et cette dérivée vaut $d_a f(v)$.*

**Preuve.** Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Pour $t \in \mathbb{R}$ assez petit on a

$$f(a+tv) = f(a) + d_a f(tv) + \|tv\| \, \varepsilon_a(tv) = f(a) + t d_a f(v) + o(t)_{t \to 0}$$

Cela démontre que $t \to f(a+tv)$ est dérivable en 0 de dérivée $d_a f(v)$. ■

**Proposition 1.2.2** *On suppose que $f$ est différentiable en $a$. Alors toutes les dérivées partielles de $f$ existent au point $a$ et pour tout $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$d_a f(v) = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

*d'une autre façon dit*

$$d_a f = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) \, e_k^*$$

*où $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est la base duale de la base canonique.*

**Preuve.** Le fait que les dérivées partielles de $f$ existent au point $a$ résulte de la Proposition 1.2.2 appliquée avec les vecteurs de la base canonique. Par linéarité de $d_a f$ on a

$$d_a f(v) = d_a f\left(\sum_{k=1}^{n} v_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} v_k d_a f(e_k) = \sum_{k=1}^{n} v_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$$

■

On suppose que $f$ est différentiable en $a$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on note

$$g(x) = f(a) + d_a f(x-a)$$

(Cette définition $a$ un sens même si $f$ n'est pas définie sur tout $\mathbb{R}^n$). Alors $g$ est une application affine (une constante + une application linéaire) telle que

$$f(x) - g(x) = o_{x \to 0}(\|x-a\|)$$

$g$ est en fait la seule application affine à avoir cette propriété. L'image de $\mathbb{R}^n$ par l'application $g$ est appelée plan tangent au graphe de $f$ au point $a$.

## 1.3 Vecteur gradient

On suppose dans ce paragraphe que $P = 1$, c'est-à-dire que $f$ est à valeurs réelles.

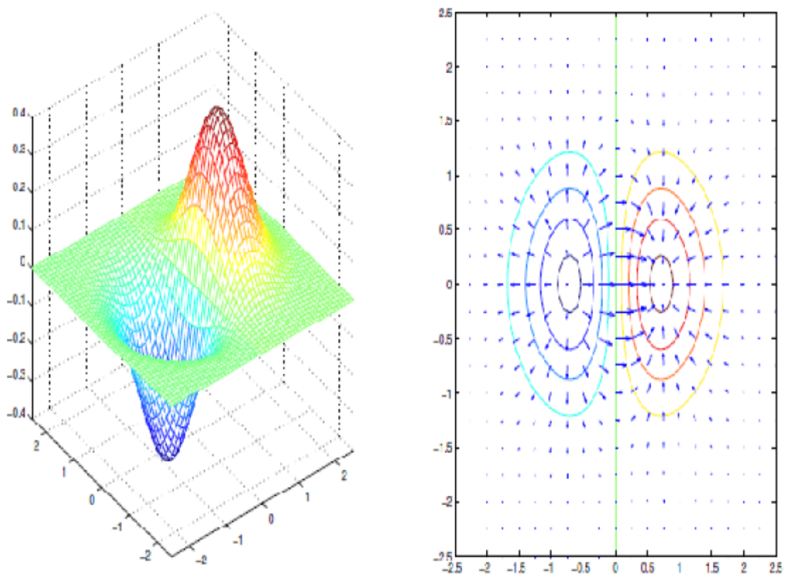

FIG. 1.1 – Le graphe, les lignes de niveau,et le gradient de l'application $f : (x; y) \rightarrow xe^{-(x^2+y^2)}$.

**Définition 1.3.1** *Soit $a \in \mathcal{U}$. On appelle gradient de $f$ en $a$ le vecteur*

$$\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

***Proposition 1.3.1*** *Pour tout $a \in \mathcal{U}$ le gradient $\nabla f(a)$ est l'unique vecteur tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$d_a f(h) = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

*où pour deux vecteurs $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ on a noté $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire usuel $\sum_{J}^{K} u_j v_j$.*

Le vecteur gradient annonce en chaque point la direction de plus grande pente.

## 1.4 Matrice jacobienne

Dans le cas général où $f$ peut être à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ pour n'importe quel $p \in \mathbb{N}$ . On inserne la matrice jacobienne d'une application différentiable :

**Définition 1.4.1** *Si $f$ est différentiable en $a$, alors on appelle matrice jacobienne de $f$ en $a$ et on note $Jac_a\ f$ la matrice de $d_af$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$ :*

$$Jac_af = Jacf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_P}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_P}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in M_{P,n}(\mathbb{R})$$

On termine cette section par la linéarité de la différentielle, puis par la composition de fonctions différentiables :

**Proposition 1.4.1** *On suppose que $f$ et $g$ sont deux fonctions de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^p$ différentiables en $a$. Alors pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ la fonction $f+g$ est différentiable en $a$ de différentielle :*

$$d_a(\lambda f + \mu g) = \lambda d_a f + \mu d_a g$$

*La propriété suivante généralise la propriété de dérivation pour la composée de fonctions d'une variable réelle [17].*

**Proposition 1.4.2** *On suppose que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est différentiable en $a \in \mathcal{U}$. Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ contenant $f(\mathcal{U})$ et $g : \mathcal{V} \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $f(a)$. Alors l'application $g\circ f$ est différentiable en $a$ de différentielle*

$$d_a(g\circ f) = d_{f(a)}g \circ d_a f$$

*En termes matriciéls on obtient*

$$Jac_a(g\circ f) = Jac_{f(a)}g \circ Jac_a f$$

*Si on note $x_1,\ldots,x_n$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^n$ et $y_1,\ldots,y_p$ les coordonnées dans $\mathbb{R}^P$ cela donne*

$$\forall j \in [1,n]\,, \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{P} \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

## 1.5 Fonctions de classe $C^1$

l'objectif est de faire entrer les fonctions de classe $C^1$. Cela généralise la notion connue en dimension 1. Mais le véritable intérêt est que c'est une notion plus forte que la différentiabilité, et pourtant plus simple à vérifier. Ainsi, bien souvent, pour prouver qu'une fonction est différentiable, on montrera plutôt qu'elle est de classe $C^1$ (tout en sauvegardant à l'esprit que ce n'est pas parce qu'une fonction n'est pas $C^1$ qu'elle n'est pas différentiable. . .)L [8].

**Théorème 1.5.1** *On suppose que toutes les dérivées partielles de $f$ sont définies et continues au voisinage de $a \in \mathcal{U}$. Alors $f$ est différentiable en $a$.*

**Preuve.** On suppose que $n = 2$. Le cas général se montre exactement de la même manière. Pour $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $h_1$ et $h_2$ assez petits on peut définir

$$r(h) = f(a+h) - f(a) - h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) - h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)$$

On a

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2+h_2) + f(a_1, a_2+h_2) - f(a_1, a_2) \\ &= \int_0^{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+t, a_2+h_2)dt + \int_0^{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+t)dt \\ &= h_1 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+sh_1, a_2+h_2)ds + h_2 \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+sh_2)ds \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} r(h) = \quad & h_1 \int_0^1 \left( \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+sh_1, a_2+h_2) - \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right) ds \\ & + h_2 \int_0^1 \left( \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+sh_2)ds - \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right) ds \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque les dérivées partielles de $f$ sont continues en $a$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h_1, h_2 \in [-\delta, \delta]$ et $s \in [0, 1]$ on a

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1+sh_1, a_2+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \right\| < \varepsilon$$

et

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2+sh_2)ds - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right\| < \varepsilon$$

Cela prouve que $|r(h)| \leq \varepsilon \times \max(|h_1|, |h_2|)$, et finalement $r(h) = o_{h \to 0} \|(h)\|$. D'où le résultat. ∎

**Définition 1.5.1** *On dit que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathcal{U}$ si toutes ses dérivées partielles sont définies et continues sur $\mathcal{U}$.*

**Définition 1.5.2** *Soit $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On dit que $f$ est un $C^1$ difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ si $f$ est une bijection de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$, est de classe $C^1$ sur $\mathcal{U}$, et si sa réciproque $f^{-1}$ est $C^1$ sur $\mathcal{V}$.*

Si $f$ est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathcal{U}$ dans $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$ est ouvert, alors $f(\mathcal{W})$ est ouvert comme image réciproque de $\mathcal{W}$ par l'application continue $f^{-1}$.

## 1.6 Inégalité des accroissements finis

Le théorème de Rolle et ses applications n'étaient plus valides pour des fonctions de plusieurs variables. Sous une condition de type convexité, on va tout de même pouvoir prouver un analogue à l'inégalité des accroissements finis. Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $C^1$.

**Théorème 1.6.1** *(Inégalité des accroissements finis). Soient $a, b \in \mathcal{U}$ tels que*

$$x \in [a, b] : x = (1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in [0, 1] \subset \mathcal{U}$$

*Alors aux point $a$, on a*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} |||d_x f|||$$

**Preuve.** On observe l'application

$$g : [0, 1] \to \mathbb{R}^p : t \mapsto f(a + t(b - a))$$

Par composition de fonctions de classe $C^1$ on obtient que $g$ est de classe $C^1$ sur $[0, 1]$ et

$$\forall t \in [0, 1] : g'(t) = d_{a+t(b-a)} f(b - a)$$

On a

$$\|g'(t)\| \leq \left|\left|\left|d_{a+t(b-a)} f\right|\right|\right| \|b - a\| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} |||d_x f|||$$

D'après l'inégalité des accroissements finis pour une fonction d'une variable réelle on a :

$$\|f(b) - f(a)\| = \|g(1) - g(0)\| \leq |1 - 0| \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} |||d_x f||| \leq \|b - a\| \sup_{x \in [a,b]} |||d_x f|||$$

D'où le résultat. ■

**Corollaire 1.6.1** *On suppose que $\mathcal{U}$ est convexe. Si toutes les dérivées partielles de $f$ sont nulles sur $\mathcal{U}$ alors $f$ est constante sur $\mathcal{U}$.*

En global, pour prouver qu'une application est contractante, on utilise l'inégalité de la moyenne : Si $f$ est différentiable sur le convexe $\Omega$ et s'il existe $K \in [0, 1[$ tel que$\|df(x)\| \leq K$ pour tout $x \in \Omega$ , alors $f$ est $K$-contractante sur $\Omega$ [14].

## 1.7 Équations aux dérivées partielles

On dit équation aux dérivées partielles une équation dont l'inconnue est une fonction de plusieurs variables et qui fait intervenir les dérivées partielles de cette inconnue. L'étude des équations aux dérivées partielles est une branche importante de la recherche en mathématiques et en physique ses applications sont très nombreuses .

