République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications
Thème

Equation de la membrane élastique avec conditions aux limites dynamiques et mémoire infinie.

Présenté Par:
Barkat Majda
Laouadi Riheb

Devant le jury :

Mr, Guefaifia Rafik	PROF	UnivérsitéLarbi Tébessi	Président
Mme, Gasri Ahlem	MCA	UnivérsitéLarbi Tébessi	Examinatrice
Mme, Mesloub Fatiha	MCA	UnivérsitéLarbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance: 11/06/2022

بسم الله الرحمن الرحيم

شكر و عرفان

نحمد الله و نشكره شكرا جزيلا إذ هو خالقنا، و معيننا

فهو الأولى بالشكر في كل الأوقات و الظروف.

نحمد الله عز و جل و نثني عليه الخير كله الذي وفقنا

لإتمام هذا العمل، و نسأله ان يجعل هذا كله

خالصا لوجهه الكريم و أن ينفعنا به و ينتفع به من بعدنا.

نتقدم بكل إحترام و تقدير بشكرنا و عرفاننا للأستاذة

الفاضلة التي كانت موجهتنا في البحث العلمي

"مسلوب فتيحة "،

على كل النصائح و التوجيهات.

كما نتقدم بالشكر الى لجنة المناقشة على تفضلهم لمناقشة هذا العمل،

و إلى كل من قدم لنا يد المساعدة من قريب أو من بعيد

فله منا خالص الإحترام و التقدير،

نسأل الله أن يجازي الجميع كل الخير

الإهداء:

الى سندي و فخري في الحياة الى من احبه فوق الحب حبا الى القلب الحنون

"ابي الحبيب جمال"

الى مؤنستي و غاليتي قرة عيني و حبيبة قلبي أمي الحبيبة **"جمعة"**

الى اخوتي : رحمة و امينة و خولة و بلال

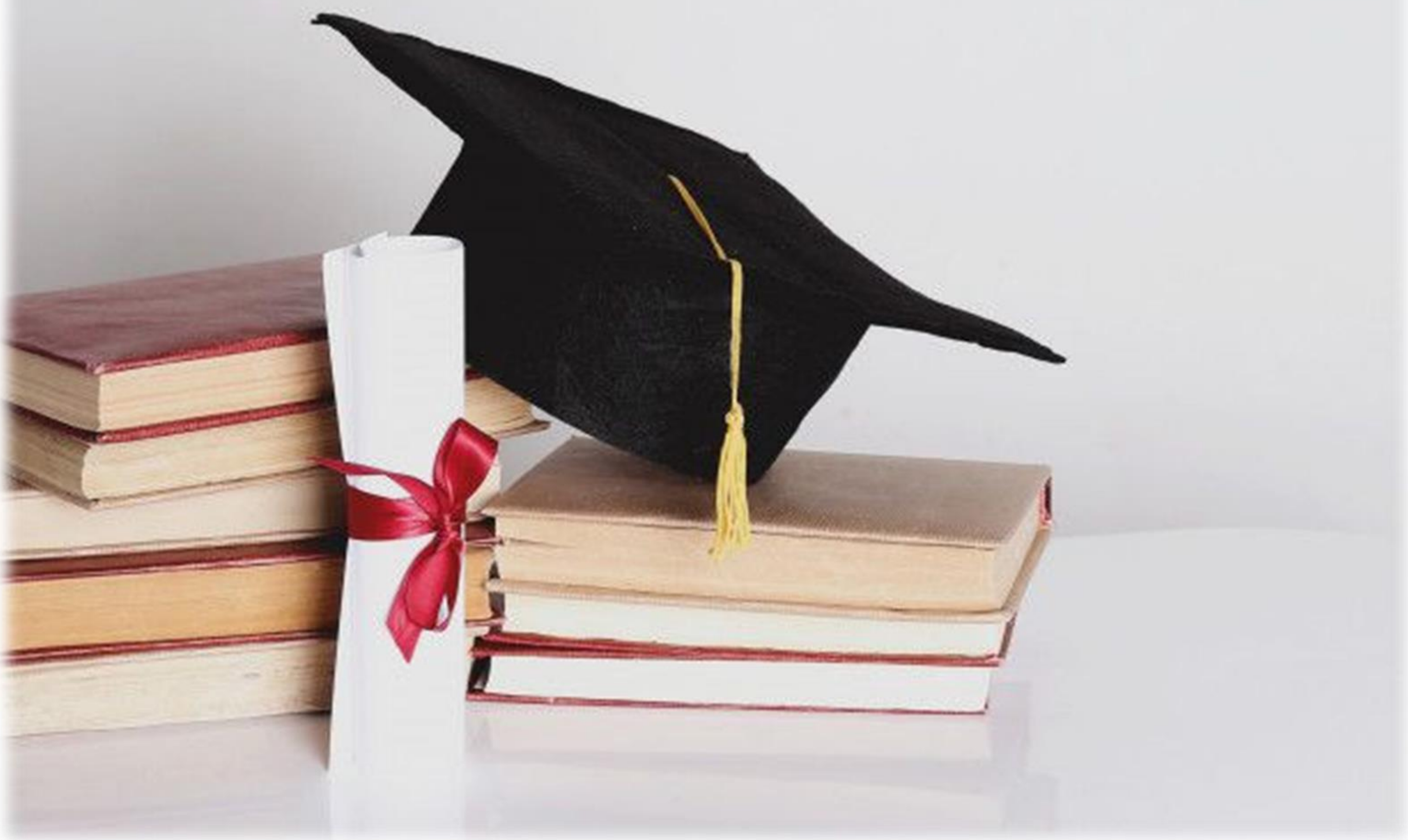
الى أميرتي : ريحان

الى البطلين : جواد و براء

الى رفيقاتي في المشوار : انيسة , اميرة , مجدة

الى تلاميذي ..

رحـــــاب



الإهداء :

الحمد لله و الصلاة و السلام على نبينا محمد عدد ما ذكره الذاكرون و غفل عن ذكره الغافلون

أما بعد :

اهدي عملي هذا الى كل من أحبهم في الله و يذكرهم القلب قبل القلم

إلى العائلة الكريمة **"بركات"** و **"داودي"** التي ساندتني و شجعتني حفظهم الله و اطال الله في أعمارهم.

إلى من كان دعاءهما سر نجاحي والداي

سندي و فخري في حياة

أمي الحبيبة جميلة التي لا تمل من العطاء نبع الحب و الحنان.

ابي العزيز ساعد من يسعى و يشقى لأنعم بالامان و الراحة و الهناء.

الى اخوتي : عبد المجيد, عبد الله, إسماعيل و أختي نهال.

إلى أجمل و اعز الصديقات : أنيسة , شهيناز , رحاب , خديجة

إلى كل من شجعني و لو بكلمة طيبة .

يقول الامام الشافعي :

".. من لم يذق مر التعلم ساعة تذرع ذل الجهل طول حياته .."

مجــــدة

Résumé

L'objectif essentiel de ce travail est l'étude de la stabilité sous la forme de la décroissance générale de l'énergie de (la solution) pour un problème de membrane élastique.

Le travail consiste en une introduction générale et deux sections et se termine par un index.

La première section se spécialise les notions de base il s'agit des espaces fonctionnels, et quelques théories et des (inégalités) utilisé dans le mémoire.

