République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Étude de la classe des opérateurs finis

Présenté Par :
Aicha Khettou
Asma Hamidane

Devant le jury :

Mr **S.Bouzenada**	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mme **F.Mesloub**	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinatrice
Mme **H.Messaoudene**	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 14/06/2020

بسم الله الرحمن الرحيم

Dédicace

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents **Khemissa** et **Mouhammed** qui n'ont jamais cessé, de formuler des prières à mon égard, de me soutenir et de m'épauler pour que je puisse atteindre mes objectifs.

A mes chères sœurs

A mes chers frères

A mes belles sœurs

A mon adorable nièce **Chahd** et mes beaux neveux **Chahine et Ayoub.**

A mes meilleures amies **Oumaima, Wissem, Abir, et Amel.**

A ma chère binôme **Asma**

Et ceux qui ont partagé avec moi tous les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail, ils m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours

A ma famille mes proches et à ceux qui m'aide et me supporte dans les moments difficiles

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès

A tous ceux que j'aime et ce qui m'aime

Aicha Khettou.

Dédicace

Je dédie ce modeste travail à mes chers parents, pour tous leurs sacrifices, leur soutien et leurs prières tout au long de mes études.

A mes chères sœurs et chers frères pour leurs encouragements, et leur soutien moral.

A mon adorable nièce ***Sameh.***

À ma ***binôme Aicha*** *avec laquelle nous avons achevé tout ce travail depuis le début jusqu'à la fin.*

À mes fidèles amies *particulièrement* ***Takoua*** *et* ***Bahia***

À toutes les personnes qui ont été toujours à mes côtés, et M'ont accompagné durant mon chemin d'études.

Que ce travail soit l'accomplissement de vos vœux tant allégués, et le fruit de votre soutien infaillible.

Asma Hamidane

Remerciements

*Nous tenons à rendre grâce à **Dieu** le tout puissant et misécordieux qui nous a accordé la volonté, le courage et la patience pour achever ce travail.*

*Nous voudrions adresser notre reconnaissance à notre directrice du mémoire de fin de cycle en Master **Mme Hadia Messaoudene** pour sa patience, sa disponibilité, et surtout ces précieux conseils qui ont contribué à nous guider pour faire ce modeste travail.*

*Nous tenons paticuliérement à remercier **Mr Smail Bouzenada** pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de notre mémoire, également **Mme Fatiha Mesloub** d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*Sans oublier de remercier tout les enseignants du département mathématiques et informatique en précisant le Professeur **Elhadj Zeraoulia** notre professeur qui n'a jamais cessé de nous aider et partager ses connaisances avec nous.*

En fin, nous adressons nos remerciements les plus vifs à nos parents pour leur soutien moral et leurs sacrifices loyaux durant ces longues années de quête sur la voie du savoir, ainsi à nos amis pour leur présence et Leur soutien.

ABSTRACT

Let $\mathcal{H}$ be a complex separable infinite dimensional Hilbert space, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ the algebra of bounded linear operators on $\mathcal{H}$.

The main objective of this work is to study the class of finite operators, noted by $\mathcal{F}(\mathcal{H})$; which is a class of operators of $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ for which the distance between the identity operator and the derivation range of any operator A is maximal.

(The derivation of the operator A noted by δ_A is the operator :

$$\begin{aligned} \delta_A : \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ X &\mapsto AX - XA;\ A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

i.e. $\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); \|AX - XA - I\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$

Also we give some properties of the class of finite and give some operators which belongue to this class of operators.

Key words : Identity operator, inner derivation, commutator, class $\overline{R_1}$, finite operator.

RÉSUMÉ

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe de dimension infinie séparable et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés définis et à valeurs dans $\mathcal{H}$.

L'objectif principal de ce travail est d'étudier la classe des opérateurs finis, notée $\mathcal{F}(\mathcal{H})$; qui est la classe d'éléments de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ pour lesquels la distance de l'opérateur identité et l'image de l'opérateur de dérivation d'un opérateur A est maximale.

(L'opérateur de dérivation de A noté δ_A est l'opérateur :

$$\begin{aligned} \delta_A : \mathcal{B}(\mathcal{H}) &\to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ X &\mapsto AX - XA; A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

i.e. $\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); \|AX - XA - I\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$.

On a aussi donné quelques propriétés de cette classe et donné les opérateurs qui appartiennent à cette classe.

Les mots clés : opérateur identité, dérivation interne, commutateur, classe $\overline{R_1}$, opérateur fini.

ملخص

. ليكن $\mathcal{H}$ فضاء هيلبرت عقدي قابل للفصل ذو بعد غير منتهي و $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ جبر المؤثرات الخطية المحدودة المعرفة وذات القيم في $\mathcal{H}$.
الهدف الاساسي لهذا العمل هو دراسة مجموعة المؤثرات المنتهية والتي يرمز لها ب $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ و هي عبارة عن مجموعة المؤثرات من $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ التي تحقق ان مسافة المؤثر الحيادي و صورة مؤثر الاشتقاق ل $\mathbf{A}$ قصوى.
مؤثر الاشتقاق ل A التي يرمز لها ب δ_A هو المؤثر:

$$\begin{array}{rcl} \delta_A & : & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ X & \mapsto & AX - XA. \end{array}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) ; \|AX - XA - I\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

قدمنا كذلك بعض من خصائص هذه المجموعة من المؤثرات وعينا بعض المجموعات الجزئية فيها.

<u>الكلمات المفتاحية</u> المؤثر الحيادي، الاشتقاق الداخلي، التبديلة، المجموعة $\overline{R_1}$ ، المؤثر المنتهي .

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES NOTATIONS

$\mathcal{H}$	: Espace de Hilbert complexe.
$\mathcal{L}(\mathcal{H})$	: Algèbre des opérateurs linéaires sur $\mathcal{H}$
$\mathcal{B}(\mathcal{H})$	: Algèbre des opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$
$R(A)$	: L'image de A
$\mathbb{k}$	: Corps quelconque.
$\ker(A)$	: Noyau de A
$\langle ., . \rangle$	: Produit scalaire.
I	: Opérateur identité.
A^*	: Opérateur adjoint de A
$F^\perp$	: Complémentaire orthogonale de F
$\oplus$	: Somme directe.
$\{A\}'$	: Ensemble des commutants de A
$\{A\}''$	: Ensemble des bicommutants de A
$[A, B]$	: Commutateur.
δ_A	: Dérivation intérieure induite par l'opérateur A
$\mathrm{Re}(A)$	: Partie réelle de A.
$\rho(A)$	: Ensemble résolvant.
$\sigma(A)$	: Spectre de A.
$\sigma_p(A)$	: Spectre ponctuel de A.
$\sigma_a(A)$	: Spectre ponctuel approché de A.
$\sigma_{ar}(A)$	: Spectre approché réduisant de A.
$\mathcal{U}$	: Un opérateur unitaire de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$
$r(A)$	: Rayon spectral de A.
$w(A)$	: Rayon numérique de A.
$W(A)$	: Image numérique de A.
$\partial W(A)$	: Frantiére de l'image numérique de A
$R(\delta_A)$	: Image de la dérivation de A
$\overline{R(\delta_A)}$	: Fermeture de l'image de la dérivation de A
$\mathcal{JA}(\mathcal{H})$	: Classe de Joêl Anderson.
$\mathcal{F}(\mathcal{H})$	: Classe des opérateurs finis

Introduction

Ce mémoire présente une synthèse des classes de Joël Anderson et des opérateurs finis, ce sujet se classe dans les théorie des opérateurs et spectrales, qui sont des domaines des mathématiques. Ils ont été développé dans la première moitié du $20^{éme}$ siècle grâce en particulier aux travaux de S. Banach, D. Hilbert et M.Fréchet.

La théorie spectrale est trés utile en physique, en particulier pour les phénoménes vibratoires.

Le concept d'un opérateur fini a été présenté par J. P. Williams en 1970 qui a étudié les critères de finitude et a posé plusieurs questions dans le contexte.

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable de dimension finie, on note par $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs bornés linéaires sur $\mathcal{H}$.

Pour un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on dit que A est un opérateur fini si :

$$\|AX - XA - I\| \geq 1; \forall X \in \mathcal{B}(H)$$

où I est l'opérateur identité. On note l'ensemble des opérateurs finis par $\mathcal{F}(\mathcal{H})$,

qui est la classe des opérateurs où la distance de l'opérateur identité et l'image de dérivation interne de A vaut l'unité.

J.P Williams a prouvé que la classe des opérateurs finis est uniformément fermé et contient les opérateurs normaux, hypo normaux et les opérateurs dominants.

S.Mecheri [11] a géneralisé les travaux de J.P Williams pour des classes d'opérateurs plus générales que les opérateurs normaux et hyponormaux, comme les opérateurs paranormaux et normaloïdes.

Notre mémoire se compose de trois chapitres :

Chapitre 1 : Ce chapitre est un chapitre introductif dans lequel nous avons rassemblé une collection des rappels et des définitions concernants **la distance,** des espaces **vectoriels**, **normés**, **Hilbert** et **Banach.** Comme on a parlé de la notion de **l'opérateur** et ses propriétés.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre, on a présenté **le commutateur, la dérivation interne**.