**Exemple 1.7.1** *Étant donnés $c \in \mathbb{R}$ et $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, déterminer l'ensemble des fonctions $u \in C^1(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R})$ telles que*

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = 0 \tag{1.1}$$

*et*

$$\forall x \in \mathbb{R} : u(0,x) = u_0(x) \tag{1.2}$$

*On sait la fonction $u$ à l'instant initial $t = 0$, on cherche à déterminer ce qu'elle deviendra dans le futur, à partir d'une égalité faisant intervenir sa dérivée par rapport au temps $t$. On commence par supposer que $u$ est solution et on considère la fonction $\tilde{u}$ qui à $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ associe $\tilde{u}(t,y) = u(t, y+ct)$. $\tilde{u}$ est alors une fonction de classe $C^1$ (comme composée des fonctions $u$ et $(t,y) \mapsto (t, y+ct)$. En outre pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a :*

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t,y) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, y+ct) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t, y+ct) = 0$$

*Cela démontre que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'application $t \mapsto \tilde{u}(t,y)$ est constante, et donc pour tout $(t,y) \in \mathbb{R}^2$ on a*

$$\tilde{u}(t,y) = \tilde{u}(0,y) = u_0(y)$$

*Ainsi pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ on a*

$$u(t,x) = \tilde{u}(t, x-ct) = u_0(x-ct) \tag{1.3}$$

*Cela démontre que s'il éxiste une solution, c'est forcément cette fonction là. Inversement on vérifie la fonction $u$ ainsi définie est bien solution. il faut encore de calculer les dérivées partielles d'une fonction composée : pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ on a bien $u(0,x) = u_0(x)$ et de plus*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + c\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) = -cu_0'(x-ct) + cu_0'(x-ct) = 0$$

*Cela démontre que $u$ est solution. Finalement le problème (1.1)-(1.2) admet une unique solution, c'est la fonction $u$ donnée par (1.3) [1] .*

# CHAPITRE 2

# SYSTÈMES DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Un *système des équations aux dérivée partielle* est un *ensemble* d'équation différentielle couplés c'est à dire un système d'équation différentielles qui ne peuvent pas resolues séparament. Soit $u$ un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : u \mapsto \mathbb{R}^n$ un systéme différentiel est défini par $x' = f(t, x)$ ou $x \in \mathbb{R}^n$ et $t \in \mathbb{R}^n$.

## 2.1 Systémes différentiels à coefficients constants

### 2.1.1 Propriétés générales

Nous nous concentrons donc sur l'étude des solutions générales du systéme différentiel :

$$\frac{dX}{dt} = AX + B(t) \tag{SD}$$

ou $X(t) \in \mathbb{R}^N$ et $B(t) \in \mathbb{R}^N$. la linéarité est Le premier principe . Commencons par une définition. On appelle systéme homogéne $(H)$ associé le systéme correspondant à $B(t) \equiv 0$ :

$$\frac{dX}{dt} = AX \tag{H}$$

**Théorème 2.1.1** *Soit $(SD)$ un systéme différentiel à coefficients constants et $(H)$ le système homogène associé et soit $X_0(t)$ une solution de $(SD)$. Alors toute solution $X(t)$ de $(SD)$ s'écrit sous la forme*

$$X(t) = X_0(t) + Z(t)$$

*ou $Z(t)$ est une solution du système homogène $(H)$.*

On commence par redonner la traduction du théoréme de Cauchy dans le cas particulier :

**Théorème 2.1.2** *Supposons que $t \longrightarrow B(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout vecteur $v \in \mathbb{R}^N$, il existe une et une seule solution $X(t)$ du systéme $(SD)$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ telle que $X(0) = v$. En particulier, l'éspace véctoriel des solutions du systéme associé homogéne est de dimension $N$.*

**Théorème 2.1.3** *Supposons que pour une matrice $A$ on soit dans la situation òu il existe $n$ valeurs propres réelles distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Si $u_1, u_2, \ldots, .u_n$, sont des vecteurs propres associés, alors les solutions $X_j(t) = \exp(\lambda_j u_j t)$ constituent une base de l'espace des solutions de $(H)$.*

### 2.1.2 Systèmes $2 \times 2$ homogènes du premier ordre

On considère

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

Dans ce cas on va mener une étude compléte . Cela nous permettra particulièrement de répondre à l'exemple observé dans la théorié des circuits.

**Cas de deux racines réelles distinctes :** $x'(t) = y(t), y'(t) = x(t)$. La matrice $A$ correspondante a deux valeurs propres réelles distinctes $\pm 1$. On peut alors trouver la solution telle que $X(0) = (0, 1)$ en écrivant ce vecteur sur la base des vecteurs propres de la matrice $A$.

**Cas de deux racines complexes distinctes :** Dans ce cas si $A$ est à coefficients réels, on voit simplement que $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ : les deux valeurs propres sont complexes conjuguées. Il est immédiat de trouver deux vecteurs propres (dans $\mathbb{C}^2$) de $A$. On peut même les choisir têls que : $v_2 = \bar{v}_1$. On a en éffet :

$$Av_1 = \lambda_1 v_1$$

qui corrèspond à l'écriture de deux équations dans $\mathbb{C}$. Si on prend le complêxe conjugué de ces deux équations, et en remarquant que la matrice $A$ est à coefficients réels, on obtient :

$$A\bar{v}_1 = \bar{\lambda}_1 v_1$$

Toute solution complêxe de $(H)$ s'écrit donc :

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$$

avec $X_2(t) = \bar{X}_1(t)$ ou $c_2 = \bar{c}_1$. Les solutions réelles de $(H)$ sont données par :

$$X(t) = c_1 X_1(t) + \bar{c}_1 \bar{X}_1(t)$$

On obtient

$$X(t) = (a + ib) \times (v + iw) \times \exp\left(\mu t(\cos \nu t + i \sin \nu t)\right) + c.c$$

Ceci donne :

$$X(t) = ((av - bw) + i(bv + aw)) \exp\left(\mu t(\cos \nu t + i \sin \nu t)\right) + c.c$$

Aussi on peut le réécrire sous la forme :

$$X(t) = 2 \exp\left(\mu t((a \cos \nu t - b \sin \upsilon t)v) - (b \cos(\nu t) + a \sin(\nu t))w\right)$$

**Cas d'une racine double :** Ècrivons d'abord que la matrice $(2 \times 2)$ a une racine double. Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et si est la valeur propre double, on a :

$$2 = a + d, ad - bc = 2$$

On observe alors que :

$$A = \lambda I + N$$

òu $N$ a la propriété que :

$$N^2 = 0$$

Pour le voir, on se ramène aussitôt au cas $\lambda = 0$ en remplcant $a$ par $a - \lambda$ et $c$ par $c - \lambda$. Il s'agit de prouver qu'une matrice $N$ qui a zéro comme valeur propre double est forcément de carré 0. Trois cas sont à considérer :

**-Premier cas** :

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\beta \\ \frac{\alpha}{\beta} & -\alpha \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. On a deux autres cas a considérer :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

**Deux cas** peuvent se présenter :

– òu bien $N = 0$ et on peut choisir pour $A$ deux vecteurs propres linéairement indépendants : les deux vecteurs sont $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

– òu bien $N$ n'est pas l'opérateur nul. Comme $N^2 = 0$, $N$ est de rang 1. Son noyau est de dimension 1. On peut toujours alors prendre un vécteur propre de $A$ comme $u_1$ (il satisfait $Nu_1 = 0$) et un vécteur $u_2$ indépendant de $u_1$ tel que $Nu_2 = u_1$. On peut vérifier à la main que $\exp\left((\lambda t)\, u_1\right)$ et $\exp\left(\lambda t(u_2 + tu_1)\right)$ sont des solutions.

## 2.2 Traduction pour les équations différentielles d'ordre $n$

On regarde l'équation avec second mêmbre :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(n-j)}(t) = b(t) \tag{ed}$$

**équations différentielles homogènes :** Pour le système homogène, qui est défini par :

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{n-j} = 0 \tag{eh}$$

On peut faire la reduction à un système différentiel d'ordre $n \times n$, puis suivre la méthode éxpliquee pour ce cas. On peut aussi chercher plus directement des solutions de la forme $\exp(\lambda t)$, ce qui conduit, en mettant dans l'équation à :

$$\phi(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j} = 0 \tag{ei}$$

La fonction $\exp(\lambda t)$ est donc solution du systême.

**Théorème 2.2.1** *L'éspace des solutions de l'équation homogéne (eh) est de dimension $n$. Si l'équation précédente posséde $n$ racines réelles distinctes $\lambda_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, une base est constitée par les fonctions $\exp(\lambda_j t)$. Dans le cas óu l'on a une valeur propre complèxe (non réelle) $\lambda_0 = \mu + i\nu$, deux solutions complèxes indépendantes sont données par $\exp(\lambda_0 t)$ et $\exp\left(\overline{\lambda}_0 t\right)$. Si on cherche les solutions réelles, on vérifie que $\exp(\mu t)\cos(\nu t)$ et $\exp(\mu t)\sin(\nu t)$ sont des solutions indépendantes.*

*Si $\lambda_0$ est une racine double de l'équation, on peut montrer que $t\exp(\lambda_0 t)$ est aussi solution.*

*Si $\lambda_0$ est une racine de multiplicite $k$ de l'équation, $t^j \exp(\lambda_0 t)$ est solution pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Ceci fournit un moyen de déterminer toutes les solutions homogénes.*

### 2.2.1 La méthode de variation des constantes

Il ne reste plus qu'à ėxpliquer la méthode de variation des constantes. On se contente de détailler le cas de l'ordre 2. On obtient donc (on peut se ramener au cas $a_0 = 1$ en divisant par $a_0$) l'équation :

$$y''(t) + a_1 y' + a_2 y = b(t) \tag{ed}$$

et son équation homogène associée :

$$y''(t) + a_1 y' + a_2 y = 0 \tag{eh}$$

On vient de montrer que l'on pouvait trouver deux solutions indépendantes $y_1(t)$ et $y_2(t)$ dans tous les cas,. Si on pense à la réduction du système, on tombe sur :

$$X' = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} b(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et $Y_1(t) = (y_1'(t), y_1(t))$ et $Y_2(t) = (y_2'(t), y_2(t))$ sont les solutions du système homogène associé. La méthode décrite précédement pour les systèmes dite qu'il faut chercher une solution (pour (SD)) sous la forme $c_1(t)Y_1(t) + c_2(t)Y_2(t)$ et qu'on doit alors résoudre :

$$c_1'(t)Y_1(t) + c_2'(t)Y_2(t) = \begin{pmatrix} b(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ceci conduit au système :

$$\begin{cases} C_1'y_1' + C_2'y_2' = b\,(t) \\ \\ C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \end{cases}$$

Notons que la matrice $Y_1(t) \times Y_2(t)$ est pour tout $t$ inversible. Cette matrice qu'on peut écrire sous la forme :

$$M_w(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}$$

et est appelée la *matrice Wronskienne* de $y_1$ et $y_2$. Le déterminant de la matrice wronskienne est appelé le *Wronskien* :

$$w(y_1, y_2) = y_1'(t)y_2(t) - y_2'(t)y_1(t)$$

## 2.3 Systèmes généraux

### 2.3.1 Suivi du système par changement de base

La premiére cas est que si $X(t)$ est solution de $(SD)$, alors $\bar{X}(t) = P^{-1}X(t)$ est solution du systéme :

$$d\tilde{X}/dt = \tilde{A}\tilde{X} + \tilde{B}$$

avec :

$$\tilde{A} = P^{-1}AP, \tilde{B} = P^{-1}B$$

### 2.3.2 Cas d'une matrice triangulaire

Expliquons comment on traite le cas triangulaire sur un exemple trés simple, mais la méthode est générale. Considérons par exemple :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \\ \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{22}x_2(t) \end{cases}$$

Il faut de commencer par résoudre éxplicitement la deuxiéme équation. Une fois trouvé $x_2(t)$, la premiére équation n'est plus qu'une équation différentielle pour $x_1(t)$.

