République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

SUPPORT DE COURS+TD

SÉRIES ET INTÉGRALES IMPROPRES

AUTEUR :
FAYÇAL MERGHADI
Docteur à l'université de larbi Tébessi à Tébessa

DISTINÉ AUX ÉTUDIANTS DE 2ème ANNÉE MATHS

10/07/2019

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage a été rédigé du point de vue du mathématicien dont l'intérêt pour les séries et les intégrales impropres. Nous avons cherché à combiner un exposé solide et précis de la théorie élémentaire des séries et intégrales généralisées avec beaucoup d'accent sur les méthode de résolution.

Ce support de cours s'adresse d'abord aux étudiants de deuxième année mathématiques ou en ingénierie qui suivent généralement un cours sur les séries et les intégrales généralisées à leur deuxième année d'études.

Avant d'amorcer l'étude des séries numériques, il convient de se faire un rappelle sur les suites numériques. Pour certains étudiants, l'intérêt intrinsèque du rappelle est une motivation suffisante pour comprendre la majorité des théorèmes indiqués dans le premier chapitre tels que les critères de convergence pour les séries à termes positifs, alternés ou quelconques . Le premier chapitre est aussi bien équipé avec des exemples et des exercices avec solutions.

Les chapitres suivants sont consacrés respectivement sur les suites et les séries de fonctions, les séries entières, rappelle sur les intégrales définies, les intégrales impropres et les intégrales généralisées dépendant d'un paramètre.

Une bibliographie a été placée à la fin de l'ouvrage, à l'usage des étudiants qui désiraient étudier de façon plus approfondie les séries numériques et les intégrales généralisées.

Quelque notes importantes:

- Apres chaque exemple, un espace a été crée pour Ecrire la solution présentées par les etudients (es).
- Chaque chapitre contient des applications, exemples et exercices avec solutions.
- Ce travail est fini mais pas de façon ultime, on a toujours accepter le FEEDBACK des etudients (es) pour l'amélioration.
- Pour tous questions vous pouvez contacter Dr. MERGHADI Fayçel avec : merghadi_faycel@yahoo.ca

Table des matières

Chapitre 1

Suites et Séries Numériques

I. Rappelle sur les suites numériques

Définition 1: Une ***suite*** est une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On note $f(n)$ par a_n. On dit alors que a_n est le terme général de la suite, tandis que la suite elle-même est notée par :
$\{a_n\} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ ou $(a_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$.

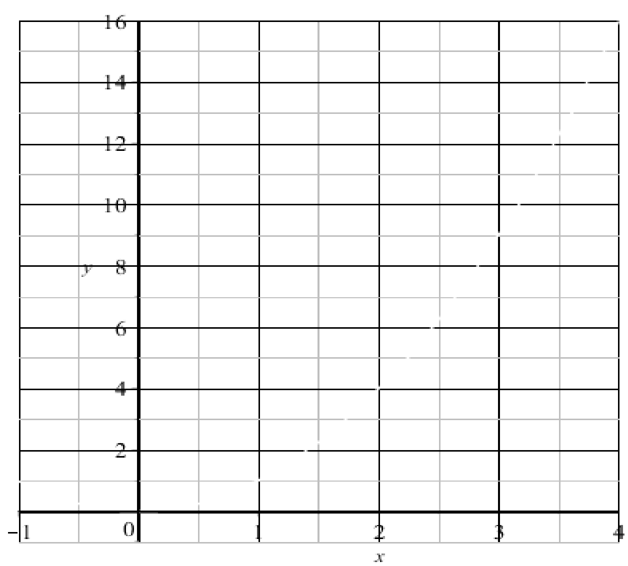
Exemple 1: $\{2n + 7\} =$

Exemple 2 : $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ est une suite dont le terme général est $a_n =$.

Graphique d'une suite numérique

Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées(n, a_n).

Exemple 3 : $\{a_n\} = \{n^2\} =$



Définition 2 : Une ***suite numérique*** $\{b_n\}$***est dite alternée*** si les termes successifs ont des signes opposés. D'une façon plus formelle, si $b_n = (-1)^n a_n$ ou $b_n = (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n > 0$.

Exemple 4

- $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$

- $\{a_n\} = \left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$

Limite d'une suite numérique

Comme toute fonction, ce qui nous importe dans l'étude d'une suite est le sens de variation de la suite. Pour cela, on étudiera la notion de limite (qui n'a de sens que pour $n \to +\infty$)

Définition 3: On dit que la suite$\{a_n\}$ est $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$. Si cette limite est infinie ou n'existe pas, on dit que $\{a_n\}$ est ***divergente***.

Une suite est par définition une fonction $f : N \to \mathbb{R}$ tel que pour tout entier n, on a : $f(n) = a_n$. Par conséquent, pour étudier la convergence de la suite, il est évident qu'on pensera à la relier à la limite de la fonction $f(x)$. Le théorème suivant résume cette situation.

Théorème 1.

Soit $f(x)$ une fonction définie pour tout $x \geq n_0$ et telle $\{a_n\}$ est une suite de nombres réels pour lesquels $a_n = f(n)$ pour tout $n \geq n_0$. Supposons que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe, c'est-à-dire, $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ou $\lim_{x\to\infty} f(x) = L = \pm\infty$. Alors, on a : $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Exemple 5 : Soit la suite $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$. On considère la fonction associée à cette suite qui est définie par $f(x) =$

Exemple 6 : Soit la suite $\{2n^2\}$. On considère la fonction associée à cette suite qui est définie par $f(x) =$

Attention : La réciproque du théorème 1 est fausse. C'est-à-dire, si $\lim_{x\to\infty} f(x)$ n'existe pas on ne peut pas alors conclure que $\lim_{n\to\infty} a_n$ n'existe pas. Une étude directe de $\lim_{n\to\infty} a_n$ s'impose.

Exemple 7 : Soit la suite $\{\cos(2\pi n)\}$.

N.B. : Il arrive qu'on ne puisse guère associer de fonction à variable réelle pour la suite.

Exemple 8 : Soit la suite $\{\{(-1)^n\}\}$.

Remarque : Les propriétés concernant les limites des fonctions restent valides pour les suites.

Présentons certaines de ces propriétés des limites en omettant la preuve.

Propriétés

I. On considère $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites de nombres réels tels que $\lim_{n\to+\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n = B \in \mathbb{R}$. Alors, on a les propriétés suivantes :

1. $\lim_{n\to+\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \pm \lim_{n\to+\infty} b_n = A \pm B$
2. $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right) = AB$.
3. $\lim_{n\to+\infty}(k a_n) = k\left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right) = kA$ où k est un nombre réel quelconque.
4. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to+\infty}(a_n)}{\lim_{n\to+\infty}(b_n)} = \frac{A}{B}$ si $B \neq 0$

II. On considère $\{c_n\}$ une suite numérique divergente, c'est-à-dire, $\lim_{n\to+\infty} c_n$ n'existe pas ou $\lim_{n\to+\infty} c_n = \pm\infty$. Alors, la suite $\{kc_n\}$ est divergente où $k \neq 0$ est un nombre réel non nul.

III. On considère deux suites de nombres réels $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ tels que $\lim_{n\to+\infty} a_n$ n'existe pas et $\lim_{n\to+\infty} b_n = L \neq 0$ (la limite L peut être égale à $\pm\infty$). Alors, $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n)$ n'existe pas.

Exemple 9 : Soit la suite de terme général $\{a_n\}$avec $a_n = (-1)^n n$.

N.B. : On a$\{(-1)^n n\}$=$\{-1, 1, -2, 2, -3, 3\ \dots\}$. On remarque que la valeur absolue des valeurs prises par la suite croissent indéfiniment et de plus le signe s'alterne indéfiniment. Donc la suite n'admet pas de limite, et donc la suite diverge.

Attention : Si deux suites $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ n'admettent pas de limite, alors on ne peut pas conclure que $\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n)$ n'existe pas.

Exemple 10 : $\{(-1)^n\cos(\pi n)\}=$

Lorsqu'on observe la convergence des valeurs de la suite vers une valeur, mais sans que la suite soit constante et sans qu'on puisse associer une fonction à variable réelle. Dans ce cas, on applique le théorème de « sandwich » (théorème du « gendarme »,« d'encadrement » ou « d'étau »).

Théorème 2 (Théorème d'étau ou de sandwich)

On considère $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ trois suites de nombres réels tel que pour tout entier n supérieur à un entier fixé N, on a $a_n \le b_n \le c_n$. Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L$, alors on a $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L$.

Exemple 11 : Soit la suite de terme général $\{a_n\}$ avec $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$

Une conséquence du théorème de sandwich est le corollaire suivant.

Corollaire

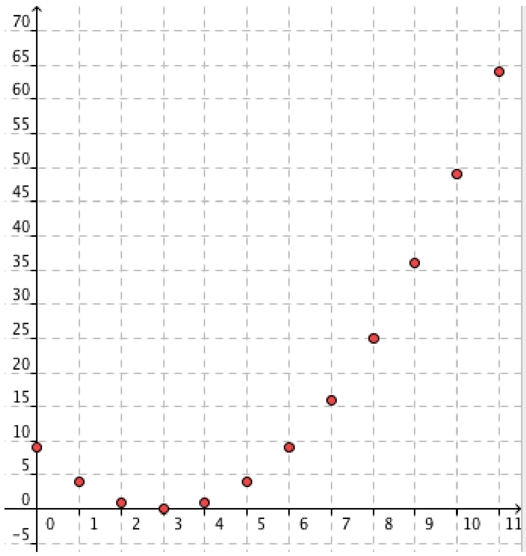
On considère $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ deux suites de nombres réels tels que la suite $\{a_n\}$ est bornée (ayant un majorant et un minorant) et $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Alors, $\lim_{n\to+\infty} (a_n b_n) = 0$.

Exemple 12 : Soit la suite $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$

N.B : Notez qu'on ne peut pas associer une fonction à la suite $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ car $f(x) = \frac{(-1)^x}{x}$ n'est pas une fonction (au sens donné au collégial) car la fonction exponentielle $y = a^x$ est définie seulement si $a > 0$, ce qui n'est pas le cas dans cet exemple avec $a = -1$!

Sens de variation (monotonie : croissance ou décroissance) d'une suite

On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite$\{a_n\}$:



	A	B
1	n	u_n
2	0	9
3	1	4
4	2	1
5	3	0
6	4	1
7	5	4
8	6	9
9	7	16
10	8	25
11	9	36
12	10	49
13	11	64
14		
15		
16		

À travers cette représentation graphique, on peut conjecturer que la suite est croissante à pour $n \geq 3$. On dit alors que la suite $\{a_n\}$ est croissante à partir du rang 3 ou croissante. Pour établir la croissance ou la décroissance d'une suite, il revient à étudier le signe de $a_{n+1} - a_n$ pour tout n. La définition suivante exprime le sens de la croissance et de la décroissance.

Définition 4

Soit la suite numérique$\{a_n\}$ et n_0 un entier naturel (entier positif ou nul).

1. Si $a_{n+1} \geq a_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors$\{a_n\}$ est dite <u>croissante.</u>
2. Si $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \geq n_0$, alors$\{a_n\}$est dite <u>décroissante.</u>

En général, si on peut associer une fonction $f(x)$ à la suite, alors il suffit d'étudier le sens de var

iation de la fonction f pour en déduire directement celui de la suite.

Donc on serait amené à étudier le signe de la dérivée $\acute{f}(x)$. D'où, la propriété ci-dessous.

Propriété

Soit la fonction f définie sur $[p, +\infty[$ et considérons la suite $\{a_n\}$ définie pour tout $n \geq p$par $a_{n+1} = f(n)$, c'est-à-dire f est la fonction associée à la suite $\{a_n\}$. On considère un entier $n_0 \geq p$.

1. Si la fonction f est croissante sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$, alors la suite$\{a_n\}$ est croissante à partir du rang n_0.
2. Si la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[n_0, +\infty[$, alors la suite $\{a_n\}$ est décroissante à partir du rang n_0.

Exemple 13: La suite$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$.

Exemple 14: La suite$\left\{\frac{\ln n}{n}\right\}$.

II. Séries numériques

Définition 5: Soit $\{a_k\}_{k\geq 1}$, une suite. Alors $\sum_{k\geq 1} a_k$est la ***série*** associée.

Chacun des a_i est appelé ***terme*** de la série et on appelle a_n le ***terme général*** de la série.
$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ est appelée **somme partielle d'ordre n** ou tout simplement ***somme partielle***.

Définition 6: Une série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est ***convergente*** si $\lim_{n\to\infty} S_n = S \in \mathbb{R}$. Si cette limite n'existe

pas ou vaut $\pm\infty$, la série est dite ***divergente***.

Exemple 16 : $\sum_{k\geq 1} k$

Exemple 17 : $\sum_{i\geq 0} (-1)^i$

Exemple 18 (Série « téléscopante »): Étudier la nature de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ **.**

Définition 7 : Une série $\sum_{n\geq n_0} a_n$est dite « téléscopique » lorsque son terme général a_n peut s'exprimer comme suit : $a_n = b_n - b_{n+1}$ ou $a_n = b_{n+1} - b_n$ pour tout $n \geq n_0$ avec b_n est le terme général d'une suite définie pour tout $n \geq n_0$.

N.B. : Toute somme partielleS_n d'une série téléscopique peut être exprimée explicitementen termes de n. En effet, pour tout $n \geq n_0$, on a :

<u>Nature de la série</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ **.**

Propriétés des séries

Théorème 3 : Si $\sum_{k\geq 1} a_k$ et $\sum_{k\geq 1} b_k$ convergent, alors $\sum_{k\geq 1}(a_k + b_k)$ converge aussi. Dans ce cas, on a : $\sum_{k\geq 1} a_k + \sum_{k\geq 1} b_k = \sum_{k\geq 1}(a_k + b_k)$

Théorème 4: Pour tout $c \neq 0$, $\sum a_k$ converge $\Leftrightarrow \sum c a_k$ converge. C'est-à-dire, les séries $\sum a_k$ et $\sum c\, a_k$ sont de même nature. De plus, on a :

$$\sum c a_k = c \sum a_k$$

Théorème 5: Si on ajoute ou on enlève un nombre fini de termes à une série $\sum a_k$, alors, la nouvelle série obtenue sera de même nature que la série initiale $\sum a_k$.

Séries de référence

L'étude de la nature d'une série (convergence ou divergence) est un problème ardu. On utilise alors une comparaison avec des séries bien connues dont on connait la nature. Nous les appelons des séries de référence. Nous en donnerons dans ce qui suit deux classes de séries de référence.

I. Séries géométriques

Définition 8: $\sum_{i=1}^{\infty} ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots$est une ***série géométrique*** de ***premier terme***a et de ***raison*** r. Elle peut être caractérisée par le fait que pour tout n, on a : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$.

Exemple 20: Vérifier si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^{n+1}}$ est géométrique.

Exemple 21 : Vérifier si la série $\sum_{n=1}^{\infty} n\ 2^n$ est géométrique.

N.B. La somme partielle d'une série géométrique est donnée comme suit :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = Premier\ terme\ \frac{(1-r^{nombre\ de\ termes})}{1-raison}$$

Théorème 6: La série géométrique $\sum_{i=0}^{\infty} ar^i$

1. **c**onverge si $|r| < 1$ et alors sa somme S vaut $\frac{a}{1-r} = \frac{premier\ terme}{1-raison}$
2. diverge si $|r| \geq 1$.

Remarque : Il est intéressant de connaitre la valeur de $\lim_{n\to\infty} r^n$.

- Si $|r| < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} r^n =$
- Si $|r| \geq 1$, alors deux cas se présentent :
  - Si $r \geq 1$, alors $\lim_{n\to\infty} r^n =$
  - Si $r \leq -1$, alors $\lim_{n\to\infty} r^n$

Exemple 22 : Vérifier si la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ est géométrique. Si c'est le cas, déterminer sa nature et sa somme dans le cas où la série est convergente.

Exemple 23 : Mêmes questions, que celles de l'exemple 22, concernant la série suivante :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{e^{n+1}}{2^n}.$$

II. Séries à termes positifs.

II.1 Séries de Riemann

Définition 8 : On appelle série de Riemann toute série de type **Error!**où p est un réel (rationnel ou non).

Théorème 7:

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p}$diverge pour $p \leq 1$ et converge pour $p > 1$.

Exemple 24 : La série harmonique$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$

Exemple 25 : La série$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}$

Exemple 26 : La série$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$

Critères de convergence des séries

Pour étudier la nature d'une série, on utilise souvent des critères qui nous permettent d'en déduire la convergence ou la divergence de la série. Tous ces critères reposent sur le terme général de la série.

Théorème 8 (Critère du terme général)

Si $\sum_{n\geq n_0} a_n$ converge, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = 0$.

Conséquence : Si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, alors $\sum_{n\geq n_0} a_n$ diverge.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = 0$,alors on ne peut rien conclure.

Exemple 19 : Étudier la série $\sum_{n\geq 1}\frac{n+1}{n}$.

Théorème 9: **Critère de comparaison à une intégrale**

Soit $\sum_{n\geq n_0} a_n$ avec $a_n \geq 0$ pour tout $n \geq N \geq n_0$.

Soit f, une fonction positive, continue et décroissante sur $[N, +\infty[$ telle que:

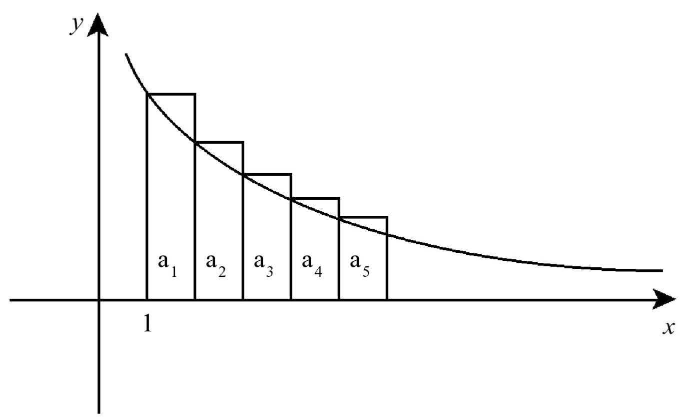
$$f(n) = a_n \text{ pour tout} n \geq N.$$

Alors,

$$\sum_{n \geq n_0} a_n \text{converge} \Leftrightarrow \int_N^{+\infty} f(x)dx \text{ converge.}$$

C'est-à-dire, la série $\sum_{n \geq n_0} a_n$ et l'intégrale impropre $\int_N^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.

Illustration graphique:



Le fait que **Error!***f***Error!**d*x* diverge implique que l'aire sous la courbe est infinie d'où on déduit que la série diverge.

Exemple 27 : $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln n}$

<u>Critère de polynôme</u>

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ avec $a_k = \frac{\mathrm{P}(n)}{\mathrm{Q}(n)}$où P et Q sont des polynômes de degré $p$et q. Alors,

1. Si $= q - p > 1$, alors $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
2. Si $d = q - p \leq 1$, alors $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

Exemple 28 : $\sum_{n\geq 1} \frac{3n^2}{5n+1}$

Remarque : Ce critère se généralise lorsque P et Q sont des expressions de somme finie de monômes avec des exposants rationnels (entiers ou fractions d'entiers).

Exemple 29 : $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{5n+n^2}$

Théorème 10:**<u>Critère du rapport (Critère de D'Alembert)</u>**

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ où $a_n > 0$ pour n assez grand. Supposons que $R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ existe. Alors,

1. si $R < 1$, alors $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
2. si $R > 1$, alors $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.
3. si $R = 1$, alors on ne peut rien conclure.

Remarque : Ce critère s'applique, généralement, lorsque le terme général contient des factoriels ou des exponentielles simples (bases constantes et des exposants de degré 1).

Attention ! On n'utilise jamais ce critère lorsque le terme général est une fraction polynômiale car $R = 1$, et donc le critère n'est pas concluant.

Définition9 : On appelle ***factorielle d'un entier*** $\boldsymbol{n}$ **(**notée $\boldsymbol{n}$!**),** le nombre égal au produit de tous les nombres <u>entiers</u> de 1 à n. C'est-à-dire, $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$.

Ainsi, on a **:** $1! =$ **,** $2! =$ et $3! =$

Par convention, $0! = 1$.

Propriété importante (passage à la factorielle précédente)

Exemple 30 : $\sum_{k\geq 0} \frac{7^{2k}}{k!}$

Exemple 31 : $\sum_{n\geq 0} \frac{5^{2n}}{2n+5}$

Théorème 11:<u>**Critère de la racine n-ième (Critère de Cauchy)**</u>

Soit $\sum_{n\geq 1} a_n$ où $a_n > 0$ pour n assez grand. Supposons que$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ existe. Alors,

1. si $R < 1$, alors $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
2. si $R > 1$, alors $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.
3. si $R = 1$, alors on ne peut rien conclure.

Remarque : On utilise ce critère, en général, lorsque le terme général contient des facteurs sous forme d'exponentielle simple ou composée avec d'autres fonctions élémentaires

comme les polynômes ou des logarithmes (l'exposant n'est pas nécessairement de degré 1). Dans ce cas, il est très utile de connaitre le résultat suivant : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p(n)} = 1$ où $p(n)$ est un polynôme ou plus généralement une somme finie de termes de la forme $c\, n^{a}$ avec c une constante réelle et « a » un exposant rationnel (entier ou fraction rationnelle)de degré quelconque où son coefficient dominant (le coefficient du terme du plus haut degré) est positif**.** On pourra montrer ce dernier résultat en considérant la fonction $y = [p(x)]^{\frac{1}{x}}$ et en utilisant la règle de L'Hospital.
Ainsi, <u>vous pourriez utiliser ce résultat directement sans le montrer dans une évaluation</u>. Il suffit seulement de mentionner que $p(n)$ est un polynôme ou sous la forme précédente.

Exemple 32 : $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{5n}}$

Exemple 33 : $\sum_{n=1}^{\infty} n^{10} e^{2n}$

Théorème 12: **<u>Critère de comparaison directe (par des inégalités)</u>**
Supposons que nous voulons étudier la nature de la série $\sum_{k\geq 1} a_k$ et que nous connaissons la nature de série $\sum_{k\geq 1} b_k$ avec a_k et b_k sont positifs pour k assez grand.

1.Si $0 < a_k \leq b_k, \forall k \geq k_0$, alors $\sum_{k\geq 1} b_k$ converge $\Rightarrow \sum_{k\geq 1} a_k$ converge

2. Si $0 < b_k \leq a_k, \forall k \geq k_0$, alors $\sum_{k\geq 1} b_k$ diverge $\Rightarrow \sum_{k\geq 1} a_k$ diverge

Remarque : Ce critère est très puissant, mais demande une habileté à manier et maitriser les différents types d'inégalités. Pour cela, nous aurons besoin de comparer la « puissance » des suites selon le type de leurs fonctions associées. Cette puissance est caractérisée par le concept de « prépondérance » ou « équivalence ».

Définition 10 : Soient f et g deux fonctions de la variable réelle x. On suppose qu'il existe un réel N tel que pour tout $x \geq N$, $g(x) \neq 0$ (g ne s'annule pas pour x assez grand).

1. On dit que f est négligeable devant g (ou que g est prépondérante devant f) à l'infini (ou pour x assez grand) si et seulement si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
2. On dit que f et g sont équivalentes si et seulement si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Comparaison des différents types de fonctions

Le diagramme suivant ordonne les différents types de fonctions selon l'ordre croissant de leur puissance à l'infini (pour x assez grand).

Fonctions trigonométriques→ fonctions logarithmes → fonctions puissances→ fonctions exponentielles.

Remarque :

- Entre deux fonctions puissances x^n et x^m la comparaison se fait selon le degré. Celle qui a le degré le plus grand « prédomine ». Par exemple, si $m > n$, alors x^m prédomine devant x^n.
- Entre deux fonctions exponentielles a^x et b^x, celle avec la plus grande base prédomine. Par exemple, si $b > a$, alors b^x prédomine devant a^x.
- Entre deux fonctions exponentielles avec des exposants de degré différents (avec coefficients du terme dominant positifs), alors celle avec l'exposant le plus grand prédomine.

Exemples illustratifs

Comparer les suites suivantes, par ordrecroissant de prédominance, lorsque n est assez grand ($n \to +\infty$) et spécifier celle qui sont équivalentes.

1. $2n^3 + 2n^2 - 1, 2^n, \ln n, \sqrt{n}, 2n^3$

2. $(100000)^n, 2^{n^2}, \sin n, \ln(e^n + 1)$

Sur les deux exemples qui suivent, nous tenterons de vous donner la démarche la plus adéquate pour utiliser ce critère.

Exemple 34 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+5}{n^3+6n}$

1ère étape : <u>Déterminer la série de référence à une constante près (par prédominance, équivalence ou inégalité connue)</u>

2ème étape : Déterminer la nature de la série de référence et l'inégalité adéquate

3ème étape : Obtenir l'inégalité recherchée (adéquate) et appliquer le critère

N.B. : Si la prédominance ou l'équivalence n'est pas possible, alors on cherche à utiliser des inégalités connues.

Exemple 35 :$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2+\cos n}{n}$

Exemple 36 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+3n}$**Rép. :**$\frac{n-1}{n^2+3n} \geq \frac{1}{4n}$ pour tout $n \geq 3$. Donc la série diverge

<u>Critère de comparaison à la limite</u>

Théorème 13: Supposons que nous voulons étudier la nature de la série $\sum_{k\geq 1} a_k$ et que nous connaissons la nature de la série $\sum_{k\geq 1} b_k$ avec a_k et b_k sont positifs pour k assez grand.

Supposons que la limite$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ existe.

1. Si <u>L est non nul (L ≠ 0) et fini</u>, alors $\sum_{k\geq 1} a_k$ et $\sum_{k\geq 1} b_k$ sont de même nature.

C'est-à-dire, $\sum_{k\geq 1} a_k$ converge si $\sum_{k\geq 1} b_k$ converge et $\sum_{k\geq 1} a_k$ diverge si $\sum_{k\geq 1} b_k$ diverge.

2. Si $L = 0$ et$\sum_{k\geq 1} b_k$ converge,alors$\sum_{k\geq 1} a_k$ converge.
3. Si $L = +\infty$ et $\sum_{k\geq 1} b_k$diverge, alors$\sum_{k\geq 1} a_k$diverge.

Remarque : Ce critère est une conséquence du critère précédent et il est moins puissant car dans le cas où $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ n'existe pas, alors le critère n'est pas applicable.

Exemple 37: $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{5n+n^2}$

Exemple 38 :$\sum_{n=1}^{\infty} ne^n$

Séries à termes quelconques

Séries alternées

Définition 11:Une ***série alternée*** est une série où les termes successifs ont des signes opposés. D'une façon plus formelle, c'est une série de la forme $\sum(-1)^n a_n$ ou $\sum(-1)^{n-1} a_n$ avec $a_n > 0$.

Théorème 14 : **Critère de la série alternée (Critère de Leibniz)**
Soit les séries alternées $\sum(-1)^n a_n$ et $\sum(-1)^{n-1} a_n$avec $a_n > 0$.
Si la suite $\{a_n\}$est décroissante à partir d'un certain indice et si $\lim_{n\to\infty} a_n$= 0, alors

les série $\sum(-1)^n a_n$ ou $\sum(-1)^{n+1} a_n$ convergent.

Exemple 39 : $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

Exemple 40: $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)$

Erreur d'approximation d'une série alternée convergente

Soit la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^k a_k$ une série alternée convergente dont S est la somme. On a $S = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k a_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k}_{S_n} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k}_{R_n} = S_n + R_n$ où S_n est la valeur obtenu en utilisant les n premiers termes et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k = (-1)^{n+1}a_{n+1} + \cdots$ est le reste qu'on a négligé. Dans ce cas, $R_n = S - S_n$ représente l'erreur d'approximation. Alors, une estimation $E = |R_n|$ de l'erreur commise est donnée comme suit : $E = |R_n| \leq a_{n+1}$.

Exemple illustratif

Soit la séries alternée $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$.

1. Étudiez la nature de la série.

2. Estimez l'erreur commise en utilisant les quatre premiers termes de la série.

Convergence absolue et conditionnelle

Définition 11: $\sum a_n$ est ***absolument convergente*** si $\sum |a_n|$ converge.

$\sum a_n$ est ***conditionnellement convergente (semi-convergente)*** si :

$\sum |a_n|$ diverge mais $\sum a_n$ converge.

Exemple 41: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

Exemple 42: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Théorème 14 (critère de la convergence absolue)

Si $\sum |a_n|$ converge, alors $\sum a_n$ converge.

Exemple 42 : $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n}{n^2}$

Résumé

I. Séries géométriques

La série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est-elle géométrique ?

Afin de le déterminer, calculez le rapport $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ · Si ce rapport est constant, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de n, alors ce rapport constant nous le noterons r (raison de la série) et la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ est géométrique.

