République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Larbi Tebessi-Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département :des science de la matière

MEMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences de la Matière

Filière : Physique

Option : Physique de la matière condensée

Thème :

Etude de l'interaction de l'équation DKP en présence du potentiel coulombien

Présenté par :

KHALED Fatma Zahra&YOUSFI Rim

Devant le jury :

Mr A. Boudiar	**M .C .B**	**Université de Tébessa**	**Président**
Mr H.Aounallah	**M .A .A**	**Université de Tébessa**	**Rapporteur**
Mr M .Mansour	**M .C .B**	**Université deTébessa**	**Examinateur**

Date de soutenance :25/06/2019

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Tébessa –Tébessa
Faculté des Science Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Déclaration sur l'honneur de non-Plagiat

(À joindre obligatoirement au mémoire; Remplie et signée)

Nous soussignions

Nom, prénom: yousfi Rim & Khaled Fatma Zahra

N° de carte d'étudiant: (1) 34022597/14 (2) 34021923/14

Régulièrement inscrits (es) en **Master** au **Département Sciences de la Matière**

Année universitaire: **2018/2019**

Domaine: **Sciences de la matière**

Filière: **Physique**

Spécialité: Physique de la matière condensée

Intitulé du mémoire: Etude de l'interaction de l'équation DKP en présence du potentiel coulombien

Attestons que notre mémoire est un travail original et que toutes les sources utilisées ont été indiquées dans leur totalité. Nous certifions également que nous n'avons ni recopié ni utilisé des idées ou des formulations tirées d'un ouvrage, article, ou mémoire, en version imprimée ou électronique, sans mentionner précisément leur origine et que les citations intégrales sont signalées entre guillemets.

Sanctions en cas de plagiat prouvé:

Les étudiants seront convoqués devant le conseil de discipline, les sanctions prévues selon la gravité du plagiat sont:

- L'annulation du mémoire avec possibilité de le refaire sur un sujet différent.
- L'exclusion d'une année du master.
- L'exclusions définitive.

07 جويلية 2019

Fait à Tébessa, le: 07/07/19

Signature des étudiants (es):

(1): (2):

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة الحركة النسبية الكمومية للبوزونات العددية ذات اللف في الفضاء التبادلي وغير التبادلي الذاتي 0 و 1 والمتجهة في وجود كمون كولومب $v = \frac{\mathrm{kq}}{r}$ تم الحصول على التعبير عن طاقات الحالة المرتبطة وكذلك دالة الموجة من خلال دراسة وحل معادلة ديكابي.

Abstract

In this thesis, we studied the relativistic quantum motion of scalar and vector bosons of 0 spin and 1 spin in the presence of Coulomb potential$V = \frac{\mathbf{kq}}{\mathbf{r}}$ in a commutative and non-commutative space. Expressions are obtained for bound state energies and the wave functionsby studying and solving the DKP equation.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié le mouvement quantique relativiste des bosons scalaires et vecteurs de spin 0et spin 1 en présence de potentiel Coulombien $V = \frac{\mathbf{kq}}{\mathbf{r}}$ dans un espace commutatif et non-commutatif. Des expressions sont obtenues pour les énergies d'état liées ainsi que les fonctions d'onde par étudié et résoudre l'équation DKP.

Dédicace

Je dédié cet humble travail :

- A Allah le tout puissant.
- A mes parents que dieu leur procure bonne santé et longue vie.

A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de ce projet : A ma sœur ' Khaled Zaka ',

Et bien sûr :

- A mes frères ,
- A ma famille ,
- A mon binôme 'Youssfi Rym',
- A tout mes amie

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnaient durant mon chemin d'études supérieures .

- Et à tout mes enseignants ,
- Et Spécialement mon encadreur Prof 'Aounallah Houcine'.

Dédicace

Je dédié cet humble travail :

- ✓A Allah le tout puissant.
- ✓A mes parents que dieu leur procure bonne santé et longue vie
- ✓ A celui que j'aime beaucoup et qui m'a soutenue tout au long de

Ce projet : A mes sœurs 'Assia '&'Souad',

Et bien sûr :

- ✓A mes frères, 'Wahid ', 'Youcef ' , 'Chaker ' , 'Anter ' , 'Elfahem',
- ✓A ma famille est petit et grand ,
- ✓A mon mari ; ' Saber', et à toute sa famille
- ✓A mon cher amis ; 'Sabrine ' , 'Sana ' , 'Wafa ' , ' Souad', 'Abir', 'Roufaida',
- ✓ A mon binôme 'Khaled Fatma Zahra',
- ✓A tous mes amies

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient

toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnaient durant mon

Chemin d'études supérieures.

- ✓ Et à tout mes enseignants ,
- ✓ Et Spécialement mon encadreur Prof 'Aounallah Houcine'.

Remerciements

Nous tenons tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant et miséricordieux, qui nous a donné la force , la patience ,la santé, la volonté et le courage qui nous ont accomplir ce Modeste travail.

Dans cette occasion nous adresser nos profonds remerciements et nos profondes reconnaissances à :Notre encadrant Prof (AounallahHoucine)Maître assistant A à l'Université de Tébessa, pour ses précieux conseils ,l'orientation, la confiance, et la patience qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce recherche n'aurait pas bon .

Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury Monsieur (Boudiar Abid)Maître de Conférence Bà l'Université de Larbi-Tébessi - Tébessa, pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de notre mémoire,et Monsieur(Mansour Mouhamed)Maître de Conférence B à l'Université de Larbi-Tébessi -Tébessa-, qui a accepté de juger cet mémoire.

On n'oublie pas nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragée au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

Table des matières

Liste de symboles

j^{μ} :Le quadricourant.

A^{μ} :Le quadripotentiel.

H_D :Hamiltonien de Dirac.

σ_x, σ_y :Matrices de Pauli.

$\Theta, \overline{\Theta}$:Paramétres de la non-commutativité.

$\Box$:Le dalembertien.

$\widehat{W}$:Opérateur de Weyl.

$\widehat{\psi}_{KG}$:Fonction d'onde de Klein-Gordon dans un espace noncomutatif.

$\widehat{\psi}_D$:Fonction d'onde de Dirac dans un espace noncomutatif.

$\widehat{\psi}_K$:Fonction d'onde de Kemmer dans un espace noncomutatif.

$\widetilde{f}(k)$:Transformée de Fourier.

$\star$:Produit star de Moyal.

$\otimes$:Produit tensoriel.

s_i :Les matrices standards des particules de spin-1.

(DO) :L'oscillateur de Dirac.

$a/$:Slash de Feynman.

N_{norm} :La constante de normalisation.

$H_n(x)$:Fonction de Hermite.

R^D :Espace enclidien à D dimensions.

$\in_{\mu\nu}$:Tenseur Cevi-Levita.

ε :Champ électrique.

(EDP) :Energy-dependent potential.

(NC) :Noncommutatif.

NC :Noncommutatif.

β :Matrice de Kemmer.

$2m/e$:Moment magnétique anomale.

$\sum \mu\nu$:Tenseur de spin.

$\overrightarrow{\alpha}$:Les matrices de Dirac.

Δ :Laplacien.

ψ_{KG} :La fonction d'onde de Klein-Gordon.

ψ_D :La fonction d'onde de Dirac.

ψ_K :La fonction d'onde de Kemmer.

$g_{\mu\nu}$:Le tenseur fondamental.

$F_{\mu\nu}$:Tenseur électromagnétique.

.

Introduction Générale

La théorie que l'on appelle relativité restreinte a été élaborée dans un article d'**Einstein** paru en 1905. Cette théorie n'avait pas pour but d'élucider des phénomènes inexpliqués par la mécanique de **Newton** mais permettait plutôt, à la suite d'une réflexion sur le concept de temps, d'intégrer certains résultats connus de l'électromagnétique de **Maxwell** en étendant le principe de relativité de **Galilée** à cette dernière [1].

La mécanique ondulatoire a commencé comme une mécanique ondulatoire relativiste. Par **Louis de Broglie** 1923 [2] et **Erwin Schrödinger** [3], qui s'inspirent en grande partie de la relativité restreinte. L'équation de **Schrödinger** a été proposée de façon inductive en 1926, un peu après la mécanique des matrices [4] qui développée par **Werner Heisenberg**, **Max Born**, **Pascual Jordan** et **Wolfgang Pauli** dans les années 1925-1926, et s'est développée d'abord dans le but de décrire les petits objets (atomes). L'objet central de la théorie de **Schrödinger**, la fonction d'onde, est réputé contenir toute l'information possible sur un système.

Plus tard, la mécanique relativiste a été présentée par les théoriciens de la fin des années 1920 au moins au milieu des années 1940. En commençant par les travaux bien connus par **Dirac** [5], **Oskar Klein** [6] et **Walter Gordan** [7], et pour cette raison, il est généralement appelé l'équation de **Klein-Gordan**. Un intérêt particulier s'intéresse au problème général de la description des particules à spin arbitraire, introduit (et résolu) par **Majorana** dès 1932, puis reconsidéré, sous une approche différente, par **Dirac** en 1936 et par **Fierz-Pauli** en 1939. Le règlement final du problème en 1945 par **Bhabha**, qui est revenu aux idées générales introduites par **Majorana** en 1932.

L'effort réussi pour expliquer au moins certaines des caractéristiques des forces nucléaires de **H. Yukawa** en 1935 [8] a permis aux physiciens de s'occuper sérieusement de nouvelles particules différentes de celles connues à spin 1/2 (proton, neutron, électron et positron). Néanmoins, le succès de la théorie de **Yukawa** et l'observation des mésons dans les rayons cosmiques ont donné une motivation à la recherche et à l'étude des équations possibles décrivant les mésons. A cette époque, il n'existait aucune confirmation par l'éxperience sur le spin des mésons chargés et neutres, et pour ce qui est de la théorie de **Yukawa**, il pourrait être 0 ou 1 comme les équations pour les deux spin-0 **(Klein-Gordon)** et Le spin-1 **(Proca)** existait déjà, ainsi que les équations générales en notation généralisée des spinors **(Dirac-Fierz-Pauli)**. En 1939, **Kemmer** développa une théorie basée sur une équation «nouvelle», dont la fortune dura plusieurs années. La raison en est qu'il apparaissait clairement [9] que les interactions nucléaires à basse énergie étaient dues à des pseudoscalaires (spin-0) et vectoriels (spin-1), l'équation de **Kemmer** les décrivant tous les deux.