### 2.3.3 Méthode générale

Si on ne vous propose pas de téchnique particuliére la téchnique suivante conduit à une construction d'un système de solutions du problème $(H)$. On calcule d'abord le polyñome caractéristique

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

C'est un polynôme de degré $n$ dont on recherche les racines distinctes $\alpha_j$ $(j = 1, \ldots, q)$ dans $\mathbb{C}$. On définit $n_j$ comme étant la multiplicité de $\alpha_j$ et on a la décomposition suivante de $P$ :

$$P(\lambda) = (\alpha_1 - \lambda)^{n_1} \ldots (\alpha_q - \lambda)^{n_q}$$

Pour chaque racine $\alpha_j$, on cherche une base $V_i^j$ de $\ker(A - \alpha_j)^{n_j}$ , $(i = 1, \ldots, n_j)$, dont on peut démontrer que c'est un éspace (complèxe) dont la dimension est $n_j$. On peut alors construire, pour $j = 1, \ldots, q, n_j$ solutions indépendantes de $(H)$ en considérant :

$$Y_{ij}(t) = \exp(\alpha_j t) \times \sum_{p=0}^{n_j - 1} \frac{t_p}{p!}(A - \alpha_j)^p V_i^j, \text{ pour } i = 1, \ldots, n_j$$

On vérifie que l'on produit ainsi $n$ solutions indépendantes, en remarquant que $n = \sum_j n_j$ [13].

## 2.4 Problème de Cauchy et courbes caractéristiques

Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ avec les paramètres $y^1$ et $y^2$. On cite $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$ une fonction définie sur $\Omega$, à valeur dans $\mathbb{R}^n$. On note :

$$u_\alpha = \frac{\partial u}{\partial y^\alpha} = \partial_\alpha u = (\partial_\alpha u_1, \partial_\alpha u_2, \ldots, \partial_\alpha u_n)$$

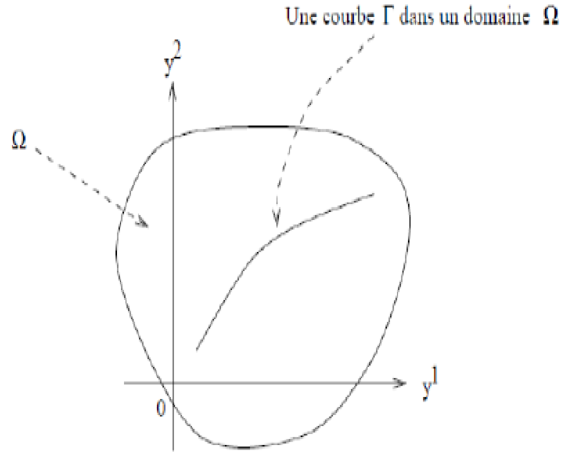


FIG. 2.1 – Une courbe $\Gamma$ dans un doumaines $\Omega$.

Soit $P$ l'opérateur différentiel du $1^{er}$ ordre :

$$P(u) = A\frac{\partial u}{\partial y^1} + B\frac{\partial u}{\partial y^2} \tag{2.1}$$

où $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont des matrices $n \times n$ de fonctions réelles sur $\Omega$.

$$P(u) = Au_{,1} + Bu_{,2}$$

Considérons le système linéaire de $n$ équations aux dérivées partielles du $1^{er}$ ordre :

$$P(u) = f(y^1, y^2, u) \text{ dans } \Omega, \tag{2.1*}$$

où $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une fonction définie sur $\Omega$ et qui peut dépendre de $u$. Soit $\Gamma$ une courbe de $\Omega$, définie de manière implicite par une fonction réelle $f$ :

$$\Omega = \left\{(y^1, y^2) \in V \subset \Omega : \phi(y^1, y^2)\right\} = 0 \tag{2.2}$$

On suppose que $\phi$ est suffisamment régulière et $\phi_{,1}^2 + \phi_{,2}^2 \neq 0$, de sorte que $\Omega$ est régulière.

### 2.4.1 Problème de Cauchy et courbes caractéristiques

Etant donnée une fonction définie sur $\Omega$ : $\psi = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)$, que nous supposerons régulière (de classe $C^1$), le problème de Cauchy $(P)$ consiste à déterminer une fonction solution de l'équation (2.1*) et satisfaisant à la donnée de Cauchy :

$$u = \psi \text{ le long de } \Omega$$

**Définition 2.4.1** *Soit un éspace fonctionnel $V$. On dit que le problème de Cauchy $(P)$ est* ***bien posé*** *dans $V$ s'il éxiste une unique solution $u$ dans $V$ au problème $(P)$.*

La Définition 2.4.1 de problème *bien posé* doit être nuancée selon que la dépendance de la solution du problème de Cauchy est continue ou non par rapport à la donnée de Cauchy, dans l'affirmative, on dit que le problème de Cauchy est **bien posé au sens de Hadamard**.

**Définition 2.4.2** *Considérons le problème de Cauchy $(P)$ avec une donnée de Cauchy sur une courbe $\Omega$ définie par une fonction $\phi$ comme en (2.2). La courbe $\Gamma$ est dite* ***libre*** *ou* ***non-caractéristique*** *si $\det(\phi_{,1}A+\phi_{,2}B) \neq 0$ partout le long de $\Gamma$. La courbe $\Gamma$ est dite* ***caractéristique*** *si $\det(\phi_{,1}A+\phi_{,2}B) = 0$ partout le long de $\Gamma$.*

Justifions la dénomination *caractéristique* de la Définition 2.4.2. Etant donné $u = \psi$ sur une courbe $\Gamma$, cherchons à déterminer les valeurs de toutes les dérivées partielles premières des inconnues $(u_1, u_2, , ..., u_n)$ en chaque point de la courbe $\Gamma$. D'une part, le système (2.1) donne $n$ équations. Et d'autre part, en dérivant $u = \psi$ le long de $\Gamma$ (c'est-à-dire suivant les directions tangentes[1] le long de $\Gamma$), nous obtenons $n$ équations supplémentaires :

$$\phi_{,2}u_{,1} - \phi_{,1}u_{,2} = y'$$

D'où le système linéaire de $2n$ équations à $2n$ inconnues en chaque point de $\Gamma$ :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ \phi_{,2}I_n & -\phi_{,1}I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{,1} \\ u_{,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(\psi) \\ \psi' \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Il est facile de voir que :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ \phi_{,2}I_n & -\phi_{,1}I_n \end{pmatrix} = \det(\phi_{,1}A+\phi_{,2}B)$$

Ainsi, le système linéaire (2.3) est inversible (ou de Cramer) si et seulement si $\det(\phi_{,1}A+\phi_{,2}B) \neq 0$ le long de $\Gamma$, c'est à dire si $\Gamma$ est non-caractéristique.

Dans le cas contraire, si la courbe $\Gamma$ est caractéristique, la donnée de Cauchy $\psi$ ne peut pas être quelconque : en tout point de $\Gamma$, $[f(\psi), \psi']$ doit appartenir à l'image de l'application linéaire associée à la matrice du système (2.3). C'est à dire que la fonction $\psi$ doit vérifier une certaine équation de compatibilité, mais on obtient alors une infinité de solutions ; sinon, le système (2.3) (et donc le problème de Cauchy) ne possède pas de solution. D'où la proposition :

[1] Sur $S$ une hypersurface $\phi(y^1, .., y^n) = 0$, une direction $a = (a^1, ..., a^n)$ est tangente à $S$ si la dérivée de $\phi$ dans la direction $a$ est nulle :
$\frac{d}{ds}\phi(y^1 + a^1 s, \ldots, y^n + a^n s) = a^1\phi_{,1} + \ldots + a^n\phi_{,n} = 0$

**Proposition 2.4.1** *Si la courbe $\Gamma$ est une courbe caractéristique de (2.1), alors le problème de Cauchy $(P)$ n'est pas bien posé .*

Etant donné le problème de Cauchy $(P)$, faisons le changement de variable :

$$\begin{cases} x^1 = \phi(y^1, y^2) \\ \\ x^2 = \varphi(y^1, y^2) \end{cases}$$

où $\varphi$ est une fonction quelconque. En posant :

$$\tilde{u}(x^1, x^2) = u(y^1, y^2)$$

l'opérateur différentiel $P$ devient :

$$P(u) = \tilde{P}(\tilde{u}) = \tilde{A}\tilde{u}_1 + \tilde{B}\tilde{u}_2$$

avec $\tilde{A} = (\phi_{,1}A + \phi_{,2}B)$ et $\tilde{B} = (\varphi_{,1}A + \varphi_{,2}B)$. Si bien que $A$ est inversible si la courbe $\Gamma$ est libre. On peut alors ramener le problème de Cauchy $(P)$ à la configuration suivante :

$$\begin{cases} u_{,1} + Bu_{,2} = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = \psi \text{ sur } x^1 = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

C'est la configuration usuelle du problème de Cauchy [7].