Si la série est géométrique

Forme	*Suite de sommes partielles*	*Convergence*
On écrit la série comme suit : $\sum_{n\geq 1} a_n = \sum_{n\geq 1} a\, r^{n-1}$. Où a est le premier terme de la série et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ est la raison de la série géomérique.	La somme partielle d'ordre n est : $$S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$$ Cette formule permet de calculer la somme des n premiers termes de notre série géométrique.	Calculer $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ Si $-1 < r < 1$ alors ***la série converge*** et on a $\lim_{n\to\infty} S_n = S = \frac{a}{1-r}$ Si $\boldsymbol{r} \leq$ **-1**, ***la série diverge*** et $\lim_{n\to+\infty} S_n$ n'existe pas dans. Si $\boldsymbol{r \geq 1}$ alors ***la série diverge*** et $\lim_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$ (de signe de a)

II. Séries non géométriques et à termes positifs

Si la série est non géométrique à termes positifs, alors nous pouvons vérifier sa convergence à l'aide des critères suivants :

Critère	*Calculs à faire*	*Conclusion*
des **séries-*p* de Riemann** $$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$	Déterminer la valeur de p	La série converge si $p > 1$ La série diverge si $p \leq 1$

du **polynôme** $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(i)}{Q(i)}$ P et Q sont des polynômes	p = degré du numérateur q = degré du dénominateur $d = q - p$	Si$d >$ 1 alors la série converge. Si$d \leq$ 1 alors la série diverge.
de **D'Alembert**	$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$	Si$R <$ 1 alors la série converge. Si$R >$ 1 alors la série diverge. Si$R =$ 1, il faut utiliser un autre test.
De **Cauchy**	$R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (a_n)^{\frac{1}{n}}$	Si$R <$ 1 alors la série converge. Si$R >$ 1 alors la série diverge. Si$R =$ 1, il faut utiliser un autre critère autre celui de D'Alembert
de **l'intégrale** pour les séries à termes décroissants	Soit f une fonction où $a_n = f(n)$ tel que $f(x) \geq 0$, continue et décroissante, c'est-à-dire :$\acute{f}(x) \leq 0$ pour $x \geq m \geq n_0$. *Calculer* $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$	$\sum_{n\geq n_0} \boldsymbol{a_n}$est de même nature que l'intégrale impropre $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.
De comparaison directe	Trouver une série de référence $\sum_{n\geq n_0} b_n$ (en général une p-série ou une série géométrique) tel que ➢ $a_n \leq b_n$ pour $n \geq m \geq n_0$ et $\sum_{n\geq n_0} b_n$ converge ou ➢ $a_n \geq b_n$ et $\sum_{n\geq n_0} b_n$ diverge	➢ $\sum_{n\geq n_0} \boldsymbol{a_n}$ converge ➢ $\sum_{n\geq n_0} \boldsymbol{a_n}$ diverge

De comparaison à la limite	Trouver une série de référence $\sum_{n\geq n_0} b_n$ (en général une p-série ou une série géométrique) tel que : ➢ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ et fini ou ➢ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L = 0$ et $\sum_{n\geq n_0} b_n$ converge ou ➢ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L = +\infty$ et $\sum_{n\geq n_0} b_n$ diverge	➢ $\sum_{\boldsymbol{n\geq n_0}} \boldsymbol{a_n}$ CV si $\sum_{n\geq n_0} b_n$ CV ou $\sum_{\boldsymbol{n\geq n_0}} \boldsymbol{a_n}$ div si $\sum_{n\geq n_0} b_n$ div ➢ $\sum_{\boldsymbol{n\geq n_0}} \boldsymbol{a_n}$ CV ➢ $\sum_{\boldsymbol{n\geq n_0}} \boldsymbol{a_n}$ div

III. Séries non géométriques à termes alternées :$\sum(-1)^n a_n$ ou$\sum(-1)^{n+1} a_n$où$a_n > 0$.

Si la série est telle que les signes des termes sont alternés alors nous pouvons vérifier sa convergence à l'aide du critère suivant :

Critère spécial des **séries alternées**	***Calcul à faire***	***Conclusion***
(critère de Leibniz)	1° vérifier la décroissance de la suite $\{a_n\}$ à partir d'un certain rang. Pour ce faire, soit$f$ la fonction à variable réelle $x$associée à la suite $\{a_n\}$(c'est-à-dire,$a_n = f(n)$). Il faut alors calculer $f'(x)$. Il suffit alors de montrer que la fonction f est décroissante à partir d'une certainevaleur x_0, c'est-à-dire :$f'(x) < 0$ pour $x \geq x_0$. 2° Vérifier que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$	Les séries $\sum(-1)^n a_n$ et $\sum(-1)^{n+1} a_n$ convergent. Elles divergent si **l'une des conditions 1.) ou 2.)** n'est pas satisfaite.

Démarche à suivre pour étudier une série $\sum a_n$

A. Si a_n est un rapport de somme de termes de puissance, appliquer le critère de polynôme.

B. Sinon suivre, en ordre, les étapes suivantes :

I. si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ est facile à calculer et que $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} \neq \mathbf{0}$, alors la série diverge d'après le critère du terme général.

II. si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ est difficile à calculer ou $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n} = \mathbf{0}$, alors on procèdera comme suit :

1. si le terme général est de signe positif à partir d'un certain rang (pour n assez grand) on suit la démarche suivante :

   a. si le terme général a_n contient de la factorielle comme facteurs ou des exponentielles du type b^n, on appliquera le critère de D'Alember.

   b. si le terme général a_n contient des exponentielles composées de type $(c_n)^{d_n}$ où c_n et d_n sont des expressions qui dépendent de n, on utilisera le critère de Cauchy ou en dernier recours le critère de comparaison directe ;

   c. si le terme général $a_n = f(n)$ est décroissant et la fonction associée f est positive, continue, décroissante sur $[N, +\infty[$ et son intégrale est facile à calculer, alors on utilisera le critère de comparaison à une intégrale impropre.

   d. si aucune des situations décrites précédemment ne se présentent, on utilisera alors le critère de comparaison directe ou à la limite.

2. si le terme général est de signe non constant (ni positif ni négatif à partir d'un certain rang), alors on suit la démarche suivante :

   - si la suite $(a_n)_n$ est alternée (de signe alterné), alors on applique le critère des séries alternées (critère de Leibniz) ;

   - si la suite $(a_n)_n$ n'est pas alternée (le signe se réparti d'une façon quelconque), alors on appliquera le critère de convergence absolue.

Exercice d'entrainement

Série	Critères utilisés	C ou D
1. $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^2(n+1)^2}$	....	☐
2. $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{3+n^2}}$	....	☐
3. $\sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{n!}$	....	☐
4. $\sum_{n\geq 1} n\, e^{-n^2}$	....	☐
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{5^{2n}}{n^3}$	....	☐
6. $\sum_{n\geq 1} \frac{n-1}{n^2+3n}$	....	☐
7. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}{2n+1}$	....	☐
8. $\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}}$	....	☐
9. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2 7^{3n}}{(n+1)!}$	....	☐
10. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^3}$	....	☐
11. $\sum_{n\geq 1} \frac{3^{2n}(n-1)!}{n^{n-1}}$	....	☐

Série	Critères utilisés	C ou D
12. $\sum_{n\geq 1}\frac{(2n-1)^n}{n^{3n}}$		
13. $\sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{n^3+1}-\sqrt{n^3}\right)$		
14. $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n(\ln n)^{0,7}}$		
15. $\sum_{n\geq 2}\frac{n^4}{(n^2+3)^3}$		
16. $\sum_{n\geq 1}\frac{\lvert\sin n\rvert}{n^3}$		
17. $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\left(\frac{2n+1}{5n+1}\right)^{2n}$		
18. $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\arctan\left(\frac{2}{3n-1}\right)$		
19. $\sum_{n\geq 1}\frac{2+\cos n}{\sqrt{n}}$		

N.B. : « D » signifie diverge et « C » converge.

Indications et réponses

N°	Critère(s) qu'on peut utiliser par ordre de préférence	Rép.
1	D'Alembert ($R = +\infty > 1$),	D
2	Comparaison à la limite $\left(\frac{1}{n}\right)$ou directe $\left(\frac{1}{2n}\right)$ car $\frac{1}{\sqrt{3+n^2}} \geq \frac{1}{2n}$ pour $n \geq 1$.	D
3	D'Alembert ($R = 0 < 1$),	C
4	Cauchy ($R = 0 < 1$)	C
5	Cauchy ($R = 25 > 1$), D'Alembert ($R = 25 > 1$)	D
6	Critère de polynôme ou bien comparaison directe ou à la limite$\left(\frac{1}{n}\right)$	D
7	Leibniz	C
8	Polynôme généralisé ($d = \frac{1}{2} \leq 1$), comparaisonà la limite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ ou directe $\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$	D
9	D'Alembert ($R = 0 < 1$)	C
10	Comparaison à une intégrale $\left(\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3} = \frac{1}{2(\ln 2)^2}\right)$	C
11	D'Alembert ($R = 9\, e^{-1} > 1$)	D
12	Cauchy ($R = 0 < 1$)	C
13	En premier lieu, on transforme$\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}$ en multipliant et divisant par son conjugué comme suit : $$\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3} = \left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}\right)\frac{\left(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}\right)}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}} = \frac{\left(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3}\right)\left(\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}\right)}{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n^3}}$$	C

$$= \frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}.$$

On utilise une comparaison à la limite ou directe avec la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n^3}}$ qui est convergente (p-série avec $p = \frac{3}{2} > 1$), et donc la série converge.

14	Comparaison à une intégrale $\left(\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{0,7}} = +\infty\right)$	D
15	Critère de polynôme ($d = q - p = 2 > 1$)	C
16	Comparaison directe $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ car $\frac{\lvert\sin n\rvert}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$.	C
17	Convergence absolue par Cauchy ($L = \frac{4}{25} < 1$) ou Leibniz	C
18	Leibniz	C
19	Comparaison directe avec la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\frac{2+\cos n}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$.	D

Exercices supplémentaires corrigés

Exercice 1

Étudier la nature des séries données ci-dessous. Dans le cas d'une série à terme de signe non positif, étudier la convergence absolue et\ou conditionnelle.

1. $\sum_{n\geq 1} n^{-\left(2+\frac{1}{n}\right)}$
2. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$
4. $\sum_{n\geq 1} \frac{3^n n!}{7^n}$
5. $\sum_{n\geq 1} \frac{4^{5n}}{3^n n!}$
6. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\pi}{4}}}$
7. $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3}{(2n)!}$
8. $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{n+1}}{3^{2n}}$
9. $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!+n}$
10. $\sum_{n\geq 1} \frac{n\,(\ln n)^n}{n^2+1}$
11. $\sum_{n\geq 1} \frac{n!(n+1)!}{(2n)!}$
12. $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{16}+\cdots$
13. $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{2n}\right)$
14. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}$
15. $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+\cos n}$
16. $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^3+\sin n}$
17. $\sum_{n\geq 0} \frac{(\arctan n)^3}{n^2+1}$
18. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(3+\ln n)}$
19. $\sum_{n\geq 1} \frac{3+\ln n}{n^2}$
20. $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$
21. $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{3+n\ln n}$
22. $\sum_{n\geq 1} \frac{A\arctan\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$

Exercice 2

Transformer les nombres à développement décimal périodique (rationnels) suivant sous forme de fraction rationnelle.

1. $x = 3{,}1\overline{5}$
2. $y = 3{,}0\overline{23}$

Exercice 3

Montrer de deux manières différentes les égalités suivantes :

1. $0,\overline{9} = 1.$
2. $0,\overline{3} = \frac{1}{3}$

Exercice 4

Une balle de plastique est lâchée, sans vitesse initiale, d'une hauteur de 5 mètres du sol. À chaque rebond, elle atteint les $\frac{4}{9}$de la hauteur précédente.

1. Exprimer la hauteur h_n (en mètre) atteinte par la balle après son nième rebond, en fonction de n.
2. Évaluer la hauteur atteinte par la balle après son 4ième rebond.
3. À partir de quel nombre de rebond la balle atteindra-t-elle une hauteur maximale de 5cm ?.
4. Quel est le nombre minimal de rebond nécessaire pour que la balle parcoure au moins une distance de 11 mètres à partir de sa chute initiale.
5. Calculer théoriquement la distance totale parcourue par cette balle jusqu'à son arrêt.

Exercice 5 (les 3 derniers numéros sont seulement pour les curieux)

Pour chacune des séries suivantes, trouver l'expression de $S_n$en fonction de n et évaluer la limite de $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. En déduire la nature de la série et sa somme dans le cas de convergence.

1. $\sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}}{3^{3n+1}}$
2. $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n^2-1}$
3. $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
4. $\sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

Solutionnaire

Exercice 1

Notation :

C : convergence

D : divergence

CC : convergence conditionnelle

CA : convergence absolue.

N°	Critère(s) utilisé(s) par ordre de préférence	Rép.
1	Comparaison directe :$2+\frac{1}{n} \geq 2 \Rightarrow -\left(2+\frac{1}{n}\right) \leq -2 \Rightarrow n^{-\left(2+\frac{1}{n}\right)} \leq n^{-2} = \frac{1}{n^2}$ (p-série avec $p = 2 > 1$, et donc converge). D'où, la série converge.	C
2	Comparaison à la limite : $\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ car $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\left(x = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0\right.$lorsque $\left.n \to +\infty\right)$, donc $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n}$ (p-série avec $p = 1 \leq 1$ donc diverge). Ainsi, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.	D
3	Comparaison à la limite : $\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)} = \frac{\ln n}{\ln e^n(1-e^{-n})} = \frac{\ln n}{n+\ln(1-e^{-n})} \sim \frac{\ln n}{n}$ ·Or, $n$prédomine devant$\ln n$. On pose $b_n = \frac{1}{n}$ ·Alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n+\ln(1-e^{-n})}}{\frac{1}{n}} = +\infty$. Or, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est une p-série avec $p = 1 \leq 1$, donc diverge. D'où, $\sum_{n\geq 1}\frac{\ln n}{\ln(e^n-1)}$ diverge.	D
4	D'Alembert avec$R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{7^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{7^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{7} = +\infty > 1$. Donc la série diverge.	D
5	D'Alembert avec $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{4^{5n+5}}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{4^{5n}}{3^n n!}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^5}{3(n+1)} = 0 < 1$. Donc la série converge.	C
6	Soit $a_n = \frac{1}{n^{\frac{\pi}{4}}}$.	CC

- On a a : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{\pi}{4}}} = 0;$

- Soit $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{\pi}{4}}}$, pour $x \geq 1$. On a $f'(x) = -\frac{\pi}{4\, x^{1+\frac{\pi}{4}}} < 0$ pour $x \geq 1$. Donc f est décroissante, et par suite $(a_n) = \left(\frac{1}{n^{\frac{\pi}{4}}}\right)$ est décroissante.

Conclusion : D'après Leibniz la série converge.

Étude de la convergence absolue

On a $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n^{\frac{\pi}{4}}}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{\pi}{4}}}$ diverge car p-série avec $p = \frac{\pi}{4} \leq 1$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\frac{\pi}{4}}}$ converge est semi-convergente (convergence condionnelle).

7	D'Alembert avec : $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(2n+2)!}}{\frac{n^3}{(2n)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3(2n+2)(2n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^3(2n+1)} = 0 < 1.$ Donc la série converge.	C
8	Cauchy avec $R = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{e^{n+1}}{3^{2n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{e^{n+1}}}{\sqrt[n]{3^{2n}}} = \frac{1}{9} \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{n+1}} = \frac{e}{9} < 1$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{n+1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{1+\frac{1}{n}} = e$. Donc la série converge. **N.B. :** On aurait pu également utiliser le critère de D'Alembert. En effet, $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+2}}{3^{2n+2}}}{\frac{e^{n+1}}{3^{2n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{e}{3^2} = \frac{e}{9} < 1.$	C
9	Comparaison et D'Alembert. On a $\frac{2^n}{n!+n} \leq \frac{2^n}{n!}$. Or, en utilisant D'Alembert pour la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!}$ on obtient$R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1$. Donc la série $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!}$ converge. D'après le critère de comparaison directe, $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!+n}$ · On pourrait appliquer D'Alembert directement sur $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n!+n}$ et on trouvera $R = 0$	C

(en utilisera le fait que n!prédomine devant les polynômes). Faites-le c'est un bon exercice d'entrainement.

10	Cauchy avec : $R=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n\,(\ln n)^n}{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{(\ln n)^n}}{\sqrt[n]{n^2+1}}=$ $\left(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}_{=1}\right)\left(\underbrace{\lim_{n\to\infty}\ln n}_{=+\infty}\right)\left(\frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+1}}_{=1}}\right)=+\infty>1$. Donc la série diverge.	D
11	D'Alembert avec $R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!(n+2)!}{(2n+2)!}}{\frac{n!(n+1)!}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{2(2n+1)}=\frac{1}{4}<1$. Donc la série converge.	C
12	La série$\sum_{n\geq1}\frac{\pi}{2^n}=\sum_{n\geq1}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une série géométrique avec $\lvert r\rvert=\left\lvert\frac{1}{2}\right\rvert=\frac{1}{2}<1$, et donc converge. **N.B. :** On aurait pu utiliser le critère de D'Alembert ou de Cauchy. Dans ce cas, $R=r=\frac{1}{2}<1$.	C
13	Comparaison à la limite : $\sin\left(\frac{1}{2n}\right)\sim\frac{1}{2n}$ car $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ ($x=\frac{1}{2n}\to0$lorsque $n\to+\infty$) , donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2n}\right)}{\frac{1}{2n}}=1$.La série$\sum_{n\geq1}\frac{1}{2n}$ est une p-série avec $p=1\leq1$ donc diverge. Ainsi $\sum_{n\geq1}\sin\left(\frac{1}{2n}\right)$ diverge.	
14	Comparaison directeou à la limite : $\frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}\leq\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$ pour $n\geq1$. Or, $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}}$est une p-série avec $p=\frac{5}{2}>1$, et donc converge. Ainsi, $\sum_{n\geq1}\frac{1}{n\sqrt{n^3+1}}$ converge.	C
15	Comparaison directe : $\frac{n}{n^2+\cos n}\geq\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n}\cdot$ Or,$\sum_{n\geq1}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}$ est une série de Riemann avec $p=1\leq1$ donc diverge. Ainsi, $\sum_{n\geq1}\frac{n}{n^2+\cos n}$ diverge.	D
16	Comparaison directe : $\frac{n}{n^3+\sin n}\leq\frac{n}{\frac{1}{2}n^3}=\frac{2}{n^2}\cdot$ Or, $\sum_{n\geq1}\frac{2}{n^2}=2\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $p=2>1$ donc converge. Ainsi, $\sum_{n\geq1}\frac{n}{n^3+\sin n}$ converge.	C

17	Comparaison à la limite : on a $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$ donc $\arctan n \sim \frac{\pi}{2}$. De plus, $\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}$, et donc $\frac{(\arctan n)^3}{n^2+1} \sim \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{n^2}$. Donc la série de comparaison est $\sum_{n\geq 1} \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{n^2}$ ou tout simplement $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ (sans la constante $\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$). En effet, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(\arctan n)^3}{n^2+1}}{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \neq 0$. Donc les deux séries $\sum_{n\geq 0} \frac{(\arctan n)^3}{n^2+1}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ sont de même nature. Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $p = 2 > 1$ donc converge. D'où, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(\arctan n)^3}{n^2+1}$ converge. **N.B. :** On aurait pu utiliser l'inégalité : $\frac{(\arctan n)^3}{n^2+1} \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{n^2+1} \leq \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{n^2}$ pour $n \geq 1$.	C
18	Comparaison directe : on a $\frac{1}{n^2(3+\ln n)} \leq \frac{1}{n^2}$ car $3 + \ln n > 1$. Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann avec $p = 2 > 1$ donc converge. D'où, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(3+\ln n)}$ converge.**N.B. :** On aurait pu utiliser le critère de comparaison à la limite car: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2(3+\ln n)}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3+\ln n} = 0$. Comme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, alors on peut conclure pour la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(3+\ln n)}$.	C
19	Comparaison à la limite avec la p-série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^p}$ avec $1 < p < 2$ (par exemple $p = \frac{3}{2}$) qui est convergente. En effet, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3+\ln n}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ (utiliser L'Hospital ou simplement le fait que les fonctions polynômes prédominent devant les fonctions logarithmes à ∞). On peut donc conclure que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{3+\ln n}{n^2}$ converge. **N.B. :** l'utilisation du critère de comparaison directe est plus délicate dans ce cas, car il y a présence de la fonction $\ln n$ au numérateur. D'où, il faudrait bien maitriser les inégalités liées aux fonctions logarithmes et polynômes. On aurait pu également utiliser le critère de comparaison à une intégrale car la	C

fonction $f(x) = \frac{3+\ln x}{x^2}$ vérifie les condition de ce critère (positive, continue et décroissante sur $[1, +\infty[$). De plus, $\int \frac{3+\ln x}{x^2} \mathrm{d}x = \int \frac{3}{x^2} \mathrm{d}x + \underbrace{\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x}_{par\ une\ intégration\ par\ partie}$

$= -\frac{3}{x} - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x}(4 + \ln x) + C.$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{3+\ln x}{x^2} \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{3+\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$

$= -\lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{x}(4 + \ln x)\right]_1^t - \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t}(4 + \ln t) - 4\right) = 4$ (finie).

D'où, $\int_1^{+\infty} \frac{3+\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$ converge, et par suite on a la convergence de notre série.

20	On utilise Leibniz. Soit $a_n = \frac{\ln n}{n}$.	C

- On a a : $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0;$
- Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, pour $x \geq 1$. On a $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ pour $x \geq e$. Donc f est décroissante, et par suite $(a_n) = \left(\frac{\ln n}{n}\right)$ est décroissante.

Conclusion : D'après Leibniz la série converge.

Étude de la convergence absolue

On a la série $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n \ln n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}$. On utilise la comparaison à la limite avec la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. En effet, $\frac{\ln n}{n} \geq \frac{1}{n}$ pour $n \geq 3$ou bien $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty$. Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série de Riemann avec $p = 1 \leq 1$ donc diverge et par suite la série $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n \ln n}{n}\right|$ diverge. Donc $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$ converge conditionnellement.

N.B. : On aurait pu également utiliser le critère de comparaison à une intégrale pour la convergence absolue.

21 Comparaison directe et critère de comparaison à une intégrale :

on a $\frac{2}{3+n\ln n} \geq \frac{2}{2n\ln n} = \frac{1}{n\ln n}$ pour tout $n \geq 2$. Or, la fonction $f(x) = \frac{1}{x\ln x}$ vérifie les condition du critère de comparaison à l'intégral (positive, continue et décroissante sur $[2, +\infty[$). De plus,

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_2^{t} \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}[\ln\ln x]_2^t$$

$\lim\limits_{t\to+\infty}(\ln(\ln t) - \ln(\ln 2)) = +\infty$ qui est alors divergente.On conclue, en utilisant la comparaison à l'intégral, que la série $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n\ln n}$ est divergente. D'après le critère de comparaison directe, la série $\sum_{n\geq 2}\frac{2}{3+n\ln n}$ est aussi divergente.· D

22 Comparaison à la limite : on a $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan\sqrt{n} = \frac{\pi}{2}$ donc $\arctan\sqrt{n} \sim \frac{\pi}{2}$ · De plus, $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{1}{n}$, et donc $\frac{\arctan\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{n}$. Donc la série de comparaison est $\sum_{n\geq 1}\frac{\frac{\pi}{2}}{n}$ ou tout simplement $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ (sans la constante $\frac{\pi}{2}$). En effet, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{Arctan\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{2} \neq 0$. D

Donc les deux séries $\sum_{n\geq 1}\frac{\arctan\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$ et $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ sont de même nature. Or, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est une série de Riemann avec $p = 1 \leq 1$ donc diverge. D'où, la série $\sum_{n\geq 1}\frac{Arctan\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$ diverge.

Exercice 2

1. $x = 3{,}1\overline{5} = 3 + \frac{1}{10} + 5\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right) = 3 + \frac{1}{10} + 5\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{10^n}$

$$= 3 + \frac{1}{10} + 5\frac{\frac{1}{10^2}}{1-\frac{1}{10}} = 3 + \frac{1}{10} + \frac{5}{90} = \frac{284}{90}$$

2. $y = 3{,}0\overline{23} = 3 + 23\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{10^{2n+1}} = 3 + 23\frac{\frac{1}{10^3}}{1-\frac{1}{10^2}} = \frac{2993}{990}$ ·

Exercice 3

1. On peut répondre à cette question de deux manières différentes.

Première méthode (méthode générale utilisant les séries)

On a $0,9 = 9\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{1}{10^4}+\cdots\right) = 9\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{10^n} = 9\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 9\left(\frac{1}{9}\right) = 1.$

Deuxième méthode

En multipliant l'égalité $x = 0,\overline{9}$ par 10, on obtient : $10x = 9,\overline{9} = 9 + 0,\overline{9} = 9 + x$.
Donc on a : $10x = 9 + x$, et par suite $9x = 9$. D'où, on en déduitque $x = 1$.
2. Idem que le numéro 1.

Exercice 4

1. $h_n = 5\left(\frac{4}{9}\right)^n$ (en mètres)
2. $h_4 = 5\left(\frac{4}{9}\right)^4 = \frac{1280}{6561} \cong 19{,}5\ \times\ 10^{-2}$ mètre=19,5 cm
3. $h_n = 5\left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 5\times 10^{-2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq 10^{-2} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 10^{-2}}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)} \cong 5{,}68$. Donc $n = 6$.
4. Soit D_n la distance parcourue par la balle après n rebond et juste avant son (n+1)-ième rebond. On a alors :

$D_n = 5 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k = 5 + 10\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k$ où $\sum_{k\geq 1} h_k = \sum_{k\geq 1}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots$ est une série géométrique de raison $r = \frac{4}{9}$ et de premier terme $h_1 = \frac{4}{9}\cdot$ Ainsi, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} h_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k = 1^{\text{er}}\text{terme}\ \frac{1 - r^{nombre\ de\ termes}}{1-r} = \frac{4}{9}\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1-\frac{4}{9}}.$$

Il s'en suit que :

$$D_n = 5 + 2\sum_{k=1}^{n} h_k = 5 + 10\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k = 5 + 10\frac{\frac{4}{9}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)}{1-\frac{4}{9}} = 5 + 8\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

Or, on a :

$$D_n \geq 11 \Leftrightarrow \left[5 + 8\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) \geq 11\right] \Leftrightarrow \left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n \geq \frac{3}{4}\right] \Leftrightarrow \left(\frac{4}{9}\right)^n \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}{\ln\left(\frac{4}{9}\right)}$$

$$\cong 1{,}7$$

Ainsi, la distance de 11 mètres sera atteinte après le deuxième rebond et juste avant le troisième rebond.

5. Soit D la distance totale qui sera parcourue par la balle (distance théorique car ce n'est qu'une limite du fait qu'on suppose que le mouvement sera continue sans amortissement et donc perpétuel).

On a :

$D = \lim_{n\to\infty} D_n = 5 + 2\sum_{k=1}^{+\infty} h_k = 5 + 10\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k = 5 + 10\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}} = 5 + 8 = 13$ mètres

ou directement :

$D = \lim_{n\to\infty} D_n = \lim_{n\to\infty}\left[5+8\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right] = 5+8-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = 5+8 = 13$mètres

car $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$ où dans notre cas $|r| = \frac{4}{9} < 1$.

Exercice 5

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^{2k}}{3^{3k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{4}{27}\right)^k = \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{4}{27}\right)^n}{1-\frac{4}{27}} = \frac{9}{23}\left(1-\left(\frac{4}{27}\right)^n\right)$. Donc on a :

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{23}\left(1-\left(\frac{4}{27}\right)^n\right) = \frac{9}{23}$ (somme d'une série géométrique).

2. $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=2}^{n}\left[\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)-\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\right]$

$=\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)-\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\cdot$

Donc on a :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot$$

3. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\frac{1}{2}}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{\frac{1}{2}}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right]$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}\cdot$$

Donc on a :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+1)}\right) = \frac{1}{4}\cdot$$

4. $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{\frac{k+1}{k}}{\frac{k+2}{k+1}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right)\right)$

$= \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1} = \ln(2) - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$avec $b_k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$.

Donc on a :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\ln(2)-\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right) = \ln(2)\cdot$$

Chapitre 2
Suites et séries de fonctions

2.1 Convergence simple

On suppose que $\mathbb{K}$ est l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et que D est une partie non vide de $\mathbb{K}$.

2.1.1 Définition. *i) Une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de D dans* $\mathbb{K}$ *est une application* $n \to f_n$ *de* $\mathbb{N}$ *dans l'ensemble des fonctions de D dans* $\mathbb{K}$.

ii) Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de D dans* $\mathbb{K}$ *converge simplement vers la fonction f si quelque soit* $t \in D$, *la suite numérique* $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(t)$.

On peut reformuler la propriété *ii)* de la façon suivante :

2.1.2 Proposition. *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de D dans* $\mathbb{K}$ *converge simplement vers la fonction f si et seulement si :*

$$\forall t \in D\ , \forall \varepsilon > 0\ , \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon\ .$$

2.1.3 Définition. *i) Une série de fonctions de terme général* u_n *de D dans* $\mathbb{K}$ *est un couple formé de deux suites de fonctions définies sur D et à valeurs dans* $\mathbb{K}$ $\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ *telles que*

$$\forall t \in D\ , \forall n \in \mathbb{N}\ , s_n(t) = \sum_{i=0}^{n} u_i(t).$$

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n *s'appelle le terme général d'ordre n de la série de fonctions et* s_n *s'appelle la somme partielle d'ordre n.*

iii) Une série de fonctions de terme général u_n, *défini sur D, à valeurs dans* $\mathbb{K}$ *converge simplement et a pour somme s si quel que soit* $t \in D$, *la série numérique de terme général* $u_n(t)$ *converge et a pour somme* $s(t)$.

iv) Si la série converge simplement, pour tout $t \in D$ *et* $n \in \mathbb{N}$, $r_n(t) = s(t) - s_n(t)$ *s'appelle le reste d'ordre n de la série de terme général* u_n

Comme dans le cas des séries numériques, on a :

2.1.4 Notations. On note $s = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$. Ce qui veut dire :

$$\forall t \in D\ ,\ s(t) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} u_i(t).$$

Si la série de fonctions de terme général u_n converge simplement et a pour somme s, on peut donc écrire : $\forall t \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$r_n(t) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=0}^{k} u_i(t) - \sum_{i=0}^{n} u_i(t) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{i=n+1}^{k} u_i(t) = \sum_{i=n+1}^{+\infty} u_i(t).$$

La convergence de la série de terme général $u_n(t)$ s'exprime par la convergence de la suite des sommes partielles $s_n(t) = \sum_{i=0}^{n} u_i(t)$. On peut donc reformuler la propriété *iii)* de la définition 4.1.3 en :

2.1.5 Proposition. *La série de fonctions de terme général u_n de D dans $\mathbb{K}$ converge simplement et a pour somme s si et seulement si,* $\forall t \in D$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que *:*

$$n \geq N \Rightarrow |s_n(t) - s(t)| = \left| \sum_{i=0}^{n} u_n(t) - s(t) \right| = |r_n(t)| \leq \varepsilon$$

Remarquons que dans ces définitions et propositions sur la convergence simple, l'entier N peut dépendre de t : il n'y a pas en général un entier N qui marche pour tout $t \in D$. A cause de cela, la convergence simple des suites ou séries de fonctions ne transmet pas, en général, les propriétés de la suite à sa limite ou de la série à sa somme.