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, soit la dérivation interne induite par A définie :

$$\begin{aligned} \delta_A &: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ \delta_A(X) &= AX - XA, X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \end{aligned}$$

et aussi la classe de Joël Anderson et ses propriétés

$$\begin{aligned}\mathcal{JA}(\mathcal{H}) &= \left\{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : I \in \overline{R(\delta_A)}\right\} \\ &= \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\,;\, \exists\,(X_n) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : AX_n - X_nA \to I\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{JA}(\mathcal{H})$:la classe de Joël Anderson.

Chapitre 3 : Dans sa premiére partie, on parle sur **les opérateurs finis** et leurs propriétés.

Dans la deuxiéme partie de ce chapitre, nous présentons les résultats les plus fondamentaux sur la majorité **des classes d'opérateurs finis**. Où on a esseyé de donner des théorèmes et des lemmes qui montrent que les classes normaux, quasi-normaux, hyponormaux, p-hyponormaux, paranormaux et d'autres sont des opérateurs de classe $\overline{R_1}$ et on a prouvé que la classe $\overline{R_1}$ est incluse dans la classe des opérateurs finis.

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Le premier chapitre de ce mémoire est consacré à donner quelques rappels, définitions et résultats d'analyse fonctionnelle. Ces rappels concernent : Les espaces vectoriels, normés, espaces de Hilbert et Banach. Comme on va donner quelques inégalités et leurs démonstrations qui serons nécessaires aux chapitres suivants. Nous avons préféré ne pas aller trop loin dans les généralisations.

1.1 Notions de base

1.1.1 Distance

Soit E un ensemble. On va définir sur E une notion de "proximité" qui permette de donner un sens à la convergence des suites des points de E

Définition 1.1.1 *On appele **distance** sur un ensemble E une fonction d définie de $E \times E$ dans $\mathbb{R}^+$, satisfaisant :*

pour tout x, y et z de E

i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

ii) $d(x, y) = d(y, x)$.

iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Définition 1.1.2 *On appele **espace métrique** le couple (E, d) où E est un ensemble et d une distance sur E.*

Définition 1.1.3 *Dans un espace métrique (E, d), on appelle **boule ouverte** (resp. fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble des points y de E dont la distance de x est strictement inférieure (resp. inférieure ou égale) à r.*

-boule ouverte : $\quad B(x, r) = \{y \in E, d(y, x) < r\}$.

-boule fermé : $\quad \overline{B}(x, r) = \{y \in E, d(y, x) \leq r\}$.

Exemple 1.1.1 *-Pour $X = \mathbb{R}$ et $d\ (x, y) = |x - y|$, $(\mathbb{R}, d)$ est un espace métrique.*

-Même chose dans le cas ou ; $X = \mathbb{R}^n$ et choisissons les différentes distances :

1. $d(x, y) = (\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2)^{\frac{1}{2}}$.
2. $d(x, y) = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j - y_j|$.
3. $d(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - y_j)$.

1.1.2 Espaces vectoriels et normés :

Définition 1.1.4 *On appele **espace vectoriel** topolopgique tout espace vectoriel E muni d'une topologie rendant continues les applications :*

$$(x, y) \in E \times E \longrightarrow x + y, \text{ et } (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \longrightarrow \lambda x$$

On notera également qu'une application linéaire entre espace vectoriel topologique est continue si et seulement si elle l'est en 0.

Définition 1.1.5 *Soit E un espace vectoriel, on appele **semi-norme** sur E, toute application φ définit de E dans $\mathbb{R}$ satisfaisant aux trois conditions suivantes :*

i) $\forall x \in E, \varphi(x) \geq 0$.

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E, \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$.

iii) $\forall x, y \in E, \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

pour tout x de E, on note : $\varphi(x) = \|x\|$.
le couple $(E, \|.\|)$ s'appelle un espace semi-normé.

Exemple 1.1.2 *-La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module dans $\mathbb{C}$ sont des semi-normes.*

-L'application φ définit par :

$$\begin{array}{ccl} \varphi & : & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \varphi(x, y) = |x - y| \text{ est une semi-norme.} \end{array}$$

Définition 1.1.6 *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé pour* $(x, y) \in E^2$; *la distance de* x *à* y *est* $d(x, y) = \|x - y\|$.

Définition 1.1.7 *Si* E *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *on appele* ***produit scalaire*** *hermitien ou simplement produit scalaire sur* E *une application* $(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle$ *de* $E \times E$ *dans* $\mathbb{C}$ *vérifiant les propriétés suivantes :*

i) L'application $x \longmapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ; $\forall y \in E$.

ii) $\forall x, y \in E; \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

iii) $\forall x \in E; \langle x, x \rangle \in \mathbb{R}^+$.

iv) $\forall x \in E; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

On peut noter que les propriétés (i) et (ii) entraînent que pour x fixé, l'application $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est anti-linéaire, c'est-à- dire vérifie :

$$\begin{aligned} \langle x, y + y' \rangle &= \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle \\ \langle x, \lambda y \rangle &= \overline{\lambda} \langle x, y \rangle . \end{aligned}$$

Exemple 1.1.3 *On appele produit scalaire canonique sur* $\mathbb{R}^n$, *le produit scalaire définit par :*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

tel que :

$$x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) .$$

Exemple 1.1.4 *Pour tout entier* $n \geq 0$ *et tout intervalle* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$, *on peut définir un produit scalaire sur l'espace vectoriel* $\mathbb{R}^n [X]$ *des polynomes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à* n *par :*

$$\langle P, Q \rangle = \int_a^b P(x) Q(x) dx.$$

Définition 1.1.8 *Etant donnés deux sous-espaces vectoriels* F *et* G *de* E, *la somme des sous-espaces* F *et* G *est dite directe et s'écrit* $F \oplus G$ *si et seulement si ; tout élément de* $F \oplus G$ *s'écrit d'une manière unique comme la somme d'un élément de* F *et d'un élément de* G.

1.1.3 Quelques propriétés

1- Inégalité de Cauchy-Schwartz

Proposition 1.1.1 *Si $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur E on a : pour tout x et tout y de E l'inégalité :*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle . \langle y, y\rangle$$

Preuve. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$, x et y dans E, on a :

$$\begin{aligned}
\langle x-\lambda y, x-\lambda y\rangle &= \langle x, x-\lambda y\rangle - \lambda \langle y, x-\lambda y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - \bar{\lambda} \langle x, y\rangle - \lambda \overline{\langle x, y\rangle} + \lambda\bar{\lambda} \langle y, y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle - 2\operatorname{Re}\left(\bar{\lambda}\ \langle x, y\rangle\right) + |\lambda|^2 \langle y, y\rangle
\end{aligned}$$

Ils existent $\rho \in \mathbb{R}^+$et $\theta \in \mathbb{R}$; tels que $\langle x, y\rangle = \rho \exp^{i\theta}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on choisit $\lambda = t \exp^{i\theta}$, on obtient que ; pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$P(t) = \langle x, x\rangle - 2t\rho + t^2 \langle y, y\rangle \geq 0$$

Le polynôme du second degré P ci-dessus a donc un discriminant négatif ou nul. On en déduit que :

$$\Delta' = \rho^2 - \langle x, x\rangle . \langle y, y\rangle \leq 0$$

c'est-à-dire :

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle . \langle y, y\rangle .$$

■

2- Identité du Parallélogramme

Proposition 1.1.2 *Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a l'identité :*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Preuve. Soient $x, y \in E$. On sait que :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$

et

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle ,$$

en sommant les deux équations :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

■

3- Identité de polarisation

Proposition 1.1.3 *Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a l'identité :*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2)$$

Preuve. On a : $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$
$- \|x-y\|^2 = -\langle x-y, x-y\rangle = -\|x\|^2 - \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$
$i\,\|x+iy\|^2 = i\,\langle x+iy, x+iy\rangle = i\,\|x\|^2 + i\,\|y\|^2 + \langle x, y\rangle - \langle y, x\rangle$
$-i\,\|x+iy\|^2 = -i\,\langle x+iy, x+iy\rangle = -i\,\|x\|^2 - i\,\|y\|^2 - \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle$

Par l'addition, On obtient l'égalité de polarisation. ■

Remarque 1.1 *Si* $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ *l'égalité précédente devient :*

$$\forall x, y \in \mathcal{H}; \langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

1.1.4 Espaces de Hilbert et de Banach

Définition 1.1.9 ***Un espace préhilbertien*** *réel (ou complexe) est un espace vectoriel E sur $\mathbb{k}$; sur lequel est défini un produit scalaire T muni de la norme induite par T.*

Exemple 1.1.5 *Les espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des espaces préhilbertiens pour le produit scalaire dit usuel*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}.$$

Exemple 1.1.6 *Soit $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $x_n \in \mathbb{k}$, telles que :*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$$

Soient $x = (x_n)$ et $y = (y_n)$ deux éléments de l'ensemble $\ell^2(\mathbb{N})$, l'inégalité $2\,|x_i y_i\,| \le |x_i|^2 + |y_i|^2$ montre que la série $\sum x_i \overline{y_i}$ est absolument convergente et on en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|^2 + |y_i|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x_i \overline{y_i})) \\ &\le 2\sum_{i=1}^{\infty} (|x_i|^2 + |y_i|^2). \end{aligned}$$

Ces inégalités montrent que : $x+y$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$, celui-ci est donc un espace vectoriel.

