République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Larbi Tébessi –Tébessa-
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et informatiques

MEMOIRE DE MASTER
Domaine: Mathématique & informatique
Filière: Mathématique
Option: : Mathématiques appliquées

Thème:

حول بعض الأنظمة الفوضوية الحديثة

Présenté par:
Derrar Halima
Hichour Chaima

Devant le jury:

Boukhelfa Hafsi	M.A.A	Etablissement	Président
Zraoulia Elhaj	Prof.	Etablissement	Rapporteur
Gasri Ahlem	M.A.A	Etablissement	Examinateur

Date de soutenance: …….

Note :……. Mention :……..……

Remerciement

Avant tout chose nous tenons à remercier Dieu le tout puissant, pour donner la force et la patience pour réaliser ce travail.

Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements et nos très profondes à l'encadreur Zeraoulia Elhaj, d'avoir eu l'amabilité de d'érige ce travail. Qu'il trouve ici, l'expression de notre profonde et sincère reconnaissance pour tous ses efforts, sa générosité, son savoir, ses critiques constructives et sa confiance.

Nos vifs remerciements s'adressent au jury.

Pour nous avoir faire l'honneur d'évaluer notre modeste travail. Nous remercions également Mm Yamina.

Nous témoignons de notre gratitude aux ensembles des enseignants d'université Laarbi Tebessi et particulièrement enseignants du département de M.I.

Dédicace

Avec un énorme plaisir, un cœur ouvert et une immense joie, que je dédie mon travail à mes très chers, respectueux et magnifiques parents qui m'ont soutenu tout au long de ma vie ainsi à mes sœurs et mon frère, et en particulier à mon petit onge Sara à Sami, à mon binôme Chaima à mes amis chers/: Amira, Malia, Safia, Bothaina…

A tout personne qui m'ont encouragé au long de mes étude.

Avec un énorme plaisir, un cœur ouvert et une immense joie, que je dédie mon travail à mes très chers, respectueux et magnifiques parents qui m'ont soutenu tout au long de ma vie ainsi à mes sœurs et mon frère, et en particulier à mon binôme Halima à mes amis chers : Mouna, Amira …

A tout personne qui m'ont encouragé au long de mes étude.

Abstract

The theory of chaos is important in many domains such as computer sciences, physics, etc. We recall some definitions and properties of chaos theory, i.e., definitions and properties of dynamical chaotic systems. We then present some classical chaotic applications such as the application of Hénon. In this work, we study the modern chaotic applications of Zeraoulia-Sprott in which we talk about certain of their characteristics such as attractors and routes to chaos. Then, we go through the chaotic systems applications such as cryptology, we first recognize the main concepts of this science then we mention a simple RC4 cryptography method. At the end we give an example that clarifies how to use chaos for the cryptage of certain image.

Résumé

La théorie de chaos est trés important pour beaucoup de domaines comme par exemple, à l'informatique, physique, etc. On rappelle quelques définition et propriétés de la théorie du chaos, c'est à dire des définitions et propriétés des systèmes dynamique et système chaotique et quelques applications chaotiques classiques comme l'application de Hénon. Dans ce mémoire on a étudie des applications chaotiques modernes de Zeraoulia-Sprott dans lesquels nous parlons de certaines caractéristiques et de leurs attracteurs et de leur route vers le chaos. Nous passons aux applications des systèmes chaotiques dans la cryptologie. Nous reconnaissons d'abord les concepts principaux de cette science puis on mentionne une simple cryptographie RC4. A la fin nous donnons un exemple qui clarifie comment utiliser le chaos pour le chiffrement d'un image .

ملخص

نظرية الفوضى هي من اهم النظريات الرياضية التي لها اهمية كبيرة في العديد من المجالات كالإعلام الالي والفيزياء. بداية نذكر بعض التعاريف والخصائص المتعلقة بنظرية الفوضى حيث تطرقنا الى: تعريف الانظمة الحركية , الانظمة الفوضوية وبعض التطبيقات الكلاسيكية مثل تطبيق هينون؛ في عملنا هذا ندرس بعض الانظمة الفوضوية الحديثة الخاصة بزراولية-سبروت ونتحدث عن خصائص هذه التطبيقات وجواذبها والطريق الى الفوضى؛ في الاخير نتطرق الى تطبيق الفوضى في علم التشفير, بداية نعطي نظرة شاملة عن هذا العلم ثم نرى استخدام تطبيق هينون لتشفير صورة.

Table des matières

Notation et symboles

$\mathbb{R}$:	L'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{N}$:	L'ensemble des nombres naturels.
$\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r$:	L'ensemble des nombres réel d'ordre supérieur.
X:	L'ensemble des parties de $\mathbb{R}$.
U_i:	Recouvrement.
R_i:	Régions de $\mathbb{R}^2$.
Ω_i, O:	Orbits.
H:	Application de Hénon.
L:	Application de Lozi.
φ:	Application bijective de l'espace de phase.
$N(x, y)$:	Forme normal.
λ_i :	Valeurs propres.
P_i, x^* :	Points fixes.
J(x) :	La matrice jacobienne.
Df(x) :	La dérivée de la matrice jacobienne.
t, k:	Indices.
p:	Période.
m:	Multiplicateur.
a, b, α :	Paramètres du bifurcation.
| . | :	Valeur absolue.
Ln :	Logarithme népérien.
$\sum$:	Somme algébrique.

D_L	Dimension de lyaponov.
S.C.I :	Sensibilité aux conditions initiales.
$diam()$:	Diamètre.
C^{∞}:	Classe de degré l' infinie.
DCT :	La transformation de cosinus discrète.
RC4 :	Rivest cipher 4.
XOR :	un opérateur logique de l'algèbre de Boole .
DC :	Le coefficient dans le coin supérieur gauche de la matrice de coefficient DCT.
AC :	Les autres coefficients de la matrice DCT.
IDCT :	DCT inverse.
C # :	Est un langage de programmation orienté objet.

Table des figures :

Introduction

L'idée que les petites causes peuvent parfois avoir de gros effets a été notée par les historiens et d'autres depuis l'antiquité, et capturé par exemple dans (faute d'un clou ... un royaume a été perdu). A la fin du siècle 17 avec la découverte des lois du mouvement de Newton était la croyance qui prévaut au moment ou le monde est un système vous pouvez le contrôler (le sens de tout ce qui lui arrive a l'interprétation ou il a dirigé l'être humain au moment de la stabilité et de contrôle).

En 1814 le scientifique française Laplace il a dit que le développement de l'univers est maintenant le résultat placé dans le passé qui l'a mis dans la cause de future et il a dit a un certain moment vous pouvez voir les forces agissant sur la nature à dire l'avenir serait comme le passé ouvert tel est le sens du principe de déterminisme. Maxwell est venu en 1876 a dit que les simple différences de la situation initiale elle conduira à une simple différence dans la situation finale mais il sera une énorme différence dans les résultats au fil du temps. En 1890 Henri Poincaré a changé ce croyance, il a trouvé une dépendance sensible aux conditions initiales dans un cas particulier du problème à trois corps, plus tard a proposé que de tels phénomènes puissent être communs, disons en météorologie, il a écrit en 1908 pour quoi la météorologie éprouvent de difficultés à les prévisions météorologiques et pourquoi les tempêtes apparaissent résulte de hasard il a dit que tornade se produira quelque part mais où exactement nous ne pouvons pas dire. En 1898, Jacques Hadamard a noté une divergence générale de trajectoires dans des espaces de courbure négative et Pierre Duhem a discuté de l'importance générale possible. En 1962, Edward Lorenz a fait une simulation par ordinateur d'un ensemble d'équations différentielles simplifiées pour la convection fluide dans laquelle il a vu un comportement compliqué qui semblait dépendre sensiblement des conditions initiales, apparu ici terme effet de papillon (*le battement d'ailes d'un papillon au Brésil peut-il provoquer une tornade au Texas*).

Le terme *chaos* avait été utilisé depuis l'antiquité pour décrire diverses formes de hasard, mais à la fin des années 1970, il était spécifiquement lié au phénomène de dépendance sensible aux conditions initiales. Au début des années 1980, au moins des signes indirects de chaos dans ce sens avaient été observés dans toutes sortes de systèmes mécaniques, électriques, fluides et autres, et il est apparu qu'une conviction généralisée qu'un tel chaos devait être la source de tous les éléments importants aléatoire dans la nature. Donc, en 1985, lorsque j'ai soulevé la possibilité que le hasard intrinsèque soit plutôt un phénomène clé, cela a été accueilli avec beaucoup d'hostilité par certains jeunes partisans de la théorie du chaos. L'idée de simples changement dans les conditions initiales ne sont pas seulement limitées aux prévisions météorologique parmi les système ce qui est difficile de prédire son avenir en raison de leur dépendance sensible aux condition initiale

dans le domaine de l'économie, dans le domaine de guerre, la principale raison de la première guerre mondiale est l'assassinat de Franz Ferdinar cette guerre ou 8.5 million de personne ou été tuées. Imaginez que chaque mouvement va maintenant comment affectera après de nombreuses années, si vous dites un mot gentil a tout le monde, simple charité accordé aux personnes dans le besoin cela affectera a leur venir, sourire émerge, papier de la déplace route, cultiver plante, lire mot que vous écrivez et d'autres lisent, ces simples choses peuvent changer la forme du monde de façon inattendue… peut-être est ce que notre prophète Mohamad la paix de dieu soit sur lui voulait dire (ne méprisez pas ce qui est convenable quelque chose Il avait reçu ton frère avec visage divorcé).

Afin de pouvoir présenter ce travail nous avons subdivisé ce document en trois chapitres :

Le premier chapitre : Nous donnons quelques définition de notion de base de théorie de chaos, nous concentrons sur les définitions des attracteurs et leur route vers le chaos, par example les systèmes chaotique classique comme celui de Hénon, Lozi, Duffing…

Le deuxième chapitre : est dédié à l'étude de certains systèmes chaotiques moderne de Zeraoulia et Sprott, où nous définissons ces systèmes avec certaines de leurs caractéristiques : stabilité, quelques attracteurs chaotiques et route vers le chaos.

Le dernier chapitre : Ce chapitre a été réservé à l'étude de l'application de Hénon dans la cryptographie. Nous avons donné quelques définitions de cryptage et leur algorithmes qui sont utilise l'application de Hénon pour chiffrer certain image.

Chapitre 1

Théorie du chaos

On va introduire des notions, définitions et des théorèmes qu'on utilisera plus tard. Dans la section 1, on donne quelques définitions autour de système dynamique. Dans la section 2, on résumé quelques définitions et propriétés des théories de chaos. Dans la section 2, on voie quelques applications chaotiques comme l'application de Hénon et Lozi, etc.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1 *On définit un système dynamique par un triplet $(X; T; f)$ constitué de l'espace d'états X, du domaine temporel T, et d'une application de transition d'état $f : X \times T \to X$ qui permet de définir à partir d'un vecteur de conditions initiales l'état du système à tout instant.*

Un Système dynamique décrit par une fonction mathématique présente deux types de variables :
Un système dynamique en temps continue : Dans le cas ou le composant temps est continue le système dynamique est présenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, p) \text{ ou } x \in \mathbb{R}^n, \text{ et } p \in \mathbb{R}^r. \tag{1.1.1}$$

Un système dynamique en temps discret : Dans le cas ou le temps est discret le système dynamique est présenté par une application itérative :

$$x_{k+1} = f(x_k, p), x_k \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3, ... \tag{1.1.2}$$

Ou p un paramètre, et $t \in T$, le domaine temporel.
Lorsque le temps t ou l'indice k apparaissent explicitement dans les relations et le système est dit non-autonome. En général, c'est un inconvénient majeur pour la résolution numérique et il est préférable de s'en affranchir ; par un changement de variables approprié, on peut transformer un système non-autonome avec $X \in \mathbb{R}^n$ en système autonome avec $X \in \mathbb{R}^{n+1}$.

En physique, un système conservatif est un système qui conserve l'énergie totale, et possède une intégrale première (ou constante) du mouvement, par contre un système dissipatif est un système qui dissipe de l'énergie, et possède au moins un terme dépendant de la vitesse.
Les systèmes considérés sont des systèmes déterministes, et pour préciser cette définition, on dit qu'un système déterministe est conservatif, si et seulement si la dynamique du système associée à chaque condition initiale x_0 a un et un seul état final $x(t)$, il faut pour cela qu'il existe une application bijective ϕ de l'espace des phases :

$$\begin{aligned} \phi \quad &: \quad I \times \mathbb{R} \to I, \\ (x,t) \quad &\to \quad \phi_t(x) = \phi(x,t). \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Qu'on appelle flot et qui possède les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_t(x_0) &= x_0. \\ \phi_{t+s}(x_0) &= \phi_t(\phi_s(x_0)). \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Si le système est dissipatif, le flot n'est pas bijectif et il existe en général un (ou plusieurs) attracteurs dans l'espace des phases du système.

Notation 1.1 *Dans ce travail nous sommes intéressés à l'étude les systèmes dynamiques discrets.*

1.1.1 Points fixes. Points périodiques

Définition 1.2 *On appelle point fixe d'un système dynamique tout point tel que :*

$$x^* = f(x^*). \tag{1.1.5}$$

Parfois, ces points sont appelés points d'équilibre.

Définition 1.3 *Étant donné le point initial x_0, on appelle orbite (ou trajectoire) du système S.D.D la suite :*

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0,\ x(1) = f(x(0)),\ ...,\ x(n+1) = f(x(n)),\ ...\}. \tag{1.1.6}$$

Définition 1.4 *Une orbite $O(x_0)$ s'appelle périodique s'il existe un $p > 0$ t.q :*

$$x(n+p) = x(n), \forall n. \tag{1.1.7}$$

Une orbite est dite éventuellement périodique s'il existe un $p > 0$ et un $N > 0$ tels que l'égalité (1.1.7) est vérifiée pour tout $n > N$. Une orbite périodique $O(x_0)$ est toujours une suite de points périodique. Tous ces points s'appellent point périodique de période p du système.

Remarque 1.1 *Tout point fixe, étant point périodique de période $p = 1$, est un point périodique de n'importe quelle période.*

1.1.2 La stabilité

Définition 1.5 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le multiplicateur est la pente :*

$$m = f'(x^*), \tag{1.1.8}$$

de la tangente de point fixe x^* qui détermine le type (ou la nature) de point fixe.

Théorème 1.1 *Supposons que x^*est un point fixe de $x_{t+1} = f(x_t)$, alors le point fixe x^* est :*
1) Attractif si $|m| < 1$.
2) Répulsif si $|m| > 1$.
3) Indifférent si $|m| = 1$.
4) Super stable si $m = 0$.
m s'appelle le multiplicateur de f au point x^*.

Théorème 1.2 *Pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le point fixe est :*
a) Stable si toutes les valeurs de $J(x^*) = Df(x^*)$ sont à l'intérieur du disque unité (leurs modules sont inférieur à 1).
b) Instable si l'une de ces valeurs propres de $J(x^*) = Df(x^*)$ a un module plus grand que 1 (l'extérieur du disque unité).

1.1.3 Définition des bifurcations

Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x_0 du système dynamique lorsqu'on modifié p, et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions. La codimension d'une bifurcation est la plus petite dimension de l'espace des paramètres telle que la bifurcation soit persistante.

1.1.4 Équivalence topologique des systèmes

Définition 1.6 *Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. On dit qu'ils sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme (une application continue et bijective) $h : D \to E$ tel que :*

$$h \circ f = g \circ h. \tag{1.1.9}$$

Le théorème suivant montre importance de cette définition.

Théorème 1.3 *Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. Supposons qu'ils sont topologiquement conjugués par un homéomorphisme $h : D \to E$. Alors :*

a) L'application $h^{-1} : E \to D$ *vérifie aussi la définition et assure donc l'équivalence topologique entre les systèmes* (D, f) *et* (E, g).
b) $h \circ f^{(n)} = g^{(n)} \circ h$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
c) Si $p \in D$ *est un point périodique de* f *de période fondamentale* k *alors* $h(p) \in E$ *est un point périodique de* g *de période fondamentale* k.

1.2 Dimension

Définition 1.7 *Dimension fractal : La dimension de* F *donne une certaine évaluation de l'espace occupé par* F. *Le concept de dimension est l'un des concepts les plus fondamentaux de la géométrie fractale. Les dimensions fractales prennent souvent des valeurs non entières. Parmi les dimensions fractales les plus célèbres figurent la dimension de Hausdorff et la dimension Minkowski-Bouligand.*

Définition 1.8 *Dimension topologique : Un espace métrique compact* (X, d) *est dit de dimension topologique (ou dimension de recouvrement) inférieure ou égale à* n *si pour tout réel* $R > 0$, X *admet un recouvrement ouvert fini* U_i *tel que :*
a) $diam(U_i) < R$ *pour tout* i.
b) Tout x *de* X *appartient à* $(n + 1)$ *des* U_i *au plus.*
X *est dite de dimension topologique exactement égale à* n *s'il est de dimension inférieure ou égale à* n, *mais pas de dimension inférieure ou égale à* $n - 1$.