Dans la deuxième section nous d'abord utiliser la méthode de multiplicateur pour trouver la fonctionnelle de l'énergie et après on l'utilise la fonctionnelle de Lyapunov vibrante et quelques propriétés des fonctions convex pour prouve le problem asymtotiquement stable.

abstract

The main objective of this work is the study of the stability in the form of the General decay of the energy of the solution for an elastic membrane problem.
It composed of two chapters and at the end of a bibliography.

The first chapter is deals with the preliminary notions on the theory of functional spaces, and some theorems and inequalities used in this research.

In the second chapter: we first use the multiplier method to find the energy functional then we use it with some perturbed Lyapunov functionals and some properties of convex functions to show that the problem posed is asymptotically stable.

ملخص

الهدف الأساسي لهذا العمل هو دراسة الاستقرار على شكل تناقص عام للطاقة (الحل) من اجل مسألة الغشاء المرن .

العمل يتكون من مقدمة عامة ومحورين وينتهي بفهرس.

المحور الأول يختص بالمفاهيم الاساسية حول الفضاءات الدالية وبعض النظريات والمتراجحات المستخدمة في المذكرة.

في المحور الثاني استخدمنا أولاً طريقة المضروب لإيجاد دالية الطاقة وبعدها استخدمنا دالية ليابونوف المهتزة وبعض خصائص الدوال المحدبة لبرهان ان المسألة مستقرة بشكل مقارب .

Table des matières

Introduction Générale

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie d'aujourd'hui sont largement basées sur les équations aux dérivées partielles (EDP). C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes par des équations avec les dérivées partielles, qui permettent de comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout d'obtenir des prévisions parfois très précises. En particulier, les équations d'onde modélisent plusieurs phénomènes naturels en : Physique, Chimie, La biologie...

Les modèles mathématiques pour les problèmes mixtes avec des contraintes au bord non locales se presentent dans de nombreux modèles d'ingénierie tels que la conduction de chaleur, désintégration radioactive nucléaire dans les flux de fluide, flux non-newtonienne, déformations viscoélastiques des matériaux à mémoire (en particulier polymers), la modélisation des semi-conducteurs, le plasma de la physique, la dynamique des populations, thérmoelasticité, Les problèmes de vibrations, la diffusion chimique, dynamique des réacteurs nucléaires, la théorie du contrôle, les sciences medicales, écoulement souterrain de l'eau, la théorie de la transmission et de certains processus biologiques.

Les conditions standard Dirichlet, Neumann, dynamique (qui correspond a une conbinaison linéaire entre la dérivée temporelle et la dérivée spatiale de la solution) ...ext qui sont prescrites ponctuellement ne sont pas toujours suffisantes car elle dépendent du contexte physique dont les données peuvent être mesurés au bord du domaine physique.

Beaucoup de phénomènes sont modélisés par des problèmes aux limites non classiques qui relient les valeurs de la fonction inconnue sur la frontière et à l'intérieur du domaine comme la condition intégrale sur le domaine spatial d'une fonction de la solution cherchée. Les conditions aux limites non locales apparaissent principalement lorsque les données sur la frontiere ne peuvent pas êtres mesurées directement, mais seulement leurs valeurs moyennes sont connues. Plus precisement, dans certains cas, il n'est pas possible de prescrire la solution u (pression, température, ...) ponctuellement, parce que la valeur moyenne de la solution peut être mesurée le long de la frontière ou sur une partie de celui-ci.

La signification physique des conditions non locales, telle qu'une moyenne, la masse totale, moments, etc, a servi comme cause fondamentale de l'intérêt considérable de ce genre de problèmes aux limites.

Physiquement, les membranes remplissent tous les coins du monde. Il peut être vu et utilisé tous les jours. Ils ont des définitions différentes dans différents domaines. Dans ce travail, nous n'avons développé que l'étude d'un type de membrane d'un point de vue mathématique. le modèle étudié dans ce travail, est lié à l'équation du panneau flottant avec un terme de mémoire cette équation

apparaît dans une expérience en soufflerie pour un panneau à des vitesses supersoniques. Pour une dérivation de ce modèle voyez par exemple, Goujon $[14]$ Holmes $[24, 25]$, Basse $[5]$.
La stabilité a pour but d'atténuer les vibrations, elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation.
A cet égard, l'objectif de ce mémoire est d'étudier le comportement asymptotique de la solution du problème définit ci-dessous, où la dissipation est introduite par la présence d'un terme visco-élastique, nous pouvons nous référer $[26]$

.

$$\begin{cases} u_{tt} - M(t)\Delta u + \int_0^\infty g\{s\}\Delta u(t-s)\,ds = 0, & \text{dans } \Omega\times(0,+\infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0\times[0,+\infty), \\ u_{tt}(t) = -\frac{\partial u(t)}{\partial v} - \frac{\partial u_t(t)}{\partial v} + \int_0^\infty g(s)\frac{\partial u}{\partial v}(t-s) - h(u_t) - f(u), & \text{sur } \Gamma_1\times[0,+\infty), \\ u(x,-t) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \bar{\Omega}. \end{cases} \tag{1.1.1}$$

Où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ de bord lisse $\partial\Omega$ tel que $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, et $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$, et Γ_0, Γ_1 ont une mesure positive $\lambda_{n-1}(\Gamma_i)$, $i = 0, 1, v$ désigne le vecteur normal extérieur unitaire pointant vers l'extérieur de Ω et

$$M(t) = \xi_0 + \xi_1 \|\nabla u(t)\|_2^2 + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t)),$$

où u est le déplacement transverse de la plaque x est la coordonnée spatiale dans la direction du flux du fluide, et t est le temps.
Les termes de dissipations sont par des termes qui ont tendance à stabiliser la solution du problème De point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par des opérateurs intégro-différentiele
Les termes d'amortissement structurel viscoélastique dans le problème sont désignés par σ, ξ_1 est la rigidité non linéaire de la membrane, $\xi_0$est une charge de traction dans le plan. Toutes les quantités sont physiquement non dimensionnées ξ_0, ξ_1 et σsont fixes positif. Le type de conditions aux limites sont généralement appelées conditions aux limites dynamiques. Ils ne sont pas seulement importants du point de vue théorique mais se présentent également dans plusieurs applications physiques.
Pour plus de résultats concernant l'équation de Balakrishnan-Taylor, on peut référer à Zarai et Tatar $[2, 3]$,pour l'équation d'onde viscoélastique avec condition aux limites de Dirichlet, les problèmes sont vraiment surmenés. De nombreux résultats d'existence et de stabilité ont été établis,

Cavalcanti et Oquendo [10], Fabrice et Polidoro [15],Messaoudi [31, 35]. Pour le problème visco-élastique linéaire de Cauchy, on peut se référer à Kafini et Mustafa [27]. Par rapport à l'équation d'onde viscoélastique avec frontière de stabilisation, Cavalcanti $[8-11]$ a considéré le système suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \Delta u(t) + \int\limits_0^\infty g(s)\,\Delta u(t-s)\,ds = 0, & \text{dans}\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u(t)}{\partial v} - \int\limits_0^\infty g(t-s)\,\frac{\partial u}{\partial v}(s)\,ds + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ \quad u(0) = u_0(x),\, u_t(0) = u_1(x), & x\epsilon\Omega. \end{cases}$$