L'un des problèmes les plus intéressants de la physique théorique est le lien entre la mécanique quantique et la gravité depuis l'étude du cas d'une particule quantique non relativiste en présence d'une gravitation constante. Par exemple, l'oscillateur de **Dirac** dans un cordes cosmiques [10], l'étude des bosons pour l'espace de **Gödel type** [11], l'oscillateur de **klein-Gordon** en presence de longeur minimal [12], l'équation **DKP** dans un espace de **Robertson-Walker** [13], Effets de rotation sur le champ scalaire dans l'espace-temps de corde cosmique [14], solution de l'équation **DKP** spin-0 dans un espace de corde cosmique et global monopole [15] .
La mécanique quantique sur espace non-commutatif , dans un premier temps,a été proposée par **Heisenberg** [16] dans les années 30 puis développée par Snyder à la fin des années 40 [17], la géométrie non commutative est une géométrie où les coordonnées de l'espace-temps ne commutent pas, elle a été conçue à la fois pour répondre à des besoins en mathématiques et pour permettre d'aborder certains problèmes de physique théorique. Récemment, la mécanique quantique non-commutative a fait l'objet de plusieurs études, son application à toucher plusieurs domaines tels que, solution de l'équation **DKP** dans un espace de corde cosmique et global monopole non-commutative [18], l'équation **DKP** en presence de potentiel de **Coulomb** [19], Superstatistiques q-déformées de l'oscillateur anharmonique pour les cas non relativistes et relativistes de l'équation de **Klein-Gordon** [20], un modèle subatomique non relativiste dans les symétries de la mécanique quantique [21], Géométrie de **Schwarzschild** non commutative et principe d'incertitude généralisée [22] .
L'équation relativiste de premier ordre du **Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)** est une équation décrivant les particules de spin-0 et de spin-1,dans laquelle on remplace les matrices gamma de **Dirac** par des matrices bêta de **Kemmer** [23 − 26], plusieurs études récente, Particule de spin-0 et spin-1 dans un potentiel d'**Aharonov-Bohm** [27 − 28], l'oscillateur de **Kemmer** a deux dimensions [29], solution de l'oscillateur de **Kemmer** a deux dimensions dans un corde cosmique [30], l'équation **DKP** avec le potentiel de **Morse** [31], solution exact de l'équation de **Kemmer** avec l'oscillateur de **Dirac** [32] .
Dans cette travail, nous avons étudier l'équation **Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)** spin-0 et spin-1 en présence du potentiel Coulombien dans un espace commutatif et non commutative, et dans l'espace non commutatif en utilise la technique de perturbation [18 − 19].
Cette mémoire comporte trois chapitre de la façon suivante : dans **le premier chapitre**, on fait un bref rappel sur les équations relativistes bien connues tels que l'équation de **Klein-Gordon**, l'équation de **Dirac**. **Le deuxième chapitre**, solution de l'équation **DKP** spin-0 et spin-1 , nous avons calculée les spectres des énergies et les fonctions d'onde dans un espace commutatif. **Le troisième chapitre**, on résout l'équation **DKP** pour spin-0 et spin-1 dans un espace non commutatif. Enfin, nous terminons notre étude par une **conclusion.**

Chapitre 1

Formalisme sur les équations relativistes

1.1 Notation relativiste

Considérons deux événements dans l'espace-temps (t, x, y, z) et $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$, on postule que la distance entre deux points voisins est invariante dans les changements de coordonneés, et ainsi donné par $[33]$:

$$ds^2 = c^2dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{1.1}$$

Dans l'espace-temps, un point est représenté par le quadrivecteur x^μ tel que :

$$x^\mu = \left(x^0, x^k\right) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, x, y, z) \tag{1.2}$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3 \quad et \quad k = 1, 2, 3$$

avec

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \tag{1.3}$$

et $g^{\mu\nu}$ est la metrique de Minkowski, sous la forme

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

pour la la forme covariante, on a

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \tag{1.5}$$

Le quadrivecteur champ électromagnétique s'écrit [34] :

$$A^\mu = (V, \mathbf{A}) = (V, A_x, A_y, A_z) \tag{1.6}$$

avec

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \tag{1.7}$$

et

$$A_\mu = (V, -A_x, -A_y, -A_z) \tag{1.8}$$

L'opérateur gradient s'écrit :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right) \tag{1.9}$$

et

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right) \tag{1.10}$$

avec

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.11}$$

Le Dalembertien operateur $\Box$

$$\Box = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \tag{1.12}$$

La définition du vecteur à quatre moments est analogue,

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right), \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right) \tag{1.13}$$

avec

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2 c^2 \tag{1.14}$$

le tenseur de champ électromagnétique $F^{\mu\nu}$ suit de la manière bien connue [34] :

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial A^\mu}{\partial x_\nu} - \frac{\partial A^\nu}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

1.2 L'équation de Klein-Gordon

Dans la mécanique quantique l'équation de Schrödinger définie par [34] :

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V\left(x\right)\right]\psi\left(x,t\right) \tag{1.16}$$

le principe de correspondance à l'énergie de particule relativiste libre est :

$$E^2=m^2+p^2 \tag{1.17}$$

d'aprés le principe de correspondance de la mécanique quantique nous a permis de poser que

$$E=i\hbar\frac{\partial}{\partial t},\text{ et } p=-i\hbar\nabla \tag{1.18}$$

Pour obtenir une équation d'onde relativiste, nous commençons par considérer les particules libres avec la relation relativiste

$$p^\mu p_\mu=\frac{E^2}{c^2}-\mathbf{p}^2=m^2c^2 \tag{1.19}$$

Utilisant l'équation (1.18) dans (1.19), on trouve

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi_{KG}=0 \tag{1.20}$$

En l'absence d'interaction, l'équation de KG devient :

$$\left(p^\mu p_\mu-m^2c^2\right)\psi_{KG}=0 \tag{1.21}$$

Ou

$$\left(\Box+\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi_{KG}=0 \tag{1.22}$$

1.2.1 Solutions de l'équation de Klein-Gordon :

Les solutions libres sont de la forme

$$\psi_{KG}=\exp(-\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu) \tag{1.23}$$

avec

$$p_\mu x^\mu=p_0x^0-\mathbf{p}.\mathbf{x} \tag{1.24}$$

$$p_\mu x^\mu=Et-\mathbf{p}.\mathbf{x} \tag{1.25}$$

Alors ψ_{KG} devient

$$\psi_{KG}=\exp\left[\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}.\mathbf{x})\right] \tag{1.26}$$

Alors l'équation de KG devient sous la forme [34] :

$$p^{\mu}p_{\mu}\exp\left[\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}.\mathbf{x})\right]=m^2c^2\exp\left[\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}.\mathbf{x})\right] \tag{1.27}$$

Donc

$$E^2=m^2c^4+\mathbf{p}^2c^2 \tag{1.28}$$

Il existe deux solutions, un solution positive $E=+\sqrt{m^2c^4+\mathbf{p}^2c^2}$ (pour le particule), et un autre solution négative $E=-\sqrt{m^2c^4+\mathbf{p}^2c^2}$ (pour l'antiparticule).
Pour l'interaction électromagnétique l'équation de KG devient sous la forme suivante [35] :

$$\left(D^{\mu}D_{\mu}+m^2c^2\right)\psi_{KG}=0 \tag{1.29}$$

avec

$$D_{\mu}=\partial_{\mu}+ieA_{\mu} \tag{1.30}$$

dans le cas de l'interaction $A^{\mu}=(V,\mathbf{A})$, l' énergie est calculé comme suit :

$$E=eV\pm\sqrt{m^2c^4+(\mathbf{p}-e\mathbf{A})^2c^2} \tag{1.31}$$

1.3 L'équation de Dirac

l'idée principale de Dirac [36],

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^2c^2+m^2c^4&=\left(c\alpha_xp_x+c\alpha_yp_y+c\alpha_zp_z+\beta mc^2\right)^2\\&=\left(c\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{p}+\beta mc^2\right)^2\end{aligned} \tag{1.32}$$

Donc

$$\begin{gathered}c^2\left(p_x^2+p_y^2+p_z^2\right)+m^2c^4\\=\left[c^2\left(\alpha_x^2p_x^2+\alpha_y^2p_y^2+\alpha_z^2p_z^2\right)+\beta^2m^2c^4\right]\\+\left[c^2p_xp_y\left(\alpha_x\alpha_y+\alpha_y\alpha_x\right)+...\right]+\left[mc^3p_x\left(\alpha_x\beta+\beta\alpha_x\right)+...\right]\end{gathered} \tag{1.33}$$

ces équations nous disent que

$$\alpha_1^2=\alpha_2^2=\alpha_3^2=\beta^2=1 \tag{1.34}$$

$$\alpha_i\alpha_j+\alpha_j\alpha_i=0,\qquad i\neq j \tag{1.35}$$

$$\alpha_i\beta+\beta\alpha_i=0 \tag{1.36}$$

et les relations d'anticommutation définissent une algèbre pour les ψ_{Dirac} matrices.

