



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique



Université de Tébessa

Facultés des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département: Science de la matière

MEMOIRE DE MASTER

Domaine: Science de la matière

Filière: physique

Option: physique de la matière condensée

Thème

**Etude comparative de quelques types de
synchronisation des systèmes chaotiques**

Présenté par:

Sahraoui cherifa & Hafsa leila

Devant le jury:

Chaouche yacine	M.C.B	Université de Tébessa	Président
Ziar Toufik	M.C.B	Université de Tébessa	Rapporteur
Mansour Med Elhaddi	M.A.A	Université de Tébessa	Examineur

Date de soutenance: 26/05 /2018

سُبْحَانَكَ اللَّهُمَّ رَبَّنَا اللَّهُمَّ

ملخص

الغرض من هذا العمل في سياق مذكرة الماستير هذه هو تقديم دراسة مقارنة لبعض أنواع التزامن للأنظمة الفوضوية المستمرة بدأنا في الفصل الأول بدراسة للأنظمة الديناميكية مع التركيز على خصائص الأنظمة الديناميكية الفوضوية وذلك بإعطاء تعريفات ومفاهيم عامة عن فضاء ، نقط التوازن ، دورية وشبه دورية حلول الأنظمة الديناميكية و الطريق إلى الفوضى مع التركيز على الحساسية الشديدة لتغيرات الشروط الابتدائية ،الجواذب الغريبة وأسس ليايبنوف Lyapunov لقياس الفوضى. في الأخير قدمنا نموذجين لنظامين شهيرين مستمرين هما نظامي لورنتز Lorenz و روسلار Rossler .

الفصل الثاني يقدم مختلف طرق التحكم و أساليب التزامن المعروفة وكذا عديد أنواع التزامن و لتبسيط البعد الرياضي للمسألة قمنا بعرض نظام لو Lii الثلاثي الأبعاد و المستمر لوضعه مطية لتقديم أنواع التزامن المقترحة :

la synchronisation complète, l'anti-synchronisation la synchronisation décalée, la synchronisation FSHP, la synchronisation généralisée, et la synchronisation Q-S في الفصل الثالث ، على أساس طريقة أويلر Euler ، أعدنا اكتشاف الخاصية المهمة للفوضى وهي: الحساسية للشروط الابتدائية ، من خلال محاكاة نظام Lii بتغيير طفيف لشروطه الابتدائية ثم قمنا بدراسة بالمحاكاة لمزامنة نظامين متماثلين ل Lii الأول سيد و الثاني عبد من خلال ثلاثة أنواع مزامنة هي : synchronisation complète, la synchronisation hybride et la l'anti-synchronisation المحاكاة مكنتنا من رسم التطور الزمني لحالات الانظمة و كذا أخطاء المزامنة مع برهان استقرار أنظمة أخطاء المزامنة باستخدام نظرية الاستقرار لليابونوف.

الكلمات المفتاحية: الفوضى ، أنواع المزامنة ، الجواذب، Lii ، ليايبنوف ، المحاكاة.

Abstract

The purpose of the work in this Master's dissertation is to provide a comparative study of some types of synchronization of chaotic continuous systems, we started in the first chapter a study of dynamical systems with emphasis on the characteristics of the dynamical chaotic systems by giving definitions of general concepts such as: phase space, equilibrium points, periodic and quasi-periodic solutions of dynamical systems and the path to chaos with emphasis on extreme sensitivity to changes in the initial conditions, strange attractors and exponents of Liapunov to measure chaos. Finally, we presented two examples of popular systems, the Lorentz systems and the Rossler system.

In the second chapter, we propose various methods of control and synchronization known, as well as many types of synchronization and to simplify the mathematical dimension of the problem, we have set up the continuous three-dimensional system of $L\ddot{u}$ to present the types of synchronization proposed: the synchronization, anti-synchronization, synchronized timing synchronization, FSHP synchronization, generalized synchronization, and QS synchronization

In chapter III, and based on the Euler method, we rediscover the important property of chaos: the sensitivity of the initial conditions, simulating the $L\ddot{u}$ system with minimal change in the initial conditions, then we studied by simulation the synchronization of two identical systems of $L\ddot{u}$ the first taken as master and the second as slave through three types of synchronization which are: full synchronization, anti-synchronization and hybrid synchronization. This simulation allowed us to draw in figures the temporal evolutions of the system states as well as the synchronization errors after the demonstration of the stability of the synchronization errors systems by using the stability theory of Lyapunov .

Keywords: chaos, synchronization types, attractors, $L\ddot{u}$, Lyapunov, simulation.

Résumé

Le but du travail dans le cadre de ce mémoire de master est de fournir une étude comparative de certains types de synchronisation de systèmes continus chaotiques, nous avons commencé dans le premier chapitre une étude des systèmes dynamiques en mettant l'accent sur les caractéristiques des systèmes dynamiques chaotiques en donnant des définitions des concepts généraux comme : l'espace des phases, les points d'équilibre, des solutions périodiques et quasi périodiques des systèmes dynamiques et le chemin vers le chaos ,la sensibilité extrême aux changements dans les conditions initiales , les attracteurs étranges et les exposants de Lyapunov pour mesurer le chaos. Enfin, nous avons présenté deux exemples de deux systèmes populaires : le système de Lorenz et le système de Rossler .

Le chapitre II propose diverses méthodes de contrôle et de synchronisation connues, ainsi que de nombreux types de synchronisation et pour simplifier la dimension mathématique du problème, nous avons mis en place le système tridimensionnel continu de $L\ddot{u}$ pour présenter les types de synchronisation proposées: la de synchronisation, l'anti-synchronisation , la synchronisation décalée la synchronisation, la synchronisation FSHP , la synchronisation généralisée, et la synchronisation QS .

Dans le chapitre III, et en se basant sur la méthode d'Euler, on redécouvre la propriété importante du chaos: la sensibilité des conditions initiales , en simulant le système de $L\ddot{u}$ par de minimes changement dans les conditions initiales, puis nous avons étudié par simulation la synchronisation de deux systèmes identiques de $L\ddot{u}$ le premier pris comme maître et et le second comme esclave à travers trois types de synchronisation qui sont: la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation hybride .Cette simulation nous a permis de dessiner sur des figures les évolutions temporelles des états des systèmes ainsi que des erreurs de synchronisation après la démonstration de la stabilité des erreurs de synchronisation en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov.

Mots-clés: chaos, types de synchronisation, attracteurs, $L\ddot{u}$, Lyapunov, simulation.

Dédicaces

A Mes enfants : Ritej , Ali Nour El islem et Jed Elkarim

A Mon marie farouk qui a un grand plaisir pour terminer ce travail

A ma chère mère

A Mon grand frère amer et leur femmes et filles Malek et Maram.

A mes frères Hamza et djalel

A Mes sœurs Zahera et sara

A Mes amies et sœur Linda, Dalinda, Dhbia

A ma binôme charifa

Hafsa leila

Dédicaces

A mon marie Med Saleh

A mon chère père

A mes frères : Ali ,Khalil, et Fares

A mes sœurs : Samia , Zahra

A mon frère Saleh et sa femme Anissa et sa fille Ritel

A mon chère petit frère Iyed .

A ma collègue Linda

A ma binôme Leila

Sahraoui cherifa

Remerciement

- ❖ En premier lieu, nous remercions Allah le Tout-Puissant pour nous avoir donné le potentiel d'apprendre les lois de notre univers et de les exploiter pour notre bien-être.
- ❖ nous remercions énormément *Dr T. ZIAR* maitre de conférences A au département des sciences de la matière à l'université Larbi Tébessi de Tébessa de nous avoir guidés et soutenus le long de ce travail avec beaucoup de patience et d'indulgence.
- ❖ Nous remercions **Mr. Chaouche yacine** maitre a conférence au département des sciences de la matière à l'université Larbi Tébessi de Tébessa de nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre soutenance et également **Mr Mansour Med Elhaddi** maitre assistant au département des sciences de la matière à l'université Larbi Tébessi de Tébessa d'avoir accepter d'examiner notre travail.
- ❖ Un grand merci à toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail
- ❖ Merci à nos amies et collègues pour leurs encouragements et spécialement à Hichem Belghith .
- ❖ Et enfin merci et pardon à tous ceux que nous ne pouvons citer qui nous ont aidés de près ou de loin.

Chérifa & Leila

TABLE DES MATIERES	I
<i>LISTE DES FIGURES</i>	III
INTRODUCTION GENERALE :	1
CHAPITRE I : GENERALITES SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES.....	3
I.1 INTRODUCTION :	4
I.2 QUELQUES DEFINITIONS:	4
I-2-1 Les systèmes dynamiques	4
I-2-2 L'espace de phases	4
I.2.3 LE SYSTEME DYNAMIQUE CHAOTIQUE:.....	6
I.3. LES SYSTEMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES CONTINUS CONNUS	7
1-3-1· Système de Lorenz	7
1-4-2· Systeme de Rossler	7
1-5 CONCLUSION	8
CHAPITRE II : PRESENTATION DE QUELQUES METHODES ET TYPES DE	
 SYNCHRONISATION.	9
2.1 INTRODUCTION	10
2 .2 LES METHODES DE SYNCHRONISATION	10
2.2.1 Méthode du contrôleur actif	10
2.2.2 Méthode du Backstepping	11
2.2.3 Méthode du mode glissant	12
2-3 QUELQUES TYPES DE SYNCHRONISATION :	13
2.3.1 Le système chaotique de Lu	13
2-3-2 Présentation de la configuration maître- esclave.....	14
2-3-3 La synchronisation complète	15
2-3-4 L'anti-Synchronisation	15
2-3-5 la Synchronisation lag	15
2-3-6 Synchronisation projective	16
2-3-7 Synchronisation FSHP.....	16
2-3-8 Synchronisation inverse FSHP	16
2-3-9 Synchronisation généralisé	17
2-3-10 Synchronisation inverse généralisé	17
2-3-11 Synchronization Q-S	17
2-4. METHODES D'ETUDE DE LA STABILITE DES SYSTEMES DYNAMIQUES	
CONTINUS NON LINEAIRES	17
2.4.1 La méthode de Lyapunov.....	18
2.5 CONCLUSION	18

CHAPITRE III : ETUDE COMPARATIVE DE QUELQUES TYPES DE SYNCHRONISATION DE SYSTÈMES CHAOTIQUES.	19
3.1 INTRODUCTION	20
3.2 MODELISATION ET SIMULATION	20
3.2.1 Méthode utilisée	20
3.2.2 Résultats des simulations	21
3.3.ETUDE PAR SIMULATION DE LA SYNCHRONISATION COMPLETE ENTRE DEUX SYSTEMES CHAOTIQUES IDENTIQUES DE $L\ddot{u}$	22
3.4.ETUDE PAR SIMULATION DE L'ANTI SYNCHRONISATION ENTRE DEUX SYSTEMES IDENTIQUES DE u	25
3.5.ETUDE PAR SIMULATION DE LA SYNCHRONISATION HYBRIDE ENTRE DEUX SYSTEMES IDENTIQUES DE Lu	28
3.6.CONCLUSION	30
CONCLUSION GENERALE	32

Liste des figures

Figure	Titre	Page
Fig. (1.1)	Attracteur de Lorenz (a)Attracteur 3 – D , (b)(c)et (d)Attracteur 2	7
Fig. (1.2)	Attracteur de Rössler (a)Attracteur 3 – D , (b)(c)et (d)Attracteur 2	8
Fig. (3.1)	évolution temporelle des états x ; y et z pour différentes conditions initiales	22
Fig. (3.2)	L'attracteur chaotique de Lu en 3D pour a = -10, b = -4 et c = 0. Pour les conditions initiales	22
Fig. (3.3)	évolution temporelle des états du système maitre ($x_m ; y_m , z_m$) et du système esclave($x_e ; y_e , z_e$) commandé par une synchronisation complète pour condition initiales	25
Fig. (3.4)	évolution temporelle des états du système maitre ($x_m ; y_m , z_m$) et du système esclave($x_e ; y_e , z_e$) commandé par une synchronisation complète pour différentes condition initiales	25
Fig. (3.5)	L'évolution temporelle des erreurs de synchronisation e_{c1} , e_{c2} et e_{c3}	27
Fig. (3.6a)	évolution temporelle des états du système maitre ($x_m ; y_m , z_m$) et du système esclave ($x_e ; y_e , z_e$) commandé par une anti anti synchronisation pour différentes condition initiales	27
Fig. (3.6b)	L'évolution temporelle des erreurs de synchronisation e_{a1} , e_{a2} et e_{a3}	27
Fig. (3.7)	évolution temporelle des états du système maitre et du système esclave commandé par une synchronisation hybride pour différentes condition initiales	29
Fig. (3.8)	L'évolution temporelle des erreurs de synchronisation e_{1h} , e_{2h} et e_{3h}	29

Introduction générale :

Le concept de la synchronisation des systèmes chaotiques a été présenté à la communauté scientifique la première fois par Yamada and Fujisaka (Fujisaka et Yamada (1983) [1,2]. suivi des travaux de Pecora et Carroll (Pecora et Carroll (1990)) . (Pecora and Carroll, (1991)) [3,4]. La synchronisation du chaos est une manière d'expliquer la sensible dépendance aux conditions initiales (Alligood *et al.* (1997) [5]. Edward Ott (2002) [6]. Il a été établi que la synchronisation de deux ou plusieurs systèmes chaotiques, montre la tendance de ces systèmes couplés ensemble à suivre étroitement le même mouvement. Le problème de la synchronisation est de designer un accouplement entre les deux systèmes à synchroniser pour rendre l'évaluation temporelle presque idéale. La sortie du système esclave suit asymptotiquement la sortie du système maître i.e la sortie du système maître contrôle la sortie du système esclave.

La synchronisation des systèmes chaotiques a été généralisée par la découverte de plusieurs types tels que la synchronisation généralisée (Li, C. & Yan (2006)) [7], la synchronisation de phase (Ge, Z.-M. & Chen, C.-C., 2004 , Jia, Q., 2007) [08-10], la synchronisation projective généralisée [11-13], et même l'anti synchronisation. Lorsque la synchronisation et anti synchronisation coexistent, en même temps, dans les systèmes chaotiques, Sundarapandian et Suresh (2012) [14].

Plusieurs schémas pour assurer le contrôle et la synchronisation des systèmes chaotiques ont été démontrés en se basant sur leurs [19], applications potentielles dans divers domaines comme la conception des générateurs de chaos , la communication sécurisée (Murali and Laksmanan) [15,16], les systèmes écologiques physico-chimiques (Blasius *et al.* (1999)), [17]. Jusqu'à présent, une variété d'approches impressionnantes ont été proposées pour la synchronisation des systèmes chaotiques comme la méthode de OGY (Ott (1990)) [18], la méthode de rétroaction à retard temporel (Park et Kwon (2003)) la méthode de commande de mode de glissement (Yau, H.T., 2004) [20], la méthode de contrôle actif et la conception du contrôle backstepping, Suresh et Sundarapandian (2012) [21].

Le présent mémoire est structuré en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduit quelques définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques pour introduire ensuite le phénomène du chaos dans ces systèmes enfin on présente deux exemples de systèmes chaotiques continus .

Dans le deuxième chapitre, on fait une présentation mathématique des différentes méthodes de synchronisation telle qu'elles sont exposées par les mathématicien , ainsi que les différents types de synchronisation types de synchronisation, spécialement ceux qui vont êtres simulés dans le troisième chapitre à savoir la synchronisation complète, l'anti Synchronisation et la synchronisation hybride

Le troisième et dernier chapitre de ce mémoire présente plusieurs simulations pou illustrer les différentes caractéristiques des schéma de synchronisation étudiés à savoir : la sensibilité au conditions initiales pour le système chaotique de Lu, les évolutions temporelles des états du système maitre et du système esclave commandé (contrôlé) ainsi que les erreurs de synchronisation pour les trois modes de synchronisation étudié et enfin une conclusion générale.

CHAPITRE I :

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES.

I.1 Introduction :

Le but de ce chapitre est de connaître les conditions nécessaires pour qu'un système ait un comportement chaotique. Nous partirons de quelques définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques pour introduire ensuite le phénomène du chaos dans ces systèmes ainsi que la possibilité de les synchroniser.

I.2 Quelques définitions:

I-2-1 Les systèmes dynamiques

Un système dynamique est défini par une loi d'évolution temporelle, généralement désignée par : la *dynamique du système*, qui caractérise l'évolution de l'état du système au cours du temps. La notion de déterminisme provient du fait que le système considéré est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique[22].

Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

- ✓ Systèmes dynamiques discrets,
- ✓ Systèmes dynamiques continus.

Dans notre étude on va s'intéresser uniquement au système dynamique continu décrit par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t) \quad (I.1)$$

Où $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente la dynamique du système, $x(t)$ est le vecteur des états du système et t représente le temps.

I-2-2 L'espace de phases

L'analyse de toutes sortes d'évolutions temporelles ; appelées systèmes dynamiques, permet l'étude du chaos. L'état d'un système dynamique est décrit par un certain nombre de quantités dépendantes du temps : $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Au lieu d'étudier séparément ces n variables, il est préférable de présenter le système par un point unique dans un espace à n dimensions : l'espace des phases. A partir d'un état initial $x(0)$ et après un régime transitoire, la trajectoire d'un système dynamique atteint une région limitée de l'espace des phases. Cette représentation permet de distinguer un comportement chaotique d'un comportement purement aléatoire. Si le système dynamique est périodique les points vont former une courbe fermée, on parle de cycle ou d'orbite périodique. Un mouvement régulier correspond à un diagramme simple, un attracteur. Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard : aucune structure n'apparaît. Quand le mouvement est chaotique, les points paraissent à première vue aléatoires. Néanmoins si on observe le système suffisamment longtemps, on constate que les points dessinent une forme

particulière, qui présente une structure feuilletée (fractale). A cause de cette géométrie particulière, ces attracteurs sont qualifiés d'étranges. Ils sont la signature du chaos. Ces comportements asymptotiques obtenus pour l'état $x(t)$ du système dynamique, quand $t \rightarrow \infty$ sont des caractéristiques des plus importantes à étudier pour tout système dynamique, parmi lesquels: [23,28]

- ✓ Les points fixes ou points d'équilibre
- ✓ Les solutions périodiques et quasi- périodiques
- ✓ La chaoticité du système et les exposants de Lyapunov
- ✓ La bifurcation et les attracteurs étranges.

Définition 01 : Un point fixe ou point d'équilibre est une solution constante du système. Il est obtenu en résolvant le système d'équations :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t) = 0 \quad (I.2)$$

Dans l'espace de phase, le point fixe se représente par un point. Sa valeur est déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi, pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibre. De même, ces points peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre-elles.

Définition 02 Solution périodique et quasi périodique

Le régime asymptotique permanent périodique correspond à une trajectoire dont les répliques d'une portion élémentaire sont espacées à des intervalles .si le système est forcé de l'extérieur par un autre oscillateur il peut y avoir doublement de période pour enfin atteindre le chaos si la période est infinie. Si les deux périodes des deux oscillateurs en présence n'est pas rationnel alors le système est dit quasi périodique qui peut être une transition vers le chaos.

Définition 03 Les exposants de Lyapunov et chaocité du système

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Un système sensible à de petites variations de la condition initiale aura un exposant positif (système chaotique). En revanche, l'exposant est négatif si le système n'est pas sensible à des petites variations des conditions initiales, les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales. Un système de dimension n possède n exposants de Lyapunov qui mesurent le taux de divergence suivant un des axes de l'espace de phase.

Définition 04 Diagramme de bifurcations

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières des paramètres qui induisent des bifurcations.

Définition 05 Attracteur étrange

Il est contenu dans un espace fini. Sa dimension est fractale et non entière ; sa trajectoire est complexe ; presque toutes les trajectoires sur l'attracteur ont la propriété de ne jamais passer deux fois par le même point. En d'autres termes, chaque trajectoire est apériodique ; deux trajectoires proches à un instant " t " voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle. Ce phénomène traduit la sensibilité aux conditions initiales ; toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction, c'est-à-dire à la région de l'espace des phases dans laquelle tout phénomène dynamique sera "attiré " vers l'attracteur, produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur

I.2.3 Le système dynamique chaotique:

Le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut: [29-30]

- La non-linéarité. Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- Le déterminisme. Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).
- La sensibilité aux conditions initiales. De très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- L'imprévisible. En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- L'irrégularité. Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques

Pratiquement, une dynamique chaotique peut être identifiée, en première analyse, par la reconnaissance de propriétés caractéristiques : sensibilité aux conditions initiales ,attracteur étrange, spectre, ... etc.

I.3. Les systèmes dynamiques chaotiques continus connus:

1-3-1• Système de Lorenz qui est système largement connue dans la littérature, initié par le célèbre climatologue Lorenz est modélisé par le système[31]

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \quad (\text{I. 3})$$

Où x, y et z sont les variables d'état du système, σ, ρ, β sont des paramètres. Pour certaines valeurs de ses derniers, le système exhibe un comportement chaotique.

La figure 1.1 ci-dessous présente l'attracteur de Lorenz pour les valeurs suivantes

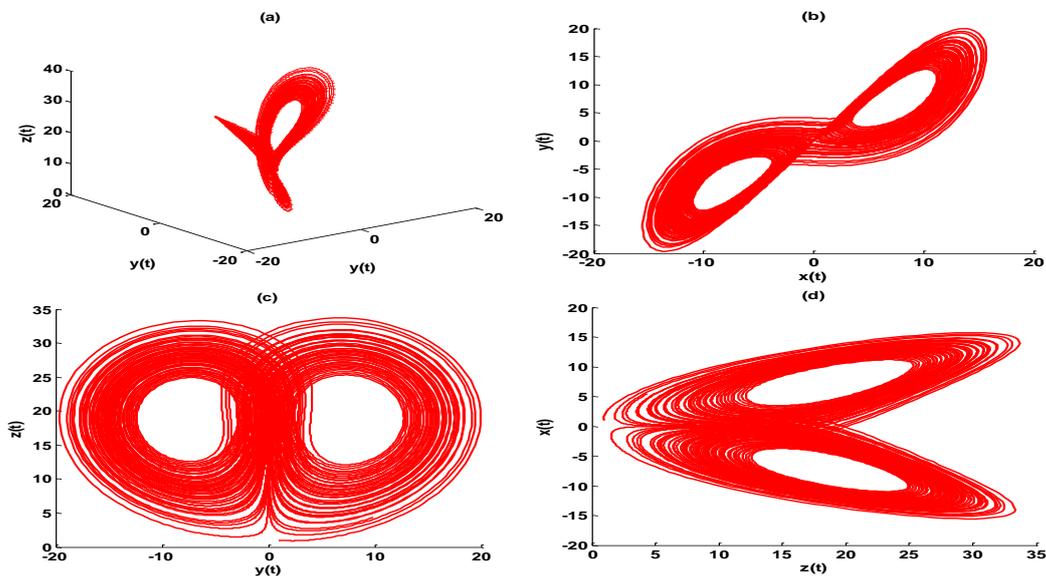


Fig. 1.1: Les attracteurs de Lorenz (a)Attracteur 3D,(b) (c) et (d) Attracteurs2-D Avec $\sigma=10, \beta=8/3$ et $\rho=20$. $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.