Sous les hypothèses suivantes sur les fonctions h,

$$\begin{aligned} c_1 |s|^p &\leq |h(s)| \leq c_2 |s|^{\frac{1}{p}}, \text{ si } |s| \leq 1, \\ c_3 |s| &\leq |h(s)| \leq c_4 |s|, \quad \text{si } |s| > 1. \end{aligned}$$

Les auteurs ont d'abord prouvé l'existence globale de solutions, et obtenu que l'énergie décroît de façon exponentielle si $p = 1$ et décroit polynomialement si $p > 1$. Les résultats ont été généralisés par Cavalcanti et al.[9] . Ils ont obtenu les mêmes résultats sans imposer de condition de croissance à h et sous une hypothèse plus faible à g Messaoudi et Mustafa [27] ont étendu ces résultats et établi un taux de décroissance explicite et général résultat en exploitant certaines propriétés des fonctions convexes. Récemment, utilisant la même méthode que dans [27], Messaoudi et al.[34] considéré le système d'onde ci-dessus avec une mémoire infinie, $\int\limits_0^\infty g(s)\,\Delta(t-s)\,ds$ et obtenu un résultat de décroissance générale en utilisant la méthode du multiplicateur. Gerbi et Said-Houari [21]ont étudié une équation d'onde viscoélastique avec conditions aux limites dynamiques sous la forme

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \Delta u(t) - \alpha \Delta u_t + \int\limits_0^\infty g(t-s)\,\Delta u(s)\,ds = |u|^{p-2}\,u, & \text{dans}\Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u_{tt(t)} = -\left[-\frac{\partial u(t)}{\partial v} + \alpha \frac{\partial u_t}{\partial v} - \int\limits_0^\infty g(t-s)\,\frac{\partial u(s)}{\partial v} ds + h(u_t) \right], & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}, \\ \quad u(0) = u_0(x),\, u_t(0) = u_1(x), & x\epsilon\Omega. \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et le théorème du point fixe, ils ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution locale dans le temps, et ont prouvé que la solution existe globalement dans le temps sous certaines restrictions sur les données initiale. Ils ont également prouvé si $\alpha > 0$, la solution est non bornée et croît comme une fonction exponentielle, si $\alpha = 0$, alors la solution existe de manière discontinue et explose en temps fini. Ferhat et Hakem [11] ont considéré la même équation d'onde viscoélastique que dans [14] mais avec les conditions aux limites dynamiques suivant,

$$u_{tt}(t) = -\left[-\frac{\partial u(t)}{\partial v} - \int_0^\infty g(t-s)\frac{\partial u(s)}{\partial v} + \sigma\frac{\partial u_t}{\partial v}\mu_1 h(u_t) + \mu_2 h(u_t(t-\tau)) = 0\right], \text{ sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+.$$

Ce type des conditions aux limites n'est pas seulement important du point de vue théorique mais se présente également dans plusieurs applications physiques. Les auteurs dans [14] ont établi un résultat de décroissance générale en introduisant une énergie approprié et les fonctions de Lyapunov et certaines propriétés des fonctions convexes. Ferhat et Hakem [12] ont étudié le systéme suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \Delta u(t) - \sigma\Delta u_t + \delta(t)\int_0^\infty g(t-s)\Delta u(s)ds = |u|^{p-2}u, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u_{tt}(t) = -\left[\frac{\partial u}{\partial v} - \alpha(t)\int_0^\infty g(t-s)\frac{\partial u(s)}{\partial v}ds + \alpha\frac{\partial u_t}{\partial v}\right. & \\ \left.\mu_1 |u|^{m-1} u_t + \mu_2 |u_t(t-\tau)|^{m-1} u_t(t-\tau)\right], & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x), & x\epsilon\Omega. \end{cases}$$

Ils ont prouvé l'existence globale et la décroissanced'énergie des solutions pour ce systéme. Ferhat et Hakem [18] ont considéré une équation d'onde viscoélastique faible avec des conditions aux limites dynamiques et un amortissement de Kelvin Voigt et un terme de retard agissant sur la frontiére dans un domaine borné, et prouvé le comportement asympotique en utilisant une fonctionelle de Lyapunov appropriée. Récemment Benaissa et Ferhat [6] ont considéré une équation d'onde viscoélastique avec des conditions aux limites dynamiques et une mémoire infinie

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \Delta u(t) + \int_0^\infty g(s)\Delta u(t-s)ds = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u_{tt}(t) = -\left[\frac{\partial u(t)}{\partial v} - \int_0^\infty g(s)\frac{\partial u}{\partial v}(t-s)\,ds\right], & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x), & \text{dans } x \in \Omega. \end{cases}$$

Et établi un résultat de décroissance exponentielle de l'énergie en exploitant la méthode du domaine fréquentiel qui consiste à combiner un argument de contradiction et une analyse spéciale pour la résolvante de l'opérateur sous l'hypothése

$$-\zeta_0 g(t) \leq g'(t) \leq \zeta_0 g(t)$$

. Pour plus de résultats concernant l'équatoin d'onde avec frontière de stabilisation, on peut se référer à Dornin et Larkin $[13]$, Muňoz Rivera et Andrade $[36]$, Gerbi et Said-Houari $[20-22]$, Liu et Yu $[30]$, Car il existe peu de travaux sur l'équation d'onde avec condition aux limites dynamique. Un problème de membrane élastique avec un terme source et un amortissement faible non linéaire localisé sur une partie de la frontiére et d'historique, a étudié dans ce travail.

Le mémoire est composée de deux chapitres et d'une bibliographie

Nous commençons par une introduction où nous présentons , par la suite dans le premier chapitre nous rappellons certaines notions préliminaires qui seront utilisées ultérieurement.

Dans la deuxiéme chapitre nous donnons la position du problème de membrane elastique, et nous avons présenté les différents espaces de fonctions utilisées .

Dans le dernier section nous avons vérifié la décroissance générale par l'usage de certaines propriétés des fonctions convexes sans imposer d'hypothése de croissance restrictive sur le terme d'amortissement.

Nous avons donné à la fin les différentes références utilisées dans cette mémoire.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans tout ce chapitre $\mathbb{k}$ est le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$Dans cette section nous avons défini quelque différents symboles, certains opérateurs (avec leurs normes), et les espaces utilisés dans notre travail comme suit
Ω un domaine borné inclus dans $\mathbb{R}^n$, avec frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$ et $d\sigma$ est une mesure de surface sur Γ.
Le gradient d'une fonction u est défini par

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} u &= \nabla u \\ &= (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}), \text{ alors } |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2. \end{aligned}$$

La divergence d'une fonction est également définie par

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= \nabla \cdot u \\ &= \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Le laplacien de u

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}. \end{aligned}$$

$\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ désigne la dérivée normale de u extérieure à $\partial\Omega$, c'est-à-dire : $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \overrightarrow{\nu}$, où $\overrightarrow{\nu}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à Γ.

$\mathcal{C}^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ désigne l'espace vectoriel des fonctions dont les dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à k existent et sont continues dans Ω.

$\mathcal{C}_0^k(\Omega)$, $0 \leq k \leq \infty$ désigne le sous-espace vectoriel des fonctions de $\mathcal{C}^k(\Omega)$, à support compact dans Ω.

L'espace $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ que nous noterons également $D(\Omega)$, s'appelle l'espace des fonctions tests sur Ω.