Reprenons le problème de Cauchy $(P)$. Si la courbe $\Gamma$ est libre, alors il est possible de déterminer toute les dérivées partielles premières des inconnues $(u_1, u_2, ..., u_n)$ le long de $\Gamma$. Dans le cas où tous les coefficients et la donnée de Cauchy sont analytiques et si $\Gamma$ est elle même une courbe analytique[2], nous pouvons en réitérant le même procédé, déterminer les dérivées partielles des $(u_1, u_2, ..., u_n)$ à tous les ordres et en tout point de $\Gamma$. La série entière ainsi obtenue en chaque point de $\Gamma$ est convergente dans un voisinage du point de $\Gamma$ observé :

**Théorème 2.4.1** ***(Cauchy-Kowaleska)*** *Etant donné le système (2.1) avec tous ses coefficients analytiques et une courbe analytique $\Gamma$ libre pour (2.1). Pour toute donnée de Cauchy analytique, il existe un voisinage de $\Gamma$ où il existe une unique solution analytique au problème de Cauchy (P).*

**Proposition 2.4.2** *Soit $P$ l'opérateur différentiel du 1$^{er}$ ordre défini comme en (2.1), alors les courbes caractéristiques de $P$ sont invariantes par changement de variables.*

[2] C'est à dire que la courbe $\Gamma$ peut être définie par un paramétrage analytique. Si bien que le problème de Cauchy $(P)$ peut se ramener dans la configuration (5) avec des coefficients analytiques.

**Preuve.** Soit $x^1 = x^1(y^1, y^2)$ et $x^2 = x^2(y^1, y^2)$ un changement de variable et $\Gamma$ une courbe caractéristique de $P$. $\Gamma$ est décrite par $\tilde{\phi}(x^1, x^2) = \phi(y^1, y^2) = 0$. En posant :

$$\tilde{u} = (x^1, x^2) = u(y^1, y^2)$$

L'opérateur $P$ se réécrit dans les nouvelles variables :

$$\tilde{P}(\tilde{u}) = \tilde{A}\tilde{u}_{,1} + \tilde{B}\tilde{u}_{,2}$$

avec $\tilde{A} = \left[\frac{\partial x^1}{\partial y^1}A + \frac{\partial x^1}{\partial y^2}B\right]$ et $\tilde{B} = \left[\frac{\partial x^2}{\partial y^1}A + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}B\right]$. Ainsi, $\Gamma$ est une courbe caractéristique pour $\tilde{P}$ si $\det(\tilde{\phi}_{,1}\tilde{A} + \tilde{\phi}_{,2}\tilde{B}) = 0$. Dévelopons

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{,1}\tilde{A} + \tilde{\phi}_{,2}\tilde{B} &= \tilde{\phi}_{,1}[\frac{\partial x^1}{\partial y^1}A + \frac{\partial x^1}{\partial y^2}B] + \tilde{\phi}_{,2}[\frac{\partial x^2}{\partial y^1}A + \frac{\partial x^2}{\partial y^2}B] \\ &= [\tilde{\phi}_{,1}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} + \tilde{\phi}_{,2}\frac{\partial x^2}{\partial y^1}]A + [\tilde{\phi}_{,1}\frac{\partial x^1}{\partial y^2} + \tilde{\phi}_{,2}\frac{\partial x^2}{\partial y^2}]B\end{aligned}$$

où nous reconnaissons

$$\phi_{,1} = \tilde{\phi}_{,1}\frac{\partial x^1}{\partial y^1} + \tilde{\phi}_{,2}\frac{\partial x^2}{\partial y^1} \text{ et } \phi_{,2} = \tilde{\phi}_{,1}\frac{\partial x^1}{\partial y^2} + \tilde{\phi}_{,2}\frac{\partial x^2}{\partial y^2}$$

D'où $\det(\tilde{\phi}_{,1}\tilde{A} + \tilde{\phi}_{,2}\tilde{B}) = \det(\phi_{,1}A + \phi_{,2}B) = 0$ sur $\Gamma$. ■

Il se peut que le $\det(\phi_{,1}A + \phi_{,2}B)$ soit nul quelle que soit la fonction $\phi$,dans la configuration du problème de Cauchy ($P$), c'est à dire que toute courbe $\Gamma$ dans $\Omega$ est une courbe caractéristique pour le problème de Cauchy ($P$). Dans ce cas, il n'est pas possible de ramener le pr oblème de Cauchy sous la forme (2.4), on dit que le *système est non-Kowaleskien.* C'est un cas pathologique de système linéaire du $1^{er}$ ordre dont la théorie des déformations inextensionnelles d'une surface donne un des premiers exemples historiques, via le système de flexion en coordonnée cartésienne (3.6.2).

Malgré l'hypothèse très restrictive concernant l'analycité des coefficients et de la donnée de Cauchy, il n'existe pas d'énoncé plus général au Théorème 2.4.1. donc il existe des exemples de systèmes aux coefficients très réguliers (de classe $C^\infty$) et qui n'admettent aucune solution.

A priori, le théorème de Cauchy-Kowaleska n'indique l'unicité que pour des solutions analytiques. L'unicité est en fait plus générale [6].

### 2.4.2 Théorèmes de Holmgren et de Carleman

Examinons l'opérateur différentiel $P$ défini en (2.1), nous avons les théorèmes classiques d'unicité :

**Théorème 2.4.2** *(**Holmgren**) Soit $u \in H^2$ une solution du problème $P(u) = 0$ où les coefficients de $P$ sont analytiques et $u = 0$ sur une courbe $\Gamma$ non-caractéristique de classe $C^1$. Alors $u$ est identiquement nulle dans un voisinage de chaque point de $\Gamma$.*

Le théorème est valable pour des systèmes à un nombre de variables quelconque. Cependant, pour un système à deux variables, le théorème de **Holmgren** a été étendu pour des systèmes à coefficients de classe $C^2$ et à caractéristiques simples (i.e., la multiplicité des racines de $\det(\xi_1 A + \xi_2 B) = 0$ est 1).

**Théorème 2.4.3** *(**Carleman**) Soit $u \in C^m(\Omega)$, $m \geq 0$, solution de l'équation (ou système) aux dérivées partielles $P(u) = 0$, avec un opérateur différentiel $P$, défini comme en (1.1), dont les coefficients sont de classes $C^2$ et dont les caractéristiques sont simples. Soit $\Gamma$ une portion de courbe régulière (de classe $C^2$) de $\Omega$. Si $u$ est nulle sur $\Gamma$, alors $u$ est identiquement nulle dans un voisinage de chaque point de $\Gamma$.*

Les théorèmes d'unicité précédents sont des énoncés locaux, mais on peut dans certain cas préciser le domaine d'unicité. Cela dépendra alors de la nature du système, nous allons préciser cela au cours des deux sections suivantes de ce chapitre [17] .

## 2.5 Cas d'un systèmes hyperbolique

Soit $u$ une fonction définie sur $\Omega$, un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. Considérons l'opérateur différentiel du $1^{er}$ ordre $P$ comme en (2.1) mais en prenant, sans perte de généralité pour la suite, $A = I_n$ :

$$P(u) = u_{,1} + u_{,2}B = f \tag{2.5}$$

Soit $\Gamma$ une courbe de $\Omega$ définie de manière implicite par une fonction réelle $\phi$ comme en (2.2). On pourra supposer, sans perte de généralité $\phi_{,1} \neq 0$. En posant

$$\tau = \phi_{,2}/\phi_{,1} \tag{2.6}$$

la courbe $\Gamma$ est une courbe caractéristique de (2.5) si :

$$D(\tau) = \det(B - \tau I_n) = 0 \tag{2.7}$$

$D(\tau)$ étant un polynôme de degré $n$ en $\tau$, il possède au plus $n$ racines réelles, distinctes ou non.

**Définition 2.5.1** *Si toutes les racines de $D(\tau)$ sont réelles, on dit que le système est **hyperbolique** ou à caractéristiques réelles. Si de plus les racines sont 2 à 2 distinctes, on dit que le système (2.5) est **strictement hyperbolique**. A l'opposé, si toutes les racines de $D(\tau)$ sont complexes, non réelles (cela est possible lorsque $n$ est pair), on dit alors que le système (2.5) est **elliptique**.*

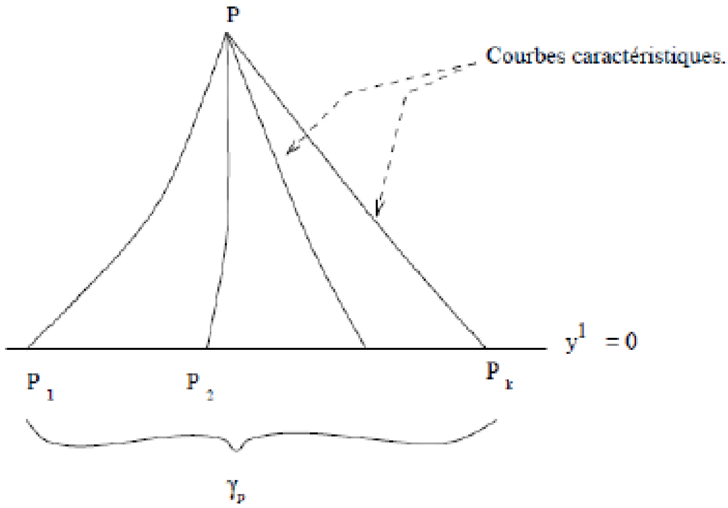


FIG. 2.2 – Les courbes caracteristeques q'elles coupent l'axe $y_1 = 0$ aux points $p_1 ... p_K$.

### 2.5.1 Problème de Cauchy pour un système hyperbolique.

Nous supposons que le système différentiel (2.5) est hyperbolique. Si de plus le système est rigoureusement hyperbolique alors la matrice $B$ est diagonalisable, de sorte que le système (2.5) peut être remplacé par un autre, linéairement équivalent (modulo un isomorphisme), avec une matrice $B$ diagonale. Considérons alors le problème de Cauchy avec $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ et $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ :

$$\begin{cases} u_{,1} + Bu_{,2} = f \text{ dans } \Omega \\ \\ u = \psi \text{ sur } y^1 = 0 \end{cases} \tag{p}$$

Soit $P$ un point de coordonnée $(y_0^1, y_0^2)$. Traçons les courbes caractéristiques $C_1, ..., C_k$ de l'opérateur $\mathbf{P}$ issues du point $P$. Elles coupent l'axe $y^1 = 0$ aux points $P_1, ..., P_k$ [4].