1-4-2• Systeme de Rossler :ce système semblable à celui de Lorenz, a été proposée par le biochimiste allemand Otto Rossler en 1976 , il découle des équations de Navier Stokes et est lié à l'étude de l'écoulement des fluides. [32],

Les équations de ce système sont les suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + \alpha y \\ \dot{z} = \beta - \gamma z + xz \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Avec α, β, γ des constantes (paramètre de bifurcation)

Ci-dessous l'attracteur de Rossler pour les valeurs suivantes : $\alpha = \beta = 0.2$ et $\gamma = 5.7$

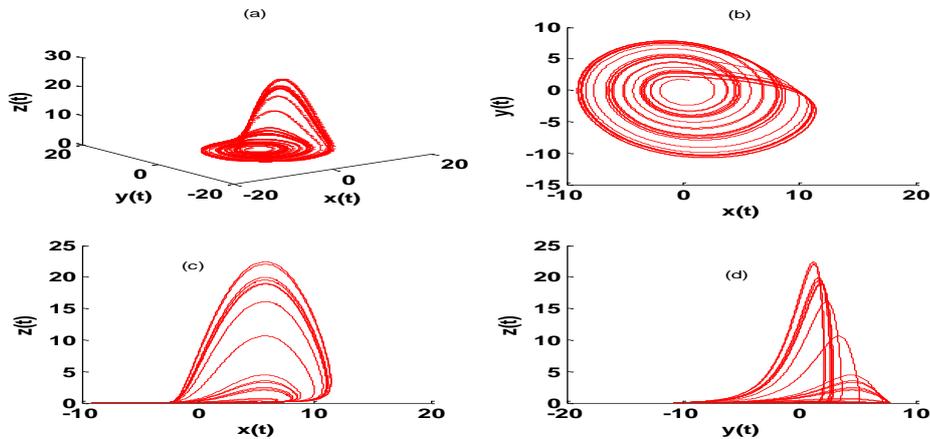


Figure 1.2: Les attracteurs de Rössler (a) Attracteur 3-D, (b) (c) et (d) Attracteurs 2-D
Avec $a = b = 0.2$ et $c = 5.7$. $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 1.5, 0.1)$

1-5 conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté Le chaos comme un comportement particulier caractérisant un système dynamique par sa sensible dépendance aux conditions initiales. on a introduit définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques pouvant conduire au chaos dans ces systèmes .

Enfin on présente deux exemples de systèmes chaotiques continus.

CHAPITRE II :

**PRÉSENTATION DE QUELQUES MÉTHODES ET TYPES
DE SYNCHRONISATION.**

2.1 Introduction

Dans ce chapitre et pour éviter le chargement mathématique, on s'est forcé, comme physiciens, d'accepter une présentation mathématique des différentes méthodes de synchronisation telle qu'elle est exposée par les mathématiciens. Mais pour présenter les différents types de synchronisation on a opté pour une simplification de la tâche avec une présentation tridimensionnelle par le biais du système de Lü [31].

2.2 Les Méthodes de synchronisation

Cette section est consacrée à la présentation de diverses méthodes de synchronisation les plus performantes et les plus rencontrées.

2.2.1 Méthode du contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques a été proposée par Bai et Lonngren [30], c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme. Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$\dot{x}_m(t) = Ax_m(t) + f(x_m(t)) \quad (2.1)$$

et

$$\dot{x}_e(t) = Ax_e(t) + G(x_e(t)) + U \quad (2.2)$$

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Cette erreur est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{x}_e(t) - \dot{x}_m(t) \\ &= Ax_e(t) + G(x_e(t)) - Ax_m(t) - F(x_m(t)) + U \end{aligned} \quad (2.3)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + G(x_e(t)) - F(x_m(t)) + U; \quad (2.4)$$

Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V + F(x_m(t)) - G(x_e(t)) \quad (2.5)$$

d'où V est le contrôleur actif, défini par :

$$V = -L e(t); \quad (2.5)$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$\dot{e}(t) = (A - L) e(t); \quad (2.6)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (2.14) et le système esclave(2,15) est transformé en problème de zéro-stabilité du système (2.21). Maintenant, le Théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires continue .

Théorème 4.1 *Le système maître (2.14) et le système esclave (2.15) sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle (2, 20), si et seulement si la matrice de contrôle L est choisie telles que les valeurs propres de A - L se trouvant à l'intérieur du disque de l'unité,*

- Avantage de la méthode
 - La technique du contrôleur actif est efficace non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques .
 - cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme

2.2.2 Méthode du Backstepping

La méthode du Backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire. En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit [33-34]

$$\begin{cases} \dot{X}_{m1} = f_1(x_{m1}; x_{m2}) \\ \dot{X}_{m2} = f_2(x_{m1}; x_{m2}; x_{m3}) \\ \vdots \\ \dot{X}_{mn} = f_n(x_{m1}; x_{m2}; \dots x_{mn}) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{e1} = f_1(x_{e1}; x_{e2}) \\ \dot{x}_{e2} = f_2(x_{e1}; x_{e2}; x_{e3}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{en} = f_n(x_{e1}; x_{e2} \dots; x_{en}) \end{cases} \quad (2.8)$$

d'où f_1 est une fonction linéaire, f_i , ($i = 2; 3; \dots; n$), sont des fonctions non-linéaires et u est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes(2.20) et (2.21). L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = x_{e1} - x_{e1} \\ e_2 = x_{e2} - x_{e2} \\ \vdots \\ e_n = x_{en} - x_{en} \end{cases} \quad (2.9)$$

Alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1(e_1; e_2) \\ \dot{e}_2 = g_2(e_1; e_2; e_3) \\ \vdots \\ \dot{e}_n = g_n(e_1; e_2; \dots \dots e_n) + u \end{cases} \quad (2.10)$$

d'où g_1 est une fonction linéaire, et g_i , ($i = 2; 3; \dots; n$), sont des fonctions non-linéaires. L'objectif est de calculer une loi de contrôle u qui assure la convergence du système e_i , ($i = 1; 2; \dots; n$); vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela le système d'erreur (2.23) doit être décomposé en sous système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3) \dots \dots (e_1, e_2, \dots \dots e_n)$$

et pour chaque sous système on définit une fonction de Lyapunov V positive :

$$V_j(e_j, u_j, \alpha_j); \tag{2.11}$$

d'où j est l'ordre du sous-système, u_j , α_j représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre j , u_j et α_j sont calculés à chaque fois de tel sorte que $\dot{V}_j < 0$

- Avantages de la méthode : Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :
 - Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur.
 - Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.
 - Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.
 - Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.

2.2.3 Méthode du mode glissant

Dans la théorie du contrôle robuste, la méthode du mode glissant est souvent pratiquée en raison de ses avantages inhérents, telles que la réalisation facile, la réponse rapide et une bonne performance transitoire ainsi que sa sensibilité aux incertitudes des paramètres et des perturbations externes [35,36].

Soit les systèmes chaotiques maître et esclave donnés par les formes suivantes :

$$\dot{x}_m(t) = Ax_m(t) + f(x_m(t)) \tag{2.12}$$

et

$$\dot{x}_e(t) = Ax_e(t) + f(x_e(t)) + U \tag{2.13}$$

Où $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $A \in R^{n \times n}$ une matrice constante, $f \in R^{n \times n}$ est une fonction non-linéaire et $u \in R^n$ est un contrôleur à déterminer. L'erreur entre le système maître (2.27) et le système esclave (2.28) est définie par :

$$e(t) = x_e(t) - x_m(t)$$

La dynamique de l'erreur peut s'écrire comme suit :

$$\dot{e} = Ae + \eta(x_m, x_e) + u \tag{2.14}$$

d'où $\eta(x_m, x_e) = f(x_m(t)) - f(x_e(t))$: Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur (2.29), la loi de contrôle u est choisie comme suit :

$$u = Bv - \eta(x_m, x_e) \quad (2.15)$$

d'où v est le contrôleur actif et B un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple (A, B) soit contrôlable. En substituant (2.30) dans (2.29), la dynamique de l'erreur est simplifiée comme suit :

$$\dot{e} = Ae + Bv \quad (2.16)$$

Ainsi, le problème de synchronisation peut être remplacé par un équivalent problème de la stabilisation de la solution $e = 0$ du système (2.31) par un choix approprié du contrôleur en mode glissant.

Dans la méthode du mode glissant, nous définissons la surface de glissement s , comme suit :

$$s(e) = Ce = \sum_{j=1}^n c_j e_j \quad (2.17)$$

Où C : est un vecteur constant à déterminer, et le système contrôlé doit satisfaire :

$$\begin{aligned} s(e) = 0, \quad \dot{s}(e) = 0: \text{ Alors, on peut écrire :} \\ \dot{s}(e) = C(Ae + Bv) = 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donc le contrôleur v est donné par

$$v = - (CB^{-1}) CAe \quad (2.19)$$

d'où C est choisi de telle sorte que $CB \neq 0$. L'existence de (CB^{-1}) est une condition nécessaire. La nouvelle forme de l'erreur de synchronisation est donnée par

$$\dot{e} = [I - B (CB^{-1}) C] Ae \quad (2.20)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique du système contrôlé, le vecteur C doit être choisi de telle sorte que les parties réelles des valeurs propres de la matrice $[I - B (CB^{-1}) C]A$ soient toutes négatives.

2-3 Quelques types de synchronisation :

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation FSHP, la synchronisation généralisée, et la synchronisation Q-S. Toutes les synchronisations sont supposées appliquées à deux systèmes identiques de $L\ddot{u}$.

2.3.1 Le système chaotique de $L\ddot{u}$

Considérons le système simple, autonome, quadratique et tridimensionnel suivant, qui peut afficher deux attracteurs chaotiques simultanément [31]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x - yz + \gamma \\ \dot{y} = \alpha y + xz \\ \dot{z} = \beta z + xy \end{cases} \quad (2.21)$$

Où un α ; β ; γ sont des constantes.

Ce système est chaotique pour une large gamme de paramètres et a beaucoup de comportements dynamiques complexes intéressants. Par exemple : il est chaotique pour les paramètres $\alpha = -10$; $\beta = -4$, et $|\gamma| < 19$: 2, et pour $\alpha = -10$; $\beta = -4$; $\gamma = 18$: 1, il affiche deux Attracteurs chaotiques comme indiqué sur la Figure. 2.1.

pour la valeur initiale (1; 1; 1), le spectre des exposants de Lyapunov du système (2.1) est donné par : $\lambda_1 = 0$. 253223; $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = -11$. 3944, et la dimension de Lyapunov est $d_l = 2$: 0221.

De toute évidence, quand $\alpha = -10$; $\beta = -4$; $\gamma = 18$, le système a seulement trois points d'équilibres:

$$E_1 = (-6.335, 0, 0)$$

$$E_2 = \left(2\sqrt{10}, \sqrt{\frac{80}{7} + 3.62\sqrt{10}}, -1/2\sqrt{800/7 + 36.2\sqrt{10}} \right)$$

$$E_3 = \left(2\sqrt{10}, -\sqrt{\frac{80}{7} + 3.62\sqrt{10}}, -1/2\sqrt{800/7 + 36.2\sqrt{10}} \right)$$

C'est un phénomène étrange d'avoir deux attracteurs chaotiques qui coexistent dans un système chaotique autonome, quadratique et tridimensionnel avec seulement trois équilibres. De plus, quand $a = +10$; $b = +4$; $c = 0$, ce système peut afficher deux attracteurs chaotiques complexes, comme le montre la Figure. 2.2. Selon leur emplacements géométriques, ces deux attracteurs qui coexistent sont appelés attracteur supérieur et attracteur inférieur.

2-3-2 Présentation de la configuration maître- esclave

Considérons le cas de deux systèmes tridimensionnels identiques de Lü (2.22) et (2.23) à synchroniser : le premier est pris comme un système maître et le deuxième comme un système esclave respectivement.

$$\begin{cases} \dot{x}_m = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x_m - y_m z_m + \gamma \\ \dot{y}_m = \alpha y_m + x_m z_m \\ \dot{z}_m = \beta z_m + x_m y_m \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_e = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x_e - y_e z_e + \gamma + u_1 \\ \dot{y}_e = \alpha y_e + x_e z_e + u_2 \\ \dot{z}_e = \beta z_e + x_e y_e + u_3 \end{cases} \quad (2.23)$$

Où $(x_m; y_m; z_m)^T$, $(x_e; y_e; z_e)^T$ sont les vecteurs d'états du système maître et du système esclave, respectivement et u_i ; $i= 1; 2; 3$; sont les contrôleurs de synchronisation qui seront déterminés ultérieurement par l'une des méthodes de synchronisation

2-3-3 La synchronisation complète

Pour la synchronisation complète, on calcul le système d'erreur de la synchronisation complète comme [37]

$$\begin{cases} e_{c1} = x_e - x_m \\ e_{c2} = y_e - y_m \\ e_{c3} = z_e - z_m \end{cases} \quad (2.24)$$

Ainsi, le problème de synchronisation complète est de déterminer les contrôleurs u_i ($i=1,2, 3$) du système esclave (2.3) de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{ci}(t) = \mathbf{0} \quad (i=1,2, 3)$$

2-3-4 L'anti-Synchronisation [38]

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit

$$\begin{cases} e_{a1} = x_e + x_m \\ e_{a2} = y_e + y_m \\ e_{a3} = z_e + z_m \end{cases} \quad (2.25)$$

Alors, le problème de l'anti synchronisation est de déterminer les contrôleurs u_i ($i=1,2, 3$) de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{ai}(t) = \mathbf{0} \quad (i=1,2, 3)$$

2-3-5 la Synchronisation lag [39]

On dit qu'on a une synchronisation **retardée** (ou **anticipée**) si les variables d'état $x_e(t)$ système chaotique esclave converge vers les variables d'état $x_m(t)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous

$$\begin{cases} e_{l1} = x_e(t) - x_m(t - \tau) \\ e_{l2} = y_e(t) - y_m(t - \tau) \\ e_{l3} = z_e(t) - z_m(t - \tau) \end{cases} \quad (2.26)$$

Alors, le problème de la synchronisation lag est de déterminer les contrôleurs u_i ($i=1,2, 3$) de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0;$$

Avec τ est un nombre positif très petit.

2.3-6 Synchronisation projective [40]

On dit qu'on a une synchronisation projective, s'il existe une matrice diagonale $H = \text{diag}(h_1, h_2, h_3, \dots, h_n)$, tels que

$$\begin{bmatrix} e_{p1} \\ e_{p2} \\ e_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} e_{p1} = x_e(t) - h_1 \times x_m(t) \\ e_{p2} = y_e(t) - h_2 \times y_m(t) \\ e_{p3} = z_e(t) - h_3 \times z_m(t) \end{cases} \quad (2.27)$$

et si on peut déterminer les contrôleurs u_i ($i=1,2, 3$) de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{pi}\| = 0 \quad i=1, 2,3$$

Remarque : On voit bien que pour le cas où tous les h_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète. Le cas où tous les h_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation

2-3-7 Synchronisation FSHP:

On dit qu'on a une **synchronisation FSHP** (*en anglais full state hybrid projective synchronisation*), [41] s'il existe des contrôleur u_i , $1 \leq i \leq 3$ et des constante $(\alpha_{ij}) \in R^{3 \times 3}$ tels que :

$$\begin{bmatrix} e_{F1} \\ e_{F2} \\ e_{F3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\text{Avec } \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{Fi}| = 0, \quad i=1,2,3$$

La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective

2-3-8 Synchronisation inverse FSHP [42]

On dit qu'on a une **synchronisation FSHP** (*en anglais inverse full state hybrid projective synchronisation*), s'il existe des contrôleur u_i , $1 \leq i \leq 3$ et des constante $(\beta_{ij}) \in R^{3 \times 3}$ tels que :

$$\begin{bmatrix} e_{IF1} \\ e_{IF2} \\ e_{IF3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\text{Avec } \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{IFi}| = 0, \quad i=1, 2,3$$

La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective [4].

2-3-9 Synchronisation généralisé [43]

On a synchronisation au sens généralisé des deux systèmes (2.2) et (2.3) , s'il existe des contrôleur $u_i; i= 1; 2; 3$ et une fonction $\Phi: R^3 \rightarrow R^3$ qui vérifient

$$\begin{cases} e_{g1} = x_e(t) - \Phi x_m(t) \\ e_{g2} = y_e(t) - \Phi y_m(t) \\ e_{g3} = z_e(t) - \Phi z_m(t) \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\text{Avec} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{gi}| = 0,$$

2-3-10 Synchronisation inverse généralisé [44]

On a synchronisation au sens inverse généralisé des deux systèmes (2.2) et (2.3) ,s'il existe des contrôleur $u_i; i= 1; 2; 3$ et une fonction $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ qui vérifient

$$\begin{cases} e_{ig1} = x_m(t) - \varphi x_e(t) \\ e_{ig2} = y_m(t) - \varphi y_e(t) \\ e_{ig3} = z_m(t) - \varphi z_e(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\text{Avec} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{ig1}| = 0, \quad i=1, 2,3$$

2-3-11 Synchronization Q-S [45]

On a synchronisation au sens Q-S des deux systèmes (2.2) et (2.3) , s'il existe des contrôleur $u_i; i= 1; 2; 3$ et deux fonctions $Q: R^3 \rightarrow R^3, S: R^3 \rightarrow R^3$ tel que les erreurs de synchronisation

$$\begin{cases} e_{q1} = Q(x_m(t)) - S(x_e(t)) \\ e_{q2} = Q(y_m(t)) - S(y_e(t)) \\ e_{q3} = Q(z_m(t)) - S(z_e(t)) \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\text{vérifient :} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{qi}| = 0, \quad ,i=1, 2,3$$

Remarque La synchronisation Q-S est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes.

2-4. Méthodes d'étude de la stabilité des systèmes dynamiques continus non linéaires [46]

Pour l'analyse de la stabilité et, principalement, lorsque les systèmes non linéaires ne permettent pas une linéarisation ou lorsque le modèle linéarisé est loin de représenter le comportement réel du système, on utilise généralement des méthodes plus ou moins difficiles à mettre en œuvre, parmi ces méthodes , on peut citer : la méthode des portraits de phase, le critère de Popov, la méthode directe de Lyapunov et la méthode des normes

vectérielles. Dans tout ce qui suit et pour la vérification de la stabilité des systèmes d'erreurs, on se limite à la méthode de Lyapunov.

2.4.1 La méthode de Lyapunov [47]

La méthode de Lyapunov, permettant l'analyse de la stabilité directement à partir des équations décrivant les systèmes, ne nécessite pas la détermination explicite des solutions de ces équations. En effet, la détermination d'une fonction scalaire $v(x)$, dite de Lyapunov, définie positive dans l'espace d'état, dont la dérivée par rapport au temps $\dot{v}(x)$ est une fonction définie négative, suffit pour pouvoir conclure à la stabilité asymptotique du système dynamique continu non linéaire du type (2.22).

2.5 Conclusion

L'objectif principal de ce chapitre était de présenter les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes et aussi les différents types de synchronisation en se basant sur les définitions des erreurs pour les différents types.

CHAPITRE III :

ÉTUDE COMPARATIVE DE QUELQUES
TYPES DE SYNCHRONISATION DE
SYSTÈMES CHAOTIQUES.

3.1 Introduction

Nous somme allé de l'avant et programmé des simulations pour modéliser le système de Lu et voir son attracteur étrange ainsi que la sensibilité de l'évolution de ses états aux variations minimales des conditions initiales. La simulation est a été fait avec l'aide de MATLAB. L'objectif de la simulation était de produire des résultats qui pourraient être tracés à l'écran en temps réel. Ces données seraient en mesure de confirmer ou d'infirmer les résultats théoriques mentionnés ci-dessus aussi bien que d'afficher l'existence globale du chaos.

La simulation fonctionne dans un processus itératif. Cela prend des points qui sont stockés dans une matrice (tableau) de Points et les trace dans un plan x-y-z un point à la fois. Après chaque point successif, une ligne droite est tracée reliant le point précédent au point courant. Ce processus continu est itéré, donnant à la simulation la capacité de tracer une trajectoire. Pour augmenter la capacité, il y avait des changements apportés au pas temporel de la fonction tracée ainsi que le nombre de points ajoutés à la matrice des points- avant le traçage.

Il existe des techniques de modélisation des équations différentielles sous forme d'équations de différences. Ces techniques modifient le problème de l'étude d'un système continu à l'étude d'un système discret. Il est important de noter que cette méthode ne fonctionne que pour de petits incréments de temps. Pour les grands pas de temps, l'approximation diffère notablement de la solution exacte. La modélisation d'une équation différentielle comme une équation de différence est équivalente à la représentation d'une ligne courbée par plusieurs lignes droites assemblées les unes aux autres reconstituées. Le modèle de l'équation de différence fonctionne en calculant le prochain point connaissant le point courant. et en tenant compte de l'état initial, l'ordinateur peut itérer à travers l'ensemble du système à plusieurs reprises avec une grande vitesse.