1.1 Espace Normés et Espace de Banach et Espace de Hilbert

1.1.1 Espaces normés

Un espace vectoriel E est appelé *espace normé* si à tout $x \in E$ correspond un nombre positif $\|x\|$ (appelé *norme* de x)
tel que les trois axiomes suivants, dits *axiomes de la norme,* sont vérifiés :

$1°$. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ (la norme est *non dégénérée*) ;

$2°$. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (la norme est *homogène*) ;

$3°$. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*) ;

Ainsi donc, la norme est une application définie sur E, prenant des valeurs positives et vérifiant les propriétés $1°$ à $3°$

1.1.2 Espaces de Banach

Un espace normé est dit *complet* si toute suite de Cauchy y est convergente.
Un espace normé complet est appelé *espace de Banach*

Exemple 1.1 *On définit l'espace de Banach $L^p(\Omega)$ par*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \in \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ \textit{mesurable} \ / \ \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$
$$\textit{avec } 1 \leq p < \infty,$$

Lorsque $p = +\infty$ on dit que f est essentiellement bornée ou encore que $f \in L^\infty(\Omega)$ si il existe $C \in \mathbb{R}_+$ t.q $|f| \leq C$ p.p..sur Ω.

La norme dans $L^p(\Omega)$ donnée par

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ avec } 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = inf\{C \in \mathbb{R}_+ ; |u| \leq C \;\; p.p\}.$$

On peut considérer comme sous espaces dans $L^p(\Omega)$ les espaces

a) $C^\infty(\Omega)$.

b) L'ensemble de tous les polynômes.

c) $C_0^\infty(\Omega)$

1.1.3 Espaces de Hilbert

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé *espace de Hilbert* s'il est complet au sens de la norme associée au produit scalaire. Les espaces de Hilbert qui sont des espaces de Banach particuliers sont des généralisations des espaces IR^n et C^n.

Définition 1.1 *On appelle un produit scalaire sur E et on note $(.,.)$, tout forme sésquilinéaire, hermitienne, définie positive définir de $E \times E$ dans $\mathbb{k}$, c.à.d.*
(1) Linéarité à gauche : $\forall x, y, z \in E, \; \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}$,

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z).$$

(2) Hermitienne : $\forall x, y \in E, (x, y) = \overline{(y, x)}$.
(3) Définie positive : $\forall x \in E - \{0\}, (x, x) > 0$ et $(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.
Naturellement si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Exemple 1.2 *Si $p = 2$, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme et le produit scalaire suivant*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv \, dx.$$

Définition 1.2 *L'espace de Sobolev $W^{1,P}(\Omega)$ est définit par*

$$W^{1,P}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists g_1, g_2, ..., g_n \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_{\Omega} g_i \varphi dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = \overline{1, n} \end{array} \right\}.$$

Pour $u \in W^{1,P}(\Omega)$, *on note*

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i, \quad \textit{et} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = \operatorname{grad} u.$$

1.2 Espace de sobolev $W^{m,P}(\Omega)$

Définition 1.3 *L'espace* $W^{1,P}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour la norme*

$$\|u\|_{W^{1,P}(\Omega)} = \left[\|u\|^p_{L^P(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{L^P(\Omega)}\right]^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Définition 1.4 *Soit* $m \geq 2$ *un entier. On définit par récurrence l'espace de Sobolev* $W^{m,P}(\Omega)$ *par*

$$W^{m,P}(\Omega) = \left\{u \in W^{m-1,P}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,P}(\Omega)\ \forall i = \overline{1,n}\right\}.$$

Il revient au même d'introduire

$$W^{m,P}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m \quad \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi dx\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}.$$

Où pour

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \quad \alpha_i \in IN, \quad i = \overline{1,n}.$$

Un muli-indice ; on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad \textit{et} \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}.$$

Pour $u \in W^{m,P}(\Omega)$, *on note* $D^\alpha u = g_\alpha$ *.L'espace* $W^{m,P}(\Omega)$ *muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,P}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^P(\Omega)}\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Est un espace de Banach.

Définition 1.5 *Pour* $m \in IN$, *on note :*

$$W^{m,P}(\Omega) = \left\{u \in \mathfrak{D}'(\Omega);\ D^\alpha u \in L^P(\Omega) \quad |\alpha| \leq m\right\}.$$

Où $\mathfrak{D}'(\Omega)$ *est l'espace des distributions sur* Ω*.Alors pour* $m = 0$, *on a*

$$W^{0,P}(\Omega) = L^P(\Omega)$$

et pour $m \geq 1$, *on retrouve les espaces introduits dans les deux définitions* ***1*** *et* ***2***.

Remarque 1.1 *Dans les applications on rencontre fréquemment le cas où $p = 2$. On utilise alors la notation*

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega).$$

L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

1.3 La fonction convexe et la fonction concave

Définition 1.6 *Soient I un intervalle de R et $f : I \to \mathbb{R}$ une application .On dit que f est convexe si et seulement si pour tous points $a, b \in I$ et pour tout reel $t \in [0, 1]$ on a*

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b).$$

Définition 1.7 *Une fonction f d'un intervalle réel I vers $\mathbb{R}$ est dite cocave lorsque,pour tous x_1 et x_2 de I tout t dans $[0, 1]$on a*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Strictement convexe *On dit f strictement convexe dans S si et seulement si*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)).$$

Etrictement concave *On dit S strictement concave dans S si et seulement si $(-f)$est convexe (strictement convexe) dans S.*

1.4 Quelques inégalités importantes

Lemme de Gronwell

Si les $h_i(t)$, $i = 1, 2, 3.$,sont des fonctions non négatives sur l'intervalle $[0, T]$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ sont intégrables et $h_3(t)$ est non décroissante, alors de l'inégalité

$$\int_0^\tau h_1(t)dt + h_2(t) \leq h_3(t) + c\int_0^\tau h_2(t)dt.$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^\tau h_1(t)dt + h_2(t) \leq e^{c\tau} h_3(t).$$

Inégalité intégrale de cauchy-schwarz

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j\right| \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j\right)^{\frac{1}{2}},$$

vraie pour toute forme quadratique non négative $a_{ij}\xi_i\xi_j$ avec $a_{ij} = a_{ji}$, et pour $\xi_1, ..., \xi_n, \eta_1, ..., \eta_n$ sont les réels arbitraires. a_{ij} sont en général des fonctions.

Inégalité de cauchy

$$\forall (a,b) \in IR^2 : |ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

Inégalité de cauchy avec ε

Soit ε un nembre réel strictement positif, alors

$$\forall (a,b) \in IR^2 : |ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

Inégalité de Young.

Soient p et q des nombres réels strictement positifs liés par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

alors

$$\forall (a,b) \in IR^2 : |ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}.$$

Inégalité de Young avec ε.

Soit ε un nembre réel strictement positif, alors

$$\forall (a,b) \in IR^2 : |ab| \leq \varepsilon\, |a|^p + C(\varepsilon)\, |b|^q\,,$$

où p et q sont reliés par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

et

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{q}(\varepsilon p)^{-q/p}.$$

Inégalité intégrale de Hölder

$$\forall (f,g) \in L^p(Q) \times L^q(Q) \;:\; \int_Q |fg| \leq \left(\int_Q |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_Q |g|^q\right)^{1/q}.$$

Où p et q sont toujours reliés par la relation :$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$

Inégalité de Jensen

Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe, si $x_1, \ldots, x_n \in I$, et si les réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ vérifient : $\alpha_k \geqslant 0$ pour tout entier $1 \leq k \leq n$ et $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k).$$

Inégalité de Poincré

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, il existe une constante c telle que pour toute $u \in W_0^{1-P}(\Omega)$.