On pose, pour x et y dans $\ell^2(\mathbb{N})$:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i} \tag{1,1}$$

On vérifie que cela définit bien un produit sclaire sur $\ell^2(\mathbb{N})$ et les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski s'écrivent :

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}\right| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |x_i \overline{y_i}| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Remarque 1.2 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$ et $\langle .,.\rangle$ un produit scalaire sur E :*

l'application : $x \longmapsto \sqrt{\langle x, x\rangle}$ est une norme et l'application qui au couple (x, y) associe $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E.

Définition 1.1.10 ***Un espace de Hilbert*** *est un espace préhilbertien sur $\mathbb{k}$ qui est complet pour la distance.*

Exemple 1.1.7 - *L'espace $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire usuel est un espace de Hilbert.*

Solution 1.1.1 *L'exemple* 1.1.6 *montre que $\ell^2(\mathbb{N})$, muni du produit scalaire* (1.1) *est un espace préhilbertien, il reste à montrer que $\ell^2(\mathbb{N})$ est complet pour la distance associée au produit scalaire usuel.*

Soit donc (x^p) une suite de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N})$, avec :

$$x^p = (x_1^p, x_2^p, \ldots).$$

Par définition $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^p - x_n^q|^2$ tend vers zéro lorsque p et q tendent vers l'infini ; donc a fortiori pour tout n fixé, la suite numérique (x_n^p), $p \in \mathbb{N}$, est une suite de Cauchy, notons x_n sa limite et $x = (x_n)$ la suite ainsi définie.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier r tel que ; pour $p \geq r$ et $q \geq r$, on ait :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^p - x_n^q|^2 < \varepsilon.$$

Pour tout entier m, on aura a fortiori que :

$$\sum_{n \geq m} |x_n^p - x_n^q| \leq \varepsilon.$$

et comme il s'agit ici d'une somme finie, on peut faire tendre q vers l'infini et on obtient l'inégalité $\sum_{n\geq m} |x_n^p - x_n| \leq \varepsilon$. Cela est pour tout entier m, on en déduit que la suite : $x = (x_n)$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^p - x_n|^2 \leq \varepsilon.$$

Il en résulte que la suite $x = x_n$ appartient à $\ell^2(\mathbb{N})$ et que lorsque p tend vers l'infini, x_p tend vers x dans $\ell^2(\mathbb{N}\ )$.

Définition 1.1.11 ***Un espace de Banach*** *est un espace vectoriel normé complet.*

Corollaire 1.1.1 *Tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Banach est lui-même un espace de Banach pour la norme induite.*

Définition 1.1.12 ***Orthogonalité :*** *Deux éléments x et y d'un espace de Hilbert E sont dits orthogonaux si : $\langle x, y\rangle = 0$, on écrit alors $x \perp y$. On dit que deux parties F et G de E sont orthogonaux si tout élément de F est orthogonal à tout élément de G, on écrit alors $F \perp G$. L'orthogonal d'une partie F de E, noté $F^{\perp}$, est l'ensemble des éléments de E orthogonaux à F.*

1. Soient $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, E un espace vectoriel normé ; on dit que x est orthogonal à y si : $\|x - \lambda y\| \geq \|\lambda y\|, \forall \lambda \in \mathbb{C}$ et $x, y \in E$.
2. Soient M, N deux sous espaces de E, si $\|m + n\| \geq \|n\|, \forall m \in M, \forall n \in N$; alors $M \perp N$ (notion non symétrique).
3. Si M, N sont des sous espaces fermés, et $M \perp N$, alors $M \oplus N$ est fermé.

Proposition 1.1.4 *Soit E un espace de **Hilbert.***

1. L'orthogonal d'un sous-ensemble F de E est un sous-espace fermé de E et on a :
$$F \cap F^{\perp} = \{0\}, \quad F^{\perp} = \overline{(F)}^{\perp} \text{ et } F \subset (F^{\perp})^{\perp}.$$
2. Si deux sous-ensembles F et G de E vérifient $F \subset G$, alors leur orthogonaux vérifient $G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

Définition 1.1.13 *Soit $\mathcal{B}$ l'algèbre de Banach complexe, on définit* un état *l'ensemble des fonctionnelles positives normalisées dans $\mathcal{B}$ i.e* $\{f \in \mathcal{B}^* : f(1) = 1 = \|f\|\}$.

1.2 Qeulque notions sur les opérateurs

1.2.1 Définition d'opérateur

Définition 1.2.1 *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert,* un opérateur A *est une application définie sur un sous-espace vectoriel $D(A) \subset \mathcal{H}$ a valeurs dans $\mathcal{H}$. $D(A)$ est appelé le domaine de l'opérateur. A est un opérateur linéaire s'il vérifie les conditions suivantes :*

(i) *Additive* : $A(x+y) = Ax + Ay; x, y \in \mathcal{H}$.
(ii) *Homogéne : $A(\alpha x) = \alpha Ax; x \in \mathcal{H}$ et pour tout nombre complexe α.*

Définition 1.2.2 *Soient $\mathcal{H}$ et K deux espaces de Hilbert et A un opérateur défini de $\mathcal{H}$ dans K :*

1. $\mathcal{L}(\mathcal{H}, K)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires de $\mathcal{H}$ dans K.
2. Si $\mathcal{H} = K$, on note $\mathcal{L}(\mathcal{H}, K) = \mathcal{L}(\mathcal{H})$.
3. Pour $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$; on note l'image de A par $R(A) = \{Ax, x \in \mathcal{H}\}$ et le noyau de A par $\ker(A) = \{x \in \mathcal{H}, Ax = 0\}$.
4. On muni $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de la topologie uniforme (de la norme)

$$\| A \| = \sup \{\| Ax \|, x \in \mathcal{H}, \| x \| = 1\}.$$

Proposition 1.2.1 *Voici quelques propriétés de la norme opérateur.*

1. *Si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.*
2. *Si $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors $A + B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.*
3. *Si $\alpha \in \mathbb{k}$ et $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors $\alpha A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\|\alpha A\| = |\alpha| . \|A\|$.*
4. *Si $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, alors $AB \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ et $\|AB\| \leq \|A\| . \|B\|$ (AB désigne la composition $A \circ B$).*

Remarque 1.3 *Les trois premiers points de la proposition précédente affirment que $\|.\|$ défnit une norme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

Exemple 1.2.1 *Si $\mathcal{H}$ est de dimension finie n, toute application linéaire de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ est continue ; étant donnée une base $(e_1, ..., e_n)$ de $\mathcal{H}$, on peut identifier $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ à la matrice (a_{ij}) défnie par $a_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle$.*

Exemple 1.2.2 *Soit $\mathcal{H} = \ell_2$, si $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, on pose $\alpha_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle$ La matrice (α_{ij}) représente A de la même façon qu'en dimension finie. Cependant, on ne connaît pas de formule permettant de calculer $\|A\|$ en fonction de sa représentation matricielle.*

Réciproquement, étant donné $(\alpha_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^*}$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tel que ; $\langle Ae_i, e_j\rangle = \alpha_{ij}$ et que :

$$\sup_i \sup_j \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j \right| : |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leq 1, |y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2 \leq 1 \right\} < 1.$$

Définition 1.2.3 *Un opérateur A de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ est **borné** inférieurement s'il exite $M \geq 0$ tel que : $\| Ax \| \geq M \| x \|$; pour tout $x \in \mathcal{H}$.*

On note l'espace des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ par $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

1.2.2 Spectre d'un opérateur

Définition 1.2.4 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.*

1. *On appele* spectre *de A, l'ensemble :*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{k} : \ (\lambda I_E - A) \textit{ est non inversible}\} \ \textit{(non inversible i.e, non bijectif)}.$$

Tout scalaire $\lambda \in \sigma(A)$ est dit valeur spectrale.
Le rayon spectral de A noté $r(A)$ est défini par :

$$r(A) = \sup\{|\lambda|, \ \lambda \in \sigma(A)\} \ \textit{ et on a toujours} : r(A) \leq \|A\|.$$

Si $\sigma(A) = \varnothing$, alors, par convention, on pose $r(A) = 0$.

2. *On appele* valeur propre *de A tout $\lambda \in \mathbb{k}$; tel que : $\lambda I_E - A$ n'est pas injectif. On appele* spectre ponctuel *de A, l'ensemble :*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{k} : \ \lambda \textit{ valeur propre de } A\}.$$

Une valeur propre de A est une valeur spectrale et on a toujours $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.
On appele espace propre associé à la valeur propre $\lambda \in \sigma_p(A)$, le sous-espace vectoriel $\ker(\lambda I_E - A) \neq \{0\}$.

3. *On appele* ensemble résolvant *de A, l'ensemble :*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{k} : (\lambda I_E - A) \text{ est inversible}\}.$$

Tout scalaire $\lambda \in \rho(A)$ est dit valeur résolvante. On a : $\sigma(A) = \mathbb{k}\backslash\rho(A)$.
Si $\lambda \in \rho(A)$ alors, on note : $R_\lambda(A) = (\lambda I_E - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ la résolvante de A.