3.2 Modélisation et simulation:

3.2.1 Méthode utilisée:

La méthode la plus simple pour transformer l'équation différentielle en une équation de différence est la méthode d'Euler

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y, z) \rightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(x_n, y_n, z_n, \dots) \quad (3.1)$$

Qui nous permet d'écrire y_{n+1} comme

$$y_{n+1} = \Delta t (f(x_n, y_n, z_n, \dots)) + y_n. \quad (3.2)$$

L'approche nous permis de transformer les équations différentielles en équations de différence:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x_n - y_n z_n + \gamma \\ y_{n+1} = \alpha y_n + x_n z_n \\ z_{n+1} = \beta z_n + x_n y_n \end{cases} \quad (3.3)$$

Ont opté pour la méthode simple d'Euler pour sa simplicité et son efficacité pour modéliser les équations et tracer les trajectoires

3.2.2 Résultats des simulations:

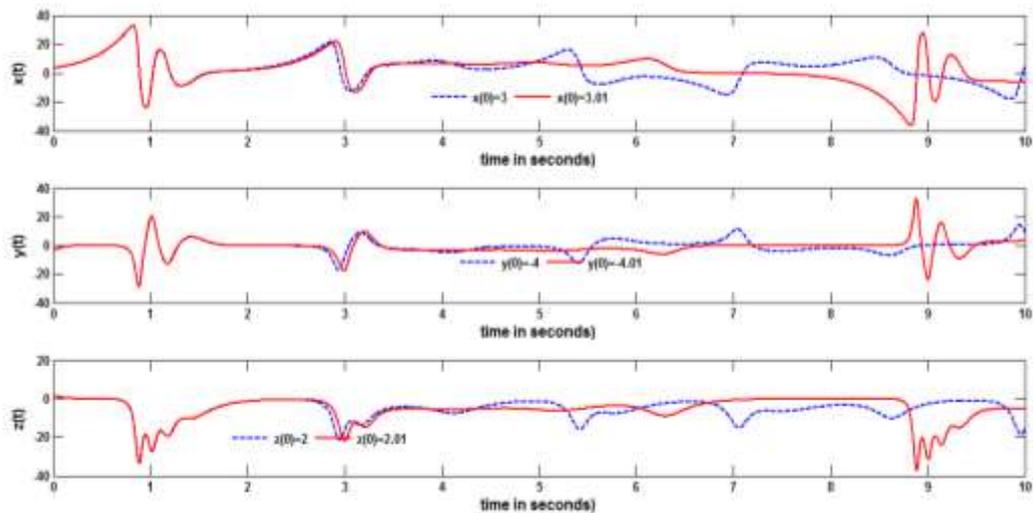
2.1 Quelques simulations sur le système chaotique de Lü

Le système, qui a été conçu par Lü et al. [31], a été présenté dans le deuxième chapitre et affiche simultanément deux attracteurs chaotiques:

Ce système est défini par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x - yz + \gamma \\ \dot{y} = \alpha y + xz \\ \dot{z} = \beta z + xy \end{cases} \quad (3.4)$$

Où $(x; y; z)^T$, est le vecteurs des états du système de Lü, α, β et γ sont des constantes réelles présentant les paramètres du système. Ce système présente un comportement chaotique dans une large gamme de paramètres et présente de nombreux comportements dynamiques complexes intéressants. Le système est chaotique pour les paramètres $\alpha=-10$, $\beta=-4$ et $\gamma < 19.2$. Par exemple, lorsque les paramètres sont $\alpha=-10$, $\beta=-4$ et $\gamma = 0$, les évolutions temporelles des trois états du système (1) pour deux conditions initiales très peu différentes, $(x(0), y(0), z(0)) = (3, -4, 2)$ et $(x(0), y(0), z(0)) = (3.01, -4.01, 2.01)$ sont donnés sur la figure 3.1 qui montre que le système est réellement chaotique à cause de sa grande sensibilité aux conditions initiales remarqué par la divergence dans le temps entre les mêmes états présentant une différence d'un centième entre les conditions initiales. En outre, il affiche l'attracteur chaotique comme indiqué sur la figure 3.2. Pour plus de détails sur les autres propriétés dynamiques du système, voir l'article [31].



Figures 3 .1 évolution temporelle des états x ; y et z pour différentes conditions initiales

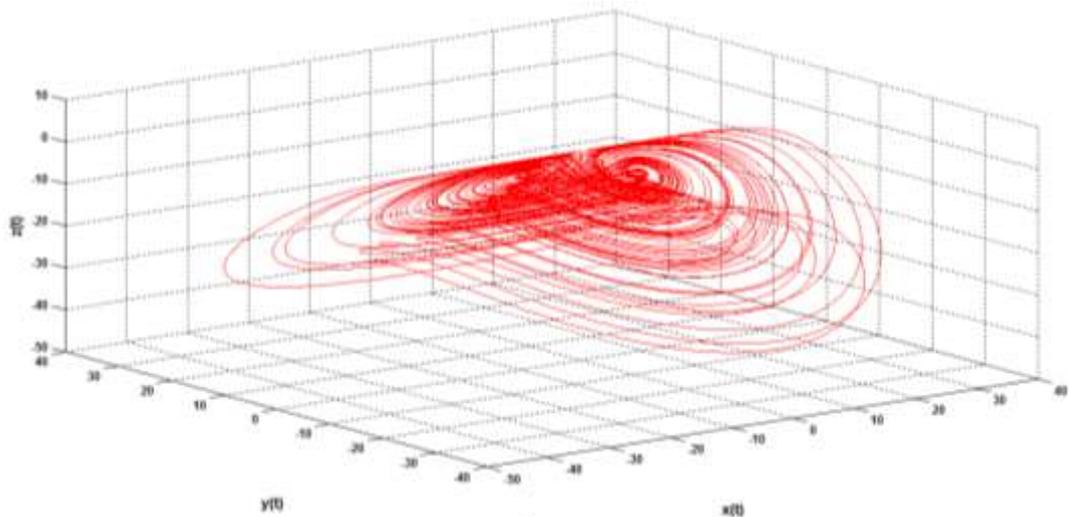


Figure 3.2 L'attracteur chaotique de $L\ddot{u}$ en 3D pour $a = -10$, $b = -4$ et $c = 0$. Pour les conditions initiales

$$(x(0), y(0), z(0)) = (3, -4, 2)$$

3.3. Etude par simulation de la synchronisation complète entre deux systèmes chaotiques identiques de Lü

Maintenant, notre objectif est de faire une étude par simulations de la synchronisation pour deux systèmes chaotiques identiques de la forme (1) basé sur la méthode de stabilité de Lyapunov.

Considérons les systèmes 3D chaotiques de $L\ddot{u}$ (1) et (2) : le premier est pris comme un système maître et le deuxième comme un système esclave respectivement.

$$\begin{cases} \dot{x}_m = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x_m - y_m z_m + \gamma \\ \dot{y}_m = \alpha y_m + x_m z_m \\ \dot{z}_m = \beta z_m + x_m y_m \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_e = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x_e - y_e z_e + \gamma + u_1 \\ \dot{y}_e = \alpha y_e + x_e z_e + u_2 \\ \dot{z}_e = \beta z_e + x_e y_e + u_3 \end{cases} \quad (3.6)$$

Où $(x_m; y_m; z_m)^T$, $(x_e; y_e; z_e)^T$ sont les vecteurs des états du système maître et du système esclave, respectivement, α, β et γ sont des constantes réelles présentant les paramètres du système de Lü et $(u_1; u_2; u_3)^T$ est le vecteur des commandes non linéaires de synchronisation qui seront déterminés ultérieurement.

Le vecteur des erreurs de synchronisation complète $(e_1; e_2; e_3)^T$ sera défini comme

$$\begin{cases} e_{c1} = x_e - x_m \\ e_{c2} = y_e - y_m \\ e_{c3} = z_e - z_m \end{cases} \quad (3.7)$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} z_m e_{c1} + x_e e_{c3} = -x_m z_m + x_e z_e \\ y_m e_{c1} + x_s e_{c2} = -x_m y_m + x_e y_e \\ -y_e e_{c3} - z_m e_{c2} = y_m z_m - y_e z_e \end{cases} \quad (3.8)$$

Par une simple dérivation de (3.7) et par une soustraction de (3.5) de (3.6), nous obtenons la dynamique du système des erreurs suivant

$$\begin{cases} \dot{e}_{c1} = -r e_{c1} - x_e e_{c3} + z_m e_{c2} + u_1 \\ \dot{e}_{c2} = \alpha e_{c2} + z_m e_{c1} + x_s e_{c3} + u_2 \\ \dot{e}_{c3} = \beta e_{c3} + y_m e_{c1} + x_s e_{c2} + u_3 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\text{Avec } r = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

Pour les deux systèmes chaotiques identiques sans contrôle ($u_i = 0$), si les conditions initiales des états du système maître et du système esclave diffèrent $(x_m(0), y_m(0), z_m(0)) \neq x_e(0), y_e(0), z_e(0)$, les trajectoires des deux systèmes identiques se séparent rapidement et deviennent sans importance. Cependant, pour les deux systèmes chaotiques commandés contrôlés), les deux systèmes se synchronisent quelque soient les conditions initiales avec le schéma de commande approprié. Pour ce faire, nous proposons la loi de commande suivante pour le système esclave:

$$\begin{cases} u_1 = (r - 1)e_{c1} + e_{c2}e_{c3} \\ u_2 = -(\alpha + 1)e_{c2} - 2x_s e_{c3} \\ u_3 = -(\beta + 1)e_{c3} \end{cases} \quad (3.10)$$

Après on a le théorème suivant

Théorème 3.1 les deux systèmes chaotiques (3.5) et (3.6) tendent vers la synchronisation complète pour n'importe quelles conditions initiales

$(x_m(0), y_m(0), z_m(0))$ et $(x_e(0), y_e(0), z_e(0))$ sous la loi de commande (3.10)

Démonstration. 3.1 le système d'erreurs peut être écrit comme

$$\begin{cases} \dot{e}_{1c} = -e_{c1} - y_e e_{c3} - z_m e_{c2} + e_{c2} e_{c3} \\ \dot{e}_{2c} = -e_{c2} + z_m e_{c1} - x_s e_{c3} \\ \dot{e}_{3c} = -e_{c3} + y_m e_{c1} + x_s e_{c2} \end{cases} \quad (3.11)$$

Construisons la fonction Lyapunov candidate de la forme

$$V(e_c(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 e_{ic}^2(t) \quad (3.12)$$

On obtient la dérivée de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système (3.11)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{e}_{c1} e_{c1} + \dot{e}_{c2} e_{c2} + \dot{e}_{c3} e_{c3} \\ &= (-re_{c1} - y_e e_{c3} + z_m e_{c2} + u_1) e_{c1} + (\alpha e_{c2} + z_m e_{c1} + x_s e_{c3} + u_2) e_{c2} + (\beta e_{c3} + \\ & y_m e_{c1} + x_s e_{c2} + u_3) e_{c3} \\ &= -re_1^2 + \alpha e_2^2 + \beta e_3^2 - y_e e_3 e_1 + 2x_s e_3 e_2 + y_m e_1 e_3 + e_1 u_1 + e_2 u_2 + e_3 u_3 \\ &= -re_{c1}^2 + \alpha e_{c2}^2 + \beta e_{c3}^2 - e_{c1} e_{c2} e_{c3} + 2x_s e_{c3} e_{c2} + e_{c1} u_1 + e_{c2} u_2 + e_{c3} u_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

En substituant le système (3.10) dans l'équation (3.13) on obtient

$$\frac{dV}{dt} = -e_{c1}^2 - e_{c2}^2 - e_{c3}^2 < 0 \quad (3.14)$$

En se basant sur la théorie de stabilité de Lyapunov ; on peut affirmer que la solution du système des erreurs (3.11) est asymptotiquement globalement stable et les systèmes (3.5) et (3.6) sont globalement complètement synchronisés

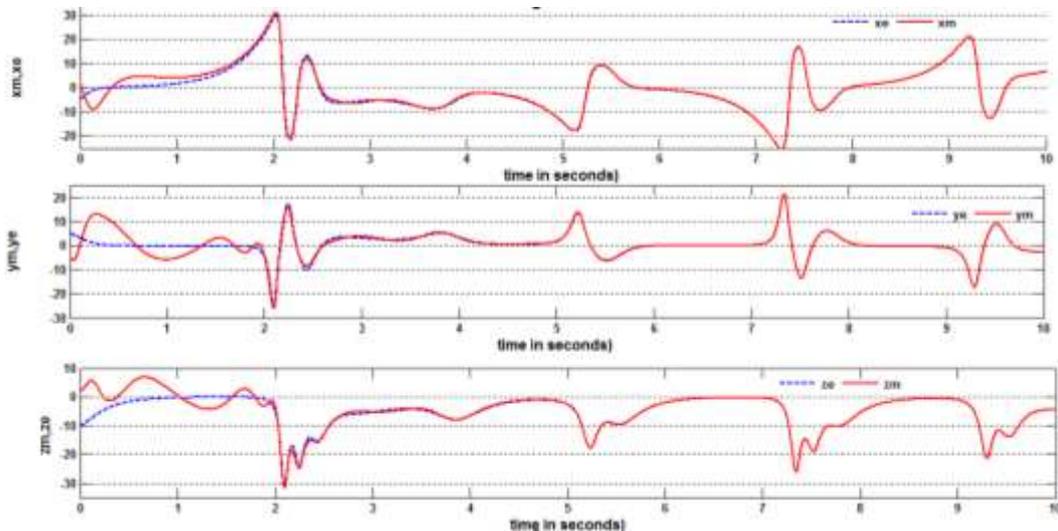
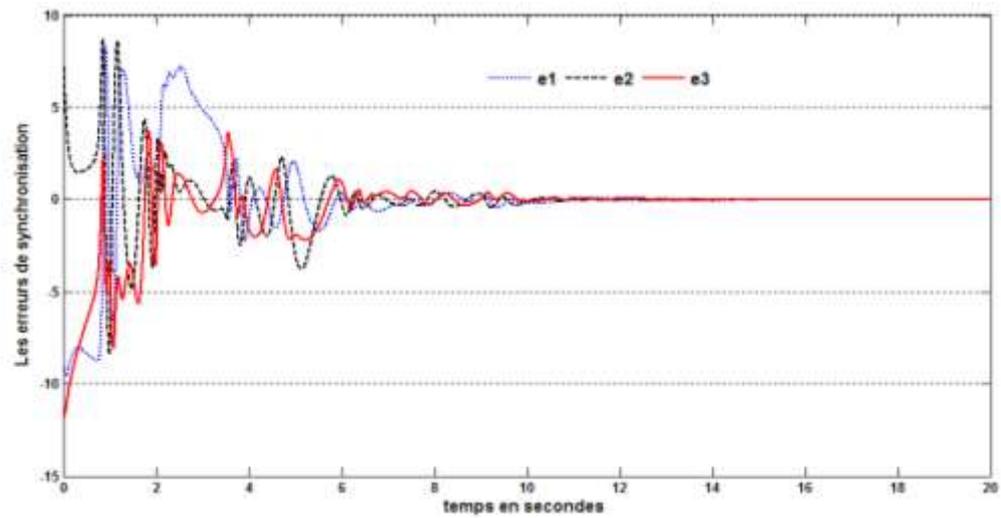
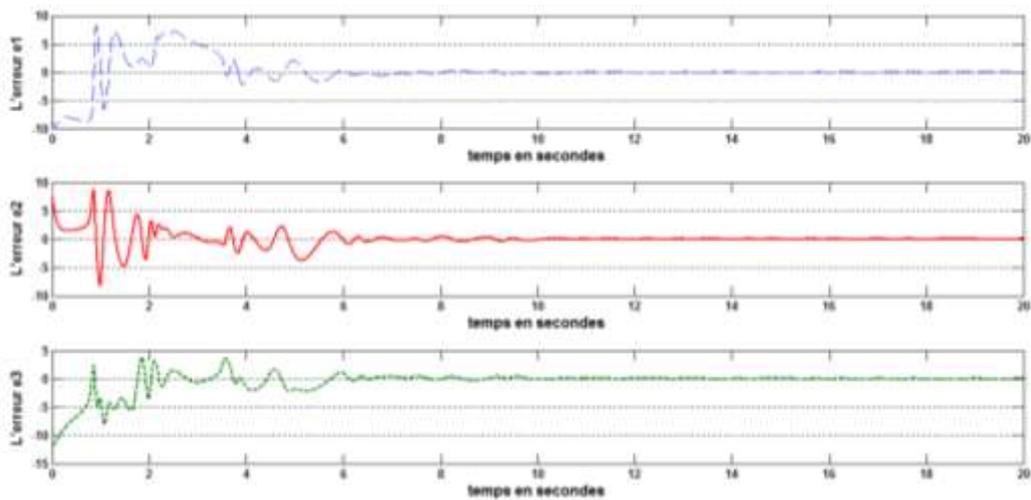


Figure .3.3 évolution temporelle des états du système maitre ($x_m ; y_m , z_m$) et du système esclave($x_e ; y_e , z_e$) commandé par une synchronisation complète pour différentes condition initiales



(a)



(b)

Figure 3.4 L'évolution temporelle des erreurs de synchronisation e_1, e_2 et e_3 :

(a) dans un seul repère, (b) sur trois repères

3.4. Etude par simulation de l'anti synchronisation entre deux systèmes identiques de \ddot{u} .

Dans cette section, nous discutons du comportement de l'anti-synchronisation entre les deux systèmes identiques (3.2) et (3.3) de $L\ddot{u}$. Nous définissons les états des erreurs pour l'anti-synchronisation comme :

$$\begin{cases} e_{a1} = x_e + x_m \\ e_{a2} = y_e + y_m \\ e_{a3} = z_e + z_m \end{cases} \quad (3.15)$$

Le problème de la synchronisation est de déterminer les fonctions de commande u_i ; $i = 1; 2; 3$; qui stabilisent les erreurs de synchronisation (3.15); puis le but de la synchronisation est de faire $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0$, $i = 1; 2; 3$ ou $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne

Le système des erreurs dynamiques entre le système maître et le système esclave peut être obtenu par la sommation des systèmes (3.5) et (3.6) pour donner :

$$\begin{cases} \dot{e}_{a1} = -re_{a1} - y_e z_e - y_m z_m + u_1 \\ \dot{e}_{a2} = \alpha e_{a2} + x_e z_e + x_m z_m + u_2 \\ \dot{e}_{a3} = \beta e_{a3} + x_e y_e + x_m y_m + u_3 \end{cases} \quad (3.16)$$

Nous proposons les lois de commande suivantes pour le système esclave:

$$\begin{cases} u_1 = (r - 1)e_1 + y_e z_e + y_m z_m \\ u_2 = -(\alpha + 1)e_2 - x_e z_e - x_m z_m \\ u_3 = -(\beta + 1)e_3 - x_e y_e - x_m y_m \end{cases} \quad (3.17)$$

Après on a le théorème suivant

Théorème .3.2 les deux systèmes chaotiques (3.5) et (3.6) tendent vers l'anti synchronisation pour n'importe quelles conditions initiales

$(x_m(0), y_m(0), z_m(0))$ et $(x_e(0), y_e(0), z_e(0))$ sous la loi de commande (3.17)

Démonstration. 2 le système d'erreurs peut être écrit comme

$$\begin{cases} \dot{e}_{1a} = -e_{a1} - y_e e_{a3} - z_m e_{a2} + e_{a2} e_{a3} \\ \dot{e}_{2a} = -e_{a2} + z_m e_{a1} - x_s e_{a3} \\ \dot{e}_{3a} = -e_{a3} + y_m e_{a1} + x_s e_{a2} \end{cases} \quad (3.18)$$

Construisons la fonction Lyapunov candidate de la forme

$$V(e_a(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 e_{ia}^2(t) \quad (3.19)$$

On obtient la dérivée de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système

(3.18)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{e}_{a1} e_{a2} + \dot{e}_{a2} e_{a2} + \dot{e}_{a3} e_{a3} \\ &= (-re_1 - y_e z_e - y_m z_m + u_1) e_{a1} + (\alpha e_2 + x_e z_e + x_m z_m + u_2) e_{a2} + (\beta e_3 + x_e y_e + x_m y_m + u_3) e_{a3} \\ &= -re_{a1}^2 + \alpha e_{a2}^2 + \beta e_{a3}^2 - y_e z_e e_{a1} - y_m z_m e_{a1} + x_e z_e e_{a2} + x_m z_m e_{a2} + y_e x_e e_{a3} + x_m y_m e_{a3} + \\ &e_{a1} u_1 + e_{a2} u_2 + e_{a3} u_3 \\ &= -re_{a1}^2 + \alpha e_{a2}^2 + \beta e_{a3}^2 - e_{a1} e_{a2} e_{a3} + 2x_s e_{a3} e_{a2} + e_{a1} u_1 + e_{a2} u_2 + e_{a3} u_3 \end{aligned} \quad (3.20)$$

En substituant le système (3.17) dans l'équation (3.20) on obtient

$$\frac{dV}{dt} = -e_{1a}^2 - e_{2a}^2 - e_{3a}^2 < 0 \quad (3.21)$$

En se basant sur la théorie de stabilité de Lyapunov ; on peut affirmer que la solution du système d'erreurs (3.18) est asymptotiquement globalement stable et les systèmes (3.5) et (3.6) sont asymptotiquement globalement anti synchronisés.