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

En particulier $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente à cette de $W_0^{1-P}(\Omega)$.

La formule de Green

Lemme 1.1 *Soit $\Omega \subset IR^n$ un ouvert borné de frontière Γ, C^1par morçeaux, et soient $u, v \in H^1(\Omega)$, alors on a*

$$\int\limits_{\Omega} u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = \int\limits_{\Gamma} uv\vartheta_i ds - \int\limits_{\Omega} v\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \quad \textit{pour} \quad i=\overline{1,n},$$

où ϑ_i est la $i-éme$ composante de ϑ (la normale extérieure à Γ) et $u(s), v(s)$ sont les traces des fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sur Γ, et $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Intégral paramétrique(formule de Leibniz).

Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

telle que f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ soient continues sur $\mathbb{R}^2$et soient α et β deux fonctions dérivables de$\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.Alors, "$L'intégral\ paramétrique$" (généralisée) F définie sur$\mathbb{R}^2$ par :

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy,$$

est dérivable

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy + \frac{\partial \beta(x)}{\partial x} f(x, \beta(x)) - \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} f(x, \alpha(x)).$$

Remarque 1.2 *Pour une fonction f qui ne dépend que de la seconde variable, on retrouve bien le théorème fondamental de l'analyse en posant .*

$$\alpha(x) = \alpha, \quad \beta(x) = \beta.$$

Theorem 1.1 $(Fubini)$

Soient par exemple X une partie de $\mathbb{R}^p$, Y une partie de $\mathbb{R}^q$, et

$$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

avec

$$p \text{ et } q \in \mathbb{N}.$$

Une application intégrable. Alors, d'après le théorème de Fubini, la fonction $f(x, .)$ est intégrable pour presque tout x de X, l'intégrale paramétrique F définie par

$$F(x) = \int_Y f(x, y)dy,$$

est intégrable sur X et l'on a

$$\int_{X \times Y} f = \int_X F.$$

(Et même chose en intervertissant les rôles de x et y).

La transformation de Legendre

La relaxee sci (forte ou faible) $\bar{f}$ d'une fonction $f : E \rightarrow R \cup \{+\infty\}$.

Et donne par :

$$\bar{f}(x) = \sup\{g(x)\}, g : E \rightarrow R \cup \{+\infty\}, g \text{ est sci (forte ou faile)et } g \leq f.$$

Chapitre 2

Sur un problème du membrane elastique avec conditions aux limites non locale dynamique

2.1 Formulation du problème

On considère l'équation de membrane élastique avec des conditions dynamiques et terme mémoire_

$$u_{tt} - M(t)\Delta u + \int_0^\infty g(s)\Delta u\,(t-s)\,ds = 0, \tag{2.1.1}$$

dans le domaine $\Omega \times (0, +\infty)$,où

$$M(t) = l + \xi_1 \|\nabla u\|_2^2 + \sigma\,(\nabla u, \nabla u_t)\,.$$

L'équation est liée à l'équation du panneau de flutter avec terme mémoire
Les matériaux viscoélastiques présentent un amortissement naturel, ce à cause de la propriéte particulière de ces matériaux de garder la mémoire de leur histoire passée.
On associé à l'équation $(2.1.1)$ les conditions initiales

$$u(x,-t) = u_0(x),\; u_t(x,0) = u_1(x) \quad sur\ x \in \Omega\ , \tag{2.1.2}$$

et les conditions aux bord

$$\begin{array}{ll} u(x,t) = 0, & sur\ \Gamma_0 \times [0,+\infty)\,, \\ u_{tt}(t) = -\frac{\partial u(t)}{\partial \nu} - \frac{\partial u_t(t)}{\partial \nu} + \int_0^\infty g(s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(t-s)ds - h(u_t) - f(u), & sur\ \Gamma_1 \times [0,+\infty)\,, \end{array} \tag{2.1.3}$$

Écriture du problème équivalent

en suivant les memes arguments de Dafermos [12], nous introduisons une nouvelle variable

$$\eta(x,t,s) = u(t) - u(t-s),$$

qui nous donne

$$\eta_t + \eta_s = u_t.$$

En supposant

$$\xi_0 - \int_0^\infty g(s)ds = l,$$

donc on peut obtenir un nouveau problème ,ce qui équivalent au problème $(2.1.1) - (2.1.3)$

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \left(l + \xi_1 \|\nabla u\|^2 + \sigma(\nabla u, \nabla u_t)\right)\Delta u_t - \int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s)ds = 0, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u_{tt}(t) = -\left(l + \xi_1 \|\nabla u\|^2 + \sigma(\nabla u, \nabla u_t)\right)\frac{\partial u(t)}{\partial \nu}, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0(x),\ u_t(0) = u_1(x), & \text{dans } x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.1.4}$$

2.2 Des hypothèses et des résultats principaux

Dans cette section, nous présentons quelque matérieux et hypothéses utilisé dans ce mémoire. $L^q(\Omega), (1 \le q \le \infty)$, et $H^1(\Omega)$ désignent l'intégrale de Lebesgue et les espaces de Sobolev $\|.\|_q$et $\|.\|_{q,\Gamma_1}$ sont la norme dans l'espace $L^q(\Omega)$ et $L^q(\Gamma_1)$, respectivement pour simplifier nous écrivons $\|.\|$ et $\|.\|_{\Gamma_1}$au lieu de $\|.\|_2$ et $\|.\|_{2,\Gamma_1}$, respectivement C est utilisé pour désigner une constante positive générique.

Noter

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) : u\backslash_{\Gamma_0} = 0\right\},$$

alors on a l'injection $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$. Nous utiliserons généralement la formule de Green suivante :

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla w(x)dx = -\int_\Omega \Delta u(x)w(x)dx + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)w(x)d\Gamma,\ \forall \omega \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Pour traiter la nouvelle variable η, nous introduisons un espace pondéré L^2

$$M = L^2_g(\mathbb{R}^+; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) = \left\{\zeta : \mathbb{R}^+ \to H^1_{\Gamma_0}(\Omega) : \int_0^\infty g(s)\|\nabla\zeta(s)\|^2 ds < \infty\right\},$$

qui est l'espace de Hilbert doté d'un produit interne et d'une norme

$$\langle \zeta, \vartheta \rangle_M = \int_0^\infty g(s)\left(\int_\Omega \nabla\zeta(x)\nabla\vartheta(x)dx\right)ds,$$

et

$$\|\zeta\|_M^2 = \int_0^\infty g(s) \|\nabla\zeta(s)\|^2 ds.$$

L'espace des phases $\hat{H}$ est défini par

$$\hat{H} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times M.$$

Dans la suit, nous donnerons quelques hypothéses. Pour la fonction de relaxation g, on suppose que

*/(A_1) $g(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une C^1 fonction non croissante satisfaisant :

$$g(0) > 0 \text{ et } \xi_0 = \int_0^\infty g(s)ds = l > 0. \tag{2.2.1}$$

De plus, il existe une fonction strictement convexe croissante $G : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ de classe $C^1(\mathbb{R}^+) \cap C^2(\mathbb{R}^+)$ satisfaisante.