4. Le *spectre ponctuel approché* de A est :

$$\sigma_a(A) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel qu'il existe une suite normée unitaire} \\ \{x_n\} \in \mathcal{H} : \lim\limits_{n \to +\infty} (A - \lambda I) x_n = 0 \end{array} \right\}.$$

5. Le *spectre approché réduisant* de A est :

$$\sigma_{ar}(A) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C}, \text{ tel qu'il existe une suite normée unitaire} \\ \{x_n\} \in \mathcal{H} : \lim\limits_{n \to +\infty} (A - \lambda I) x_n = 0, \lim\limits_{n \to +\infty} (A - \lambda I)^* x_n = 0 \end{array} \right\}.$$

On a : $\sigma_p(A) \subset \sigma_a(A)$ et $\sigma_{ar}(A) \subset \sigma_a(A)$.

Définition 1.2.5 *Soit $M \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$, L'ensemble des opérateurs unitairement équivalent aux opérateurs de l'ensemble M est :*

$$U(M) = \{\mathcal{U}A\mathcal{U}^*, \text{où } \mathcal{U} \text{ est un opérateur unitaire de } \mathcal{L}(\mathcal{H}) \text{ et } A \in M\}.$$

1.2.3 Image numérique d'un opérateur

Définition 1.2.6 *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et A un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$. L'**image numérique** de A est l'ensemble définie par :*

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle ; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Définition 1.2.7 *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et A un opérateur linéaire borné sur $\mathcal{H}$ **Le rayon numérique** de A est le réel positif défini par :*

$$w(A) = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| ; x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\}.$$

CHAPITRE 2

DÉRIVATION ET CLASSE DE JOÊL ANDERSON

Dans ce chapitre, on présente les notions de commutateur et de la dérivation interne et leurs propriétés. On traite aussi la classe de Joêl Anderson et quelques propriétés de cette classe.

2.1 Commutateurs et dérivation intérieure

2.1.1 Commutateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Définition 2.1.1 *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe de dimension infinie séparable et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés. Un élément $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est un **commutateur** s'ils existent A et B de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; tels que : $X = AB - BA$. On note $AB - BA$ par $[A, B]$*

Définition 2.1.2 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$*

(i) Le commutant de A noté ; $\{A\}'$ est défini par :

$$\{A\}' = \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : AB = BA\}$$

(ii) Le bicommutant de A noté; $\{A\}''$ est défini par :

$$\{A\}'' = \left\{C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : CB = BC, \text{ Pour tout } B \in \{A\}'\right\}$$

Lemme 2.1.1 *Pour $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:*

i) $\{\{A\}\}'' = \left\{\{A\}'\right\}'$.
ii) $\{A\}'$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.
iii) $\{A\}''$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

iv) Chaque polynôme de A est inclus dans $\{A\}''$.

Un commutateur a les propriétés suivantes :

- $[A, A] = 0$.
- $[A, B] = -[B, A]$.(anti-commutativité).
- $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.(l'identité de Jaccobi).

Théorème 2.1.1 *L'unique commutateur sous forme d'un scalaire dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est l'opérateur nul.*

Notons que ce théorème a été prouvé de deux méthodes différentes par Wintner et Wielandt.

Corollaire 2.1.1 *L'opérateur identité I n'est pas un commutateur.*

Preuve. On suppose que I est un commutateur, donc $\exists A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tels que :

$$I = AB - BA.$$

Multiplions par A à gauche et à droite :

$$A = A^2B - ABA \quad \text{et} \quad A = ABA - BA^2.$$

En additionnant les deux relations, on trouve :

$$2A = A^2B - BA^2.$$

Et par réccurence, on peut prouver que : pour un entier n,
on a : $nA^{n-1} = A^nB - BA^n$.

$$nA^{n-1} = A^nB - BA^n. \tag{1}$$

Supposons que (1) est vraie pour $n \in \mathbb{N}$, et prouvons la pour $n+1$:

$$A^{n+1}B - BA^{n+1} = A(A^nB - BA^n) + (AB - BA)A^n = AnA^{n-1} + A^n = (n+1)A^n.$$

À partir de la relation (1), on trouve que :

$$(n+1)\|A^n\| \leq 2\|B\| \left\|A^{n+1}\right\| \leq 2\|B\| \|A^n\| \|A\|.$$

Pour $\|A^n\| \neq 0$; on aura : $(n+1) \leq 2\|B\| \|A\|$.
Pour un entier n_1 où $(n_1+1) > 2\|B\| \|A\| - 1$, on a :

$$\left\|A^{n_1+1}\right\| = \|A^{n_1}\| = \left\|A^{n_1-1}\right\| ... = \|A\| = 0,$$

donc $A = 0$; d'où $I = AB - BA = 0$, ce qui est absurde.

D'où I n'est pas un commutateur. ■

2.1.2 Dérivation intérieure induite par un opérateur

Définition 2.1.3 *Soit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la classe des opérateurs linéaires bornés de dimension infinie,*

soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, la dérivation interne induite par l'opérateur A notée δ_A est l'application :

$$\begin{array}{ccc} \delta_A & : & \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ X & \mapsto & AX - XA/X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \end{array}$$

Proposition 2.1.1 *Soit $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de dimension infinie. Une application $\delta : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une dérivation si :*

i) δ est linéaire et continue pour la norme.

ii) $\delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y)$, pour tout $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Preuve. Soit $\delta : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une application;

i) δ est linéaire $\Leftrightarrow \forall\ X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$\delta_A(X+Y) = \delta_A(X) + \delta_A(Y)$ et $\delta_A(\alpha X) = \alpha\delta_A(X), \forall\alpha \in \mathbb{C}$.

On a : $\delta_A(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = AX + AY - XA - YA$
$= (AX - XA) + (AY - YA) = \delta_A(X) + \delta_A(Y)$.

$$\begin{aligned} \delta_A(\alpha X) &= A\alpha X - \alpha XA \\ &= \alpha(AX - XA) \\ &= \alpha\delta_A(X), \end{aligned}$$

d'où la linéarité de δ.
δ est continue pour la norme $\Leftrightarrow$ Montrons que δ est bornée;
alors : $\|\delta_A(X)\| = \|AX - XA\| \leq 2\|A\|\|X\|$,
donc il existe $M = 2\|A\|$ telle que; $\|\delta_A(X)\| \leq M\|X\|$
d'où δ est bornée donc continue pour la norme.

ii) Prouvons que : $\delta_A(XY) = \delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)$

$$\begin{aligned} \delta_A(XY) &= AXY - XYA + XAY - XAY \\ &= (AX - XA)Y + X(AY - YA) \\ &= \delta_A(X)Y + X\delta_A(Y). \ \blacksquare \end{aligned}$$

2.2 Classe de Joêl Anderson

Il est connu que l'opérateur identité n'est pas un commutateur, En 1973 Joêl Anderson a prouvé qu'il existe un opérateur $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tel que $I \in \overline{R(\delta_B)}$; où $\overline{R(\delta_B)}$ désigne la fermeture de $R(\delta_B)$ pour la topologie uniforme sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Cela a permis de définir une nouvelle classe d'opérateurs dite la classe de Joêl Anderson, noté $\mathcal{JA}(\mathcal{H})$, où :

$$\begin{aligned} \mathcal{JA}(\mathcal{H}) &= \left\{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : I \in \overline{R(\delta_A)}\right\} \\ &= \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\,;\, \exists\,(X_n) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : AX_n - X_nA \to I\}\,. \end{aligned}$$

qui est la classe des opérateurs où la distance de l'opérateur idendité à l'image de la dérivation est minimale.

2.2.1 Propriétés de $\mathcal{JA}(\mathcal{H})$:

Proposition 2.2.1 *Soit $A \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$, alors :*

- $A^* \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$.
- $\alpha A \in \mathcal{JA}(\mathcal{H}), \forall \alpha \in \mathbb{C}^*$.
- $(A - \alpha I) \in \mathcal{JA}(\mathcal{H}), \forall\ \alpha \in \mathbb{C}^*$.

Preuve. • Soit $A \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$; alors il existe une suite $(X_n) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$AX_n - X_nA \to I \Rightarrow X_n^*A^* - A^*X_n^* \to I.$$

donc

$$A^*\left(-X_n\right)^* - (-X_n)^*A^* \to I.$$

D'où $A^* \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$.

• Soit A un opérateur de $\mathcal{JA}(\mathcal{H})$; il s'ensuit qu'il existe une suite $(X_n) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$AX_n - X_nA \to I.$$

On cherche une suite $(Y_n) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; telle que :

$$(\alpha A)Y_n - Y_n(\alpha A) \to I.$$

Pour $Y_n = \frac{X_n}{\alpha}; \alpha \in \mathbb{C}^*$, on trouve que :

$$(\alpha A)Y_n - Y_n(\alpha A) = AX_n - X_nA \to I.$$

C'est–à-dire que $\alpha A \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$.