**Définition 2.5.2** - *La région délimitée par les points $P_1, ..., P_k$ est appelé domaine de dépendance du point $P$, on le note $\gamma_P$.*

**Définition 2.5.3** *Soit $\sigma$, un segment de l'axe $y^1 = 0$. Le domaine d'influence du segment $\sigma$ est l'ensemble des points dont le domaine de dépendance est intersecté par $\sigma$.*

**Définition 2.5.4** *Le domaine de détermination issu du segment $\sigma$ est l'ensemble des points dont le domaine de dépendance est inclus dans $\sigma$, on le note $D_d(\sigma)$.*

Les Définitions (2.5.2) et (2.5.3) sont fondamentales en théorie des systèmes différentiels linéaires hyperboliques. En effet, elles définissent les ensembles dans lesquelles une donnée de Cauchy à effectivement une influence sur une solution et en particulier l'ensemble dans lequel elle détermine une solution. Nous avons le théorème d'unicité :

**Théorème 2.5.1** *Soit le problème de Cauchy homogène* $(P_h)$*, avec* $\Gamma$ *une courbe libre :*

$$\begin{cases} u_{,1} + Bu_{,2} = f \ \ \textit{dans } \Omega \\ \\ \quad u = 0 \ \ \textit{sur } \Gamma \end{cases} \tag{p$_h$}$$

*Si le système est hyperbolique alors,* $u$ *est identiquement nul dans* $D_d(\Gamma)$*, le domaine de détermination issu de* $\Gamma$*.*

Dans le cas d'un problème de Cauchy pour un système hyperbolique analytique, les notions qui précédent n'ont plus de sens. En effet, dans ce cas, la solution est entièrement déterminée par prolongement analytique unique.

### 2.5.2 Système hyperbolique de deux équations : Problème de Goursat

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ avec les paramètres $y^1$ et $y^2$. Pour toute fonction $v = (v_1, v_2)$ définie sur $\Omega$, nous considérons le système différentiel linéaire du $1^{er}$ ordre :

$$\begin{cases} v_{1,1} - a_1^\alpha v_\alpha = 0 \\ \\ v_{2,2} - a_2^\alpha v_\alpha = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

où les coefficients $a_\beta^\alpha$ sont des fonctions continues sur $\bar{\Omega}$. Le système différentiel (2.8) est strictement hyperbolique et ses courbes caractéristiques sont les courbes à $y^1 = \textit{constante}$ et les courbes à $y^2 = \textit{constante}$. Tous les systèmes différentiels linéaires du $1^{er}$ ordre strictement hyperboliques peuvent se ramener (par un changement de variable) sous la forme (2.8) dite *forme diagonale*.

Nous examinons maintenant des problèmes de valeurs *initiales* différentes du problème de Cauchy. Il s'agit du problème de Goursat où on se donne des valeurs initiales qui ne sont plus sur une même courbe transversale aux caractéristiques mais des données (qu'on pourra indiquer par analogie comme des **données de Goursat**) sur une courbe caractéristique $C$ et sur une courbe $\Gamma$, transversale aux caractéristiques. De plus, ces deux courbes coupées en un point et sont telles qu'il n'y a pas de courbe caractéristique entre $C$ et $\Gamma$.

**Théorème 2.5.2** ***(Problème de Goursat)*** *Posons* $\Omega = [0, T_1] \times [0, T_2]$ *un domaine de* $\mathbb{R}^2$ *et soit* $\Gamma$ *une courbe régulière de* $\Omega$ *contenant le point* $(0, 0)$*, donnée par*

$$\Gamma = \{(y^1, y^2)/y^2 = \varphi(y^1)\}$$

*où $\varphi$ est une fonction bijective définie sur* $[0, T_1]$ *et à valeur dans* $[0, T_2]$ *de classe* $C^1$ *telle que* $\varphi(0) = 0$. *Pour toutes fonctions* $\psi_1 \in L^2[0, T_1]$ *et* $\psi_2 \in L^2[0, T_2]$ *, il existe une unique fonction* $v = (v_1, v_2) \in L^2(\Omega)$ *solution du système différentiel hyperbolique (2.8)*

$$\begin{cases} v_{1,1} - a_1^\alpha v_\alpha = 0 \\ \\ v_{2,2} - a_2^\alpha v_\alpha = 0 \end{cases}$$

*et satisfaisant aux données sur* $\Gamma$ *et sur la courbe caractéristique* $y^1 = 0$ *:*

$$\begin{cases} v_1(0, y^2) = \psi_2 \\ \\ v_2(y^1, \varphi(y^1)) = \psi_1(y^1) \end{cases} \tag{2.9}$$

Un différents problème est très important, variante du problème de Goursat, où les données de Goursat sont situées sur deux courbes caractéristiques, c'est le problème de Goursat *dégénéré* :

**Théorème 2.5.3** *Le Théorème* (2.5.2) *reste vrai si la courbe* $\Gamma$ *est également une courbe caractéristique* ($\varphi = 0$)*, c'est à dire que les données de Goursat sont données sur deux courbes caractéristiques (différentes).*

L'existence et l'unicité d'une solution au problème de Goursat sont classiques, dont les démonstrations usuelles consistent à faire des *approximations successives* de type Picard. Par une démonstration analogue, nous en tirons une autre variante où sur la courbe $\Gamma$ nous remplaçons la donnée de Goursat (2.9) par une relation de compatibilité entre les deux inconnues. C'est un résultat, dont les Théorèmes (2.5.2) et (2.5.3) peuvent être considéré comme des corollaires, qui nous servira à démontrer des théorèmes de rigidités de surfaces hyperboliques avec deux plis [10].

**Théorème 2.5.4** *Le Théorème* (2.5.2) *reste vrai en remplaçant la condition* (2.9)

$$\begin{cases} v_1(0, y^2) = \phi_2(y^2) \\ \\ v_2(y^1, \varphi(y^1)) = \phi_1(y^1)/v_1(y^1, \varphi(y^1)) \end{cases} \tag{2.10}$$

Pour démontrer le théorème (2.5.3), nous utilisons deux résultats d'analyse fonctionnelle, un prolongement d'opérateur intégral (Lemme 2.5.2) et une variante d'un théorème de trace (Lemme 2.5.2), ils seront utilisés de nouveau dans la suite de ce mémoire.

**Lemme 2.5.1** *Soit* $v$ *une fonction de* $L^2(\Omega)$ *avec* $v_{,1} \in L^2(\Omega)$*, où* $\Omega = [0, T_1] \times [0, T_2]$. *Soit une courbe* $\Gamma$ *dans* $\Omega$ *décrite par un difféomorphisme* $\psi$ *de classe* $C^1$ *de*

*$[0, T_2]$ dans $[0, T_1]$, avec $\psi(0) = 0$, $\Gamma = \{(y^1, y^2)/y^1 = \psi(y^2)\}$. Alors $v$ possède une trace dans $L^2(\Gamma)$ et nous avons :*

$$\int_0^{T_1} \left|v(y^1, \psi^{-1}(y^1))\right|^2 dy^1 \leq |\psi'|^2 \left[\frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}}{T} + \|v_{,1}\|_{L^2(\Omega)}\right] \tag{2.11}$$

**Lemme 2.5.2** *Soit $\Omega = [0, T_1] \times [0, T_2]$ et soit $\Gamma$ une courbe dans $\Omega$ définie par une fonction $\psi : \Gamma = \{(x^1, x^2) : x^2 = \psi(x^1)\}$. Soit $A$ l'opérateur linéaire de $C(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, définie, $\forall v \in C(\Omega)$, par :*

$$A(v)(x^1, x^2) = \int_{\psi(x^1)}^{x^2} v(x^1, t)dt \tag{2.12}$$

*Pour toute fonction $v$ de $C(\Omega)$ nous avons l'estimation :*

$$\|A(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq T_2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.13}$$

*de sorte que $A$ se prolonge par continuité en un opérateur, toujours noté $A$, défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ satisfaisant pour toute fonction $v$ de $L^2(\Omega)$ à :*

$$A(v)_{,2} = v \in L^2(\Omega)$$

*et*

$$A(v)_{|\Gamma} = 0$$

**Preuve.** Démonstration du théorème (2.5.3). Soit $A$ l'opérateur défini pour toutes fonctions continues $u_1$ et $u_2$ sur $\Omega$ : $A(u_1, u_2) = (v_1, v_2)$ avec :

$$\begin{cases} v_1(y^1, y^2) = \int_0^{y^1} a_1^\alpha u_\alpha(\hat{y}, y^2) d\hat{y}^1 + \phi_2(y^2) \\ v_2(y^1, y^2) = \int_{\varphi(y^1)}^{y^2} a_2^\alpha u_\alpha(y^1, \hat{y}^2) d\hat{y}^2 + \phi_1(y^1) v_1(y^1, \varphi(y^1)) \end{cases} \tag{2.14}$$

D'une façon classique les opérateurs intégraux dans (2.14) sont prolongés par continuité, comme dans le Lemme (2.5.2), de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. On prolonge alors de même l'opérateur $A$ de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ tout en gardant les mêmes notations. Il est facile de voir qu'un point fixe de l'opérateur $A$ est une solution du problème (2.8) - (2.10) et réciproquement. Il reste alors à démontrer que $A$ possède un unique point fixe pour prouver le Théorème (2.5.4). Pour $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) = A(u_1, u_2) - A(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ et en posant $(\tilde{u}, \tilde{u}) = (u_1, u_2) - (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, en considérant la première équation de (2.14), d'après le Lemme (2.5.2), nous avons l'inégalité :

$$\|\tilde{v}_1\|^2_{L^2(\Omega)} \leq MT_1[\|\tilde{u}_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_2\|^2_{L^2(\Omega)}] \tag{2.15}$$

où on peut poser

$$M = \sup_{\Omega}[a^{\beta}_{\alpha}] + \sup_{[0,T_1]}|\phi_1| \times \sup_{[0,T_2]}\left|\varphi^{-1}\right|$$

De même, avec la deuxième équation de (2.14), nous avons :

$$\|\tilde{v}_2\|^2_{L^2(\Omega)} \leq MT_2[\|\tilde{u}_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_2\|^2_{L^2(\Omega)}] + \sup_{[0,T_1]}|\phi_1|^2 \int\limits_0^{T_1} dy^2 \int\limits_0^{T_1} \left|\tilde{v}_1(y^1,\varphi(y^1))\right|^2 dy^1$$

qui entraîne, d'après le Lemme (2.5.1) :

$$\|\tilde{v}_2\|^2_{L^2(\Omega)} \leq MT_2[\|\tilde{u}_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_2\|^2_{L^2(\Omega)}] + M[\|\tilde{v}_1\|^2_{L^2(\Omega)} + T_2\,\|\tilde{v}_{1.1}\|^2_{L^2(\Omega)}]$$