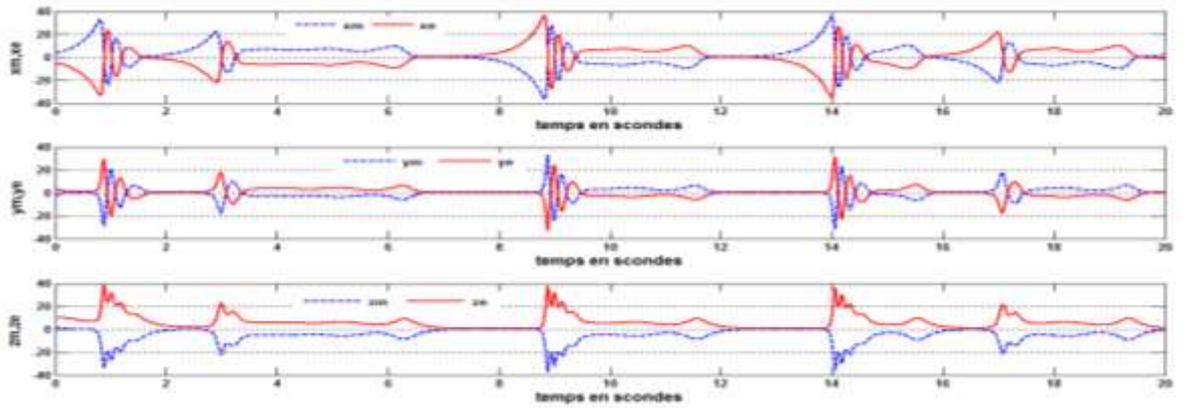
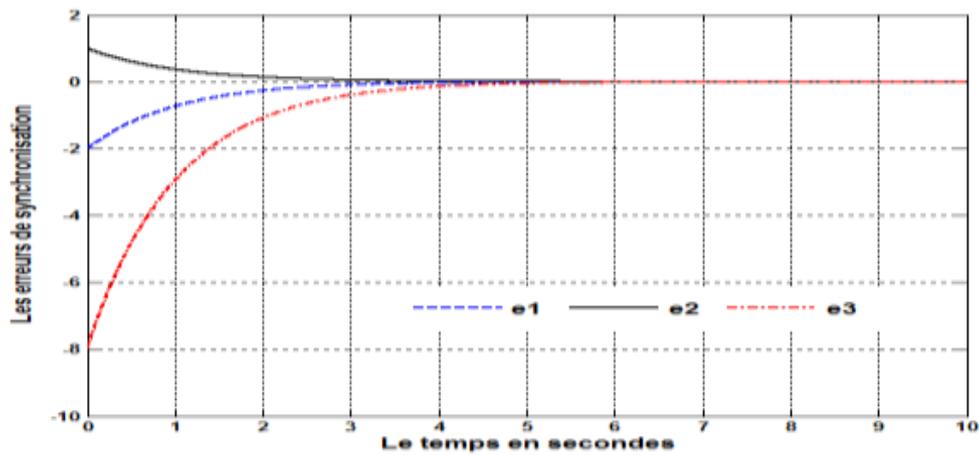
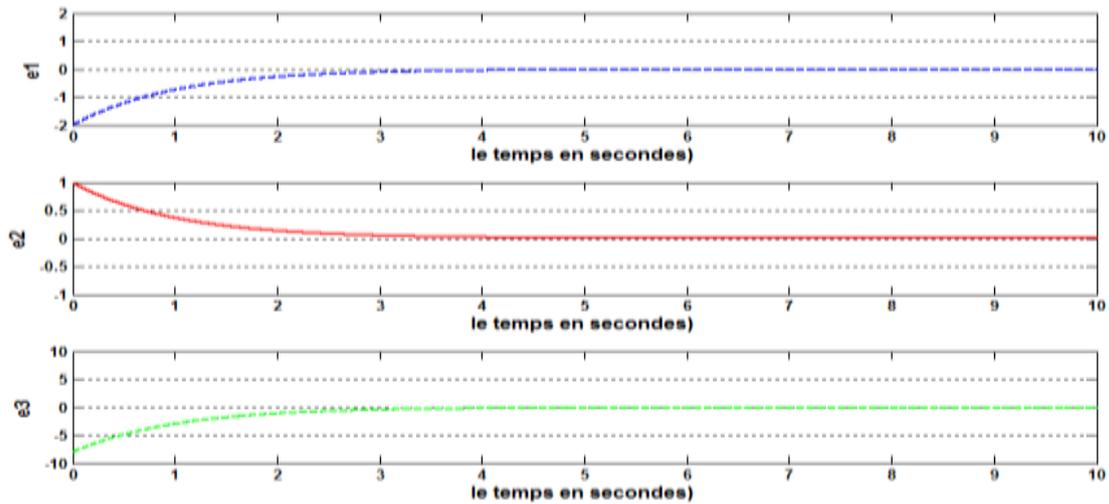


Figure 3.5 évolution temporelle des états du système maître ($x_m ; y_m , z_m$) et du système esclave ($x_e ; y_e , z_e$) commandé par une anti synchronisation pour différentes conditions initiales



(a)



(b)

Figure 3.6 L'évolution temporelle des erreurs de synchronisation e_1, e_2 et e_3

3.5. Etude par simulation de la synchronisation hybride entre deux systèmes identiques de $L\ddot{u}$

Dans cette section, nous discutons du comportement de la synchronisation hybride entre les deux systèmes identiques (3.5) et (3.6) de $L\ddot{u}$.

Pour le nouveau schéma de synchronisation étudié, qui présente une synchronisation complète entre les états (y_e, y_m) et une anti synchronisation pour les états (x_e, x_m) et (z_e, z_m) d'où la nomination hybride, Les erreurs de synchronisation sont données comme suit :

$$\begin{cases} e_{h1} = x_e + x_m \\ e_{h2} = y_e - y_m \\ e_{h3} = z_e + z_m \end{cases} \quad (3.22)$$

On peut facilement déduire que

$$\begin{cases} y_m e_{h1} + x_e e_{h2} = x_e y_e + y_m x_m \\ z_e e_{h1} - x_m e_{h3} = z_e x_e - x_m z_m \\ z_m e_{h2} - y_e e_{h3} = -y_e z_e - z_m y_m \end{cases} \quad (3.23)$$

La dynamique des erreurs est facile à obtenir

$$\begin{cases} \dot{e}_{h1} = -r e_{h1} - y_e z_e - y_m z_m + u_1 \\ \dot{e}_{h2} = \alpha e_{h2} + x_e z_e + x_m z_m + u_2 \\ \dot{e}_{h3} = \beta e_{h3} + x_e y_e + x_m y_m + u_3 \end{cases} \quad (3.24)$$

Le système (3.24) peut être écrit

$$\begin{cases} \dot{e}_{h1} = -r e_1 + z_m e_2 - y_e e_3 + u_1 \\ \dot{e}_{h2} = \alpha e_2 + z_e e_1 - x_m e_3 + u_2 \\ \dot{e}_{h3} = \beta e_3 + y_m e_1 + x_e e_2 + u_3 \end{cases} \quad (3.25)$$

Nous proposons la loi de commande suivante pour le système esclave:

$$\begin{cases} u_1 = (r - 1)e_{h1} - z_m e_{h2} + y_e e_{h3} \\ u_2 = -(\alpha + 1)e_{h2} - z_e e_{h1} + x_m e_{h3} \\ u_3 = -(\beta + 1)e_{h3} - y_m e_{h1} - x_e e_{h2} \end{cases} \quad (3.26)$$

Après on a le théorème suivant

Théorème .3.3 les deux systèmes chaotiques (3.5) et (3.6) tendent vers une synchronisation hybride pour n'importe quelles conditions initiales

$(x_m(0), y_m(0), z_m(0))$ et $(x_e(0), y_e(0), z_e(0))$ sous la loi de commande (3.26)

Démonstration. 3.3 Le système d'erreurs peut être écrit comme

$$\begin{cases} \dot{e}_{h1} = -r e_{h1} + z_m e_{h2} - y_e e_{h3} + u_1 \\ \dot{e}_{h2} = \alpha e_{h2} + z_e e_{h1} - x_m e_{h3} + u_2 \\ \dot{e}_{h3} = \beta e_{h3} + y_m e_{h1} + x_e e_{h2} + u_3 \end{cases} \quad (3.27)$$

Construisons la fonction Lyapunov candidate de la forme

$$V(e_h(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 e_{ih}^2(t) \quad (3.28)$$

On obtient la dérivée de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système (3.24)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{e}_{h1}e_{h1} + \dot{e}_{h2}e_{h2} + \dot{e}_{h3}e_{h3} \\ &= (-re_{h1} - y_e e_{h3} + z_m e_{h2} + u_1)e_{h1} + (\alpha e_{h2} + z_e e_{h1} - x_m e_{h3} + u_2)e_{h2} + (\beta e_{h3} + y_m e_{h1} + x_e e_{h2} + \\ &u_3)e_{h3} \\ &= -r e_{h1}^2 + \alpha e_{h2}^2 + \beta e_{h3}^2 - y_e e_{h3} e_{h1} + z_m e_{h2} e_{h1} + z_e e_{h1} e_{h2} - x_m e_{h3} e_{h2} + y_m e_{h1} e_{h3} + x_e e_{h2} e_{h3} + \\ &e_{h1} \left((r-1)e_{h1} - z_m e_{h2} + y_e e_{h3} \right) + e_{h2} \left(-(\alpha+1)e_{h2} - z_e e_{h1} + x_m e_{h3} \right) + e_{h3} \left(-(\beta+ \right. \\ &\left. 1)e_{h3} - y_m e_{h1} - x_e e_{h2} \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

En substituant le système (3.26) dans l'équation (3.29) on obtient

$$\frac{dV}{dt} = -e_{1h}^2 - e_{2h}^2 - e_{3h}^2 < 0 \quad (3.30)$$

En se basant sur la théorie de stabilité de Lyapunov ; on peut affirmer que la solution du système d'erreurs (3.25) est asymptotiquement globalement stable et les systèmes (3.5) et (3.6) sont globalement hybride synchronisés.

Le problème de synchronisation est de déterminer les contrôleurs u_i ; $i = 1; 2; 3$; qui stabilisent les erreurs de synchronisation (3.25) ; puis le but de la synchronisation est de faire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0, \quad i = 1; 2; 3 \text{ ou } \|\cdot\| \text{ est la norme euclidienne}$$

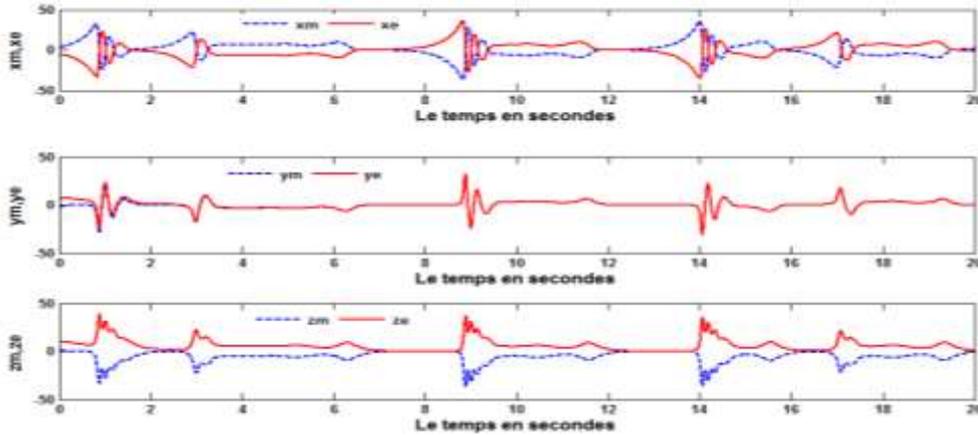


Figure 3.7 évolution temporelle des états du système maître (x_m ; y_m , z_m) et du système esclave (x_e ; y_e , z_e) commandé par une synchronisation hybride pour différentes condition initiales

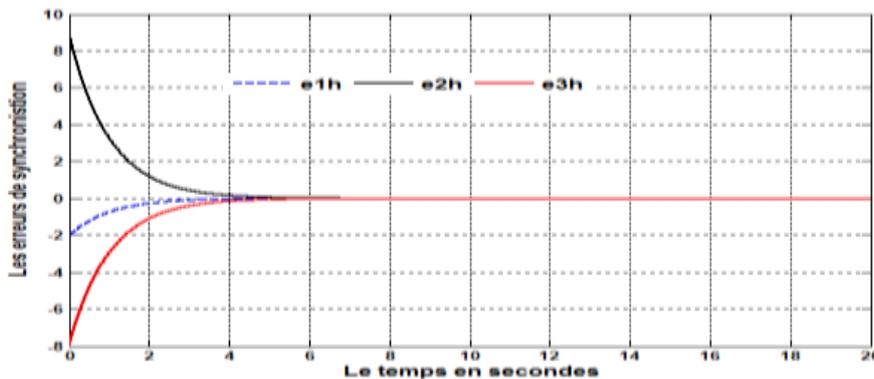


Figure 3.8 L'évolution temporelle des erreurs de synchronisation e_{1h} , e_{2h} et e_{3h}

3.6.Conclusion

Les simulation des différents schémas de synchronisation , nous ont permis de dessiner sur des figures les évolutions temporelles des états des systèmes ainsi que des erreurs de synchronisation pour les trois types de synchronisation à savoir : la synchronisation complète , l'anti synchronisation et la synchronisation hybride et cela après la démonstration de la stabilité des erreurs de synchronisation en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov .

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion générale

La théorie du chaos propose pour l'univers un modèle déterministe tout en laissant un espace au hasard, et une dimension à l'imprévisible. Le travail développé dans le cadre de ce mémoire, a eu pour objectif une étude comparative de quelques types de synchronisation de systèmes chaotiques. Nous avons commencé par présenter les systèmes dynamiques non linéaires à temps continus, puis on est allé exposer les différentes méthodes de contrôle et les différents types de synchronisation.

Pour atteindre nos objectifs, nous nous sommes appuyés sur trois méthodes classiques de synchronisation à savoir : la synchronisation complète, l'anti synchronisation et la synchronisation hybride qui existent dans la littérature et nous avons proposé des simulations sous MATLAB basées sur la méthode d'Euler pour la résolution des équations différentielles. Nous avons pu voir les évolutions temporelles des états des systèmes ainsi que les erreurs de synchronisation pour les trois types de synchronisation.

- [1] Fujisaka, H. & Yamada, T., 1983. Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems. *Progress of Theoretical Physics*, 69(1), pp.32–47.
- [2] Yamada, T. & Fujisaka, H., 1983. Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems. II: The Mapping Approach. *Progress of Theoretical Physics*, 70(5), pp.1240–1248
- [3] Pecora, L.M. & Carroll, T.L., 1990. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64(8), pp.821–824.
- [4] Pecora, L. & Carroll, T., 1992. Synchronized chaotic signals and systems. [Proceedings] ICASSP-92: 1992 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing.
- [5] Alligood, K.T. et al., 1997. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. *Physics Today*, 50(11), pp.67–68.
- [6] Ott, E., 2002. Chaos in Dynamical Systems. Available at: <http://dx.doi.org/10.1017/cbo9780511803260>.
- [7] Li, C. & Yan, J., 2006. Generalized projective synchronization of chaos: The cascade synchronization approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 30(1), pp.140–146.
- [8] Ge, Z.-M. & Chen, C.-C., 2004. Phase synchronization of coupled chaotic multiple time scales systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 20(3), pp.639–647.
- [9] Jia, Q., 2007. Projective synchronization of a new hyperchaotic Lorenz system. *Physics Letters A*, 370(1), pp.40–45. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2007.05.028>.
- [10] Yan, J. & Li, C., 2006. Generalized projective synchronization for the chaotic Lorenz system and the chaotic Chen system. *Journal of Shanghai University (English Edition)*, 10(4), pp.299–304.
- [11] Li, P. & Cao, J., 2007. Stabilisation and synchronisation of chaotic systems via hybrid control. *IET Control Theory & Applications*, 1(3), pp.795–801.
- [12] Vaidyanathan, S. & Pakiriswamy, S., 2012. Generalized Projective Synchronization of Double-Scroll Chaotic Systems Using Active Feedback Control. *Advances in Computer Science and Information Technology. Networks and Communications*, pp.111–118.
- [13] Pakiriswamy, S. & Vaidyanathan, S., 2012. Generalized Projective Synchronization of Three-Scroll Chaotic Systems via Active Control. *Advances in Computer Science and Information Technology. Computer Science and Engineering*, pp.146–155.
- [14] Vaidyanathan, S. & Sampath, S., 2012. Anti-synchronization of four-wing chaotic systems via sliding mode control. *International Journal of Automation and Computing*, 9(3), pp.274–279.
- [15] Park, J.H., 2008. Adaptive control for modified projective synchronization of a four-dimensional chaotic system with uncertain parameters. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 213(1), pp.288-293.
- [16] Lakshmanan, M. & Murali, K., 1996. Chaos in Nonlinear Oscillators. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A.
- [17] Lakshmanan, M. & Murali, K., 1996. Chaos in Nonlinear Oscillators: Controlling and Synchronization. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A.

- [18] Blasius, B., Huppert, A. & Stone, L., 1999. Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems. *Nature*, 399(6734), pp.354–359. Available at: <http://dx.doi.org/10.1038/20676>.
- [19] Ott, E., Grebogi, C. and Yorke, J.A., 1990. Controlling chaos. *Physical review letters*, 64(11), p.1196.
- [20] Yau, H.T., 2004. Design of adaptive sliding mode controller for chaos synchronization with uncertainties. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(2), pp.341-347.
- [21] Rasappan, S. & Vaidyanathan, S., 2012. Hybrid synchronization of n–scroll Chua and Lur’e chaotic systems via backstepping control with novel feedback. *Archives of Control Sciences*, 22(3).
- [22] Anstett, F., 2006. Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement: synthèse et cryptanalyse (Doctoral dissertation, Université Henri Poincaré-Nancy I).
- [23] Hammami, S., 2009. Sur la stabilisation de systèmes dynamiques continus non linéaires exploitant les matrices de formes en flèche: application à la synchronisation de systèmes chaotiques (Doctoral dissertation, Ecole Centrale de Lille).
- [24] Chua, L.O., 1993. A universal circuit for studying and generating chaos-part II: Strange attractors. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 40(10), pp.182-186. Lorenz, E.N., 1963. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2), pp.130-141.
- [25] Kennedy, M.P., 1993. Three steps to chaos. II. A Chua's circuit primer. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40(10), pp.657-674.
- [26] Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J. and Kurths, J., 2003. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences* (Vol. 12). Cambridge university press.
- [27] Gouesbet, G. and Meunier-Guttin-Cluzel, S., 2003. Dynamique non linéaire, chaos et effets thermiques. *Techniques de l'ingénieur. Génie énergétique*, 1(BE8110), pp.BE8110-1.
- [28] González-Miranda, J.M., 2004. Synchronization and Control of Chaos - An Introduction for Scientists and Engineers.
- [29] Sprott, J.C., 1993. *Strange attractors: Creating patterns in chaos*. New York: M&T Books.
- [30] Bai, E.W. and Lonngren, K.E., 1997. Synchronization of two Lorenz systems using active control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 8(1), pp.51-58.
- [31] Lü, J., Chen, G. and Cheng, D., 2004. A new chaotic system and beyond: the generalized Lorenz-like system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(05), pp.1507-1537
- [32] Rossler, O.E., 1979. An equation for hyperchaos. *Physics Letters A*, 71(2-3), pp.155-157.
- [33] Xiao-Qun, W. and Jun-An, L., 2003. Parameter identification and backstepping control of uncertain Lü system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 18(4), pp.721-729.
- [34] Rasappan, S., 2015. Hybrid synchronization of hyperchaotic n-scroll Chua circuit using adaptive backstepping control. *Cogent Engineering*, 2(1), p.1009273.

- [35] Huang, L.L., Shi, S.S. and Zhang, J., 2015. Dislocation synchronization of the different complex value chaotic systems based on single adaptive sliding mode controller. *Mathematical Problems in Engineering*.
- [36] Konishi, K., Hirai, M. and Kokame, H., 1998. Sliding mode control for a class of chaotic systems. *Physics Letters A*, 245(6), pp.511-517.
- [37] August, E. and Barahona, M., 2011. Obtaining certificates for complete synchronisation of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(8), pp.795-803.
- [38] Sundarapandian, V. and Karthikeyan, R., 2011. Anti-synchronization of Lü and Pan chaotic systems by adaptive nonlinear control. *Eur J Sci Res*, 64(1), pp.94-106.
- [39] Rosenblum, M.G., Pikovsky, A.S. and Kurths, J., 1997. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 78(22), p.4193.
- [40] Jia, Q., 2007. Projective synchronization of a new hyperchaotic Lorenz system. *Physics Letters A*, 370(1), pp.40-45.
- [41] Zhou, B., Qi, L. and Li, X., 2009, December. FSHP Synchronization in Rikitake Chaotic Flow and Application to Secure Communication. In *Computational Intelligence and Software Engineering, 2009. CiSE 2009. International Conference on* (pp. 1-4). IEEE.
- [42] Wang, X., Ouannas, A., Pham, V.T. and Abdolmohammadi, H.R., 2018. A fractional-order form of a system with stable equilibria and its synchronization. *Advances in Difference Equations*, 2018(1), p.20.
- [43] Ouannas, A., Azar, A. T., Ziar, T., & Radwan, A. G. (2017). Generalized Synchronization of Different Dimensional Integer-Order and Fractional Order Chaotic Systems. In *Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems* (pp. 671-697). Springer International Publishing.
- [44] Ouannas, A. and Odibat, Z., 2016. On inverse generalized synchronization of continuous chaotic dynamical systems. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2(1), pp.1-11.
- [45] Hu, M. and Xu, Z., 2008. A general scheme for QS synchronization of chaotic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(4), pp.1091-1099.
- [46] Ortega, J.M., 1973. Stability of difference equations and convergence of iterative processes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10(2), pp.268-282.
- [47] De Larminat, P., 1996. *Automatique: commande des systèmes linéaires*. Paris: Hermes.

سُبْحَانَكَ اللَّهُمَّ رَبَّنَا اللَّهُمَّ

ملخص

الغرض من هذا العمل في سياق مذكرة الماستير هذه هو تقديم دراسة مقارنة لبعض أنواع التزامن للأنظمة الفوضوية المستمرة بدأنا في الفصل الأول بدراسة للأنظمة الديناميكية مع التركيز على خصائص الأنظمة الديناميكية الفوضوية و ذلك بإعطاء تعريفات ومفاهيم عامة عن فضاء الأطوار ، نقط التوازن ، دورية وشبه دورية حلول الأنظمة الديناميكية و الطريق إلى الفوضى مع التركيز على الحساسية لتغيرات الشروط الابتدائية ، الجاذب الغريبة وأسس لياپونوف (Lyapunov) لقياس الفوضى. في الأخير قدمنا نموذجين لنظامين شهيرين مستمرين هما نظامي لورنتز Lorenz (و روسلار (Rossler) .