• On a $\delta_A = \delta_{(A-\alpha I)}$, donc $\overline{R(\delta_A)} = \overline{R(\delta_{(A-\alpha I)})}$.
Si $I \in \overline{R(\delta_A)}$; alors $I \in \overline{R(\delta_{(A-\alpha I)})}$
donc $(A - \alpha I) \in \mathcal{JA}(H)$. ■

Proposition 2.2.2 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur inversible, si $A \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$, alors $A^{-1} \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$.*

Preuve. Soit $A \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$, alors il existe une suite $\{X_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$\|AX_n - X_nA - I\| < \varepsilon,$$

et on doit trouver une suite $\{Y_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$\left\|A^{-1}Y_n - Y_nA^{-1} - I\right\| < \varepsilon.$$

Pour $Y_n = -AX_nA$

$$\begin{aligned} \left\|A^{-1}Y_n - Y_nA^{-1} - I\right\| &= \left\|A^{-1}(-AX_nA) - (-AX_nA)A^{-1} - I\right\|. \\ & \|-X_nA + AX_n - I\| \\ &= \|AX_n - X_nA - I\| < \varepsilon \end{aligned}$$

D'où $A^{-1} \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$. ■

Proposition 2.2.3 *Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;ils existent $A, B \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$, tels que $A.B \notin \mathcal{JA}(\mathcal{H})$.*

Preuve. Soient $A, B \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$; supposons que $A.B \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$.
D'après la proposition 2-2-2 si $A \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$,alors $A^{-1} \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$,
donc $AA^{-1} = I \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$ contradiction .
Donc si $A, B \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$, alors $AB \notin \mathcal{JA}(\mathcal{H})$. ■

Proposition 2.2.4 *Ils existent $A, B \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$, tels que $A + B \notin \mathcal{JA}(\mathcal{H})$.*

Preuve. Soit $B = -A + \lambda I$; tel que $A \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$,
donc $B \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$, alors $A + B = \lambda I \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$ ce qui est impossible.
Donc si $A, B \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$, alors $A + B \notin \mathcal{JA}(\mathcal{H})$. ■

Théorème 2.2.1 *Soit A un opérateur borné, on a les trois équivalences :*

1) $I \in \overline{R(\delta_A)}$.

2) Il existe un opérateur inversible B, tel que $B \in \overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}'$.

3) *$\overline{R(\delta_A)}$ contient tout les opérateurs inversibles de $\{A\}'$.*

Preuve. 3⇒2 évidente .

2⇒1- Prouvons s'il existe un opérateur B inversible, tel que $B \in \{A\}' \cap \overline{R(\delta_A)}$, alors $I \in R(\delta_A)$.

$B \in \overline{R(\delta_A)}$ i.e $\exists \{X_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,telle que : $\|B - (AX_n - X_nA)\| \to 0$.
On doit trouver une suite $\{Y_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,telle que : $\|I - (AY_n - Y_nA)\| \to 0$.
Pour $Y_n = B^{-1}X_n$

$$\begin{aligned} \|I - (AY_n - Y_nA)\| &= \left\|I - \left(AB^{-1}X_n - B^{-1}X_nA\right)\right\| \\ &= \left\|I - \left(B^{-1}AX_n - B^{-1}X_nA\right)\right\| \end{aligned}$$

.

Si $B \in \{A\}'$, alors $B^{-1} \in \{A\}'$ car :

$$\begin{aligned} AB &= BA \Rightarrow ABB^{-1} = BAB^{-1} \Rightarrow A = BAB^{-1} \\ &\Rightarrow B^{-1}A = AB^{-1} \Rightarrow B^{-1} \in \{A\}' . \\ \|I - (AY_n - Y_nA)\| &= \left\|B^{-1}(B - (AX_n - X_nA))\right\| \\ &\leq \left\|B^{-1}\right\| \|B - (AX_n - X_nA)\| . \end{aligned}$$

B est un opérateur borné ⇒ B^{-1} est borné et $\|B - (AX_n - X_nA)\| \to 0$.
Donc $\|I - (AY_n - Y_nA)\| \to 0$, alors $I \in R(\delta_A)$.
Par le même argument ci-dessus nous montrons que :1⇒3. ■

Théorème 2.2.2 *Soient $A, P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tel que $P^2 = P$, si $I + P \in \overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}'$, alors $I \in \overline{R(\delta_A)}$.*

Preuve. On a $I + P \in \overline{R(\delta_A)}$ i.e $AX_n - X_nA \to I + P$
multiplions par P, alors :

$$PAX_n - PX_nA \to P + P^2 = P + P$$

et comme $I + P \in \{A\}'$, donc $P \in \{A\}'$.

$$A(PX_n) + (PX_n)A \to P + P \Rightarrow P + P \in \overline{R(\delta_A)}.$$

On a $P + P \in \overline{R(\delta_A)}$ et $I + P \in \overline{R(\delta_A)}$, donc $I - P \in \overline{R(\delta_A)}$.
Et puisque $I + P \in R(\delta_A)$, donc $I \in \overline{R(\delta_A)}$. ■

Lemme 2.2.1 *Soit A un opérateur de la forme $\begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}$, si $T \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$, alors $A \in \mathcal{JA}(\mathcal{H})$.*

Preuve. D'après le théorème 2–2-1, il suffit de trouver un opérateur B inversible ; tel que $B \in \overline{R(\delta_A)} \cap \{A\}'$.

Soit $A = \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}$, tel que :

$$T \in \mathcal{JA}(\mathcal{H}) \Leftrightarrow \exists \{X_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : TX_n - X_nT \to I.$$

Trouvons $\{Y_n\} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, telle que $AY_n - Y_nA \to B$.

Soit $B = \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$

telle que B est inversible et $B^{-1} = \begin{pmatrix} I & -I \\ 0 & I \end{pmatrix}$,pour $Y_n = \begin{pmatrix} X_n & 0 \\ 0 & X_n \end{pmatrix}$

$$AY_n - Y_nA = \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_n & 0 \\ 0 & X_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_n & 0 \\ 0 & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & T \\ 0 & T \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} TX_n - X_nT & TX_n - X_nT \\ 0 & TX_n - X_nT \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix} = B$$

On a : $BA = AB$ et $B \in \overline{R(\delta_A)}$, alors $I \in \overline{R(\delta_A)}$. ■

CHAPITRE 3

CLASSE DES OPÉRATEURS FINIS ET LEURS PROPRIÉTÉS

Ce chapitre traite quelques classes d'opérateurs finis : classe($\mathcal{A}$), classe $\mathcal{A}(k)$, classe des opérateurs dominants et la classe $\overline{R_1}$ qu'on prouvera qu'ils sont finis. Nous donnons ci-après un résumé des propriétés de certaines classes d'opérateurs finis.

3.1 Opèrateurs finis

Définition 3.1.1 *Soient $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe de dimension infinie séparable et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés dans $\mathcal{H}$. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est un opérateur fini si A vérifie l'une des relations suivantes :*

1. $\|AX - XA - I\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. *i.e. c'est la classe des opérateurs, pour lesquels la distance entre l'opérateur identité et l'image de l'opérateur de dérivation d'un opérateur A vaut l'unité.*
2. $0 \in \overline{W(AX - XA)}$; *pour tout* $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;*où* $\overline{W(AX - XA)}$ *et la fermeture de* $W(AX - XA)$.
3. *Il existe un état f de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que : $f(AX - XA) = 0$.*

L'ensemble des opérateurs finis est noté par $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Il est évident que $\mathcal{F}(\mathcal{H}) \cap \mathcal{JA}(\mathcal{H}) = \varnothing$, et que $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ n'est pas le complémentaire de $\mathcal{JA}(\mathcal{H})$, car il existe des éléments de $B(\mathcal{H})$ qui ne sont ni des opérateurs de Joêl Anderson ni des opérateurs finis,

[14] a prouvé l'existance de tels opérateurs.

J.P. Wiliams [16] a démontré que la classe $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ contient les opérateurs normaux, hyponormaux.

S. Mecheri [11] a généralisé les résultats de J.P. Wiliams pour des classes d'opérateurs plus générales que les opérateurs normaux et hyponormaux.

3.1.1 Propriétés des opérateurs finis

Soit $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ la classe des opérateurs finis. Dans les propositions suivantes nous présentons quelques propriétés de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. D'après la définition il est évident que les opérateurs nul et identité sont des opérateurs finis.

Proposition 3.1.1 *Soit $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$; alors :*

1. $\alpha A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}); \forall \alpha \in \mathbb{C}$.
2. $(A - \alpha I) \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$; $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.
3. *Si A est inversible ; alors $A^{-1} \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.*

Proposition 3.1.2 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors : $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \Longleftrightarrow A^* \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.*

Preuve. Tant que $(A^*)^* = A$, il suffit de prouver une seule implication.
Soit $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$; alors

$$\|AX - XA - I\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{1}$$

Tant que l'application $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $X \longmapsto X^*$ est surjective,

$$\|XA^* - X^*A - I\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{2}$$

par conséquent

$$\|XA^* - X^*A - I\| = \|(AX^* - X^*A - I)^*\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \tag{3}$$

Donc $A^* \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. ∎

Proposition 3.1.3 *Soit $A \in B(\mathcal{H})$. Alors $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}) \Rightarrow A^{2m} \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.*

Preuve. Si $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$; alors il existe un état f dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; tel que $f(AX - XA) = 0$ pour tout $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ .On prouve par réccurence :
Pour $m = 0$ (evident).
Supposons qu'il existe un état f dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ telle que :

$$f\left(A^{2m}X - XA^{2m}\right) = 0, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$f\left(A^{2m}\left(A^{2m}X\right) - \left(A^{2m}X\right)A^{2m}\right) = 0 \text{ et } f\left(A^{2m}\left(XA^{2m}\right) - \left(XA^{2m}\right)A^{2m}\right) = 0, \text{ pour tout } X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Par conséquent

$$f\left(A^{2m+1}X - XA^{2m+1}\right) = 0, \text{ pour tout } X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

∎

3.2 Quelques classes d'opérateurs qui sont dans $\mathcal{F}(\mathcal{H})$

Dans cette section on va citer quelques classes d'opérateurs et prouver leurs appartenance à $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, en les classifiant par rapport à la classe des opérateurs normaloïdes, ou en prouvant leurs appartenance à la classe $\overline{R_1} = \{A \in B(\mathcal{H}) ; \sigma_{ar}(A) \neq \varnothing\}$.