Donnons des exemples :

2.1.6 Exemple. *i) La suite de fonctions continues définie pour tout $t \in [0,1]$ par*

$$f_n(t) = t^n,$$

converge simplement vers la fonction discontinue f telle que :

$$\begin{cases} f(t) &= 0 \quad \text{si } t \in [0,1[\\ f(1) &= 1. \end{cases}$$

ii) La série de fonctions continues définie pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, de terme général

$$u_n(t) = \sin^2 t \cos^n t,$$

converge simplement et a pour somme la fonction s, discontinue en 0, telle que :

$$\begin{cases} s(t) &= \dfrac{\sin^2 t}{1-\cos t} \quad \text{si } t \in]0, \frac{\pi}{2}] \\ s(0) &= 0. \end{cases}$$

2.1.7 Exemple. *i) La suite de fonctions dérivables définie pour $n \geq 1$ et pour $t \in [0, \pi/2]$ par*

$$f_n(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{n}},$$

converge simplement vers la fonction 0.
Par contre la suites des dérivées

$$f_n'(t) = \frac{n \cos nt}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \cos nt,$$

ne converge pas vers 0 qui est pourtant la dérivée de la limite des $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ii) La série de fonctions dérivables définie pour $n \geq 2$ *et pour* $t \in [0, \pi/2]$*, de terme général*

$$u_n(t) = \frac{\sin nt}{\sqrt{n}} - \frac{\sin(n-1)t}{\sqrt{n-1}},$$

converge simplement et a pour somme la fonction $-\sin t$.
La série des dérivées ne converge pas.

2.1.8 Exemple. *i) La suite de fonctions définie par* $f_n(t) = nt(1-t^2)^n$ *pour tout* $t \in [0, 1]$ *converge simplement vers la fonction nulle. Par contre,*

$$\int_0^1 f_n(t)dt = n\int_0^1 t(1-t^2)^n dt = \frac{n}{2n+2}.$$

Cette suite converge vers $1/2$ *qui n'est pas égal à l'intégrale de la limite des* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sur* $[0, 1]$.

ii) La série de fonctions continues définie pour $n \geq 1$*, de terme général*

$$u_n(t) = nt(1-t^2)^n - (n-1)t(1-t^2)^{(n-1)},$$

pour tout $t \in [0, 1]$ *converge simplement et a pour somme 0. L'intégrale de* u_n *sur* $[0, 1]$ *vaut d'après le i)* $\dfrac{n}{2n+2} - \dfrac{n-1}{2n}$. *La série dont le terme général est l'intégrale de* u_n *sur* $[0, 1]$ *converge donc vers* $1/2$*, puisque*

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{2i+2} - \frac{i-1}{2i}\right) = \frac{n}{2n+2} \longrightarrow_{n\to+\infty} \frac{1}{2},$$

qui n'est pas l'intégrale de la somme de la série de terme général u_n *sur* $[0, 1]$.

Pour que les propriétés de la suite ou de la série, se transmettent à la limite de la suite ou à la somme de la série, on est donc amené à définir une convergence plus forte, la convergence uniforme.

2.2 Convergence uniforme

2.2.1 Définition. *Une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de D dans* $\mathbb{K}$ *converge uniformément vers la fonction f si :*

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ , } \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que, } n \geq N \Rightarrow \forall t \in D \text{ , } |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Cette définition s'écrit encore :

2.2.2 Proposition. *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de D dans* $\mathbb{K}$ *converge uniformément vers f si :*

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ , } \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que, } n \geq N \Rightarrow \sup_{t\in D}|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

2.2.3 Définition. *Une série de fonctions de terme général u_n de D dans $\mathbb{K}$ converge uniformément et a pour somme s si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que,}$$

$$n \geq N \Rightarrow \forall t \in D \ , \ |s_n(t) - s(t)| = \left| \sum_{i=0}^{n} u_i(t) - s(t) \right| = |r_n(t)| \leq \varepsilon.$$

On peut également reformuler ceci en :

2.2.4 Proposition. *La série de fonctions de terme général u_n de D dans $\mathbb{K}$ converge uniformément et a pour somme s si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que,}$$

$$n \geq N \Rightarrow \sup_{t \in D} |s_n(t) - s(t)| = \sup_{t \in D} \left| \sum_{i=0}^{n} u_n(t) - s(t) \right| = \sup_{t \in D} |r_n(t)| \leq \varepsilon.$$

On peut définir une norme sur l'ensemble des fonctions bornées sur un ensemble D, qui est directement reliée à la convergence uniforme des suites ou séries de fonctions :

2.2.5 Définition. *Soit f une fonction bornée sur D, alors on appelle norme de la convergence uniforme de f, le nombre défini par :*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(t)| \ | \ t \in D\}.$$

Grâce à cette norme, on peut écrire très simplement la convergence uniforme des suites et séries de fonctions :

Remarque. *1)* La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si la suite numérique $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

2) La série de fonctions de terme général u_n converge uniformément et a pour somme s si et seulement si la suite numérique $(\|s_n - s\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

La différence essentielle entre les définitions 4.2.1 et 4.2.3 sur la convergence uniforme des suites et séries de fonctions et leurs analogues pour la convergence simple, définitions 4.1.1 et 4.1.3, est qu'ici l'entier N ne dépend pas de $t \in D$: il est le même pour tous les t dans D. Cette constatation permet de montrer la proposition suivante :

2.2.6 Proposition. *i) Si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, elle converge simplement vers f et la réciproque est fausse.*

ii) Si une série de terme général u_n converge uniformément et a pour somme s, elle converge simplement et a même somme. La réciproque est fausse.

Démonstration. i) Il suffit de remarquer que si $\sup_{t \in D} |f_n(t) - f(t)|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$, alors, pour t_0 fixé dans D, $f_n(t_0) - f(t_0)$ tend vers 0.

Voici un contre-exemple montrant que la réciproque de cette proposition est fausse :
la suite de fonctions de l'exemple 4.1.6, $f_n(t) = t^n$ pour $t \in [0,1]$ converge simplement vers la fonction f telle que $f(t) = 0$ si $t \in [0,1[$ et $f(1) = 1$.
Or $\sup_{t \in [0,1]} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t \in [0,1[} |t^n| = 1$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$ donc cette suite ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

ii) De la même manière, si $\sup_{t\in D}|s_n(t)-s(t)|$ tend vers 0 quand $n\to+\infty$, alors, pour t_0 fixé dans D, $s_n(t_0)-s(t_0)$ tend vers 0.

De même, pour montrer que la réciproque de cette proposition est fausse, donnons un contre exemple :
la série de fonctions de l'exemple 4.1.6, de terme général $u_n(t)=\sin^2 t\cos^n t$ défini pour $t\in[0,\pi/2]$ converge simplement mais non uniformément car :

$$\sup_{t\in[0,\pi/2]}|r_n(t)|=\sup_{t\in[0,\pi/2]}\left|\sum_{i=n+1}^{+\infty}\sin^2 t\cos^i t\right|=\sup_{x\in[0,\pi/2]}\left|\frac{\sin^2 t\cos^{n+1} t}{1-\cos t}\right|=2,$$

puisque :

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t\cos^{n+1} t}{1-\cos t}=2\,.$$

Il existe un critère de Cauchy uniforme, qui permet de tester la convergence uniforme d'une suite ou d'une série sans connaître sa limite ou sa somme :

2.2.7 Théorème. *Critère de Cauchy uniforme.*

i) Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D dans $\mathbb{K}$ converge uniformément si et seulement si :

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists N\in\mathbb{N} \text{ tel que } \ p,q\geq N\Rightarrow\sup_{t\in D}\left|f_p(t)-f_q(t)\right|\leq\varepsilon.$$

ii) Une série de fonctions de terme général u_n de D dans $\mathbb{K}$ converge uniformément si et seulement si :

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists N\in\mathbb{N} \text{ tel que } \ p,q\geq N\Rightarrow\sup_{t\in D}\left|s_p(t)-s_q(t)\right|=\sup_{t\in D}\left|\sum_{i=q+1}^{p}u_i(t)\right|\leq\varepsilon.$$

Démonstration. i) Supposons que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D. Alors :

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists N\in\mathbb{N} \text{ tel que } n\geq N\Rightarrow\forall t\in D\ ,\ |f_n(t)-f(t)|\leq\varepsilon.$$

D'où

$$p,q\geq N\Rightarrow\forall t\in D\ ,\ \left|f_p(t)-f_q(t)\right|\leq\left|f_p(t)-f(t)\right|+\left|f_q(t)-f(t)\right|\leq 2\varepsilon.$$

On a donc bien le critère de Cauchy uniforme.

Réciproquement, si

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists N\in\mathbb{N} \text{ tel que } p,q\geq N\Rightarrow\forall t\in D\ ,\ \left|f_p(t)-f_q(t)\right|\leq\varepsilon,$$

pour $t\in D$ fixé, la suite de nombres $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$, donc converge vers un nombre $f(t)$. Dans le critère de Cauchy, on peut alors faire tendre q vers $+\infty$ et on obtient :

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists N\in\mathbb{N} \text{ tel que } p\geq N\Rightarrow\forall t\in D\ ,\ \left|f_p(t)-f(t)\right|\leq\varepsilon.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

ii) La démonstration de cette propriété pour les séries est la même que pour les suites en raisonnant sur la suite des sommes partielles.

Comme dans le cas numérique, proposition 2.3.6, pour **les séries de fonctions**, le critère de Cauchy uniforme a un corollaire, que l'on utilise beaucoup par sa contraposée, pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément :

2.2.8 Corollaire. *Si la série de fonctions de terme général u_n de D dans $\mathbb{K}$ converge uniformément sur D, alors $\|u_n\|_\infty = \sup_{t\in D}|u_n(t)| \to 0$ quand $n \to \infty$. La réciproque est fausse.*

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t\in D}|u_n(t)| = \sup_{t\in D}|s_n(t) - s_{n-1}(t)|,$$

et d'appliquer le critère de Cauchy uniforme.

Pour montrer que la réciproque est fausse, il suffit de prendre une série dont le terme général est une fonction constante, qui diverge et dont le terme général tend vers 0 à l'infini comme en 2.3.6. Par exemple la série de fonctions constantes, de terme général $u_n(t) = \dfrac{1}{n}$, $n > 1$, pour tout t convient.

On a pour les **séries de fonctions**, une notion de convergence, la **convergence normale**, qui implique la convergence uniforme et qui dans la pratique est souvent facile à vérifier :

2.2.9 Définition. *Une série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur D*
si la série numérique à termes positifs de terme général $\|u_n\|_\infty = \sup_{t\in D}|u_n(t)|$ converge.

Le terme convergence normale correspond au fait qu'elle s'exprime à l'aide de la norme de la convergence uniforme définie dans la définition 4.2.5 :

Cette notion de convergence est plus forte que la convergence uniforme car on a :

2.2.10 Proposition. *Si la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur D, elle converge uniformément sur D.*

Démonstration. On peut écrire : $\sup_{t\in D}\left|\sum_{i=q+1}^{p} u_i(t)\right| \leq \sum_{i=q+1}^{p} \sup_{t\in D}|u_i(t)|$.

Si la série numérique de terme général $\sup_{t\in D}|u_n(t)|$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy et l'inégalité ci-dessus prouve que la série de terme général u_n vérifie le critère de Cauchy uniforme. Donc elle converge uniformément sur D. □

Remarque. La réciproque de cette propriété est fausse : la série de fonctions de terme général $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n+t}$, $n > 1$, est uniformément convergente mais non normalement convergente sur $[0,1]$.

En effet, cette série de fonctions n'est pas normalement convergente car

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]}\left|\frac{(-1)^n}{n+t}\right| = \frac{1}{n},$$

et cette série numérique est divergente.

Pour montrer la convergence uniforme, on utilise la majoration du reste d'une série alternée, voir 2.5.2 :

$$\forall t \in [0,1] \ , \ |r_n(t)| \leq \left|\frac{(-1)^n}{n+1+t}\right| \leq \left|\frac{1}{n+1}\right|.$$

Par suite, $\sup_{t\in[0,1]} |r_n(t)| \to 0$ quand $n \to \infty$ et on a bien convergence uniforme sur $[0,1]$.

2.2.11 Exemple. *i) La série de terme général* $u_n(t) = \dfrac{\sin nt}{n^2}$ *,* $n > 1$*, définie sur* $\mathbb{R}$ *converge normalement car :*

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nt}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}.$$

ii) Soit $r \in]0,1[$*. La série de terme général* $u_n(z) = z^n$ *définie sur le disque* D_r *centré à l'origine, de rayon* r*, converge uniformément sur ce disque car :*

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{z\in D_r} |u_n(z)| = r^n.$$

Remarque. Dans toutes les définitions et propriétés de ce paragraphe, le domaine D est fondamental. Dans l'exemple *ii)* ci dessus, on a convergence uniforme sur D_r pour $r < 1$ mais pas sur D_1.

2.3 Continuité des limites et des sommes pour la convergence uniforme

Théorème. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur un domaine* D *et qui converge uniformément vers une fonction* f *sur* D*. Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,* f_n *est continue en un point* t_0 *de* D*,* f *est aussi continue en* t_0*.*
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} f(t_0) &= \lim_{t\to t_0} f(t) = \lim_{t\to t_0}\lim_{n\to+\infty} f_n(t) \\ &= \lim_{n\to+\infty} f_n(t_0) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{t\to t_0} f_n(t), \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limites.

Démonstration. Puisque la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \Rightarrow \ \forall t \in D \ , \ |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

$\varepsilon > 0$ étant fixé, écrivons la continuité de la fonction f_N en t_0 :

$$\exists \eta > 0 \text{ tel que } |t - t_0| \leq \eta \Rightarrow |f_N(t) - f_N(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour tout $t \in D$, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &= |f(t) - f_N(t) + f_N(t) - f_N(t_0) + f_N(t_0) - f(t_0)| \\ &\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)|. \end{aligned}$$

Donc si $|t-t_0| \leq \eta$, on a

$$|f(t)-f(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

Ceci prouve la continuité de f en t_0.

Corollaire. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un domaine D et qui converge uniformément vers une fonction f sur D. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur D, f est aussi continue sur D.*

Théorème. *On considère une série de fonctions de terme général u_n, défini sur un domaine D, qui converge uniformément et a pour somme la fonction s sur D. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue en un point t_0 de D, s est aussi continue en t_0.*
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} s(t_0) &= \lim_{t\to t_0}\sum_{i=0}^{+\infty} u_i(t) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} u_i(t_0) = \sum_{i=0}^{+\infty}\lim_{t\to t_0} u_i(t), \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et somme infinie.

Démonstration. On applique le théorème 2.3.1 à la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général u_n, qui sont continues comme sommes finies de fonctions continues.

2.3.4 Corollaire. *On considère une série de fonctions de terme général u_n, défini sur un domaine D, qui converge uniformément et a pour somme la fonction s sur D. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur D, s est aussi continue sur D.*

On utilise souvent ces résultats par contraposée : en reprenant l'exemple 4.1.6, on retrouve immédiatement :

2.3.5 Exemple. *i) La suite de fonctions continues $f_n(t)=t^n$ converge simplement vers une fonction f, discontinue sur $[0,1]$. Elle ne converge donc pas uniformément sur cet intervalle.*

ii) La série de fonctions continues de terme général $\sin^2 t\cos^n t$ converge simplement sur $[0,\pi/2]$ et a pour somme une fonction discontinue. Elle ne converge donc pas uniformément sur cet intervalle.

La convergence uniforme des suites ou séries de fonctions est suffisante mais non nécessaire pour assurer la continuité des limites ou des sommes. De plus, en général, on ne peut pas appliquer directement les résultats de continuité des limites de suites de fonctions, théorème 4.3.1, et de sommes de séries de fonctions, théorème 4.3.3, sur le domaine D en entier et on est obligé d'utiliser un argument, dit de saturation. Donnons deux exemples :

2.3.6 Exemple. *1) La suite de fonctions $f_n(t)=n^2te^{-nt}$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$ mais sa limite est continue sur $[0,+\infty[$.*

2) La somme de la série de fonctions de terme général $\frac{1}{n^t}$ $n>1$, est continue sur $]1,+\infty[$.

Démonstration. *1)* La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[0,+\infty[$ qui est bien une fonction continue.
Par contre, la convergence n'est pas uniforme. En effet, on a $f_n'(t) = n^2 e^{-nt}(1-nt)$, cette fonction s'annule en $t = \frac{1}{n}$ et $\sup\limits_{t\in[0,+\infty[} f_n(t) = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{n}{e}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$.

En revanche, il est facile de voir que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur tout intervalle $[a,+\infty[$, pour $a > 0$.
2) Soit $a > 1$. On peut écrire :

$$\forall t \in [a,+\infty[\ ,\ 0 \leq \frac{1}{n^t} \leq \frac{1}{n^a}.$$

La série numérique de terme général $\frac{1}{n^a}$ est convergente. La série de fonctions de terme général $\frac{1}{n^t}$ est normalement convergente donc uniformément convergente sur $[a,+\infty[$ et sa somme s est continue sur cet intervalle. Comme ce raisonnement est valable pour tout $a > 1$, s est continue sur tous les intervalles $[a,+\infty[$ avec $a > 1$ donc aussi sur leur réunion qui est exactement l'intervalle $]1,+\infty[$. □

2.4 Dérivabilité des limites et des sommes pour la convergence uniforme

Pour pouvoir parler de dérivation, on va se placer sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

2.4.1 Théorème. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et dérivables sur un intervalle $I \in \mathbb{R}$ telle que :*
1) Il existe $t_0 \in I$ tel que la suite numérique $(f_n(t_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge
2) La suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I vers une fonction g.
Alors, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I vers une fonction dérivable f telle que $f' = g$.
On peut alors écrire, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)' \\ &= \lim_{n\to+\infty} f_n'(t), \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et de dérivation.

Démonstration. Soit I' un sous-intervalle borné de I contenant t_0 et soit $|I'|$ sa longueur. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On peut écrire le critère de Cauchy uniforme pour la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ sur I' :

$$\exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } p,q \geq N \Rightarrow \forall t \in I'\ ,\ \left|f_p'(t) - f_q'(t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2\,|I'|}.$$

Pour chaque couple $p,q \geq N$, appliquons le théorème des accroissements finis en t_0 à la fonction $f_p - f_q$: pour tout $t \in I'$,

$$\begin{aligned} \left|[f_p(t) - f_q(t)] - [f_p(t_0) - f_q(t_0)]\right| &\leq |t-t_0| \sup_{t\in I'} \left|f_p'(t) - f_q'(t)\right| \\ &\leq |t-t_0| \frac{\varepsilon}{2\,|I'|} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in I'$, on a :

$$\left| f_p(t) - f_q(t) \right| \leq \left| f_p(t_0) - f_q(t_0) \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par hypothèse, la suite $(f_n(t_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; par suite, elle est de Cauchy et il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que

$$p,q \geq N' \Rightarrow \left| f_p(t_0) - f_q(t_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que :

$$p,q \geq \sup\{N,N'\} \Rightarrow \ \forall t \in I' \ , \ \left| f_p(t) - f_q(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur I'. Soit f sa limite.
En reprenant la formule des accroissements finis ci-dessus en un point $t_1 \in I'$ et en divisant par $|t - t_1|$, on peut écrire : $p,q \geq N \Rightarrow \forall t \in I'$, $t \neq t_1$,

$$\left| \frac{f_p(t) - f_q(t)}{t - t_1} - \frac{f_p(t_1) - f_q(t_1)}{t - t_1} \right| = \left| \frac{f_p(t) - f_p(t_1)}{t - t_1} - \frac{f_q(t) - f_q(t_1)}{t - t_1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\,|I'|}.$$

En revenant au début de la démonstration, on a vu que l'on a aussi :

$$p,q \geq N \Rightarrow \ \forall t \in I' \ , \ \left| f'_p(t) - f'_q(t) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\,|I'|}.$$

En définissant la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \varphi_n(t) &= \dfrac{f_n(t) - f_n(t_1)}{t - t_1} \quad \text{pour } t \neq t_1 \\ \varphi_n(t_1) &= f'_n(t_1), \end{cases}$$

ces propriétés montrent que la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I'. Soit φ sa limite.
La suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues en t_1 car puisque par hypothèse, les fonctions f_n sont dérivables en t_1 et on peut écrire :

$$\lim_{t\to t_1} \varphi_n(t) = \lim_{t\to t_1} \frac{f_n(t) - f_n(t_1)}{t - t_1} = f'_n(t_1) = \varphi_n(t_1).$$

En appliquant le théorème 2.3.1, on voit que la limite φ de $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est continue en t_1 et que

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) = g(t_1) &= \lim_{n\to+\infty} f'_n(t_1) = \lim_{n\to+\infty} \lim_{t\to t_1} \frac{f_n(t) - f_n(t_1)}{t - t_1} \\ &= \lim_{t\to t_1} \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(t) - f_n(t_1)}{t - t_1} = \lim_{t\to t_1} \frac{f(t) - f(t_1)}{t - t_1}. \end{aligned}$$

On en déduit que la dérivée de f au point t_1 existe et vaut

$$f'(t_1) = g(t_1) = \lim_{n\to+\infty} f'_n(t_1).$$

Puisque ceci est vrai pour tout $t_1 \in I'$, ceci prouve bien que f est dérivable sur I' et que sa dérivée est la limite de la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire que $g = f'$.
Comme on a choisi pour I' un sous-intervalle borné quelconque de I contenant t_0, le raisonnement précédent prouve que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tous sous-intervalles bornés de I contenant t_0. Donc la limite f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dérivable, de dérivée g sur tous sous-intervalles bornés de I contenant t_0 et par suite sur I tout entier. $\square$

2.4.2 Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème 2.4.1, si de plus, les fonctions f_n' sont continues sur I, alors la limite f a une dérivée f' continue sur I.*

Démonstration. Comme sous les hypothèses du théorème 2.4.1, la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I, il suffit d'appliquer le théorème 2.3.1 :
la limite f' de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ est continue sur tout sous-intervalle borné de I et donc sur I tout entier. □

Remarquons que la convergence uniforme de la suite de fonctions ne suffit pas à assurer la dérivabilité de la limite :

2.4.3 Exemple. *La suite de fonctions dérivables $f_n(t) = \left(t^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2}$, $n > 1$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $|t|$, qui n'est pas dérivable en 0.*

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$|t| \leq (t^2 + \frac{1}{n^2})^{1/2} \leq |t| + \frac{1}{n}.$$

D'où

$$\forall t \in \mathbb{R}\ ,\ |f_n(t) - |t|| \leq \frac{1}{n}.$$

Cette inégalité implique la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction $|t|$. D'après le théorème 2.4.1, la suite des dérivées ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

On utilisera beaucoup le cas particulier du théorème 2.4.1 suivant :

2.4.4 Corollaire. *Si la suite de fonctions dérivables $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f et si la suite des dérivées converge uniformément sur tous les sous-intervalles bornés de I vers g, alors f est dérivable et $f' = g$ sur I.*

On va maintenant étudier la dérivabilité des sommes de séries :

2.4.5 Théorème. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère une série de fonctions de terme général u_n, dérivable sur I telle que*

1) *Il existe $t_0 \in I$ tel que la série numérique de terme général $u_n(t_0)$ converge*
2) *La série des dérivées, de terme général u_n' converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I et a pour somme une fonction σ.*

Alors, la série de terme général u_n converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I et a pour somme une fonction dérivable s telle que $s' = \sigma$.
Avec la notation des sommes infinies, ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} s'(t) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)' \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(t), \end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de somme infinie et de dérivation.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 2.4.1 à la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général u_n, qui sont dérivables comme sommes finies de fonctions dérivables.

On obtient également les corollaires suivant pour les séries de fonctions :

2.4.6 Corollaire. *Sous les hypothèses du théorème 2.4.5, si de plus, les fonctions u_n' sont continues sur I, alors la somme s a une dérivée s' continue sur I.*

2.4.7 Corollaire. *Si la série de fonctions dérivables, de terme général u_n converge simplement sur I et a pour somme s et si la suite des dérivées converge uniformément sur tous les sous-intervalles bornés de I et a pour somme σ , alors s est dérivable et $s' = \sigma$ sur I.*

2.4.8 Exemple. *Soit* $0 < r < 1$ *et* $I =]-r,+r[$. *On considère la série de fonctions définies sur I, de terme général* $u_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{n+1}$.

La série numérique de terme général $u_n(0)$ converge (c'est la série nulle !) et la série des dérivées de terme général t^n converge uniformément sur I d'après l'exemple 2.2.11 *(ii)*.

La somme $s(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1}$ est donc dérivable et sa dérivée vaut :

$$s'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

Comme $s(0) = 0$, on en déduit que $s(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} = -\ln(1-t)$.

2.5 Intégration des limites et sommes pour la convergence uniforme

2.5.1 Théorème. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies et continues sur un intervalle* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$ *et qui converge uniformément vers une fonction* f *sur* $[a,b]$. *Alors, la suite numérique* $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(s)\,ds\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et a pour limite* $\displaystyle\int_a^b f(s)\,ds$.
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(s)\,ds &= \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(s)\,ds \\ &= \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(s)\right) ds,\end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et d'intégrales.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in [a,b]$, on pose $F_n(t) = \displaystyle\int_a^t f_n(s)\,ds$. Les fonctions F_n sont dérivables sur $[a,b]$ comme intégrales de fonctions continues et de plus

$$\forall t \in [a,b]\ ,\ F_n'(t) = f_n(t).$$

D'après l'hypothèse, la suite $(F_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ $F_n(a) = 0$, la suite numérique $\big(F_n(a)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On peut donc appliquer le théorème 2.4.1 à la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$: cette suite converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction F telle que $F' = f$ et $F(a) = 0$. On en déduit :

$$\forall t \in [a,b]\ ,\ F(t) = \int_a^t f(s)\,ds.$$

En particulier pour $t = b$,

$$F(b) = \int_a^b f(s)\,ds\,.$$

2.5.2 Exemple. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de fonctions définies sur* $[0,1]$ *par :*

$$f_n(t) = t^n(1-t)^n.$$

Comme pour $t \in [0,1]$, $0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq f_n(t) \leq \frac{1}{4^n}$. Ceci implique que la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$.
La suite $\left(\int_0^1 s^n(1-s)^n\,ds\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2.5.3 Théorème. *On considère une série de fonctions de terme général u_n, défini et continu sur $[a,b]$, qui converge uniformément sur $[a,b]$ et a pour somme s. Alors, la série numérique de terme général $\left(\int_a^b u_n(t)\,dt\right)$ converge et a pour somme $\int_a^b s(t)\,dt$.*
On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\int_a^b s(t)\,dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,dt \\ &= \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right) dt,\end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de somme infinie et d'intégrale.

Démonstration. On applique le théorème précédent 2.5.1 à la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série de terme général u_n, qui sont continues sur $[a,b]$ comme sommes finies de fonctions continues . □

2.5.4 Exemple. *On considére la série de fonctions de terme général $u_n(t) = \frac{t^{2n}}{(2n)!}$, défini sur* $[0,1]$.

Comme $\forall t \in [0,1]$, $0 \leq \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \frac{1}{(2n)!}$, cette série converge normalement donc uniformément (proposition 4.2.10) sur $[0,1]$. D'après le théorème précédent, on a donc, pour tout $x \in [0,1]$:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!} = \sum_{i=0}^{+\infty} \int_0^x \frac{t^{2i}}{(2i)!}\,dt = \int_0^x \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{t^{2i}}{(2i)!}\right) dt = \int_0^x \cosh t\,dt = \sinh x.$$

2.6 Exercices sur le chapitre 2

2.1 Exercice. Pour $n \geq 1$ et $x \in]0,+\infty[$, on définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$f_n(x) = n\,|\ln x|^n.$$

1) Déterminer le domaine de convergence simple D de cette suite de fonctions.

2) Etudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur D et sur les sous-intervalles fermés bornés de D.

2.2 Exercice. Soit α un nombre réel strictement positif. On considère la suite de fonctions définie sur l'intervalle $[0,1]$ par :

$$n \geq 1 \ , \ f_n(x) = nx^n(1-x)^{\alpha}.$$

1) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $[0,1]$ et trouver sa limite.

2) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers sa limite sur l'intervalle $[0,1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3) On suppose $0 < \alpha \leq 1$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur le segment $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$.

2.3 Exercice. Soit a un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par u_n la fonction définie pour $x \in [0,+\infty[$ par :

$$u_n(x) = nx^a e^{-nx^2}.$$

1) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \ln u_n(x)$ pour $x > 0$.

2) En déduire que pour tout $a > 0$, la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge simplement sur $[0,+\infty[$.

3) a) Pour $|z| < 1$, calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

b) En faisant un changement de variable, en déduire la somme $s(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$.

4)a) Calculer $\displaystyle\sup_{x\in[0,+\infty[} u_n(x)$.

b) En déduire que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge normalement sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $a > 4$.

5) Soit $a = 4$. On cherche à montrer que dans ce cas, la série de fonctions $u_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,+\infty[$.

a) Trouver un réel $C > 0$ tel que

$$\forall N^{\star} \in \mathbb{N} \ , \ \sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq C \text{ avec } x_N = \sqrt{\frac{2}{N}}.$$

b) En déduire que $\displaystyle\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $N \to +\infty$.

c) Conclure.

6) On suppose toujours que $a = 4$.

a) Montrer que $\lim_{x\to 0^+} s(x) = 1$.

b) Retrouver la conclusion de la question **5)**.

2.4 Exercice. Démontrer les inégalités, pour $0 \leq x \leq 1$:

$$0 \leq e^x - 1 - x \leq 2x^2.$$

Soit

$$u_n(t) = \exp 2^{-nt} - 1, \, t \in \mathbb{R}, \, n \in \mathbb{N}^*.$$

1) Déterminer l'ensemble D des réels $t \in \mathbb{R}$ pour lesquels la série de fonctions de terme général $u_n(t)$ converge.

2) Soit $a > 0$. Etudier la convergence uniforme sur l'intervalle $[a, +\infty[$ de la série de fonctions de terme général u_n.

3) Soit s la somme de la série de fonctions de terme général u_n. Etudier la continuité de la fonction s sur D.

4) Trouver un équivalent pour $s(t)$ quand t tend vers $+\infty$.