$$G(0) = G'(0) = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} G'(t) = +\infty. \tag{2.2.2}$$

tel que

$$\int_0^\infty \frac{g(s)}{G^{-1}(-g'(s))} ds + \sup_{s\in\mathbb{R}^+} \frac{g(s)}{G^{-1}(-g'(s))} < +\infty. \tag{2.2.3}$$

**/(A_2) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une C^0 fonction non décroissante telle qu'il existe une fonction strictement croissantes $h_0 \in C^1(\mathbb{R}^+)$ et $h_0(0) = 0$ et des positives constantes c_1, c_2et ε telle que

$$\begin{cases} h_0(|s|) \le |h(s)| \le h_0^{-1}(|s|), & |s| \le \varepsilon, \\ c_1|s| \le |h(s)| \le c_2|s|, & |s| > \varepsilon. \end{cases} \tag{2.2.4}$$

De plus on suppose que la fonction

$$H(s) = \sqrt{s}h_0(\sqrt{s})$$

est une C_2 fonction strictement convexe sur $(0, r^2]$ pour certains $r > 0$ quand h_0 est non linéaire.

(A_3) . Nous supposons $f : R \to R$ pour certains $c_0 > 0$,

$$|f(u) - f(v)| \le c_0 (1 + |u|^p + |u|^p) |u - v|, \quad \forall u, \ v\epsilon\mathbb{R}, \tag{2.2.5}$$

ou

$$\begin{cases} 0 < p < \frac{2}{n-2} \text{ si } n \ge 3, \\ p > 0 \text{ si } n = 1, 2. \end{cases}$$

On suppose que

$$\begin{aligned} f(u)u &\ge F(u) \\ &\ge 0, \ \forall \ u\epsilon\mathbb{R}, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

ou

$$F(z) = \int_0^z f(s)ds,$$

l'hypothèses $(2.2.5) - (2.2.6)$ inclure non linéaire sous la forme

$$f(u) \approx |u|^p u |u|^\alpha u, \quad 0 < \alpha < p.$$

(A_4) Il existe une constante m_0 positive telle que :

$$\|\nabla u_0(., s)\| \leq m_0. \tag{2.2.7}$$

Les mêmes arguments que $(5), (15)$ et $[33]$, nous pouvons prouver l'existence globale de solution du problème $(2.1.4)$ donnée dans le théorème suivant

Theorem 2.1 *On supose l'hypothése $(A_1) - (A_4)$ on prend si les données initiales $(u_0(., 0), u_1, \eta_0) \epsilon \hat{H}$ alors le problème*

$(2.1.4)$ a une unique solution faible telle que pour tout $T > 0$,

$$u(t) \epsilon L^\infty\left(0, T); H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right),$$
$$u_t(t) \epsilon L^\infty\left([0, T]); L^2(\Omega)\right)$$

et

$$\eta \epsilon L^\infty([0, T]; M).$$

La fonctionnelle énergétique du problème $(2.1.4)$ est défini par

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{\|u_t(t)\|^2 + \|u_t(t)\|^2_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_1} F(u)d\Gamma + \|\eta\|^2_M + l\|\nabla u\|^2 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^4\right\}. \tag{2.2.8}$$

Theorem 2.2 *Supposer $(A_1) - (A_4)$ on prend $(u_0(., 0), u_1, \eta_0) \epsilon \hat{H}$, alors il existe des canstants positifs $k_2, k_3, k_4, \varepsilon_1, \varepsilon_0$, telle que l'énergie $E(t)$ défini par $(2.2.8)$ satisfait*

$$E(t) \leq k_4 W_1^{-1}(k_2 t + k_3), \quad \forall t \epsilon \mathbb{R}^+,$$

ou

$$W_1(\tau) = \int_\tau^1 \frac{1}{W_2(s)} ds,$$

et

$$W_2(t) = tG'(\varepsilon_1 t) H'(\varepsilon_0 t).$$

2.3 La décroissance générale de l'énergie

Dans cette section, nous allons étudier la décroissance générale de l'énergie du problème $(2.1.1)-(2.1.3)$ pour prouver le théorème 2. Pour cela, nous avons besoin les lemmes suivants

Lemme 2.1 *Sous les hypothéses du théoréme 2, la fonction énergétique $E(t)$ est non croissante et satisfait que pour tout $t \geq 0$*

$$E'(t) \leq -\sigma \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \right)^2 - \int\limits_{\Gamma_1} h(u_t) u_t d\Gamma + \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \|\nabla \eta(s)\|^2 ds. \tag{2.3.1}$$

Preuve. *On multiplion le probléme $(2.1.4)$ par la function u_t et on intégrant par partie*

$$\int_\Omega u_{tt}(t) u_t(t)\, dx - \int_\Omega \left(\xi_0 + \xi_1 \|\nabla u\|^2 + \sigma(\nabla u, \nabla u_t) \Delta u(t) \right) u_t(t)\, dx$$
$$- \int_\Omega \left[\int_0^\infty g(s) \Delta \eta(s) ds \right] u_t(t) dx = 0,$$

on obtient

$$\int_\Omega u_{tt}(t) u_t(t)\, dx - \int_\Omega \xi_0 \Delta u(t) u_t(t)\, dx - \int_\Omega \xi_1 \|\nabla u\|^2 \Delta u(t) u_t(t)\, dx$$
$$- \int_\Omega \sigma(\nabla u, \nabla u_t) \Delta u(t) u_t(t)\, dx - \int_\Omega \left[\int_0^\infty g(s) \Delta \eta(s) ds \right] u_t(t) dx = 0,$$

ou

$$\int_\Omega u_{tt}(t) u_t(t)\, dx - \int_\Omega \xi_0 \Delta u(t) u_t(t)\, dx -$$
$$\int_\Omega \xi_1 \|\nabla u\|^2 \Delta u(t) u_t(t)\, dx - \int_\Omega \sigma(\nabla u, \nabla u_t) \Delta u(t) u_t(t)\, dx$$
$$- \int_\Omega \left[\int_0^\infty g(s) \Delta \eta(s) ds \right] u_t(t) dx = 0.$$

Pour le premier intégrale on utilise la relation suivante

$$2 u_{tt} u_t = \frac{d}{dt} |u_t|^2,$$

on trouve

$$\int_\Omega u_{tt}(t) u_t(t)\, dx = \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_t(t))^2\, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t(t)\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Pour la deuxiéme intégrale

$$- \int_\Omega \xi_0 \Delta u(t) u_t(t)\, dx = -\xi_0 \int_\Omega \Delta u(t) u_t(t)\, dx,$$

on applique La formulle de Green, on trouve

$$\begin{aligned}
-\xi_0 \int_\Omega \Delta u(t) u_t(t)\, dx &= -\xi_0 \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} \nabla u . u_t \eta d\Gamma + \xi_0 \int_\Omega \nabla u_t . \nabla u dx \\
&= -\xi_0 \int_{\Gamma_0} \nabla u . u_t \eta d\Gamma_0 - \xi_0 \int_{\Gamma_1} \nabla u . u_t \eta d\Gamma_1 + \xi_0 \int_\Omega \nabla u_t . \nabla u dx \\
&= -\xi_0 \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} . u_t d\Gamma_1 + \xi_0 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} .
\end{aligned}$$