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \tag{1.37}$$

de sorte que le Hamiltonien $H = c\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{p} + \beta mc^2$ est hermitien, les matrices α_i, β doivent également être hermitiennes ;

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \beta^\dagger = \beta \tag{1.38}$$

Dans notre etude on utilisé les quatres matrices suivantes :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad ,i = 1, 2, 3 \tag{1.39}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ sont les matrices de Pauli 2×2 et $\mathbf{I}$ sont les matrices 2×2 d'unité, Avec la forme explicite des matrices de Pauli [34], nous avons, en détail,

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

l'équation de Dirac prend la forme :

$$i\hbar\frac{\partial\psi_{Dirac}}{\partial t} = \left(c\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{p} + \beta mc^2\right)\psi_{Dirac} \tag{1.41}$$

ou s'écrit sous la forme :

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi_{Dirac} = 0 \tag{1.42}$$

avec

$$\gamma^0 = \beta \tag{1.43}$$

$$\gamma^i = \gamma^0\alpha_i, \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.44}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{1.45}$$

1.3.1 Solutions de l'équation de Dirac

Les solutions libres sont de la forme

$$\psi_{Dirac} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \exp(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu) \tag{1.46}$$

l'équation de Dirac (1.41) prend la forme

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \exp(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu) = \begin{pmatrix} mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \exp(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu) \tag{1.47}$$

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

En d'autre termes :

$$\left(E - mc^2\right) \varphi = c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p}\chi \tag{1.49}$$

$$\left(E + mc^2\right) \chi = c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p}\varphi \tag{1.50}$$

Avec

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \text{ et } \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \tag{1.51}$$

et pour $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, les équations (1.49) et (1.50) devient sout la forme :

$$E = \pm mc^2 \tag{1.52}$$

Alors pour l'énergie positive $E = mc^2$,

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

on trouve $\chi = 0$, et [37] :

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

Alors pour l'énergie négative $E = -mc^2$,

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1.55}$$

on trouve $\varphi = 0$, et [37] :

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

Donc, pour $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ [38] :

$$\psi_{Dirac} = e^{-imt}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\ e^{-imt}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ e^{-imt}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ e^{-imt}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.57}$$

Pour $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, a partir des équations (1.49) et (1.50) on trouve que [38] :

$$\begin{pmatrix}\varphi\\\chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\\frac{p_z}{E+m}\\\frac{p_-}{E+m}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\1\\\frac{p_-}{E+m}\\\frac{-p_z}{E+m}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{p_z}{E-m}\\\frac{p_-}{E-m}\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\frac{p_-}{E-m}\\\frac{-p_z}{E-m}\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.58}$$

avec la notation

$$p_\pm = p_x \pm ip_y \tag{1.59}$$

Chapitre 2

L'équation DKP dans un espace commutatif

2.1 L'équation DKP spin-0

2.1.1 Formalisme

L'équation libre de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) est une extension du formalisme covariant de Dirac, aux particules scalaires de spin-0 et vectorielles de spin-1,remplacons les matrices gamma γ par des matrices bêta β,s'écrit $[23-26]$:

$$(i\beta^{\mu}\partial_{\mu}-\frac{Mc}{\hbar})\Psi_{DKP}=0 \tag{2.1}$$

avec M est la masse, dans le cas de l'interaction avec un champ électromagnétique A^{μ} ; l'équation DKP prend la forme :

$$\left(i\beta^{\mu}\left(\partial_{\mu}+ieA_{\mu}\right)-\frac{Mc}{\hbar}\right)\Psi_{DKP}=0 \tag{2.2}$$

Les matrices β^{μ} de DKP $(\mu=0,1,2,3)$ sont des matrices de dimensions 5×5 pour le spin-0 et 10×10 pour le spin-1, satisfont l'algébre de Kemmer suivante :

$$\beta^{\mu}\beta^{\nu}\beta^{\lambda}+\beta^{\lambda}\beta^{\nu}\beta^{\mu}=g^{\mu\nu}\beta^{\lambda}+g^{\nu\lambda}\beta^{\mu} \tag{2.3}$$

où $g^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique, avec

$$g^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Pour le spin-0 on choisit les matrices de DKP [39] :

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \upsilon & \widetilde{0} \\ \widetilde{0}_T & 0 \end{pmatrix}, \beta^i = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \rho^i \\ -\rho^i_T & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, 3 \tag{2.5}$$

avec

$$\widetilde{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \upsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

et ρ^i_T représentant la matrice transposée de ρ^i.
Ce travail dans le système d'unité naturelle ;$(\hbar = c = 1)$
On définit par $\overline{\psi}$

$$\overline{\psi} = \psi^+ \left[2 \left(\beta^0 \right)^2 - 1 \right] \tag{2.8}$$

d'où

$$\overline{\psi}\beta^0 = \psi^+ \beta^0 \tag{2.9}$$

avec $\overline{\psi}$ étant l'adjoint de ψ ; qui vérifie l'équation adjointe suivante :

$$i \left(\partial_\mu - ieA_\mu \right) \overline{\psi}\beta^\mu + M\overline{\psi} = 0 \tag{2.10}$$

Et sachant que :

$$\overline{\psi}\beta^\mu\beta^0 = \psi^+\beta^{\mu+}\beta^0 \tag{2.11}$$

on tire l'équation de continuité :

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{2.12}$$

où J^μ est défini par :

$$J^\mu = \left(J^0, J^k \right) = \overline{\psi}\beta^\mu\psi \tag{2.13}$$

2.1.2 Le spectre des énergies :

On utilise le potentiel A_μ dans l'équation DKP , A_μ c'est le potentiel quadratique, sous la forme

$$A_0 = \frac{kq}{r} \text{ le potentiel de Coulomb} \tag{2.14}$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0 \tag{2.15}$$

et

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial t} = \partial_t \tag{2.16}$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x \tag{2.17}$$

$$\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y} = \partial_y \tag{2.18}$$

$$\partial_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial z} = \partial_z \tag{2.19}$$

Alors, l'équation (2.2) se transforme à :

$$\left[i\beta^0\left(\partial_t + i\frac{keq}{r}\right) + i\beta^1\partial_x + i\beta^2\partial_y + i\beta^3\partial_z - M\right]\psi = 0 \tag{2.20}$$

la fonction d'onde ψ est donnée par :

$$\psi = e^{-iEt}\left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5\right)^T \tag{2.21}$$

Aprés un calcul, l'équation (2.20) se transforme à :

$$\begin{pmatrix} 0 & \left(E - \frac{keq}{r}\right) & -i\partial_x & -i\partial_y & -i\partial_z \\ \left(E - \frac{keq}{r}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

On trouve le systeme suivant :

$$\left(E - \frac{keq}{r}\right)\psi_2 - i\partial_x\psi_3 - i\partial_y\psi_4 - i\partial_z\psi_5 = M\psi_1 \tag{2.23}$$

$$\left(E - \frac{keq}{r}\right)\psi_1 = M\psi_2 \tag{2.24}$$

$$i\partial_x\psi_1 = M\psi_3 \tag{2.25}$$

$$i\partial_y\psi_1 = M\psi_4 \tag{2.26}$$

$$i\partial_z\psi_1 = M\psi_5 \tag{2.27}$$

Utilisons les équations (2.24), (2.25), (2.26) et (2.27) dans l'équation (2.23), on trouve

$$\left\{\frac{1}{M}\left(E - \frac{keq}{r}\right)\left(E - \frac{keq}{r}\right) - i\partial_x\left(\frac{i\partial_x}{M}\right) - i\partial_y\left(\frac{i\partial_y}{M}\right) - i\partial_z\left(\frac{i\partial_z}{M}\right)\right\}\psi_1 = M\psi_1 \tag{2.28}$$

Après un calcul simple,on trouve :

$$\left[\frac{1}{M}\left(E-\frac{keq}{r}\right)^2+\frac{1}{M}\left(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2\right)\right]\psi_1=M\psi_1 \tag{2.29}$$

Donc

$$\left[\left(E-\frac{keq}{r}\right)^2+\left(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2\right)\right]\psi_1=M^2\psi_1 \tag{2.30}$$

avec

$$\left(\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2\right)=\nabla^2=\Delta \tag{2.31}$$

Par conséquent

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\left(-L^2\right)\text{ Voir l'annexe A.} \tag{2.32}$$

et

$$L^2\psi_1=l(l+1)\psi_1 \tag{2.33}$$

Nous remplaçons l'équations (2.32) dans l'équations(2.30)on trouve :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\left(E-\frac{keq}{r}\right)^2-\frac{L^2}{r^2}-M^2\right]\psi_1=0 \tag{2.34}$$

Alors

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+E^2-M^2-\frac{l(l+1)-keq^2}{r^2}-\frac{2keqE}{r}\right)\psi_1=0 \tag{2.35}$$

Cherchons évidemment pour cette équation la solution, sous une forme séparable, comme suite :

$$\psi_1(r,\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi)R(r) \tag{2.36}$$

avec $Y(\theta,\varphi)$ (les harmoniques sphériques), et nous avons, pour la composante radiale $R(r)$, l'équation différentielle suivante

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+E^2-M^2-\frac{l(l+1)-keq^2}{r^2}-\frac{2keqE}{r}\right)R(r)=0 \tag{2.37}$$

Pour trouver la solution, introduisons la variable $[40]$

$$\rho=\xi r \tag{2.38}$$

Et faisons les changements suivantes

$$\gamma=keq \tag{2.39}$$

$$\zeta=\frac{2\gamma E}{\xi},\xi^2=4(E^2-M^2) \tag{2.40}$$

Alors

$$\frac{d}{dr} = \xi \frac{d}{d\rho} \tag{2.41}$$

et

$$\frac{d^2}{dr^2} = \xi^2 \frac{d^2}{d\rho^2} \tag{2.42}$$

L'équations((2.38)-(2.42))dans l'équation (2.37), nous obtenons

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l\,(l+1) - \gamma^2}{\rho^2} - \frac{\zeta}{\rho} \right) R\,(\rho) = 0 \tag{2.43}$$

La solution générale est donnée par

$$R\,(\rho) = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^s u\,(\rho) \tag{2.44}$$

Alors, on a

$$\frac{dR\,(\rho)}{d\rho} = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^s \left[\frac{du\,(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{s}{\rho} - \frac{1}{2} \right) u\,(\rho) \right] \tag{2.45}$$

et

$$\frac{d^2 R\,(\rho)}{d\rho^2} = e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^s \left[\frac{d^2 u\,(\rho)}{d\rho^2} + \left(\frac{2s}{\rho} - 1 \right) \frac{du\,(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1}{4} - \frac{s}{\rho} + \frac{s\,(s-1)}{\rho^2} \right) u\,(\rho) \right] \tag{2.46}$$