Définition 1.9 *Dimension de Lyapunov : Soient* $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq ... \geq \lambda_n$ *les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et soit* j *le grand entier naturel tel que* $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+....+\lambda_j \geq 0$. *Alors la dimension de Lyapunov définit par Karlan et Yorke est donné par :*

$$D_L = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + ... + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|}. \tag{1.2.1}$$

Définition 1.10 *Dimension de Hausdorff : Informellement, des objets auto-similaire avec des paramètres* N, s *sont décrit par une loi de puissance tel que* $N = s^d$ *où* $d = \frac{\ln N}{\ln s}$, *est la dimension de la loi de puissance connu sous le nom la dimension de Hausdorff. Formellement, soit* A *un sous espace d'un espace métrique* X *alors la dimension de Hausdorff* $D(A)$ *de* A *est l'infinité des* $d \geq 0$ *tel que la mesure* d*-dimensionnelle de Hausdorff de l'ensemble* A *est égale* 0 *(pas nécessairement un nombre entier).*

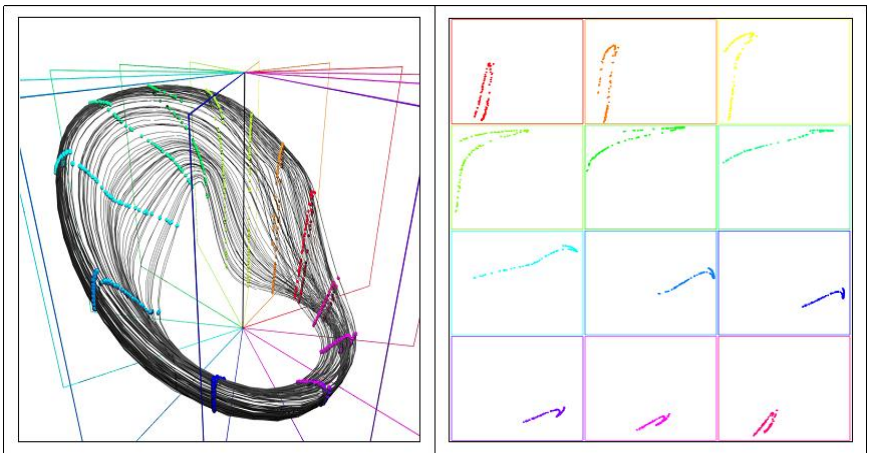
Définition 1.11 *Dimension de corrélation (désignée par* υ*) est une mesure de la dimensionnalité de l'espace occupé par un ensemble de points aléatoires, souvent appelé un type de dimension fractale.*

1.3 La section de Poincaré

La section de Poincaré est un outil très fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques et notamment les trajectoires périodiques.
Considérons le système autonome d'ordre n :

$$\frac{dx}{dt} = f(x), x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.3.1}$$

Soit $\varphi(t; x_0)$ une trajectoire représentant la solution du système (1.3.1) muni de la solution initiale $x(0) = x_0$.
Le système (1.3.1) n'ayant généralement pas de solution analytique, on doit étudier chaque solution en considérant sa trajectoire dans l'espace des phases que l'on peut obtenir par une intégration numérique, mais la dimension élevée de l'espace complique, cette étude. C'est pour cela que la section de Poincaré est intéressante. Elle transforme un système continu en un système discret. Le principe de construction de cette technique est illustré par la $Fig.1.1$, représentant des points d'intersection d'une trajectoire avec un hyperplan.
La méthode de Poincaré permet simultanément de discrétiser le système et de réduire sa dimension en conservant les même propriétés topologiques, plus précisément elle remplace l'analyse des trajectoires d'un système dynamique dont l'espace des phases est de dimension n par celle de la suite des points d'intersections successives : $p_0, p_1, p_2, ...$d'une trajectoire $\varphi(t, x_0)$ avec un hyperplan $\sum_p$ de dimension $(n-1)$, ce dernier peut être quelconque. Mais un bon choix permet d'obtenir les sections aisément exploitables. L'hyperplan $\sum_p$ est appelé la section de Poincaré.



$Fig.1.1.$ Section de Poincaré

1.4 Définition et propriété du chaos

Définition 1.12 *Le chaos : Tel que le scientifique le comprend ne signifie pas l'absence d'ordre il se rattache plutôt a une notion d'imprévisibilité d'impossibilité de prévoir une évolution à long terme du fait que l'état finale dépend de manière si sensible de l'état initial.*
On appelle donc un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètre et caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ils ne sont pas déterminés ou modélisés par des systèmes d'équation linéaires ni par les lois de mécanique classique ; pourtant, ils ne sont pas nécessairement aléatoire, relevant du seul calcule des probabilités.

1.4.1 Propriétés des systèmes chaotiques

Un système chaotique à plusieurs propriétés que nous allons parmi :
a) Il ne se répète jamais (et semble erratique).
b) Il a une dépendance sensible par rapport aux conditions initiales (effet papillon).
c) Mais il n'en est pas moins ordonné et caractérisé par un déterminisme imprévisible.
d) la non linéarité.

Définition 1.13 *Le déterminisme est la théorie selon laquelle la succession des événements et des phénomènes est due au principe de causalité, ce lien pouvant parfois être décrit par une loi physico-mathématique qui fonde alors le caractère prédictif de ces derniers.*

Il est lié à la prédictibilité qui stipule que chaque événement est prévisible selon des équations mathématiques.

Définition 1.14 *On parle de non-linéarité lorsque l'entrée d'un système n'est pas proportionnelle à sa sortie, ou lorsqu'un événement a des effets imprévisibles à long terme.*

Remarque 1.2 *Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique.*

Définition 1.15 *Sensibilité aux conditions initiales (S.C.I) : Est une caractéristique fondamentale des systèmes dynamiques. Il faut entendre ici qu'un système réagira de façon totalement différente selon la condition initiale. Ceci a notamment comme conséquence le fait qu'un système chaotique, même si toutes ses imprévisible car sensible à d'infimes perturbations initiales. Comme l'a fait Edward Lorenz dans sa célèbre remarque que le battement des ailes d'un papillon aura pour effet après quelque temps de changer complètement l'état de l'atmosphère terrestre.*

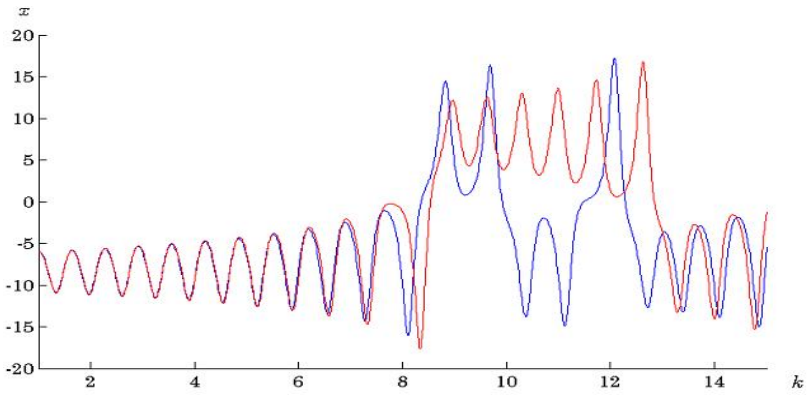


*Fig.*1.2. Évolution dans le temps pour deux conditions initiales très proches d'un signal chaotique

Définition 1.16 *L'espace des phases est un espace abstrait contenant sous forme géométrique une information concrète. Les variables qui sont à la base de la construction de cet espace sont des grandeurs réelles et à chaque point correspond une situation physique bien déterminée. Ainsi l'espace des phases du balancier d'une horloge est construit à partir des variables vitesse et angle par rapport à la verticale.*

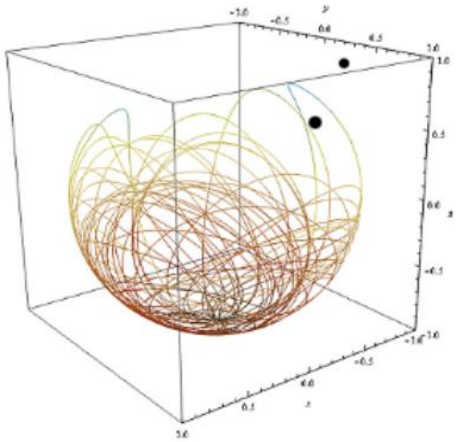


*Fig.*1.3. Espace des phases

1.5 Exposant de Lyapunov pour une application unidimensionnelle

Soit une application discrète f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui applique x_t sur x_{t+1}. Choisissons deux conditions initiales très proches, soit x_0 et $x_{0+\varepsilon}$ et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. Supposons qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel λ tel qu'après t itérations :

$$|f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)| \approx \varepsilon \exp(t\lambda), \tag{1.5.1}$$

en passant au logarithme, on trouve :

$$\ln(\frac{|f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)|}{\varepsilon}) \approx t\lambda, \tag{1.5.2}$$

si l'on fait tendre ε vers 0, il vient :

$$\lambda \approx \frac{A}{t}\left|\frac{df(x_0)}{dx_0}\right|, \tag{1.5.3}$$

finalement, en faisant tendre t vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne, on obtient :

$$\lambda \approx \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{t}\sum_{t=0}^{i-1}\ln\left|\frac{df}{dx}\,|_{x=x_i}\right|, \tag{1.5.4}$$

λ est appelé exposant de Lyapunov. Il indique le taux moyen de divergence par itération.

1.6 Attracteurs

Définition 1.17 *Un ensemble $M \subset I$ est dit invariant par un champ de vecteur si toute solution $x(t)$ du système différentiel associe au champ de vecteurs issu de M vérifie $x(t) \subset M$ pour tout t pour lequel cette solution est définie.*

Définition 1.18 *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble d'états) vers lesquels évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales.*

Mathématiquement, l'ensemble A est un attracteur si :
a) Pour tout voisinage U de A, il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0,t)=\phi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$.
b) Il existe une orbite dense dans A.

Proposition 1.1 *Un attracteur possède les propriétés suivantes :*

a) Un sous ensemble borné A de l'espace est de volume nul invariant par le flot. Autrement dit, tout point de l'espace d'états qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t.
b) Il existe un ensemble $B \supset A$, tel que pour voisinage de A, la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A. Cette zone d'influence est le basin d'attraction, c'est l'ensemble :

$$W = \cup_{\phi_t}(V), t<0. \tag{1.6.1}$$

c) Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

1.6.1 Attracteur chaotique étrange

Quelques définitions d'un attracteur chaotique étrange :

Définition 1.19 *L'attracteur étrange est une figure qui représente l'ensemble des trajectoires d'un système donné en proie à un mouvement chaotique.*

Définition 1.20 *On peut définir l'attracteur étrange comme une carte des états imprévisibles et chaotique, il révèle un ordre, une contrainte cachée, un espace des phases vers lequel convergent des phénomènes chaotiques.*

Proposition 1.2 *Un attracteur étrange est un attracteur contenant une orbite homocline transversale.*

Proposition 1.3 *Un attracteur étrange est caractérise par la sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale.*

Proposition 1.4 *Il est clair que certains attracteurs ne sont pas généralement étranges.*

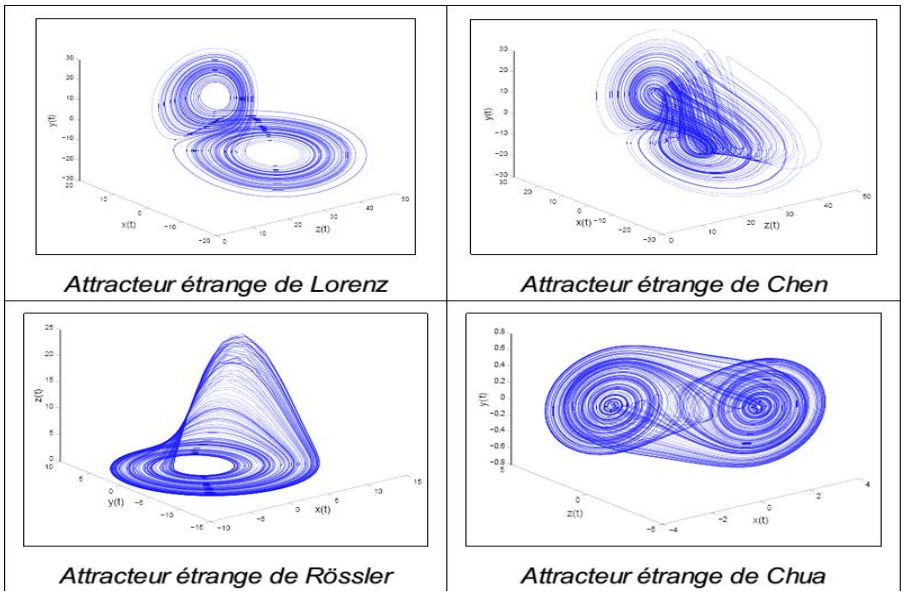


*Fig.*1.4. Quelques attracteurs étranges

1.7 Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit de contrôle, qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de

contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de controle conduit dans bien des cas à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.
Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage du point fixe au chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on appelle bifurcations. Une bifurcation marque le passage soudain d'un régime dynamique à un autre, qualitativement différent. On peut citer deux scénarios de transition vers le chaos :

1.7.1 Le doublement de période

Qui est caractérisé par une succession de bifurcations fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par deux, puis par quatre, puis par huit, ..., etc ; ces doublements de période sont de plus en plus rapprochés ; lorsque la période est infinie, le système devient chaotique. La turbulence dans les fluides peut apparaitre suivant ce scénario.

1.7.2 La quasi-périodicité

Qui intervient quand un deuxième système perturbe un système initialement périodique. Si le rapport des périodes des deux systèmes en présence n'est pas rationnel, alors le système est dit quasi périodique. Ce scénario un peu compliqué est relié à la théorie des nombres, notamment aux travaux de Jean Christophe Yoccoz, lauréat de la Médaille Fields en 1994, pour ses travaux sur les systèmes dynamiques.

1.8 Test du chaos dans un système dynamique

Tester le chaos dans un système dynamique peut être procédé par élimination des comportements. C'est-à-dire, si le comportement d'un système dynamique n'est pas un point fixe, ni périodique ou quasi périodique, on conclut alors qu'il est chaotique. Mais dans le cas d'un système affecté par un bruit, et la séquence qu'il génère n'est pas connue, cette méthode est alors à rejeter. En conséquence les scientifiques ont proposé des solutions basées sur une approche statistique dont la plus utilisée pratiquement est celle des exposants de Lyapunov, vu sa performance et son coût de calcul relativement réduit. On peut ainsi quantifier la divergence des trajectoires d'un système dynamique issues des conditions initiales différentes en calculant son exposant de Lyapunov, dont la valeur est un indicateur utilisé pour tester le chaos dans le système.

1.9 Quelques applications classiques

1.9.1 Application de Hénon

La récurrence de Hénon est un modèle proposé en 1976 par le mathématicien Michel Hénon. Le modèle d'état associé est :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}, \tag{1.9.1}$$

a, b représentent des paramètres de bifurcation.