Définition 3.2.1 *Soient E et F deux espaces de Hilbert.*

1. *Un élément $A \in \mathcal{L}(E)$ est appelé* hermitien ou auto-adjoint *si : $A = A^*$.* On note $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$.
2. *Un élément $U \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé* isométrique *si : $\|U(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.*
3. *Un élément $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(E, F)$ est appelé* unitaire *si : $\mathcal{U}^*\mathcal{U} = I_E$ et $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = I_F$.*
4. *Un élément $N \in \mathcal{L}(E)$ est appelé* normal *si : $NN^* = N^*N$.*
5. *Un élément $P \in \mathcal{L}(E)$ est appelé* positif *(notation : $P \geq 0$) si : P est auto-adjoint et si pour tout $x \in E$; $\langle P(x), x\rangle \geq 0$.*
6. **Quasi-normal** si : A commute avec A^*A.

Propriétés

1. L'opérateur identité sur un espace de Hilbert est auto-adjoint.
2. Pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$; alors $A^*A \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint.
3. Soit A un opérateur auto-adjoint ; alors l'opérateur $U = (A - i)(A + i)^{-1}$ est unitaire.

Preuve.

1. Évidente.
2. On a : $(A^*A)^* = A^*(A^*)^* = A^*A$.
3. Calculons U^* :
   $U^* = (A - i)^{-1}(A + i)$. Or $(A - i)$ et $(A + i)^{-1}$ commutent.
   D'où $UU^* = U^*U = I$.

■

Remarque 3.1 *D'après les définitions ci-dessus on a les inclusions suivantes :*

$$\begin{aligned} Positive &\subseteq Auto-adjoint \subseteq Normal \subseteq Quasi-normal. \\ unitaire &\subseteq isométrique \subseteq Quasi-normal. \end{aligned}$$

Définition 3.2.2 *Soit A un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, A est un opérateur :*

1. **Hyponormal** si ; $A^*A - AA^* \geq 0 \Longleftrightarrow \|Ax\| \geq \|A^*x\|\,;\forall x \in \mathcal{H}$.
2. A est **log-hyponormal** si A est inversible et satisfait l'inégalité suivante :
$$\log\left(A^*A\right) \geq \log\left(AA^*\right).$$
3. Un opérateur A est **paranormal** si : $\|A^2x\| \geq \|Ax\|^2\,;\forall x \in \mathcal{H}$.
4. **Normaloïde** si : $\|A\| = r(A)$ où $r(A)$ est le rayon spectral de A tel que $r(A) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \|A^n\| = \|A\|^n$.
5. **Spéctraloïde** si : $w(A) = r(A)$ tel que $w(A) = \sup\{\alpha : \alpha \in W(A)\}$, où $W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$.

Remarque 3.2 *Les classes d'opérateurs normaux, quasi normaux, hyponormaux, paranormaux, normaloïdes et spectraloïdes sont notées par :*$(\mathcal{N})$, $(\mathcal{QN})$, (H), $(\mathcal{P})$, $(\mathcal{ND})$, $(\mathcal{S})$ *respectivement.*

Théorème 3.2.1 *Les relations d'inclusions suivantes sont vérifiées :*
$$(\mathcal{N}) \subset (\mathcal{QN}) \subset (H) \subset (\mathcal{P}) \subset (\mathcal{ND}) \subset (\mathcal{S}).$$

Preuve.

1. $(\mathcal{N}) \subset (\mathcal{QN})$
Soit A un opérateur normal, alors $A^*A = AA^*$; multiplions par A :
$A\left(A^*A\right) = A\left(AA^*\right)$
$A\left(A^*A\right) = \left(AA^*\right)A = \left(A^*A\right)A$, d'où A est quasi normal.
2. $(\mathcal{QN}) \subset (H)$
Soit $A \in B(\mathcal{H})$, rappelons qu'on a : $H = N\left(A^*\right) + \overline{R\left(A\right)} = N\left(A^*\right) + N\left(A^*\right)^{\perp}$.
Pour un vecteur arbitraire x de $\mathcal{H}$: $x = u + v$; tel que $u \in N\left(A^*\right)$ et $v \in \overline{R\left(A\right)}$.
Soit $C_A = A^*A - AA^*$; alors $\langle C_A u, u\rangle = \|Au\|^2 - \|A^*u\|^2 = \|Au\|$; parce que $u \in N\left(A^*\right)$.
Du moment que $v \in \overline{R\left(A\right)}$, donc v est une limite d'une suite $\{v_n\}$ définie dans $R\left(A\right)$.
Supposons que A est un opérateur quasi normal, donc $C_A\left(R\left(A\right)\right) = \{0\}$; d'où $C_A v = 0; \forall n \in \mathbb{N}$.
Comme C_A est continu et auto adjoint, en utilisant la continuité du produit scalaire on aura :
$\langle C_A v, v\rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle C_A v_n, v\rangle = 0$
$\langle C_A u, v\rangle = \langle u, C_A v\rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle u, C_A v_n\rangle = 0$ et $\langle C_A v, u\rangle = \lim\limits_{n\to+\infty} \langle C_A v_n, u\rangle = 0$
Ainsi ;
$$\langle C_A x, x\rangle = \langle C_A u, u\rangle + \langle C_A v, u\rangle + \langle C_A u, v\rangle + \langle C_A v, v\rangle = \|Au\|^2 \geq 0$$
Donc $C_A \geq 0$; d'où A est hyponormal.

3. $(H) \subset (\mathcal{P})$
   On a :$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle$.
   Si A est un opérateur hyponormal ; alors :

$$\begin{aligned} \|Ax\| &\geq \|A^*x\| \,; \forall x \in H. \\ \langle A^*Ax, x\rangle &\leq \|A^*Ax\| \, \|x\| \leq \left\|A^2x\right\| \|x\| \,. \end{aligned}$$

   Pour $\|x\| = 1$: $\|A^2x\| \geq \|Ax\|^2$; d'où A est paranormal.

4. $(\mathcal{P}) \subset (\mathcal{ND})$
   Pour prouver cette inclusion on utilise le lemme suivant :

   Lemme 3.2.1 *(Caractérisation des opérateurs paranormaux)*
   Soit A un opérateur paranormal, alors on a :

$$\|Ax\| \leq \left\|A^2x\right\|^{\frac{1}{2}} \leq \left\|A^3x\right\|^{\frac{1}{3}} \leq ... \leq \|A^nx\|^{\frac{1}{n}}$$

   Soit A un opérateur paranormal, d'après le lemme précédent on a :

$$\|Ax\| \leq \left\|A^2x\right\|^{\frac{1}{2}} \leq \left\|A^3x\right\|^{\frac{1}{3}} \leq ... \leq \|A^nx\|^{\frac{1}{n}} .$$

   Donc :

$$\|A^nx\| \geq \|Ax\|^n \Rightarrow \|A^n\| \geq \|A\|^n \,; \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \,, \forall n \in \mathbb{N}.$$

   D'où $\|A^n\| = \|A\|^n \Leftrightarrow r(A) = \|A\|$, donc A est un opérateur normaloïde.

5. $(\mathcal{ND}) \subset (\mathcal{S})$

Soit A un opérateur normaloïde, donc $r(A) = \|A\|$, et on a :

$$r(A) \leq w(A) \leq \|A\| \,; \forall A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \qquad (1)$$

Pour un opérateur normaloïde la relation (1) devient :

$$\|A\| \leq w(A) \leq \|A\| \Longrightarrow w(A) = \|A\|$$

D'où A est spectraloïde. ■

Définition 3.2.3 *Soit A un élement de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, A est un opérateur* ***p-hyponormal*** ***si :*** $(A^*A)^p - (AA^*)^p \geq 0$; *pour tout* $p \in \mathbb{R}^+$,

log-hypo normal si : A est inversible et vérifie : $\log(A^*A) - \log(AA^*) \geq 0$.
A est de la classe $(\mathcal{A})$ si : $|A^2| - |A|^2 \geq 0$.
Les classes d'opérateurs p-hyponormaux , log-hyponormaux sont notés par $(H(p))$, (LH) respectivement .