Alors, (2.43) devient

$$\left[\frac{d^2 u\,(\rho)}{d\rho^2} + \left(\frac{2\,(s+1)}{\rho} - 1 \right) \frac{du\,(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{s\,(s+1)}{\rho^2} - \frac{l\,(l+1) - \gamma^2}{\rho^2} - \frac{s+1+\zeta}{\rho} \right) \right] u\,(\rho) = 0 \tag{2.47}$$

Avec la condition :

$$s\,(s+1) = l\,(l+1) - \gamma^2 \tag{2.48}$$

Donc

$$\left[\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + (2\,(s+1) - \rho) \frac{d}{d\rho} - (s+1+\zeta) \right] u\,(\rho) = 0 \tag{2.49}$$

L'équation (2.49) admet alors comme solution une fonction hypergéométrique confluente **voir l'annexe B.**

$$u\,(\rho) = N_{norm} \cdot {}_1F_1\,(s+1+\zeta, 2\,(s+1)\,; \rho)$$

Pour l'équation (2.48), on trouve la solution suivante

$$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2} + l \right)^2 - \gamma^2 \right]} \tag{2.50}$$

Cette condition est satisfaite seulement si

$$s+1+\zeta=-n \tag{2.51}$$

Alors

$$\frac{2\gamma E}{\xi}=-\left(n+1+s\right)$$

$$\frac{2\gamma E}{\xi}=-\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}+l\right)^{2}-\gamma^{2}\right]}\right) \tag{2.52}$$

Donc on trouve le spectre des énergies

$$E_{n}=M\left[1+\frac{\gamma^{2}}{\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}+l\right)^{2}-\gamma^{2}\right]}\right)^{2}}\right]^{\frac{-1}{2}}. \tag{2.53}$$

Ces résultats coïncident exactement avec ceux trouvés dans [41] .

2.1.3 La fonction d'onde

La fonction d'onde $\Psi\left(r;\theta,\varphi\right)$ prend la forme suivante :

$$\Psi\left(r;\theta,\varphi\right)=e^{-iEt}\begin{pmatrix}\psi_{1}\\ \psi_{2}\\ \psi_{3}\\ \psi_{4}\\ \psi_{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{M}e^{-iEt}\begin{pmatrix}M\\ E-\frac{keq}{r}\\ i\partial_{x}\\ i\partial_{y}\\ i\partial_{z}\end{pmatrix}\psi_{1}\left(r;\theta,\varphi\right) \tag{2.54}$$

Avec :

$$\psi_{1}\left(r;\theta,\varphi\right)=e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^{s}u\left(\rho\right)Y_{l}^{m}(\theta,\varphi) \tag{2.55}$$

$$\psi_{1}\left(r;\theta,\varphi\right)=N_{norm}\,e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^{s}{}_{1}F_{1}\left(\left(s+1+\zeta\right);2\left(s+1\right);\rho\right)Y_{l}^{m}(\theta,\varphi). \tag{2.56}$$

donc

$$\Psi\left(r;\theta,\varphi\right)=\frac{1}{M}e^{-iEt}\begin{pmatrix}M\\ E-\frac{keq}{r}\\ i\partial_{x}\\ i\partial_{y}\\ i\partial_{z}\end{pmatrix}N_{norm}\,e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^{s}{}_{1}F_{1}\left(\left(s+1+\zeta\right);2\left(s+1\right);\rho\right)Y_{l}^{m}(\theta,\varphi). \tag{2.57}$$

2.2 L'équation DKP spin-1

2.2.1 Formalisme

Maintenant étudions l'équation DKP spin-1 avec l'interaction avec un champ électromagnétique A^{μ}

$$\left(i\beta^{\mu}\left(\partial_{\mu}+ieA_{\mu}\right)-M\right)\psi=0 \tag{2.58}$$

Pour le spin-1, les matrices DKP devient sous la forme [19] :

$$\beta^0=\begin{pmatrix} 0 & \overline{0} & \overline{0} & \overline{0} \\ \overline{0}^T & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \overline{0}^T & \mathbf{I}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \overline{0}^T & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \end{pmatrix}, \beta^i=\begin{pmatrix} 0 & \overline{0} & e_i & \overline{0} \\ \overline{0}^T & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & iS_i \\ -e_i^T & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \\ \overline{0}^T & -iS_i & \mathbf{0}_{3\times 3} & \mathbf{0}_{3\times 3} \end{pmatrix}, \text{ avec } i=1,2,3 \tag{2.59}$$

avec $\overline{0}$ et e_i données par :

$$\overline{0}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.60}$$

$\mathbf{I}_{3\times 3}$ et $\mathbf{0}_{3\times 3}$ sont respectivement les matrices identité et nulle . Les S_i sont les matrices standards non-relativistes du spin 1

$$S_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, S_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_3=\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

2.2.2 Le spectre des énergies

L'état du système ψ est un spineur de dimension dix. Il s'écrit comme suit

$$\Psi=e^{-iEt}(\psi_{1,,}\psi_2,\psi_3,\psi_{4,}\psi_5,\psi_6,\psi_{7,}\psi_8,\psi_9,\psi_{10,})^T \tag{2.62}$$

nous réorganisons les composantes de Ψ comme suit

$$\psi_1=i\varphi, \overrightarrow{F}=\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \overrightarrow{G}=\begin{pmatrix} \psi_5 \\ \psi_6 \\ \psi_7 \end{pmatrix}, \overrightarrow{H}=\begin{pmatrix} \psi_8 \\ \psi_9 \\ \psi_{10} \end{pmatrix} \tag{2.63}$$

Aprés un calcul, l'équation (2.58).nous trouvons le systeme suivant :

$$i\partial_x\psi_5 + i\partial_y\psi_6 + \partial_z\psi_7 = M\psi_1 \tag{2.64}$$

$$i\partial_z\psi_9 - i\partial_y\psi_{10} + \left(E - k\frac{q}{r}e\right)\psi_5 = M\psi_2 \tag{2.65}$$

$$i\partial_x\psi_{10} - i\partial_z\psi_8 + \left(E - k\frac{q}{r}e\right)\psi_6 = M\psi_3 \tag{2.66}$$

$$i\partial_y\psi_8 - i\partial_x\psi_9 + \left(E - k\frac{q}{r}e\right)\psi_7 = M\psi_4 \tag{2.67}$$

$$\left(E - k\frac{q}{r}e\right)\psi_2 - i\partial_x\psi_1 = M\psi_5 \tag{2.68}$$

$$\left(E - k\frac{q}{r}e\right)\psi_3 - i\partial_y\psi_1 = M\psi_6 \tag{2.69}$$

$$\left(E - k\frac{q}{r}e\right)\psi_4 - i\partial_z\psi_1 = M\psi_7 \tag{2.70}$$

$$i\partial_y\psi_4 - i\partial_z\psi_3 = M\psi_8 \tag{2.71}$$

$$i\partial_z\psi_2 - i\partial_x\psi_4 = M\psi_9 \tag{2.72}$$

$$i\partial_x\psi_3 - i\partial_y\psi_2 = M\psi_{10} \tag{2.73}$$

A partir les équations$(2.64), (2.65), (2.66), (2.67), (2.68), (2.69), (2.70), (2.71), (2.72)\, et\, (2.73)$ et utilisant les relations bien connues

$$\nabla = \partial_x\overrightarrow{i} + \partial_y\overrightarrow{j} + \partial_z\overrightarrow{k} \tag{2.74}$$

alors

$$\nabla.\overrightarrow{G} = (\partial_x\overrightarrow{i} + \partial_y\overrightarrow{j} + \partial_z\overrightarrow{k})(\psi_5\overrightarrow{i} + \psi_6\overrightarrow{j} + \psi_7\overrightarrow{k}) = \partial_x G^1 + \partial_y G^2 + \partial_z G^3 \tag{2.75}$$

et

$$\nabla \times \overrightarrow{H} = (\partial_y\psi_{10} - \partial_z\psi_9)\overrightarrow{i} + (\partial_z\psi_8 - \partial_x\psi_{10})\overrightarrow{j} + (\partial_x\psi_9 - \partial_y\psi_8)\overrightarrow{k} \tag{2.76}$$

nous obtenons les équations algébriques suivantes

$$i\nabla \times \overrightarrow{F} = M\overrightarrow{H} \tag{2.77}$$

$$\nabla.\overrightarrow{G}=M\varphi \tag{2.78}$$

$$\left(E-k\frac{q}{r}e\right)\overrightarrow{G}-i\nabla\times\overrightarrow{H}=M\overrightarrow{F} \tag{2.79}$$

$$\left(E-k\frac{q}{r}e\right)\overrightarrow{F}+\nabla\varphi=M\overrightarrow{G} \tag{2.80}$$

d'aprés les properietes de nabla

$$\nabla.\left(\nabla\times\overrightarrow{H}\right)=0 \tag{2.81}$$

$$\nabla\times\left(\nabla\times\overrightarrow{F}\right)=\nabla.\left(\nabla.\overrightarrow{F}\right)-\nabla^2\overrightarrow{F} \tag{2.82}$$

On trouve

$$\left(E-k\frac{q}{r}e\right)^2\overrightarrow{F}+\left(\nabla.\left(\nabla.\overrightarrow{F}\right)\right)=M\left(M\overrightarrow{F}-\frac{1}{M}\left[\nabla.\left(\nabla.\overrightarrow{F}\right)-\nabla^2\overrightarrow{F}\right]\right) \tag{2.83}$$

Alors

$$\left(E-k\frac{q}{r}e\right)^2\overrightarrow{F}+\nabla^2\overrightarrow{F}-M^2\overrightarrow{F}=0 \tag{2.84}$$

Donc

$$\left\{\left(E-\frac{kqe}{r}\right)^2+\Delta-M^2\right\}\psi_2=0 \tag{2.85}$$

Nous avons :

$$J^2\psi_2=j(j+1)\psi_2 \tag{2.86}$$

avec

$$\psi_2(r,\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi)R(r) \tag{2.87}$$

Alors

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+(E^2-M^2)-\frac{j(j+1)-(keq)^2}{r^2}-\frac{2keqE}{r}\right)R(r)=0 \tag{2.88}$$

Par la même méthode utilisée dans le cas de spin-0, avec la condition

$$s\left(s+1\right)=j\left(j+1\right)-\gamma^2 \tag{2.89}$$

nous trouvons la solution de l'équation(2.88)

$$E_n=M\left[1+\frac{\gamma^2}{\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}+j\right)^2-\gamma^2\right]}\right)^2}\right]^{\frac{-1}{2}}. \tag{2.90}$$

Ces résultats coïncident exactement avec ceux trouvés dans [40] .