Propriétés de l'application de Hénon

La valeur de la constante a contrôle la non linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation. Les valeurs habituellement utilisées pour a, b sont $a = 1.4$ et $b = 0.3$. L'application de Hénon est inversible, son inverse est :

$$H^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} b^{-1}y \\ x - 1 + \frac{a}{b^2}y^2 \end{pmatrix}. \tag{1.9.2}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne est égale à $|J| = -b$. Cette application possède deux points fixes hyperbolique définit par :

$$\begin{cases} P_1 = (x_1, y_1) = \left(\frac{b-1+\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}, b\frac{b-1+\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a} \right), & \text{si } 0 < b < 1, \\ P_2 = (x_2, y_2) = \left(\frac{b-1-\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a}, b\frac{b-1-\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a} \right), & \text{si } 0 < b < 1. \end{cases} \tag{1.9.3}$$

La Stabilité

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.9.4}$$

L'équation caractéristique de la matrice jacobienne est :

$$\lambda^2 + 2ax\lambda - b. \tag{1.9.5}$$

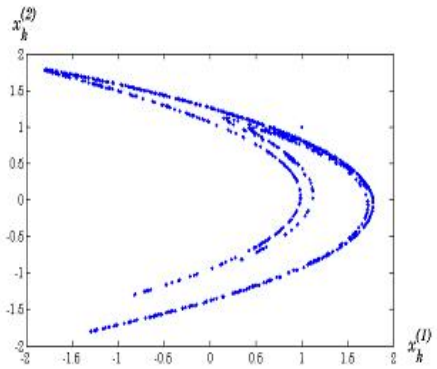
Et leur valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = -ax + \sqrt{a^2x^2 + b}, \quad \text{pour } P_1. \tag{1.9.6}$$
$$\lambda_2 = -ax - \sqrt{a^2x^2 + b}, \quad \text{pour } P_2.$$

Si l'on calcule les valeurs absolues des valeurs propres, on constate que la plus petite des valeurs propres est toujours inférieure à 1, tandis que la plus grand est inférieur, égale ou supérieur à 1 suivant que $|x|$ inférieur, égale ou supérieur à $\frac{(1-b)}{2a}$, on en déduit que le point fixe P_2 est un point selle.
L'autre point fixe est stable si $a < \frac{3(1-b)^2}{4} = 0.3675$. Si $a = \frac{3(1-b)^2}{4}$, on a $\lambda_1(x_1, y_1) = b$ et $\lambda_2(x_2, y_2) = -1$.

Attracteur de Hénon

L'attracteur chaotique de Hénon est représenté sur la $Fig.1.5$ pour les valeurs numériques $a = 1,4$ et $b = 0,3$.



$Fig.1.5$. Attracteur de Hénon

1.9.2 Application de Lozi

La récurrence de Lozi est obtenue en remplaçant x_k^2 dans la récurrence de Hénon par $|x_k|$ et en modifant la valeur des paramètres. Elle peut être trouvée dans [Peitgen et al., 1992] est donnée par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - a\,|x_k| + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}. \tag{1.9.7}$$

a, b représentent des paramètres de bifurcation.

Propriétés de l'application de Lozi

a) L'application de Lozi n'est pas différentiable.
b) Si $a = 0$, l'application de Lozi est une application linéaire, donc on pose toujours $a \neq 0$.
c) Selon la figure de l'application on peut dévisser le plan en deux régions linéaires comme suit :

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \geq 0\}. \\ R_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x < 0\}. \end{aligned} \tag{1.9.8}$$

d) L'application de Lozi est inversible, son inverse est :

$$L^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} b^{-1}y \\ x - 1 + \frac{a}{b}|y| \end{pmatrix}. \tag{1.9.9}$$

e) Le déterminant de la matrice jacobienne est égale à $|J| = -b$, alors il y a contraction des aires pour $|b| < 1$.
f) Cette application possède deux points fixes hyperbolique définit par :

$$\begin{cases} P_1 = \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{1}{1+a-b}\right), \text{ si } b < a+1. \\ P_2 = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{1}{1-a-b}\right), \text{ si } b < -a+1. \end{cases} \tag{1.9.10}$$

La Stabilité

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$\begin{aligned} J(x,y) &= \begin{pmatrix} -a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pour } R_1. \\ J(x,y) &= \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{pour } R_2. \end{aligned} \tag{1.9.11}$$

L'équation caractéristique de la matrice jacobienne est :

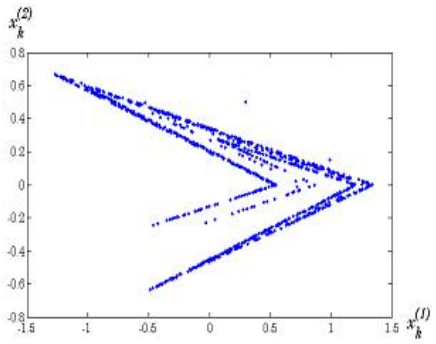
$$\begin{aligned} \lambda^2 + a\lambda - b, \quad \text{pour } P_1. \\ \lambda^2 - a\lambda - b, \quad \text{pour } P_2. \end{aligned} \tag{1.9.12}$$

Stabilité de P_1 :
a) Pour $b > \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des réelles.
b) Pour $b < \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des complexes.
c) Elle sont de module inférieur à 1 si $b > -1$, $b < a+1$ et $b < 1-a$. Et le point fixe $P1$ est stable.

d) Les valeurs propres sont de module supérieur à un si $b < -1$, $b < a + 1$ et $b < 1 - a$. Et le point fixe P_1 est instable.
e) Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si $b > a + 1$ et $b > 1 - a$. Et le point fixe P_1 est un point selle ou col.
Stabilité de P_2 :
a) L'existence de P_2 est pour $b > -a + 1$, alors $\Delta = a^2 + 4b > 0$ et les valeurs propres sont toujours des réelles.
b) Elle sont de modules supérieurs à un si $b > -a + 1$, $b > a + 1$. Et le point fixe P_2 est instable.
c) Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si $b > a + 1$ et $b > 1 - a$. Et le point fixe P_2 est un point selle ou col.

Attracteur de Lozi

L'attracteur chaotique de Lozi est représenté sur la $Fig.1.6$ pour les valeurs numériques $a = 1,7$ et $b = 0,5$.



$Fig.1.6$. Attracteur de Lozi

1.9.3 Application de Duffing

La récurrence de Duffing est donnée par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k \\ y_{k+1} = -bx_k + ay_k - y_k^3 \end{cases}, \tag{1.9.13}$$

a, b représentent des paramètres de bifurcation. L'attracteur chaotique de Duffing est représenté sur la $Fig.1.7$ pour les valeurs numériques $a = 2,75$ et $b = 0,2$.

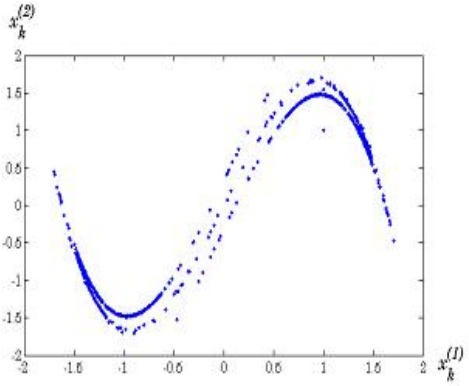


*Fig.*1.7. L'attracteur chaotique de Duffing

1.9.4 Application d'Ikeda

Cette récurrence a été proposée d'abord par Ikeda pour modéliser la propagation de la lumière à travers un résonateur optique non linéaire. Elle est souvent utilisée dans une forme modifiée donnée par le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + a(x_k \cos\theta_k - y_k \sin\theta_k) \\ y_{k+1} = a(x_k \sin\theta_k + y_k \cos\theta_k) \end{cases}, \tag{1.9.14}$$

avec :

$$\theta_k = 0,4 - \frac{6}{1 + x_k^2 + y_k^2}, \tag{1.9.15}$$

a représente un paramètre de bifurcation. L'attracteur chaotique d'Ikeda est représenté sur la *Fig.*1.8 pour la valeur numérique $a = 0,9$.

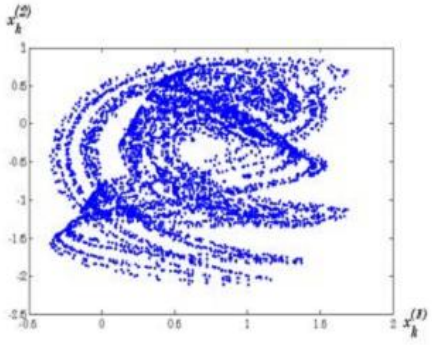


*Fig.*1.8. L'attracteur chaotique d'Ikeda

Chapitre 2

Quelques applications modernes

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons des applications chaotiques discrètes modernes de Zeraoulia et Sprott.

2.1 Une application quadratique 2-D minimale avec une route quasi-périodique vers le chaos

Parmi les applications quadratiques non linéaires étudiées ce qui a été souvent est l'application de Hénon donnée par :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - ax^2 + by \\ x \end{pmatrix}. \tag{2.1.1}$$

Après certains changements dans l'application de Hénon, on a obtenu une application moderne qui est donnée par :

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - ay^2 + bx \\ x \end{pmatrix}. \tag{2.1.2}$$

2.1.1 Propriétés

a) Elle diffère de l'application de Hénon en ce qui conserne le non-uniforme dissipation.
b) Elle plus riche et variée au route de chaos et elle est une plus grande variétés d'attracteurs.
c) Cette application possède 2 points fixes définis par :

$$\begin{cases} P_1 = \left(\frac{b-1-\sqrt{4a-2b+b^2+1}}{2a}, \frac{b-1-\sqrt{4a-2b+b^2+1}}{2a}\right) \\ P_2 = \left(\frac{b-1+\sqrt{4a-2b+b^2+1}}{2a}, \frac{b-1+\sqrt{4a-2b+b^2+1}}{2a}\right) \end{cases} \text{, si } a \geq -\left(\frac{-b+1}{2}\right)^2, \tag{2.1.3}$$

et obtenus à partir de la solution de l'équation :

$$f(x^*, y^*) = (x^*, y^*). \tag{2.1.4}$$

2.1.2 La stabilité

On peut facilement déterminer la stabilité de ces points par l'évolution des valeurs propres de la matrice jacobienne, où cette dernière est donnée par :

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} b & -2ay \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1.5}$$

L'équation caractéristique de la matrice jacobienne pour le point fixe (x, x) est :

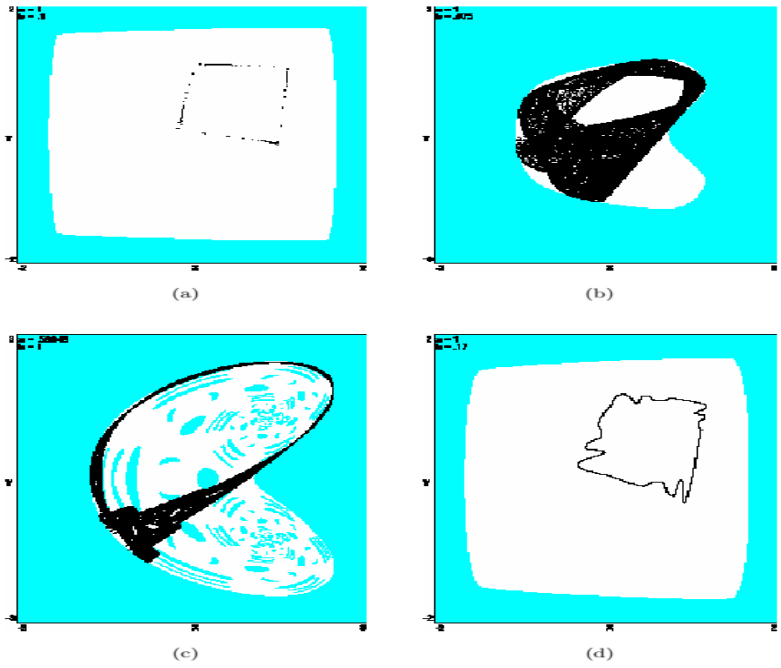
$$\lambda^2 - b\lambda + 2ax = 0. \tag{2.1.6}$$

Après quelques calculs, nous obtenons les résultats suivants :
Pour le point fixe P_1 :
a)P_1 est instable dans les cas suivants :
1/ $a \geq -\left(\frac{-b+1}{2}\right)^2$, $b < 0$.
2/ $a \geq -\left(\frac{-b+1}{2}\right)^2$, $a > \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{4}$, $b > 0$.
b) P_1 est un point de selle dans le cas suivant :
1/ $a \geq -\left(\frac{-b+1}{2}\right)^2$, $a < \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{4}$, $b > 0$.
Pour le point fixe P_2 :
a) P_2 est instable dans les cas suivants :
1/ $a \geq -\left(\frac{-b+1}{2}\right)^2$, $a > \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{8}b^3 + \frac{1}{64}b^4$, $b \geq 2$.
2/ $a \geq -\left(\frac{-b+1}{2}\right)^2$, $a > -\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}$, $b < 2$.
3/ $a \geq -\left(\frac{-b+1}{2}\right)^2$, $a \leq \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{8}b^3 + \frac{1}{64}b^4$, $b > 2$.
b)P_2 est stable dans les cas suivants :
1/ $a \geq -\left(\frac{-b+1}{2}\right)^2$, $a > \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{8}b^3 + \frac{1}{64}b^4$, $a < -\frac{1}{2}b + \frac{3}{4}$, $b < 2$.
2/ $a \geq -\left(\frac{-b+1}{2}\right)^2$, $a \leq \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{8}b^3 + \frac{1}{64}b^4$, $0 \leq b \leq 2$.
3/ $a \geq -\left(\frac{-b+1}{2}\right)^2$, $a \leq \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{8}b^3 + \frac{1}{64}b^4$, $a > \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{4}$, $-2 < b < 0$.
c)P_2 est un point de selle dans le cas suivant :
1/ $a \geq -\left(\frac{-b+1}{2}\right)^2$, $a \leq \frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{8}b^3 + \frac{1}{64}b^4$, $a < \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}b^2 - \frac{1}{4}$, $-2 < b < 0$.

2.1.3 Simulation numérique

Observation de nouveaux attracteurs chaotiques

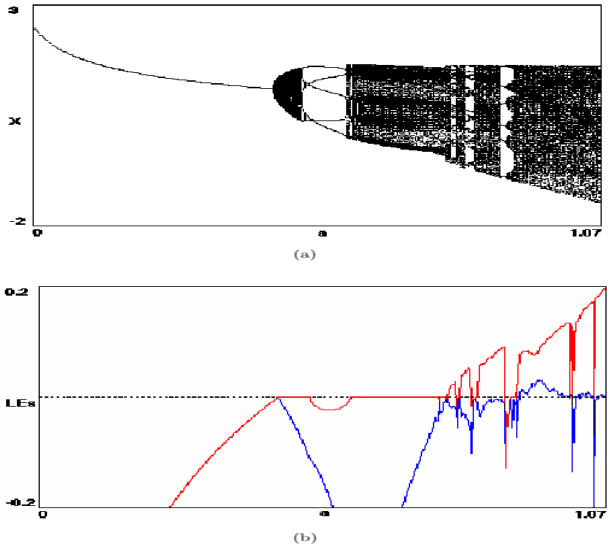
Il ya plusieurs moyens possibles utilisés afin de rendre le système dynamique discret de comportement régulier à chaotique. Le diagramme de bifurcation indique que cette solution et permet de définir les régions chaotiques dans l'espace$-ab$ qui peut déterminer via les attracteurs chaotiques. pour le système (2.1.1) les valeurs de a et b qui maximisé l'exposante de Lyaponov avec $a = 1$ et $b = 1$ comme suit : pour $a = 1$ on a $b = 0,675$ et l'exposante de Lyaponove pour $0,171496$ et $0,007595$, ainsi pour $b = 1$ on $a = 0,59948$ et l'exposante de Lyaponove pour $0,091912$ et $-0,074313$. L'attracteur chaotique correspondant est montré respectivement sur $Fig.2(b)$ et (c) avec leur attracteurs basin au blanc. Notez que la limite du bassin touche presque l'attracteur pour ces cas est apparemment est une fractale comme la $Fig.2.1(c)$.



$Fig.2.1.$ (a) Une orbite périodique de l'application (2.1.2) avec son bassin d'attraction (blanc) obtenu pour $a = 1$ et $b = 0,1$. (b) L'attracteur chaotique avec son bassin d'attraction (blanc) pour $a = 1$ et $b = 0.675$. (c) Un autre attracteur chaotique avec son bassin d'attraction (Blanc) pour $a = 0.59948$ et $b = 1$. (d) Une orbite quasi périodique avec son bassin d'attraction (blanc) pour $a = 1$ et $b = 0.17$.

Route vers le chaos

L'attracteur chaotique quadratique minimal considéré ici comme il résulte d'une solution quasi-périodique à chaos comme le montre la $Fig.2.2$.



$Fig.2.2$. (a) La quasi périodique route vers le chaos pour l'application (2.1.2) obtenue pour $a = 0.6$ et $0 < a \leq 1.07$. (b) Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (2.1.2) par rapport au paramètre $0 < a \leq 1.07$ avec $b = 0.6$.

2.2 Une nouvelle application simple 2-D linéaire par morceau

L'application de Lozi est aussi l'une des applications qu'elle a étudié souvent comme l'application de Hénon, elle donnée par :

$$L(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - a|x| + by \\ x \end{pmatrix}. \tag{2.2.1}$$

Dans cette section, nous allons étudier une application extrait de l'application de Lozi qui est donnée par :

$$f\,(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - a|y| + bx \\ x \end{pmatrix}, \tag{2.2.1}$$

tel que a, b sont des paramètres de bifurcation.