Or nous avons $\tilde{v}_{1,1} = a^{\alpha}_1\tilde{u}_{\alpha}$ qui donne l'inégalité :

$$\|\tilde{v}_{1,1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq M[\|\tilde{u}_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_2\|^2_{L^2(\Omega)}]$$

et finalement en combinant la dernière inégalité avec (2.15), nous obtenons :

$$\|\tilde{v}_2\|^2_{L^2(\Omega)} \leq MT_2[\|\tilde{u}_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_2\|^2_{L^2(\Omega)}] \tag{2.16}$$

Si bien que l'opérateur $A$ est lipschitzienne de constante $k$ avec $k \leq M \times \sup(T_1, T_2)$. Ainsi pour $T_1$ et $T_2$ suffisamment petit, la constante $k$ devient strictement inférieur à 1, l'opérateur $A$, devenant contractant, possède alors un unique point fixe en vertu du lemme du point fixe[3]. La constante $k$ ne dépendant que du domaine $\Omega$, le théorème est démontré de proche en proche. ■

Il est simple en reprenant exactement les différentes étapes de la démonstration du Théorème (2.5.4), de montrer l'existence et l'unicité du problème de Cauchy pour un système hyperbolique dans le domaine de détermination en remplaçant l'opérateur $A$ en (2.14) par

$$\begin{cases} v_1(y^1,y^2) = \int_{\varphi^{-1}(y^2)}^{y^1} a^{\alpha}_1 u_{\alpha}(\hat{y}^1,y^2)d\hat{y}^1 + \psi_2(y^2) \\ \\ v_2(y^1,y^2) = \int_{\varphi(y^1)}^{y^2} a^{\alpha}_2 u_{\alpha}(y^1,\hat{y}^2)d\hat{y}^2 + \psi_1(y^1) \end{cases} \tag{2.17}$$

La régularité des solutions d'un problème de Cauchy pour un système hyperbolique dépend de la régularité de la donnée de Cauchy, c'est le phénomène de *propagation des singularités* propre aux systèmes hyperboliques, par exemple l'équation des ondes.

[3]Lemme du point fixe : Soit f une application de $E$ dans $E$, où $E$ est un espace de Banach. Si $f$ est contractante i.e., $\|f(x) - f(y)\|_E \leq k\,\|x - y\|_E$ $\forall x, y \in E$, où $k < 1$ alors $f$ possède un unique point fixe, voir par exemple .

## 2.6 Equation différentielle du second ordre : Cas éliptique

Soit $u$ une fonction réelle définie sur $\Omega$, un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$ et soit l'opérateur différentiel du $2^{ème}$ ordre :

$$B(u) = b_{11}u_{,11} + 2b_{12}u_{,12} + b_{22}u_{,22} \tag{2.18}$$

Considérons l'équation différentielle du $2^{ème}$ ordre :

$$B(u) = F \tag{2.18a}$$

où les fonctions $b_{\alpha\beta}$ sont des fonctions réelles définies sur $\Omega$ et $F$ une fonction dépendant des paramètres, et pouvant dépendre (linéairement) de $u$ et des dérivées partielles premières de $u$ [6].

### 2.6.1 Équation caractéristique d'une équation différentielle du second ordre

Soit $\Gamma$ une courbe définie de façon implicite par une fonction $f$ :

$$\Gamma = \{(y^1, y^2) \in \Omega / \phi(y^1, y^2) = 0\} \tag{2.19}$$

On suppose que $\phi$ est régulière et $\phi_{,1}+ \phi_{,2} \neq 0$, de sorte que la courbe $\Gamma$ est régulière. En posant :

$$\begin{aligned} v_1 &= u_{,1} \\ v_2 &= u_{,2} \end{aligned}$$

dans (2.18) et en écrivant l'égalité de Schwarz, l'équation différentielle du second ordre (2.18a) est équivalente à un système aux dérivées partielles linéaire à deux inconnues :

$$\begin{cases} b_{11}v_{1,1} + b_{12}v_{2,1} + b_{22}v_{2,2} = F \\ \\ v_{2,1} - v_{1,2} = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

dont la courbe $\Gamma$, d'après la Définition (2.4.2), est une courbe caractéristique si en chaque point de $\Gamma$, nous avons :

$$\det\left(\phi_{,1}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \phi_{,2}\begin{pmatrix} b_{12} & b_{22} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 \tag{2.21}$$

c'est à dire si en chaque point de $\Gamma$, nous avons :

$$\phi_{,1}^2 b_{11} + 2\phi_{,1}\phi_{,2}b_{12} + \phi_{,2}^2 b_{22} = 0 \tag{2.22}$$

L'équation (2.22) est appelée équation caractéristique de l'opérateur $B$ [11].

**Définition 2.6.1** *Soit $\Gamma$ une courbe définie comme en (2.19). On dira que $\Gamma$ est une courbe caractéristique de l'opérateur différentiel du $2^{ème}$ ordre $B$, définie comme en (2.18), si en chaque point de $\Gamma$, elle satisfait à l'équation caractéristique (2.22).*

L'existence de solution réelle à l'équation caractéristique (2.22), c'est à dire de courbe caractéristique (réelle) dépend du signe du discriminant $\Delta$ :

$$\Delta = b_{12}^2 - b_{11}b_{22} \tag{2.23}$$

- Si $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 < 0$ partout dans $\Omega$, alors il existe deux familles distinctes de courbes caractéristiques, autrement dit par chaque point de $\Omega$ passent exactement deux courbes caractéristiques distinctes.
- Si $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0$ partout dans $\Omega$, alors il existe une unique famille de courbes caractéristiques, autrement dit en chaque point de $\Omega$ il passe exactement une courbe caractéristique.
- Si $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$ partout dans $\Omega$, alors il n'existe pas de courbe caractéristique (réelle) dans $\Omega$.

C'est la *classification usuelle* des opérateurs différentiels du $2^{ème}$ ordre :

**Définition 2.6.2** *On dira que $B$ est* ***hyperbolique, parabolique*** *ou* ***elliptique*** *suivant que le signe de $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$ est strictement négatif, nul ou strictement positif uniformément sur $\Omega$.*

### 2.6.2 Cas d'une équation élliptique : Propriétés de regularité et de trace.

Dans le cas d'une équation différentielle du second ordre élliptique, c'est à dire qu'il n'éxiste pas de caractéristiques réelles, il éxiste de nombreux résultats concernant des théorèmes de prolongement unique, de régularité intérieure et de trace au bord des solutions. Concernant, le prolongement unique, nous citons ici un théorème de **L. Hörmander** , complétant des travaux de Aronszajn et de Cordes, dont nous simplifions largement l'énoncé, le restreignant dans un cadre qui nous suffira pour obtenir des cas d'inhibition de surfaces elliptiques [3].

**Théorème 2.6.1** ***(Prolongement unique)*** *Soit $\Omega$ un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$. Soit $B$ un opérateur différentiel du second ordre :*

$$B(u) = b_{11}u_{,11} + 2b_{12}u_{,12} + b_{22}u_{,22} \tag{2.24}$$

*où les fonctions $b_{\alpha\beta}$ sont continues lipschitziennes sur $\Omega$. On suppose que $B$ est uniformément elliptique ($b_{11}b_{22}-b_{12}^2 > 0$ sur $\bar{\Omega}$) et que pour une fonction $u \in H^2(\Omega)$ :*

$$|B(u)| \leq \sum_{|\alpha|\leq 1} c_\alpha |D^\alpha u| \tag{2.25}$$

*où les fonctions $c_\alpha$ sont continues lipschitziennes sur $\Omega$. Si la fonction $u$ est nulle dans un ouvert non vide contenu dans $\Omega$, alors $u$ est identiquement nulle dans $\Omega$.*

La régularité intérieure des solutions d'une équation différentielle élliptique du second ordre est classique [15].

**Théorème 2.6.2** ***(Régularité à l'intérieur)*** *Soit $\Omega'$ un ouvert dans $\mathbb{R}^2$. Soit $B$ un opérateur différentiel du second ordre elliptique comme en (2.24). Si $u \in H^{m+1}$ et $B(u) \in H^m(\Omega)$ alors $u \in H^{m+2}(\Omega)$ de même, si $B(u) \in C^m(\Omega)$ alors $u \in C^{m+2}(\Omega)$ pour tout $m \geq 0$ pour tout ouvert $W$ strictement inclus dans $\Omega'$(tel que $\bar{\Omega} \subset \Omega'$).*

Le Théorème (2.6.2) indique que la régularité de $u$ est locale, ainsi plus les coefficients de $B$ sont réguliers dans une partie intérieure de $\Omega$ et plus $u$ y sera régulière. Mais par contre il ne donne aucun renseignement sur le bord de $\Omega$ même si les coefficients sont très réguliers. Cependant il est malgré tout possible de donner un sens à une solution même faible de la trace sur le bord de $W$ qui nous sera utile pour une preuve de la proposition suivante :

**Proposition 2.6.1** ***(Trace au bord d'une solution d'équation élliptique)*** *Soit $u$ une fonction dans $L^2(\Omega)$, où $W$ est un ouvert à bord régulier[4] de $\mathbb{R}^2$, telle que $\Delta u \in H^{-1}(\Omega)$. Alors la trace de $u$ sur une partie $\Gamma$ du bord $\partial\Omega$, a un sens dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ [9].*

## 2.7 Annexe au chapitre 2

**Lemme 2.7.1** ***Théorème de trace*** *: Soit $v$ une fonction de*

$$Z = \{u \in L^2(\Omega) \ et \ u_{,1} \in L^2(\Omega)\}, où \ \Omega = \{[0, T_1] \times [0, T_2]\}$$

*Soit une courbe $\Gamma$ dans $\Omega$ décrite par un difféomorphisme $\psi$ de classe $C^1$ de $[0, T_2]$ dans $[0, T_1]$, avec $\psi(0) = 0.$ : $\Gamma = \{(y^1, y^2)/y^1 = \psi(y^2)\}$. Alors $v$ possède une trace dans $L^2(\Gamma)$ et nous avons :*

$$\int_0^{T_1} \left| v(y^1, \psi^{-1}(y^1)) \right|^2 dy^1 \leq |\psi'|^2 \left[ \frac{\|v\|_{L^2(\Omega)}}{T} + \|v_{,1}\|_{L^2(\Omega)} \right] \tag{2.26}$$

**Preuve.** Preuve du Lemme (2.5.1) : De façon classique, nous démontrons le lemme pour toute fonction $v$ dans $C^1(\bar{\Omega})$, puis nous prolongeons par continuité. Définissons alors la trace d'une fonction $v$ comme la restriction de $v$ sur la courbe $\Gamma$ (on note usuellement l'application trace par $\gamma_0$). En faisant le changement de variable $\hat{y}^1 = \psi(y^2)$ , nous avons :

$$\|\gamma_0(v)\|^2_{L^2(\Gamma)} = \int_0^{T_1} \left| v(\hat{y}^1, \psi^{-1}(\hat{y}^1)) \right|^2 d\hat{y}^1 = \int_0^{T_2} \left| v(\psi(y^2), y^2) \cdot \psi'(y^2) \right|^2 dy^2 \tag{2.27}$$