2.2.3 La fonction d'onde

La fonction d'onde $\psi_2(r,\theta,\varphi)$ prend la forme suivante :

$$\Psi_2(r,\theta,\varphi) = \chi(\theta,\varphi) R\left(\rho\right), \tag{2.91}$$

avec

$$R\left(\rho\right) = N_{norm}\, e^{-\frac{\rho}{2}} \rho^{s}{}_1F_1\left(\left(s+1+\zeta\right); 2\left(s+1\right); \rho\right). \tag{2.92}$$

Chapitre 3

L'équation DKP dans un espace non commutatif

3.1 Formalisme de l'espace non commutatif

La mécanique quantique ordinaire est formulée sur les espaces commutatifs satisfaisant les relations de commutation (relations de Heisenberg) suivantes :

$$[x_i, x_j] = 0, \;\; [p_i, p_j] = 0, \;\; [x_i, p_j] = i\delta_{ij} \tag{3.1}$$

Dans l'espace non commutatif, les relations de commutations changées par $[18 - 19]$:

$$[\widehat{x}_i, \widehat{x}_j] = i\theta_{ij}, \;\; [\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 0. \tag{3.2}$$

avec θ_{ij} c'est le paramétre de non-commutativité ; $\theta_{ij} \approx 10^{-35}$.
Pour calculer $\widehat{r}$, nous utilisons la méthode décrite dans l'**annexe C**, et nous trouvons ;

$$\widehat{r} = r - \frac{L\theta}{4r} \tag{3.3}$$

alors

$$\frac{1}{\widehat{r}} = \frac{1}{r} + \frac{L\theta}{4r^3} \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{\widehat{r^2}} = \frac{1}{r^2} + \frac{L\theta}{2r^4} \tag{3.5}$$

3.2 L'équation DKP spin-0

3.2.1 Le spectre des énergies

Dans cette section, en utilise l'équation (2.37) pour la composante radiale $R(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+(E^2-M^2)-\frac{l(l+1)-(keq)^2}{r^2}-\frac{2keqE}{r}\right)R(r)=0 \tag{3.6}$$

On pose le changement suivante

$$R(r)=\frac{u\,(r)}{r} \tag{3.7}$$

la derive de cette fonction par rapport a r est comme suit :

$$\frac{dR(r)}{dr}=\frac{1}{r}\frac{du\,(r)}{dr}-\frac{1}{r^2}u\,(r) \tag{3.8}$$

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}=\frac{1}{r}\frac{d^2u\,(r)}{dr^2}-\frac{2}{r^2}\frac{du\,(r)}{dr}+\frac{2}{r^3}u\,(r) \tag{3.9}$$

Donc, l'équation (3.6) devient sous la forme :

$$\frac{1}{r}\left(\frac{d^2}{dr^2}+(E^2-M^2)-\frac{l(l+1)-(keq)^2}{r^2}-\frac{2keqE}{r}\right)u(r)=0 \tag{3.10}$$

On trouve

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+(E^2-M^2)-\frac{l(l+1)-(keq)^2}{r^2}-\frac{2keqE}{r}\right)u(r)=0 \tag{3.11}$$

La transition de l'espace commutatif vers l'espace non commutatif se fait par la transformation suivante

$$r\rightarrow\widehat{r} \tag{3.12}$$

Alors, l'équation (3.11) devient

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+(E^2-M^2)-\frac{l(l+1)-(keq)^2}{\widehat{r}^2}-\frac{2keqE}{\widehat{r}}\right)u(r)=0 \tag{3.13}$$

on utilise les relations (3.4) et (3.5) dans l'équation (3.13), l'équation (3.11) se transforme en fonction des variables de l'espace commutatif r comme suit

$$\begin{aligned}\Bigg\{&\frac{d^2}{dr^2}+(E^2-M^2)-\frac{l(l+1)-(keq)^2}{r^2}-\frac{2keqE}{r}\\&+\frac{L\theta}{2}\left[\frac{1}{r^4}\left((keq)^2-l(l+1)\right)-\frac{1}{r^3}\,(keqE)\right]\Bigg\}u(r)=0\end{aligned} \tag{3.14}$$

On utilise la methode de perturbation $[18-19]$.l'énergie et la fonction d'onde pour $\theta=0$.on trouve :

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\left(\left(E^{(0)}\right)^2-M^2\right)-\frac{l(l+1)-(keq)^2}{r^2}-\frac{2keqE^{(0)}}{r}\right)u^{(0)}(r)=0 \tag{3.15}$$

Pour trouver la solution, introduisons la variable sans dimension

$$\rho=\xi r \tag{3.16}$$

Et faisons les changements suivantes :

$$\gamma=keq \tag{3.17}$$

$$\zeta=\frac{2\gamma E^{(0)}}{\xi},\xi^2=4\left(M^2-\left(E^{(0)}\right)^2\right) \tag{3.18}$$

Alors

$$\frac{d}{dr}=\xi\frac{d}{d\rho} \tag{3.19}$$

et

$$\frac{d^2}{dr^2}=\xi^2\frac{d^2}{d\rho^2} \tag{3.20}$$

Donc, l'équation (3.15) devient sous la forme :

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2}-\frac{1}{4}-\frac{l(l+1)-\gamma^2}{\rho^2}-\frac{\zeta}{\rho}\right)u^{(0)}(\rho)=0 \tag{3.21}$$

La solution générale est donnée par :

$$u^{(0)}(\rho)=Ne^{-\frac{\rho}{2}}\rho^{a+1}H^{(0)}(\rho) \tag{3.22}$$

Alors, on a :

$$\frac{du^{(0)}(\rho)}{d\rho}=Ne^{-\frac{\rho}{2}}\rho^{a+1}\left[\frac{dH^{(0)}(\rho)}{d\rho}+\left(\frac{a+1}{\rho}-\frac{1}{2}\right)H^{(0)}(\rho)\right] \tag{3.23}$$

et

$$\frac{d^2u^{(0)}(\rho)}{d\rho^2}=Ne^{-\frac{\rho}{2}}\rho^{a+1}\left[\frac{d^2H(\rho)}{d\rho^2}+\left(\frac{2(a+1)}{\rho}-1\right)\frac{dH^{(0)}(\rho)}{d\rho}+\left(\frac{a(a+1)}{\rho^2}-\frac{(a+1)}{\rho}+\frac{1}{4}\right)H^{(0)}(\rho)\right] \tag{3.24}$$

On trouve :

$$\rho\frac{d^2H^{(0)}(\rho)}{d\rho^2}+[2(a+1)-\rho]\frac{dH^{(0)}(\rho)}{d\rho}-[\zeta+a+1]H^{(0)}(\rho)=0 \tag{3.25}$$

avec la condition

$$a(a+1)=l(l+1)-\gamma^2 \tag{3.26}$$

Pour l'équation (3.26), on trouve la solution suivante :

$$a=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}+l\right)^2-\gamma^2\right]} \tag{3.27}$$

Cette condition est satisfaite seulement si

$$a + 1 + \zeta = -n \tag{3.28}$$

Alors

$$\frac{2\gamma E^{(0)}}{\xi} = -\left(n + 1 + a\right)$$

$$\frac{2\gamma E^{(0)}}{\xi} = -\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2} + l\right)^2 - \gamma^2\right]}\right) \tag{3.29}$$

Donc on trouve le spectre des énergies :

$$E_n^{(0)} = M\left[1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2} + l\right)^2 - \gamma^2\right]}\right)^2}\right]^{\frac{-1}{2}}. \tag{3.30}$$

3.2.2 La fonction d'onde

L'équation (3.25) admet alors comme solution une polynôme de Laguerre $L_n^{2\nu+1}(\rho)$, comme suit :

$$u^{(0)}\left(\rho\right) = N.\rho^{\nu+1}e^{-\frac{\rho}{2}}L_n^{2\nu+1}\left(\rho\right) \tag{3.31}$$

avec N c'est le constante de normalisation, pour calculer N en utilise la relation (3.16) et la relation suivante :

$$\int_0^\infty \left|u_{n,l}^{\theta=0}\right|^2 dr = 1 \tag{3.32}$$

alors

$$\int_0^\infty N^2\rho^{2\nu+2}e^{-\rho}\left[L_n^{2\nu+1}\left(\rho\right)\right]^2 dr = 1 \tag{3.33}$$

$$N^2\int_0^\infty \rho^{2\nu+2}e^{-\rho}\left[L_n^{2\nu+1}\left(\rho\right)\right]^2 dr = 1 \tag{3.34}$$

d'autre part

$$d\rho = \xi dr \tag{3.35}$$

$$dr = \frac{1}{\xi}d\rho \tag{3.36}$$

$$dr = \frac{1}{2\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)}} d\rho \tag{3.37}$$

$$\frac{N^2}{2\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)}} \int_0^\infty \rho^{2\nu+2} e^{-\rho} \left[L_n^{2\nu+1}(\rho)\right]^2 d\rho = 1 \tag{3.38}$$

avec

$$\int_0^\infty \rho^{\alpha+1} e^{-\rho} \left[L_n^\alpha(\rho)\right]^2 d\rho = (2n+\alpha+1) \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!} \tag{3.39}$$