2.2.1 Propriétés

a) L'application f contenue sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas différentiable au point $y = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) L'application f est difféomorphisme quand $a \neq 0$.
c) Le déterminant de sa matrice jacobienne est non nul si seulement si $a \neq 0$.
d) Selon la figure du champ vectoriel de l'application on peut dévisser le plan à deux régions linéaires comme suit :

$$R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y < 0\}, \tag{2.2.3}$$

$$R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geq 0\}.$$

d) L'application L et l'application f ne sont pas équivalentes topologiquement.
e) Cette application possède 2 points fixes définis par :

$$P_1 = \left(\frac{-1}{a+b-1}, \frac{-1}{a+b-1}\right) \in R_1, \text{ quand } b > -a+1. \tag{2.2.4}$$

$$P_2 = \left(\frac{-1}{-a+b-1}, \frac{-1}{-a+b-1}\right) \in R_2, \text{quand } b < a+1.$$

Ils sont obtenues à partir de la solution de l'équation suivante :

$$f(x^*, y^*) = (x^*, y^*). \tag{2.2.5}$$

Nous remarquons que l'application f a le même point fixe que l'application de Lozi mais avec un type de stabilité différent en raison de la différence dans la matrice jacobienne.

2.2.2 La stabilité

On peut facilement déterminer la stabilité de ces points par l'évolution des valeurs propres de la matrice jacobienne, mais nous notons qu'il a forme normale pour le système linéaire par morceau au voisinage d'un point fixe sur la bordure peut être exprimée comme :

$$N(x,y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \tau_1 & 1 \\ -\delta_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu, \text{ si } x < 0, \\ \\ \begin{pmatrix} \tau_2 & 1 \\ -\delta_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu, \text{ si } x > 0, \end{cases} \tag{2.2.6}$$

où μ est un paramètre de bifurcation, et τ_i, δ_i, $i = 1, 2$ sont les traces et les déterminants des matrices correspondantes de l'application linéarisée dans les deux sous-régions R_1 et R_2 évalués à P_1 et P_2 respectivement. Pour l'application (2.2.2) on a :

$$\tau_1 = \tau_2 = b, \quad \delta_1 = -a, \quad \delta_2 = a. \tag{2.2.7}$$

La forme normale peut être utiliser pour étudier les bifurcations locales de l'application d'origine lorsqu'un point fixe entre en collision avec la frontière [21], mais ce n'est pas le cas pour l'application $(2.2.2)$ alors on va calculer les matrices jacobiennes de l'application $(2.2.2)$ évaluée au point fixe P_1 est P_2 respectivement.
La matrice jacobienne évaluée au point fixe P_1 est :

$$J_1 = \begin{pmatrix} b & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.8}$$

Leur équation caractéristique est donné par :

$$\lambda^2 - b\lambda - a = 0. \tag{2.2.9}$$

La matrice jacobienne évaluée au point fixe P_2 est :

$$J_2 = \begin{pmatrix} b & -a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.2.10}$$

Leur équation caractéristique est donnée par :

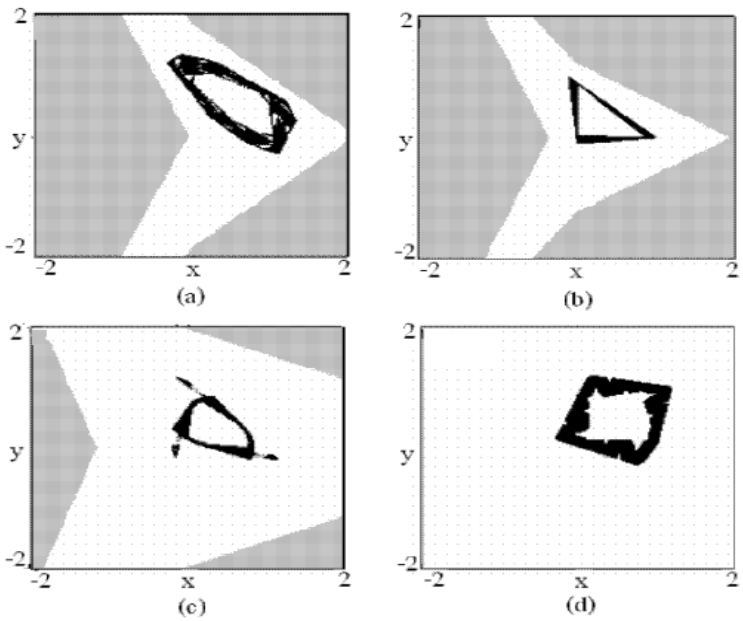
$$\lambda^2 - b\lambda + a = 0. \tag{2.2.11}$$

Après quelques calculs, nous obtenons les résultats suivants :
Pour le point fixe P_1 on a :
a) Une repeller si $a > 1, 0 < b < a - 1$.
b) Une selle régulière si $-1 < a < 0, b > 1 - a$.
c) Un selle flip si $0 < a < 1, b > 1 - a$.
Pour le point fixe P_2 on a :
d) Un attracteur régulier si $0 < a < 1, 2\sqrt{a} < b < a + 1$.
e) Un attracteur flip si $-1 < a < 0, -1 - a < b < a + 1$, ou $0 < a < 1, -1 - a < b < -2\sqrt{a}$.
f) Un selle flip si $-1 < a < 0, b < -a - 1, b < a + 1$, ou $0 < a < 1, b < -a - 1$.
g) Un attracteur spiral sens horaire si $0 < a < 1, 0 < b < 2\sqrt{a}$.
h) Un attracteur spiral anti-horaire $0 < a < 1, -2\sqrt{a} < b < 0$.
i) Une repeller si $a > 1, b < 1 - a$.

2.2.3 Simulation numérique

Observation de nouveaux attracteurs chaotiques

Dans cette partie, on va illustrer quelques attracteurs chaotiques remarquables récemment avec des phénomènes dynamiques, les différents attracteurs chaotiques montrés dans la $Fig.2.3$ au noirs avec leurs basins d'attraction au blanc.



$Fig.2.3$. Attracteur chaotique de l'application (2.2.2) avec son bassin d'attraction pour $a = 1.1$ et (a) $b = -1.4$;(b) $b = -1.1$;(c) $b = 0.8$ (d) $b = 0.2$

En fait, les systèmes chaotiques continus linéaires par morceaux peuvent également générer divers attracteurs, même les attracteurs multi-scroll plus complexes.

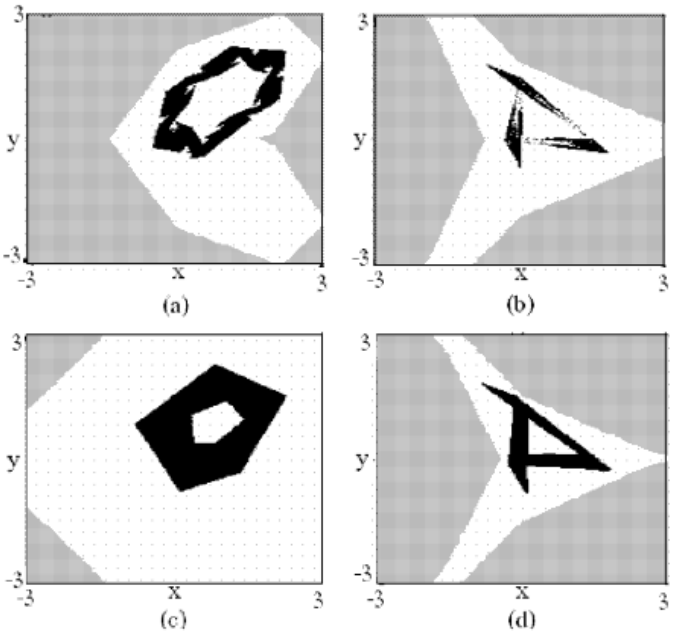


*Fig.*2.4. Attracteur chaotique de l'application (2.2.2) avec leur bassin d'attraction pour (a) $a = b = 1.1$; (b) $a = 1.2, b = -1$; (c) $a = 1.2$, $b = 0.5$; (d) $a = 1.3$,$b = -1.1$.

Route vers le chaos

Ce scénario implique une séquence de paires de bifurcations, où chaque paire consiste en une bifurcation de collision de bordure et une bifurcation Pitchfork. En outre, le nouveau morceau ici résulte d'une orbite de la période-1 stable à un système chaotique entièrement développé. Ce type particulier de bifurcation est appelé bifurcation de collision de bordure comme le montre la *Fig.*2.5 et c'est le seul scénario observé.

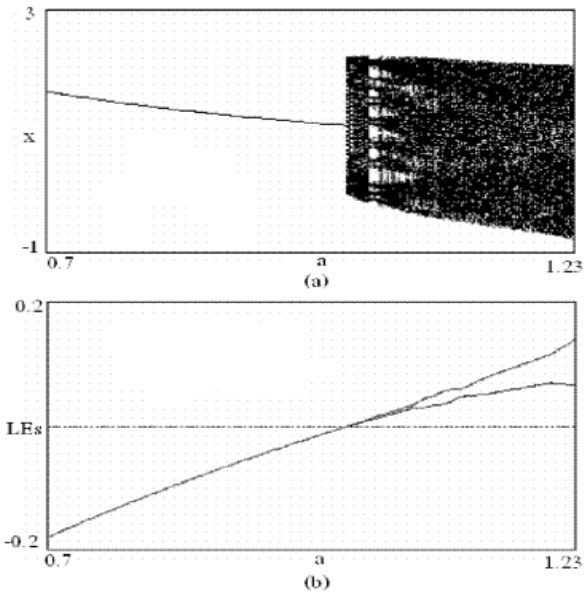


*Fig.*2.5. Le diagramme de bifurcation de l'application (2.2.2) obtenu pour $b = 1.1$ et $0.7 \leq a \leq 1.23$; variation des exposants de Lyapunov de l'application (2.2.2) contre le paramètre $0,7 \leq a \leq 1,23$ avec $b = 1,1$.

2.3 Une application discrète 2-D avec attracteurs chaotique de type C$^\infty$-multifold

Plusieurs recherches décrivent quelques systèmes chaotiques inspirer du plus célèbres applications discrètes de dimension-deux proposé via Hénon. Il est possible de changer la forme de l'application pour obtenir des autres attracteurs chaotiques ou pour faire quelques C^1 modifications pour obtenir des *attracteurs chaotiques multifold étrange*. Dans cette section on va étudier l'application modifiée de Hénon donnée par :

$$f\left(x_n, y_n\right) = \begin{pmatrix} 1 - a\sin x_n + by_n \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{2.3.1}$$

où équivalent :

$$x_{n+1} = 1 - a\sin x_n + bx_{n-1}. \tag{2.3.2}$$

2.3.1 Propriétés

a) Il engendre une application de classe C^∞.

b) *Attracteur chaotique multifold* avec le doublement périodique comme route au chaos.
c) Le choix du terme $\sin x$ à un rôle important : Les solutions sont bornées pour toutes valeurs de b tel que $|b| < 1$et pour toutes valeurs de a et non bornée pour $|b| > 1$.

2.3.2 Résultat analytique

Théorème 2.1 *Soit $(x_n)_n$ et $(z_n)_n$ deux suites avec $x_n < z_n$, si $|z_n| \leq |x_n|$ et $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = A < +\infty$, alors $\lim_{n\to+\infty} |x_n| \leq A$, ou si $|z_n| \leq |x_n|$ et $\lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} |x_n| = +\infty$.*

On utilise cette résultat pour rétabli une suite $(z_n)_n$ qui satisfait la condition au dessus pour déterminer est ce que l'équation de différence (2.3.2) a des orbites bornées ou non bornées.

Théorème 2.2 *Pour toute valeur a et b la suite $(x_n)_n$ donnée par (2.3.2) satisfait l'inégalité suivant :*

$$|1 - x_n + bx_{n-2}| \leq |a| . \tag{2.3.3}$$

Preuve. *Prenoms pour toute $n > 1$, $x_n = 1 - a \sin x_{n-1} + bx_{n-2}$ puis on a : $|1 - x_n + bx_{n-2}| = |a \sin x_{n-1}| \leq |a|$ tel que $\sup_{x\in R} |\sin x| = 1$.* ■

Théorème 2.3 *Pour toute $n > 1$ et tout valeur de condition initiale $(x_0, x_1) \in R^2$, la suite $(x_n)_n$ satisfait les inégalités suivantes :*
a) Si $b \neq 1$ alors :

$$x_n = \begin{cases} \frac{b^{\frac{n-1}{2}}-1}{b-1} + b^{\frac{n-1}{2}} x_1 - a \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} b^{p-1} \sin x_{n-(2p-1)}, \text{ si } n \text{ impair.} \\ \frac{b^{\frac{n}{2}}-1}{b-1} + b^{\frac{n}{2}} x_0 - a \sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} b^{p-1} \sin x_{n-(2p-1)}, \text{ si } n \text{ pair.} \end{cases} . \tag{2.3.4}$$

b) Si $b = 1$ alors :

$$x_n = \begin{cases} \frac{n-1}{2} + x_1 - a \sum_{p=1}^{p=\frac{n-1}{2}} \sin x_{n-(2p-1)} \text{ si } n \text{ impair} \\ \frac{n}{2} + x_0 - a \sum_{p=1}^{p=\frac{n}{2}} \sin x_{n-(2p-1)} \text{ si } n \text{ pair} \end{cases} . \tag{2.3.5}$$

Théorème 2.4 *Le point fixe (l, l) de l'application (2.3.2) existe si l'une des conditions suivantes si $a \neq 0$, et $b \neq 1$ alors l satisfait les conditions suivantes :*
a) Si $a \neq 0$, et $b \neq 1$, Alors l satisfait aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} 1 - a \sin l + (b-1)l = 0 \text{ et } l \leq \frac{1+|a|}{1-b}, \text{ si } b > 1, \\ \frac{1+|a|}{1-b} \leq l, \text{ si } b < 1, \end{cases} . \tag{2.3.6}$$

b) Si $b = 1$ *et* $|a| \geq 1$ *alors* l *donné par* $l = \arcsin\left(\frac{1}{a}\right)$.
c) Si $b \neq 1$ *et* $a = 0$ *alors* l *donné par* $\frac{1}{1-b}$.
d) Si $a = 0$ *et* $b = 1$, *il n'y a pas de points fixes pour l'application (2.3.2).*

Existence d'orbites bornées

Théorème 2.5 *L'orbite de l'application (2.3.2) est bornée pour toute* $a \in \mathbb{R}$ *et* $|b| < 1$ *et toute condition initiale* $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$.