2.7 Corrigé des exercices sur le Chapitre 2

Corrigé de l'exercice 2.1

1) Pour $|\ln x| < 1$, la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et pour $|\ln x| \geq 1$, la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Donc $D =]\frac{1}{e}, e[$.

2) On remarque que $\sup\limits_{x\in D} n\,|\ln x|^n = n$ donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur D.
Soit $[a,b] \subset]\frac{1}{e}, e[$ un sous-ensemble compact de D.
Alors $\sup\limits_{x\in[a,b]} n\,|\ln x|^n = n \sup(|\ln a|, |\ln b|)^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Corrigé de l'exercice 2.2

1) Si $0 \leq x < 1$, $nx^n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.
Si $x = 1$, $f_n(x) = 0$.
Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

2) On cherche le maximum de la fonction f_n sur l'intervalle $[0,1]$. Pour cela, on calcule :

$$f'_n(x) = nx^{n-1}(1-x)^{\alpha-1}(n-(n+\alpha)x).$$

En posant $x_n = \dfrac{n}{n+\alpha}$, on voit que f_n est croissante sur $[0, x_n]$ et décroissante sur $[x_n, 1]$. f_n atteint donc son maximum en x_n et celui-ci vaut :

$$M_n = f_n(x_n) = n(1+\frac{\alpha}{n})^{-n}(\frac{\alpha}{n+\alpha})^{\alpha} \sim_{n\to+\infty} (\frac{\alpha}{e})^{\alpha} n^{1-\alpha}.$$

Comme $M_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien uniformément vers 0 sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha > 1$.

3) On suppose $0 < \alpha \leq 1$. Si $a \in [0,1[$ est fixé, comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$, si n est assez grand, $x_n > a$, donc la fonction f_n est croissante sur le segment $[0,a]$ et de plus, lorsque $n \to +\infty$:

$$\sup_{0\leq x\leq a} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc bien uniformément sur le segment $[0,a]$ pour tout $a \in [0,1[$.

Corrigé de l'exercice 2.3

1) Pour $x > 0$, on a : $\frac{1}{n}\ln u_n(x) = \frac{1}{n}\left(\ln n + a\ln x - nx^2\right)$.
D'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\ln u_n(x) = -x^2$

2) Pour $x > 0$ fixé, la série à termes positifs $u_n(x)$ vérifie $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n(x)} = e^{-x^2} < 1$. On peut donc appliquer le critère de Cauchy : la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge. Ceci étant vrai pour tout $x > 0$, on en déduit que la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ converge simplement sur $]0,+\infty[$. En $x = 0$, la série de fonctions est nulle donc convergente de somme nulle.

3) a) Pour $z < 1$, $\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nz^n$.

b) Posons $z = e^{-x^2}$. On en déduit que pour $x > 0$, $x^a \frac{e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = s(x)$.

4) a) Etudions le maximum de u_n sur $]0,+\infty[$:
$u_n'(x) = nx^{a-1}e^{-nx^2}\left(a - 2nx^2\right)$. Donc $u_n'(x) = 0 \iff x = x_n = \sqrt{\frac{a}{2n}}$.
u_n admet un maximum au point x_n et $u_n(x_n) = \frac{a^{a/2}}{2^{a/2}n^{a/2-1}}e^{-a/2} = \frac{A}{n^{a/2-1}}$.

b) La série numérique de terme général $\frac{A}{n^{a/2-1}}$ converge si et seulement si $\frac{a}{2} - 1 > 1$ c'est-à-dire $a > 4$, ce qui implique le résultat.

5) Pour $a = 4$, la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ ne converge pas normalement sur $]0,+\infty[$.

a) Pour $N \leq n \leq 2N$, $u_n(x_N) \geq n\left(\frac{2}{N}\right)^2 e^{-\frac{2n}{N}} \geq \frac{4}{N}e^{-4}$.
D'où $\sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq 4e^{-4} = C$.

b) On en déduit que $\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x) \geq \sum_{n=N}^{2N} u_n(x_N) \geq C$ et donc $\sup_{x\in]0,+\infty[} \sum_{n=N}^{2N} u_n(x)$ ne tend pas vers 0 quand $N \to +\infty$.

c) La série de fonctions de terme général $u_n(x)$ ne vérifie pas le critère de Cauchy uniforme et donc ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

6) a) On remarque que $(1-e^{-x^2})^2 \sim x^4$ quand $x \to 0$. Donc $s(x) \sim e^{-x^2} \sim 1$ quand $x \to 0$.

b) Comme $s(0) = 0$, la somme de la série de fonctions de terme général $nx^4e^{-nx^2}$ est discontinue sur $[0,+\infty[$ et par suite la convergence ne peut pas être uniforme sur cet intervalle.

Corrigé de l'exercice 2.4

On pose $f(x) = e^x - 1 - x$ et $g(x) = e^x - 1 - x - 2x^2$. On vérifie que $f(0) = g(0) = 0$, que f est croissante sur $[0,1]$ et que g est décroissante sur $[0,1]$. Cela implique bien que $f(x) \geq 0$ et $g(x) \leq 0$ sur $[0,1]$.

1) Si $t \leq 0$, alors la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc la série de terme général $u_n(t)$ diverge.

Si $t > 0$, on a $2^{-nt} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, et par conséquent, $u_n(t) \sim 2^{-nt}$ $(n \to +\infty)$. La série géométrique de terme général 2^{-nt} étant convergente car $|2^{-t}| < 1$, il résulte du théorème des équivalents pour les séries à termes positifs que la série de terme général $u_n(t)$ converge.

Conclusion : $D = \mathbb{R}_+^*$.

2) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto u_n(t)$ est positive et décroissante sur $[a, +\infty[$, car $u_n'(t) = -n(\ln 2)2^{-nt}\exp(2^{-nt}) \leq 0$ quel que soit $t \in [a, +\infty[$.

Donc $\sup_{t\in[a,+\infty[} |u_n(t)| = u_n(a)$.

Puisque la série numérique de terme général $u_n(a)$ converge, la série de fonctions de terme général u_n converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

3) Fixons $t_0 \in D = \mathbb{R}_+^*$. Soit $a > 0$ tel que $a < t_0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est une fonction continue sur $[a, +\infty[$. De plus, la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur $[a, +\infty[$. D'après le théorème de continuité pour les séries de fonctions uniformément convergentes, la fonction s est continue sur $[a, +\infty[$. En particulier, elle est continue en t_0 car $t_0 \in]a, +\infty[$.

Le point $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ étant quelconque, on déduit que s est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

4) Puisque $0 \leq e^x - 1 - x \leq 2x^2$ pour tout $x \in [0,1]$, on a $2^{-nt} \leq u_n(t) \leq 2^{-nt} + 2\cdot 2^{-2nt}$, quels que soient $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Ceci implique que

$$\sum_{n=1}^{N} 2^{-nt} \leq \sum_{n=1}^{N} u_n(t) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-nt} + 2\sum_{n=1}^{N} 2^{-2nt},$$

pour tout $N \geq 1$ et tout $t > 0$

En faisant N tendre vers $+\infty$ on obtient, pour $t > 0$:

$$\frac{2^{-t}}{1-2^{-t}} \leq s(t) \leq \frac{2^{-t}}{1-2^{-t}} + 2\frac{2^{-2t}}{1-2^{-2t}}.$$

Comme : $\dfrac{2^{-2t}}{1-2^{-2t}} = o\left(2^{-t}\right)$ et $\dfrac{2^{-t}}{1-2^{-t}} \sim_{t\to+\infty} 2^{-t}$ on a :

$$s(t) \sim_{t\to+\infty} \frac{2^{-t}}{1-2^{-t}} \sim_{t\to+\infty} 2^{-t}.$$

En conclusion, $s(t) \sim_{t\to+\infty} 2^{-t}$.

Chapitre 3
Séries entières

III. Les Séries de puissances et développement de Taylor-Maclaurin (Séries entières)

A. Séries de puissance

Définition 13: Une *série de puissance en* $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})$ est une série ayant la forme $\sum_{k\geq 0} c_k(x-a)^k$.

Une ***série de puissance en x*** est une série de la forme $\sum_{k\geq 1} c_k x^k$.

Exemple 43 : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$ est une série de puissance en *x*.

Exemple 44 : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x-4)^k}{3^{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k(x-2)^k}{3^{k+1}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9}(x-2) + \frac{4}{27}(x-2)^2 + \cdots$ est une série de puissance en $(x - 2)$.

Définition 14: Une série de puissance $\sum_{k\geq 0} c_k(x-a)^k$***converge*** en $x = b \in R$ si la série $\sum_{k\geq 0} c_k(b-a)^k$converge. Sinon, la série ***diverge***en $x = b$.

Définition 15:L'ensemble de toutes les valeurs de *x* pour lesquelles la série de puissance $\sum_{k\geq 0} c_k(x-a)^k$converge est appelée l'***intervalle de convergence*** de cette série.

Cet intervalle contient forcément $x = a$.

N.B. : Pour déterminer l'intervalle de convergence, il serait, au préalable, préférable d'en déterminer le **rayon de convergence**.

Définition 16: Si une série de puissance converge pour $|x-a| < r$et diverge pour $|x-a| > r$, on dit que r est le ***rayon de convergence*** de la série.

Pour déterminer le rayon de convergence, on utilise fréquemment le critère de D'Alembert ou de Cauchy généralisé.

Théorème 15 : **Critère de D'Alembert généralisé**

Soit la série de puissances $\sum_{k\geq 1} c_k(x-a)^k$et supposons que$l = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|$ existe. On considère la limite $R(x) = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{c_{k+1}(x-a)^{k+1}}{c_k(x-a)^k}\right| = |x-a|\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|$pour $x \neq a$.

Alors,

1. Si $R(x) < 1$, donc $|x-a| < \frac{1}{\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|} = \frac{1}{l}$, alors la série de puissance converge.
2. Si $R(x) = 1$, alors on ne peut rien conclure.
3. Si $R(x) > 1$, donc $|x-a| > \frac{1}{\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|} = \frac{1}{l}$, alors la série diverge.

Le rayon de convergence r est alors donné comme suit :

$$r = \frac{1}{\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right|} = \begin{cases} \frac{1}{l} \text{ si } l \text{ est fini non nul} \\ +\infty \qquad \text{si } l = 0 \\ 0 \qquad \text{si } l = +\infty \end{cases}$$

Remarque : Pour $x = a$, la série converge nécessairement. Il suffit de le vérifier !

N.B. : On peut également appliqué le théorème de Cauchy généralisé.

Théorème 16 : **Critère de Cauchy généralisé**

Soit la série de puissances $\sum_{k\geq 1} c_k(x-a)^k$et supposons que$l = \lim_{k\to+\infty}\sqrt[n]{|c_k|}$ existe. On considère la limite $R(x) = \lim_{k\to+\infty}\sqrt[n]{|c_k(x-a)^k|} = |x-a|\lim_{k\to+\infty}\sqrt[n]{|c_k|}$.

Alors,

1. Si $R(x) < 1$, donc $|x-a| < \frac{1}{\lim_{k\to+\infty}\sqrt[n]{|c_k|}} = \frac{1}{l}$, alors la série de puissance converge.
2. Si $R(x) = 1$, alors on ne peut rien conclure.
3. Si $R(x) > 1$, donc $|x-a| > \frac{1}{\lim_{k\to+\infty}\sqrt[n]{|c_k|}} = \frac{1}{l}$, alors la série diverge.

Le rayon de convergence r est alors donné comme suit :

$$r = \frac{1}{\lim_{k\to+\infty}\sqrt[n]{|c_k|}} = \begin{cases} \frac{1}{l} \text{ si } l \text{ est fini non nul} \\ +\infty \qquad \text{si } l = 0 \\ 0 \qquad \text{si } l = +\infty \end{cases}$$

Remarque importante : Forme de l'intervalle de convergence

L'intervalle de convergence de la série $\sum_{k\geq 1} c_k(x-a)^k$ ***n'est jamais vide et son*** rayon de convergence $r \geq 0$. Ainsi, il y a trois situations possibles pour l'intervalle de convergence :

- L'intervalle de convergence I est un ensemble réduit à un seul point $x = a$. Donc $I = \{a\}$et $r = 0$.
- L'intervalle de convergence est fermé, ouvert ou semi-ouvert et est centré au point $x = a$. Plus précisément, il est de l'un des types suivants : $I =]a - r, a + r[$, $I =]a - r, a + r]$, $I = [a - r, a + r[$,$I = [a - r, a + r]$.Dans ce cas, $r > 0$.
- L'intervalle de convergence est tous les réel ($I = \mathbb{R} =] - \infty, +\infty[$ et $r = +\infty$.

Exemple 45 : Trouver l'intervalle de convergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k}$.

Exemple 46 : Trouver l'intervalle de convergence et le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln k)^k} x^k$$

Exemple 47 : Trouver l'intervalle de convergence et le rayon de convergence de la série $\sum_{k\geq 1} k!\,(x+5)^k$.

Exemple 48 : Trouver l'intervalle de convergence et le rayon de convergence de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(x-4)^k}{5^k}$

Théorème 17 (dérivation et intégration d'une série entière):

Soit $\sum_{k\geq 0} a_k(x-a)^k$ de rayon de convergence $r > 0$.

Soit $f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k(x-a)^k$ pour $|x-a| < r$.

Alors, pour $|x-a|<r$,

1. $f'(x) = \sum_{\boldsymbol{k\geq 1}} k a_k (x-a)^{k-1}$
2. $\int f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + C = F(x) + C$

De plus, le rayon de convergence de $f'(x)$ et de $\int f(x)\mathrm{d}x$ est r.

N.B. : Dans le cas où le rayon de convergence r est fini, alors **u**ne étude doit être faite concernant la convergence pour $x = a - r$ et $x = a + r$

Exemple 49 : Soit $f(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^k}{k!}$. Montrer que $f(x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire que $f(x) =$.

Exemple 50 :

1. Étudier la série de puissance en x : $\sum_{k\geq 0}(-x)^k$.

2. Trouver sa somme dans son intervalle de convergence.

3. En déduire alors que l'égalité suivante : $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k\geq 0} x^k$est vraie sur une intervalle appréciée (résultat à connaitre absolument !).

4. Montrer alors que la fonction $g(x) = \ln(x+1)$ est une somme d'une certaine série de puissance en $x$sur un intervalle à préciser.

5.Montrer que la fonction $h(x) = \frac{\mathbf{-1}}{\mathbf{(1+x)^2}}$ est une somme d'une certaine série de puissance en x sur un intervalle à préciser.

6. En utilisant le développement de la fonction $f(x) = \frac{1}{1-x}$, développer $L(x) = \frac{x}{2-3x}$ en une une somme d'une certaine série de puissance en $x$sur un intervalle à préciser. Préciser le rayon de convergence.

B. Séries de Taylor et de Maclaurin

Théorème 18 : Soit f,une fonction infiniment dérivable telle que $f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k(x-a)^k$ dont le rayon de convergence r est positif. Alors, $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ pour tout $k = 0,1,2,\cdots$

Preuve:

$f(x) = \sum_{k\geq 0} a_k(x-a)^k \Rightarrow f(a) = a_0$

$f'(x) = \sum_{k\geq 1} ka_k(x-a)^{k-1} \Rightarrow f'(a) = a_1$

$f''(x) = \sum_{k\geq 2}(k-1)ka_k(x-a)^{k-2} \Rightarrow f''(a) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(a)}{2}$ etc.

Définition 14 : Le ***développement en série de Taylor*** autour de $x = a$ d'une fonction f est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Définition 15 : Le ***développement en série de MacLaurin*** d'une fonction f est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

On définie le polynôme de Taylor d'ordre n autour de a, le polynôme noté par $T_n(x)$ et définie comme suit :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

En particulier, le polynôme de Taylor d'ordre n autour de 0(polynôme de MacLaurin), est donné comme suit :

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

Exemple 51 : Développer $f(x) = \ln x$ en série de Taylor autour de $x = 1$.
Donner le polynôme de Taylor d'ordre 4.

Exemple 52 : Soit la fonction $f(x) = \cos x$. Donner le développement de Maclaurin de la fonction f en précisant son intervalle de convergence.

2. Puis donner les trois premiers termes <u>non nuls</u> en précisant de quel polynôme de Taylor il s'agit.

Exemple 53 : Développer $f(x) = 5^x$ en série de Maclaurin de 2 façons différentes et déterminer son intervalle de convergence.

Exemple 54 (très important)

En utilisant le polynôme de Taylor d'ordre 5 de la fonction $\boldsymbol{f(x) = e^{-x^2}}$:

1. évaluer $\boldsymbol{f(x)}$ pour $\boldsymbol{x = \frac{1}{10}}$ · Puis comparer au résultat donné par la calculatrice.

2. évaluer l''intégrale définie $\boldsymbol{\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x}$.

3. Estimer l'erreur commise en utilisant les trois premiers termes de la série obtenue.

Application

L'intensité $\boldsymbol{F}$ de la force gravitationnelle exercée par la terre sur un objet de masse $\boldsymbol{m}$ situé à une altitude $\boldsymbol{h}$ de la surface de la terre, est donnée par

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{mR^2}}{(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{h})^2}\boldsymbol{g}$$

où$\boldsymbol{g}$ est l'intensité de l'accélération gravitationnelle et $\boldsymbol{R}$ est le rayon de la terre.

1. Retrouver l'expression $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{mg}$de l'intensité $\boldsymbol{F}$ de la force gravitationnelle lorsqu'un objet se trouve à la surface de la surface de la terre.

2. En utilisant la substitution $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{R}}$, démontrer que si $\boldsymbol{h}$ est assez petit par rapport au rayon de la terre $\boldsymbol{R}$, alors $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{mg}$. Indication : Calculer les deux premiers termes non nuls du polynôme de MacLaurin de la fonction $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{2}}}$.

Exercices

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence et l'intervalle de convergence des séries suivantes.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^{2n}}{5^{2n+1}}$
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n \ln n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{7^n}$
5. $\sum_{n=2}^{\infty} n^2 x^n$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^n}{5^n \sqrt{n}}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\sqrt[3]{n}}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} x^n$
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (x+6)^n$
11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{2n}} x^n$
12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$
13. $\sum_{n=0}^{\infty} (7x-1)^n$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^n$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2}$
16. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$
17. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (3n)!\, x^n}{n\, 2^n}$
18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^3 4^n}$
19. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-1)^n$

Exercice 2

En utilisant le développement de Maclaurin des fonctions $f(x) = e^x$et $f(x) = \frac{1}{1-x}$, déterminer celui des fonctions suivantes avec leur intervalle de convergence et leur rayon de convergence :

1. $F(x) = e^{2x}$
2. $G(x) = e^{x^3}$
3. $H(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
4. $L(x) = xe^{3x}$
5. $T(x) = \frac{1}{1+5x}$

6. $I(x) = \frac{x}{1+x^3}$
7. $M(x) = \frac{2x}{4-3x^2}$

Exercice 3

On considère le développement en série de Maclaurin de la fonction $\cos x$ donné comme suit $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner le polynôme de Taylor$\mathrm{T}_3(x)$ d'ordre 3 de la fonction $\cos x$.
2. Évaluer l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} \mathrm{d}x$.
3. Approximer la valeur de cette intégrale en utilisant les trois premiers termes de la série obtenue. Estimer l'erreur commise.

Exercice 4

On considère le développement en série de Maclaurin de la fonction $\sin x$ donné comme suit $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Donner le polynôme de Taylor $\mathrm{T}_4(x)$ de la fonction $\sin x$.
2. Évaluer l'intégrale définie $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$.
3. Approximer la valeur de cette intégrale en utilisant les trois premiers termes de la série obtenue. Estimer l'erreur commise.

Exercice 5

Évaluer l'intégrale indéfinie suivante sous forme d'une série.

$$\int \frac{e^x - 1}{x} \mathrm{d}x$$

Exercice6

D'après la théorie de la relativité restreinte, l'énergie cinétique d'un objet en mouvement de masse m ayant une vitesse d'intensité $v$est donnée par :

$$E_c = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2$$

oùc est la vitesse de la lumière (célérité).

1. Déterminer le polynôme de de MacLaurind'ordre 2 de la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$.
2. En déduire que si l'intensité de la vitesse v est négligeable devant c (dans la pratique si $10\, v < c$), alors l'énergie cinétique est donnée par la formule classique $E_c = \frac{1}{2} mv^2$.

Exercice 7

On considère deux charges électriques opposées q_1 et q_2 tel que $|q_1| = |q_2| = q$ (charges équivalentes). Supposons que les charges se trouvent à une distance r l'une de l'autre. L'intensité du champ électrique E ressenti en un point M situé sur la ligne reliant les deux charges q_1 et $q_2$et du côté de la charge q à une distance Rest donnée comme suit :

$$E = \frac{q}{R^2} - \frac{q}{(R+r)^2}$$

1. Exprimer$\frac{q}{(R+r)^2}$ en fonction du rapport $\frac{r}{R}$.
2. Déterminer les trois premiers termes non nuls de la série de Maclaurin de la fonction $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.
3. En déduire que si r est négligeable devant R, alors E est approximativement proportionnel à $\frac{1}{R^3}$.

Exercice 8 (dans vos poches !)

Si une somme C_0 (en dollars par exemple) est investit à un taux d'intérêt annuel i (en représentation décimale) et supposons que les intérêts sont composés k fois par années. Alors, la valeur $C(t)$ du capital accumulé après t années est donnée par :

$$C(t) = C_0 \left(1 + \frac{i}{k}\right)^{kt}$$

Les institutions financières approximent <u>souvent</u> le temps de doublement du capital investi t_d (temps requis pour que la somme investie soit doublée) par la formule suivante :

$$t_d = \frac{0{,}7}{i} \qquad \text{(A)}$$

1. Montrer que le temps de doublement est donnée par la relation suivante :

$$t_d = \frac{\ln 2}{k \ln\left(1 + \frac{i}{k}\right)} \qquad \text{(B)}$$

2. Utiliser le premier terme de la série de Maclaurin de la fonction appropriée pour obtenir la règle empirique formulée dans l'énoncé (relation A).

Indications et réponses

Exercice 1

N°	Critère(s) utilisé par ordre de préférence	Réponses
1	Cauchy	$I = \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, R=$\frac{1}{2}$
2	D'Alembert	$I = \left]1 - \frac{5}{\sqrt{3}}, 1 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right[$, $R = \frac{5}{\sqrt{3}}$
3	Cauchy	$I =]-3, 3]$, $R = 3$
4	Cauchy	$I =]-9, 5[$, $R = 7$
5	Cauchy ou D'Alembert	$I =]-1, 1[$, $R = 1$
6	Cauchy	$I = [-1, 4[$, $R = \frac{5}{2}$
7	Cauchy	$I = [-1, 1[$, $R = 1$
8	Cauchy	$I = [-1, 1]$, $R = 1$
9	Cauchy	$I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $R = \infty$
10	Cauchy	$I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $R = \infty$
11	Cauchy	$I =]-\infty, +\infty[$, $R = \infty$
12	D'Alembert	$I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $R = \infty$
13	Cauchy	$I = \left]0, \frac{2}{7}\right[$, $R = \frac{1}{7}$
14	Cauchy ou D'Alembert	$I =]-1, 1[$, $R = 1$
15	Cauchy	$I = [3, 5]$, $R = 1$
16	D’Alembert	$I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $R = \infty$
17	D'Alembert	$I = \{0\}$, $R = 0$

18	Cauchy	$I=[-4,4], R=4$
19	D'Alembert	$I=\{1\}, R=0$

Exercice 2

1. $F(x)=e^{2x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^n x^n}{n!}, I=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}, R=+\infty.$

2. $G(x)=e^{x^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{n!}, I=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}, R=+\infty.$

3. $H(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}, I=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}, R=+\infty.$

4. $L(x)=xe^{3x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n x^{n+1}}{n!}, I=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}, R=+\infty.$

5. $T(x)=\frac{1}{1+5x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,5^n x^n, I=\left]-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right[, R=\frac{1}{5}$
6. $I(x)=\frac{x}{1+x^3}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+1}, I=]-1,1[, R=1$
7. $M(x)=\frac{2x}{4-3x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n x^{2n+1}}{2^{2n+1}}, I=\left]-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right[=\left]-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{3}}{3}\right[, R=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$
8. ***Indication :*** Utiliser le développement de $g'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$sur $]-1,1[$.
Rép. :$K(x)=\frac{x}{(1-5x^2)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}n5^{n-1}x^{2n-1}, I=\left]-\frac{\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5}\right[, R=\frac{\sqrt{5}}{5}\cdot$
9. ***Indication*** : utiliser la complétion du carré.
Rép.:$D(x)=\frac{1}{x^2-4x+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}-\frac{(x-2)^{2n}}{3^{n+1}},\ I=\left]2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}\right[, R=\sqrt{3}.$

Exercice 3

1. On a $T_3(x)=1-\frac{x^2}{2!}=1-\frac{x^2}{2}\cdot$
2. $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x}\,dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!(2n)}\cdot$
3. $\int_0^1\frac{1-\cos x}{x}\,dx\cong\frac{215}{864}\cong 0{,}248842.$
L'erreur E est estimée comme suit : $E\leq 3{,}1\times 10^{-6}$.

Exercice 4

1. On a $T_3(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}=x-\frac{x^3}{6}$

2.$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x == \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)}$.

3. $I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \cong \frac{391}{720} \cong 0{,}54305.$

L'erreur E est estimée comme suit : $E \leq 2{,}83\ \times 10^{-5}$.

Exercice 5

$\int \frac{e^x-1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n!)} + C$avec$I =]-\infty, +\infty[$.

Exercice6

1.$T_2(x) = \frac{x^2}{2}$.

2.$E_c = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) mc^2 \cong \frac{1}{2} mv^2.$

Exercice 7

1. $\frac{q}{(R+r)^2} = \frac{q}{R^2\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}$.
2. On a$T_3(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3$.
3. On a : $E \cong \frac{2qr}{R^3}$.

Exercice 8

1. $t_d = \frac{\ln 2}{k \ln\left(1+\frac{i}{k}\right)}$

Solutionnaire

Exercice 1

1. Soit $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n x^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

Soit $a_n=\frac{(-1)^n 2^n x^n}{\sqrt{n+1}}\cdot$ Alors $|a_n|=\left|\frac{(-1)^n 2^n x^n}{\sqrt{n+1}}\right|=\frac{2^n|x|^n}{\sqrt{n+1}}\cdot$

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{2|x|}{\sqrt[n]{\sqrt{n+1}}}=\frac{2|x|}{\sqrt[2n]{n+1}}\cdot$

D'où, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2|x|}{\sqrt[2n]{n+1}}=2|x|\underbrace{\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{n+1}}}_{=1}=2|x|.$

Donc pour $2|x|<1\Leftrightarrow |x|<\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$, la série converge.

<u>Étude aux bornes</u>

- Pour $x=\frac{1}{2}$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n\frac{1}{2^n}}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\cdot$

  Cette dernière série numérique est alternée. On applique alors le critère de Leibniz.
  Posons$b_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot$ On a :

  a. $\lim_{n\to+\infty}b_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0.$

  b. Pour tout n, $b_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+2}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}}=b_n$, car $\sqrt{n+2}>\sqrt{n+1}$. Donc $b_{n+1}<b_n$ pour tout n, et donc la suite (b_n) est décroissante.

  Ainsi, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ est <u>convergente d'après le critère de Leibniz</u>.

- Pour $x=-\frac{1}{2}$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot$

  Cette dernière série numérique est une série de Riemann pour $p=\frac{1}{2}\le 1$, et donc <u>diverge</u>.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I=\left]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ et son rayon de convergence est $R=\frac{1}{2}\cdot$

2. Soit $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n(x-1)^{2n}}{5^{2n+1}}\cdot$

Soit $a_n=\frac{3^n(x-1)^{2n}}{5^{2n+1}}\cdot$ Alors $|a_n|=\left|\frac{3^n(x-1)^{2n}}{5^{2n+1}}\right|=\frac{3^n|x-1|^{2n}}{5^{2n+1}}\cdot$

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{3|x-1|^2}{\sqrt[n]{5^{2n+1}}}=\frac{3|x-1|^2}{5^{\frac{2n+1}{n}}}=\frac{3|x-1|^2}{5^{2+\frac{1}{n}}}\cdot$

D'où, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3|x-1|^2}{5^{2+\frac{1}{n}}}=3|x-1|^2\frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to+\infty}5^{2+\frac{1}{n}}}_{5^2}}=\frac{3|x-1|^2}{5^2}\cdot$

Donc pour $\frac{3|x-1|^2}{5^2}<1\Leftrightarrow 3|x-1|^2<25\Leftrightarrow |x-1|^2<\frac{25}{3}\Leftrightarrow |x-1|<\frac{5}{\sqrt{3}}$
$\Leftrightarrow -\frac{5}{\sqrt{3}}<x-1<\frac{5}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 1-\frac{5}{\sqrt{3}}<x<1+\frac{5}{\sqrt{3}}$, la série converge.

<u>Étude aux bornes</u>

- Pour $x=1-\frac{5}{\sqrt{3}}$, on a: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n\left(1-\frac{5}{\sqrt{3}}-1\right)^{2n}}{5^{2n+1}}=$
  $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3^n\left(-\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}{5^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n(-1)^{2n}5^{2n}\frac{1}{(\sqrt{3})^{2n}}}{5^{2n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5}$

car $(\sqrt{3})^{2n} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{2n} = 3^n$.

Cette dernière série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5}$ diverge d'après <u>le critère du terme général</u>.

- Pour $x = 1 + \frac{5}{\sqrt{3}}$, on a :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n\left(1+\frac{5}{\sqrt{3}}-1\right)^{2n}}{5^{2n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}{5^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n 5^{2n} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n}}}{5^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5}.$$

Cette dernière série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5}$ diverge d'après le <u>le critère du terme général</u>.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I = \left]1 - \frac{5}{\sqrt{3}},\ 1 + \frac{5}{\sqrt{3}}\right[$ et son rayon de convergence est $R = \frac{5}{\sqrt{3}}$.

3. Soit $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{3^n \ln n}$.

Soit $a_n = \frac{(-1)^n x^n}{3^n \ln n}$. Alors $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n x^n}{3^n \ln n}\right| = \frac{|x|^n}{3^n \ln n}$.

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{3 \ln n}$.