Donc

$$\int_0^\infty \rho^{2\nu+2} e^{-\rho} \left[L_n^{2\nu+1}(\rho)\right]^2 d\rho = (2n+2\nu+2) \frac{\Gamma(n+2\nu+2)}{n!} \tag{3.40}$$

Alors

$$\frac{N^2}{2\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)}} (2n+2\nu+2) \frac{\Gamma(n+2\nu+2)}{n!} = 1 \tag{3.41}$$

et

$$N^2 = \frac{2\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)} n!}{(2n+2\nu+2)\, \Gamma(n+2\nu+2)} \tag{3.42}$$

$$N = \left(\frac{2\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)} n!}{(2n+2\nu+2)\, \Gamma(n+2\nu+2)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.43}$$

$$N = \left(\frac{2\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)} n!}{2\,(n+\nu+1)\, \Gamma(n+2\nu+2)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.44}$$

Donc

$$N = \left(\frac{\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)} n!}{(n+\nu+1)\, \Gamma(n+2\nu+2)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.45}$$

La dernière équation difinie la constante de normalization.

$$u^{(0)}(\rho) = \left(\frac{\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)} n!}{(n+\nu+1)\, \Gamma(n+2\nu+2)}\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{\nu+1} e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2\nu+1}(\rho) \tag{3.46}$$

3.2.3 Le spectre des énergies non commutatif

Pour $\theta \neq 0$, en utilise la relation

$$\left\langle r^{-k}\right\rangle = \int_0^\infty r^{-k}\left|u_{n,l}^{\theta=0}(r)\right|^2 dr\delta_{mm'} \tag{3.47}$$

On remplace (3.46) dans (3.47) , on trouve :

$$\left\langle r^{-k}\right\rangle = \left(\frac{\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}n!}{(n+\nu+1)\,\Gamma(n+2\nu+2)}\right)\int_0^\infty r^{-k}\rho^{2\nu+2}e^{-\rho}\left[L_n^{2\nu+1}(\rho)\right]^2 dr \tag{3.48}$$

avec

$$r = \frac{1}{\xi}\rho \tag{3.49}$$

$$r = \frac{1}{2\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}}\rho \tag{3.50}$$

alors

$$\begin{aligned} r^{-k} &= \frac{1}{2^{-k}\left(\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}\right)^{-k}}\rho^{-k} \\ &= 2^k\left(\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}\right)^k\rho^{-k} \end{aligned} \tag{3.51}$$

alors

$$\begin{aligned} \left\langle r^{-k}\right\rangle &= \left(\frac{\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}n!}{(n+\nu+1)\,\Gamma(n+2\nu+2)}\right)\int_0^\infty 2^k\left(\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}\right)^k\rho^{-k}\rho^{2\nu+2}e^{-\rho}\left[L_n^{2\nu+1}(\rho)\right]^2 dr \\ &= \left(\frac{\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}n!}{(n+\nu+1)\,\Gamma(n+2\nu+2)}\right)\int_0^\infty 2^k\left(\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}\right)^k\rho^{2\nu+2-k}e^{-\rho}\left[L_n^{2\nu+1}(\rho)\right]^2 dr \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\left\langle r^{-k}\right\rangle = 2^k\left(\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}\right)^k\left(\frac{\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}n!}{(n+\nu+1)\,\Gamma(n+2\nu+2)}\right)\int_0^\infty \rho^{2\nu+2-k}e^{-\rho}\left[L_n^{2\nu+1}(\rho)\right]^2 dr \tag{3.53}$$

et

$$dr = \frac{1}{2\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)}} d\rho \tag{3.54}$$

alors

$$\left\langle r^{-k}\right\rangle = 2^k \left(\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)}\right)^k \frac{\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)} n!}{(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)}$$

$$\times \int_0^\infty \frac{1}{2\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)}} \rho^{2\nu+2-k} e^{-\rho} \left[L_n^{2\nu+1}(\rho)\right]^2 d\rho$$

$$= 2^k \left(\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)}\right)^k \frac{\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)} n!}{(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)} \frac{1}{2\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)}} \int_0^\infty \rho^{2\nu+2-k} e^{-\rho} \left[L_n^{2\nu+1}(\rho)\right]^2 d\rho \tag{3.55}$$

$$\left\langle r^{-k}\right\rangle = 2^k \left(\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)}\right)^k \frac{n!}{2(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)} \int_0^\infty \rho^{2\nu+2-k} e^{-\rho} \left[L_n^{2\nu+1}(\rho)\right]^2 d\rho \tag{3.56}$$

Donc

$$\left\langle r^{-k}\right\rangle = \frac{2^k \left(\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)}\right)^k n!}{2(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)} \int_0^\infty \rho^{2\nu+2-k} e^{-\rho} \left[L_n^{2\nu+1}(\rho)\right]^2 d\rho \tag{3.57}$$

On à :

$$L_n^\nu(\rho) = \frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\nu+1)} \cdot {}_1F_1(-n, \nu+1, \rho) \tag{3.58}$$

alors

$$L_n^{2\nu+1}(\rho) = \frac{\Gamma(n+2\nu+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu+2)} \cdot {}_1F_1(-n, 2\nu+2, \rho) \tag{3.59}$$

alors

$$\left\langle r^{-k}\right\rangle = \frac{2^k \left(\sqrt{\left(M^2 - \left(E^{(0)}\right)^2\right)}\right)^k n!}{2(n+\nu+1)\Gamma(n+2\nu+2)}$$

$$\times \int_0^\infty \rho^{2\nu+2-k} e^{-\rho} \left[\frac{\Gamma(n+2\nu+2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\nu+2)} \cdot {}_1F_1(-n, 2\nu+2, \rho)\right]^2 d\rho \tag{3.60}$$

et

$$\left\langle r^{-k}\right\rangle =\frac{2^{k}\left(\sqrt{\left(M^{2}-\left(E^{(0)}\right)^{2}\right)}\right)^{k}n!}{2\left(n+\nu+1\right)\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}\left(\frac{\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(2\nu+2\right)}\right)^{2}\int_{0}^{\infty}\rho^{2\nu+2-k}e^{-\rho}\left[_{.1}F_{1}\left(-n,2\nu+2,\rho\right)\right]^{2}d\rho \tag{3.61}$$

et

$$\int_{0}^{\infty}\rho^{\nu-1}e^{-\rho}\left[_{1}F_{1}\left(-n,\gamma,\rho\right)\right]^{2}=\frac{n!\Gamma\left(\nu\right)}{\gamma\left(\gamma+1\right).....\left(\gamma+n-1\right)}$$
$$\left\{1+\frac{n\left(\gamma-\nu-1\right)\left(\gamma-\nu\right)}{1^{1}\gamma}+\frac{n\left(n-1\right)\left(\gamma-\nu-2\right)\left(\gamma-\nu-1\right)\left(\gamma-\nu\right)\left(\gamma-\nu+1\right)}{1^{1}2^{2}\gamma\left(\gamma-1\right)}\right.$$
$$\left.+\frac{n\left(n-1\right)....1\left(\gamma-\nu-n\right)...\left(\gamma-\nu+n-1\right)}{1^{1}2^{2}....n^{2}\gamma\left(\gamma-1\right).....\left(\gamma+n-1\right)}\right\} \tag{3.62}$$

alors

$$\int_{0}^{\infty}\rho^{2\nu+2-k}e^{-\rho}\left[_{.1}F_{1}\left(-n,2\nu+2,\rho\right)\right]^{2}d\rho=\frac{n!\Gamma\left(\nu\right)}{\left(2\nu+2\right)_{n}}$$
$$\times\left\{1+\frac{n\left(2\nu+2-\nu-1\right)\left(2\nu+2-\nu\right)}{1^{1}\left(2\nu+2\right)}\right.$$
$$+\frac{n\left(n-1\right)\left(2\nu+2-\nu-2\right)\left(2\nu+2-\nu-1\right)\left(2\nu+2-\nu\right)\left(2\nu+2-\nu+1\right)}{1^{1}2^{2}\left(2\nu+2\right)\left(2\nu+2-1\right)}$$
$$\left.+\frac{n\left(n-1\right)....1\left(2\nu+2-\nu-n\right)...\left(2\nu+2-\nu+n-1\right)}{1^{1}2^{2}....n^{2}\left(2\nu+2\right)\left(2\nu+2-1\right).....\left(2\nu+2+n-1\right)}\right\} \tag{3.63}$$

Donc pour $k=3$

$$\left\langle r^{-3}\right\rangle =\frac{2^{3}\left(\sqrt{\left(M^{2}-\left(E^{(0)}\right)^{2}\right)}\right)^{3}n!}{2\left(n+\nu+1\right)\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}\left(\frac{\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(2\nu+2\right)}\right)^{2}$$
$$\times\int_{0}^{\infty}\rho^{2\nu+2-3}e^{-\rho}\left[_{.1}F_{1}\left(-n,2\nu+2,\rho\right)\right]^{2}d\rho \tag{3.64}$$

$$\left\langle r^{-3}\right\rangle =\frac{2^{3}\left(\sqrt{\left(M^{2}-\left(E^{(0)}\right)^{2}\right)}\right)^{3}n!}{2\left(n+\nu+1\right)\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}\left(\frac{\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(2\nu+2\right)}\right)^{2}$$
$$\times\int_{0}^{\infty}\rho^{2\nu-1}e^{-\rho}\left[_{.1}F_{1}\left(-n,2\nu+2,\rho\right)\right]^{2}d\rho \tag{3.65}$$