Preuve. De l'équation (2.3.2) et le fait que $\sin x$ est une fonction bornée pour toute $x \in \mathbb{R}$. On a l'inégalité suivante pour tout $n > 1$:

$$|x_n| \leq 1 + |a| + |bx_{n-2}|\,, \tag{2.3.7}$$

$$|x_{n-2}| \leq 1 + |a| + |bx_{n-4}|\,, \tag{2.3.8}$$

$$.... |x_{n-4}| \leq 1 + |a| + |bx_{n-2}|\,, \tag{2.3.9}$$

Cela implique de (2.3.7), (2.3.8), (2.3.9)... que :

$$|x_n| \leq 1 + |a| + |bx_{n-2}|\,, \tag{2.3.10}$$

$$|x_n| \leq (1 + |a|) + |b|\,(1 + |a| + |bx_{n-4}|)\,, \tag{2.3.11}$$

$$|x_n| \leq (1 + |a|) + (1 + |a|)\,|b| + |b|^2\,|x_{n-4}|\,, ... \tag{2.3.12}$$

par conséquent, de (2.3.8) et (2.3.12) on a :

$$|x_n| \leq (1 + |a|) + (1 + |a|)\,|b| + |b|^2\,(1 + |a|) + |b|^3\,|x_{n-6}|\,, ... \tag{2.3.13}$$

depuis $|b| < 1$ alors l'utilisation de (2.3.13) et l'induction sur un certain entier k en utilisant la somme d'une formule de suite géométrique nous permet d'obtenir les inégalités suivantes pour chaque $n > 1$ et $k \geq 0$:

$$|x_n| \leq (1 + |a|)\left(\frac{1 - |b|^k}{1 - |b|}\right) + |b|^k\,|x_{n-2k}|\,. \tag{2.3.14}$$

où k est le plus grand entier j tel que $j \leq \frac{n}{2}$ ainsi, on a les deux cas suivantes :
a) Si n est impair i.e., $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m + 1$, alors le plus grand entier $k \leq \frac{n}{2}$ et $k = \frac{n-1}{2}$ pour lequel $(x_n)_n$ satisfait les inégalités suivantes :

$$|x_{2m+1}| \leq (1 + |a|)\left(\frac{1 - |b|^m}{1 - |b|}\right) + |b|^m\,|x_1| = z_m. \tag{2.3.15}$$

b) Si n est pair i.e., $\exists m \in \mathbb{N}$, tel que $n = 2m$ alors le plus grand entier $k \leq \frac{n}{2}$ et $k = \frac{n}{2}$, pour lequel x_n satisfait les inégalités suivantes :

$$|x_{2m}| \leq (1 + |a|) \left(\frac{1 - |b|^m}{1 - |b|} \right) + |b|^m |x_0| = u_m. \tag{2.3.16}$$

Ainsi, puisque $|b| < 1$, les suites $(z_m)_m$ et $(u_m)_m$ sont bornées, et on a :

$$\begin{cases} z_m \leq \frac{(1+|a|)}{1-|b|} + \left| |x_1| - \frac{(1+|a|)}{1-|b|} \right|, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \\ u_m \leq \frac{(1+|a|)}{1-|b|} + \left| |x_0| - \frac{(1+|a|)}{1-|b|} \right|, \text{ pour tout } m \in \mathbb{N} \end{cases}. \tag{2.3.17}$$

Ainsi, les formules (2.3.15), (2.3.16) et l'inégalités (2.3.17) donnent les limites suivantes pour la séquence $(x_n)_n$:

$$|x_n| \leq \max \left(\frac{(1 + |a|)}{1 - |b|} + \left| |x_0| - \frac{(1 + |a|\,\delta)}{1 - |b|} \right|, \frac{(1 + |a|)}{1 - |b|} + \left| |x_1| - \frac{(1 + |a|)}{1 - |b|} \right| \right). \tag{2.3.18}$$

Enfin, pour toutes les valeurs de a et toutes les valeurs de b satisfaisant $|b| < 1$ et toutes les conditions initiales $(x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, on conclue que toutes les orbites de l'application (2.3.2) sont bornées dans le sous-région :

$$\Omega_1 = \left\{ (a, b, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^4 / \quad |b| < 1 \right\}. \tag{2.3.19}$$

■

Existence d'orbites non bornées

L'application (2.3.2) possède des orbites non bornées dans les sous-régions de $\mathbb{R}^4$:

$$\Omega_2 = \left\{ (a, b, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^4 : \quad |b| > 1, \text{ et } |x_0|, |x_1| > \frac{|a| + 1}{|b| - 1} \right\}, \tag{2.3.20}$$

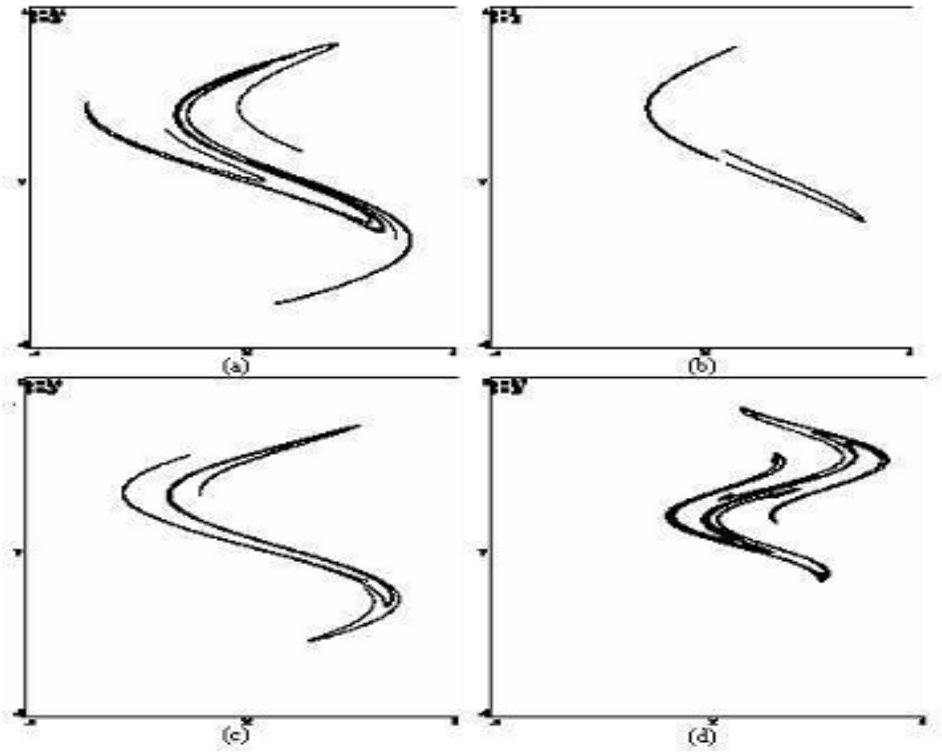
et

$$\Omega_3 = \left\{ (a, b, x_0, x_1) \in \mathbb{R}^4 : \quad |b| = 1, \text{ et } |a| < 1 \right\}. \tag{2.3.21}$$

2.3.3 Simulation numérique

Quelque observation des attracteurs multifold

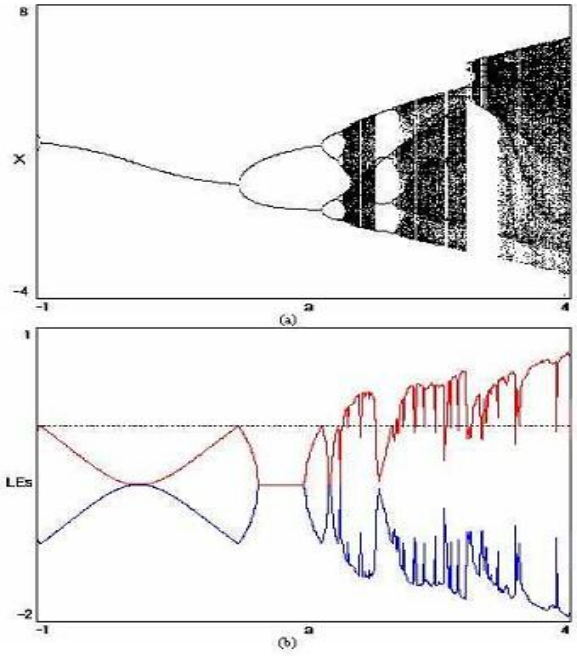
Nous allons présenter quelques remarques sur l'attracteur multifold, on remarque que les attracteurs chaotiques tournées autour d'un grand nombre de points fixes.
Evidemment que le nombre de point diminue avec l'augmentation de valeur a quand b constante il ya plusieurs méthodes possibles pour transmettre le système dynamique de comportement régulier à chaotique,pour les attracteurs chaotiques, dans cette partie on va illustrer quelques attracteurs chaotiques remarqués recèmment avec des phénomènes dynamiques.



$Fig.2.6$. Attracteur chaotiques multifold de l'application (2.3.2) obtenus pour (a) $a = 2.4; b = 0.5$: (b)$a = 2, b = 0.2$. (c)$a = 2.8, b = 0.3$. (d) $a = 2.7, b = 0.6$.

Route vers le chaos

Il est bien connu que l'application de Hénon subit généralement une voie de doublage de période vers le chaos car les paramètres sont variés, les attracteurs chaotiques multifonctionnels présentés sur la $Fig.2.7$ sont obtenus à partir de l'application (2.3.2) par l'intermédiaire d'une voie de bifurcation doublment périodique jusqu'au chaos, comme le montre la $Fig.2.7$.



$Fig.2.7.$ (a) Diagramme de bifurcation pour l'application (2.3.2) obtenue pour $b = 0.3$ $-1 \leq a \leq 4$ variation des exposants de Lyapunov de l'application (2.3.2) sur le même domaine de a

2.4 Sur le dynamique d'une nouvelle rationnelle discrète application en 2-D

Dans cette partie, nous avons un nouveau type de simple application de dimension-deux ou elle est caractérisée par un dénominateur et donner par :

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-ax}{1+y^2} \\ x + by \end{pmatrix}, \tag{2.4.1}$$

et qui est comparé avec l'application classique :

$$h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{0,1+x^2} - ay \\ \frac{1}{0,1+y^2} + bx \end{pmatrix}, \tag{2.4.2}$$

où a et b sont des paramètres de bifurcation.

2.4.1 Quelques propriétés de base

a) L'application f est définie pour toute les points de $\mathbb{R}^2$.

b) La fonction associé de l'application f est de classe $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^{2}\right)$ et ne possède pas de dénominateur nul.
c) L'application chaotique est symétrique sous la transformation des cordonnées.
d) L'application f produit un nouveau type d'attracteurs chaotiques obtenus à partir de la solution quasi-périodique route aux chaos.
e) Algébriquement, l'application f est simple mais il est comporte plus de complexité que l'application h.
f) Le déterminant de l'application f au point $(0,0)$ est donné par :$|J| = -ab$.
g) Cette application possède 3 points fixes qui sont définis par :

$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0), \quad \text{avec} \quad b \neq 1, \\ P_2 &= \left(+\sqrt{-(a+1)(1-b)^2}, \frac{+\sqrt{-(a+1)(1-b)^2}}{1-b} \right), \quad \text{avec} \quad b \neq 1 \text{ et } a \leq -1, \\ P_3 &= \left(-\sqrt{-(a+1)(1-b)^2}, \frac{-\sqrt{-(a+1)(1-b)^2}}{1-b} \right), \quad \text{avec} \quad b \neq 1 \text{ et } a \leq -1, \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

est obtenue à partir de solution de l'équation :

$$f(x^*, y^*) = \left(x^*_{,} y^*\right). \tag{2.4.4}$$

.

2.4.2 La stabilité

On peut facilement déterminer la stabilité de point $P_1 = (0,0)$ par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne :

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}. \tag{2.4.5}$$

L'équation caractéristique de la matrice jacobienne est :

$$\lambda^2 + (a-b)\lambda - ab. \tag{2.4.6}$$

Après quelques calculs, nous obtenons les résultats suivants :
a) Si $|a| < 1$ et $|b| < 1$, alors P est asymptotiquement.
b) Si $|a| > 1$ et $|b| > 1$, alors P est un point fixe instable.
c) Si $|a| < 1$ et $|b| > 1$, ou $|a| > 1$ et $|b| < 1$ alors P est un point de selle.
d) Si $|a| = 1$ ou $|b| = 1$, alors P est un point fixe non hyperbolique.

2.4.3 Simulation numérique

Observation d'un nouveau attracteurs chaotiques

Il ya plusieurs moyens possibles pour transmettre un système dynamique de comportement régulier à chaotique. Le diagramme de bifurcation indique cette solution et permet de définir les régions chaotiques dans l'espace$-ab$ qui peut déterminer via les attracteurs chaotiques.

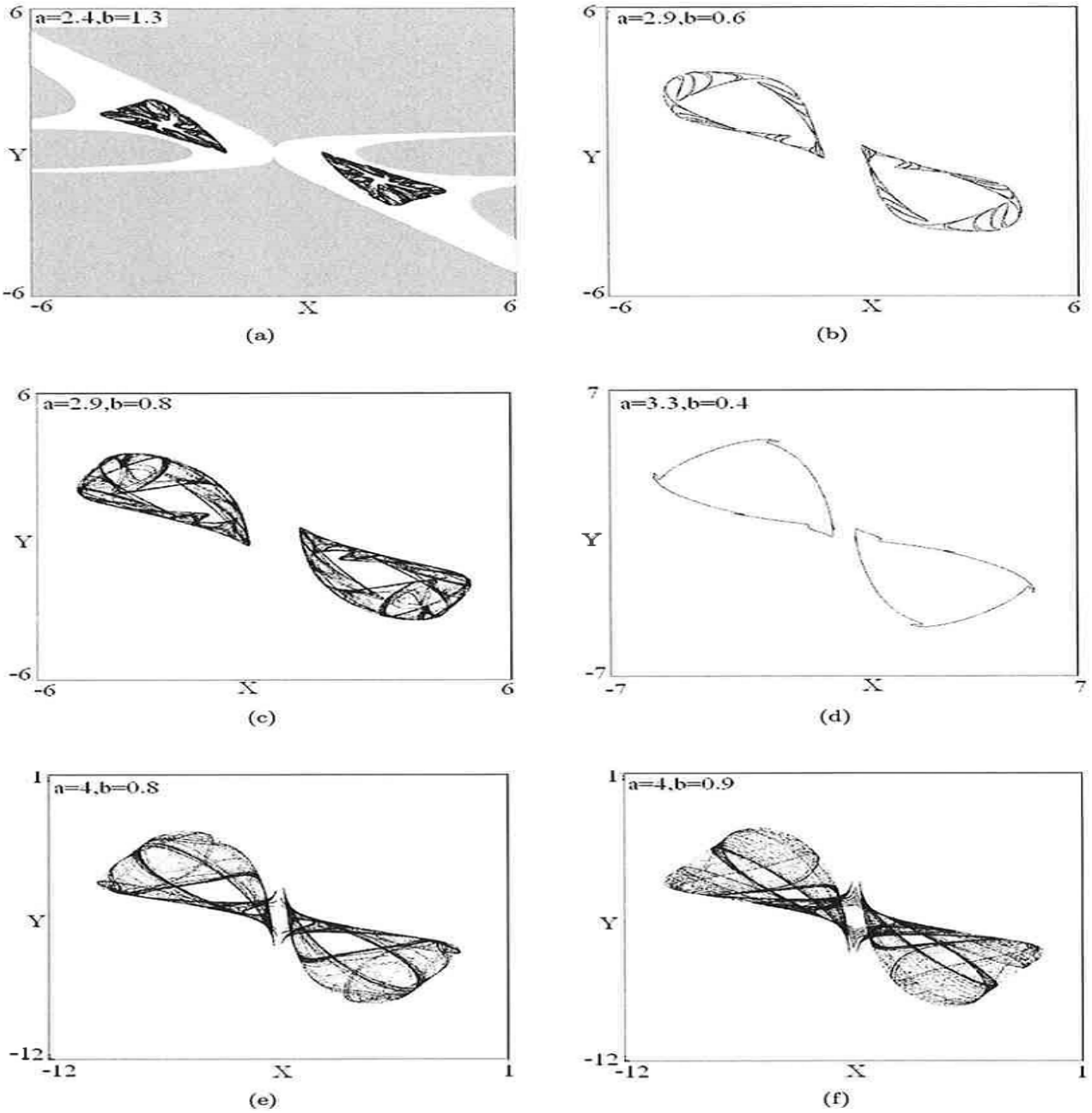


*Fig.*2.8. Attracteur de l'application (2.4.1) (a) $a = 2.4$,$b = 1.3$,(b) $a = 2.9$,$b = 0.6$,(c)

$a = 2.9, b = 0.8$ (d)$a = 3.3, b = 0.4$ (e) $a = 4, b = 0.8$,(f) $a = 4, b = 0.9$

Route vers le chaos

L'application f est la premiére application rationnelle qui na pas des points dénominateurs disparaissants qui donnent des attracteurs chaotiques de solution quasi-périodique à chaos.

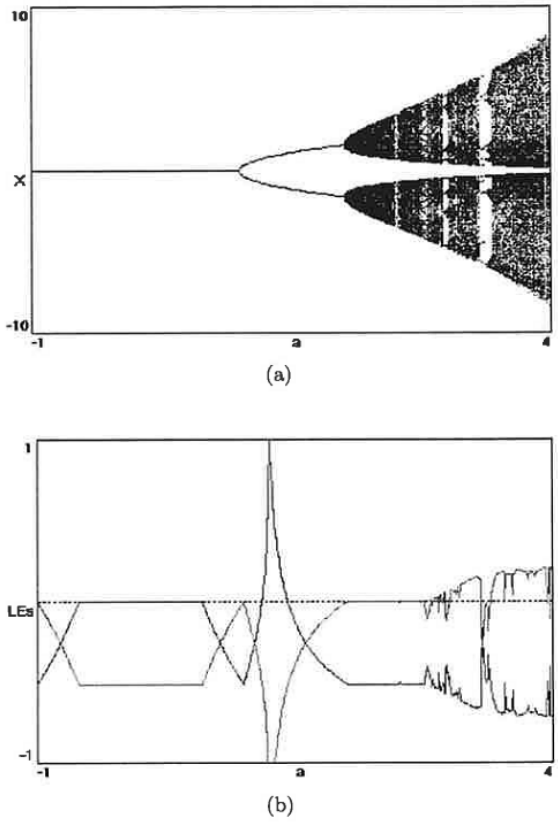


*Fig.*2.9. (a) La quasi périodique route vers le chaos pour l'application (2.4.1) obtenue pour $a = 0.6$ et $-1 < a \leq 4$. (b) Variation de l'exposant de Lyapunov de l'application (2.4.1) par rapport au paramètre $-1 < a \leq 4$ avec $b = 0.6$.