الفصل الثاني يقدم مختلف طرق التحكم و أساليب التزامنة المعروفة وكذا عديد أنواع التزامنة و لتبسيط البعد الرياضي للمسألة قمنا بعرض نظام لو \ddot{u} الثلاثي الأبعاد و المستمر لوضعه مطية لتقديم أنواع التزامنة المقترحة :

la synchronisation complète, l'anti-synchronisation la synchronisation décalée, la synchronisation FSHP, la synchronisation généralisée, et la synchronisation Q-S

في الفصل الثالث ، على أساس طريقة أويلر (Euler)، أعدنا اكتشاف الخاصية المهمة للفوضى وهي: الحساسية للشروط الابتدائية ، من خلال محاكاة نظام $L\ddot{u}$ بتغيير طفيف لشروطه الابتدائية ثم قمنا بدراسة بالمحاكاة لزامنة نظامين متماثلين ل $L\ddot{u}$ الأول سيد و الثاني عبد من خلال ثلاثة أنواع مزامنة هي :

synchronisation complète, la synchronisation hybride et la l'anti-synchronisation

المحاكاة مكنتنا من رسم التطور الزمني لحالات الأنظمة و كذا أخطاء التزامنة مع برهان استقرار أنظمة أخطاء المزامنة باستخدام نظرية الاستقرار لليابونوف.

الكلمات المفتاحية: الفوضى ، أنواع المزامنة ، الجاذب، $L\ddot{u}$ ، لياپونوف ، المحاكاة.

Abstract

The purpose of the work in this Master's dissertation is to provide a comparative study of some types of synchronization of chaotic continuous systems, we started in the first chapter a study of dynamical systems with emphasis on the characteristics of the dynamical chaotic systems by giving definitions of general concepts such as: phase space, equilibrium points, periodic and quasi-periodic solutions of dynamical systems and the path to chaos with emphasis on extreme sensitivity to changes in the initial conditions, strange attractors and exponents of Liapunov to measure chaos. Finally, we presented two examples of popular systems, the Lorentz systems and the Rossler system.

In the second chapter, we propose various methods of control and synchronization known, as well as many types of synchronization and to simplify the mathematical dimension of the problem, we have set up the continuous three-dimensional system of $L\ddot{u}$ to present the types of synchronization proposed: the synchronization, anti-synchronization, synchronized timing synchronization, FSHP synchronization, generalized synchronization, and QS synchronization

In chapter III, and based on the Euler method, we rediscover the important property of chaos: the sensitivity of the initial conditions by simulating the $L\ddot{u}$ system with minimal change in the initial conditions, then we studied by simulation the synchronization of two identical systems of $L\ddot{u}$ the first taken as master and the second as slave through three types of synchronization which are: full synchronization, anti-synchronization and hybrid synchronization. This simulation allowed us to draw in figures the temporal evolutions of the system states as well as the synchronization errors after the demonstration of the stability of the synchronization errors systems by using the stability theory of Lyapunov .

Keywords: chaos, synchronization types, attractors, $L\ddot{u}$, Lyapunov, simulation.

Résumé

Le but du travail dans le cadre de ce mémoire de master est de fournir une étude comparative de certains types de synchronisation de systèmes continus chaotiques, nous avons commencé dans le premier chapitre une étude des systèmes dynamiques en mettant l'accent sur les caractéristiques des systèmes dynamiques chaotiques en donnant des définitions des concepts généraux comme : l'espace des phases, les points d'équilibre, des solutions périodiques et quasi périodiques des systèmes dynamiques et le chemin vers le chaos ,la sensibilité extrême aux changements dans les conditions initiales , les attracteurs étranges et les exposants de Lyapunov pour mesurer le chaos. Enfin, nous avons présenté deux exemples de deux systèmes populaires : le système de Lorentz et le système de Rossler .

Le chapitre II propose diverses méthodes de contrôle et de synchronisation connues, ainsi que de nombreux types de synchronisation et pour simplifier la dimension mathématique du problème, nous avons mis en place le système tridimensionnel continu de $L\ddot{u}$ pour présenter les types de synchronisation proposées: la synchronisation complète, l'anti-synchronisation , la synchronisation décalée la synchronisation FSHP, la synchronisation inverse FSHP , la synchronisation généralisée, la synchronisation inverse généralisée et la synchronisation QS .

Dans le chapitre III, et en se basant sur la méthode d'Euler, on redécouvre la propriété importante du chaos: la sensibilité aux conditions initiales , en simulant le système de $L\ddot{u}$ par de minimes changement dans les conditions initiales, puis nous avons étudié par simulation la synchronisation de deux systèmes identiques de $L\ddot{u}$ le premier pris comme maître et et le second comme esclave à travers trois types de synchronisation qui sont: la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation hybride .Cette simulation nous a permis de dessiner sur des figures les évolutions temporelles des états des systèmes ainsi que des erreurs de synchronisation après la démonstration de la stabilité des erreurs de synchronisation en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov.

Mots-clés: chaos, types de synchronisation, attracteurs, $L\ddot{u}$, Lyapunov, simulation.

Dédicaces

A Mes enfants : Ritej , Ali Nour El islem et Jed Elkarim

A Mon marie farouk qui a un grand plaisir pour terminer ce travail

A ma chère mère

A Mon grand frère amer et leur femmes et filles Malek et Maram.

A mes frères Hamza et djalel

A Mes sœurs Zahera et sara

A Mes amies et sœur Linda, Dalinda, Dhbia

Ama binôme charifa

Hafsa leila

Dédicace

A mon mari Med Saleh

A mon chère père

A mes frères : Ali ,Khalil, et Fares

A mes sœurs : Samia , Zahra

A mon frère Saleh et sa femme Anissa et sa fille Ritel

A mon chère petit frère Iyed .

A ma collègue Linda

A ma binôme Leila

Sahraoui cherifa

Remerciement

- ❖ En premier lieu, nous remercions Allah le Tout-Puissant pour nous avoir donné le potentiel d'apprendre les lois de notre univers et de les exploiter pour notre bien-être.
- ❖ nous remercions énormément *Dr T. ZIAR* maitre de conférences A au département des sciences de la matière à l'université Larbi Tébessi de Tébessa de nous avoir guidés et soutenus le long de ce travail avec beaucoup de patience et d'indulgence.
- ❖ Nous remercions **Mr. Chaouche yacine** maitre a conférence au département des sciences de la matière à l'université Larbi Tébessi de Tébessade nous avoir fait l'honneur de présider le jury de notre soutenance et également **Mr Mansour Med Elhaddi** maitre assistant au département des sciences de la matière à l'université Larbi Tébessi de Tébessa d'avoir accepter d'examiner notre travail.
- ❖ Un grand merci à toutes les personnes que nous avons consultées pour la compréhension et l'assimilation de ce travail
- ❖ Merci à nos amies et collègues pour leurs encouragements et spécialement à Hichem Belghith .
- ❖ Et enfin merci et pardon à tous ceux que nous ne pouvons citer qui nous ont aidés de près ou de loin.

Chérifa & Leila

Table des matieres	i
Liste des figures.....	IIIi
Introduction generale :	1
Chapitre I : Generalites sur les systemes dynamiques chaotiques.....	3
I.1 Introduction :	4
I.2 Quelques definitions:	4
I-2-1 Les systemes dynamiques	4
I-2-2 L'espace de phases	4
I.2.3 Le systeme dynamique chaotique:.....	6
I.3. Les systemes dynamiques chaotiques continus connus	7
I-3-1· Le systeme de Lorenz	7
I-4-2· Le systeme de Rossler.....	7
I-5 Conclusion	9
Chapitre II : Présentation de quelques methodes et types de synchronisation.	10
II.1 Introduction.....	11
II .2 Les methodes de synchronisation	11
II.2.1 La methode du controleur actif.....	11
II.2.2 La methode du backstepping	12
2.2.3 La methode du mode glissant.....	13
II-3 Quelques types de synchronisation :	14
II.3.1 Le systeme chaotique de lu	15
II-3-2 La présentation de la configuration maitre- esclave	15
II-3-3 La synchronisation complete	16
2-3-4 L'anti-synchronisation.....	16
2-3-5 La synchronisation lag.....	16
2.3-6 La synchronisation projective	17
2-3-7 La synchronisation FSHP	17
2-3-8 La synchronisation inverse FSHP	17
2-3-9 La synchronisation generalisée.....	18
2-3-10 La synchronisation inverse generalisée	18
2-3-11 La synchronization Q-S	18
II-4. Les méthodes d'étude de la stabilite des systemes dynamiques continus non lineaires ..	18
II.4.1 La méthode de lyapunov	19
II.5 Conclusion	19
chapitre III : Etude comparative de quelques types de synchronisation de systemes chaotiques.....	20
III.1 Introduction	21
III.2 Modélisation et simulations.....	21

III.2.1 La méthode utilisée	21
III.2.2 Les résultats des simulations	22
III.3. Etude par simulation de la synchronisation complète entre deux systèmes chaotiques identiques de Lü	23
III.4. Etude par simulation de l'anti synchronisation entre deux systèmes identiques de u	26
III.5. Etude par simulation de la synchronisation hybride entre deux systèmes identiques de Lü.....	29
III.6. Conclusion	31
Conclusion générale	33
Bibliographie.....	34

Liste des figures

Figure	Titre	Page
Fig. (1.1)	Attracteur de Lorenz (a)Attracteur 3 – D ,(b)(c)et (d)Attracteur 2	7
Fig. (1.2)	Attracteur de Rössler (a)Attracteur 3 – D ,(b)(c)et (d)Attracteur 2	8
Fig. (3.1)	Les évolutions temporelles des états x ; y et z pour différentes conditions initiales	23
Fig. (3.2)	L'attracteur chaotique de Lü en 3D pour $a = -10$, $b = -4$ et $c = 0$. Pour les conditions initiales $(x(0), y(0), z(0)) = (3, -4, 2)$	23
Fig. (3.3)	Les évolutions temporelles des états du système maître $(x_m ; y_m , z_m)$ et du système esclave $(x_e ; y_e , z_e)$ commandé par une synchronisation complète pour condition initiales	25
Fig. (3.4)	Les évolutions temporelles des états du système maître $(x_m ; y_m , z_m)$ et du système esclave $(x_e ; y_e , z_e)$ commandé par une synchronisation complète pour différentes condition initiales	26
Fig. (3.5)	L'évolution temporelle des erreurs de synchronisation e_{c1} , e_{c2} et e_{c3}	28
Fig. (3.6a,b)	Les évolutions temporelles des états du système maître $(x_m ; y_m , z_m)$ et du système esclave $(x_e ; y_e , z_e)$ commandé par une anti anti synchronisation pour différentes condition initiales	28
Fig. (3.7)	Les évolutions temporelles des états du système maître et du système esclave commandé par une synchronisation hybride pour différentes condition initiales	30
Fig. (3.8)	Les évolutions temporelles des erreurs de synchronisation e_{1h} , e_{2h} et e_{3h}	30

Introduction générale:

Le concept de la synchronisation des systèmes chaotiques a été présenté à la communauté scientifique la première fois par Yamada and Fujisaka (Fujisaka et Yamada (1983) [1,2]. suivi des travaux de Pecora et Carroll (Pecora et Carroll (1990)) . (Pecora and Carroll, (1991)) [3,4]. La synchronisation du chaos est une manière d'expliquer la sensible dépendance aux conditions initiales (Alligood *et al.* (1997) [5]. Edward Ott (2002) [6]. Il a été établi que la synchronisation de deux ou plusieurs systèmes chaotiques, montre la tendance de ces systèmes couplés ensemble à suivre étroitement le même mouvement. Le problème de la synchronisation est de designer un accouplement entre les deux systèmes à synchroniser pour rendre l'évaluation temporelle presque idéale. La sortie du système esclave suit asymptotiquement la sortie du système maître i.e la sortie du système maître contrôle la sortie du système esclave.

La synchronisation des systèmes chaotiques a été généralisée par la découverte de plusieurs types tels que la synchronisation généralisée (Li, C. & Yan (2006)) [7], la synchronisation de phase (Ge, Z.-M. & Chen, C.-C., 2004 , Jia, Q., 2007) [08-10], la synchronisation projective généralisée [11-13], et même l'anti synchronisation. Lorsque la synchronisation et anti synchronisation coexistent, en même temps, dans les systèmes chaotiques, Sundarapandian et Suresh (2012) [14].

Plusieurs schémas pour assurer le contrôle et la synchronisation des systèmes chaotiques ont été démontrés en se basant sur leurs applications potentielles dans divers domaines comme la conception des générateurs de chaos [15] , la communication sécurisée (Murali and Laksmanan) [16,17], les systèmes écologiques physico-chimiques (Blasius *et al.* (1999)), [18]. Jusqu'à présent, une variété d'approches impressionnantes ont été proposées pour la synchronisation des systèmes chaotiques comme la méthode de OGY (Ott (1990)) [19], la méthode de rétroaction à retard temporel (Park et Kwon (2003)) la méthode de commande de mode de glissement (Yau, H.T., 2004) [20], la méthode de contrôle actif et la conception du contrôle backstepping, Suresh et Sundarapandian (2012) [21].

Le présent mémoire est structuré en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on introduit quelques définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques pour introduire ensuite le phénomène du chaos dans ces systèmes enfin on présente deux exemples de systèmes chaotiques continus .

Dans le deuxième chapitre, on fait une présentation mathématique des différentes méthodes de synchronisation telle qu'elles sont exposées par les mathématicien , ainsi que les différents types de synchronisation types de synchronisation, spécialement ceux qui vont êtres simulés dans le troisième chapitre à savoir la synchronisation complète, l'anti Synchronisation et la synchronisation hybride

Le troisième et dernier chapitre de ce mémoire présente plusieurs simulations pou illustrer les différentes caractéristiques des schémas de synchronisation étudiés à savoir : la sensibilité aux conditions initiales pour le système chaotique de Lu, les évolutions temporelles des états du système maitre et du système esclave commandé (contrôlé) ainsi que les erreurs de synchronisation pour les trois modes de synchronisation étudié et enfin une conclusion générale.

CHAPITRE I :

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DYNAMIQUES CHAOTIQUES.

I.1 Introduction :

Le but de ce chapitre est de connaître les conditions nécessaires pour qu'un système ait un comportement chaotique. Nous partirons de quelques définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques pour introduire ensuite le phénomène du chaos dans ces systèmes ainsi que la possibilité de les synchroniser.

I.2 Quelques définitions:

I-2-1 Les systèmes dynamiques

Un système dynamique est défini par une loi d'évolution temporelle, généralement désignée par : la *dynamique du système*, qui caractérise l'évolution de l'état du système au cours du temps. La notion de déterminisme provient du fait que le système considéré est complètement caractérisé par son état initial et sa dynamique [22].

Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

- ✓ Systèmes dynamiques discrets,
- ✓ Systèmes dynamiques continus.

Dans notre étude on va s'intéresser uniquement au système dynamique continu décrit par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t) \quad (I.1)$$

Où $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ représente la dynamique du système, $x(t)$ est le vecteur des états du système et t représente le temps.

I-2-2 L'espace de phases

L'analyse de toutes sortes d'évolutions temporelles ; appelées systèmes dynamiques, permet l'étude du chaos. L'état d'un système dynamique est décrit par un certain nombre de quantités dépendantes du temps : $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Au lieu d'étudier séparément ces n variables, il est préférable de présenter le système par un point unique dans un espace à n dimensions : l'espace des phases. A partir d'un état initial $x(0)$ et après un régime transitoire, la trajectoire d'un système dynamique atteint une région limitée de l'espace des phases.

Cette représentation permet de distinguer un comportement chaotique d'un comportement purement aléatoire. Si le système dynamique est périodique les points vont former une courbe fermée, on parle de cycle ou d'orbite périodique. Un mouvement régulier correspond à un diagramme simple, un attracteur. Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard : aucune structure n'apparaît. Quand

le mouvement est chaotique, les paraissent à première vue aléatoires. Néanmoins si on observe le système suffisamment longtemps, on constate que les points dessinent une forme particulière, qui présente une structure feuilletée (fractale). A cause de cette géométrie particulière, ces attracteurs sont qualifiés d'étranges. Ils sont la signature du chaos. Ces comportements asymptotiques obtenus pour l'état $x(t)$ du système dynamique, quand $t \rightarrow \infty$ sont des caractéristiques des plus importantes à étudier pour tout système dynamique, parmi lesquels: [23,28]

- ✓ Les points fixes ou points d'équilibre
- ✓ Les solutions périodiques et quasi- périodiques
- ✓ La chaotité du système et les exposants de Lyapunov
- ✓ La bifurcation et les attracteurs étranges.

Définition 01 : Un point fixe ou point d'équilibre est une solution constante du système. Il est obtenu en résolvant le système d'équations :

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t) = 0 \quad (I.2)$$

Dans l'espace de phase, le point fixe se représente par un point. Sa valeur est déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi, pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibre. De même, ces points peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre-elles.

Définition 02 Solution périodique et quasi périodique

Le régime asymptotique permanent périodique correspond à une trajectoire dont les répliques d'une portion élémentaire sont espacées à des intervalles .si le système est forcé de l'extérieur par un autre oscillateur il peut y avoir doublement de période pour enfin atteindre le chaos si la période est infinie. Si les deux périodes des deux oscillateurs en présence n'est pas rationnel alors le système est dit quasi périodique qui peut être une transition vers le chaos.

Définition 03 Les exposants de Lyapunov et chaocité du système

L'exposant de Lyapunov sert à mesurer le degré de stabilité d'un système. Un système sensible à de petites variations de la condition initiale aura un exposant positif (système chaotique). En revanche, l'exposant est négatif si le système n'est pas sensible à des petites variations des conditions initiales, les trajectoires se rapprochent et on perd l'information sur les conditions initiales. Un système de dimension n possède n exposants de Lyapunov qui mesurent le taux de divergence suivant un des axes de l'espace de phase.

Définition 04 Diagramme de bifurcations

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières des paramètres qui induisent des bifurcations.

Définition 05 L'attracteur étrange

Il est contenu dans un espace fini. Sa dimension est fractale et non entière ; sa trajectoire est complexe ; presque toutes les trajectoires sur l'attracteur ont la propriété de ne jamais passer deux fois par le même point. En d'autres termes, chaque trajectoire est apériodique ; deux trajectoires proches à un instant " t " voient localement leur distance augmenter à une vitesse exponentielle. Ce phénomène traduit la sensibilité aux conditions initiales ; toute condition initiale appartenant au bassin d'attraction, c'est-à-dire à la région de l'espace des phases dans laquelle tout phénomène dynamique sera "attiré " vers l'attracteur, produit une trajectoire qui tend à parcourir de façon spécifique et unique cet attracteur

I.2.3 Le système dynamique chaotique:

Le chaos est défini généralement comme un comportement particulier d'un système dynamique qui inclut: [29-30]

- La non-linéarité. Si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- Le déterminisme. Un système chaotique a des règles fondamentales déterministes (plutôt que probabilistes).
- La sensibilité aux conditions initiales. De très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- L'imprévisible. En raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision.
- L'irrégularité. Ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques

Pratiquement, une dynamique chaotique peut être identifiée, en première analyse, par la reconnaissance de propriétés caractéristiques : sensibilité aux conditions initiales ,attracteur étrange, spectre, ... etc.

I.3. Les systèmes dynamiques chaotiques continus connus:

1-3-1· Le système de Lorenz qui est système largement connue dans la littérature, initié par le célèbre climatologue Lorenz est modélisé par le système[31]

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = -\beta z + xy \end{cases} \quad (\text{I. 3})$$

Où x, y et z sont les variables d'état du système, σ, ρ, β sont des paramètres. Pour certaines valeurs de ses derniers, le système exhibe un comportement chaotique.

La figure 1.1 ci-dessous présente l'attracteur de Lorenz pour les valeurs suivantes

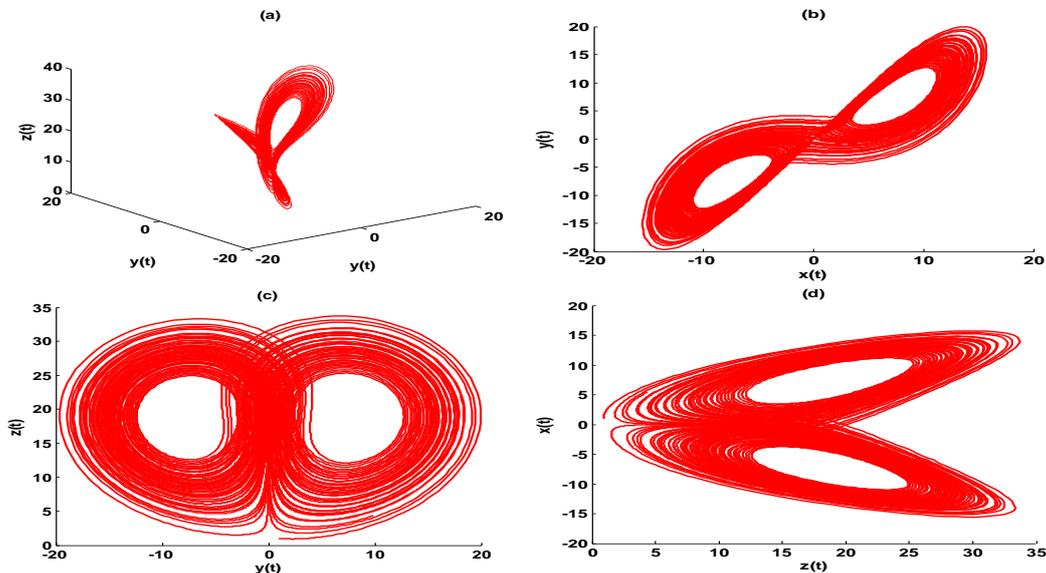


Fig. 1.1: Les attracteurs de Lorenz (a)Attracteur 3D,(b) (c) et (d) Attracteurs2-D Avec $\sigma=10, \beta=8/3$ et $\rho=20. (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1).$

1-4-2· Le système de Rossler : ce système semblable à celui de Lorenz, a été proposée par le biochimiste allemand Otto Rossler en 1976 , il découle des équations de Navier Stockes et est lié à l'étude de l'écoulement des fluides. [32],

Les équations de ce système sont les suivantes

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + \alpha y \\ \dot{z} = \beta - \gamma z + xz \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

Avec α, β, γ des constantes (paramètre de bifurcation)

Ci-dessous l'attracteur de Rössler pour les valeurs suivantes : $\alpha = \beta = 0.2$ et $\gamma = 5.7$

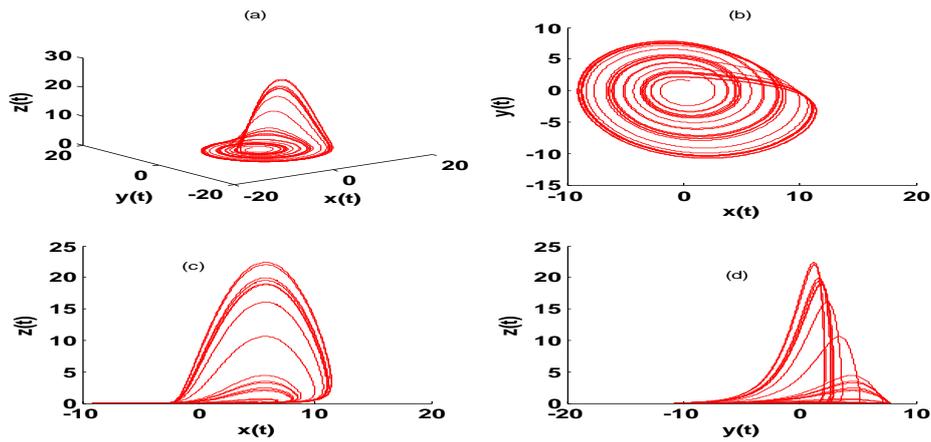


Figure 1.2: Les attracteurs de Rössler (a) Attracteur 3-D, (b) (c) et (d) Attracteurs 2-D
 Avec $a = b = 0.2$ et $c = 5.7$. $(x_0, y_0, z_0) = (0.5, 1.5, 0.1)$

1-5 conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté Le chaos comme un comportement particulier caractérisant un système dynamique par sa sensible dépendance aux conditions initiales. on a introduit définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques pouvant conduire au chaos dans ces systèmes .