$$\left\langle r^{-3}\right\rangle = \frac{2^3\left(\sqrt{\left(M^2-\left(E^{(0)}\right)^2\right)}\right)^3 n!}{2\left(n+\nu+1\right)\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}\left(\frac{\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(2\nu+2\right)}\right)^2\frac{n!\Gamma\left(2\nu\right)}{\left(2\nu+2\right)_n}$$
$$\left\{1+\frac{n\left(2\nu+2-2\nu-1\right)\left(2\nu+2-2\nu\right)}{1^1\left(2\nu+2\right)}\right.$$
$$+\frac{n\left(n-1\right)\left(2\nu+2-2\nu-2\right)\left(2\nu+2-2\nu-1\right)\left(2\nu+2-2\nu\right)\left(2\nu+2-2\nu+1\right)}{1^1 2^2\left(2\nu+2\right)\left(2\nu+2-1\right)}$$
$$\left.+\frac{n\left(n-1\right)....1\left(2\nu+2-2\nu-n\right)...\left(2\nu+2-2\nu+n-1\right)}{1^1 2^2....n^2\left(2\nu+2\right)\left(2\nu+2-1\right).....\left(2\nu+2+n-1\right)}\right\} \tag{3.66}$$

$$\left\langle r^{-3}\right\rangle = \frac{2^3\left(\sqrt{\left(M^2-\left(E^{(0)}\right)^2\right)}\right)^3 n!}{2\left(n+\nu+1\right)\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}\left(\frac{\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}{\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(2\nu+2\right)}\right)^2\frac{n!\Gamma\left(2\nu\right)}{\left(2\nu+2\right)_n}\left\{1+\frac{2n}{1^1\left(2\nu+2\right)}\right\} \tag{3.67}$$

$$\left\langle r^{-3}\right\rangle = \frac{4\left(\sqrt{\left(M^2-\left(E^{(0)}\right)^2\right)}\right)^3 n!}{\left(n+\nu+1\right)}\frac{\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}{\left(\Gamma\left(n+1\right)\Gamma\left(2\nu+2\right)\right)^2}\frac{n!\Gamma\left(2\nu\right)}{\left(2\nu+2\right)_n}\left\{1+\frac{2n}{\left(2\nu+2\right)}\right\} \tag{3.68}$$

Utilisons les relations suivantes :

$$\left(\gamma\right)_n = \gamma\left(\gamma+1\right)\left(\gamma+2\right).........\left(\gamma+n-1\right) \tag{3.69}$$

$$\Gamma\left(n+1\right) = n! \tag{3.70}$$

$$\frac{\Gamma\left(\gamma+n\right)}{\Gamma\left(\gamma\right)} = \left(\gamma\right)_n \tag{3.71}$$

$$\Gamma\left(p+1\right) = p\Gamma\left(p\right) \tag{3.72}$$

alors

$$\left\langle r^{-3}\right\rangle = \frac{4\left(\sqrt{\left(M^2-\left(E^{(0)}\right)^2\right)}\right)^3}{\left(n+\nu+1\right)}\frac{\Gamma\left(2\nu\right)}{\left(\Gamma\left(2\nu+2\right)\right)^2}\frac{\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}{\left(2\nu+2\right)_n}\left\{1+\frac{2n}{\left(2\nu+2\right)}\right\} \tag{3.73}$$

et

$$\frac{\Gamma\left(n+2\nu+2\right)}{\left(2\nu+2\right)_n} = \Gamma\left(2\nu+2\right) \tag{3.74}$$

alors

$$\left\langle r^{-3}\right\rangle = \frac{4\left(\sqrt{\left(M^2-\left(E^{(0)}\right)^2\right)}\right)^3}{\left(n+\nu+1\right)}\frac{\Gamma\left(2\nu\right)}{\left(\Gamma\left(2\nu+2\right)\right)^2}\Gamma\left(2\nu+2\right)\left\{1+\frac{2n}{\left(2\nu+2\right)}\right\}$$
$$= \frac{4\left(\sqrt{\left(M^2-\left(E^{(0)}\right)^2\right)}\right)^3}{\left(n+\nu+1\right)}\frac{\Gamma\left(2\nu\right)}{\Gamma\left(2\nu+2\right)}\left\{1+\frac{2n}{\left(2\nu+2\right)}\right\}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}\right)^3}{(n+\nu+1)} \frac{\Gamma(2\nu)}{(2\nu+1)(2\nu)\Gamma(2\nu)} \left\{1+\frac{2n}{(2\nu+2)}\right\} \tag{3.75}$$

Donc

$$\left\langle r^{-3}\right\rangle = \frac{4\left(\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}\right)^3}{(n+\nu+1)(2\nu+1)(2\nu)} \left\{1+\frac{n}{(\nu+1)}\right\} \tag{3.76}$$

on obtient la premier ordre de la théorie des perturbations

$$\left\langle r^{-3}\right\rangle = \frac{4\left(\sqrt{\left(M^2-(E^{(0)})^2\right)}\right)^3}{(n+\nu+1)(2\nu+1)(2\nu)} \left\{1+\frac{n}{(\nu+1)}\right\} \tag{3.77}$$

De meme ,on trouve que :

$$\left\langle r^{-4}\right\rangle = \frac{4\left(\sqrt{M^2-E^2}\right)^4}{(2\nu-1)\nu(2\nu+1)(n+\nu+1)(2\nu+1)} \left\{1+\frac{3n}{(\nu+1)}+\frac{3n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}\right\} \tag{3.78}$$

avec

$$\theta L = \theta L_z \tag{3.79}$$

et

$$L_z\psi = m\psi \tag{3.80}$$

on trouve

$$\begin{aligned} E^{(NC)} &= m\theta \times \\ &\left\{\left((keq)^2 - l(l+1)\right)\frac{2\left(\sqrt{M^2-E^2}\right)^4}{(2\nu-1)\nu(2\nu+1)(n+\nu+1)(2\nu+1)}\left[1+\frac{3n}{(\nu+1)}+\frac{3n(n-1)}{(\nu+1)(2\nu+3)}\right]\right. \\ &\left. -(keqE)\frac{\left(\sqrt{M^2-E^2}\right)^3}{(n+\nu+1)(2\nu+1)(\nu)}\left[1+\frac{n}{2\nu}\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.81}$$

Finalement, on trouve que

$$E = E^{(0)} + E^{(NC)} \tag{3.82}$$

3.3 L'équation DKP spin-1

Dans cette section, en utilise l'équation (3.6) pour la composante radiale $R(r)$:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+(E^2-M^2c^4)-\frac{j(j+1)-(keq)^2}{r^2}-\frac{2keqE}{r}\right)R(r)=0 \tag{3.83}$$

De même maniéré comme la section précédente, on trouve que

3.3.1 Le spectre des énergies

$$E = E^{(0)} + E^{(NC)} \tag{3.84}$$

avec

$$E_n^{(0)} = M\left[1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}+j\right)^2 - \gamma^2\right]}\right)^2}\right]^{\frac{-1}{2}}. \tag{3.85}$$

avec la condition

$$a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}+j\right)^2 - \gamma^2\right]} \tag{3.86}$$

et l'énergie pour l'espace non commutatif s'écrit sous la forme :

$$E^{(NC)} = m\theta \times$$

$$\left\{\left((keq)^2 - j(j+1)\right)\frac{2\left(\sqrt{M^2-E^2}\right)^4}{(2\nu-1)\,\nu\,(2\nu+1)\,(n+\nu+1)\,(2\nu+1)}\left[1 + \frac{3n}{(\nu+1)} + \frac{3n\,(n-1)}{(\nu+1)\,(2\nu+3)}\right]\right.$$
$$\left. -\,(keqE)\frac{\left(\sqrt{M^2-E^2}\right)^3}{(n+\nu+1)\,(2\nu+1)\,(\nu)}\left[1+\frac{n}{2\nu}\right]\right\} \tag{3.87}$$

3.3.2 La fonction d'onde

$$R^{(0)}(\rho) = \left(\frac{\sqrt{M^2-E^2}\,n!}{\Gamma\,(n+2\nu+2)\,(n+\nu+1)}\right)^{\frac{1}{2}} \rho^{\nu+1} e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2\nu+1}(\rho) \tag{3.88}$$

Conclusion

Dans cette mémoire, l'objectif principal est de resoudre l'équation **Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)** corresponds aux particules des spin-0 (les bosons scalaires) et spin-1 (les bosons vecteurs), en présence des **potentiels Coulombien** dans de l'espace commutatif et l'espace non commutatif.
La fonction d'onde ainsi que le spectre d'énergie, pour les deux espaces, ont été obtenus (des solutions analytiques et de plus exactes), et nous avons trouvé que le spectre d'énergie dépend de paramètre du potentiel Coulombien.
Dans le cadre de la non-commutativité, la situation est plus compliquée et la plupart des modèles ne peuvent pas être résolus avec précision. En raison de l'absence d'une solution analytique exacte, nous utiliserons la méthode de **Bopp-shift** et la théorie de la perturbation simple mais trés efficace. Le décalage d'énergie dû à la non-commutativité a été obtenu via la théorie de perturbation du premier ordre.
Le spectre de l'énergie est calculé en utilisant la théorie des perturbations, l'énergie est transitoire de l'espace commutatif à l'espace non commutatif.