[4] Par exemple de classe $C^1$.

or

$$v(\psi(y^2), y^2) = v(y^1, y^2) - \int\limits_{\psi(y^2)}^{y^1} v_{,1}(t, y^2)dt$$

si bien que (2.26) devient :

$$\int\limits_0^{T_1} \left|v(\hat{y}^1, \psi^{-1}(\hat{y}^1))\right|^2 d\hat{y}^1 \leq |\psi'|^2 \left[\int\limits_0^{T_2} \left|v(y^1, y^2)\right|^2 dy^2 + \int\limits_0^{T_2} \left|\int\limits_{\psi(y^2)}^{y^1} v_{,1}(t, y^2)dt\right|^2 dy^2\right]$$

et en intégrant de 0 à $T_1$ par rapport à la variable $y^1$ :

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{T_1} \left|v(\hat{y}^1, \psi^{-1}(\hat{y}^1))\right|^2 d\hat{y}^1 dy^1 \\
\leq\ & |\psi'|^2 \left[\int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{T_2} \left|v(y^1, y^2)\right|^2 dy^2 dy^1 + \int\limits_0^{T_1}\int\limits_0^{T_2} \left|\int\limits_{\psi(y^2)}^{y^1} v_{,1}(t, y^2)dt\right|^2 dy^2 dy^1\right]
\end{aligned}$$

D'où :

$$T_1 \int\limits_0^{T_1} \left|v(\hat{y}^1, \psi^{-1}(\hat{y}^1))\right|^2 d\hat{y}^1 \leq |\psi'|^2 \left[\|v\|_{L^2(\Omega)} + T_1 \|v_{,1}\|_{L^2(\Omega)}\right] \tag{2.28}$$

d'autre façon, nous pouvons prolonger de façon unique l'opérateur trace par continuité de $\mathbb{Z}$ dans $L^2(\Gamma)$. En divisant (2.28) par $T_1$, nous obtenons l'estimation (2.26).
■

**Lemme 2.7.2** *Soit $\Omega = [0, T_1] \times [0, T_2]$ et soit $\Gamma$ une courbe dans $\Omega$ définie par une fonction $\psi : \Gamma = \{(x^1, x^2) : x^2 = \psi(x^1)\}$. Soit $A$ l'opérateur linéaire de $C(\Omega)$ dans $C(\Omega)$, définie, $\forall v \in C(\Omega)$, par :*

$$A(v)(x^1, x^2) = \int\limits_{\psi(x^1)}^{x^2} v(x^1, t)dt \tag{2.29}$$

*Pour toute fonction $v$ de $C(\Omega)$ nous avons l'éstimation :*

$$\|A(v)\|_{L^2(\Omega)} \leq T_2 \|v\|_{L^2(\Omega)} \tag{2.30}$$

*de manière que $A$ se prolonge par continuité en un opérateur, toujours noté $A$, défini de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ convenable pour toute fonction $v$ de $L^2(\Omega)$ à :*

$$A(v)_{,1} = v \in L^2(\Omega)$$

*et*

$$A(v)_{|\Gamma} \in L^2(\Omega) \text{ et } A(v)_{|\Gamma} = 0$$

**Preuve.** Preuve du Lemme (2.5.2) : Soit $v$ une fonction de $L^2(\Omega)$, il existe une suite $v_n$ de fonctions de $C^1(\Omega)$ telles que

$$\|v - v_n\|_{L^2(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ce qui entraîne, puisque $A$ est continu de $L^2$ dans $L^2$ :

$$\|A(v - v_n)\|_{L^2(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

et particulièrement au sens des distributions :

$$\langle A(v - v_n\ ), \varphi\rangle_{L^2(\Omega)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \forall\varphi \in D(\Omega)$$

où $D(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiable à support compact. Si bien que nous avons :

$$\langle A(v), \varphi\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A(v_n\ ), \varphi\rangle\,, \forall\varphi \in D(\Omega)$$

$A(v)$ étant dans $L^2$, on peut définir sa dérivée partielle au sens des distributions : pour toute fonction $\varphi$ de $D(\Omega)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\langle A(v)_{,1}, \varphi\rangle &= -\left\langle A(v), \varphi_{,1}\right\rangle \\
&= -\lim_{n\to\infty} \left\langle A(v_n), \varphi_{,1}\right\rangle \\
&= -\lim_{n\to\infty} \langle A(v_n)_{,1}, \varphi\rangle \\
&= \lim \langle v_n, \varphi\rangle \qquad\qquad = \langle v, \varphi\rangle
\end{aligned}$$

d'où

$$A(v)_{,1} = v \in L^2(\Omega)$$

Ce qui, d'après le Lemme (2.5.1), donne un sens à la trace de $A(v)$ sur $\Omega$, et nous avons :

$$\gamma_0(A(v)) = \lim_{n\to\infty} \gamma_0(A(v_n)) = 0$$

■

CHAPITRE 3

# QUELQUES EXEMPLES ET APPLICATIONS

Des problèmes dépendant de la physique ou de la mécanique se renvoient à l'étude d'équations aux dérivées partielles ou plus simplement d'équations différentielles. On se contentera de l'étude des cas les plus simples : les systèmes d'équations différentielles à coefficients constants.

## 3.1 Quelques éxemples

On a l'équation de Laplacien :

$$-\Delta u = f \tag{3.1}$$

Rappelons que si l'on dispose d'une distribution $u$ solution fondamentale du laplacien, c'est- à -dire de $-\Delta u = \delta_0$,

$$\Delta \phi(x) = (\partial_{rr}\varphi + \frac{n-1}{r}\partial_r \varphi)_r = |x| = 0$$

On peut résoudre cette équation différentielle, et obtenir le résultat suivant :

**Définition 3.1.1** *On définit sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ la fonction $\phi$ par :*

$$\phi(x) = -\frac{1}{2\Pi}\ln(\|x\|_2), \ \ si\ n = 2$$

*et*

$$\phi(x) = \frac{1}{(n-2) \times S_n\,|x|^{n-2}}, \ \ si\ n > 2$$

*où : $S_n = \dfrac{2\Pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ est la solution fondamentale du Laplacien.*

**Exemple 3.1.1** ***Système strictement hyperbolique en dimension 1 :*** *Soit $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$ suppose le système différentiel : $\partial_t u + A\partial_x u$ strictement hyperbolique (l'inconnue $u(t,x) \in \mathbb{R}^n$ pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$).*

*1. Qu'est-ce que cela signifie quant à $A$ ?*

*2. Soit $a \in C^1(\mathbb{R})$. Donner la solution du problème :*

$$\partial_t u + A\partial_x u = 0 \ dans \ (0, +\infty) \times \mathbb{R} \tag{3.2}$$

*satisfaisant $u(0,x) = a(x), x \in \mathbb{R}$ [15].*

**Exemple 3.1.2** ***Système hyperbolique symétrisable en dimension*** $d \geq 1$: *Soit $n, d \geq 1$ l'entier $d$ est la dimension d'éspace, $n$ nombre d'inconnue dans l'équation :*

$$\partial_t u(t,x) + \sum_{j=1}^{d} A_j \partial_j u(t,x) = 0 \tag{3.4}$$

*où les matrices $A_j \in M_n(R)$. Soit, pour $s \geq 1$, la condition initiale*

$$u(0,x) = a(x), a \in H^s(R^d)^n \tag{3.5}$$

*où*

$$\begin{cases} H^s(R^d) = \left\{ v \in L^2(R^d), \|v\|_{H^s(R^d)} < +\infty, \right\} \\ \\ \|v\|_{H^s(R^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} \left( (1+|k|^2)^s + |\hat{v}(k)|^2 \right) dk \end{cases}$$

*Le propos de ce example est de résoudre le problème de Cauchy (3.4)-(3.5) dans $H^s$ sous l'hypothèse que le système est symétrisable, savoir : il existe une matrice symétrique définie positive $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $j = 1, \ldots, d$, la matrice $SA_j$ soit symétrique [5].*

**Exemple 3.1.3** ***Opérateurs linéaires hyperboliques et propagation :*** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On examine l'opérateur différentiel d'ordre $\alpha$*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(.) D^\alpha$$

**Définition 3.1.2** *On appelle variété caractéristique de $L$ le sous-ensemble de $\Omega \times \mathbb{R}^n$ défini*

$$Car(L) = \{(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n, \sigma_m(x,\xi) = 0\} \tag{3.6}$$

*où $\sigma_m$ affecte le symbole principal de $L$.*

Par définition, $L$ est elliptique si et seulement si $Car(L) = \Omega \times \{0\}$. En fait, $Car(L)$ est une variété projective lisse. Demander qu'un opérateur différentiel $L$ soit hyperbolique, c'est, heuristiquement, demander que $Car(L)$ soit aussi grand que possible, comme le précise la définition suivante :

**Définition 3.1.3** *Soit $\eta \in \mathbb{R}^n$ et soit $x \in \Omega$. On dit que $L$ est hyperbolique au point $x$ dans la direction si les conditions suivantes sont vérifiées :$\sigma_m(x,\eta) \neq 0$ (on dit que n'est pas une direction caractéristique). Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, les racines de l'équation polynômiale en $\lambda$*

$$\sigma_m(x, \xi + \lambda\eta) = 0$$

*sont toutes réelles.*

**Exemple 3.1.4** ***Ondes planes :*** *Soit $L$ un opérateur différentiel à coefficients constants dans $\mathbb{R}^{n+1}$. On notera $\sigma(-\omega, k)$ pour $((t,x),(-\omega,k))$. On définit alors*

$$V = \{(-\omega, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \sigma(-\omega, k) = 0\}$$

*Notons qu'en général $V \neq Car(L)$. Par ailleurs, si $(-\omega, k) \in V$ alors la fonction $u(t,x) = e^{i(kx-\omega t)}$ est solution de $Lu = 0$. On dit que $u$ est une onde plane de vecteur d'ondes $k \in \mathbb{R}^n$ et de pulsation $\omega$.*

Si $k \neq 0$, cette onde se *propage* dans la direction $k$ à la vitesse de phase $\vartheta_\varphi = \frac{\omega}{|k|}$. L'équation $(\omega, k) = 0$ s'appelle relation de dispersion. Maintenant, quel est le lien avec un problème de Cauchy bien posé ? Pour simplifier, supposons que $L$ soit homogène de degré 2 et strictement hyperbolique dans la direction temporelle. Alors, si $k \neq 0$,comme $(0,k)$ n'est pas colinéaire à $\eta = (1, 0, \ldots, 0)$ l'équation polynômiale en $\omega$ est donnée par :

$$\sigma_2(-\omega, k) = 0$$

admet deux solutions distinctes $\omega_1(k)$ et $\omega_2(k)$. Cherchons alors une solution de l'équation $Lu = 0$ sous la forme

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} (a_1(k)e^{i(k.x-\omega_1(k)t} + a_2(k)e^{i(k.x-\omega_2(k)t})d\mu^{(n)}(k)$$

où $a_1$ et $a_2$ sont dans la classe de Schwarz $S(\mathbb{R}^n)$. Soient $u_0, v_0 \in S(\mathbb{R}^n)$. On impose les conditions initiales $u(0,x) = u_0(x)$ et $\partial_t u(0,x) = v_0(x)$. En rassemblant toutes ces hypothèses, on aboutit donc au système suivant :

$$\begin{cases} a_1(k) + a_2(k) = u_0(k) \\ \\ \omega_1(k)a_1(k) + \omega_2(k)a_2(k) = iv_0(k) \end{cases}$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \omega_1(k) & \omega_2(k) \end{pmatrix}$. Si $\det(A) \neq 0$ alors le système ci-desus est inversible, ce qui est le cas dès que l'on a *hyperbolicité stricte* : En somme, demander de l'hyperbolicité, c'est demander suffisamment d'ondes planes pour les construire les solutions [16].