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|}{3\sqrt[n]{\ln n}} = \frac{|x|}{3} \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}}_{=1} = \frac{|x|}{3} \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln n}} = \frac{|x|}{3} \frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}}}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}} [\text{FI}: (+\infty)^0]$.Pour lever la forme indéterminée, on introduit la fonction $f(x) = (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x \geq 2$ associée à la suite (a_n) avec $a_n = \sqrt[n]{\ln n} = (\ln n)^{\frac{1}{n}}$ pour $n \geq 2$. On évaluera alors $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$ en suivant la procédure présentée au chapitre 1 à la page 18.En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} [\text{FI}: (+\infty)^0]$.

On pose $\boldsymbol{A} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln \boldsymbol{x})^{\frac{1}{x}}$.

On a :

$$A = \lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln x \ [\text{FI}: 0 \times (+\infty)]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \ln x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \left[\text{FI}: \frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

En appliquant la règle de L'Hospital, on obtient : $A = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = 0$.

D'où, $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = e^A = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}} = 1$.

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x|}{3\sqrt[n]{\ln n}} = \frac{|x|}{3} \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}}_{=1} = \frac{|x|}{3}$.

Donc pour $\frac{|x|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3$, la série converge.

Étude aux bornes

- Pour $x = -3$, on a:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(-3)^n}{3^n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n (-1)^n}{3^n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \cdot$$

Or, on sait que $e^n > n$ (voir le graphique de l'exponentielle qui est situé au dessus de la droite $y = x$). En compoqnt par la fonction ln qui est croissante, on aura : $e^n > n \Leftrightarrow n > \ln n \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n} \cdot$ Etant donné que la série harmonique $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ est une p-série avec $p \leq 1$, alors elle diverge. Ainsi, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ diverge également d'après le critère de comparaison directe.

- Pour $x = 3$, on a :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (3)^n}{3^n \ln n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} \cdot$$

Cette dernière série numérique est alternée. On applique alors le critère de Leibniz. Posons $b_n = \frac{1}{\ln n} \cdot$ On a :

a. $\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$.

b. La fonction $g(x) = \frac{1}{\ln x}$ pour $x \in [2, +\infty[$, associée à $b_n = \frac{1}{\ln n}$, est décroissante car $g'(x) = -\frac{1}{x(\ln x)^2} < 0$ pour tout $x \in [2, +\infty[$. Donc la suite (b_n) est décroissante.

D'où, la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ converge d'après le critère de Leibniz.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I =]-3,\ 3]$ et son rayon de convergence est $R = 3 \cdot$

4. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{7^n}$

Soit $a_n = \frac{n(x+2)^n}{7^n} \cdot$ Alors $|a_n| = \left|\frac{n(x+2)^n}{7^n}\right| = \frac{n|x+2|^n}{7^n} \cdot$

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n}|x+2|}{7} \cdot$

D'où, $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n}|x+2|}{7} = \frac{|x+2|}{7} \underbrace{\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1} = \frac{|x+2|}{7}$.

Donc pour $\frac{|x+2|}{7} < 1 \Leftrightarrow |x+2| < 7 \Leftrightarrow -7 < x+2 < 7 \Leftrightarrow -9 < x < 5$, la série converge.

Étude aux bornes

- Pour $x = -9$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-9+2)^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-7)^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-1)^n 7^n}{7^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \cdot$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n n$ n'existe pas, et donc la série diverge d'après le critère du terme général.

- Pour $x=5$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(5+2)^n}{7^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(7)^n}{7^n}=\sum_{n=0}^{\infty}n$ ·Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty\neq 0$, et donc la série diverge d'après le critère du terme général.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I=]-9,\ 5[$ et son rayon de convergence est $R=7$ ·

5. Soit $\sum_{n=2}^{\infty}n^2x^n$

Soit $a_n=n^2x^n$ · Alors $|a_n|=|n^2x^n|=n^2|x|^n$ ·

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{n^2|x|^n}=\sqrt[n]{n^2}|x|$ ·

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}|x|=|x|\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^2}}_{=1}=|x|$.

Donc pour $|x|<1\Leftrightarrow -1<x<1$, la série converge.

Étude aux bornes

- Pour $x=-1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}n^2(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n^2$.
  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n n^2$ n'existe pas, et donc la série diverge d'après le critère du terme général.
- Pour $x=1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}n^2(1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}n^2$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2=+\infty\neq 0$, et donc la série diverge d'après le critère du terme général.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I=]-1,1[$ et son rayon de convergence est $R=1$ ·

6. Soit $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-3)^n}{5^n\sqrt{n}}$

Soit $a_n=\frac{(2x-3)^n}{5^n\sqrt{n}}$ · Alors $|a_n|=\left|\frac{(2x-3)^n}{5^n\sqrt{n}}\right|=\frac{|2x-3|^n}{5^n\sqrt{n}}$ ·

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|}=\frac{|2x-3|}{5\sqrt[n]{\sqrt{n+1}}}=\frac{|2x-3|}{5\sqrt[2n]{n+1}}$ ·

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|2x-3|}{5\sqrt[n]{\sqrt{n}}}=\frac{|2x-5|}{5}\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sqrt{n}}}_{=1}}=\frac{|2x-3|}{5}$ ·

Donc pour $\frac{|2x-3|}{5}<1\Leftrightarrow|2x-3|<5\Leftrightarrow-5<2x-3<5\Leftrightarrow-2<2x<8$
$\Leftrightarrow -1<x<4$, la série converge.

Étude aux bornes

- Pour $x=-1$, on a $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2(-1)-3)^n}{5^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{5^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n5^n}{5^n\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ ·

  Cette dernière série numérique est alternée. On applique alors le critère de Leibniz.
  Posons $b_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$ · On a :
  a. $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.
  b. Pour tout n, $b_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}=b_n$, car $\sqrt{n+1}>\sqrt{n}$. Donc $b_{n+1}<b_n$ pour tout n, et donc la suite (b_n) est décroissante.

Ainsi, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente d'après le critère de Leibniz.

- Pour $x = 4$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2(4)-3)^n}{5^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ⋅

  Cette dernière série numérique est une série de Riemann pour $p = \frac{1}{2} \leq 1$, et donc diverge.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I = [-1{,}4[$ et son rayon de convergence est $R = \frac{5}{2}$ ⋅

7. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ⋅

Soit $a_n = \frac{x^n}{n}$ ⋅ Alors $|a_n| = \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n}$ ⋅

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}}$ ⋅

D'où, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{\sqrt[n]{n}} = |x| \frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1}} = |x|$ ⋅

Donc pour $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, la série converge.

Étude aux bornes

- Pour $x = -1$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ⋅ Cette dernière série numérique est alternée. On applique alors le critère de Leibniz.

  Posons $b_n = \frac{1}{n}$ ⋅ On a :

  a. $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

  b. Pour tout n, $b_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = b_n$, car $n + 1 > n$. Donc $b_{n+1} < b_n$ pour tout n, et donc la suite (b_n) est décroissante.

Ainsi, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente d'après le critère de Leibniz.

- Pour $x = 1$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ⋅ Cette dernière série numérique est une série de Riemann pour $p = 1 \leq 1$, et donc diverge.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I = [-1,\ 1[$ et son rayon de convergence est $R = 1$.

8. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\sqrt[3]{n}}$ ⋅

Soit $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{\sqrt[3]{n}}$ ⋅ Alors $|a_n| = \left|\frac{(-1)^n x^{2n}}{\sqrt[3]{n}}\right| = \frac{|x|^{2n}}{\sqrt[3]{n}}$ ⋅

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|^2}{\sqrt[n]{\sqrt[3]{n}}} = \frac{|x|^2}{\sqrt[3n]{n}}$ ⋅

D'où, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|^2}{\sqrt[3n]{n}} = |x|^2 \frac{1}{\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3n]{n}}_{=1}} = |x|^2$ ⋅

Donc pour $|x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, la série converge.

<u>Étude aux bornes</u>

- Pour $x = -1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^{2n}}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ · Cette dernière série numérique est alternée. On applique alors le critère de Leibniz.

  Posons $b_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ · On a :

  a. $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$.

  b. Pour tout n, $b_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = b_n$, car $n + 1 > n$. Donc $b_{n+1} < b_n$ pour tout n, et donc la suite (b_n) est décroissante.

Ainsi, la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ est <u>convergente d'après le critère de Leibniz</u>.

- Pour $x = 1$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1)^{2n}}{\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ · Cette dernière série numérique est alternée identique à la précédente, et donc <u>convergente d'après le critère de Leibniz</u>.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I = [-1,\ 1]$ et son rayon de convergence est $R = 1$.

9. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^n} x^n$.

Soit $a_n = \frac{3^n}{n^n} x^n$ · Alors $|a_n| = \left|\frac{3^n}{n^n} x^n\right| = \frac{3^n|x|^n}{n^n}$ ·

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{3|x|}{n}$ ·

D'où, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3|x|}{n} = 3|x| \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0 < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I =]-\infty,\ +\infty[$ et son rayon de convergence est $R = +\infty$ ·

10. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} (x + 6)^n$.

Soit $a_n = \frac{1}{n^n} (x + 6)^n$ · Alors $|a_n| = \left|\frac{1}{n^n} (x + 6)^n\right| = \frac{|x+6|^n}{n^n}$ ·

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x+6|}{n}$ ·

D'où, $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x+6|}{n} = |x + 6| \underbrace{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}}_{=0} = 0 < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I =]-\infty,\ +\infty[$ et son rayon de convergence est $R = +\infty$ ·

11. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^{2n}} x^n$.

Soit $a_n = \frac{5^n}{n^{2n}} x^n$ · Alors $|a_n| = \left|\frac{5^n}{n^{2n}} x^n\right| = \frac{5^n}{n^{2n}} |x|^n$ ·

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{5}{n^2}|x|$ ·

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x+6|}{n} = 5|x| \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}}_{=0} = 0 < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I =]-\infty, +\infty[$ et son rayon de convergence est $R = +\infty$ ·

12. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$.

Notons que pour $x = 0$ (centre de la série), la série converge.

Soient $a_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n}$ et $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} x^{2n+2}$

Alors pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+2}((n+1)!)^2} x^{2n+2} \times \frac{2^{2n}(n!)^2}{(-1)^n x^{2n}} = -\frac{x^2(n!)^2}{4(n!\,(n+1))^2} = -\frac{x^2(n!)^2}{4(n!)^2(n+1)^2}$$
$$= -\frac{x^2}{4(n+1)^2}\cdot$$

Ainsi, on a : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|-\frac{x^2}{4(n+1)^2}\right| = \frac{x^2}{4(n+1)^2}$ ·

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x^2}{4(n+1)^2} = \frac{x^2}{4} \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}}_{=0} = 0 < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I =]-\infty, +\infty[$ et son rayon de convergence est $R = +\infty$ ·

13. Soit $\sum_{n=0}^{\infty}(7x-1)^n$.

Soit $a_n = (7x-1)^n$. Alors $|a_n| = |(7x-1)^n| = |7x-1|^n$.

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = |7x-1|$.

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} |7x-1| = |7x-1|$ ·

Donc pour $|7x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < 7x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < 7x < 2 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{2}{7}$,

la série converge.

<u>Étude aux bornes</u>

- Pour $x = 0$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}(7(0)-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$.
  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ n'existe pas, et donc la série <u>diverge d'après le critère du terme général</u>.
- Pour $x = \frac{2}{7}$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}\left(7(\frac{2}{7})-1\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1$.
  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1 \neq 0$, et donc la série <u>diverge d'après le critère du terme général</u>.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I = \left]0, \frac{2}{7}\right[$ et son rayon de convergence est $R = \frac{1}{7}$ ·

14. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} n(-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, n\, x^n$.

Soit $a_n = (-1)^n\, n\, x^n$. Alors $|a_n| = |(-1)^n\, n\, x^n| = n|x|^n$.
Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = |x|\sqrt[n]{n}$.
D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} |x|\sqrt[n]{n} = |x| \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}}_{=1} = |x|$.
Donc pour $|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$, la série converge.

Étude aux bornes

- Pour $x = -1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, n\, (-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n} n = \sum_{n=0}^{\infty} n$.
  Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \neq 0$, et donc la série diverge d'après le critère du terme général.
- Pour $x = 1$, on a $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, n\, (1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n n$ n'existe pas, et donc la série diverge d'après le critère du terme général.
Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I =]-1,\ 1[$ et son rayon de convergence est $R = 1$.

15. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n^2}$.

Soit $a_n = \frac{(x-4)^n}{n^2}$. Alors $|a_n| = \left|\frac{(x-4)^n}{n^2}\right| = \frac{|x-4|^n}{n^2}$.
Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x-4|}{\sqrt[n]{n^2}}$.
D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|x-4|}{\sqrt[n]{n^2}} = |x-4| \frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^2}}_{=1}} = |x-4|$.
Donc pour $|x-4| < 1 \Leftrightarrow -1 < x-4 < 1 \Leftrightarrow 3 < x < 5$, la série converge.

Étude aux bornes

- Pour $x = 3$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3-4)^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.
  Cette dernière série numérique est alternée. On applique alors le critère de Leibniz.
  Posons $b_n = \frac{1}{n^2}$. On a :
  a. $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.
  b. Pour tout n, $b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} = b_n$, car $(n+1)^2 > n^2$. Donc $b_{n+1} < b_n$ pour tout n, et donc la suite (b_n) est décroissante.
  Ainsi, la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ est convergente d'après le critère de Leibniz.
- Pour $x = 5$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(5-4)^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)^n}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
  Cette dernière série numérique est une série de Riemann pour $p = 2 > 1$, et donc converge.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I = [3,\ 5]$ et son rayon de convergence est $R = 1$.

16. Soit $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.
Notons que pour $x = 0$ (centre de la série), la série converge.

Soient $a_n = \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}$ et $a_{n+1} = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Alors pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \frac{(2n-1)!}{(-1)^{n-1}x^{2n-1}} = -\frac{x^2(2n-1)!}{(2n+1)(2n)(2n-1)!} = -\frac{x^2}{(2n+1)(2n)}.$$

Ainsi, on a : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|-\frac{x^2}{(2n+1)(2n)}\right| = \frac{x^2}{(2n+1)(2n)}$.

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n)} = x^2 \underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n)}}_{=0} = 0 < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I =]-\infty, +\infty[$ et son rayon de convergence est $R = +\infty$.

17. Soit $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(3n)!\,x^n}{n\,2^n}$.

Notons que pour $x = 0$ (centre de la série), la série converge.

Soient $a_n = \frac{(-1)^n(3n)!\,x^n}{n\,2^n}$ et $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(3n+3)!\,x^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}$.

Alors pour tout $x \neq 0$, on a :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(-1)^{n+1}(3n+3)!\;x^{n+1}}{(n+1)\;2^{n+1}} \times \frac{n\;2^n}{(-1)^n(3n)!\;x^n} = -\frac{(3n+3)!\;x}{2(n+1)(3n)!}$$

$$= -\frac{n\,(3n+3)(3n+2)(3n+1)(3n)!\;x}{2(n+1)(3n)!}$$

$$= -\frac{3n(n+1)(3n+2)(3n+1)!\;x}{2(n+1)} = -\frac{3n(3n+2)(3n+1)x}{2}.$$

Ainsi, on a : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|-\frac{3n(3n+2)(3n+1)x}{2}\right| = \frac{3n(3n+2)(3n+1)|x|}{2}$.

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n(3n+2)(3n+1)|x|}{2} = \frac{3|x|}{2}\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty} n(3n+2)(3n+1)}_{=+\infty} = +\infty > 1$

pour tout $x \neq 0$.

Conclusion : Le domaine de convergence est $I = \{0\}$ et son rayon de convergence est $R = 0$.

18. Soit $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n^3 4^n}$.

Soit $a_n = \frac{x^{n-1}}{n^3 4^n}$. Alors $|a_n| = \left|\frac{x^{n-1}}{n^3 4^n}\right| = \frac{|x|^{n-1}}{n^3 4^n}$.

Ainsi, on a $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{|x|^{n-1}}}{4\sqrt[n]{n^3}} = \frac{|x|^{\frac{n-1}{n}}}{4\;\sqrt[n]{n^3}}$.

D'où, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{|x|^{\frac{n-1}{n}}}{4\;\sqrt[n]{n^3}} = \frac{1}{4}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}|x|^{\frac{n-1}{n}}\right)\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n^3}}_{=1}}$

$$= \frac{1}{4}\left(|x|^{\underbrace{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n-1}{n}}_{=1}}\right) = \frac{|x|}{4}.$$

Donc pour $\frac{|x|}{4} < 1 \Leftrightarrow |x| <\Leftrightarrow -4 < x < 4$, la série converge.

<u>Étude aux bornes</u>

- Pour $x = -4$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^{n-1}}{n^3 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^{n-1}}{n^3 4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^3}$. Cette dernière série numérique est alternée. On applique alors le critère de Leibniz.

  Posons $b_n = \frac{1}{4n^3}$. On a :

  a. $\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n^3} = 0$.

  b. Pour tout n, $b_{n+1} = \frac{1}{4(n+1)^3} < \frac{1}{4n^3} = b_n$, car $n+1 > n$. Donc $b_{n+1} < b_n$ pour tout n, et donc la suite (b_n) est décroissante.

  Ainsi, la série numérique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^3}$ est <u>convergente d'après le critère de Leibniz</u>.

- Pour $x = 4$, on a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4)^{n-1}}{n^3 4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4n^3}$. Cette dernière série numérique est une série de Riemann pour $p = 3 > 1$, et donc converge.

Conclusion : L'intervalle de convergence de la série est $I = [-4,\ 4]$ et son rayon de convergence est $R = 4$.

19. $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,(x-1)^n$

Notons que pour $x = 1$ (centre de la série), la série converge.

Soient $a_n = n!\,(x-1)^n$ et $a_{n+1} = (n+1)!\,(x-1)^{n+1}$.

Alors pour tout $x \neq 0$, on a :

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!(x-1)^{n+1}}{n!(x-1)^n} = \frac{(n+1)n!(x-1)}{n!} = (n+1)(x-1)$.

Ainsi, on a : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |(n+1)(x-1)| = (n+1)|x-1|$.

D'où, $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} = (n+1)|x-1| = |x-1| \underbrace{\lim_{n\to+\infty}(n+1)}_{=+\infty} = +\infty > 1$ pour tout $x \neq 1$.

Conclusion : Le domaine de convergence est $I = \{1\}$ et son rayon de convergence est $R = 0$.

Exercice 2

On a $f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

et $g(x) = \frac{1}{x-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots$, pour tout $x \in]-1,\ 1[$.

1. On a $F(x) = e^{2x} = f(2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$, pour $2x \in]-\infty, +\infty[$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$ où l'intervalle de convergence $I =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ et de rayon de convergence$R = +\infty$.

2. On a $G(x) = e^{x^3} = f(x^3) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$, pour $x^3 \in]-\infty, +\infty[$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$ où l'intervalle de convergence $I =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ et de rayon de convergence$R = +\infty$.

3. On $e^{-x} = f(-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$, pour $-x \in]-\infty, +\infty[$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^x + e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^n}{n!} + \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + (-1)^n) \frac{x^n}{n!}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(1 + (-1)^{2k})}_{=2} \frac{x^{2k}}{(2k)!}}_{\text{termes de rang pair}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{(1 + (-1)^{2k+1})}_{=0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\text{termes de rang impair}} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Ainsi,pour tout $x \in \mathbb{R}$,$H(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ ·Par conséquent, $H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$où l'intervalle de convergence $I =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ et de rayon de convergence$R = +\infty$.

4. On a $e^{3x} = f(3x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$, pour $3x \in]-\infty, +\infty[$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $L(x) = xe^{3x} = x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n x^{n+1}}{n!}$ où l'intervalle de convergence $I =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ et de rayon de convergence$R = +\infty$.

5. On a $T(x) = \frac{1}{1+5x} = \frac{1}{1-(-5x)} = g(-5x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-5x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, 5^n x^n$pour tout x tel que $-1 < -5x < 1$, c'est-à-dire pour tout $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{5}$ ·
Ainsi, $T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, 5^n x^n$ où l'intervalle de convergence $I = \left]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right[$ et de rayon de convergence$R = \frac{1}{5}$ ·

6.On a$I(x) = \frac{x}{1+x^3} = x \frac{1}{1+x^3}$ ·
Or, $\frac{1}{1+x^3} = \frac{1}{1-(-x^3)} = g(-x^3) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n}$ pour tout x tel que $-1 < -x^3 < 1$, c'est-à-dire pour tout $-1 < x < 1$ ·
Il s'en suit que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :
$I(x) = \frac{x}{1+x^3} = x \frac{1}{1+x^3} = x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n+1}$.

Ainsi, $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{3n+1}$ où l'intervalle de convergence $I =]-1,\ 1[$ et de rayon de convergence$R = 1$.

7. On a $M(x) = \frac{2x}{4-3x^2} = \frac{2x}{4}\frac{1}{1-\frac{3x^2}{4}} = \frac{x}{2}\frac{1}{1-\frac{3x^2}{4}}$.

Or, $\frac{1}{1-\frac{3x^2}{4}} = g\left(\frac{3x^2}{4}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3x^2}{4}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{4^n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{(2^2)^n}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2^{2n}}x^{2n}$ pour tout x tel que $-1 < \frac{3x^2}{4} < 1 \Leftrightarrow -4 < 3x^2 < 4 \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < x^2 < \frac{4}{3}$, c'est-à-dire pour tout $-\sqrt{\frac{4}{3}} < x < \sqrt{\frac{4}{3}} \Leftrightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow -\frac{2\sqrt{3}}{3} < x < \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Il s'en suit que pour tout $x \in \left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[= \left]-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$, on a :

$M(x) = \frac{x}{2}\frac{1}{1-\frac{3x^2}{4}} = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2^{2n}}x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2^{2n+1}}x^{2n+1}$.

Ainsi, $M(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{3^n}{2^{2n+1}}x^{2n+1}$ où l'intervalle de convergence$\left]-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right[= \left]-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$ et de rayon de convergence$R = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Exercice 3

1. On a $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$, pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$. Donc $T_3(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} = 1 - \frac{x^2}{2}$

2. Étant donné que l'intervalle d'intégration $[0,\ 1]$ est contenu dans l'intervalle de convergence$I =]-\infty, +\infty[$ de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, alors on a :

$1 - \cos x = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$.

Ainsi, on obtient : $\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$ pour tout $x \neq 0$.

Par ailleurs, $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x}\left[FI: \frac{0}{0}\right]$

En utilisant la règle de L'Hospital, on aurait : $\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{1} = 0$. Donc $x = 0$ n'est pas une singularité, et par suite I n'est pas une intégrale impropre.

Ainsi, en utilisant le théorème sur l'intégration des séries de puissance, on aura :

$$\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\int_0^1\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}dx$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\left[\frac{x^{2n}}{(2n)!\,(2n)}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\,(2n)}.$$

3. En utilisant les trois premiers termes de cette dernière série, on obtient :

$$I = \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!\,(2n)} = \frac{1}{2!\ 2} - \frac{1}{4!\ 4} + \frac{1}{6!\ 6} - \frac{1}{8!\ 8} + \cdots$$

$$\approx \frac{1}{2!\ 2} - \frac{1}{4!\ 4} + \frac{1}{6!\ 6}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{96} + \frac{1}{4320} = \frac{215}{864} \cong 0{,}248842.$$

L'erreur E est estimée comme suit : $E \leq \frac{1}{8!\ 8} = \frac{1}{35280} \cong 3{,}1\ \times 10^{-6}$.

Exercice 4

1. On a $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$, pour tout $x \in \left]-\infty, +\infty\right[$.

Don$\mathrm{T}_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$

2.Étant donné que l'intervalle d'intégration [0, 1] est contenu dans l'intervalle de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, alors en utilisant le théorème sur l'intégration des séries de puissance, on aura :

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!\,(2n+1)}\right]_0^1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}.$$

3. En utilisant les trois premiers termes de cette dernière série, on obtient :

$$I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)} = 1 - \frac{1}{3!\ 3} + \frac{1}{5!\ 5} - \frac{1}{7!\ 7}\cdots$$

$$\cong 1 - \frac{1}{3!\ 3} + \frac{1}{5!\ 5}$$

$$= 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} = \frac{391}{720} \cong 0{,}54305.$$

L'erreur E est estimée comme suit : $E \leq \frac{1}{7!\ 7} = \frac{1}{35280} \cong 2{,}83\ \times 10^{-5}$.

Exercice 5

On a $e^x - 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots\right) - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, pour tout $x \in \left]-\infty, +\infty\right[$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x}(e^x - 1) = x^{-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

On en déduit, en utilisant le théorème d'intégration des séries entières :

$$\int \frac{e^x - 1}{x} \mathrm{d}x = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} \int x^{n-1} dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n!)} + C$$

avec$I =]-\infty, +\infty[$ comme intervalle de convergence et $R = +\infty$ comme rayon de convergence.

Exercice6

1.On a

- $f(0) = 0$;
- $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, et donc $f'(0) = 0$;
- $f''(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}} + \frac{5x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}$, et donc $f''(0) = 1$.

Donc le polynôme $T_2(x)$ de MacLaurin d'ordre 2 est donné comme suit :

$$T_2(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 + 0 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 = \frac{x^2}{2}\cdot$$

2. Si l'intensité de la vitesse v est négligeable devant c, c'est-à-dire, $v \ll c$, alors $\frac{v}{c}$ est proche de 0. Donc si on pose $x = \frac{v}{c}$, alors

$$E_c = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - 1 \right) mc^2 \approx \frac{x^2}{2} mc^2 = \frac{\left(\frac{v}{c}\right)^2}{2} mc^2 = \frac{1}{2} mv^2$$

Exercice 7

$$E = \frac{q}{R^2} - \frac{q}{(R+r)^2}$$

1. On a :

$$\frac{q}{(R+r)^2} = \frac{q}{R^2 \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2} = \frac{q}{R^2 \left(1 + \frac{r}{R}\right)^2}$$

2. On a :

- $f(0) = 1$;
- $f'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}$, et donc $f'(0) = -2$;

$f''(x) = \frac{6}{(1+x)^2}$, et donc $f''(0) = 6$.

Donc le polynôme $T_3(x)$ de MacLaurin d'ordre 3 est donné comme suit :

$$T_3(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 - 2x + \frac{6}{2!} x^2 - \frac{24}{3!} x^3 = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3.$$

3. On a :

$$E = \frac{q}{R^2} - \frac{q}{(R+r)^2} = \frac{q}{R^2} - \frac{q}{R^2\left(1+\frac{r}{R}\right)^2} = \frac{q}{R^2}\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{r}{R}\right)^2}\right)$$

Si r est négligeable devant R, c'est-à-dire $r \ll R$, alors $\frac{r}{R}$ est proche de 0. Donc si on pose $x = \frac{r}{R}$, alors on a approximativement :

$$E = \frac{q}{R^2}\left(1 - \frac{1}{(1+x)^2}\right) = \frac{q}{R^2}(1 - f(x)) \approx \frac{q}{R^2}\left(1 - T_3(x)\right)$$

Or, $1 - T_3(x) = 1 - (1 - 2x + 3x^2 - 4x^3) = 2x - 3x^2 + 4x^3$. Puisque x est proche de 0, alors les termes $-3x^2$ et $4x^3$ sont négligeables devant le premier terme $2x$.
Par suite, $1 - T_3(x) \approx 2x$. Ainsi, il s'en suit que :

$$E = \frac{q}{R^2}\left(1 - \frac{1}{(1+x)^2}\right) \approx \frac{q}{R^2}\left(1 - T_3(x)\right) \approx \frac{q}{R^2}(2x) = 2\frac{q}{R^2}x = 2\frac{q}{R^2}\frac{r}{R} = \frac{2qr}{R^3}.$$

Donc $E \approx 2\frac{rq}{R^3}$, ce qui montre que E est approximativement proportionnel à $\frac{1}{R^3}\cdot$

Exercice 8

1. Par définition du temps de doublement, on a $C(t_d) = 2C_0$. Ansi, on a l'égalité : $C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{kt_d} = 2C_0$. En divisant les deux membres de cette dernière égalité par C_0 et en prenant le logarithme népérien de chaque membre, il s'en suit :

$$C_0\left(1+\frac{i}{k}\right)^{kt_d} = 2C_0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{i}{k}\right)^{kt_d} = 2 \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{i}{k}\right)^{kt_d} = \ln 2 \Leftrightarrow t_d = \frac{\ln 2}{k\ln\left(1+\frac{i}{k}\right)} \cdots \text{(B)}$$

2. Dans le monde des finances, étant donné que le taux d'intérêt annuel $i < 1$ (en représentation décimale) et que le nombre k de capitalisation annuelle est un entier plus grand ou égal à 1, alors il advient que $\frac{i}{k} \in]0,\ 1[$. Or, on a vu en cours que le développement de $\ln(x+1)$ en série de Maclaurin est donné comme suit :

$\ln(x+1) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} x^{p+1}$ pour tout $x \in]-1, 1]$.

Par conséquent, on peut utiliser le premier terme de cette série (ou le polynôme de Taylor d'ordre 1 : $T_1(x)$) pour approximer $\ln(x+1)$ par $T_1(x)$ pour tout $x \in]-1, 1]$. C'est-à-dire, $\ln(x+1) \cong T_1(x) = x$ pour tout $x \in]-1, 1]$. Comme $\frac{i}{k} \in]0,\ 1[\subset]-1, 1]$, alors on peut approximer $\ln(x+1)$ par $T_1(x)$ pour $x = \frac{i}{k}\cdot$ Plus précisément, on a : $\ln\left(1+\frac{i}{k}\right) \cong \frac{i}{k}\cdot$
En rapportant $\frac{i}{k}$ comme valeur approchée de $\ln\left(1+\frac{i}{k}\right)$ dans la formule (B), on obtient :

$$t_d = \frac{\ln 2}{k\ln\left(1+\frac{i}{k}\right)} \cong \frac{\ln 2}{\mathrm{k}\left(\frac{i}{k}\right)} = \frac{\ln 2}{i} \cong \frac{0{,}7}{i}\cdot \text{ Ce qu'il fallait démontrer.}$$

Remarque :

a. On remarquera que autant que la valeur de k est plus élevée, plus l'approximation est meilleure car $\frac{i}{k} \to 0$ (centre de la série de Maclaurin), et donc une convergence plus rapide.

b. À première vue, il apparait bizarre que le temps de doublement ne dépend pas du nombre de capitalisation k par année dans la formule approximative (A). Un exemple nous convaincra de la justesse de cette approximation.