Annexe A : Les moments cinétiques

On écrit la différentielle totale de $\psi\left(x,y,z\right)$

$$d\psi\left(x,y,z\right)=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\psi}{\partial z}dz \tag{A.1}$$

On éxprime les dérivées des composantes cartesiennes en utilisants les relations :

$$X=r\sin\theta\cos\varphi \tag{A.2}$$

$$Y=r\sin\theta\sin\varphi \tag{A.3}$$

$$Z=r\cos\theta \tag{A.4}$$

On remplace dx,dy,dz dans la différentielle et on trouve :

$$\begin{aligned}d\psi\left(x,y,z\right)=&\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dr\\&+\left(r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}+r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}-r\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\theta\\&+\left(-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}+r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)d\varphi.\end{aligned} \tag{A.5}$$

On écrit la différentielle totale de $\psi\left(r,\theta,\varphi\right)$:

$$d\psi\left(x,y,z\right)=\frac{\partial\psi}{\partial r}dr+\frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta+\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}d\varphi \tag{A.6}$$

En identifiant terme à terme on obtient :

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}+\cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta}=r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}+r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}-r\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}+r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{3.90}$$

En résolvant ce systéme ,on trouve les opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial x}=\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{3.91}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{3.92}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{3.93}$$

2-Le laplacien s'écrit :

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.94}$$

On éxprime chaque opérateur en notant que :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}.\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.95}$$

Chaque dérivée seconde conduit à une expression contenant des dérivées premiéres et secondes de combinaisons de r,θ, φ.Les opérateurs suivants x et y contiennent onzes termes alors que l'opérateur suivant z en a cinq.On déduit le laplacien :

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \tag{3.96}$$

3- Par définition , le moment cinétique classique s'écrit :

$$\overrightarrow{L_c} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{p} \tag{3.97}$$

Ou $\overrightarrow{p}$ est la quantité de moument de l'électron .En appelant $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ les vecteurs unitaires suivant x, y, z,on trouve :

$$\overrightarrow{L_c} = (yp_z - zp_y)\overrightarrow{i} + (zp_x - xp_z)\overrightarrow{j} + (xp_y - yp_x)\overrightarrow{k} \tag{3.98}$$

On déduit les composantes de l'opérateur de moment cinétique (régle de quantification) :

$$L_x = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{3.99}$$

$$L_x = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3.100}$$

$$L_z = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3.101}$$

On exprime les coordonnées cartisiénnes en fonction de r,θ, φ (l'étape 1), on obtient :

$$L_x = i\hbar\left[\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right] \tag{3.102}$$

$$L_y = i\hbar\left[-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right] \tag{3.103}$$

$$L_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{3.104}$$

On calcule le carré de l'opérateur de moment cinétique :

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{3.105}$$

On trouve :

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \tag{3.106}$$

Donc :

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \tag{3.107}$$

Annexe B :Fonction hypergéométrique

La fonction hypergéométrique confluente ${}_1F_1\left(a;b;x\right)$ (ou fonction de Kummer) est :

$$ {}_1F_1\left(a;c;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_n}{\left(c\right)_n}\frac{z^n}{n!}, \tag{3.108}$$

où $\left(a\right)_n$ est symbole de pochhammer.
Elle est solution de l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\left[z\frac{d^2}{dx^2}+\left(b-z\right)\frac{d}{dx}-n\right]u\left(z\right)=0 \tag{3.109}$$

Les fonctions de Bessel, les fonctions gamma incomplètes, les fonctions du cylindre parabolique et les polynômes de Laguerre peuvent être représentées à l'aide de fonctions hypergéométriques confluentes. E. T. Whittaker a introduit des fonctions $M_{\mu,\nu}(z)$ et $W_{\mu,\nu}(z)$ qui sont également liées aux fonctions hypergéométriques confluentes.
Le symbole de pochhammer définie par

$$\left(a\right)_n=\frac{\Gamma\left(a+n\right)}{\Gamma\left(a\right)} \tag{3.110}$$

Annexe C : L'espace non commutative

Dans un espace NC en utilise les relations de commutation suivantes

$$[\widehat{x}_i, \widehat{x}_j] = i\theta_{ij} \tag{B.1}$$

$$[\widehat{p}_i, \widehat{p}_j] = 0 \tag{B.2}$$

En utilisant la transformation de Bopp shift, dont elle est définie par

$$\widehat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} p_j \tag{B.3}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\widehat{r} = \sqrt{\widehat{x}.\widehat{x}} &= \sqrt{\left(x_i - \frac{\theta_{ij}}{2\hbar} p_j\right) \cdot \left(x_i - \frac{\theta_{ik}}{2\hbar} p_k\right)} \\
&= \sqrt{\left(x_i x_i - \frac{x_i \theta_{ij}}{2\hbar} p_j + o\left(\theta^2\right)\right)} \\
&= \sqrt{\left(r^2 - \frac{x_i \theta_{ij}}{2\hbar} p_j + o\left(\theta^2\right)\right)} \\
&= r\sqrt{\left(1 - \frac{x_i \theta_{ij}}{2\hbar r^2} p_j + o\left(\theta^2\right)\right)} \\
&= \left(r - \frac{x_i \theta_{ij}}{2\hbar r} p_j + o\left(\theta^2\right)\right)
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Avec

$$\theta_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \theta_k \tag{B.5}$$

Alors

$$\begin{aligned}
x_i \theta_{ij} p_j &= \frac{1}{2} \sum \varepsilon_{ijk} \theta_k x_i p_j \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(\varepsilon_{ij1} x_i p_j\right) \theta_1 + \left(\varepsilon_{ij2} x_i p_j\right) \theta_2 + \left(\varepsilon_{ij3} x_i p_j\right) \theta_3 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \left(x_2 p_3 - x_3 p_2\right) \theta_1 + \left(x_3 p_1 - x_1 p_3\right) \theta_2 + \left(x_1 p_2 - x_2 p_1\right) \theta_3 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ L_1 \theta_1 + L_2 \theta_2 + L_3 \theta_3 \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left(L.\theta\right)
\end{aligned} \tag{B.6}$$

On trouve

$$\widehat{r} = r - \frac{L\theta}{4\hbar r} \tag{B.7}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{\widehat{r}} = \frac{1}{r} + \frac{L\theta}{4\hbar r^3} \tag{B.8}$$

$$\frac{1}{\widehat{r^2}} = \frac{1}{r^2} + \frac{L\theta}{2\hbar r^4} \tag{B.9}$$

Bibliographie

[1] L Marleau, Mécanique et relativité restreinte, Université Laval, Canada (**2018)**.

[2] Louis de Broglie, Comptes Rendus **177,** 507,548, 630 **(1923)** ; Nature **112**,540 (**1923**).

[3] E Schrödinger, Ann Phys, **79**,361,489 ; **80**,437, **81**,109 **(1926)**.

[4] W Heisenberg, A Phys, **33**,879 (**1925**) ; M Born and P Jordan, Z f Phys, **34**, 858 **(1925)**.

[5] P A M Dirac, The development of quantum theory, New York **(1971)**.

[6] O Klein, Z f Phys, **37**, 895 **(1926)**.

[7] W Gordon, Z f Phys, **40**, 117 **(1926)**.

[8] H Yukawa, Proc Phys Math Soc. Japan 17,48 **(1935)**.

[9] C Moller and L Rosenfeld, Nature 143, 241 **(1939)**.

[10] M Hosseinpour, H Hassanabadi, M de Montigny, The Eur Phys J C **79** (4), 311 **(2019)**.

[11] H Hassanabadi, M Hosseini, S Zare, M Hosseinpour, Few-Body Systems 60 (1), 12 **(2019)**.

[12] A Boumali, Z Selama, Phys of Par and Nuclei Letters 15 (5), 473-477 **(2018)**.

[13] M Falek, M Merad, Open Physics 8 (3), 408-414 **(2010)**.

[14] R L L Vitria, K Bakke, The Eur Phys J C 78 (3), 175 **(2018)**.

[15] A Boumali and H Aounallah, Adv. High Energy Phys 2018, 1031763 **(2018)**.

[16] W Heisenberg : "Letter to R. Peierls (**1930**), in 'Wolfgang Pauli, Scientific Correspondence, Vol. III, p.15, Ed. K. von Meyenn", (Springer Verlag **1985**).

[17] H S Snyder, Quantized spacetime, Phys. Rev.**71**, 38 (**1947**).

[18] H Aounallah, A Boumali, Phys of Par and Nu Letters, Vol 16, No 3,195–205 (**2019**).

[19] S Hassanabadi, M Ghominejada, Eur. Phys. J. Plus, **129**, 273 (**2014**).

[20] B Q Wang, Z W Long, Chao Yun Long, ShuRui Wu, Physica A, Vol 517, 163–174 (**2019**).

[21] A Maireche, Journal of Nano and Electronic Physics, Vol 11 No 01, 01024(10pp) (**2019**).

[22] T Kanazawa, G Lambiase, G Vilasi, A Yoshioka, The Eur Phys J C,79, 95 (**2019**).

[23] G Petiau, Aca. R. Belg. Cl. Mém. Collect. **8**,16 (**1936**).

[24] R J Duffin, Phys Rev A : Atomic, Molecular and Optical Physics, vol 54, no 12, p 1114 (**1938**).

[25] N Kemmer, Pro of the Royal Society of London, vol. A166, no 127 (**1938**).

[26] N Kemmer, Proof the Royal Society of London, vol. A173, no 91 (**1939**).

[27] A Boumali, Can. J. Phys, **82**, 67–74 (**2004**).

[28] A Boumali, Can. J. Phys, **85**, 1417–29 (**2007**).

[29] A Boumali, Journal of Physics A Mathematical and Theoretical volume 42, issue 23 **(2009).**

[30] N Messai, A Boumali, Eur. Phys. J Plus, 130, 140 **(2015).**

[31] S Sargolzaeipor, H Hassanabadi, A Boumali, In J of Ge Methods in Modern Phys,Vol. 14, No. 07, 1750112 **(2017).**

[32] A Boumali, L Chetouani, Physics Letters A 346 (4), 261-268 **(2005).**

[33] Lewis H Ryder, Quantum field theory, Second edition, Cambridge university press **(1996).**

[34] W Greiner, Relativistic quantum mechanics, Wave Equations 3rd Edition **(2000).**

[35] Boutheïna Boutabia-Chéraïtia, Doctorat en Physique Mathématique **(2000).**

[36] R Shankar, Principles of Quantum Mechanics, Second edition **(1994).**

[37] W Greiner, S Schramm and E Stein, Quantum chromodynamics, (Springer-Verlag) **(2002).**

[38] Abdelhakim Hafdallah, Mémoire de master, Unversité de Tebessa.

[39] Y Nedjadi and R C Barrett, J Phys A : Math Gen27, 4301 **(1994).**

[40] A Boumali, Thèse Doctorat, Université Annaba **(2005).**

[41] A S Davydov, Quantum Mechanics, Pergamon, New York **(1976).**

[42] Slimane Zaim, Lamine Khodja, Yazid Delenda, Int. J. Mod. Phys. A 26, 4133 **(2011).**

[43] Slimane Zaim, arXiv :1301.7297v2 [hep-th].