2.5 Une application chaotique linéaire par morceau unifié lisse qui contient les systèmes de Hénon et Lozi

Les scientifiques ont avaient étudié les applications de Hénon et Lozi. Mais il se demander s'il existe un système chaotique combine les deux applications et réalise la transition contenu de l'un à l'autre. Dans cette partie on va étudier l'application qui réalise cette propriété cette application

est donnée par :

$$U(x,y) = \begin{pmatrix} 1 - 1,4 f_\alpha(x) + y \\ 0,3x \end{pmatrix}. \tag{2.5.1}$$

où $0 \leq \alpha \leq 1$ est le paramètre de bifurcation, la fonction f_α est donnée par :

$$f_\alpha(x) = \alpha |x| + (1-\alpha)x^2. \tag{2.5.2}$$

2.5.1 Propriétés

Cette application :

a) A un chaos homoclinique robuste sur une partie de ses paramètres.

b) Pour $\alpha = 0$ nous pouvons obtenir l'application de Hénon.

c) Pour $\alpha = 1$ nous pouvons obtenir l'application de Lozi.

d) Pour $0 < \alpha < 1$ l'application est chaotique avec des différents type des attracteurs.

e) On peut déviser le plan comme suit :

$$\begin{cases} D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x < 0\}. \\ \\ D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x > 0\}. \end{cases} \tag{2.1}$$

On définissons :

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ x = 0\right\}, \tag{2.5.4}$$

A désigne une courbe lisse qui divise le plan de phase en deux régions D_1 et D_2.

f) L'application unifiée (2.5.1) puisse être réécrite comme suit :

$$U(x,y) = \begin{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} 1.4(\alpha-1)x^2 + 1.4\alpha x + y + 1 \text{ si } x \in D_1 \\ 1.4(\alpha-1)x^2 - 1.4\alpha x + y + 1 \text{ si } x \in D_2 \end{array} \right\} \\ 0,3x \end{pmatrix} \tag{2.5.5}$$

g) Le système (2.5.1) à des attracteurs chaotiques robustes pour $0.493122734 \leq \alpha \leq 1$ alors qu'il est absent pour $\alpha = 0$, et $\alpha = 1$.

h) L'application (2.5.1) a deux poinst fixes :

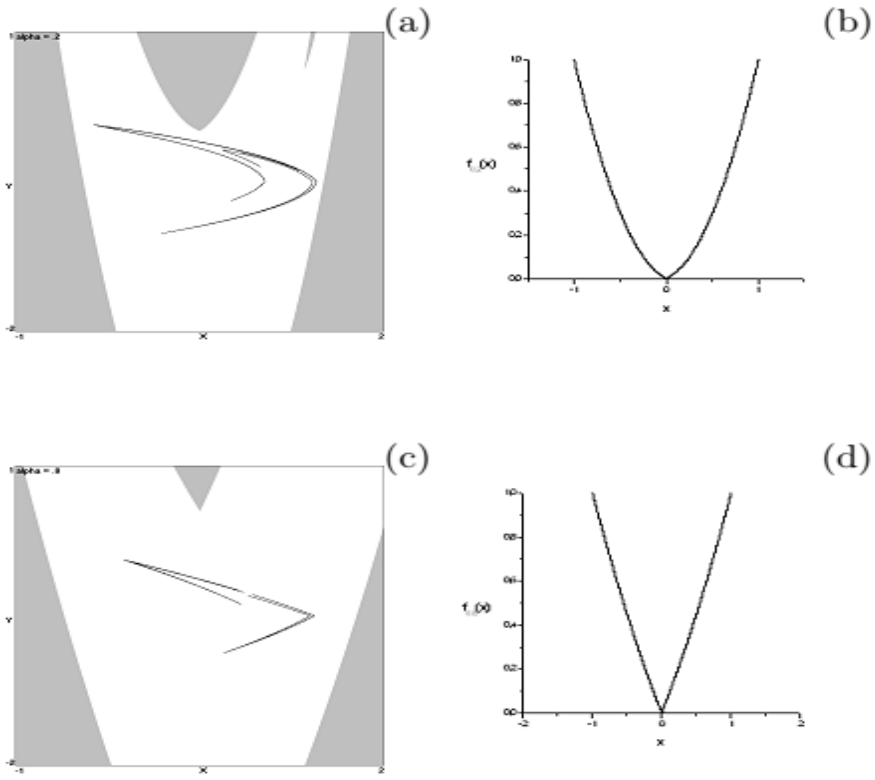
$$P_1 = (x_1, 0.3x_1) \in D_1, \text{ and } P_2 = (x_2, 0.3x_2) \in D2, \tag{2.5.6}$$

où :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-0,7\alpha+0,35+\frac{\sqrt{1,96\alpha^2-7,56\alpha+6,09}}{2}}{1,4(\alpha-1)} \\ \\ x_2 = \frac{0,7\alpha+0,35-\frac{\sqrt{1,96\alpha^2-3,64\alpha+6,09}}{2}}{1,4(\alpha-1)} \end{cases}. \tag{2.5.7}$$

2.5.2 Simulation numérique

Dans cette section, les comportements dynamiques du système chaotique unifié (2.5.1) seront étudiés numériquement. Pour $0 \leq \alpha \leq 1$, le système chaotique unifié à deux types d'orbites chaotiques : des attracteurs chaotiques de type Hénon sur la première partie de l'intervalle $[0, 1[$ et un attracteur chaotique de type Lozi sur la deuxième partie de l'intervalle $]0, 1]$ comme il indique sur la $Fig.2.10$(a) et (c). Il semble que ce phénomène soit lié à la forme de la fonction f_α, où pour les valeurs de α proche de zéro, la fonction f_α donnée par $f_\alpha = \alpha|x| + (1-\alpha)x^2$ se comporte comme le terme quadratique x^2, tandis que les valeurs de α proches de l'unité de la fonction f_α se comporte comme la fonction de valeur absolue $|x|$ comme le montre la $Fig.2.10(b)$ et (d). Cela explique l'apparition de deux types d'attracteurs chaotiques mentionnés ci-dessous.



$Fig.2.10.$ (a) l'attracteur chaotique de transition Hénon-like obtenu pour le chaotique unifié application (2.5.1) avec son bassin d'attraction (blanc) pour $\alpha = 0,2$. (b) le graphique de la fonction $f_{0.2}$ (c) La transition Lozi-like attracteur chaotique obtenu pour l'application chaotique unifiée (2.5.1) avec son bassin d'attraction (blanc) pour $\alpha = 0,8$. (d) Le graphique de la fonction $f_{0.8}$.

2.5.3 Une preuve rigoureuse de la robustesse du chaos homoclinique

Nous permet prouver rigoureusement l'apparition d'un chaos homoclinique robuste, où nous excluons les valeurs $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ puisque les application de Hénon et Lozi sont étudiées en détail dans plusieurs ouvrages et dans les références qui s'y trouvent. Nous montrerons que si $0 \leq \alpha < 1$, alors l'application chaotique unifiée (2.5.1) à deux point fixe donnée par :

$$P_1 = (x_1, 0.3x_1) \in D_1 \; et \; P_2 = (x_2, 0.3x_2) \in D_2, \tag{2.5.8}$$

où

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-0.7\alpha+0.37+\frac{\sqrt{-7.56\alpha+1.96\alpha^2+6.09}}{2}}{1.4(\alpha-1)} \\ x_2 = \frac{0.7\alpha+0.37+\frac{\sqrt{-3.64\alpha+1.96\alpha^2+6.09}}{2}}{1.4(\alpha-1)} \end{cases}. \tag{2.5.9}$$

La matrice jacobienne de l'application chaotique unifiée évaluée à un point (x, y) dans la région D_1 est donnée par :

$$J_1(x, y) = \begin{pmatrix} 1,4\alpha - 2,8x + 2,8x\alpha & 1 \\ 0,3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.10}$$

Et à un point (x, y) dans la région D_2, la matrice jacobienne est donnée par :

$$J_2(x, y) = \begin{pmatrix} 2,8x\alpha - 1,4\alpha - 2,8x & 1 \\ 0,3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.11}$$

Ainsi, à P_1 on a :

$$J_1(P_1) = \begin{pmatrix} 0,7 + \sqrt{1,96\alpha^2 - 7,56\alpha + 6,09} & 1 \\ 0,3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.12}$$

Les valeurs propres de $J_1(P_1)$ sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\sqrt{1,96\alpha^2-7,56\alpha+6,09}+\sqrt{1,96\alpha^2-7,56\alpha+1,4\sqrt{1,96\alpha^2-7,56\alpha+6,09}+7,78}}{2} + 0,35 \\ \lambda_2 = \frac{\sqrt{1,96\alpha^2-7,56\alpha+6,09}-\sqrt{1,96\alpha^2-7,56\alpha+1,4\sqrt{1,96\alpha^2-7,56\alpha+6,09}+7,78}}{2} + 0,35 \end{cases}, \tag{2.5.13}$$

et à P_2 on a :

$$J_2(P_2) = \begin{pmatrix} 0,7 - \sqrt{1,96\alpha^2 - 3,64\alpha + 6,09} & 1 \\ 0,3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.14}$$

Les valeurs propres de $J_2(P_2)$ sont :

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{-\sqrt{1,96\alpha^2-3,64\alpha+6,09}+\sqrt{1,96\alpha^2-3,64\alpha-1,4\sqrt{1,96\alpha^2-3,64\alpha+6,09}+7,78}}{2} + 0,35, \\ \omega_2 = \frac{-\sqrt{1,96\alpha^2-3,64\alpha+6,09}-\sqrt{1,96\alpha^2-3,64\alpha-1,4\sqrt{1,96\alpha^2-3,64\alpha+6,09}+7,78}}{2} + 0,35. \end{cases} \tag{2.5.15}$$

Dans le cas d'application (2.5.1), il est possible de choisir une transformation de coordonnées appropriées afin que le choix de l'axe soit indépendant du paramètre. Alors, la forme normale de l'application (2.5.1) est donnée par :

$$N(x,y)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\tau_1 & 1\\ -\delta_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\mu, \text{ si } x<0\\ \begin{pmatrix}\tau_2 & 1\\ -\delta_2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\mu, \text{ si } x>0\end{cases}, \tag{2.5.16}$$

où μ est un paramètre, et τ_i, δ_i, $i=1,2$ sont les traces et les déterminants des matrices correspondantes de l'application linéarisée dans les deux sous-régions D_1 et D_2 évaluées respectivement à P_1 et P_2 et elles sont données par :

$$\begin{cases}\tau_1=0,7+\sqrt{1,96\alpha^2-7,56\alpha+6,09},\\ \tau_2=0,7-\sqrt{1,96\alpha^2-3,64\alpha+6,09},\\ \delta_1=\delta_2=-0,3,\end{cases} \tag{2.2}$$

Il est démontré dans [22] qu'un chaos homoclinique robuste (c'est-à-dire l'existence d'une infinité d'intersections homocliniques entre les deux sous-régions D_1 et D_2) se produit dans l'application lisse par morceaux de la forme (2.5.16) lorsque :

$$\begin{cases}\tau_1>1+\delta_1, \text{ et } \tau_2<-(1+\delta_2)\\ \\ \delta_1<0, \text{ et } -1<\delta_2<0\end{cases}, \tag{2.5.18}$$

et la condition :

$$\frac{\lambda_1-1}{\tau_1-1-\delta_1}>\frac{\omega_2-1}{\tau_2-1-\delta_2}, \tag{2.5.19}$$

et

$$(\lambda_2-\tau_2)\lambda_1-\tau_1+\tau_2+\delta_1>0, \tag{2.5.20}$$

car $\delta_1=\delta_2$, où l'inégalité (2.5.20) détermine l'état de stabilité de l'attracteur chaotique. Cependant, si la première condition (2.5.19) n'est pas satisfaite, l'état d'existence de l'attracteur chaotique change à :

$$\frac{\omega_2-1}{\tau_2-1-\delta_1}<\frac{(\tau_1-\delta_1-\lambda_2)}{(\tau_1-1-\delta_1)(\lambda_2-\tau_2)}, \tag{2.5.21}$$

car $\delta_1=\delta_2$. Enfin, les formules (2.5.13), (2.5.15) et (2.5.17), et les inégalités (2.5.18.), (2.5.19) et (2.5.20), ou les inégalités (2.5.18.), (2.5.20) et (2.5.21) si elles ont satisfaites, déterminent rigoureusement la région pour le paramètre α où l'application unifiée (2.5.1) a un chaos homoclinique robuste.

Chapitre 3

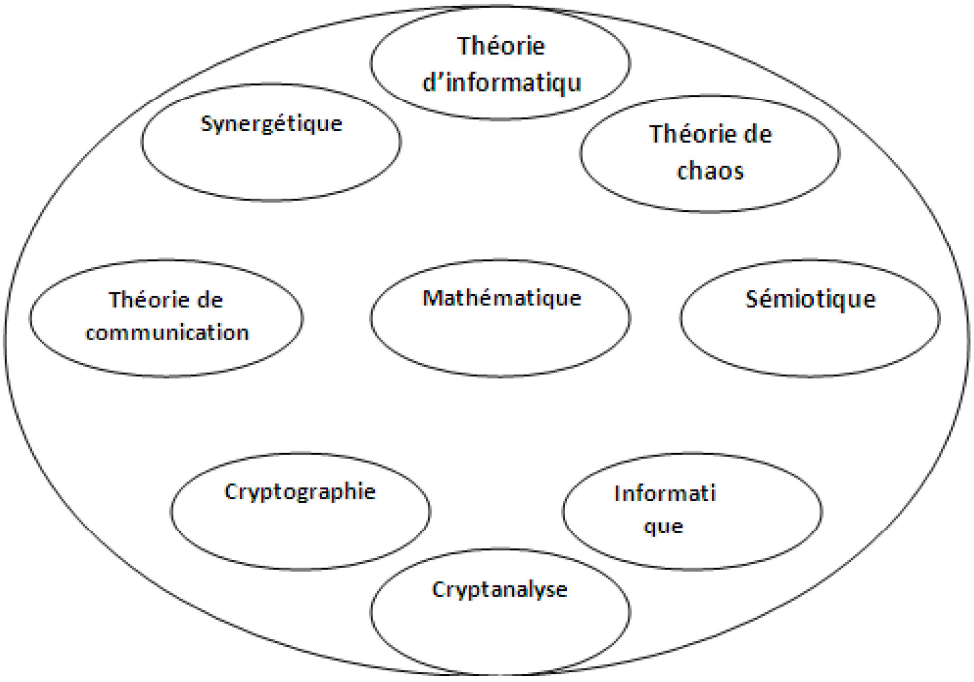
Application de chaos dans la cryptographie

On peut dire que la cryptologie est un art ancien et une science nouvelle : un art ancien car Jules César l'utilisait déjà ; une science nouvelle parce que ce n'est que depuis les années 1970 qu'elle devient un théme de recherche scientifique académique. Ces jours-ci, la cryptographie a une importance dans le développement de la technologie de l'information et la communication via les réseaux informatiques. Le Chaos est un modèle idéal, ce qui semble être prometteur. Chaos est l'un des systèmes possibles, qui ont des caractéristiques ou des comportements associés au développement d'un système dynamique non linéaire et se produisent pour des paramètres de valeurs spécifiques du système la théorie du chaos a pris beaucoup de considération de la communauté cryptographique au cours des deux dernières décennies.
La cryptographie du chaos pourrait ne pas avoir un parallélisme particulièrement précis avec les idées et les concepts des méthodes traditionnelles de cryptographie et de cryptanalyse car elle est encore dans son stade d'enfance. Les algorithmes cryptographiques et les applications chaotiques ont des propriétés similaires.

3.1 Les bases de la cryptographie

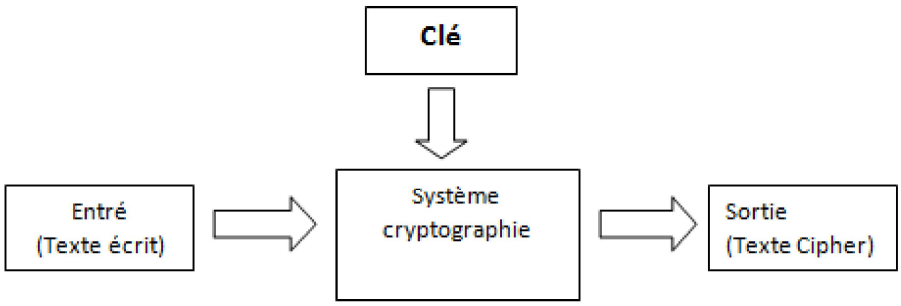
3.1.1 Lexique :

Cryptologie : C'est l'étude mathématique de la cryptographie et de la cryptanalyse. Il sert à protéger les informations privées contre les vols. Il existe plusieurs domaines contributifs de la cryptologie.