Exemple numérique avec k très petit (donc convergence lente)

Si le taux d'intérêt annuel est de $i = 6\ \%$ et que les intérêts sont composés deux fois par année ($k = 2$).

- La formule exacte (B) donne : $t_d = \frac{\ln 2}{k \ln\left(1+\frac{i}{k}\right)} = \frac{\ln 2}{2 \ln\left(1+\frac{0,06}{2}\right)} = \frac{\ln 2}{2 \ln(1,03)} \cong 11,72$ans.
- La formule approchée (A) donne : $t_d = \frac{0,7}{i} = \frac{0,7}{0,06} \cong 11,67$ ans.

Le résultat parle de lui-même !

Chapitre 4
Intégrales impropres

Dans ce chapitre, on introduira la nouvelle notion d'***intégrale impropre***. Historiquement, ce concept a été déjà connu antérieurement à la notion d'intégrale généralisée.

I. Rappelle sur les intégrales définies

Dans ce chapitre, on introduira la nouvelle notion d'***intégrale définie***. Historiquement, ce concept a été déjà connu antérieurement à la notion d'intégrale indéfinie, et ce contrairement à la présentation que nous avons suivi dans le plan de notre cours.

A- Les sommations

Définition 1: On appelle *sommation* une expression de la forme $\sum_{i=r}^{n} a_i$, où le symbole $\sum$ (**lettre grecque sigma**) est appelé *symbole de sommation*. Le terme a_i est le *terme général* de la sommation. L'indice i, appelé *indice de sommation,* prend toutes les valeurs entières de la *borne inférieure* $i = r$ à la *borne supérieure* n $i = n$.

On a donc :

$$\sum_{i=r}^{n} a_i = a_r + a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

Remarque :La *portée* d'un symbole de sommation est l'expression algébrique qui est affectée par le symbole de sommation.

Exemple 1 : $\sum_{i=1}^{4} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$

Exemple 2 : $\sum_{i=1}^{6} 3 = \underbrace{3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3}_{\text{6 fois}}$

Exemple 3 : $3 + 5 + 7 + \ldots + 21$

Exemple 4 : $4 + 9 + 16 + \ldots + 625 =$

Exemple 5 : $2 - 4 + 6 - 8 + \ldots - 20 =$

2-Propriétés des sommations

1. $\sum_{i=1}^{n}(a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$ (regroupement par commutativité et associativité)
2. $\sum_{i=1}^{n} k a_i = k \sum_{i=1}^{n} a_i$ (mise en évidence d'une constante qui multiplie chaque terme)
3. $\sum_{i=1}^{n} a = na$ (l'addition de n termes égaux à une même constante)
4. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{t=1}^{n} a_t$ (l'indice est muet : possibilité de le renommer)
5. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=s}^{n+s-1} a_{i-s+1}$ (possibilité de changer la valeur initiale de l'indice)

Théorème 1: Pour tout entier naturel n non nul ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), on a :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Preuve:*Facultative*

D'une part, $\sum_{i=1}^{n} (i^2 - (i-1)^2) = \sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - n$

D'autre part, $\sum_{i=1}^{n} (i^2 - (i-1)^2) = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=0}^{n-1} i^2 = n^2.$

Donc, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

6. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Démontrons cette dernière propriété.

Théorème 2: Pour tout entier naturel n non nul ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), on a :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Preuve: ***Facultative***

D'une part, $\sum_{i=1}^{n} (i^3 - (i-1)^3) = \sum_{i=1}^{n} (3i^2 - 3i + 1) = 3 \sum_{i=1}^{n} i^2 - 3\frac{n(n+1)}{2} + n$

D'autre part, $\sum_{i=1}^{n} (i^3 - (i-1)^3) = \sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=1}^{n} (i-1)^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 - \sum_{i=0}^{n-1} i^3 = n^3.$

Donc, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

7. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

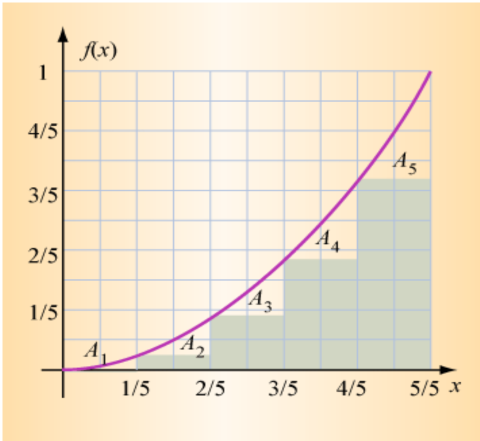
Théorème 3 : Pour tout entier naturel n non nul ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), on a :

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Preuve: (en exercice).

Exemple 6: $\sum_{i=10}^{n-2} i =$

Exemple 7 : $\sum_{i=20}^{n+10} i^2 =$



Exemple 8 : $\sum_{k=5}^{n} (k^2 - 2k)$

B- Calculs d'aires à l'aide de sommes

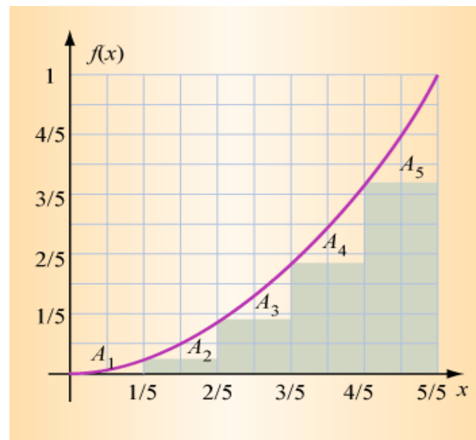
On considère la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0, \ 1]$. Nous allons tenter de calculer une valeur approchée de l'aire sous la courbe.

I. Premier calcul :

i) Somme inférieure avec cinq rectangles

1. Décomposer la région sous la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses (axe des x) dans l'intervalle [0, 1] en 5 rectangles de même base et ayant comme hauteur de chacun des rectangles l'image de sa frontière gauche par la fonction f.

   Réponse : Les intervalles obtenus sont :



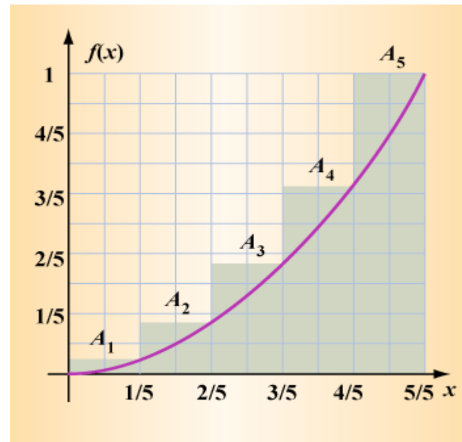
2. Estimer l'aire de la région sous la courbe à l'aide de ces rectangles.

   Réponse :

ii) Deuxième calcul : ***somme supérieure avec cinq rectangles***

1. Décomposer la région sous la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses (axe des x) dans l'intervalle [0, 1] en 5 rectangles de même base et ayant comme hauteur de chacun des rectangles l'image de sa frontière droite par la fonction f.

   Réponse : Les intervalles obtenus sont :



2. Estimer l'aire de la région sous la courbe à l'aide des ces rectangles.

   Réponse :

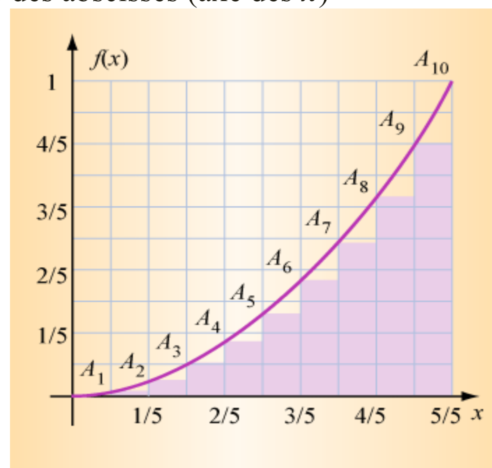
Remarque : En augmentant le nombre de rectangles, on peut obtenir une meilleure estimation de cette aire.

II. Deuxième calcul :

i) Somme inférieure avec dix rectangles

3. Décomposer la région sous la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses (axe des x) dans l'intervalle [0, 1] en 10 rectangles de même base et ayant comme hauteur de chacun des rectangles l'image de sa frontière gauche par la fonction f.

   Réponse : Les intervalles obtenus sont :



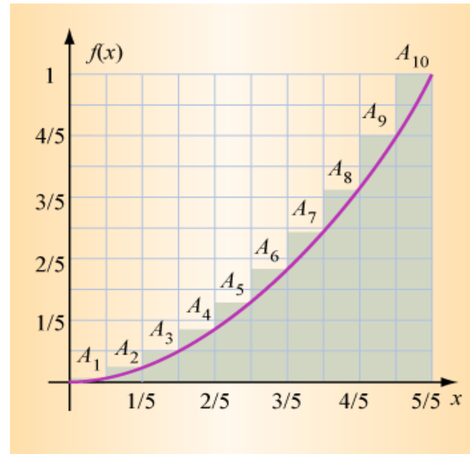
4. estimer l'aire de la région sous la courbe à l'aide des ces rectangles.

   Réponse :

ii) Deuxième calcul : ***somme supérieure avec dix rectangles***

3. Décomposer la région sous la courbe de la fonction f et l'axe des abscisses (axe des x) dans l'intervalle [0, 1] en 10 rectangles de même base et ayant comme hauteur de chacun des rectangles l'image de sa frontière droite par la fonction f.

   Réponse : Les intervalles obtenus sont :

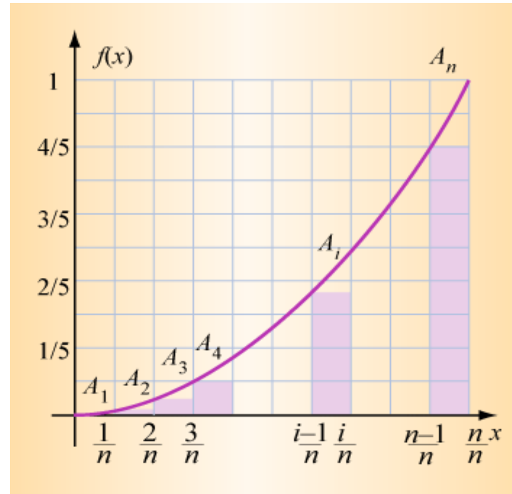


4. estimer l'aire de la région sous la courbe à l'aide des ces rectangles.

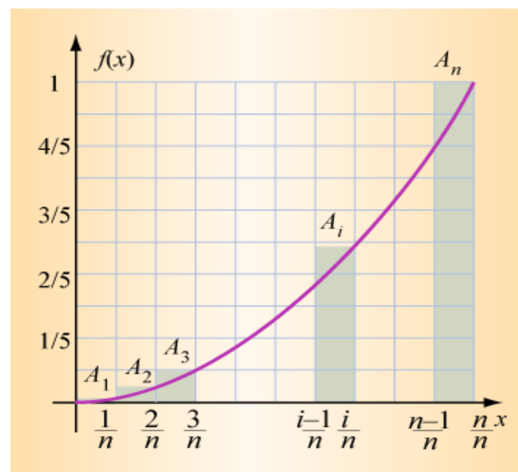
   Réponse :

Démarche rigoureuse par les limites pour le calcul exact

Dans l'exemple précédent, en augmentant le nombre de subdivisions del'intervalle, on augmente la précision de l'estimation. On devrait pouvoir obtenir l'aire exacteen prenant la limite, si elle existe, lorsque le nombre de sous-intervalles tend vers l'infini.



Par les frontières de gauche : sommes inférieures



Par les frontières de droite : sommes supérieures

Dans ce cas, l'aire recherchée A_0^1 de la courbe de la fonction f sur [0, 1] est:

$$A_0^1 = \lim_{n\to+\infty} \underline{S_n} = \lim_{n\to+\infty} \overline{S_n}$$

En général, pour une fonction positive f sur $[a,\ b]$, on a $\underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\underline{c_i}\right)\Delta x_i$ et $\overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{c_i})\Delta x_i$ avec $\underline{c_i}$ et $\overline{c_i}$ sont les points où le minimum et le maximum sont atteints, respectivement, sur l'intervalle $[x_{i-1},\ x_i]$ pour tout $i \in \{1,\ 2,\cdots,n\}$ avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.

Remarque importante

Si f est une fonction croissante sur $[a,\ b]$ et positive, alors on a :

$$\overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{c_i})\Delta x_i = \sum_{1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i \text{ et } \underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

2. Si f est une fonction décroissante sur $[a,\ b]$ et positive, alors on a :

$$\overline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i = \sum_{0}^{n-1} f(x_i)\,\Delta x_i \text{ et } \underline{S_n} = \sum_{i=1}^{n} f\left(\underline{c_i}\right)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i.$$

Exercices

Exercice 1

Expliciter les termes des sommations suivantes.

a. $\sum_{j=2}^{7}(2j^2+1)$

b. $\sum_{k=3}^{8}\frac{2k}{k^2+3}$

c. $\sum_{k=0}^{5}(-5)^{k-3}$

d. $\sum_{s=1}^{10}(-1)^{s-1}(2+s)$

e. $\sum_{m=0}^{4}\frac{1}{8}f\left(2+\frac{m}{8}\right)$ où f est une fonction définie sur $[2,3]$.

f. $\sum_{k=1}^{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)$

Exercice 2

Utiliser le symbole de sommation $\sum$ pour exprimer les sommes S suivantes.

a. $S = 1+3+5+7+9+11$

b. $S = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100$

c. $S = 2 - 4 + 6 - 8 + 10 - 12 + 14 - 16 + 18 - 20$

d. $S = \frac{1}{10} f\left(1 + \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{10} f\left(1 + \frac{2}{10}\right) + \frac{1}{10} f\left(1 + \frac{3}{10}\right) + \cdots + \frac{1}{10} f(2)$

e. $S = \frac{1}{10} f\left(\frac{1}{10}\right) - \frac{2}{10} f\left(\frac{2}{10}\right) + \frac{3}{10} f\left(\frac{3}{10}\right) + \cdots - \frac{20}{10} f(2)$

Exercice 3

Sachant que $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$, calculer l'intégrale $\int_0^1 (x^4 + 2x + 1)\, \mathrm{d}x$ en utilisant la définition formelle (somme de Riemann).

Exercice 4 (problème de modélisation)

Le sang arrive au coeur, du reste du corps, par les veines, entre par l'oreillette droite où il est pompé en direction des poumons par les artères pulmonaires pour y être oxygéné. Il revient alors dans l'oreillette gauche par le biais des veines pulmonaires d'où il est envoyé dans tout le corps à travers l'aorte. Le ***débit cardiaque*** F est alors défini comme le volume de sang que le coeur éjecte par unité de temps, c'est-à-dire, la vitesse du flux de sang dans l'aorte : $F = \frac{dV}{dt}\cdot$ Pour mesurer ce débit, on utilise la technique de ***dilution d'un indicateur***.

Celle-ci consiste à injecter un colorant dans l'oreillette droite ce qui permet à ce colorant de circuler à travers le cœur jusqu'à l'aorte. Une sonde introduite à l'intérieur de l'aorte mesure régulièrement la concentration de l'indicateur lorsque celui-ci sort du cœur pendant un intervalle de temps $[0,\ T]$ jusqu'à ce que le colorant ait disparu.
Sachant que $C(t)$ désigne la concentration du colorant à l'instant t, et Q la quantité de colorant injectée au départ, établissez la relation suivante donnant le débit cardiaque :

$$F = \frac{\mathrm{Q}}{\int_0^T C(t)\mathrm{d}t}$$

Exercice 5

Exprimer les limites des sommes suivantes sous forme d'intégrales. On ne vous demande pas de calculer ces intégrales.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2+i^2}$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}$

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \sin\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)$

Solutionnaire

Exercice 1

a. $\sum_{i=2}^{7}(2j^2+1) = 9+19+33+51+73+99$

b. $\sum_{k=3}^{8}\frac{2k}{k^2+3} = \frac{6}{12}+\frac{8}{19}+\frac{10}{28}+\frac{12}{39}+\frac{14}{52}+\frac{16}{67} = \frac{1}{2}+\frac{8}{19}+\frac{5}{14}+\frac{4}{13}+\frac{7}{26}+\frac{16}{67}$

c. $\sum_{k=0}^{5}(-5)^{k-3} = (-5)^{-3}+(-5)^{-2}+(-5)^{-1}+(-5)^{0}+(-5)+(-5)^2$

$$= -\frac{1}{125}+\frac{1}{25}-\frac{1}{5}+1-5+25$$

d. $\sum_{s=1}^{10}(-1)^{s-1}(2+s) = 3-4+5-6+7-8+9-10+11-12$

e. $\sum_{m=0}^{4}\frac{1}{8}f\left(2+\frac{m}{8}\right) = \frac{1}{8}f(2)+\frac{1}{8}f\left(2+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{8}f\left(2+\frac{2}{8}\right)+\frac{1}{8}f\left(2+\frac{3}{8}\right)+\frac{1}{8}f\left(2+\frac{4}{8}\right)$

$$= \frac{1}{8}f(2)+\frac{1}{8}f\left(\frac{17}{8}\right)+\frac{1}{8}f\left(\frac{9}{4}\right)+\frac{1}{8}f\left(\frac{19}{8}\right)+\frac{1}{8}f\left(\frac{5}{2}\right)$$

f. $\sum_{k=1}^{5}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}(1)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}(2)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}(3)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}(4)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}(5)\right)$

$$= 1+0-1+0+1$$

Exercice 2

a. $S = 1+3+5+7+9+11 = \sum_{k=0}^{5}(2k+1)$

b. $S = 1+4+9+16+25+36+49+64+81+100 = \sum_{k=1}^{10}k^2$

c. $S = 2-4+6-8+10-12+14-16+18-20 = \sum_{n=1}^{10}(-1)^{n-1}(2n)$

d. $S = \frac{1}{10}f\left(1+\frac{1}{10}\right)+\frac{1}{10}f\left(1+\frac{2}{10}\right)+\frac{1}{10}f\left(1+\frac{3}{10}\right)+\cdots+\frac{1}{10}f(2) = \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{10}f\left(1+\frac{k}{10}\right)$

e. $S = \frac{1}{10}f\left(\frac{1}{10}\right)-\frac{2}{10}f\left(\frac{2}{10}\right)+\frac{3}{10}f\left(\frac{3}{10}\right)+\cdots-\frac{20}{10}f(2) = \sum_{k=1}^{20}\frac{(-1)^{k-1}k}{10}f\left(\frac{k}{10}\right)$

Exercice 3

On a $\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}, x_i = a + i\Delta x = 0 + \left(\frac{1}{n}\right) i = \frac{i}{n}$ pour tout $i = 0,1,\cdots,n$, $f(x_i) = {x_i}^4 + 2x_i + 1 = \left(\frac{i}{n}\right)^4 + 2\left(\frac{i}{n}\right) + 1 = \frac{1}{n^4} i^4 + \frac{2}{n} i + 1$. La somme de Riemann est donnée alors comme suit :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{n^4} i^4 + \frac{2}{n} i + 1\right)\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^4}\left(\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}\right) + \frac{2}{n}\frac{n(n+1)}{2} + n\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{n}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{30n^3} + 2n + 1\right)\\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{11n}{5} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{30n^3}\right)\\ &= \frac{11}{5} + \frac{3}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{30n^4}.\end{aligned}$$

D'où, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 (x^4 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i\\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{11}{5} + \frac{3}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{30n^4}\right)\\ &= \frac{11}{5}\end{aligned}$$

Exercice 4

Considérons une partition quelconque$P = \{t_0, t_1, \cdots, t_{n-1}, t_n\}$ de l'intervalle de temps $[0,\ T]$. Alors, la quantité de colorant $Q_i$qui passe devant le point de mesure entre les instants (de la partition) $t = t_{i-1}$ et $t = t_i$ (durée $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$) est égale à :

$$(\text{volume})(\text{concentration}) = \underbrace{F\Delta t_i}_{volume}\quad \underbrace{C(t_i)}_{concentration}$$ où F est le débit recherché.

Ainsi, la quantité totale de colorant qui passe devant le point de mesure n'est tout simplement que la quantité totale Q injectée au départ est représentant : $\sum_{i=1}^{n} F\Delta t_i\, C(t_i)$.
Donc, $Q = \sum_{i=1}^{n} F\Delta t_i\, C(t_i) = F\sum_{i=1}^{n} C(t_i)\Delta t_i$.
Ainsi, par passage à la limite lorsque $t \to +\infty$ (donc $\max \Delta t_i \to 0$), on obtient :

$$Q = \lim_{n\to+\infty} F \sum_{i=1}^{n} C(t_i)\Delta t_i = F \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} C(t_i)\Delta t_i = F \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} C(t_i)\Delta t_i = F \int_0^T C(t)dt$$

D'où, on obtient le résultat escompté.

Exercice 5

a. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n^2+i^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

b. On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+i^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$$

c. On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\sin\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k}{n}\pi\right)=\int_0^1\sin(x\pi)\,\mathrm{d}x.$$

Théorème 2 (Théorème fondamental du calcul intégral)
Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et considérons la fonction $A(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ où $x\in[a,b]$. Alors:

1. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors $\int_a^b f(t)\,dt=F(b)-F(a)$.
2. $A'(x)=f(x)$.

N.B. : On note en général $F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b=\ F(x)]_a^b=F(x)|_a^b$.

Changement de variable dans une intégrale définie

Soit à calculer l'intégrale $\int_a^b h(x)dx$, où h est une fonction définie sur un intervalle $\mathrm{I}=[a,b]$ tel que $h(x)=f[g(x)]\acute{g}(x)$. Avec f définie sur un intervalle J ayant F comme primitive, et g : I → J (définie sur I et à valeurs dans J) ***une fonction continue ainsi que sa dérivée g'*** sur l'intervalle I.

Supposons que nous voudrions effectuer le changement de variable $t=g(x)$, alors les bornes d'intégration $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont à changer en $\boldsymbol{g(a)}$ et $\boldsymbol{g(b)}$. Plus précisément, on a la formule de changement de variable suivante :

$$\int_a^b h(x)dx=\int_a^b f[g(x)]\acute{g}(x)dx=\left[\mathrm{F}\big(g(x)\big)\right]_a^b=\mathrm{F}\big(g(b)\big)-\mathrm{F}(g(a))=\int_{g(a)}^{g(b)}f(t)dt$$

N.B. : La continuité de g et g' sur $\mathrm{I}=[a,b]$ est primordiale (voir exercice 12).

Exemple : $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 x\sin x\,dx$

Intégration par partie dans une intégrale définie

Soient u,v,$\acute{u}$, $\acute{v}$ des fonctions continues sur un intervalle I = $[a, b]$. Alors, on a :

$$\int_a^b \boldsymbol{u}\mathbf{d}\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{uv}]_a - \int_a^b \boldsymbol{v}\mathbf{d}\boldsymbol{u}$$

Ou d'une façon équivalente :

$$\int_a^b \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\acute{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})]_a - \int_a^b \acute{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\mathbf{d}\boldsymbol{x}$$

Exemple 19

Calculer l'intégrale suivante $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$.

<u>Solution</u>

Application physique de l'intégrale définie

Le changement de position, ou **déplacement**, du mobile dans un laps de temps $[t_1,\ t_2]$ est donné par la formule :

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt = s(t_2) - s(t_1).$$

Si $t_1 = 0$ (l'instant initial) et $s(t_1) = 0$ (la position initiale coïncide avec l'origine des positions), alors le déplacement vaut

$$\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = s(t_2).$$

Dans ce cas, on voit bien que le déplacement représenterait la position du mobile à l'instant final t_2.

Tandis que la **distance parcourue** par le mobile dans ce même laps de temps peut être différente du déplacement. Elle est donnée par la formule :

$\int_{t_1}^{t_2} |v(t)|\, dt$.

Exemple 20

La vitesse d'un mobile à l'instant t (exprimé en secondes) est $v(t) = t^2 - 2t$ mètres par seconde.

1. Évaluer le déplacement du mobile entre les instants $t = 0$ s et $t = 2$ s ?

2. Évaluer la distance totale parcourue durant les 3 premières secondes?

II. Intégrales impropres ou généralisées

Nous avons vu que la notion d'intégrale est définie pour des fonctions continues sur un intervalle borné $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ ($\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ finis). Lorsqu'on n'est guère dans cette situation, c'est-à-dire vouloir étendre une intégrale à un intervalle non borné ($\boldsymbol{a}$ et/ou $\boldsymbol{b}$ infini) ou que la fonction intégrande $\boldsymbol{f}$ admet des *points de discontinuité infinie*, on parle alors d'*intégrale impropre*.

Exemple 21 (contextuel) : $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ = ? (Pourquoi la réponse n'a pas de sens ?)

Définition 21 : L'intégrale définie $\int_a^b f(x)dx$ est appelée une intégrale ***impropre*** ou ***généralisée*** si

1. f tend vers l'infini en un ou plusieurs points de $[a, b]$ (points de ***discontinuité infinie***)

<u>ou si</u>

2. au moins une des bornes d'intégration est infinie ($\pm\infty$).

Remarque : Pour abréger le texte, nous utiliserons les termes suivants :

- *singularité finie* pour décrire un point de discontinuité infinie ;
- *singularité infinie* pour décrire une borne infinie ($\pm\infty$).

Dans les exemples suivants, vérifier si on a à faire à une intégrale impropre ou classique.

Exemple 22: $\int_0^2 \frac{1}{x} \mathrm{d}x$ (en $x = 0$, $f(x)$ tend vers)

Exemple 23: $\int_7^{+\infty} \frac{1}{x-5} \mathrm{d}x$ (il y a une borne infinie)

Exemple 24 : $\int_{-\infty}^{3} \frac{1}{x} \mathrm{d}x$

Exemple 25: $\int_{1}^{4} \frac{1}{x+1} \mathrm{d}x$

Exemple 26 : $I = \int_{0}^{1} \frac{\sin x}{x} \, dx$

Principe de calcul d'une intégrale impropre

1. Utiliser la règle de Chasles pour diviser l'intégrale impropre en somme d'intégrales impropres de manière à ce que chaque intégrale impropre contient une seule singularité.
2. Remplacer l'intégrale (impossible à évaluer directement) par une <u>limite</u> d'intégrales définies standards.Pour ce faire, on utilise le tableau présenté dans la page suivante.

Cas	Forme	Conditions	Représentation par des limites d'intégrales
1	$I = \int_a^b f(x)dx$	f est continue sur $[a, b[$ et $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$	$I = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)dx$
2	$I = \int_a^b f(x)dx$	f est continue sur $]a, b]$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$	$I = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)dx$
3	$I = \int_a^b f(x)dx$	f est continue sur $]a, b[$ et $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to b^-} f(x) = \pm\infty$	$I = \lim_{t\to a^+} \int_t^c f(x)dx$ $+$ $\lim_{t\to b^-} \int_c^t f(x)dx$ où $c \in]a, b[$
4	$I = \int_a^b f(x)dx$	f est continue sur $[a, b] \setminus \{c\}$ et $\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$	$I = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)dx$ $+$ $\lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)dx$
5	$I = \int_a^{+\infty} f(x)dx$	f n'a pas de discontinuité infinie sur $[a, +\infty[$	$I = \lim_{t\to+\infty} \int_a^t f(x)dx$
6	$I = \int_{-\infty}^b f(x)dx$	f n'a pas de discontinuité infinie sur $]-\infty, b]$	$I = \lim_{t\to-\infty} \int_t^b f(x)dx$
7	$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$	f n'a pas de discontinuité infinie sur $]-\infty, +\infty[$	$I = \lim_{t\to-\infty} \int_t^c f(x)dx$ $+$ $\lim_{t\to+\infty} \int_c^t f(x)dx$

Définition : Une intégrale impropre $I = \int_a^b f(x)dx$ est dite ***convergente*** si après sa décomposition en limites d'intégrales définies standards (telles que présentée dans le tableau précédent), ***toutes les limites sont finies***. Sinon on dira que l'intégrale est ***divergente***.

Exemple 27 : $I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

Exemple 28 :$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$

Exemple 29 : Décomposer seulement sous forme de limite d'intégrales définies standards.

$I = \int_{-2}^{+\infty} \frac{x}{(x+8)(1-x)(x-4)^3 \sin x}\, dx.$

Exercices

Exercice 1

Étudier la convergence des intégrales impropres suivantes

1.$I = \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^3} \mathrm{d}x$

2.$I = \int_0^5 \frac{x+1}{x(x-5)} \mathrm{d}x$

3.$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$

4.$I = \int_{-1}^2 \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}x$

5. $I = \int_{-3}^2 \frac{1}{x^2} \mathrm{d}x$

6. $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} \mathrm{d}x$

Exercice 2

Décomposer l'intégrale suivante en somme de limites d'intégrales standards.

$I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2} \mathrm{d}x$

Exercice 3

Après un tremblement de terre, un gouffre s'est créé au bas d'une colline où se déverse l'eau d'une rivière. On a constaté que l'eau se déverse dans le gouffre à un rythme donné par la fonction $D(t) = 150000\, e^{-0,001t}$ *litres par heure sachant que le temps* t *est mesuré en heure à partir du moment où le déversement a commencé. On suppose que le gouffre est* tellement profond qu'il peut contenir toute l'eau du lac.

Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} D(t)d$ *et donnez-en une interprétation.*

Exercice 4

Considérons un module de l'espace ayant une masse de 10 tonnes sur la surface de la terre. Nous négligerons l'effet de la résistance de l'aire. Calculer le travail nécessaire pour propulser le module à une distance illimitée de la surface de la terre. On rappellera que le rayon de la terre est estimé à environ 6 371 km et on prendra comme valeur moyenne de l'accélération gravitationnelle (intensité du champs gravitationnel ou intensité de la pesanteur)
$g = 9{,}81\ N/kg$.

Solutionnaire

Exercice 1 (Réponses)

Dans toutes ces intégrales, il faudrait vérifier au préalable que les points de discontinuité sont des discontinuités infinies (singularités finies) et qu'elles appartiennent au domaine d'intégration. Je vous laisse le soin de le faire.