Enfin on présente deux exemples de systèmes chaotiques continus.

CHAPITRE II :

**PRÉSENTATION DE QUELQUES MÉTHODES ET TYPES
DE SYNCHRONISATION.**

2.1 Introduction

Dans ce chapitre et pour éviter le chargement mathématique, on s'est forcé, comme physiciens, d'accepter une présentation mathématique des différentes méthodes de synchronisation telle qu'elle est exposée par les mathématiciens. Mais pour présenter les différents types de synchronisation on a opté pour une simplification de la tâche avec une présentation tridimensionnelle par le biais du système de Lü [31] .

2.2 Les Méthodes de synchronisation

Cette section est consacrée à la présentation de diverses méthodes de synchronisation les plus performantes et les plus rencontrées.

2.2.1 Méthode du contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques a été proposée par Bai et Lonngren [30], c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$\dot{x}_m(t) = Ax_m(t) + f(x_m(t)) \quad (2.1)$$

et

$$\dot{x}_e(t) = Ax_e(t) + G(x_e(t)) + U \quad (2.2)$$

Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini.

Cette erreur est obtenue comme suit :

$$\dot{e}(t) = \dot{x}_e(t) - \dot{x}_m(t) \quad (2.3)$$

$$= Ax_e(t) + G(x_e(t)) - Ax_m(t) - F(x_m(t)) + U$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + G(x_e(t)) - F(x_m(t)) + U; \quad (2.4)$$

Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V + F(x_m(t)) - G(x_e(t)) \quad (2.5)$$

d'où V est le contrôleur actif, défini par :

$$V = -L e(t);$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$\dot{e}(t) = (A - L) e(t) \quad (2.6)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (2.1) et le système esclave (2,2) est transformé en problème de zéro-stabilité du système (2.6). Maintenant, le Théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires continus.

Théorème 4.1 *Le système maître (2.1) et le système esclave (2.2) sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle (2, 5), si et seulement si la matrice de contrôle L est choisie telles que les valeurs propres de A - L se trouvant à l'intérieur du disque de l'unité,*

- Avantage de la méthode
 - La technique du contrôleur actif est efficace non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques .
 - cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme [23]

2.2.2 Méthode du Backstepping

La méthode du Backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire. En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit [33-34]

$$\begin{cases} \dot{X}_{m1} = f_1(x_{m1}; x_{m2}) \\ \dot{X}_{m2} = f_2(x_{m1}; x_{m2}; x_{m3}) \\ \vdots \\ \dot{X}_{mn} = f_n(x_{m1}; x_{m2}; \dots x_{mn}) \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_{e1} = f_1(x_{e1}; x_{e2}) \\ \dot{x}_{e2} = f_2(x_{e1}; x_{e2}; x_{e3}) \\ \vdots \\ \dot{x}_{en} = f_n(x_{e1}; x_{e2} \dots; x_{en}) \end{cases} \quad (2.8)$$

d'où f_1 est une fonction linéaire, f_i , ($i = 2; 3; \dots; n$), sont des fonctions non-linéaires et u est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes(2.7) et (2.8). L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = x_{e1} - x_{e1} \\ e_2 = x_{e2} - x_{e2} \\ \vdots \\ e_n = x_{en} - x_{en} \end{cases} \quad (2.9)$$

Alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1(e_1; e_2) \\ \dot{e}_2 = g_2(e_1; e_2; e_3) \\ \vdots \\ \dot{e}_n = g_n(e_1; e_2; \dots \dots e_n) + u \end{cases} \quad (2.10)$$

d'où g_1 est une fonction linéaire, et g_i , ($i = 2; 3; \dots; n$), sont des fonctions non-linéaires. L'objectif est de calculer une loi de contrôle u qui assure la convergence du système e_i , ($i = 1; 2; \dots; n$); vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela le système d'erreur (2.9) doit être décomposé en sous système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3) \dots \dots (e_1, e_2, \dots \dots e_n)$$

et pour chaque sous système on définit une fonction de Lyapunov V positive :

$$V_j(e_j, u_j, \alpha_j); \quad (2.11)$$

d'où j est l'ordre du sous-système, u_j , α_j représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre j , u_j et α_j sont calculés à chaque fois de telle sorte que $\dot{V}_j < 0$

- Avantages de la méthode : Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :
 - Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur.
 - Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.
 - Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.
 - Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.

2.2.3 Méthode du mode glissant

Dans la théorie du contrôle robuste, la méthode du mode glissant est souvent pratiquée en raison de ses avantages inhérents, telles que la réalisation facile, la réponse rapide et une bonne performance transitoire ainsi que sa sensibilité aux incertitudes des paramètres et des perturbations externes [35,36].

Soit les systèmes chaotiques maître et esclave donnés par les formes suivantes :

$$\dot{x}_m(t) = Ax_m(t) + f(x_m(t)) \quad (2.12)$$

et

$$\dot{x}_e(t) = Ax_e(t) + f(x_e(t)) + U \quad (2.13)$$

Où $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $A \in R^{n \times n}$ une matrice constante, $f \in R^{n \times n}$ est une fonction non-linéaire et $u \in R^n$ est un contrôleur à déterminer. L'erreur entre le système maître (2.12) et le système esclave (2.13) est définie par :

$$e(t) = x_e(t) - x_m(t)$$

La dynamique de l'erreur peut s'écrire comme suit :

$$\dot{e} = Ae + \eta(x_m, x_e) + u \quad (2.14)$$

d'où $\eta(x_m, x_e) = f(x_m(t)) - f(x_e(t))$: Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur (2.14), la loi de contrôle u est choisie comme suit :

$$u = Bv - \eta(x_m, x_e) \quad (2.15)$$

d'où v est le contrôleur actif et B un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple (A, B) soit contrôlable. En substituant (2.15) dans (2.14), la dynamique de l'erreur est simplifiée comme suit :

$$\dot{e} = Ae + Bv \quad (2.16)$$

Ainsi, le problème de synchronisation peut être remplacé par un équivalent problème de la stabilisation de la solution $e = 0$ du système (2.14) par un choix approprié du contrôleur en mode glissant.

Dans la méthode du mode glissant, nous définissons la surface de glissement s , comme suit :

$$s(e) = Ce = \sum_{j=1}^n c_j e_j \quad (2.17)$$

Où C : est un vecteur constant à déterminer, et le système contrôlé doit satisfaire :

$$s(e) = 0, \dot{s}(e) = 0: \text{ Alors, on peut écrire :}$$

$$\dot{s}(e) = C(Ae + Bv) = 0, \quad (2.18)$$

donc le contrôleur v est donné par

$$v = -(CB^{-1})CAe \quad (2.19)$$

d'où C est choisi de telle sorte que $CB \neq 0$. L'existence de (CB^{-1}) est une condition nécessaire. La nouvelle forme de l'erreur de synchronisation est donnée par

$$\dot{e} = [I - B(CB^{-1})C]Ae \quad (2.20)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique du système contrôlé, le vecteur C doit être choisi de telle sorte que les parties réelles des valeurs propres de la matrice $[I - B(CB^{-1})C]A$ soient toutes négatives.

2-3 Quelques types de synchronisation :

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation FSHP, la synchronisation généralisée, et la synchronisation Q-S. Toutes les synchronisations sont supposées appliquées à deux systèmes identiques de $L\ddot{u}$.

2.3.1 Le système chaotique de Lü

Considérons le système simple, autonome, quadratique et tridimensionnel suivant, qui peut afficher deux attracteurs chaotiques simultanément [31]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x - yz + \gamma \\ \dot{y} = \alpha y + xz \\ \dot{z} = \beta z + xy \end{cases} \quad (2.21)$$

Où un α ; β ; γ sont des constantes.

Ce système est chaotique pour une large gamme de paramètres et a beaucoup de comportements dynamiques complexes intéressants. Par exemple : il est chaotique pour les paramètres $\alpha = -10$; $\beta = -4$, et $|\gamma| < 19$: 2, et pour $\alpha = -10$; $\beta = -4$; $\gamma = 18$: 1, il affiche deux Attracteurs chaotiques comme indiqué sur la Figure. 2.1.

pour la valeur initiale (1; 1; 1), le spectre des exposants de Lyapunov du système (2.21) est donné par : $\lambda_1 = 0$. 253223; $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = -11$. 3944, et la dimension de Lyapunov est $d_l = 2$: 0221.

De toute évidence, quand $\alpha = -10$; $\beta = -4$; $\gamma = 18$, le système a seulement trois points d'équilibres:

$$E_1 = (-6.335, 0, 0)$$

$$E_2 = \left(2\sqrt{10}, \sqrt{\frac{80}{7} + 3.62\sqrt{10}}, -1/2\sqrt{800/7 + 36.2\sqrt{10}} \right)$$

$$E_3 = \left(2\sqrt{10}, -\sqrt{\frac{80}{7} + 3.62\sqrt{10}}, -1/2\sqrt{800/7 + 36.2\sqrt{10}} \right)$$

C'est un phénomène étrange d'avoir deux attracteurs chaotiques qui coexistent dans un système chaotique autonome, quadratique et tridimensionnel avec seulement trois équilibres. De plus, quand $a = +10$; $b = +4$; $c = 0$, ce système peut afficher deux attracteurs chaotiques complexes, comme le montre la Figure 3.1. Selon leur emplacements géométriques, ces deux attracteurs qui coexistent sont appelés attracteur supérieur et attracteur inférieur.

2-3-2 Présentation de la configuration maître- esclave

Considérons le cas de deux systèmes tridimensionnels identiques de Lü (2.22) et (2.23) à synchroniser : le premier est pris comme un système maître et le deuxième comme un système esclave respectivement.

$$\begin{cases} \dot{x}_m = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x_m - y_m z_m + \gamma \\ \dot{y}_m = \alpha y_m + x_m z_m \\ \dot{z}_m = \beta z_m + x_m y_m \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_e = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x_e - y_e z_e + \gamma + u_1 \\ \dot{y}_e = \alpha y_e + x_e z_e + u_2 \\ \dot{z}_e = \beta z_e + x_e y_e + u_3 \end{cases} \quad (2.23)$$

Où $(x_m; y_m; z_m)^T$, $(x_e; y_e; z_e)^T$ sont les vecteurs d'états du système maître et du système esclave, respectivement et u_i ; $i=1; 2; 3$; sont les contrôleurs de synchronisation qui seront déterminés ultérieurement par l'une des méthodes de synchronisation

2-3-3 La synchronisation complète

Pour la synchronisation complète, on calcul le système d'erreur de la synchronisation complète comme [37]

$$\begin{cases} e_{c1} = x_e - x_m \\ e_{c2} = y_e - y_m \\ e_{c3} = z_e - z_m \end{cases} \quad (2.24)$$

Ainsi, le problème de synchronisation complète est de déterminer les contrôleurs u_i ($i=1,2, 3$) du système esclave (2.3) de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{ci}(t) = \mathbf{0} \quad (i=1,2, 3)$$

2-3-4 L'anti-Synchronisation[38]

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit

$$\begin{cases} e_{a1} = x_e + x_m \\ e_{a2} = y_e + y_m \\ e_{a3} = z_e + z_m \end{cases} \quad (2.25)$$

Alors, le problème de l'anti synchronisation est de déterminer les contrôleurs u_i ($i=1,2, 3$) de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_{ai}(t) = \mathbf{0} \quad (i=1,2, 3)$$

2-3-5 la Synchronisation lag [39]

On dit qu'on a une synchronisation **retardée** (ou **anticipée**) si les variables d'état $x_e(t)$ système chaotique esclave converge vers les variables d'état $x_m(t)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous

$$\begin{cases} e_{l1} = x_e(t) - x_m(t - \tau) \\ e_{l2} = y_e(t) - y_m(t - \tau) \\ e_{l3} = z_e(t) - z_m(t - \tau) \end{cases} \quad (2.26)$$

Alors, le problème de la synchronisation lag est de déterminer les contrôleurs u_i ($i=1,2, 3$) de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_l(t)\| = 0;$$

Avec τ est un nombre positif très petit.

2.3-6 Synchronisation projective [40]

On dit qu'on a une synchronisation projective, s'il existe une matrice diagonale $H = \text{diag}(h_1, h_2, h_3, \dots, h_n)$, tels que

$$\begin{bmatrix} e_{p1} \\ e_{p2} \\ e_{p3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} e_{p1} = x_e(t) - h_1 \times x_m(t) \\ e_{p2} = y_e(t) - h_2 \times y_m(t) \\ e_{p3} = z_e(t) - h_3 \times z_m(t) \end{cases} \quad (2.27)$$

et si on peut déterminer les contrôleurs u_i ($i=1,2, 3$) de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_{pi}\| = 0 \quad i=1, 2, 3$$

Remarque : On voit bien que pour le cas où tous les h_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète. Le cas où tous les h_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation

2-3-7 Synchronisation FSHP:

On dit qu'on a une **synchronisation FSHP** (*en anglais full state hybrid projective synchronisation*), [41] s'il existe des contrôleur u_i , $1 \leq i \leq 3$ et des constante $(\alpha_{ij}) \in R^{3 \times 3}$ tels que :

$$\begin{bmatrix} e_{F1} \\ e_{F2} \\ e_{F3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\text{Avec } \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{Fi}| = 0, \quad i=1,2,3$$

La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective

2-3-8 Synchronisation inverse FSHP[42]

On dit qu'on a une **synchronisation FSHP** (*en anglais inverse full state hybrid projective synchronisation*), s'il existe des contrôleur u_i , $1 \leq i \leq 3$ et des constante $(\beta_{ij}) \in R^{3 \times 3}$ tels que :

$$\begin{bmatrix} e_{IF1} \\ e_{IF2} \\ e_{IF3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ z_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$\text{Avec } \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{IFi}| = 0, \quad i=1, 2, 3$$

La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective [4].

2-3-9 Synchronisation généralisée [43]

On a synchronisation au sens généralisé des deux systèmes (2.2) et (2.3) , s'il existe des contrôleur $u_i; i= 1; 2; 3$ et une fonction $\emptyset: R^3 \rightarrow R^3$ qui vérifient

$$\begin{cases} e_{g1} = x_e(t) - \emptyset x_m(t) \\ e_{g2} = y_e(t) - \emptyset y_m(t) \\ e_{g3} = z_e(t) - \emptyset z_m(t) \end{cases} \quad (2.30)$$

$$\text{Avec} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{gi}| = 0,$$

2-3-10 Synchronisation inverse généralisée [44]

On a synchronisation au sens inverse généralisé des deux systèmes (2.2) et (2.3) ,s'il existe des contrôleur $u_i; i= 1; 2; 3$ et une fonction $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ qui vérifient

$$\begin{cases} e_{ig1} = x_m(t) - \varphi x_e(t) \\ e_{ig2} = y_m(t) - \varphi y_e(t) \\ e_{ig3} = z_m(t) - \varphi z_e(t) \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\text{Avec} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{ig1}| = 0, \quad i=1, 2, 3$$

2-3-11 Synchronization Q-S[45]

On a synchronisation au sens Q-S des deux systèmes (2.2) et (2.3) , s'il existe des contrôleur $u_i; i= 1; 2; 3$ et deux fonctions $Q: R^3 \rightarrow R^3$, $S: R^3 \rightarrow R^3$ tel que les erreurs de synchronisation

$$\begin{cases} e_{q1} = Q(x_m(t)) - S(x_e(t)) \\ e_{q2} = Q(y_m(t)) - S(y_e(t)) \\ e_{q3} = Q(z_m(t)) - S(z_e(t)) \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\text{vérifient :} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} |e_{qi}| = 0, \quad ,i=1, 2, 3$$

Remarque La synchronisation Q-S est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes.

2-4. Méthodes d'étude de la stabilité des systèmes dynamiques continus non linéaires [46]

Pour l'analyse de la stabilité et, principalement, lorsque les systèmes non linéaires ne permettent pas une linéarisation ou lorsque le modèle linéarisé est loin de représenter le comportement réel du système, on utilise généralement des méthodes plus ou moins difficiles à mettre en œuvre, parmi ces méthodes, on peut citer : la méthode des portraits de phase, le critère de Popov, la méthode directe de Lyapunov et la méthode des normes

vectérielles. Dans tout ce qui suit et pour la vérification de la stabilité des systèmes d'erreurs, on se limite à la méthode de Lyapunov.

2.4.1 La méthode de Lyapunov [47]

La méthode de Lyapunov, permettant l'analyse de la stabilité directement à partir des équations décrivant les systèmes, ne nécessite pas la détermination explicite des solutions de ces équations. En effet, la détermination d'une fonction scalaire $v(x)$, dite de Lyapunov, définie positive dans l'espace d'état, dont la dérivée par rapport au temps $\dot{v}(x)$ est une fonction définie négative, suffit pour pouvoir conclure à la stabilité asymptotique du système dynamique continu non linéaire du type (2.22).

2.5 Conclusion

L'objectif principal de ce chapitre était de présenter les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes et aussi les différents types de synchronisation en se basant sur les définitions des erreurs pour les différents types.

CHAPITRE III :

ÉTUDE COMPARATIVE DE QUELQUES
TYPES DE SYNCHRONISATION DE
SYSTÈMES CHAOTIQUES.

3.1 Introduction

Nous sommes allés de l'avant et programmé des simulations pour modéliser le système de Lu et voir son attracteur étrange ainsi que la sensibilité de l'évolution de ses états aux variations minimales des conditions initiales. La simulation a été faite avec l'aide de MATLAB. L'objectif de la simulation était de produire des résultats qui pourraient être tracés à l'écran en temps réel. Ces données seraient en mesure de confirmer ou d'infirmer les résultats théoriques mentionnés ci-dessus aussi bien que d'afficher l'existence globale du chaos.

La simulation fonctionne dans un processus itératif. Cela prend des points qui sont stockés dans une matrice (tableau) de Points et les trace dans un plan x-y-z un point à la fois. Après chaque point successif, une ligne droite est tracée reliant le point précédent au point courant. Ce processus continu est itéré, donnant à la simulation la capacité de tracer une trajectoire. Pour augmenter la capacité, il y avait des changements apportés au pas temporel de la fonction tracée ainsi que le nombre de points ajoutés à la matrice des points- avant le traçage.

Il existe des techniques de modélisation des équations différentielles sous forme d'équations de différences. Ces techniques modifient le problème de l'étude d'un système continu à l'étude d'un système discret. Il est important de noter que cette méthode ne fonctionne que pour de petits incréments de temps. Pour les grands pas de temps, l'approximation diffère notablement de la solution exacte. La modélisation d'une équation différentielle comme une équation de différence est équivalente à la représentation d'une ligne courbée par plusieurs lignes droites assemblées les unes aux autres reconstituées. Le modèle de l'équation de différence fonctionne en calculant le prochain point connaissant le point courant. et en tenant compte de l'état initial, l'ordinateur peut itérer à travers l'ensemble du système à plusieurs reprises avec une grande vitesse.