Pour la troisiéme intégrale

$$- \int_\Omega \xi_1 \|\nabla u\|^2 \Delta u(t) u_t(t)\, dx = -\xi_0 \|\nabla u\|^2 \int_\Omega \Delta u(t) u_t(t)\, dx,$$

$$\begin{aligned}
-\xi_1 \|\nabla u\|^2 \int_\Omega \Delta u(t) u_t(t)\, dx &= -\xi_1 \|\nabla u\|^2 \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1} d\Gamma + \xi_1 \|\nabla u\|^2 \int_\Omega \nabla u_t . \nabla u dx \\
&= -\xi_1 \|\nabla u\|^2 \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \eta} . \frac{\partial}{\partial t} u(t) d\Gamma_0 - \xi_1 \|\nabla u\|^2 \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} . u_t d\Gamma_1 \\
&\quad + \xi_1 \|\nabla u\|^2 \int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx \\
&= -\xi_1 \|\nabla u\|^2 \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} . u_t d\Gamma_1 + \xi_1 \|\nabla u\|^2 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 \\
&= -\xi_1 \|\nabla u\|^2 \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} . u_t d\Gamma_1 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\frac{\xi_1}{2} \|\nabla u\|^4 \right] .
\end{aligned}$$

Pour la quatriéme intégrale, on a :

$$\begin{aligned}
(\nabla u, \nabla u_t) &= \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega (\nabla u)^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|^2 .
\end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right) \Delta u(t) u_t(t)\, dx &= -\sigma \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 . \Delta u(t) u_t(t)\, dx \\
&= -\sigma \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \int_\Omega \Delta u(t) u_t(t)\, dx \\
&= \sigma\left(-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2 \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} u_t d\Gamma_1\right) + \sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right) \\
&= \|\nabla u\|^2 + \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right) \\
&= \int_{\Gamma_1} -\sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} u_t d\Gamma_1 + \sigma\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2\right)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right) \\
&\quad + \frac{\sigma}{2}\|\nabla u\|^2 \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|\nabla u\|^2 \\
&= \int_{\Gamma_1} -\sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} u_t d\Gamma_1 + \sigma\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2\right)^2 \\
&= \int_{\Gamma_1} -\sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} u_t d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sigma\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

Pour la cinquiéme intégral

$$
\begin{aligned}
-\int_\Omega \left[\int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s) ds\right] u_t(t) dx &= \int_\Omega \nabla u_t \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s) ds dx - \int_{\Gamma_0\cup\Gamma_1} u_t \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s) ds d\Gamma \\
&= \int_\Omega \nabla u_t \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s) ds dx - \int_{\Gamma_1} u_t \int_0^\infty g(s)\frac{\partial\eta(t)}{\partial\nu} ds d\Gamma_1.
\end{aligned}
$$

De ce qui précéde, on trouve :

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|_2^2 + \xi_0\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \sigma\left(\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2\right)^2\right) \\
& + \int_\Omega \nabla u_t \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s) ds dx \\
& + \int_{\Gamma_1}\left\{-\xi_0 - \xi_1\|\nabla u\|_2^2 - \sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\frac{\partial u}{\partial\eta} - \int_0^\infty g(s)\frac{\partial\eta(t)}{\partial\nu} ds\right\} u_t d\Gamma_1 \\
= & \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(L\|\nabla u\|^2\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi_0}{2}\|\nabla u\|^4\right) \\
& + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2\right) + \int_\Omega \nabla u_t \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s) dx \\
& + \int\left\{\left(-L - \xi_0\|\nabla u\|^2 - \sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\right)\frac{\partial u}{\partial\eta} - \int_0^\infty g(s)\frac{\partial\eta}{\partial\upsilon}(s) ds\right\} u_t d\Gamma_1
\end{aligned} \tag{2.3.2}
$$

On a sur Γ_1

$$u_{tt} = -L - \xi_0 \left\|\nabla u\right\|_2^2 - \sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} - \int_0^\infty g(s)\frac{\partial \eta\left(t\right)}{\partial \nu}ds - h(u_t) - f(u).$$

Donc

$$-L - \xi_0 \left\|\nabla u\right\|^2 - \sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} - \int_0^\infty g(s)\frac{\partial \eta\left(t\right)}{\partial \nu}ds = u_{tt} + h(u_t) + f(u)$$

$$\int_{\Gamma_1}\left(u_{tt} + h(u_t) + f(u)\right)u_t d\Gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|^2 + \int_{\Gamma_1} h(u_t)u_t d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} f(u)u_t d\Gamma_1$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|u_t\right\|^2 + \left\|u_t\right\|_{\Gamma_1}^2 + \xi_0\left\|\nabla u\right\|^2 + \frac{\xi_1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2\right] + \left[\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2\right)^2\right] \\ &+ \int_\Omega \nabla u_t \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)dsdx + \int_{\Gamma_1} h(u_t)u_t d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_1} f(u)u_t d\Gamma_1 \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

Nous supposons que

$$\begin{aligned} uf(u) &\geq F(u) \geq 0, \quad \forall u \in \mathbb{R} \\ \int_{\Gamma_1} f(u)u_t d\Gamma_1 &= \int_{\Gamma_1}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2u)f(u)d\Gamma_1 \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1} 2F(u)d\Gamma_1 \\ \int_{\Gamma_1} f(u)u_t d\Gamma_1 &\geq \frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1} F(u)d\Gamma_1. \end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left\|u_t\right\|^2 + \left\|u_t\right\|_{\Gamma_1}^2 + \xi_0\left\|\nabla u\right\|^2 + \frac{\xi_1}{2}\left\|\nabla u\right\|^2 + \int_{\Gamma_1} F(u)d\Gamma_1\right] \\ &+ \left[\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2\right)^2\right] \\ &+ \int_\Omega \nabla u_t \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)dsdx + \int_{\Gamma_1} h(u_t)u_t d\Gamma_1 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

On note

$$\int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)dsdx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\eta(t)\right\|_M^2 - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds \tag{1}$$

$$M = \left\{\xi \in \mathbb{R}^+ \mapsto H_{\Gamma_0}^1\left(\Omega\right) : \int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\xi(s)\right\|^2 ds < \infty\right\}.$$

On remplace (1) *dans la formulle* (2.3.3) *on trouve*

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_t\|^2 + \|u_t\|_{\Gamma_1}^2 + \int_{\Gamma_1} F(u)d\Gamma_1 + \|\eta(t)\|_M^2 + l\|\nabla u\|^2 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^4\right] \\ &+ \left[\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2\right] + \int_{\Gamma_1} u_t h(u_t)d\Gamma_1 - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds. \end{aligned}$$

Donc pour $t \geq 0$ *et comme* $u_t h(u_t) \geq 0$ *,* $E'(t) \leq 0$ *on trouve :*

$$E'(t) \leq -\left[\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2\right] - \int_{\Gamma_1} h(u_t)u_t d\Gamma_1 + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds. \tag{2.3.4}$$