1. On a $I = \lim\limits_{t \to 3^+} \int_t^4 \frac{1}{(x-3)^3} \mathrm{d}x$.

On pose $z = x - 3 \Rightarrow dz = dx$

- pour $x = t$, on a $z = t - 3$;
- pour $z = 4$, on a $z = 4 - 3 = 1$.

D'où, $I = \lim\limits_{t \to 3^+} \int_{t-3}^{1} \frac{1}{z^3} \mathrm{d}x = \lim\limits_{t \to 3^+} \left[-\frac{1}{2z^2} \right]_{t-3}^{1} = -\frac{1}{2} \lim\limits_{t \to 3^+} \left(1 - \frac{1}{(t-3)^2} \right) = +\infty \cdot$

Donc l'intégrale diverge.

2. $I = \int_0^5 \frac{x+1}{x(x-5)} \mathrm{d}x = \lim\limits_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{x+1}{x(x-5)} \mathrm{d}x + \lim\limits_{u \to 5^-} \int_1^u \frac{x+1}{x(x-5)} \mathrm{d}x.$

Or, $\frac{x+1}{x(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+Bx}{x(x-5)}$, ce qui donne pour tout x :

$$x + 1 = A(x - 5) + Bx \ \cdots\cdots\cdots (*)$$

où A et B sont des constantes à déterminer.

<u>Calcul des constantes</u>

- En substituant $x = 5$ dans (*), on obtient $6 = 5B$s, et donc $B = \frac{6}{5} \cdot$
- En substituant $x = 0$ dans (*), on obtient $1 = -5A$s, et donc $A = -\frac{1}{5} \cdot$

Ainsi, $\int \frac{x+1}{x(x-5)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-5} \right) dx = A \int \frac{1}{x} dx + B \int \frac{1}{x-5} dx$

$$= A \ln|x| + B \ln|x-5| + C = -\frac{1}{5} \ln|x| + \frac{6}{5} \ln|x-5| + C$$

$$= \frac{1}{5} (-\ln|x| + 6 \ln|x-5|) + C$$

Ainsi, $\lim\limits_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{x+1}{x(x-5)} \mathrm{d}x = \lim\limits_{t \to 0^+} \frac{1}{5} [6 \ln|x-5| - \ln|x|]_t^1$

$$= \frac{1}{5} \lim_{t \to 0^+} (6 \ln 4 - 6 \ln|t-5| + \ln t) = -\infty$$

et $\lim\limits_{u \to 5^-} \int_1^u \frac{x+1}{x(x-5)} \mathrm{d}x = \lim\limits_{u \to 5^-} \frac{1}{5} [6 \ln|x-5| - \ln|x|]_1^u$

$$= \frac{1}{5} \lim_{u \to 5^-} (6 \ln|u-5| - \ln u - 6 \ln 4) = -\infty \cdot$$

D'où, l'intégrale diverge. (On aurait pu conclure que l'intégrale diverge dès que la première intégrale diverge).

3. Il y a une seule singularité, c'est la singularité ($+\infty$).

Donc on a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}[\arctan x]_0^t$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(\arctan t - \underbrace{\arctan 0}_{=0}\right) = \lim_{t\to\infty}(\arctan t) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$ (finie), et donc l'intégrale converge.

4. $I = \int_{-1}^{2} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{u\to 0^+} \int_u^2 x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x$. Or, on a :

$$\lim_{t\to 0^-} \int_{-1}^{t} x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to 0^-} 3\left[x^{\frac{1}{3}}\right]_{-1}^{t} = \lim_{t\to 0^-} 3\left(t^{\frac{1}{3}} + 1\right) = 3$$

et

$\lim\limits_{u\to 0^+} \int_u^2 x^{-\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to 0^+} 3\left[x^{\frac{1}{3}}\right]_u^2 = \lim\limits_{u\to 0^+} 3\left(\sqrt[3]{2} - u^{\frac{1}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{2}$. Donc, on obtient $I = 3\left(1+\sqrt[3]{2}\right)$. D'où, l'intégrale converge.

5. $I = \int_{-3}^{2} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to 0^-} \int_{-3}^{t} x^{-2}\,\mathrm{d}x + \lim\limits_{u\to 0^+} \int_u^2 x^{-2}\,\mathrm{d}x$. Or, on a :

$\lim\limits_{t\to 0^-} \int_{-3}^{t} x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to 0^-} -\left[\frac{1}{x}\right]_{-3}^{t} = -\lim\limits_{t\to 0^-}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{3}\right) = +\infty$ (on peut déjà conclure que l'intégrale I diverge)

et

$\lim\limits_{u\to 0^+} \int_u^2 x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{u\to 0^+} -\left[\frac{1}{x}\right]_u^2 = \lim\limits_{u\to 0^+} -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{u}\right) = +\infty$. D'où, l'intégrale I diverge.

6. Soit $I = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to+\infty} -\left[\frac{1}{\ln x}\right]_2^t = \lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t}\right) = \frac{1}{\ln 2}$

On pose On pose $z = \ln x \Rightarrow dz = \frac{1}{x}dx$

- pour $x = 2$, on a $z = \ln 2$;
- pour $z = t$, on a $z = \ln t$.

Donc on a :

$$I = \lim_{t\to+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{1}{z^2}\mathrm{d}z = \lim_{t\to+\infty} -\left[\frac{1}{z}\right]_{\ln 2}^{\ln t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln t}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Donc l'intégrale I converge.

Exercice 2 (Réponse)

$I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2} \mathrm{d}x$

Il y a trois discontinuités, à savoir : $x = -1, x = 0$ et $x = \pi$. Or, on remarque que :

- $x = -1$ n'appartient pas au domaine d'intégration $[0, +\infty[$. Donc ce n'est pas une discontinuité qui nous intéresse.
- On a :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2} = \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}\right)}_{[\mathrm{IND}: \frac{0}{0}]} \left(\underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1}{(x+1)(x-\pi)^2}}_{\pi^{-2}}\right)$$
$$= \underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}\right)}_{[\mathrm{IND}: \frac{0}{0}]} \left(\frac{1}{\pi^2}\right)$$

Or, d'après la règle de L'Hospital, on aura :
$\underbrace{\left(\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}\right)}_{[\mathrm{IND}: \frac{0}{0}]} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{1}\right) = 0$. Donc, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2} = (0)\left(\frac{1}{\pi^2}\right) = 0$ (limite finie).

On conclue que $x = 0$est une discontinuité finie. En d'autres termes, $x = 0$ n'est pas une singularité..

- On a : $\lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2} = +\infty$, donc $x = \pi$ est une discontinuité infinie, c'est-à-dire une singularité. Ainsi,

$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2}\,\mathrm{d}x + \int_\pi^{5} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2}\,\mathrm{d}x + \int_5^{+\infty} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2}\,\mathrm{d}x$
$\lim_{t\to\pi^-} \int_0^{t} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2}\mathrm{d}x + \lim_{u\to\pi^+} \int_u^{5} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{v\to+\infty} \int_5^{v} \frac{1-\cos x}{x(x+1)(x-\pi)^2}\,\mathrm{d}x.$

Exercice 3

On a

$$\int_0^{+\infty} D(t)dt = 150000 \int_0^{+\infty} e^{-0,001t}dt = 150000 \lim_{\mathrm{u}\to+\infty} [-1000\ e^{-0,001t}]_0^u$$
$$= -150000000 \lim_{\mathrm{u}\to+\infty} [\ e^{-0,001t}]_0^u = -150000000 \lim_{\mathrm{u}\to+\infty} [\ e^{-0,001u} - 1]$$

$= 150000000$ *Litres.*

L'intégrale représente la quantité totale de l'eau du lac qui se déversera dans le gouffre ou autrement la quantité d'eau que le lac en contient avant le déversement.

Donc $\int_0^{+\infty} D(t)dt = 150000000$ *litres est la quantité d'eau que le lac en contient avant le déversement.*

Exercice 4

Le module lors de son ascension est sous l'effet seulement de la force gravitationnelle de la terre (l'effet de la résistance de l'aire est négligeable par hypothèse**).** L'intensité de cette force gravitationnelle (le poids) à chaque point distant de x kilomètres du centre de la terre est donnée par la formule de Newton (le poids du module varie inversement par rapport au carré de la distance au centre de la terre): $F(x) = \frac{k}{x^2}$ (en newton : N). Déterminons la valeur de la constante de proportionnalité k, et ce en utilisant les données du problème. Ainsi à $x = 6371$ km $= 6371 \times 10^3$mètres, on a :

$F(x) = 6371g = 6371 \times 10^3 \times 9{,}81 = 62499{,}51 \times 10^3\ N.$ Donc on a :

$62499{,}51 \times 10^3 = \frac{k}{(6371\times10^3)^2} \Leftrightarrow k = 62499{,}51 \times 10^3 \times (6371 \times 10^3)^2 \cong$ $253\,6832673576 \times 10^9.$

L'augmentation du travail ΔW entre deux points est donnée comme suit :

$$\Delta W = (\text{Intensité de la force au point final})(\text{augmentation de la distance})$$
$$= \left(\frac{k}{x^2}\right)\Delta x = \frac{2\,536\,832\,673\,576 \times 10^9}{x^2}\,\Delta x.$$

Comme le module est propulsé du sol ($x = 6\,371$ km) à une distance illimitée de la surface de la terre ($x \to +\infty$), alors le travail à effectuer serait dès lors donné par :$W =$ $\int_{6\,371\times10^3}^{+\infty} \frac{2\,536\,832\,673\,576}{x^2}dx = 2\,536\,832\,673\,576 \int_{6371\times10^3}^{+\infty} x^{-2}dx$

$$= 2\,536\,832\,673\,576 \times 10^9 \lim_{t\to+\infty}\int_{6371}^{t} x^{-2}dx = -2\,536\,832\,673\,576 \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\right]_{6371}^{t}$$
$$= -2\,536\,832\,673\,576 \times 10^9 \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{6371\times10^3}\right) = \frac{2\,536\,832\,673\,576 \times 10^9}{6371\times10^3}$$
$$\cong 398\,184\,378{,}2 \times 10^6 \text{ joules}$$

Ainsi, le travail nécessaire pour propulser le module à une distance illimitée de la surface de la terre est évalué à $398\,184\,378{,}2 \times 10^6$ joules.

Chapitre 5
Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On considère un intervalle semi-ouvert $[a,b[$ et une fonction de deux variables $f(t,x)$ où $t \in [a,b[$ et $x \in I$, à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose ou bien que $b = +\infty$ ou bien que $b < +\infty$ et que pour certains $x \in I$, la fonction $t \mapsto f(t,x)$ n'est pas définie en b. On suppose que pour tout $x \in I$, la fonction $t \to f(t,x)$ est intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ au sens des intégrales généralisées et on s'intéresse aux propriétés de la fonction définie sur I par l'intégrale généralisée

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)dt.$$

On étudie la continuité et la dérivabilité de F sur I.

5.1 Théorème de convergence dominée

Dans ce chapitre, nous allons utiliser le théorème de convergence dominée qui est une conséquence du théorème de convergence borné, 5.1.1 :

5.1.1 Théorème. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables sur un intervalle semi ouvert $[a,b[$ telle que :*

1) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[a,b[$ vers une fonction localement intégrable f.

2) Il existe une fonction ψ, intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a,b], |f_n(t)| \leq \psi(t).$$

Alors f est intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$ et :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Démonstration. Remarquons d'abord que l'hypothèse *2)* implique en particulier que :

$$\forall t \in [a,b], |f(t)| \leq \psi(t).$$

Pour montrer l'intégrabilité de la fonction f sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$, on écrit, pour tout $A \in [a,b[$, :

$$\int_a^A |f(t)|\,dt \leq \int_a^A \psi(t)\,dt.$$

Puisque par hypothèse, la fonction ψ est intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$, cette inégalité implique que la fonction f est absolument intégrable donc intégrable sur $[a,b[$.

Pour calculer l'intégrale de f sur $[a,b[$, on se donne $A \in [a,b[$ et on utilise le théorème de convergence bornée, 7.1.1 sur $[a,A]$: puisque la fonction f est intégrable sur $[a,A]$ elle est bornée sur cet intervalle. Donc, on a bien, pour tout $A \in [a,b[$:

$$\int_a^A f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^A f_n(t)\,dt.$$

De plus, $\varepsilon > 0$ étant fixé, on peut choisir $A \in [a,b[$ tel que

$$\int_A^b \psi(t)\,dt \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_A^b |f_n(t)|\,dt \ \le \frac{\varepsilon}{4} \text{ et } \int_A^b |f(t)|\,dt \le \frac{\varepsilon}{4}.$$

Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour $n \ge N$:

$$\left| \int_a^A f(t)\,dt - \int_a^A f_n(t)\,dt \right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc, pour $n \ge N$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt \right| &\le \left| \int_a^A f(t)\,dt - \int_a^A f_n(t)\,dt \right| + \int_A^b |f(t)|\,dt + \int_A^b |f_n(t)|\,dt \\
&\le \left| \int_a^A f(t)\,dt - \int_a^A f_n(t)\,dt \right| + \frac{2\varepsilon}{4} \le \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ceci prouve bien que l'intégrale de f sur $[a,b[$ est égale à la limite des intégrales des f_n sur cet intervalle.

5.2 Continuité de l'intégrale généralisée

5.2.1 Théorème. *Soit $f : [a,b[\times I \to \mathbb{K}$, une fonction continue par rapport à chacune des deux variables sur $[a,b[\times I$. On suppose qu'il existe une fonction $\phi : [a,b[\to \mathbb{R}^+$, intégrable sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ telle que :*

$$\forall (t,x) \in [a,b[\times I\ ,\ |f(t,x)| \le \phi(t).$$

Alors la fonction $t \to f(t,x)$ est intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$ et la fonction F, définie pour $x \in I$ par

$$F(x) = \int_a^b f(t,x)dt,$$

est continue sur I. En particulier, on a :

$$\begin{aligned}
F(x_0) &= \int_a^b f(t,x_0)\,dt = \int_a^b \lim_{x\to x_0} f(t,x)\,dt \\
&= \lim_{x\to x_0} F(x) = \lim_{x\to x_0} \int_a^b f(t,x)\,dt,
\end{aligned}$$

ce qui est un cas d'interversion de limite et d'intégrale généralisée.

Démonstration. Remarquons d'abord que, pour tout $x \in I$, la fonction $t \to f(t,x)$ est localement intégrable sur $[a,b[$ car elle est continue par hypothèse.

Pour montrer l'intégrabilité de la fonction $t \to f(t,x)$ sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$ pour tout $x \in I$, on écrit, comme dans le théorème du convergence dominée 5.1.1, pour tout $A \in [a,b[$, :

$$\int_a^A |f(t,x)|\, dt \leq \int_a^A \phi(t)\, dt.$$

Puisque par hypothèse, la fonction ϕ est intégrable sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$, la fonction $t \to f(t,x)$ est absolument intégrable donc intégrable sur $[a,b[$.

On procède alors comme pour le théorème 4.2.1.
Soit $x_0 \in I$. On veut montrer la continuité de F en x_0 : soit $\alpha > 0$ tel que $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \subset I$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[x_0-\alpha, x_0+\alpha] \subset I$ convergeant vers x_0.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f_n(t) = f(t,x_n)$. On remarque que les fonctions f_n sont intégrables sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$.
Par continuité de la fonction $x \to f(t,x)$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f(t,x_0)$, qui elle aussi est intégrable sur $[a,b[$. De plus, cette suite de fonctions est

majorée par la fonction ϕ. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, 4.1.1 : la suite $\big(F(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $F(x_0)$.

Comme ce résultat est valable pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, on en déduit bien la continuité de F en x_0 et donc par suite sur I tout entier puisque $x_0 \in I$ est quelconque, ce qui prouve le théorème.

□

5.2.2 Exemple. *Soit*

$$f(t,x) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2},$$

définie pour $(t,x) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

La fonction f est continue par rapport à chacune des deux variables sur $[0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et

$$\forall (t,x) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[\ ,\ |f(t,x)| \leq \frac{1}{1+t^2},$$

qui est une fonction intégrable sur $[0,+\infty[$ (voir chapitre 3).
La fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt,$$

est donc continue sur $]0,+\infty[$.

Remarque. Comme pour la continuité des intégrales de Riemann dépendant d'un paramètre, en général, on ne peut pas raisonner sur l'intervalle I tout entier. On cherche des dominations sur des sous-intervalles de I et on utilise un argument de saturation pour obtenir le résultat sur I tout entier. Voir l'exemple de la fonction Gamma ci-dessous.

5.3 Dérivabilité

5.3.1 Théorème. *Soit* $f : [a,b[\times I \to \mathbb{K}$*, une fonction continue par rapport à chacune des deux variables sur* $[a,b]\times I$*. On suppose que* f *admet une dérivée partielle par rapport à*

x, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, continue par rapport à chacune des deux variables sur $[a,b]\times I$.
On suppose qu'il existe deux fonctions ϕ et ψ : $[a,b[\to \mathbb{R}^+$, intégrables sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ telles que

$$\forall (t,x)\in [a,b[\times I\ ,\ |f(t,x)|\leq \phi(t) \text{ et } \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\leq \psi(t).$$

Alors pour tout $x\in I$, les fonctions $t\to f(t,x)$ et $t\to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sont intégrables sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$ et la fonction F, définie pour $x\in I$ par

$$F(x)=\int_a^b f(t,x)dt,$$

est dérivable sur I et

$$F'(x)=\left(\int_a^b f(t,x)\,dt\right)'=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,dt.$$

ce qui est un cas d'interversion de dérivée et d'intégrale généralisée.

Démonstration. Remarquons d'abord que, pour tout $x\in I$, les fonctions $t\to f(t,x)$ et $t\to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sont localement intégrables sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$ car elles sont continues par hypothèse.

Pour montrer l'intégrabilité des fonctions $t\to f(t,x)$ et $t\to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$ pour tout $x\in I$, on écrit, comme dans le théorème du convergence dominée 5.1.1, pour tout $A\in [a,b[$, :

$$\int_a^A |f(t,x)|\,dt\leq \int_a^A \phi(t)\,dt \text{ et } \int_a^A \left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right|\,dt\leq \int_a^A \psi(t)\,dt.$$

Puisque par hypothèse, les fonctions ϕ et ψ sont intégrables sur l'intervalle semi ouvert $[a,b[$, les fonctions $t\to f(t,x)$ et $t\to \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ sont absolument intégrables donc intégrables sur $[a,b[$.

On procède alors comme pour le théorème 4.3.1. On fixe $\alpha>0$ tel que $[x_0-\alpha\ ,x_0+\alpha\ ]\subset I$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[x_0-\alpha\ ,x_0+\alpha\ ]\subset I$ convergeant vers x_0. On peut supposer que $x_n\neq x_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
Pour démontrer la dérivabilité de la fonction F en x_0, on écrit, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0}=\int_a^b \left(\frac{f(t,x_n)-f(t,x_0)}{x_n-x_0}\right)\,dt.$$

On définit la suite de fonction $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $t\in [a,b]$ par :

$$h_n(t)=\frac{f(t,x_n)-f(t,x_0)}{x_n-x_0}$$

Puisque la fonction f est dérivable par rapport à la variable x en x_0, cette suite converge simplement vers la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)$, qui bien est intégrable par rapport à la variable t.

De plus, par le théorème des accroissements finis, il existe $y_n \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ tel que $h_n(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, y_n)$. Donc, les fonctions h_n sont donc dominées par la fonction ψ sur $[a,b]$.
En appliquant le théorème de convergence dominée, 5.1.1, on en déduit que la suite

$$\left(\frac{F(x_n)-F(x_0)}{x_n-x_0}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

converge vers $\displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\,dt$ quand $n\to\infty$.
Comme ceci est valable pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, on en déduit que

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\right) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(t,x_0)\,dt,$$

ce qui prouve la dérivabilité de F en x_0 et l'égalité

$$F'(x_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\big(t,x_0\big)\;dt\,.$$

Puisque $x_0 \in I$ est quelconque, ceci montre bien la dérivabilité de F sur I.

Remarque. Pour la dérivation sous le signe somme, on a la même remarque que pour la continuité : en général, on ne peut pas raisonner sur l'intervalle I tout entier. On cherche des dominations sur des sous-intervalles de I et on utilise un argument de saturation pour obtenir le résultat sur I tout entier. Voir l'exemple de la fonction Gamma ci-dessous.

5.3.2 Exemple. La fonction Γ.
Pour $x\in]0,+\infty[$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt.$$

Définition :
Comme il y a deux problèmes d'intégration, en 0 et en $+\infty$, on sépare cette intégrale généralisée en deux intégrales généralisées :

$$\Gamma_1(x) = \int_0^1 e^{-t}t^{x-1}dt\,, \qquad \Gamma_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt\,.$$

On a bien sûr,

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2\,.$$

La fonction à intégrer $f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}$ est positive. On peut donc pour $x > 0$ fixé, appliquer le théorème :

-Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. Quand $t \to 0$, $f(t,x)$ est équivalente à t^{x-1} qui est intégrable en 0 d'après la proposition . Donc $\Gamma_1(x)$ est bien définie pour $x \in]0,+\infty[$.

-Soit $x \in]0,+\infty[$ fixé. Quand $t \to +\infty$, on a

$$\lim_{t\to+\infty} e^{t/2} f(t,x) = \lim_{t\to+\infty} e^{-t/2}t^{x-1} = 0.$$

Donc $f(t,x)$ est dominée au voisinage de $+\infty$ par $e^{-t/2}$ qui est intégrable en $+\infty$. Donc $\Gamma_2(x)$ est également bien définie pour $x \in]0,+\infty[$.

On vérifie sans difficulté que $\Gamma(1) = 1$ et que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. On en déduit en particulier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$. La fonction Γ apparaît donc comme une extension à $\mathbb{R}^+$ de la fonction “factorielle”.

Continuité : La fonction $f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.

Soit $\alpha > 0$. On a :

$$\forall x \in [\alpha,+\infty[\ ,\ \forall t \in]0,1], \left|e^{-t}t^{x-1}\right| \leq e^{-t}t^{\alpha-1}.$$

La fonction $\psi_1(t) = e^{-t}t^{\alpha-1}$ est intégrable en 0. D'après le théorème .2.1, la fonction $\Gamma_1(x)$ est continue sur $[\alpha,+\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $\alpha > 0$, on en déduit que $\Gamma_1(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit $\beta > 0$. On a de la même façon :

$$\forall x \in]0,\beta]\ ,\ \forall t \in [1,+\infty[, \left|e^{-t}t^{x-1}\right| \leq e^{-t}t^{\beta-1}.$$

La fonction $\psi_2(t) = e^{-t}t^{\beta-1}$ est intégrable en $+\infty$. De nouveau, d'après le théorème .2.1, la fonction $\Gamma_2(x)$ est continue sur $]0,\beta]$. Ceci étant vrai pour tout $\beta > 0$, on en déduit que $\Gamma_2(x)$ est continue sur $]0,+\infty[$.

La fonction Γ est donc continue sur $]0,+\infty[$.

Dérivabilité : La fonction $f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}$ admet une dérivée partielle par rapport à x qui est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. En effet, pour tout $(t,x) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = e^{-t}t^{x-1}\ln t.$$

Soit $\alpha,\beta>0$. Comme pour la continuité, on écrit :

$$\forall x\in[\alpha,+\infty[\ ,\ \forall t\in]0,1],\left|e^{-t}t^{x-1}\ln t\right|\leq e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t,$$

$$\forall x\in]0,\beta]\ ,\ \forall t\in[1,+\infty[,\left|e^{-t}t^{x-1}\ln t\right|\leq e^{-t}t^{\beta-1}\ln t.$$

La fonction $e^{-t}t^{\alpha-1}\ln t$ est intégrable en 0 et la fonction $e^{-t}t^{\beta-1}\ln t$ est intégrable en $+\infty$. On en déduit par le théorème 5.3.1 que les fonctions Γ_1 et Γ_2 sont dérivables respective-ment sur $[\alpha,+\infty[$ et $]0,\beta]$. Comme c'est vrai pour tous $\alpha,\beta>0$, ces deux fonctions sont dérivables sur $]0,+\infty[$. Il en est de même pour Γ et on a :

$$\forall x\in]0,+\infty[,\Gamma'(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{x-1}\ln t\,dt.$$

Remarque. L'hypothèse de domination de la fonction $f(t,x)$ ou de la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ par une fonction intégrable ψ sur l'intervalle semi-ouvert $[a,b[$ dans les deux théorèmes 5.2.1 et 5.3.1 est très forte. On peut envisager une hypothèse moins forte, la convergence uniforme :

5.3.3 Définition. *On dit que l'intégrale généralisée dépendant d'un paramètre*

$$F(x)=\int_a^b f(t,x)\,dt,$$

est uniformément convergente sur I si :

$$\forall\varepsilon>0\ ,\ \exists c\in[a,b[\text{ tel que }\forall x\in I\ ,\ \left|\int_c^b f(t,x)\,dt\right|\leq\varepsilon.$$

On peut montrer que la conclusion des théorèmes 5.2.1 et 5.3.1 reste valide si on remplace l'hypothèse de domination (sur f ou sur $\frac{\partial f}{\partial x}$) par cette hypothèse de convergence uniforme.

5.4 Application : transformée de Laplace

5.4.1 Définition. *On pose :*

$$\mathcal{E}=\{f\in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{K})\mid\exists M_f>0,\exists r_f>0,\forall t\in\mathbb{R}^+,|f(t)|\leq M_f e^{r_f t}\}.$$

et pour $f\in\mathcal{E}$, on définit la transformée de Laplace de f, quand elle existe, par :

$$\mathcal{L}(f)(x)=\int_0^{+\infty}f(t)e^{-xt}dt.$$

5.4.2 Proposition. *1) Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors, pour tout $x > r_f$, $\mathcal{L}(f)(x)$ est bien définie.*
2) L'application $\mathcal{L}$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ dans l'espace des fonctions de classe C^∞
3) Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}$, $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers 0 ainsi que toutes ses dérivées lorsque x tend vers $+\infty$.

Démonstration. : *1)* Pour $f \in \mathcal{E}$, la transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)(x)$ est définie par une intégrale généralisée sur $[0,+\infty[$. Pour tout $x > r_f$, on peut écrire :

$$\left|f(t)e^{-xt}\right| \leq M_f e^{(r_f-x)t}.$$

La fonction $e^{(r_f-x)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc $t \to f(t)e^{-xt}$ est absolument intégrable sur $[0,+\infty[$ pour tout $x > r_f$ et $\mathcal{L}(f)(x)$ est bien définie pour ces valeurs de x.
2) Il est facile de voir que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{K})$ et que $\mathcal{L}$ est linéaire.
Montrons que pour $f \in \mathcal{E}$, $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ :
La fonction $(t,x) \to e^{-xt}f(t)$ est continue sur $[0,+\infty[\times]r_f,+\infty[$, dérivable par rapport à x avec $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{-xt}f(t)\right) = -te^{-xt}f(t)$ qui est continue sur $[0,+\infty[\times]r_f,+\infty[$
De plus, soit $a > r_f$. On peut écrire, pour $t \in [0,+\infty[$ et $x \in [a,+\infty[$:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-xt}f(t)\right)\right| = \left|-te^{-xt}f(t)\right| \leq M_f t e^{(r_f-a)t}.$$

La fonction $t \to te^{(r_f-a)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème 5.3.1 : pour tout $x \in [a,+\infty[$, on a

$$\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} e^{-xt}f(t)dt = -\int_0^{+\infty} te^{-xt}f(t)dt.$$

Comme $a > r_f$ est quelconque, cette égalité est vérifiée sur $]r_f,+\infty[$.
Le même argument appliqué à la fonction $te^{-xt}f(t)$ permet d'itérer le raisonnement. Le résultat à l'ordre n est alors immédiat et on obtient bien que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞.
3) Pour $x > r_f$, la majoration :

implique que $$\left|e^{-xt}f(t)\right| \leq M_f e^{(r_f-x)t},$$

$$\left|\mathcal{L}(f)(x)\right| \leq \int_0^{+\infty}\left|e^{-xt}f(t)\right|dt \leq M_f\int_0^{+\infty} e^{(r_f-x)t}dt = \frac{M_f}{x-r_f}.$$

Donc $\left|\mathcal{L}(f)(x)\right|$ tend bien vers 0 quand $x \to +\infty$.
Pour la dérivée, un calcul analogue donne, pour $x > r_f$:

$$\left|-te^{-xt}f(t)\right| \leq M_f t e^{(r_f-x)t},$$

d'où :

$$\left|\frac{d}{dx}\mathcal{L}(f)(x)\right| \leq \int_0^{+\infty}\left|te^{-xt}f(t)\right|dt \leq M_f\int_0^{+\infty} te^{(r_f-x)t}dt.$$

Or par une intégration par parties, on a, pour tout $X > 0$:

$$\int_0^X te^{(r_f-x)t}dt = \left[\frac{te^{(r_f-x)t}}{r_f-x}\right]_0^X - \frac{1}{r_f-x}\int_0^X e^{(r_f-x)t}dt.$$

Le terme tout intégré tend vers 0 quand $X \to +\infty$ et le second terme tend vers $\frac{1}{(x-r_f)^2}$ donc,

$$\int_0^{+\infty} te^{(r_f-x)t}dt = \frac{1}{(x-r_f)^2}.$$

On en déduit que

$$\left|\frac{d}{dx}\mathcal{L}(f)(x)\right| \leq \frac{M_f}{(x-r_f)^2},$$

donc la dérivée de $\mathcal{L}(f)$ tend bien vers 0 à l'infini.
Cet argument s'applique aussi à toutes les dérivées de cette fonction.

5.4.3 Proposition. *Soit $f \in \mathcal{E}$. Alors, si $x > r_f + a$,*

$$\mathcal{L}\left(e^{at}f(t)\right)(x) = \mathcal{L}(f)(x-a).$$

Démonstration. : Si $x > r_f + a$, par l'argument précédent, les deux intégrales :

$$\int_0^{+\infty} e^{at}f(t)e^{-xt}\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f(t)e^{(a-x)t}\,dt$$

existent et sont évidemment égales.