Théorème 3.2.2 *1. Tout opérateur log-hyponormal est un opérateur de la classe $(\mathcal{A})$.*

2. Tout opérateur de la classe $(\mathcal{A})$ est un opérateur paranormal.

Preuve. Pour prouver l'inclusion suivante on utilise les lemmes suivants :

Lemme 3.2.2 *Soient A, B deux opérateurs positifs et inversibles, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $\log(A) \geq \log(B)$.
2. $A^r \geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{r}{p+r}}; \forall r, p \geq 0.$
3. $A^P \geq \left(A^{\frac{P}{2}} B^P A^{\frac{P}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}; \forall p \geq 0.$

Lemme 3.2.3 *Soient X un opérateur positif inversible et Y un opérateur inversible ; pour tout réel α on a :*

$$(XYY^*)^\alpha = YX^{\frac{1}{2}} \left(X^{\frac{1}{2}} Y^* Y X^{\frac{1}{2}}\right)^{\alpha - 1} X^{\frac{1}{2}} Y^*$$

On démontre :

1. $(LH) \subset (classe\,(\mathcal{A}))$
   Soit A un opérateur log-hyponormal ; alors $\log(A^*A) \geq \log(AA^*)$
   Et comme $AA^* = |A|$;il s'ensuit que : $\log|A|^2 \geq \log|A^*|^2$.
   En appliquant le lemme 1 pour $r = p = 1$;on trouve que : $|A|^2 \geq \left(|A|\,|A^*|^2\,|A|\right)^{\frac{1}{2}}$.
   En appliquant le lemme 2 pour la relation précédente on trouve que : $|A|^2 \geq \left(|A|\,|A^*|^2\,|A|\right)^{\frac{1}{2}} = |A|\, A\left(A^*\,|A|^2\, A\right)^{-\frac{1}{2}} A^*\,|A|$;
   Donc $\left(A^*\,|A|^2\,A\right)^{\frac{1}{2}} \geq A^*A$.
   D'où $(A^2) \geq |A|^2$ est de la classe (A).
2. $(classe\,(A)) \subset (P)$
   On a ; $\forall x \in H; \|A^2x\|^2 = \left\langle |A^2|^2 x, x \right\rangle \geq \langle |A^2|\, x, x\rangle^2$
   Si A est un opérateur de la classe (A), alors $|A^2| \geq |A|^2$.

$$\left\langle |A^2|\, x, x\right\rangle^2 \geq \left\langle |A|^2 x, x\right\rangle^2 = \|Ax\|^4$$

   Ainsi on a : $\|A^2x\| \geq \|Ax\|^2$, d'ou A est paranormal.

■

Définition 3.2.4 *Soit A un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$,* *A est un opérateur* **de la classe** $\mathcal{A}(k)$ *si :* $\left[A^*|A|^{2k}A\right]^{\frac{1}{k+1}} \geq |A|^2 : \forall\, k>0,$

Absolument k-paranormal *si :* $\left\| |A|^k Ax \right\| \geq \|Ax\|^{k+1}$ *; pour tout $k>0$ et pour tout vecteur unitaire $x \in \mathcal{H}$.*

1- *Tout opérateur inversible de la classe* $(\mathcal{A})$ *est de la classe* $\mathcal{A}(k); \forall\, k \geq 1.$

2- *Tout opérateur log-hypo normal est de la classe* $\mathcal{A}(k); \forall\, k \geq 0.$

3- *Tout opérateur paranormal est absolument k-paranormal ;* $\forall\, k \geq 1.$

4- *Tout opérateur de la classe* $(\mathcal{A})$ *est un opérateur absolument k-paranormal ;* $\forall\, k>0.$

5- *Tout opérateur absolument k-paranormal est un opérateur normaloïde.*

Corollaire 3.2.1 *Les classes d'opérateurs : auto-adjoints, isométriques, unitaires, normaux, quasi-normaux, hyponormaux, p-hyponormaux, classe* $(\mathcal{A})$, *classe* $\mathcal{A}(k)$, *classe absolument k-paranormal, log-hyponormaux, paranormaux sont des opérateurs normaloïdes.*

Définition 3.2.5 *Soit A un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, la classe $\overline{R_1}$ est définie par :*

$$\overline{R_1} = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \sigma_{ar}(A) \neq \varnothing\}$$

Théorème 3.2.3 *Soit A un opérateur normaloïde de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors $A \in \overline{R_1}$.*

Preuve. Puisque A vérifie $\|A\| = r(A)$ (i-e) il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que $\|A\| = |\lambda|$, d'après [14 Lemme 1]si $\|(A-\lambda I)x_n\| \to 0$, alors $\|(A-\lambda I)^* x_n\| \to 0$; d'où $A \in \overline{R_1}$. ■

Théorème 3.2.4 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, si $A \in \overline{R_1}$, alors $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.*

Preuve. Pour $A \in \overline{R_1}$, alors ils existent $\lambda \in \mathbb{C}$ et une suite $(x_n) \in \mathcal{H}$, tels que : $(A-\lambda I)x_n \to 0$ et $(A-\lambda I)^* x_n \to 0$; quand $n \to +\infty$

$$\begin{aligned}
\|AX - XA - I\|^2 &= \|(A-\lambda I)X - X(A-\lambda I) - I\|^2 \\
&= |\langle (A-\lambda I)X - X(A-\lambda I) - I, (A-\lambda I)X - X(A-\lambda I) - I\rangle| \\
&\geq |\langle X(A-\lambda I)x_n, x_n\rangle - \langle x_n, (A-\lambda I)Xx_n\rangle + I|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|AX - XA - I\|^2 &\geq \langle X(A-\lambda I)x_n, x_n\rangle - \langle x_n, (A-\lambda I)Xx_n + I\rangle \\
&= |\langle (A-\lambda I)x_n, X^* x_n\rangle - \langle (A-\lambda I)^* x_n, Xx_n\rangle + I|
\end{aligned}$$

Passons à la limite quand $n \to +\infty$, il en résulte que :

$\|AX - XA - I\| \geq 1$, d'ou $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. ■

Corollaire 3.2.2 *Les classes d'opérateurs : auto-adjoints, isométriques, unitaires, normaux, quasi-normaux, hyponormaux, p-hyponormaux, classe* $(\mathcal{A})$, *classe* $\mathcal{A}(k)$, *classe absolument k-paranormal, log-hyponormaux, paranormaux sont des opérateurs de la classe $\overline{R_1}$; donc des opérateurs finis.*

Définition 3.2.6 *Soit A un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, A est un opérateur de* la classe $(\mathcal{Y}_\alpha)$ *si :* $\forall\alpha \geq 1; \exists k_\alpha : |A^*A - AA^*|^\alpha \leq k_\alpha^2 (A - zI); \forall z \in \mathbb{C}$.

Dominant *si pour tout* $\alpha \in \mathbb{C} : R(A - \alpha I) \subset R((A - \alpha I)^*) \Leftrightarrow$ *il existe un réel* $M_\alpha \geq 1$, *tel que :* $\|(A - \alpha I)^* f\| \leq M_\alpha \|(A - \alpha I) f\|$;

pour tout $f \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (A - \alpha I)(A - \alpha I)^* \leq M_\alpha^2 (A - \alpha I)^* (A - \alpha I)$.

S'il existe une constante $M : M_\alpha \prec M; \forall \in \mathbb{C} : \|(A - \alpha I)^* f\| \leq M \|(A - \alpha I) f\|$; *dans ce cas on dit que A est* M-hyponormal *pour $M = 1$, A est hyponormal .*

La classe des opérateurs dominants est notée par $(\mathcal{D})$.

Théorème 3.2.5
1. *Tout opérateur hyponormal est de la classe* $(\mathcal{Y}_1)$.
2. *Tout opérateur de la classe $(\mathcal{Y}_1)$ est un opérateur M-hyponormal donc dominant.*

Preuve.

1. $(H) \subset (\mathcal{Y}_1)$

   Soit A un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ hyponormal, on a :
   $$A^*A - AA^* = (A - zI)^* (A - zI) - (A - zI) - (A - zI)(A - zI)^* \geq 0$$
   D'où $A^*A - AA^* \leq (A - zI)^* (A - zI) \leq (A - zI)^* (A - zI)$.

   Pour A un opérateur hyponormal on aura : $|A^*A - AA^*| \leq (A - zI)^* (A - zI)$.

   Donc $A \subset (\mathcal{D})$.
2. $(\mathcal{Y}_1) \subset (\mathcal{D})$

   Soit A un opérateur de la classe $(\mathcal{Y}_1)$; alors il existe un nombre positif k tel que :
   $$|A^*A - AA^*| \leq k_1^2 (A - zI)^* (A - zI)$$
   Et on a : $A^*A - AA^* = (A - zI)^* (A - zI) - (A - zI)(A - zI)^*$

   $(A - zI)(A - zI)^* \leq (A - zI)^* (A - zI) + |A^*A - AA^*|$

   Et comme A est un opérateur de la classe $(\mathcal{Y}_1)$ alors :

   $(A - zI)(A - zI)^* \leq (A - zI)^* (A - zI) + k_1^2 (A - zI)^* (A - zI)$

   $(A - zI)(A - zI)^* \leq (k_1^2 + 1)(A - zI)^* (A - zI)$

   D'où A est M-hyponormal pour $M = \sqrt{k_1^2 + 1}$.

   On peut facilement prouver que tout opérateur M-hyponormal est dominant.

   D'où tout opérateur de la classe $(\mathcal{Y}_1)$ est dominant.

■

Proposition 3.2.1 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors $A \in \overline{R_1}$ dans l'un des cas suivants :*

* *A dominant.*

* $\sigma(A) \cap \partial W(A) \neq \varnothing$.