3.2 Modélisation et simulation:

3.2.1 Méthode utilisée:

La méthode la plus simple pour transformer l'équation différentielle en une équation de différence est la méthode d'Euler

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y, z) \rightarrow \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta t} = f(x_n, y_n, z_n, \dots) \quad (3.1)$$

Qui nous permet d'écrire y_{n+1} comme

$$y_{n+1} = \Delta t (f(x_n, y_n, z_n, \dots)) + y_n. \quad (3.2)$$

L'approche nous permis de transformer les équations différentielles en équations de différence:

$$\begin{cases} x_{n+1} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x_n - y_n z_n + \gamma \\ y_{n+1} = \alpha y_n + x_n z_n \\ z_{n+1} = \beta z_n + x_n y_n \end{cases} \quad (3.3)$$

Ont opté pour la méthode simple d'Euler pour sa simplicité et son efficacité pour modéliser les équations et tracer les trajectoires

3.2.2 Résultats des simulations:

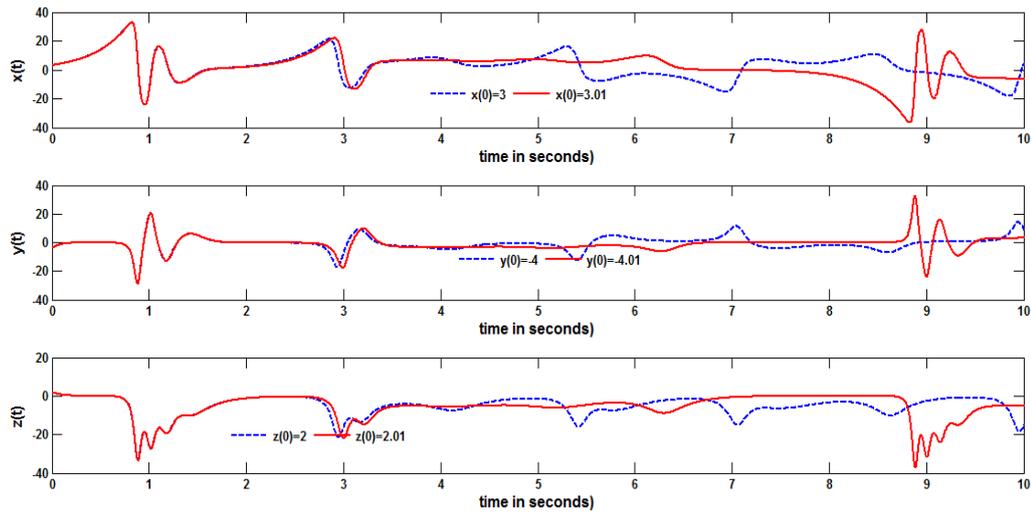
2.1 Quelques simulations sur le système chaotique de Lü

Le système, qui a été conçu par Lü et al. [31], a été présenté dans le deuxième chapitre et affiche simultanément deux attracteurs chaotiques:

Ce système est défini par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x - yz + \gamma \\ \dot{y} = \alpha y + xz \\ \dot{z} = \beta z + xy \end{cases} \quad (3.4)$$

Où $(x; y; z)^T$, est le vecteurs des états du système de Lü, α, β, γ sont des constantes réelles présentant les paramètres du système. Ce système présente un comportement chaotique dans une large gamme de paramètres et présente de nombreux comportements dynamiques complexes intéressants. Le système est chaotique pour les paramètres $\alpha=-10$, $\beta=-4$ et $\gamma < 19.2$. Par exemple, lorsque les paramètres sont $\alpha=-10$, $\beta=-4$ et $\gamma = 0$, les évolutions temporelles des trois états du système (1) pour deux conditions initiales très peu différentes, $(x(0), y(0), z(0)) = (3, -4, 2)$ et $(x(0), y(0), z(0)) = (3.01, -4.01, 2.01)$ sont donnés sur la figure 3.1 qui montre que le système est réellement chaotique à cause de sa grande sensibilité au conditions initiales remarqué par la divergences dans le temps entre les mêmes états présentant une différence d'un centième entre les conditions initiales. En outre, il affiche l'attracteur chaotique comme indiqué sur la figure 3.2. Pour plus de détails sur les autres propriétés dynamiques du système, voir l'article [31].



Figures 3 .1 Les évolutions temporelles des états x ; y et z pour différentes conditions initiales

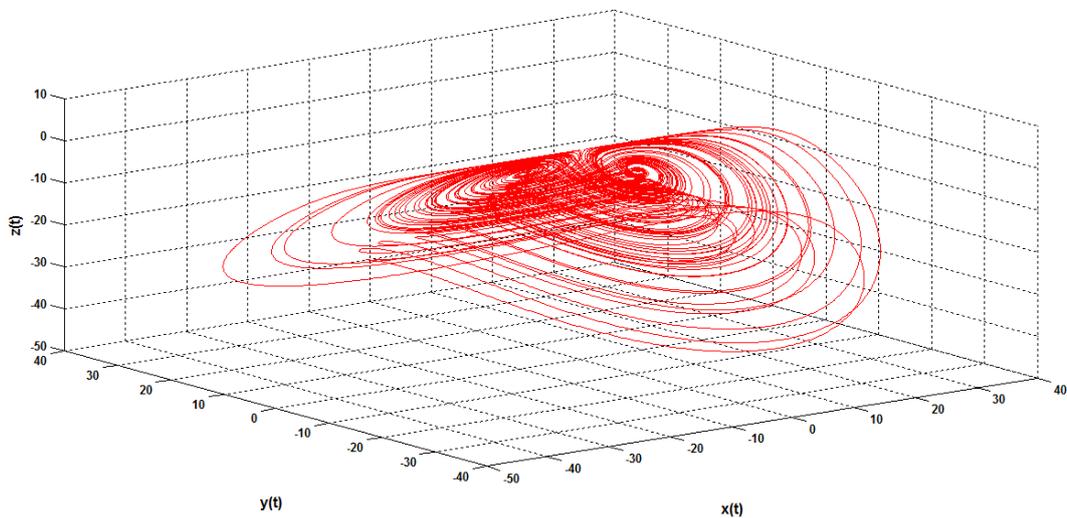


Figure 3.2 L'attracteur chaotique de $L\ddot{u}$ en 3D pour $a = -10$, $b = -4$ et $c = 0$. Pour les conditions initiales $(x(0), y(0), z(0)) = (3, -4, 2)$

3.3. Etude par simulation de la synchronisation complète entre deux systèmes chaotiques identiques de $L\ddot{u}$

Maintenant, notre objectif est de faire une étude par simulations de la synchronisation pour deux systèmes chaotiques identiques de la forme (1) basé sur la méthode de stabilité de Lyapunov. Considérons les systèmes 3D chaotiques de $L\ddot{u}$ (1) et (2) : le premier est pris comme un système maître et le deuxième comme un système esclave respectivement.

$$\begin{cases} \dot{x}_m = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x_m - y_m z_m + \gamma \\ \dot{y}_m = \alpha y_m + x_m z_m \\ \dot{z}_m = \beta z_m + x_m y_m \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_e = -\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}x_e - y_e z_e + \gamma + u_1 \\ \dot{y}_e = \alpha y_e + x_e z_e + u_2 \\ \dot{z}_e = \beta z_e + x_e y_e + u_3 \end{cases} \quad (3.6)$$

Où $(x_m; y_m; z_m)^T$, $(x_e; y_e; z_e)^T$ sont les vecteurs des états du système maître et du système esclave, respectivement, α, β et γ sont des constantes réelles présentant les paramètres du système de $Lü$ et $(u_1; u_2; u_3)^T$ est le vecteur des commandes non linéaires de synchronisation qui seront déterminés ultérieurement.

Le vecteur des erreurs de synchronisation complète $(e_1; e_2; e_3)^T$ sera défini comme

$$\begin{cases} e_{c1} = x_e - x_m \\ e_{c2} = y_e - y_m \\ e_{c3} = z_e - z_m \end{cases} \quad (3.7)$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} z_m e_{c1} + x_e e_{c3} = -x_m z_m + x_e z_e \\ y_m e_{c1} + x_s e_{c2} = -x_m y_m + x_e y_e \\ -y_e e_{c3} - z_m e_{c2} = y_m z_m - y_e z_e \end{cases} \quad (3.8)$$

Par une simple dérivation de (3.7) et par une soustraction de (3.5) de (3.6), nous obtenons la dynamique du système des erreurs suivant

$$\begin{cases} \dot{e}_{c1} = -r e_{c1} - x_e e_{c3} + z_m e_{c2} + u_1 \\ \dot{e}_{c2} = \alpha e_{c2} + z_m e_{c1} + x_s e_{c3} + u_2 \\ \dot{e}_{c3} = \beta e_{c3} + y_m e_{c1} + x_s e_{c2} + u_3 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\text{Avec } r = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

Pour les deux systèmes chaotiques identiques sans contrôle ($u_i = 0$), si les conditions initiales des états du système maître et du système esclave diffèrent $(x_m(0), y_m(0), z_m(0)) \neq x_e(0), y_e(0), z_e(0)$, les trajectoires des deux systèmes identiques se séparent rapidement et deviennent sans importance. Cependant, pour les deux systèmes chaotiques commandés contrôlés), les deux systèmes se synchronisent quelques soient les conditions initiales avec le schéma de commande approprié. Pour ce faire, nous proposons la loi de commande suivante pour le système esclave:

$$\begin{cases} u_1 = (r - 1)e_{c1} + e_{c2} e_{c3} \\ u_2 = -(\alpha + 1)e_{c2} - 2x_s e_{c3} \\ u_3 = -(\beta + 1)e_{c3} \end{cases} \quad (3.10)$$

Après on a le théorème suivant

Théorème 3.1 les deux systèmes chaotiques (3.5) et (3.6) tendent vers la synchronisation complète pour n'importe quelles conditions initiales

$(x_m(0), y_m(0), z_m(0))$ et $(x_e(0), y_e(0), z_e(0))$ sous la loi de commande (3.10)

Démonstration. 3.1 le système d'erreurs peut être écrit comme

$$\begin{cases} \dot{e}_{1c} = -e_{c1} - y_e e_{c3} - z_m e_{c2} + e_{c2} e_{c3} \\ \dot{e}_{2c} = -e_{c2} + z_m e_{c1} - x_s e_{c3} \\ \dot{e}_{3c} = -e_{c3} + y_m e_{c1} + x_s e_{c2} \end{cases} \quad (3.11)$$

Construisons la fonction Lyapunov candidate de la forme

$$V(e_c(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 e_{ic}^2(t) \quad (3.12)$$

On obtient la dérivée de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système (3.11)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{e}_{c1} e_{c1} + \dot{e}_{c2} e_{c2} + \dot{e}_{c3} e_{c3} \\ &= (-re_{c1} - y_e e_{c3} + z_m e_{c2} + u_1) e_{c1} + (ae_{c2} + z_m e_{c1} + x_s e_{c3} + u_2) e_{c2} \\ &\quad + (\beta e_{c3} + y_m e_{c1} + x_s e_{c2} + u_3) e_{c3} \\ &= -re_1^2 + ae_2^2 + \beta e_3^2 - y_e e_3 e_1 + 2x_s e_3 e_2 + y_m e_1 e_3 + e_1 u_1 + e_2 u_2 + e_3 u_3 \\ &= -re_{c1}^2 + ae_{c2}^2 + \beta e_{c3}^2 - e_{c1} e_{c2} e_{c3} + 2x_s e_{c3} e_{c2} + e_{c1} u_1 + e_{c2} u_2 + e_{c3} u_3 \end{aligned} \quad (3.13)$$

En substituant le système (3.10) dans l'équation (3.13) on obtient

$$\frac{dV}{dt} = -e_{c1}^2 - e_{c2}^2 - e_{c3}^2 < 0 \quad (3.14)$$

En se basant sur la théorie de stabilité de Lyapunov ; on peut affirmer que la solution du système des erreurs (3.11) est asymptotiquement globalement stable et les systèmes (3.5) et (3.6) sont globalement complètement synchronisés

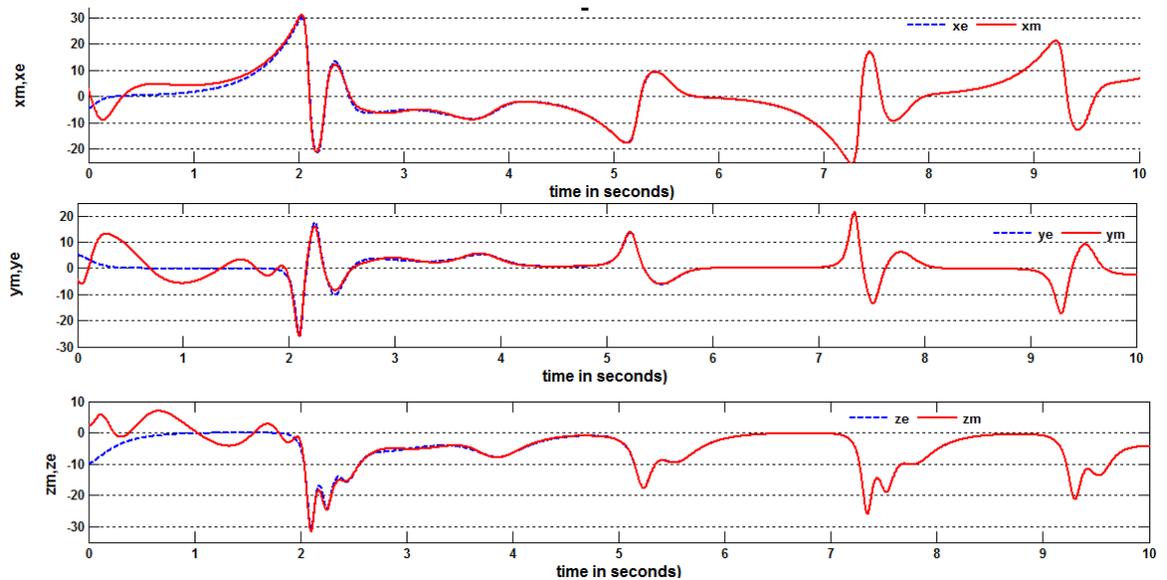
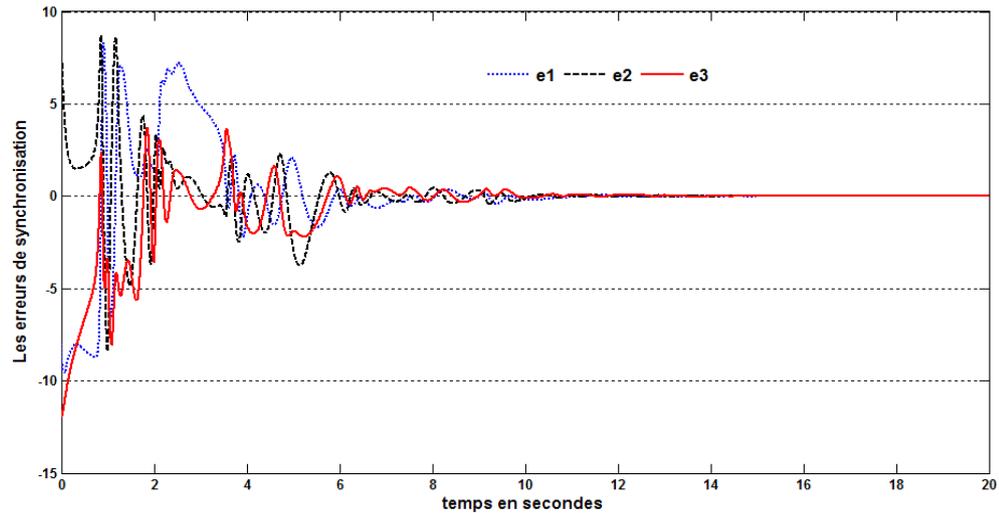
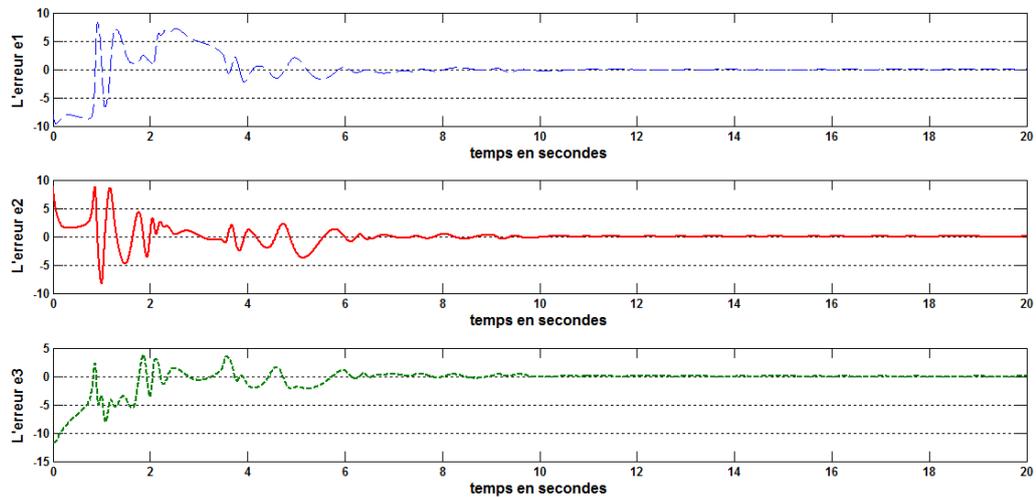


Figure .3.3 Les évolutions temporelles des états du système maître ($x_m ; y_m , z_m$) et du système esclave($x_e ; y_e , z_e$) commandé par une synchronisation complète pour différentes condition initiales



(a)



(b)

Figure 3.4 Les évolutions temporelles des erreurs de synchronisation e_1 , e_2 et e_3 :

(a) dans un seul repère, (b) sur trois repères

3.4. Etude par simulation de l'anti synchronisation entre deux systèmes identiques de Lü .

Dans cette section, nous discutons du comportement de l'anti-synchronisation entre les deux systèmes identiques (3.2) et (3.3) de Lü. Nous définissons les états des erreurs pour

l'anti-synchronisation comme :

$$\begin{cases} e_{a1} = x_e + x_m \\ e_{a2} = y_e + y_m \\ e_{a3} = z_e + z_m \end{cases} \quad (3.15)$$

Le problème de la synchronisation est de déterminer les fonctions de commande u_i ; $i = 1; 2; 3$ qui stabilisent les erreurs de synchronisation (3.15) ; puis le but de la

synchronisation est de faire $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0, i = 1; 2; 3$ ou $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne

Le système des erreurs dynamiques entre le système maître et le système esclave peut être obtenu par la sommation des systèmes (3.5) et (3.6) pour donner :

$$\begin{cases} \dot{e}_{a1} = -r e_{a1} - y_e z_e - y_m z_m + u_1 \\ \dot{e}_{a2} = \alpha e_{a2} + x_e z_e + x_m z_m + u_2 \\ \dot{e}_{a3} = \beta e_{a3} + x_e y_e + x_m y_m + u_3 \end{cases} \quad (3.16)$$

Nous proposons les lois de commande suivantes pour le système esclave:

$$\begin{cases} u_1 = (r - 1)e_1 + y_e z_e + y_m z_m \\ u_2 = -(\alpha + 1)e_2 - x_e z_e - x_m z_m \\ u_3 = -(\beta + 1)e_3 - x_e y_e - x_m y_m \end{cases} \quad (3.17)$$

Après on a le théorème suivant

Théorème 3.2 les deux systèmes chaotiques (3.5) et (3.6) tendent vers l'anti synchronisation pour n'importe quelles conditions initiales

$(x_m(0), y_m(0), z_m(0))$ et $(x_e(0), y_e(0), z_e(0))$ sous la loi de commande (3.17)

Démonstration. 2 le système d'erreurs peut être écrit comme

$$\begin{cases} \dot{e}_{1a} = -e_{a1} - y_e e_{a3} - z_m e_{a2} + e_{a2} e_{a3} \\ \dot{e}_{2a} = -e_{a2} + z_m e_{a1} - x_s e_{a3} \\ \dot{e}_{3a} = -e_{a3} + y_m e_{a1} + x_s e_{a2} \end{cases} \quad (3.18)$$

Construisons la fonction Lyapunov candidate de la forme

$$V(e_a(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 e_{ia}^2(t) \quad (3.19)$$

On obtient la dérivée de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système

(3.18)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{e}_{a1} e_{a2} + \dot{e}_{a2} e_{a2} + \dot{e}_{a3} e_{a3} \\ &= (-r e_1 - y_e z_e - y_m z_m + u_1) e_{a1} + (\alpha e_2 + x_e z_e + x_m z_m + u_2) e_{a2} + (\beta e_3 + x_e y_e + x_m y_m + u_3) e_{a3} \\ &= -r e_{a1}^2 + \alpha e_{a2}^2 + \beta e_{a3}^2 - y_e z_e e_{a1} - y_m z_m e_{a1} + x_e z_e e_{a2} + x_m z_m e_{a2} + y_e x_e e_{a3} + x_m y_m e_{a3} + e_{a1} u_1 \\ &\quad + e_{a2} u_2 + e_{a3} u_3 \\ &= -r e_{a1}^2 + \alpha e_{a2}^2 + \beta e_{a3}^2 - e_{a1} e_{a2} e_{a3} + 2x_s e_{a3} e_{a2} + e_{a1} u_1 + e_{a2} u_2 + e_{a3} u_3 \end{aligned} \quad (3.20)$$

En substituant le système (3.17) dans l'équation (3.20) on obtient

$$\frac{dV}{dt} = -e_{1a}^2 - e_{2a}^2 - e_{3a}^2 < 0 \quad (3.21)$$

En se basant sur la théorie de stabilité de Lyapunov ; on peut affirmer que la solution du système d'erreurs (3.18) est asymptotiquement globalement stable et les systèmes (3.5) et (3.6) sont asymptotiquement globalement anti synchronisés.