**Exemple 3.1.5** *Résoudre le système différentiel :*

$$\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - 3x_3(t) \\ \\ x_2'(t) = x_1(t) - x_2(t) - 6x_3(t) \\ \\ x_3'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + 5x_3(t) \end{cases}$$

*avec conditions initiales* $x_1(0) = 1; x_2(0) = 1; x_3(0) = 0.$

*1.* ***Forme des solutions****. La matrice du système différentiel est*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

*Les solutions du système* $X' = AX$ *sont les* $X(t) = \exp(tA)X_0$*. Ici la condition initiale est* $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

*2.* ***Réduction à la forme*** $D + N$ *: La décomposition de Dunford de* $A$ *s'écrit ici* $P^{-1}AP = D + N$ *avec*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}, p^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 6 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$D$ *est bien diagonale ;* $N$ *est nilpotente, car* $N^2 = 0$ *; et* $DN = ND$.

*3.* ***Équation en*** $Y$*. Posons* $Y = P^{-1}X$ *(donc* $X = PY$*). Posons* $B = P^{-1}AP =$

$D + N$ *: alors*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

*L'équation* $X' = AX$ *devient une équation de* $Y$ *:* $Y' = BY$.

*4.* ***Solutions en*** $Y$*. Les solutions de* $Y' = BY$ *sont les* $Y(t) = \exp(tB)V$*,* $V \in \mathbb{R}$*.*

$$\begin{cases} \exp(tD) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \\ \\ \exp(tN) = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3t+1 & 3t \\ 0 & 3t & -3t+1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

*Ainsi*

$$\begin{aligned}\exp(tB) &= \exp(tD+tN)=\exp(tD)\\ \exp(tN) &= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0\\ 0 & (-3t+1)e^{2t} & 3te^{2t}\\ 0 & -3te^{2t} & (3t+1)e^{2t}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

*5.* ***Solutions en*** $X$ *[17]. Les solutions du système* $X'=AX$ *sont les*

$$X(t)=P\times\exp(tB)\times V=\begin{pmatrix} e^t & (-3t+1)e^{2t} & 3te^{2t}\\ \frac{1}{2}e^t & -3te^{2t} & (3t+1)e^{2t}\\ 0 & (t+\frac{2}{3})e^{2t} & -(t+1)e^{2t}\end{pmatrix}\times V$$

*6.* ***Solution en*** $X$ ***avec condition initiale****. On veut* $X(0)=X_0=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$*. Mais, en* $t=0$*, la solution*$X(t)=P\times\exp(tB)\times V_0$ *conduit à* $X(0)=PV_0$*, d'où* $V_0=P^{-1}X_0$*. On trouve* $V_0=(-2,3,2)$ *. On trouve alors* $X(t)=P\exp(tB)V_0$*, c'est-à-dire*

$$\begin{cases} x_1(t)=(-3t+3)e^{2t}-2e^{2t}\\ x_2(t)=(-3t+2)e^{2t}-e^{2t}\\ x_3(t)=te^{2t}\end{cases}$$

*L'ensemble des solutions de l'équation différentielle* $x''(t)+px'(t)+qx(t)=0$ *est un espace vectoriel de dimension* 2*. Comment trouver les solutions ? Le polynôme caractéristique de* $A$ *est*

$$\chi_A(X)=X^2+pX+q.$$

*Notons* $\lambda_1$ *et* $\lambda_2$ *les racines de* $\chi_A$*. Ce sont les valeurs propres de la matrice*$A$*, et il est donc naturel que les solutions fassent intervenirces racines. Soit* $\lambda$ *une racine du polynôme caractéristique :* $\lambda$ *est valeur propre de la matrice* $A$*. Soit* $V=(v_1,v_2)$ *un vecteur propre associé à cette valeur propre. Alors, la fonction*

$$X(t)=e^{\lambda t}V$$

*est solution du système différentiel* $X'=AX$*, donc* $x(t)=v_1e^{\lambda t}$ *est solution de l'équation différentielle* $x''(t)+px'(t)+qx(t)=0$ *[2].*

## 3.2 Quelques applications

### 3.2.1 En théorie des circuits électriques

Le courant électrique $y(t)$ dans un circuit alimenté par une source alternative de fréquence $\omega$ convient à une équation différentielle de la forme :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \cos(\omega t + \phi)$$

avec $a \neq 0$. On voudra déterminer la solution $t \mapsto y(t)$. Cette équation est appelée *oscillateur harmonique forcé*. La nature des solutions dépendra fortement des valeurs des réels $a, b, c, \alpha$ et $\omega$ [8].

### 3.2.2 En mécanique classique

Le mouvement d'un corps supposé ponctuel (en tenant à son centre de masse) de masse 1 se déplaçant dans $\mathbb{R}^3$ (ou dans un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$) et qui obéit à un champ de potentiel $V$ est donné par un systéme d'équations différentielles :

$$\frac{d_2 x_j(t)}{dt^2} = -(\partial x_j V)(x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \text{ pour } j = 1, ..., 3$$

Le dit système cité prècidement a plusieurs solutions . La principale raison est que l'on doit au moins savoir la situation à unmoment donné disons $t_0$. Par situation, on comprend ici la connaissance de la position à moment $t_0 x(t_0) = x_0$, mais aussi de sa vitesse : $\frac{dx}{dt(t_0)} = v_0$. Spécifiquement : le potentiel $V$ est un potentiel de Coulomb $V = -\dfrac{1}{|x|}$ (marquant l'attrraction fait sur le corps examiné par un autre corps indiqué ponctuel à l'origine), ou est un potentiel dit harmonique :

$$V(x) = \sum_{i=1}^{3} \omega_i x_i^2$$

Dans le deuxiéme cas, le systéme se découple en trois équations indépendantes de même type :

$$\frac{d_2 x_j(t)}{dt^2} = -\omega_i x_i^2, \text{ pour } i = 1, 2, 3$$

correspondant au probléme rencontré pour le circuit électrique.

## 3.3 Conclusion

Dans ce travail, on s'est intéressé à l'étude d'un système différentiels d'une façon simple et aisée.on rappelé quelques notions concernant les systèmes différentiels comme problèm de Cauchy et courbes carastéristiques aussi le théorème de Holmgren et de Caleman. On a donnée et expliquée quelques types du systèmes différentiels.

A la fin on a illustré notre étude par des examples et des applications qui montre que les systèmes différentiel jouent un rôle fondamental dans différents domaines.

# BIBLIOGRAPHIE


[1] Bernard Helffer, *Introduction aux équations aux dérivées partielles,* Université de Parie-sud, mémoire de master, Version de janvier-mai 2007.

[2] Daniel Choi, *Une courbe dans un doumaine* $\Omega$, Université de Parie VI, Thèse de doctorat, 1995.

[3] Danie Gourdin, *Probleme de cauchy non caracteristique pour les systemes hyperboliques a caracteristiques de multiplicite variable domaine de dependance Commuunications in partial Diffrential Equation,* Université de Lille Flandres, Thèse de doctorat, 1979.

[4] Emmanuele DiBenedetto, *Partial Differential Equations,* Springer Science + Business Media LLC, Article universitaire, 1995.

[5] Justin Cano, *Automatique des systèmes linéares*, Université Polythéchnique-Montréal Canada, article universitaire, 2020.

[6] Jacques Chazarain and Alain Piriou, *Introduction à la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires,* Université de Nice.

[7] Jerome Grivet, *Systeme d'équation aux dérivées partielles pour la biologie : Modéle Analyse numérique et simulation*, Université d'Ifrane, 2013.

[8] Julien Royer, *Fonctions de plusieurs variables limite dans* $\mathbb{R}$, Université Toulous 3, livre, Anné 2013-2014.

[9] Julia Vaillant, *Systèmes hyperboliques à caractéristiques multiples,* Exposé no.11, 17 pl, 1979.

[10] Mourad Chouli, *Equations aux dérivées partielles : Analyse fonctionelle,* livre, 2013.

[11] M. Guido Stampccia, *Equation elliptique du second ordre a coefficients discontinus,* article, 1963-1964.

[12] Mohamed M'zé Seifoudini, *Problème de Goursat pour des systèmes d'équations aux dèrivées partielles avec conditions de Levi,* Article, 5 décembre 2005.

[13] Pierre pansu, *Systemes différentie ,Université Paris-Saclay,article universitaire1,* 6 décembre 2004.

[14] Richared Nuadi, *Etude d'un systéme d'équation aux dérivées partielles,* Université de Bordeaux 1, Thèse de doctorat*, 1994.*

[15] Sandra Delaunay et Alexis Tchoudjem, *Systémes défférentielle*, Cours de mathématique Exo7.

[16] Thierry Gallay, *Equations aux dérivées partielles*, Cours de MI-Ens de Lyon, 2014-2015.

[17] Thierry Lubin, *Equations aux dérivées parielles : Méthode de résolution des EDP par séparation de variables,* ApplicationsUniversité de Lorraine, Mémoire de master, 2015-2016.

[18] Ziegler Hans, *Principles of structural stability,* Federal instutute of technology Zurich Switzerland, livre, 1977.