Remarque 3.3 *Si $\sigma(A) \cap \partial W(A) \neq \varnothing$, alors $\sigma_{ar}(A) \neq \varnothing$.*

Preuve. Dans tout les cas précédents on a $\sigma_{ar}(A) \neq \varnothing$, alors $A \in \overline{R_1}$. ■

Corollaire 3.2.3 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ dans les cas suivants :*

1. M-hyponormaux.

2. classe $(\mathcal{Y}_1)$.

3. Dominant

4. $\sigma(A) \cap \partial W(A) \neq \varnothing$.

Définition 3.2.7 *Un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, est de la classe $(\mathcal{WN})$ si l'inégalité suivante est vérifiée :* $(\operatorname{Re}(A))^2 \leq |A|^2$.

Les opérateurs de la classe $(\mathcal{WN})$ vérifient les propriétés suivantes :

1. *Si $A \in (\mathcal{WN})$, alors $(A - \lambda I) \in (\mathcal{WN})$; pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
2. *$\|(A - \lambda I)^* x\| \leq 3 \|(A - \lambda I) x\|$; $\forall x \in \mathcal{H}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Proposition 3.2.2 *Soit $A \in (\mathcal{WN})$, alors $A \in \overline{R_1}$.*

Preuve. Soit $A \in (\mathcal{WN})$, alors on a :

$$\|(A - \lambda I)^* x\| \leq 3 \|(A - \lambda I) x\| \tag{1}$$

S'il existe une suite $(x_n) \in \mathcal{H} : (A - \lambda I) x_n \to 0$

En passant à la limite en (1) on trouve que $(A - \lambda I)^* x_n \to 0$.

Donc $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$, d'où $A \in \overline{R_1}$. ■

Corollaire 3.2.4 $A \in (\mathcal{WN})$, *alors $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.*

Définition 3.2.8 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on dit que A est un opérateur posinormal, s'il existe un opérateur positif $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que : $AA^* = A^* P A$.*

Il est connu que la classe des opérateurs posinormaux contient la classe des opérateurs dominants.

Lemme 3.2.4 *Soit A un opérateur posinormal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors $A \in \overline{R_1}$.*

Preuve. Soit A un opérateur posinormal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors :

$$\begin{aligned}
\|(A - \lambda I)^* x\|^2 &= \langle (A - \lambda I)(A - \lambda I)^* x, x \rangle \\
&= \langle (A - \lambda I)^* P (A - \lambda I) x, x \rangle \\
&= \left\langle \sqrt{P}(A - \lambda I) x, \sqrt{P}(A - \lambda I) x \right\rangle \\
&= \left\| \sqrt{P}(A - \lambda I) x \right\|^2 \leq \left\| \sqrt{P} \right\|^2 \|(A - \lambda I) x\|^2
\end{aligned}$$

$$\|(A - \lambda I)^* x\| \leq \left\| \sqrt{P} \right\| \|(A - \lambda I) x\|.$$

Pour $\lambda \in \sigma_a(A)$; on trouve que $(A - \lambda I)^* x_n \to 0$

Donc $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$, d'où $A \in \overline{R_1}$. ■

Corollaire 3.2.5 *Soit A un opérateur posinormal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, alors $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.*

3.2.1 Forme d'opérateurs appartenant à $\mathcal{F}(\mathcal{H})$

Proposition 3.2.3 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, défini sur $H = H_1 \oplus H_2$ par :*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

tels que $A_1 \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_1)$ ou $A_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_2)$. Alors $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Preuve. Nous avons pour tous $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

$$AX - XA - I = \begin{bmatrix} A_1X_{11} - X_{11}A_1 - I_1 & A_1X_{12} - X_{12}A_2 \\ A_2X_{21} - X_{21}A_1 & A_2X_{22} - X_{22}A_2 - I_2 \end{bmatrix},$$

Où $I_i (i = 1, 2)$ est l'opérateur d'identité sur $\mathcal{H}_i (i = 1, 2)$. Alors

$$\begin{aligned} \|AX - XA - I\| &\geq \|A_1X_{11} - X_{11}A_1 - I_1\| \geq 1 \\ \text{où } \|AX - XA - I\| &\geq \|A_2X_{22} - X_{22}A_2 - I_2\| \geq 1 \end{aligned}$$

par conséquent $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. ■

Remarque 3.4 *On peut facilement généraliser le résultat précédent au cas où $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est similaire à un opérateur de la forme $A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots \oplus A_n$ sur $H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n = H$, c'est-à-dire s'il existe $j \in \{1, 2, ..., n\}$ tels que $A_j \in \mathcal{F}(\mathcal{H}_j)$; alors $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.*

Proposition 3.2.4 *$\mathcal{F}(\mathcal{H})$ est invariante par l'equivalence unitaire.i.e $\mathcal{U}(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \subset \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Où $\mathcal{U}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$ est l'orbite unitaire de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.*

Preuve. Soit $B \in \mathcal{U}(\mathcal{F}(\mathcal{H}))$, alors $B = \mathcal{U}A\mathcal{U}^*$ où $\mathcal{U}$ est un opérateur unitaire de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ et $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ (i.e) $\|AX - XA - I\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

On doit prouver que : $\|BY - YB - I\| \geq 1, \forall Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$\|BY - YB - I\| = \|(\mathcal{U}A\mathcal{U}^*)Y - Y(\mathcal{U}A\mathcal{U}^* - I)\|$$

Pour $Y = \mathcal{U}X\mathcal{U}^*; \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ on a :

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{U}A\mathcal{U}^*)(\mathcal{U}X\mathcal{U}^*) - (\mathcal{U}X\mathcal{U}^*)(\mathcal{U}A\mathcal{U}^*) - \mathcal{U}\mathcal{U}^*\| &= \|(\mathcal{U}AX\mathcal{U}^*) - (\mathcal{U}XA\mathcal{U}^*) - \mathcal{U}\mathcal{U}^*\| \\ &= \|\mathcal{U}(AX - XA - I)\mathcal{U}^*\| \geq 1 \end{aligned}$$

Donc $B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$,
d'où

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}(\mathcal{H})) \subset \mathcal{F}(\mathcal{H}).$$

Conclusion

Il n'est secret pour personne que la théorie des opérateurs a joué un rôle fondamental dans les mathématiques pures et appliqués.

L'objectif principal de notre travail était de présenter d'une façon simple et aisée la classe des opérateurs finis qui est la classe des opérateurs où la distance de l'opérateur identité et l'image d'une dérivation vaut l'unité .i.e

$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) ; \|AX - XA - I\| \geq 1, \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$.

D'aprés les propriétés de la classe des operateurs finis on constate que cette classe n'a aucune structure algébrique classique.

Depuis les premiéres recherches sur ce sujet plusieurs classes d'opérateurs ont été introduites sans que leurs appartenance ou non à la classe $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ ne soit vérifiée, ce que, pour quelques unes de ces classes nous avons réussi à les citer, mais il en reste beaucoup.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. H. Anderson "*Derivation range and identity*" Bull of Amer. Math. Soc.V 79 N 4 (1973) p 705-708.

[2] A. Brown and C. Pearcy " *Structure theorem for commutators of operators*" Bull. Amer. Math. Soc. V 70 N 6 (1964) p 779-780.

[3] C. K. Fong and V. I. Istratescu" Some characterizations of Hermitien operators and related classes of operators" Proc of Amer. Math. Soc. V76 (1979) p 107-112.

[4] A. Fialkow and D. Herrero " *Finite operators and similarity orbits*" Proc of Amer. Math. Soc.V93 N 4 (1985) p 601-609.

[5] P. R. Halmos " *Commutators of operators II* " Amer. Jour. of Math (1954) p 191-198.

[6] P. R. Halmos "*A Hilbert space probleme book*" second edition. Springer-Verlag (1982).

[7] Y. Ho " *Commutants and derivation ranges*" Tohoku. Math. Jour V27 (1975) p 509-514.

[8] D. A.Herrero " *On derivation ranges and the identity operator* " Jour. Op. Th. V 7 (1982) p 139-148.

[9] S.Mecheri et S.Bouzenada" Some properites of finite operateur".

[10] S. Mecheri *" Non normal derivation and orthogonality "* Proc of Amer. Math. Soc.V 133 N 3 (2004) p 759-762.

[11] S.Mecheri " Finite operators" Demonstratio Math, 35(2002), 355-366.

[12] H.Messaoudene " Finite operators" Journal of Mathematics and System Science 3 (2013) 190- 194.

[13] H.Messaoudene " thése de doctorat" Université de Annaba.

[14] J. G. Stampfli " *Derivation on* $B(\mathcal{H})$, the *range* " Illinois. Jour. Math (1973) p 510-524.

[15] J. G. Stampfli "On Hyponormal and Toeplitz Operators" Math. Ann. 138(1969) p 328-336.

[16] J.P.Williams "Finite operators, Proc. Amer. Math. Soc, 26(1970), 129-135.

[17] J.Williams " *On the range of derivation* " Pacific. Jour. Math.V 38 N1 (1971) p 273-279.

[18] T.Yamazaki, Masatoshito and T. Furuta " *A sub class of paranormal operator including class of log-hyponormal and several related classes*" Chinese journal V 1080 (1999) p 41-55.

[19] M.Young Lee and S. Hun Lee " *On a class of operators related to paranormal operators* " Jour. Korean. Math. Soc V44 N 1 (2007) p 25-34.