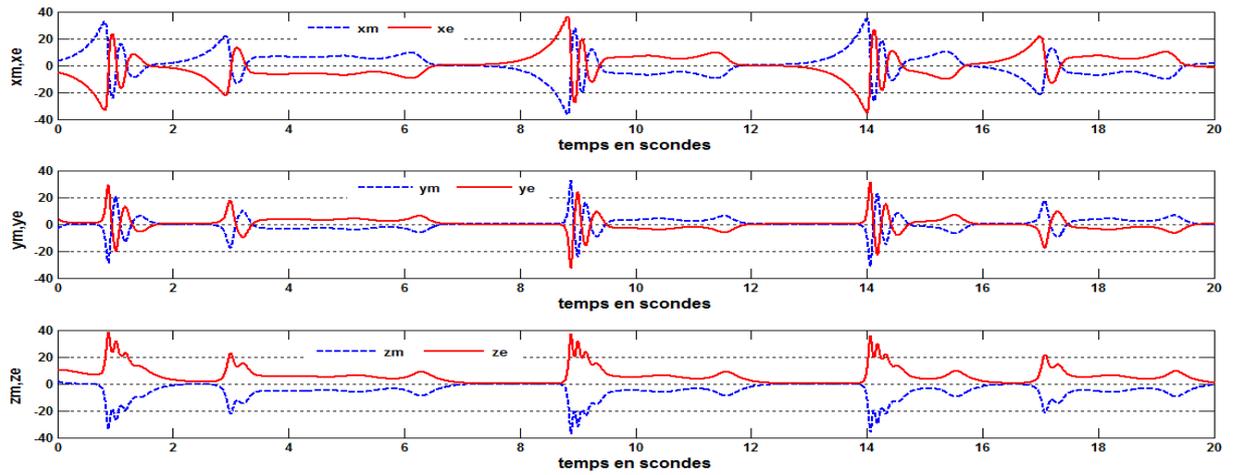
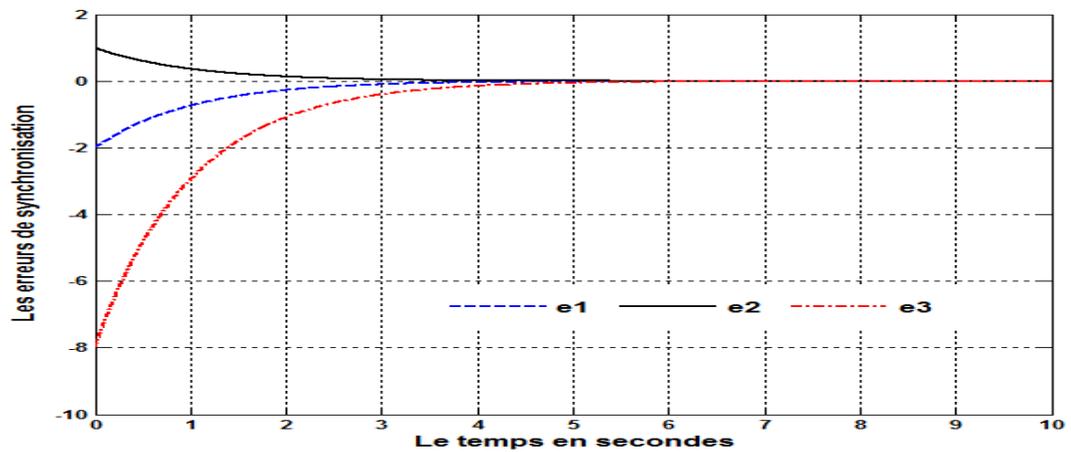
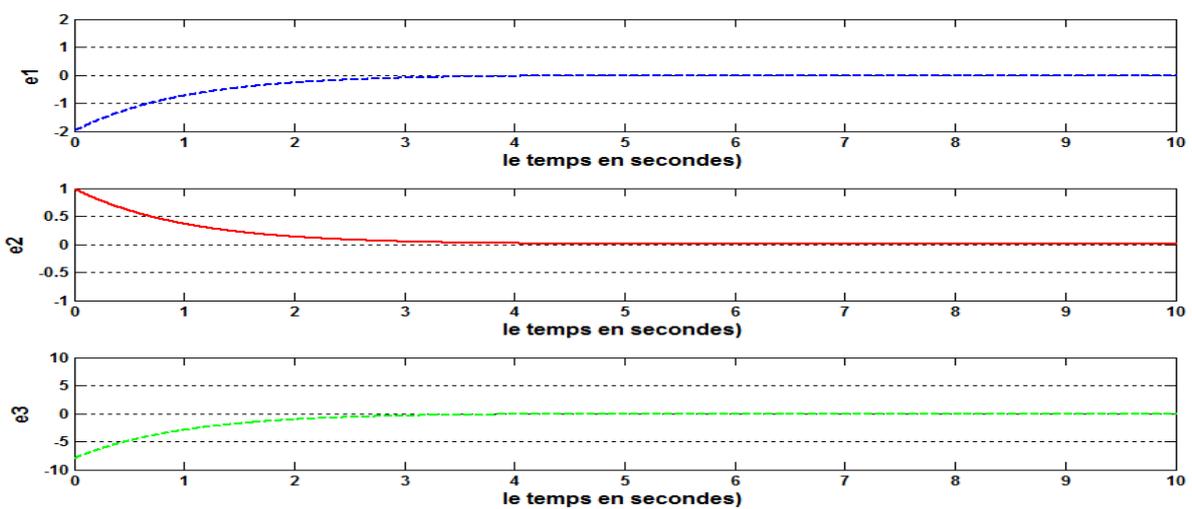


Figure .3.5 Les évolutions temporelles des états du système maître ($x_m ; y_m , z_m$) et du système esclave ($x_e ; y_e , z_e$) commandé par une anti synchronisation pour différentes condition initiales



(a)



(b)

Figure 3.6 Les évolutions temporelles des erreurs de synchronisation e_{a1} , e_{a2} et e_{a3}

(a) dans un seul repère (b) sur trois repères

3.5. Etude par simulation de la synchronisation hybride entre deux systèmes identiques de Lü

Dans cette section, nous discutons du comportement de la synchronisation hybride entre les deux systèmes identiques (3.5) et (3.6) de Lü..

Pour le nouveau schéma de synchronisation étudié, qui présente une synchronisation complète entre les états (y_e, y_m) et une anti synchronisation pour les états (x_e, x_m) et (z_e, z_m) d'où la nomination hybride, Les erreurs de synchronisation sont données comme suit :

$$\begin{cases} e_{h1} = x_e + x_m \\ e_{h2} = y_e - y_m \\ e_{h3} = z_e + z_m \end{cases} \quad (3.22)$$

On peut facilement déduire que

$$\begin{cases} y_m e_{h1} + x_e e_{h2} = x_e y_e + y_m x_m \\ z_e e_{h1} - x_m e_{h3} = z_e x_e - x_m z_m \\ z_m e_{h2} - y_e e_{h3} = -y_e z_e - z_m y_m \end{cases} \quad (3.23)$$

La dynamique des erreurs est facile à obtenir

$$\begin{cases} \dot{e}_{h1} = -r e_{h1} - y_e z_e - y_m z_m + u_1 \\ \dot{e}_{h2} = \alpha e_{h2} + x_e z_e + x_m z_m + u_2 \\ \dot{e}_{h3} = \beta e_{h3} + x_e y_e + x_m y_m + u_3 \end{cases} \quad (3.24)$$

Le système (3.24) peut être écrit

$$\begin{cases} \dot{e}_{h1} = -r e_1 + z_m e_2 - y_e e_3 + u_1 \\ \dot{e}_{h2} = \alpha e_2 + z_e e_1 - x_m e_3 + u_2 \\ \dot{e}_{h3} = \beta e_3 + y_m e_1 + x_e e_2 + u_3 \end{cases} \quad (3.25)$$

Nous proposons la loi de commande suivante pour le système esclave:

$$\begin{cases} u_1 = (r - 1)e_{h1} - z_m e_{h2} + y_e e_{h3} \\ u_2 = -(\alpha + 1)e_{h2} - z_e e_{h1} + x_m e_{h3} \\ u_3 = -(\beta + 1)e_{h3} - y_m e_{h1} - x_e e_{h2} \end{cases} \quad (3.26)$$

Après on a le théorème suivant

Théorème 3.3 les deux systèmes chaotiques (3.5) et (3.6) tendent vers une synchronisation hybride pour n'importe quelles conditions initiales

$(x_m(0), y_m(0), z_m(0))$ et $(x_e(0), y_e(0), z_e(0))$ sous la loi de commande (3.26)

Démonstration. 3.3 Le système d'erreurs peut être écrit comme

$$\begin{cases} \dot{e}_{h1} = -re_{h1} + z_m e_{h2} - y_e e_{h3} + u_1 \\ \dot{e}_{h2} = \alpha e_{h2} + z_e e_{h1} - x_m e_{h3} + u_2 \\ \dot{e}_{h3} = \beta e_{h3} + y_m e_{h1} + x_e e_{h2} + u_3 \end{cases} \quad (3.27)$$

Construisons la fonction Lyapunov candidate de la forme

$$V(e_h(t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 e_{ih}^2(t) \quad (3.28)$$

On obtient la dérivée de la fonction de Lyapunov le long de la trajectoire du système (3.24)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \dot{e}_{h1} e_{h1} + \dot{e}_{h2} e_{h2} + \dot{e}_{h3} e_{h3} \\ &= (-re_{h1} - y_e e_{h3} + z_m e_{h2} + u_1) e_{h1} + (\alpha e_{h2} + z_e e_{h1} - x_m e_{h3} + u_2) e_{h2} \\ &\quad + (\beta e_{h3} + y_m e_{h1} + x_e e_{h2} + u_3) e_{h3} \\ &= -r e_{h1}^2 + \alpha e_{h2}^2 + \beta e_{h3}^2 - y_e e_{h3} e_{h1} + z_m e_{h2} e_{h1} + z_e e_{h1} e_{h2} - x_m e_{h3} e_{h2} + y_m e_{h1} e_{h3} + x_e e_{h2} e_{h3} + \\ &\quad e_{h1} ((r-1)e_{h1} - z_m e_{h2} + y_e e_{h3}) + e_{h2} (-(\alpha+1)e_{h2} - z_e e_{h1} + x_m e_{h3}) + e_{h3} (-(\beta+ \\ &\quad 1)e_{h3} - y_m e_{h1} - x_e e_{h2}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

En substituant le système (3.26) dans l'équation (3.29) on obtient

$$\frac{dV}{dt} = -e_{1h}^2 - e_{2h}^2 - e_{3h}^2 < 0 \quad (3.30)$$

En se basant sur la théorie de stabilité de Lyapunov ; on peut affirmer que la solution du système d'erreurs (3.25) est asymptotiquement globalement stable et les systèmes (3.5) et (3.6) sont globalement hybride synchronisés.

Le problème de synchronisation est de déterminer les contrôleurs u_i ; $i = 1; 2; 3$; qui stabilisent les erreurs de synchronisation (3.25) ; puis le but de la synchronisation est de faire $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i(t)\| = 0$, $i = 1; 2; 3$ ou $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne

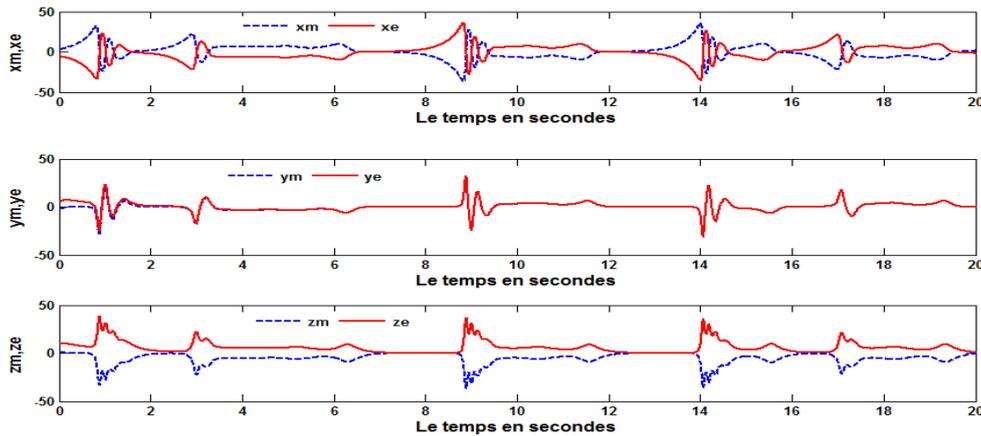


Figure .3.7 Les évolutions temporelles des états du système maître (x_m ; y_m , z_m) et du système esclave (x_e ; y_e , z_e) commandé par une synchronisation hybride pour différentes condition initiales

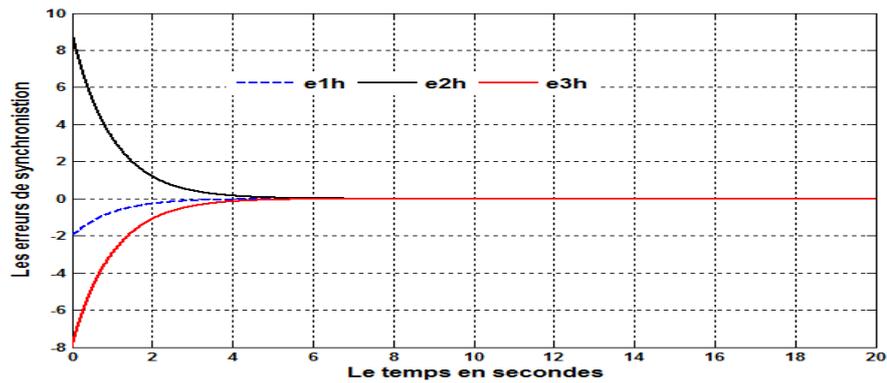


Figure 3.8 Les évolutions temporelles des erreurs de synchronisation e_{1h} , e_{2h} et e_{3h}

3.6.Conclusion

Les simulation des différents schémas de synchronisation , nous ont permis de dessiner sur des figures les évolutions temporelles des états des systèmes ainsi que des erreurs de synchronisation pour les trois types de synchronisation à savoir : la synchronisation complète , l'anti synchronisation et la synchronisation hybride et cela après la démonstration de la stabilité des erreurs de synchronisation en utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov .

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion générale

La théorie du chaos propose pour l'univers un modèle déterministe tout en laissant un espace au hasard, et une dimension à l'imprévisible. Le travail développé dans le cadre de ce mémoire, a eu pour objectif une étude comparative de quelques types de synchronisation de systèmes chaotiques. Nous avons commencé par présenter les systèmes dynamiques non linéaires à temps continu, puis on est allé exposer les différentes méthodes de contrôle et les différents types de synchronisation.

Pour atteindre nos objectifs, nous nous sommes appuyés sur trois méthodes classiques de synchronisation à savoir : la synchronisation complète, l'anti synchronisation et la synchronisation hybride qui existent dans la littérature et nous avons proposé des simulations sous MATLAB basées sur la méthode d'Euler pour la résolution des équations différentielles. Nous avons pu voir les évolutions temporelles des états des systèmes ainsi que les erreurs de synchronisation pour les trois types de synchronisation.

- [1] Fujisaka, H. & Yamada, T., 1983. Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems. *Progress of Theoretical Physics*, 69(1), pp.32–47.
- [2] Yamada, T. & Fujisaka, H., 1983. Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems. II: The Mapping Approach. *Progress of Theoretical Physics*, 70(5), pp.1240–1248
- [3] Pecora, L.M. & Carroll, T.L., 1990. Synchronization in chaotic systems. *Physical Review Letters*, 64(8), pp.821–824.
- [4] Pecora, L. & Carroll, T., 1992. Synchronized chaotic signals and systems. [Proceedings] ICASSP-92: 1992 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing.
- [5] Alligood, K.T. et al., 1997. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. *Physics Today*, 50(11), pp.67–68.
- [6] Ott, E., 2002. Chaos in Dynamical Systems. Available at: <http://dx.doi.org/10.1017/cbo9780511803260>.
- [7] Li, C. & Yan, J., 2006. Generalized projective synchronization of chaos: The cascade synchronization approach. *Chaos, Solitons & Fractals*, 30(1), pp.140–146.
- [8] Ge, Z.-M. & Chen, C.-C., 2004. Phase synchronization of coupled chaotic multiple time scales systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, 20(3), pp.639–647.
- [9] Jia, Q., 2007. Projective synchronization of a new hyperchaotic Lorenz system. *Physics Letters A*, 370(1), pp.40–45. Available at: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2007.05.028>.
- [10] Yan, J. & Li, C., 2006. Generalized projective synchronization for the chaotic Lorenz system and the chaotic Chen system. *Journal of Shanghai University (English Edition)*, 10(4), pp.299–304.
- [11] Li, P. & Cao, J., 2007. Stabilisation and synchronisation of chaotic systems via hybrid control. *IET Control Theory & Applications*, 1(3), pp.795–801.
- [12] Vaidyanathan, S. & Pakiriswamy, S., 2012. Generalized Projective Synchronization of Double-Scroll Chaotic Systems Using Active Feedback Control. *Advances in Computer Science and Information Technology. Networks and Communications*, pp.111–118.
- [13] Pakiriswamy, S. & Vaidyanathan, S., 2012. Generalized Projective Synchronization of Three-Scroll Chaotic Systems via Active Control. *Advances in Computer Science and Information Technology. Computer Science and Engineering*, pp.146–155.
- [14] Vaidyanathan, S. & Sampath, S., 2012. Anti-synchronization of four-wing chaotic systems via sliding mode control. *International Journal of Automation and Computing*, 9(3), pp.274–279.
- [15] Ott, E., Grebogi, C. and Yorke, J.A., 1990. Controlling chaos. *Physical review letters*, 64(11), p.1196.
- [16] Park, J.H., 2008. Adaptive control for modified projective synchronization of a four-dimensional chaotic system with uncertain parameters. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 213(1), pp.288-293.

- [17] Lakshmanan, M. & Murali, K., 1996. *Chaos in Nonlinear Oscillators*. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A.
- [18] Lakshmanan, M. & Murali, K., 1996. *Chaos in Nonlinear Oscillators: Controlling and Synchronization*. World Scientific Series on Nonlinear Science Series A.
- [19] Blasius, B., Huppert, A. & Stone, L., 1999. Complex dynamics and phase synchronization in spatially extended ecological systems. *Nature*, 399(6734), pp.354–359. Available at: <http://dx.doi.org/10.1038/20676>.
- [20] Yau, H.T., 2004. Design of adaptive sliding mode controller for chaos synchronization with uncertainties. *Chaos, Solitons & Fractals*, 22(2), pp.341-347.
- [21] Rasappan, S. & Vaidyanathan, S., 2012. Hybrid synchronization of n-scroll Chua and Lur'e chaotic systems via backstepping control with novel feedback. *Archives of Control Sciences*, 22(3).
- [22] Anstett, F., 2006. *Les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement: synthèse et cryptanalyse* (Doctoral dissertation, Université Henri Poincaré-Nancy I).
- [23] Hammami, S., 2009. *Sur la stabilisation de systèmes dynamiques continus non linéaires exploitant les matrices de formes en flèche: application à la synchronisation de systèmes chaotiques* (Doctoral dissertation, Ecole Centrale de Lille).
- [24] Chua, L.O., 1993. A universal circuit for studying and generating chaos-part II: Strange attractors. *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, 40(10), pp.182-186. Lorenz, E.N., 1963. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the atmospheric sciences*, 20(2), pp.130-141.
- [25] Kennedy, M.P., 1993. Three steps to chaos. II. A Chua's circuit primer. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 40(10), pp.657-674.
- [26] Pikovsky, A., Rosenblum, M., Kurths, J. and Kurths, J., 2003. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences* (Vol. 12). Cambridge university press.
- [27] Gouesbet, G. and Meunier-Guttin-Cluzel, S., 2003. Dynamique non linéaire, chaos et effets thermiques. *Techniques de l'ingénieur. Génie énergétique*, 1(BE8110), pp.BE8110-1.
- [28] González-Miranda, J.M., 2004. *Synchronization and Control of Chaos - An Introduction for Scientists and Engineers*.
- [29] Sprott, J.C., 1993. *Strange attractors: Creating patterns in chaos*. New York: M&T Books.
- [30] Bai, E.W. and Lonngren, K.E., 1997. Synchronization of two Lorenz systems using active control. *Chaos, Solitons & Fractals*, 8(1), pp.51-58.
- [31] Lü, J., Chen, G. and Cheng, D., 2004. A new chaotic system and beyond: the generalized Lorenz-like system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(05), pp.1507-1537
- [32] Rössler, O.E., 1979. An equation for hyperchaos. *Physics Letters A*, 71(2-3), pp.155-157.
- [33] Xiao-Qun, W. and Jun-An, L., 2003. Parameter identification and backstepping control of uncertain Lü system. *Chaos, Solitons & Fractals*, 18(4), pp.721-729.

- [34] Rasappan, S., 2015. Hybrid synchronization of hyperchaotic n-scroll Chua circuit using adaptive backstepping control. *Cogent Engineering*, 2(1), p.1009273.
- [35] Huang, L.L., Shi, S.S. and Zhang, J., 2015. Dislocation synchronization of the different complex value chaotic systems based on single adaptive sliding mode controller. *Mathematical Problems in Engineering*.
- [36] Konishi, K., Hirai, M. and Kokame, H., 1998. Sliding mode control for a class of chaotic systems. *Physics Letters A*, 245(6), pp.511-517.
- [37] August, E. and Barahona, M., 2011. Obtaining certificates for complete synchronisation of coupled oscillators. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 240(8), pp.795-803.
- [38] Sundarapandian, V. and Karthikeyan, R., 2011. Anti-synchronization of Lü and Pan chaotic systems by adaptive nonlinear control. *Eur J Sci Res*, 64(1), pp.94-106.
- [39] Rosenblum, M.G., Pikovsky, A.S. and Kurths, J., 1997. From phase to lag synchronization in coupled chaotic oscillators. *Physical Review Letters*, 78(22), p.4193.
- [40] Jia, Q., 2007. Projective synchronization of a new hyperchaotic Lorenz system. *Physics Letters A*, 370(1), pp.40-45.
- [41] Zhou, B., Qi, L. and Li, X., 2009, December. FSHP Synchronization in Rikitake Chaotic Flow and Application to Secure Communication. In *Computational Intelligence and Software Engineering, 2009. CiSE 2009. International Conference on* (pp. 1-4). IEEE.
- [42] Wang, X., Ouannas, A., Pham, V.T. and Abdolmohammadi, H.R., 2018. A fractional-order form of a system with stable equilibria and its synchronization. *Advances in Difference Equations*, 2018(1), p.20.
- [43] Ouannas, A., Azar, A. T., Ziar, T., & Radwan, A. G. (2017). Generalized Synchronization of Different Dimensional Integer-Order and Fractional Order Chaotic Systems. In *Fractional Order Control and Synchronization of Chaotic Systems* (pp. 671-697). Springer International Publishing.
- [44] Ouannas, A. and Odibat, Z., 2016. On inverse generalized synchronization of continuous chaotic dynamical systems. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, 2(1), pp.1-11.
- [45] Hu, M. and Xu, Z., 2008. A general scheme for QS synchronization of chaotic systems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69(4), pp.1091-1099.
- [46] Ortega, J.M., 1973. Stability of difference equations and convergence of iterative processes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 10(2), pp.268-282.
- [47] De Larminat, P., 1996. *Automatique: commande des systèmes linéaires*. Paris: Hermes.