$Fig.3.1.$ Domaines contributifs de la cryptologie

Cryptographie : Est l'etude des algorithmes permettant la protection d'informations (numériques). Ces algorithmes sont appelés cryptosystèmes $Fig.3.2$.



$Fig.3.2.$ Cryptosystème

Algorithme : Ensemble de règles mathématiques utilisées dans le cryptage (chiffrement) et le décryptage (déchiffrement), il existe deux grandes familles d'algorithme cryptographiques à bases de clefs.

Cryptosysteme : L'algorithme (ou le dispositif physique) permettant de chiffrer des données.

Cryptogramme : Message chiffré ou codé.

Chiffre : Ensemble de procédés et ensemble de symboles (lettres, nombres, signes, etc.) employés pour remplacer les lettres du message à chiffrer. On distingue généralement les chiffres à transposition et ceux à substitution.

Chiffrer=Crypter : Transformer un message afin qu'il ne soit lisible qu'à l'aide d'une clef.
Décrypter : Parvenir à restaurer des données qui avaient été chiffrées, donc à leur faire retrouver leur état premier (en clair), sans disposer des clefs théoriquement nécessaires.
Clef : Dans un système de chiffrement, elle correspond à un nombre, un mot, une phrase, etc. qui permet, grâce à l'algorithme de chiffrement, de chiffrer ou de déchiffrer un message.
Double clef (chiffre à) : Autre terme pour chiffre polyalphabétique.
La signature digitale : C'est un code électronique unique qui permet de signer un message codé. Cette signature permet d'identifier l'origine du message : elle a le même fonction qu'une signature (à la main). C'est la clé privée qui permet de signer, et la clé publique qui permet de vérifier cette signature.
La cryptographie symètriques : Un chiffrement est dit symètrique (ou a clé privée) si pour chiffrer et déchiffrer, le même clé secrète est utilisée.
La cryptographie asymètriques : Dans cet algorithme, nous utilisons paire de clés (publique, secrète) la clé publique est utilisée pour le cryptage, et la clé secrète est utilisée pour le décryptage. Ou ; la clé secrète est utilisée pour le cryptage, et la clé publique est utilisée pour le décryptage donc en fait vérifier la signature.

3.1.2 Objectifs de cryptographie

Le cryptosystème assure et garantit : la confidentialité, l'authenticité, l'intégrité et la nonrépudiation.
a) La confidentialité signe qu'une personne non autorisée n'a pas accès aux informations.
b) L'authenticité fait référence pour la validation de la source du message pour assurer quel expéditeur est correctement identité.
c) L'intégrité fournit l'assurance que le message n'a pas été modifié pendant la transmission, accidentellement ou intentionnellement.
d) La non-répudiation signée qu'un expéditeur ne peut pas nier d'avoir envoyé le message et le récepteur ne peut pas nier sa réception.
Si une personne envoie un message, puis plus tard, il prétend qu'il n'a pas envoyé le message, il s'agit d'un acte de répudiation. Quand un mécanisme de cryptage prévoit la non-répudiation, cela signifie que l'expéditeur ne peut pas nier d'avoir envoyé le message et le récepteur ne peut pas nier sa réception.

3.1.3 La méthode de cryptage RC4

Définition : (Rivest Cipher 4) Est un algorithme de chiffrement en continu conçu en 1987 par Ronald Rivest.
Principe général : RC4 fonctionne de la façon suivante : la clef RC4 permet d'initialiser un tableau de 256 octets en répétant la clef autant de fois que nécessaire pour remplir le tableau. Par la suite, des opérations très simples sont effectuées : les octets sont déplacés dans le tableau, des additions sont effectuées, etc. Le but est de mélanger autant que possible le tableau. Finalement on obtient une suite de bits pseudo-aléatoires qui peuvent être utilisés pour chiffrer les données via un XOR.
Description détaillée : RC4 est un générateur de bits pseudo-aléatoires dont le résultat est combiné avec le texte en clair via une opération XOR, le déchiffrement se fait de la même manière.
Pour générer le flot de bits, l'algorithme dispose d'un état interne, tenu secret, qui comprend deux parties :
a) Une permutation {\displaystyle S} de tous les 256 octets possibles.
b) Deux pointeurs {\displaystyle i} et {\displaystyle j} de 8 bits qui servent d'index dans un tableau.
La permutation est initialisée grâce à la clé de taille variable, typiquement entre 40 et 256 bits, grâce au key schedule de RC4.

3.2 Chaos et Cryptographie

3.2.1 Chaos et Cryptographie

Le chaos et la cryptographie partagent des caractéristiques similaires illustrées à la $Fig.3.3$:
a) L'application chaotique et le système de cryptage sont déterministes (pas probable).
b) Les deux sont imprévisibles et pas simples. Il est un observateur externe qui n'a aucune connaissance de l'algorithme et la condition initiale comme clé, ne peut pas comprendre le comportement aléatoire du système.
c) Un système chaotique est sensible à la condition initiale signifie que les petits changements de n'importe quel élément peuvent être complètement modifiés en sortie. La cryptographie dépend de la confusion et de la diffusion basée sur la clé, signifie que la modification d'un bit de texte brut ou de clé peut changer tous les bits du texte chiffré avec une probabilité de 50%.
d) Le système chaotique itératif est topologique transitif et la cryptographie est une transformation mulsion de signifie une application chaotique unique avec une transformation itérative.

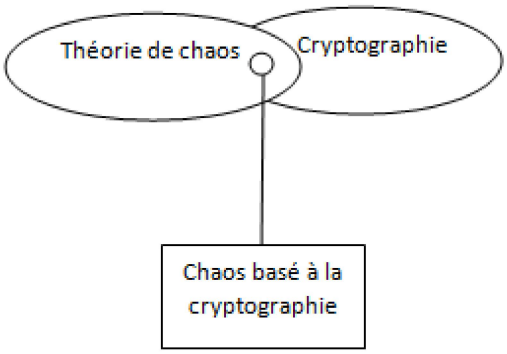


*Fig.*3.3. Relation entre chaos et cryptographie

3.2.2 Cryptage traditionnel et chaos basé sur le cryptage

Chaos est également différent de la cryptographie dans d'autres fonctionnalités.
a) Les systèmes chaotiques sont basés sur des espaces numériques réels/ complexes (espace continu délimité) alors que la cryptographie définit des séquences binaires (espace discret fini).
b) La théorie du chaos fournit l'idée de comprendre le comportement asymptotique des processus itératifs alors que la cryptographie définit les caractéristiques des premières itérations.

3.3 Cryptage d'image Chaos basé sur les transformations DCT et l'application de Hénon

3.3.1 Transformation en cosinus discrète

La transformée de cosinus discrète (DCT) est utilisée dans le codage d'image et de vidéo depuis le début des années 1970.
Le bloc 8x8 pixels en DCT bidimensionnel est utilisé dans le DCT pour 64 pixels et obtient 64 coefficients DCT. Le cofficient dans le coin supérieur gauche est appelé composant DC de la matrice de coefficients DCT et les autres coefficients DCT sont appelés composants AC.
La transformation DCT peut être obtenue en utilisant un bloc de 8×8 pixels à la somme des signaux cosinus pondérés. Ces poids sont représentés par le coefficient DCT matriciel[24].
Les coefficients, qui représentent les faibles fréquences de domaine spatial, sont proches du coin supérieur gauche et les coefficients, qui représentent les fréquences de domaine spatial élevées, sont proches du coin inférieur droit. Les basses fréquences sont des changements progressifs et une représentation lente, et les hautes fréquences sont des changements brusques et une re-

présentation rapide dans le domaine des pixels. Il existe une redondance de domaine spatial et la basse fréquence domine la fréquence élevée. L'énergie ou l'information peut être concentrée dans le DCT avancé contenu dans la matrice de coefficient de bloc 8×8 en haut à gauche. Les coefficients dans la matrice proche du coefficient DC diffèrent beaucoup de zéro et les autres coefficients élevés sont très proches de zéro.
DCT est une transformation sans perte. En raison de la quantification des coefficients DCT, l'information est perdue dans les techniques de compression de données basées sur la transformation.
Les équations mathématiques pour un DCT bidimensionnel sont :

$$y(k,l) = \frac{c(k)c(l)}{4} \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} x(i,j) \cos\left\{\frac{(2i+1)k\pi}{16}\right\} \cos\left\{\frac{(2j+1)l\pi}{16}\right\} \text{ ou } l,k = 0,...,7\ , \qquad (3.4.1)$$

et

$$C(k,l) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & k,l = 0 \\ 1 & k,l \neq 0 \end{cases} . \qquad (3.4.2)$$

Il existe un DCT inverse (IDCT) :

$$x(k,l) = \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} y(i,j) \frac{c(k)c(l)}{4} \cos\left\{\frac{(2i+1)k\pi}{16}\right\} \cos\left\{\frac{(2j+1)l\pi}{16}\right\} \text{ ou } l,k = 0,...,7. \qquad (3.4.3)$$

La matrice d'entrée 8×8 d'une image se compose de valeurs de pixels de l'image de l'échelle de gris et de ces valeurs réparties de manière aléatoire de la plage de 123 à 140. La matrice de sortie est créée ci-dessous lorsque les valeurs d'entrée sont transmises à l'algorithme discret de transformation de cosinus.

137	137	137	134	129	131	131	132
137	137	137	141	133	132	132	133
138	138	138	134	134	131	131	129
138	138	138	132	130	127	133	134
140	140	140	134	139	133	136	128
135	135	135	129	133	131	133	123
130	130	130	129	136	134	129	129
135	135	135	131	129	132	129	129

*Fig.*3.4. La matrice d'entré

La matrice de sortie se compose de coefficients DCT, qui est agencé de manière à ce que les coefficients contenant des données utiles et importantes pour la représentation de l'image soient dans le coin supérieur gauche de la matrice et dans les coefficients de droite inférieure contenant des informations moins utiles. Le coefficient DC est à la position (0,0) dans le coin supérieur gauche de la matrice et représente la moyenne des 63 autres valeurs de la matrice.

1064	17	0	-2	-4	-1	0	2
8	3	2	-7	2	2	-1	-4
-6	-4	-1	-1	1	-1	3	-7
-2	-5	14	-15	-8	-3	-3	8
-3	10	8	1	-11	18	18	15
4	-2	-18	8	8	-4	1	-7
9	1	-3	4	-1	-7	-1	-2
0	-8	-2	2	1	4	-6	0

$Fig.3.5$.La matrice de sortie

3.3.2 Modèle de cryptage proposé

Un nouvel algorithme de cryptage d'image proposé a été mis en avant en utilisant et en mélangeant la DCT discrète Cosinus transformée avec une théorie chaotique, mais le chercheur est capable d'étudier l'algorithme de cryptage basé sur l'analyse de sécurité par point de vue à l'analyse de sensibilité de la clé, l'espace clé et l'analyse statistique. Dans DCT, la transmission de l'information est très faible et l'espace clé est assez formidable pour faire face à l'attaque agressive avec un résultat de cryptage acceptable.
Maintenant, la procédure proposée clarifie la méthode de cryptage et de décryptage dans cet ordre (voir les $Figs.3.6$ et 3.7). Le processus de cryptage est lancé avec la transformation de l'image en utilisant la transformée de Cosinus discrète avant. À ce moment-là, les valeurs des coefficients DCT sont choisies pour chiffrer en utilisant RC4 avec les moyens non communiqués d'entrée.

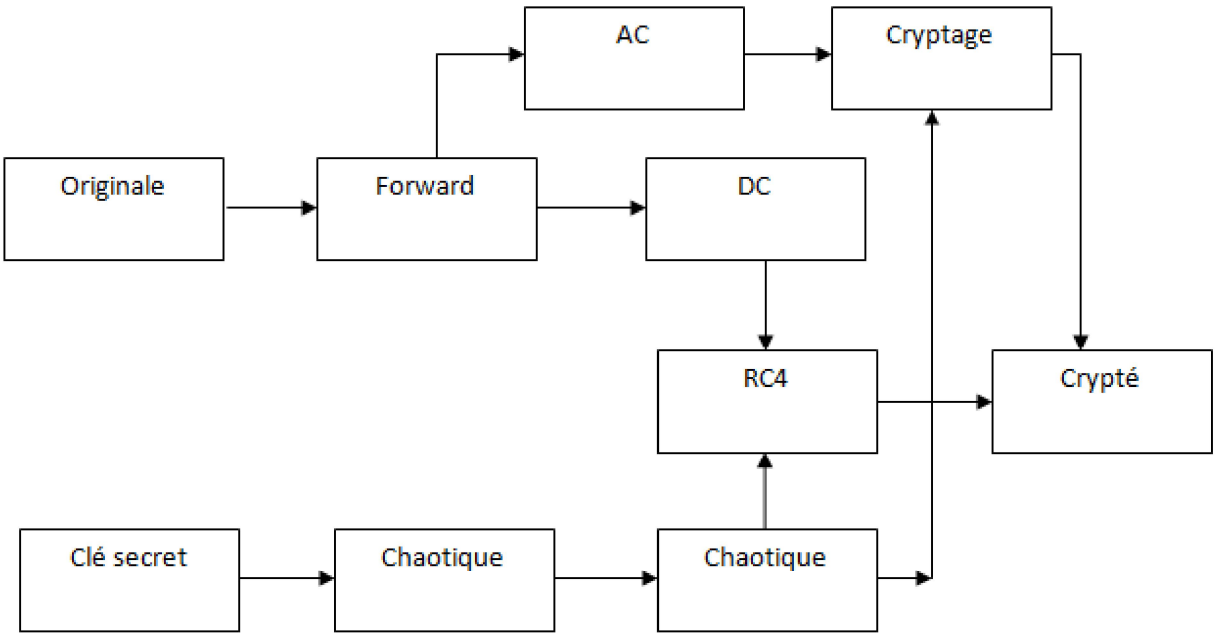


*Fig.*3.6. Le modèle de cryptage d'image proposé

Ensuite, la séquence chaotique est générée à l'aide de la méthode de l'application de Hénon pour chiffrer l'image. Enfin, la sortie de ces deux opérations de cryptage se fusionne en échangeant ses valeurs pour obtenir une image de cryptage. L'inverse de chaque opération se fait dans le modèle de décryptage comme indiqué ci-dessous pour décrypter chaque bloc et transformée inverse pour obtenir l'image reconstruite.

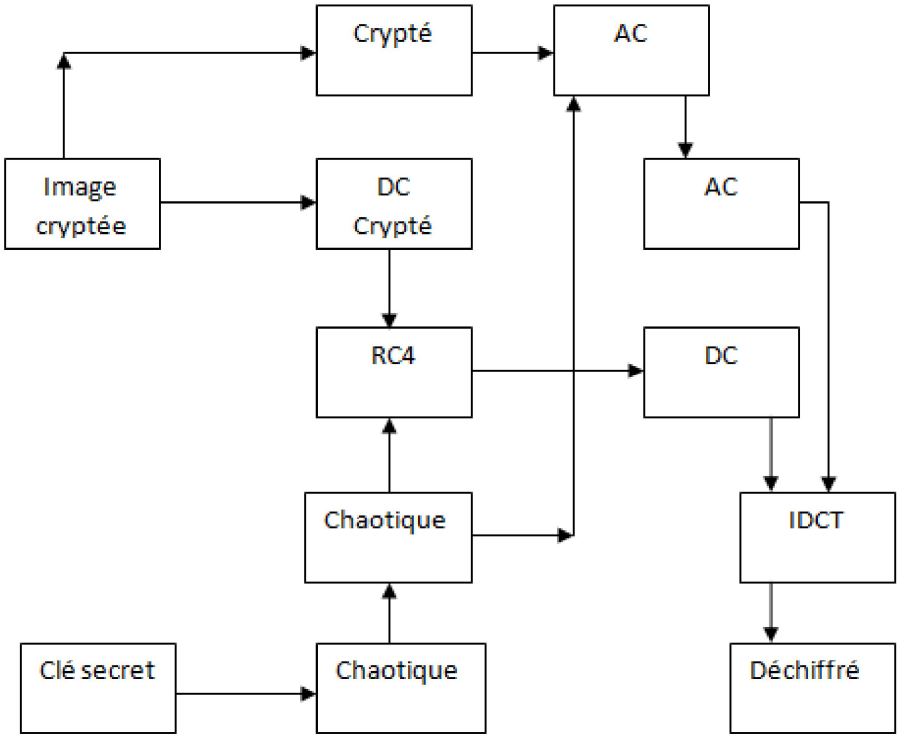


*Fig.*3.7. Le modèle de décryptage d'image proposé

Les algorithmes suivants montrent les principales opérations de cryptage basiques :

Algorithme 1 : codage d'image

Input : image originale I, paramètres et clés chaotiques secrètes.