5.4.4 Proposition. *Pour $x > \lambda$, pour tout $n \geq 1$*

$$\mathcal{L}\left(t^n e^{\lambda t}\right)(x) = \frac{n!}{(x-\lambda)^{n+1}}.$$

Démonstration. : Soit $x > \lambda$. Pour tout $X > 0$, par intégration par parties, on a :

$$\int_0^X t^n e^{(\lambda-x)t}dt = \left[\frac{t^n e^{(\lambda-x)t}}{\lambda-x}\right]_0^X - n\int_0^X \frac{t^{n-1}e^{(\lambda-x)t}}{\lambda-x}dt.$$

Quand $X \to +\infty$, le terme tout intégré tend vers 0. Donc on obtient l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{(\lambda-x)t}dt = \frac{-n}{\lambda-x}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{(\lambda-x)t}dt.$$

On itère ce calcul n fois et on trouve :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^n e^{(\lambda-x)t}\,dt &= \frac{-n}{\lambda-x}\int_0^{+\infty} t^{n-1}e^{(\lambda-x)t}\,dt = \cdots \\ &= (-1)^n\frac{n!}{(\lambda-x)^n}\int_0^{+\infty} e^{(\lambda-x)t}dt = \frac{n!}{(x-\lambda)^{n+1}}.\end{aligned}$$

5.4.5 Proposition. *Soit $f \in \mathcal{E}$. Pour $x > r_f$, pour tout $n \geq 1$,*

$$\mathcal{L}\left(t^n f(t)\right)(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(\mathcal{L}(f)(x)\right).$$

Démonstration. On procède par récurrence sur n.
Vérifions cette propriété à l'ordre 1 :
D'après la proposition 5.4.2, on a :

$$\frac{d}{dx}\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt = -\int_0^{+\infty} te^{-xt} f(t)dt.$$

D'où

$$\mathcal{L}\left(t f(t)\right)(x) = -\frac{d}{dx}\left(\mathcal{L}(f)(x)\right).$$

Le même calcul appliqué à la fonction $te^{-xt} f(t)$ permet d'itérer le raisonnement. Le résultat à l'ordre n est alors immédiat.

5.4.6 Proposition. *1) Si f et $f' \in \mathcal{E}$, alors, pour $x > r_f, r_{f'}$:*

$$\mathcal{L}\left(f'\right)(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

2) Si f, f', $\ldots$, $f^{(n)} \in \mathcal{E}$, alors, pour $x > r_f, r_{f'}, \ldots, r_{f^{(n)}}$

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}\right)(x) = x^n\mathcal{L}(f)(x) - x^{n-1}f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0).$$

Démonstration. La deuxième propriété se démontre par une récurrence immédiate à partir de la première.
Montrons *1)* : Soit $X > 0$. Par intégration par parties, on trouve, pour tout $x > r_f, r_{f'}$:

$$\int_0^X f'(t)e^{-xt}dt = \left[f(t)e^{-xt}\right]_0^X + x\int_0^X f(t)e^{-xt}dt.$$

Quand $X \to +\infty$, le terme tout intégré tend vers $-f(0)$ et on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f'(t)e^{-xt}dt = -f(0) + x\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt,$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{L}\left(f'\right)(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

Les propriétés que nous venons de démontrer permettent de résoudre des systèmes différentiels linéaires à coefficients constants et des équations différentielles linéaires à coefficients constants, par la méthode de la transformée de Laplace, si l'on admet le résultat suivant :

5.4.7 Théorème. *La transformée de Laplace $\mathcal{L}$ est une application injective sur $\mathcal{E}$.*

5.4.8 Exemple. *On considère l'équation différentielle :*

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^t, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

On sait que cette équation admet une solution unique sur $\mathbb{R}$. On cherche cette solution dans $\mathcal{E}$. On transforme cette équation par $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}\left(y''(t)\right) - 3\mathcal{L}\left(y'(t)\right) + 2\mathcal{L}\big(y(t)\big) = \mathcal{L}\left(e^t\right).$$

En utilisant les propositions 8.4.2 et 8.4.6, on écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(y''(t)\right)(x) &= x^2\mathcal{L}\big(y(t)\big)(x) - xy(0) - y'(0) = x^2\mathcal{L}\big(y(t)\big)(x) - x \\ \mathcal{L}\left(y'(t)\right)(x) &= x\mathcal{L}\big(y(t)\big)(x) - y(0) = x\mathcal{L}\big(y(t)\big)(x) - 1 \\ \mathcal{L}\left(e^t\right)(x) &= \frac{1}{x-1}. \end{aligned}$$

La fonction $\mathcal{L}\big(y(t)\big)$ vérifie donc :

$$(x^2 - 3x + 2)\mathcal{L}\big(y(t)\big)(x) - x + 3 = \frac{1}{x-1}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\big(y(t)\big)(x) &= \frac{x^2 - 4x + 4}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{x-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)} \\ &= -\mathcal{L}\left(te^t\right)(x) + \mathcal{L}\left(e^t\right)(x) = \mathcal{L}\left((1-t)e^t\right)(x). \end{aligned}$$

Par l'injectivité de $\mathcal{L}$ (théorème 5.4.7), on obtient donc :

$$y(t) = (1-t)e^t.$$

Par suite, cette fonction est l'unique solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

5.4.9 Exemple. *On considère le système différentiel :*

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = 2x(t) + 2y(t) + e^t, \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = x(t) + 3y(t) - te^t, \end{cases}$$

avec les conditions initiales $x(0) = 1, y(0) = 4$.

Comme dans l'exemple précédent, on sait que ce système admet une solution unique. On cherche cette solution dans $\mathcal{E}$ et on transforme ce système par $\mathcal{L}$. On obtient :

$$\begin{cases} u\mathcal{L}\left(x(t)\right)(u) - 1 = 2\mathcal{L}\left(x(t)\right)(u) + 2\mathcal{L}\left(y(t)\right)(u) + \dfrac{1}{u-1}, \\ u\mathcal{L}\left(y(t)\right)(u) - 4 = \mathcal{L}\left(x(t)\right)(u) + 3\mathcal{L}\left(y(t)\right)(u) - \dfrac{1}{(u-1)^2}, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} (u-2)\mathcal{L}\left(x(t)\right)(u) - 2\mathcal{L}\left(y(t)\right)(u) = \dfrac{u}{u-1}, \\ \mathcal{L}\left(x(t)\right)(u) + (u-3)\mathcal{L}\left(y(t)\right)(u) = \dfrac{(2u-3)(2u-1)}{(u-1)^2}. \end{cases}$$

Ce système admet pour solution :

$$\begin{cases} \mathcal{L}\left(x(t)\right)(u) = \dfrac{u^3 - 12u^2 + 19u - 6}{(u-1)^3(u-4)}, \\ \mathcal{L}\left(y(t)\right)(u) = \dfrac{4u^3 - 15u^2 + 18u - 6}{(u-1)^3(u-4)}. \end{cases}$$

On décompose ces fractions rationnelles en éléments simples et on utilise la proposition 5.4.4 pour inverser la transformée de Laplace grâce au théorème 5.4.7.

Remarque. Cette méthode ne s'applique que si l'on connaît la transformée de Laplace du deuxième membre de l'équation différentielle ou du système différentiel.

5.5 Exercices sur le chapitre 5

5.1 Exercice. On étudie ici l'intégrale généralisée dépendant d'un paramètre $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)\,dt,$$

avec

$$f(t,x) = \frac{\cos(tx)}{1+t^2}.$$

1) a) Montrer que cette intégrale existe pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que F est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.
b) Montrer que F est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $F(x)$ est paire et calculer $F(0)$.

3) Montrer que pour $x > 0$, on a

$$F(x) = xG(x),$$

où $G(x)$ est donnée par

$$G(x) = \int_0^{\infty} \frac{\cos u}{u^2 + x^2}\,du.$$

4) Montrer que $G(x)$ est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer $G'(x)$ et $G''(x)$ sous la forme d'intégrales généralisées dépendant du paramètre $x \in]0,+\infty[$.

5) En déduire que F est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et que sa dérivée seconde est donnée par

$$F''(x) = x\int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 6u^2}{(u^2+x^2)^3}\cos u\,du.$$

6) a) Montrer que pour $(u,x) \neq (0,0)$, les fonctions

$$h(u,x) = \frac{2x^2 - 6u^2}{(u^2+x^2)^3} \text{ et } k(u,x) = \frac{-1}{u^2+x^2},$$

vérifient

$$h(u,x) = \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(u,x).$$

b) En déduire que F vérifie sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle $F'' = F$.

[On pourra faire des intégrations par parties en les justifiant, à partir de l'expression : $F''(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(x,u)\cos u\, du$.]

c) En déduire que F est de la forme

$$F(x) = ae^x + be^{-x}\ ,\ a,b \in \mathbb{R},$$

pour $x \in]0,+\infty[$.

7) Calculer les valeurs de a et b à l'aide des informations obtenues sur F en **1)** et **2)** et en déduire une expression simple de F valable pour tout $x \in \mathbb{R}$.

5.2 Exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x > 0$, on pose :

$$h_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+x^4)^n}.$$

1) Montrer que h_n est bien définie sur $\mathbb{R}_*^+$.

2) Montrer que h_n est continue sur $\mathbb{R}_*^+$.

3) Montrer que h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et que sa dérivée vérifie :

$$h_n'(x) = -4nx^3 h_{n+1}(x).$$

4)a) Calculer $h_1(x)$.

4)b) Montrer par récurrence que h_n est de la forme $h_n(x) = a_n x^{2-4n}$ où $a_n \in \mathbb{R}$ vérifie une relation de récurrence que l'on précisera.

4)c) En déduire $h_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

5.3 Exercice. Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $0 \leq f(t) < 1$ pour tout $t \in]0,1]$. On note $g(x) = \sup_{t\in[x,1]} f(t)$, pour $x \leq 1$.

1) Pour quelles valeurs réelles de α l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}dt}{t^\alpha}$ existe-t-elle ? On note $\Gamma(1-\alpha)$ la valeur de cette intégrale généralisée si elle existe.

2) Montrer que si $x \in]0,1]$, alors $g(x) < 1$.

3) Montrer que $f'(0) \leq 0$.

Désormais, on fixe un réel $\alpha \in]0,1[$; on suppose que $f'(0) \neq 0$ et on note $f'(0) = -\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

4) Montrer que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(t) - e^{-\mu t}}{t} = \mu - \lambda.$$

[Pour la suite, on rappelle que toute suite de réels admet une limite supérieure et une limite inférieure (éventuellement infinies) et que la suite converge si et seulement si la limite supérieure et la limite inférieure sont finies et égales]

5)a) Soit $\mu > \lambda$. Montrer à l'aide de 4) qu'il existe $x_\mu \in]0,1]$ tel que $f(t) \geq e^{-\mu t}$ pour tout $t \in [0,x_\mu]$.

5)b) En déduire que pour $\mu > \lambda$,

$$\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \geq (n\mu)^{\alpha-1}\int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t}\frac{dt}{t^\alpha}.$$

5)c) En déduire que pour $\mu > \lambda$,

$$\liminf_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}.$$

puis que

$$\liminf_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}.$$

6)a) On suppose maintenant que $0<\mu<\lambda$. Montrer à l'aide de 4) qu'il existe $x_\mu \in]0,1]$ tel que $f(t) \leq e^{-\mu t}$ pour tout $t\in[0,x_\mu]$.

6)b) En déduire que pour $0<\mu<\lambda$,

$$\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \leq (n\mu)^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)+\frac{r^n}{(x_\mu)^\alpha}(1-x_\mu),$$

où $r := g(x_\mu)$.

6)c) En déduire (en utilisant 2)) que pour $0<\mu<\lambda$,

$$\limsup_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}.$$

puis que

$$\limsup_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}.$$

7) Déduire des questions 5) et 6) que

$$\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}n^{1-\alpha}}, \qquad n\to+\infty.$$

5.4 Exercice. 1) Soit $z\in\mathbb{C}$, tel que $\Re e\, z>0$. Montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,dt,$$

existe et donner sa valeur.

2) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Déduire de 1) que l'intégrale généralisée

$$G(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}\sin t\,dt,$$

existe et montrer que

$$G(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

3) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que l'intégrale généralisée

$$F(x)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt,$$

existe.

4) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $F'(x)=-G(x)$.

5) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|F(x)| \leq \dfrac{1}{x}$, puis en utilisant 2) et 4), en déduire $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
6) Montrer que l'intégrale généralisée

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt,$$

est semi-convergente.
7) Le théorème de continuité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre permet-il de conclure que $I = \lim_{x\to 0} F(x)$?

5.6 Corrigé des exercices sur le Chapitre 5

Corrigé de l'exercice 5.1
1) On remarque que

$$|f(t,x)| \leq h(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Ceci nous montre tout d'abord que $F(x)$ est bien définie puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\, dt$ est convergente (théorème de comparaison). D'autre part puisque $f(t,x)$ est continue, et uniformément dominée par la fonction $h(t)$, on peut appliquer le théorème de continuité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre. La fonction $F(x)$ est donc continue sur $\mathbb{R}$. De plus $F(x)$ est bornée par $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$.
2) Il est immediat que $F(x) = F(-x)$ puisque $\cos(tx) = \cos(-tx)$. D'autre part,

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{T\to+\infty} \operatorname{arctg}(T) - \operatorname{arctg}(0) = \pi/2.$$

3) En utilisant le changement de variable $u = xt$, on obtient

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{1+(u/x)^2} \frac{du}{x} = x \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{x^2+u^2}\, du = xG(x).$$

4) On calcule tout d'abord

$$\frac{\partial g}{\partial x}(u,x) = \frac{-2x\cos u}{(x^2+u^2)^2}.$$

C'est une fonction continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Soit $a > 0$ donné. Pour $x \geq a$, on a

$$|\frac{\partial g}{\partial x}(x,u)| \leq \frac{2x}{(x^2+u^2)^2} \leq \frac{2x}{x^2(x^2+u^2)} = \frac{2}{x(x^2+u^2)} \leq \frac{2}{a(a^2+u^2)}.$$

Puisque $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2}{a(a^2+u^2)}\, du$ converge, on peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre qui nous montre que G est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(u,x)\, du = \int_0^{+\infty} \frac{-2x\cos u}{(x^2+u^2)^2}\, du.$$

De même, on calcule

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,x) = \frac{8x^2\cos u}{(x^2+u^2)^3} - \frac{2\cos u}{(x^2+u^2)^2} = \frac{(6x^2-2u^2)\cos u}{(x^2+u^2)^3}.$$

C'est une fonction continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$.
Pour $x \geq a$, on a

$$|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,x)| \leq \frac{|6x^2-2u^2|}{(x^2+u^2)^3} \leq \frac{6(x^2+u^2)}{(x^2+u^2)^3} \leq \frac{6}{(a^2+u^2)^2}.$$

Puisque $\int_0^{+\infty} \frac{6}{(a^2+u^2)^2}\,du$ converge, ceci nous permet d'appliquer le théorème de dérivation des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre qui nous montre que G' est C^1 sur $[a,+\infty[$, c'est-à-dire que G est de classe C^2 et que sa dérivée G'' est donnée par

$$G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u,x)\,du = \int_0^{+\infty} \frac{(6x^2-2u^2)\cos u}{(x^2+u^2)^3}\,du.$$

5) Puisque $F(x) = xG(x)$, F est aussi deux fois dérivable sur $[a,+\infty[$ pour tout $a>0$ et par conséquent sur $]0,+\infty[$. Sa dérivée est donnée par $F'(x) = xG'(x)+G(x)$, et sa dérivée seconde par

$$\begin{aligned} F''(x) = xG''(x)+2G'(x) \quad &= \int_0^{+\infty} \frac{x(6x^2-2u^2)\cos u}{(x^2+u^2)^3} - \frac{4x\cos u}{(x^2+u^2)^2}du \\ &= x\int_0^{+\infty} \frac{(2x^2-6u^2)\cos u}{(x^2+u^2)^3}\,du. \end{aligned}$$

6) Pour $(u,x) \neq (0,0)$ on peut calculer les dérivées partielles de $k(u,x)$ et on trouve

$$\frac{\partial k}{\partial u}(u,x) = \frac{2u}{(x^2+u^2)^2},$$

et

$$\frac{\partial^2 k}{\partial u^2}(u,x) = \frac{2}{(x^2+u^2)^2} - \frac{8u^2}{(x^2+u^2)^3} = \frac{2x^2-6u^2}{(x^2+u^2)^3} = h(u,x).$$

Ceci montre que

$$F''(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 k}{\partial u^2}k(u,x)\cos u\,du.$$

On effectue deux intégrations par partie successives sur un intervalle $[A,B]$ où $B>A>0$. On remarque que les termes tout intégrés tendent vers 0 lorsque $A\to 0$ et $B\to+\infty$, et on trouve donc :

$$F''(x) = x\int_0^{+\infty} \frac{\partial k}{\partial u}(u,x)\sin u\,du = -x\int_0^{+\infty} k(u,x)\sin u\,du = F(x).$$

Toute solution de cette équation sur un intervalle est une combinaison linéaire des solutions élémentaires e^x et e^{-x} d'où la forme de F.

7) Puisque $F(x)$ est bornée quand $x\to+\infty$, on a nécessairement $a=0$ (sinon $F(x)$ tendrait vers $+\infty$ ou $-\infty$). Comme F est continue en 0, on a $b=F(0)=\frac{\pi}{2}$, soit $F(x)=\frac{\pi}{2}e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$. Par parité, on a donc

$$F(x) = \frac{\pi}{2}e^{-|x|}.$$

Corrigé de l'exercice 5.2

1) La fonction positive $\dfrac{1}{(t^2+x^4)^n}$ est définie et continue sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}_*^+$. Elle est donc intégrable sur tout intervalle $[0,A]\subset[0,+\infty[$. Pour $t\to+\infty$, on a $0\leq\dfrac{1}{(t^2+x^4)^n}\leq\dfrac{1}{t^{2n}}$ qui est intégrable en $+\infty$. On en déduit que cette fonction est intégrable sur $[0,+\infty[$.
2) Soit $a>0$. Pour $t\in[0,+\infty[$ et $x\in[a,+\infty[$, on peut écrire :

$$0\leq\frac{1}{(t^2+x^4)^n}\leq\frac{1}{(t^2+a^4)^n}.$$

La fonction $t\to\dfrac{1}{(t^2+a^4)^n}$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ et donc h_n est continue sur l'intervalle $[a,+\infty[$.
Comme ceci est vrai pour tout $a>0$, on en déduit que h_n est continue sur $]0,+\infty[$.
3) Soit $0<a<A$. Pour $t\in[0,+\infty[$ et $x\in[a,A]$, on peut écrire :

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{(t^2+x^4)^n}\right|=\left|\frac{-2nx^3}{(t^2+x^4)^{n+1}}\right|\leq\frac{2nA^3}{(t^2+a^4)^{n+1}}.$$

La fonction $t\to\dfrac{2nA^3}{(t^2+a^4)^{n+1}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc h_n est dérivable sur $[a,A]$ et sa dérivée vérifie bien :

$$h_n'(x)=-4nx^3h_{n+1}(x).$$

Comme ceci est vérifié pour tout $0<a<A$, on en déduit que h_n est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et que cette relation est également vérifiée pour tout $x\in\mathbb{R}_*^+$.
4)a) $h_1(x)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{1}{(t^2+x^4)}\,dt=\left[x^2\arctan\frac{t}{x^2}\right]_0^\infty=\frac{\pi}{2x^2}.$
4)b) Si $n=1$, on a bien $h_1(x)=a_1x^{-2}$, avec $a_1=\dfrac{\pi}{2}$.
Supposons que h_n est de la forme $h_n(x)=a_nx^{2-4n}$ et calculons h_{n+1}, pour $x>0$, par la relation trouvée en 3) :

$$h_{n+1}(x)=-\frac{1}{4nx^3}h_n'(x)=-\frac{1}{4nx^3}(2-4n)a_nx^{2-4n-1}=a_n\frac{4n-2}{4n}x^{2-4(n+1)}.$$

L'hypothèse de récurrence est bien vérifiée au rang $n+1$ et $a_n\in\mathbb{R}$ vérifie la relation de récurrence $a_1=\dfrac{\pi}{2}$, $a_{n+1}=a_n\dfrac{2n-1}{2n}$.
4)c) On en déduit que $h_n(x)=\dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n-3)(2n-5)\dots1}{(2n-2)(2n-4)\dots2}x^{2-4n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

Corrigé de l'exercice 5.3

1) En appliquant le résultat du cours sur la fonction Γ, on voit aisément que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-t}dt}{t^\alpha}$ existe si et seulement si $\alpha<1$.
2) Il est clair que $g(x)\leq1$ pour tout $x\in]0,1]$. Supposons qu'il existe $a\in]0,1]$, tel que $g(a)=\sup_{t\in[a,1]}f(t)=1$. Alors, puisque la fonction f est continue, elle atteint sa borne

supérieure et donc il existe $b \in [a,1]$ tel que $f(b) = 1$. Ceci contredit l'hypothèse sur f et on a donc bien $g(x) < 1$ pour tout $x \in]0,1]$.

3) Supposons que $f'(0) > 0$ et soit $0 < \varepsilon < f'(0)$. La formule des accroissement finis nous dit qu'il existe $\alpha > 0$ tel que si $0 \leq t \leq \alpha$, alors $|f(t) - f(0) - tf'(0)| \leq t\varepsilon$.

On en déduit que, si $0 \leq t \leq \alpha$, $f(t) \geq 1 + t\,(f'(0) - \varepsilon) > 1$. Ceci contredit l'hypothèse et donc on a bien $f'(0) \leq 0$.

4) On applique la formule des accroissements finis aux 2 fonctions f et $e^{-\mu t}$: il existe deux fonctions ε_1 et ε_2, tendant vers 0 lorsque $t \to 0$ telles que

$$f(t) = 1 - \lambda t + t\varepsilon_1(t)\,, \quad e^{\mu t} = 1 - \mu t + t\varepsilon_2(t)\,.$$

On en déduit que

$$\frac{f(t) - e^{-\mu t}}{t} = \mu - \lambda + \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t).$$

D'où :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t) - e^{-\mu t}}{t} = \mu - \lambda.$$

5)a) Soit $\mu > \lambda$. Supposons que pour tout $x \in]0,1]$, il existe $t \in [0,x]$ tel que $f(t) < e^{-\mu t}$ et soit $0 < \varepsilon < \mu - \lambda$. Alors, d'après 4), il existe α tel que pour tout $s \in [0,\alpha]$,

$$\left| f(s) - e^{-\mu s} - (\mu - \lambda)s \right| \leq \varepsilon s.$$

Ceci implique en particuliers que pour tout $s \in [0,\alpha]$, $f(s) > e^{-\mu s}$.

Ceci contredit l'hypothèse que nous avons faite et donc on a bien l'existence de $x_\mu \in]0,1]$ tel que pour tout $t \in [0,x_\mu]$, $f(t) \geq e^{-\mu t}$.

5)b) Pour $\mu > \lambda$, on peut écrire

$$\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_0^{x_\mu} f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \geq \int_0^{x_\mu} e^{-n\mu t}\frac{dt}{t^\alpha} \geq (n\mu)^{\alpha-1}\int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t}\frac{dt}{t^\alpha}.$$

en ayant effectué le changement de variable $s = n\mu t$.

5)c) Lorsque $n \to \infty$, la suite $\left(\mu^{\alpha-1}\displaystyle\int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t}\frac{dt}{t^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $\dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}$. Donc toute valeur d'adhérence de la suite $\left(n^{1-\alpha}\displaystyle\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est supérieure à cette limite. En particulier, on en déduit bien que pour $\mu > \lambda$,

$$\liminf_{n \to +\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\mu > \lambda$, on a aussi :

$$\liminf_{n \to +\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}.$$

6)a) Soit $0 < \mu < \lambda$.

Supposons que pour tout $x \in]0,1]$ il existe $t \in [0,x]$ tel que $f(t) > e^{-\mu t}$. Soit $0 < \varepsilon < \lambda - \mu$. Alors, d'après 4), il existe α tel que pour tout $s \in [0,\alpha]$,

$$\left| f(s) - e^{-\mu s} - (\mu - \lambda)s \right| \leq \varepsilon s.$$

Ceci implique en particulier que pour tout $s \in [0,\alpha]$, $f(s) < e^{-\mu s}$.
Ceci contredit l'hypothèse que nous avons faite et donc on a bien l'existence de $x_\mu \in]0,1]$ tel que pour tout $t \in [0,x_\mu]$, $f(t) \le e^{-\mu t}$.

6)b) Pour $0 < \mu < \lambda$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} &\le \int_0^{x_\mu} f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} + \int_{x_\mu}^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha}\\ &\le \int_0^{x_\mu} e^{-n\mu t}\frac{dt}{t^\alpha} + g^n(x_\mu)\int_{x_\mu}^1 \frac{dt}{t^\alpha}\\ &\le (n\mu)^{\alpha-1}\int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t}\frac{dt}{t^\alpha} + g^n(x_\mu)\frac{(1-x_\mu)}{x_\mu^\alpha}.\end{aligned}$$

6)c) Or, lorsque $n \to \infty$, les suites

$$\left(\mu^{\alpha-1}\int_0^{n\mu x_\mu} e^{-t}\frac{dt}{t^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(n^{1-\alpha}g^n(x_\mu)\frac{(1-x_\mu)}{x_\mu^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

tendent vers $\dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}$ et 0 respectivement car $g(x_\mu) < 1$. Donc, toute valeur d'adhérence de la suite $\left(n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est inférieure à la somme de ces 2 limites.
En particulier, on en déduit bien que pour $0 < \mu < \lambda$,

$$\limsup_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \le \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\mu^{1-\alpha}}.$$

et puisque cette inégalité est vraie pour tout $\mu < \lambda$, on a aussi l'inégalité :

$$\limsup_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \le \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}.$$

7) On déduit des questions 5) et 6) que la suite $\left(n^{1-\alpha}\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a mêmes limites supérieure et inférieure, elle est donc convergente vers cette valeur commune qui est $\dfrac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}}$. D'où le résultat :

$$\int_0^1 f^n(t)\frac{dt}{t^\alpha} \sim \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\lambda^{1-\alpha}n^{1-\alpha}}, \qquad n \to +\infty.$$

Corrigé de l'exercice 5.4

1) Soit $A > 0$ fixé. En intégrant par parties sur $[0,A]$, on trouve :

$$\int_0^A e^{-zt}\,dt = \left[\frac{e^{-zt}}{-z}\right]_0^A = \frac{1}{z}(1-e^{-Az}).$$

Or $\left|e^{-Az}\right| = e^{-A\Re e\, z} \to 0$ quand $A \to +\infty$ car $\Re e\, z > 0$.
D'où : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,dt = \lim_{A\to+\infty}\frac{1}{z}(1-e^{-Az}) = \frac{1}{z}$.

2) $G(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)dt=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)=\frac{1}{x^2+1}.$

3) La fonction $t\to\left|\dfrac{\sin t}{t}\right|$ reste bornée par 1 et l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,dt$ converge. Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt$ converge absolument.

4) Soit $a>0$. L'application $g:[0,+\infty[\times[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ telle que $g(t,x)=e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$ est continue par rapport au couple (t,x) ainsi que $\dfrac{\partial}{\partial x}g(t,x)=-e^{-xt}\sin t$. De plus, pour $(t,x)\in[0,+\infty[\times[a,+\infty[$, $\left|-e^{-xt}\sin t\right|\le e^{-at}$ qui est intégrable sur $[0,+\infty[$. On a donc $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\,dt=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}g(t,x)dt$ soit $F'(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}-e^{-xt}\sin t\,dt=-G(x)$ sur tout intervalle $[a,+\infty[$ (avec $a>0$ quelconque), donc sur $]0,+\infty[$.

5) On a :

$$|F(x)|\le\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,dt=\frac{1}{x}.$$

D'où $\lim_{x\to\infty}F(x)=0$. Comme $F'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$ alors $F(x)=-\mathrm{arctg}x+C$, on a donc $C=\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{arctg}x=\dfrac{\pi}{2}$ et $F(x)=\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x$.

6) La fonction $t\to\dfrac{\sin t}{t}$ est continue en 0, donc le seul problème de convergence est en $+\infty$. Soit $A>0$. On a :

$$\int_1^A\frac{\sin t}{t}\,dt=\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^A-\int_1^A\frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

Cette dernière intégrale est absolument convergente. On peut prendre la limite quand $A\to+\infty$ et on trouve :

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt=\cos 1-\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t^2}\,dt.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt$ converge.

Par contre, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$ diverge car elle a le même comportement que la série de terme général $u_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$. Or u_n vérifie :

$$\frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|\,dt\le u_n\le\frac{1}{n\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\sin t|\,dt,$$

soit

$$\frac{2}{(n+1)\pi}\le u_n\le\frac{2}{n\pi}.$$

La série est donc divergente et l'intégrale aussi.

7) Soit $b>0$. L'application $g:[0,+\infty[\times[0,b]\to\mathbb{R}$ telle que $g(t,x)=e^{-xt}\dfrac{\sin t}{t}$ est continue par rapport au couple (t,x) mais il n'existe pas de fonction intégrable φ telle que

$\left|e^{-xt}\frac{\sin t}{t}\right| \leq \varphi(t)$ sur $[0,+\infty[\times[0,b]$ car sinon, pour $x=0$ on aurait , $\left|\frac{\sin t}{t}\right| \leq \varphi(t)$ ce qui implique $\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,dt = +\infty$. Donc le théorème ne s'applique pas.

Bibliographie

[1] BOURDAUD G. *Mathématiques pour la physique* Diderot éditeur, Arts et Sciences, Paris (1996).
[2] CAGNAC G., RAMIS E., COMMEAU J. *Nouveau cours de mathématiques spéciales, Tome 2, Analyse.* Masson and Cie, Paris (1965).
[3] KREE P., VAUTHIER J. *Mathématiques, Deuxième année du DEUG.* ESKA, Paris (1989).
[4] KREE M., KREE P., VAUTHIER J. *Exercices de Mathématiques, Deuxième année du DEUG, Vol. 1, Analyse.* ESKA, Paris (1989).
[5] LELONG-FERRAND, J., ARNAUDIÈS, J.-M. *Cours de Mathématiques, Tome 2, Analyse.* Dunod, Paris (1977).