(a, b, X_0, Y_0), où a et b sont des constantes.

Output : image encodée I.

- Calcul de Forward DCT pour Image I.

(DC, AC) = DCT (I)

DC = partie de fréquence la plus basse, AC = pièces à haute fréquence.

- Générer une séquence chaotique selon l'application de Hénon :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases} . \tag{3.4.4}$$

- Convertissez la séquence X_i, Y_i en valeur entière.

- Chiffrer les coefficients faiblement DCT en utilisant RC4 par X_i :

CDC = RC4_Cryptage (DC, X)

- Chiffrer les coefficients élevés DCT à l'aide de la séquence chaotique :

CAC = Cryptage Chaotique (AC, Y)
- Étaler chaque pixel dans DC dans chaque bloc de l'AC en fonction de l'échange chaotique suivant :
C = Chaotic Swap (DC, AC)
- Sortie C.
La transformée DCT est utilisée pour transformer l'image d'entrée en domaine fréquentiel.
Le processus est le suivant :
- L'image est divisée en blocs de 8x8 pixels.
- Le DCT est atteint pour chaque bloc et le travail démarre de gauche à droite et de haut en bas.
- La quantification est effectuée pour chaque bloc.
- Le bloc compressé dans le tableau est stocké dans un espace réduit.
La valeur supérieure gauche est désignée par le coefficient DC comme un bloc de fréquence le plus bas et les autres coefficients DCT sont appelés composants CA.
Le bloc est chiffré par la technique chaotique selon application de Hénon. La séquence chaotique est générée selon l'équation suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases} . \tag{3.4.5}$$

Où, initial X_0,Y_0 et a, b entrent également comme valeurs secrètes, ces valeurs sont converties en valeurs entières pour générer la séquence chaotique secrète X.
Les coefficients DC sont cryptés en utilisant RC4. La clé secrète de RC4 est générée directement à partir d'une séquence chaotique. La valeur de chiffrement est calculée comme CDC=RC4_Cryptage (DC, X).
Le bloc de coefficient AC de l'image transformée est crypté, par la séquence chaotique.
Le bloc de coefficient AC de l'image transformée AC est chiffré, où CAC = Cryptage Chaotique (AC,Y). L'opération de cryptage est :
$\text{CAC}_i = \text{AC}_i \oplus \text{Y}_i$
L'opération finale d'encodage est la fusion de CDC et de CAC par répartition de chaque pixel dans CDC dans chaque bloc du CAC selon l'échange chaotique suivant :
C = Chaotic Swap (CDC, CAC)
Les paramètres de changement chaotique sont :
Ir = $\lfloor X_0 \times 8 \rfloor$
Ic=$\lfloor Y_0 \times 8 \rfloor$
Où Ir et Ic représentent l'indice de déplacement de localisation de la rangée r et de la colonne c pour chaque pixel CDC (i, j).

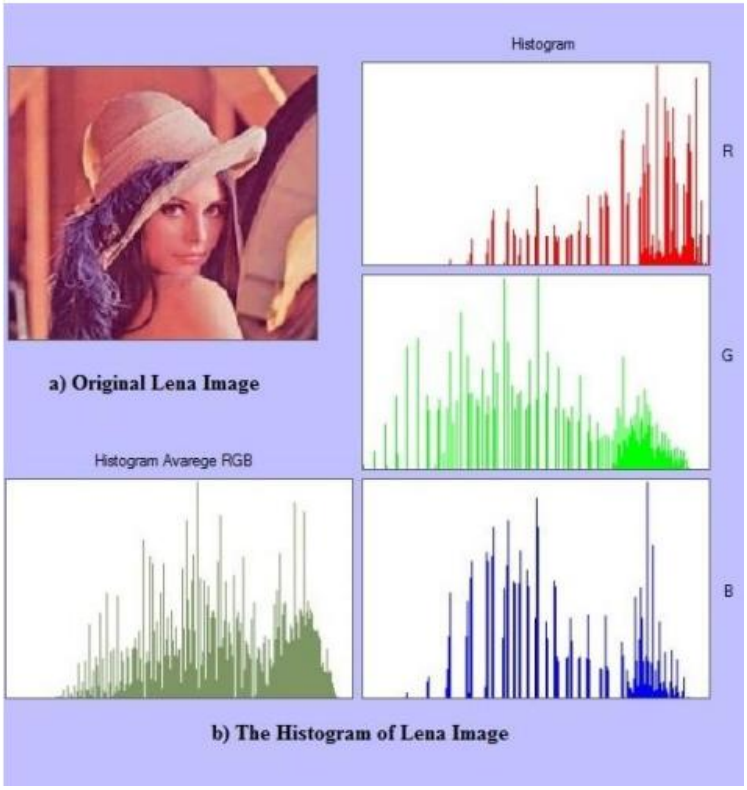
Le CAC est séparé en blocs de 8×8 pixels ; le premier pixel de CDC est échangé avec un pixel du premier bloc de 8×8 de CAC des index Ir et Ic. Supposent que CAC représent le premier bloc de AC, alors le premier pixel CDC $(0, 0)$ est échangé comme suit :
Swap (CDC (0, 0), CAC1 (Ir, Ic))
Swap (CDC (0, 1), CAC2 (Ir, Ic))
Et répétez pour d'autres pixels CDC. L'image cryptée est envoyée au récepteur. L'opération inverse du cryptage doit être traitée sur le côté récepteur.
L'algorithme suivant montre les opérations de décryptage :
Algorithme 2 : Décryptage d'image
Input : Image de cryptage C et clés chaotiques secrètes
(A, b, X_0, Y_0), où a et b sont des constantes.
Output : l'image reconstruite (RI)
-Séparez le pixel de C en pixel le plus bas en CDC et CAC selon l'échange inversé chaotique :
(CDC, CAC) = Chaotic Swap (C).
- Générer une séquence chaotique selon l'application de Hénon :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases} . \tag{3.4.6}$$

Convertissez la séquence X_i et Y_i en valeur entière.
- Décrypter les CDC et le CAC à l'aide du décryptage chaotique :
AC =décryptage chaotique (CAC, Y)
- Décrypter les CDC en utilisant RC4 par Secret Key X :
DC = RC4_Décryptage (CDC, X)
- Calculer l'inverse du DCT
- RI de sortie.
L'image chiffrée reçue est isolée dans les parties de fréquence la plus basse CDC et CAC à l'inverse de l'échange chaotique.
(CDC, CAC) = Chaotic Swap (C).
Avec le paramètre de changement :
Ir = $\lfloor X_0 \times 8 \rfloor$
Ic = $\lfloor Y_0 \times 8 \rfloor$
Le CAC sera décrypté en utilisant le décryptage du chaos. Les CDC sont déchiffrés en utilisant la séquence de cryptage RC4 où est généré de manière cryptée à partir des valeurs d'entrée secrètes CDC et de la clé X. L'inverse de la reconstruction de l'image originale peut être implémenté lorsque le résultat du décryptage est traité avec une transformation inverse IDCT.

3.3.3 Résultat de la simulation

Le système proposé est implémenté en utilisant C # .Net avec un ordinateur avec Intel CoreTM2 double processeurs 2GH, 4 Go de RAM et 2 Go de carte vidéo basée sur le système d'exploitation Windows 8.1. Ce système est mis en œuvre et testé à plusieurs reprises pour cinq images ; Lena, les enfants, les ours, les heures et la ville (voir la $Fig.3.8$, l'image Lena et son histogramme).



$Fig.3.8.$ L'histogramme d'image original

La $Fig.3.9$ montre l'image de cryptage et son histogramme. L'image de cryptage apparaît comme une image brouillée. En outre, l'histogramme n'indique aucune information pour l'image originale, les caractéristiques de caractère aléatoire couvrent les informations d'image. En outre, l'histogramme de l'image originale a un caractère aléatoire, mais après le cryptage, ces aspects aléatoires sont couverts.

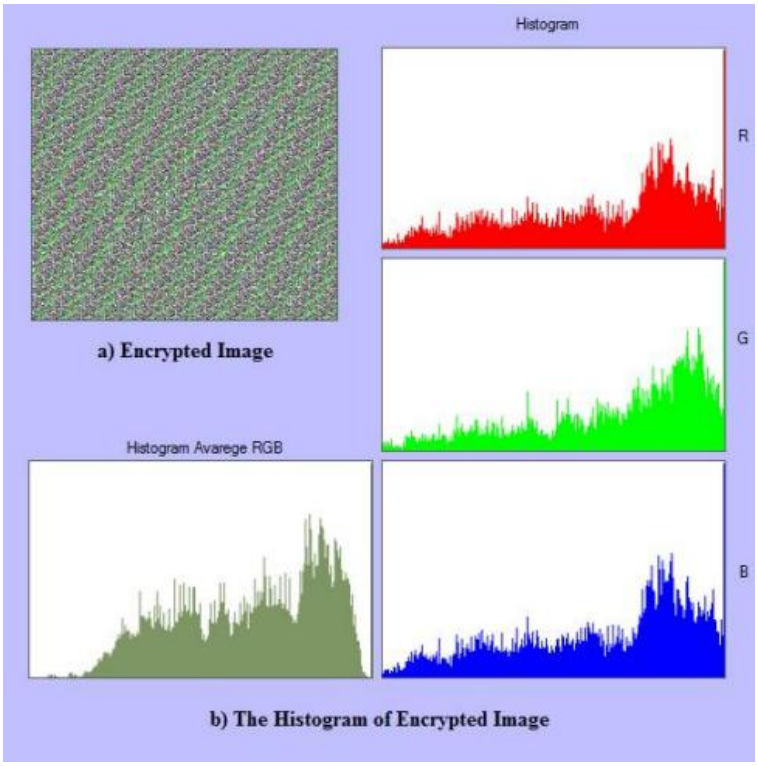


*Fig.*3.9. L'histogramme d'image codé

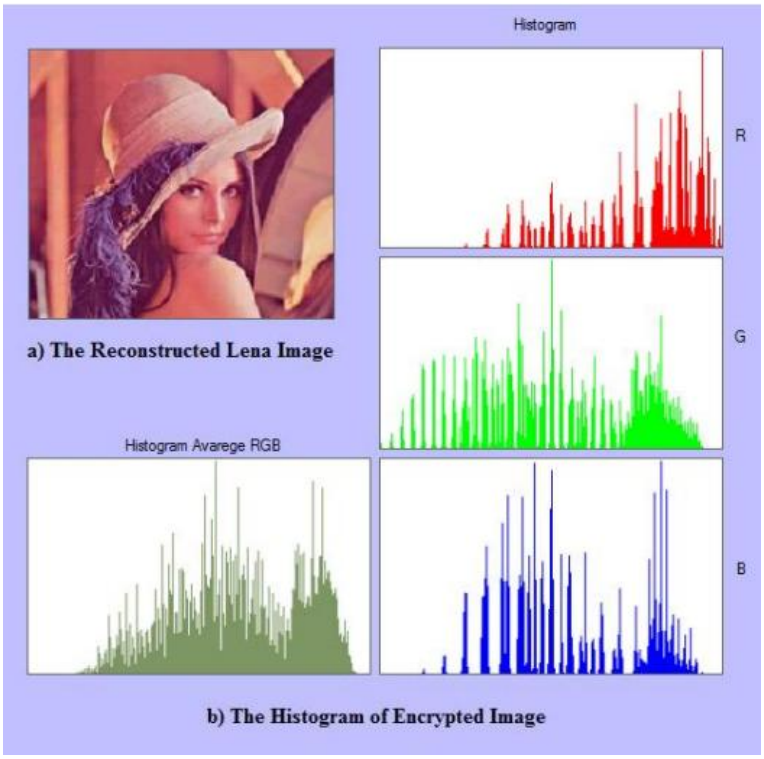


*Fig.*3.10. L'histogramme d'image reconstruit

Sur la $Fig.3.10$, l'image reconstruite est calculée par décryptage. Inverser chaque étape de traitement dans le cryptage d'image permettra de décrypter.

Conclusion

Ce projet de fin d'étude de master qui a été consacré à l'étude d'une ..... Le travail de notre mémoire consiste dans un premier temps d'étudié de certains systèmes chaotique moderne de Zeraoulia-Sprott et à leur comparer par les systèmes classiques et les attracteurs chaotique et route vers le chaos nous avons remarqué que les distinguer des systèmes classiques dans l'abondance et la diversité des attracteurs chaotique comme nous avons parlé un exemple qui montre comment utiliser le chaos dans le chiffrement.
C'est un domaine très vaste qui demande beaucoup de temps et de patience et nous espérons pouvoir continuer à l'avenir à travailler sur se domaine.

Bibliographie

[1] A. M. Awad, R. F. Hassan et A. M. Sagheer, *Chaos Image Encryption based on DCT Transforms and Henon Map*, International Journal of Computer Applications, 127(11), October 2015.

[2] A. Ali-pache, N. Hadj-said, A. M'Hamed et A. Belghoraf, *Chaos Crypto-Système basé sur l'Attracteur de Hénon-Lozi*, Université des Sciences et de la Technologie d'Oran.

[3] A. Khare, M. A. Rizvi, S. Stalin, P. K. Shukla, and S. Kumar, *Applied Cryptography Using Chaos Function for Fast Digital Logic-Based Systems in Ubiquitous Computing*, Entropy, 17(3), 1387-1410, 2015.

[4] A. R. Kihal, *Systemes chaotiques pour la transmission securisee de donnees*, Université Mohamed Khider, Biskra, 2013.

[5] A. Désilles, *Introduction à la théorie des systèmes dynamiques à temps discret*, 2003.

[6] E. Zeraoulia, *Etude de quelques types de systèmes chaotiques : généralisation d'un modèle ISSU du modèle de Chen*, Université de Mentouri de Constantine, 2006.

[7] E. Zeraoulia, *Cour de systèmes dynamiques*, Université de Tebessa, 2016.

[8] E. Zeraoulia and J. C. Sprott, *A minimal 2-D quadratic map with quasi-periodic route to chaos*, International Journal of Bifurcation and Chaos„ 18, 1567 (2008)

[9] E. Zeraoulia and J. C. Sprott, *A new simple 2-D piese wise lineare map*, Journal of Systems Science and Complexity, 23 (2) : 379-389, 2010.

[10] E. Zeraoulia and J. C. Sprott, *A two-dimensional discrete mapping with C^∞ multifold chaotic attractors*, Electronic journal of theorical physics, Volume 5 (17), 111-124, 2008.

[11] E. Zeraoulia and J. C. Sprott, *On the dynamics of a new simple 2-D rational discrate mapping*, International Journal of Bifurcations & Chaos, Vol. 21, No.1 (2011) 155—160.

[12] E. Zeraoulia and J. C. Sprott, *Classification of three dimensional quadratic diffeomorphisms with constant Jacobian*, Front. Phys. China, 4 (1) 111-121 (2009).

[13] E. Zeraoulia and J. C. Sprott, *A unified piecewise smooth chaotic mapping that contains the Hénon and the Lozi systems*, Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems, 1, 50-60, 2012.

[14] E. Zeraoulia and J. C. Sprott, *Robustification of chaos in 2D maps*, Advances in Complex Systems, 14(6) (2011) 817-827.

[15] G. Assael, L.Blaizot et G.J . Huizing, *La théorie du chaos*, Lycée du Sacré-Coeur et lycée Saint-Eloi, 2013 – 2014.

[16] G. Renault, *Les bases de la cryptologie*, Cours, 2010.

[17] I. TALBI, *Systèmes dynamiques non linéaire et phénomènes da chaos*, Université Mentouri de Constantine, 2010.

[18] L. Frédéric, *Cours commande robuste multi-variables application au chaos*, 2011.

[19] M. Halimi, *Spécialité Automatique, Traitement du Signal et des Images, Génie Informatique*, Université de Lorraine, 2013.

[20] S.Banerjee, C.Grebogi, Border collision bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps , Phys. Rev. E, 1999, 59 : 4052-4061.

[21] S, Banergee, J. A, York, and C. Grebogi, "Robust chaos," Phys. Rev. Lettres, 80(14), 3049-3052, 1998.

[22] T. Hamaizia, *Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique*, Université de Constantine -1-, 2013.

[23] http ://incompetech.com/

[24] http ://perso.ens-lyon.fr.

[25] https ://en.wikipedia.org.

[26] https ://www.wolframscience.com.