■

Lemme 2.2 *Sous les hypothèses du théorème* 2 *la fonctionnelle* $\phi(t)$ *définie par :*

$$\phi(t) = \int_\Omega u_t(t)\,u(t)\,dx + \int_{\Gamma_1} u_t(t)\,u(t)\,d\Gamma + \frac{\sigma}{4}\|\nabla u\|_2^4, \tag{2.3.5}$$

satisfait que pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \phi'(t) &\leq \|u_t(t)\|^2 + \|u_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 - (l - \delta_1(1+c))\|\nabla u\|^4 \\ &+C_1\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds + C_2\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma. \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Preuve. En différenciant $\phi(t)$ par rapport à t on obtient

$$\phi'(t) = \|u_t(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \int_\Omega u_{tt}(t)\,u(t)\,dx + \int_{\Gamma_1} u_t(t)\,u(t)\,d\Gamma + \sigma(\nabla u(t), \nabla u_t(t))\|\nabla u\|_2^2, \tag{2.3.7}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\nabla u, \nabla ut)\|\nabla u\|_2^2 &= \sigma\int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx.\|\nabla u\|_2^2 \\ &= \sigma\int_\Omega \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\nabla u|^2 dx.\|\nabla u\|_2^2 \\ &= \frac{\sigma}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2.\|\nabla u\|_2^2 \\ &= \frac{\sigma}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^4\right] \\ &= \frac{\sigma}{4}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} u.u_{tt}dx + \int\limits_{\Gamma_1} u.u_{tt}d\Gamma &= \int\limits_{\Omega} u\left[(l+\xi_1\|\nabla u\|^2+\sigma(\nabla u,\nabla u_t))\Delta u + \int\limits_0^{\infty} g\left(s\right)\Delta\eta\left(s\right)ds\right]dx \\ &+\int\limits_{\Gamma_1} -\left\{\left(l_1+\xi_0\|\nabla u\|^2+\sigma\left(\nabla u,\nabla u_t\right)\right)\frac{\partial\eta}{\partial\upsilon}\right. \\ &\left.+\int\limits_0^{\infty} g\left(s\right)\frac{\partial u}{\partial\upsilon}\left(s\right)ds + h\left(u_t\right) + f\left(u\right)ud\Gamma\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-(l+\xi_1\|\nabla u\|^2)\int_{\Omega}\left(\nabla u\right)^2 dx + \left(l+\xi_1\|\nabla u\|^2\right)\int\limits_{\Gamma_1} u\frac{\partial u}{\partial\eta}d\Gamma + \sigma(\nabla u,\nabla u_t)\int\limits_{\Gamma_1} u\frac{\partial\eta}{\partial\upsilon}d\Gamma \qquad (2)\\ &-\sigma(\nabla u,\nabla u_t)\int\limits_{\Omega}(\nabla u)^2dx + \int\limits_{\Gamma_1} u\left[\int\limits_0^{\infty} g(s)\frac{\partial\eta}{\partial\upsilon}ds\right]d\Gamma - \int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_0^{\infty} g(s)\nabla\eta(s)dsdx\end{aligned}$$

et

$$-\int\limits_{\Gamma_1}[(l+\xi_1\|\nabla u\|^2+\sigma(\nabla u,\nabla u_t)]\frac{\partial u}{\partial\eta}.ud\Gamma - \int\limits_{\Gamma_1} u\int\limits_0^{\infty} g(s)\frac{\partial\eta}{\partial\upsilon}(s)dsd\Gamma - \int\limits_{\Gamma_1} u.h(u_t)d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_1} u.f(u)d\Gamma. \quad (3)$$

$(1)+(2)$ on obtient

$$\begin{aligned}&-(l+\xi_1\|\nabla u\|^2)\|\nabla u\|^2 - (\sigma(\nabla u,\nabla u_t))\|\nabla u\|^2,\\ &-\int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_0^{\infty} g(s)\nabla\eta(s)dsdx - \int\limits_{\Gamma_1} u.h(u_t)d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_1} u.f(u)d\Gamma,\end{aligned}$$

et comme

$$\phi'(t) = \|u_t\|^2 + \|u_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \sigma(\nabla u,\nabla u_t)\|\nabla u\|^2 + \int\limits_{\Omega} u.u_{tt}dx + \int\limits_{\Gamma_1} u.u_{tt}d\Gamma,$$

on trouve

$$\begin{aligned}\phi'(t) &= \|u_t\|^2 + \|u_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)} - (l+\xi_0\|\nabla u\|^2)\|\nabla u\|^2 - \int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_0^{\infty} g(s)\nabla\eta(s)dsdx, \qquad (2.3.8)\\ &-\int\limits_{\Omega} u.h(u_t)d\Gamma - \int u.f(u)d\Gamma.\end{aligned}$$

Maintenant on applique l'inégalité de Young :

$$
\begin{aligned}
-\int_{\Omega}\nabla u\int_{0}^{\infty}g(s)\nabla\eta(s)dsdx &\leqslant \left|\int_{\Omega}\nabla u\int_{0}^{\infty}g(s)\nabla\eta(s)dsdx\right| \\
&\leqslant \delta_1\|\nabla u\|^2+\frac{1}{4\delta_1}\int_{\Omega}\left[\int_{0}^{\infty}g(s)\nabla u(s)ds\right]dx.
\end{aligned}
$$

Si on utilise l'inégalité de Cauchy Shwartez on obtient

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\Omega}\nabla u\int_{0}^{\infty}g(s)\nabla\eta(s)dsdx-\int_{\Omega}\nabla u\int_{0}^{\infty}g(s)\nabla\eta(s)dsdx \\
\leqslant\; &\delta_1\|\nabla u\|^2+\frac{1}{4\delta_1}\int_{\Omega}\left[\int_{0}^{\infty}g(s)ds\right].\left[\int_{0}^{\infty}g(s)\left|\nabla\eta\right|^2ds\right] \\
\leqslant\; &\delta_1\|\nabla u\|^2+\frac{1}{4\delta_1}[\int_{\Omega}(\int_{0}^{\infty}g(s)ds\int_{0}^{\infty}g(s)\left|\nabla\eta(s)\right|^2dsdx] \\
\leqslant\; &\delta_1\|\nabla u\|^2+\frac{\xi_0-l}{4\delta_1}\int_{\Omega}\left[\int_{0}^{\infty}g(s)\left|\nabla\eta(s)\right|^2ds\right]dx \\
\leqslant\; &\delta_1\|\nabla u\|^2+\frac{1-l}{4\delta_1}\int_{0}^{\infty}g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2ds-\int_{\Omega}\nabla u\int_{0}^{\infty}g(s)\nabla\eta(s)dsdx \\
\leqslant\; &\delta_1\|\nabla u\|^2+\frac{(1-l)}{4\delta_1}\int_{0}^{\infty}g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2ds.
\end{aligned}
$$

On a l'injection suivante $H^1_{\Gamma_0}\rightarrow L^2(\Gamma_1)$

$$
-\int_{\Gamma_1}h(u_t).ud\Gamma\leqslant\int_{\Gamma_1}\left|h(u_t).u\right|d\Gamma.
$$

D'aprés l'inégalité de Cauchy Shwartez :

$$
\int_{\Gamma_1}\left|h(u_t).u\right|d\Gamma\leqslant\|u\|_{L^2(\Gamma_1)}.\left[\int_{\Gamma_1}\left|h(u_t)\right|^2d\Gamma\right]^{\frac{1}{2}}.
$$

D'aprés l'injection il existe c

$$
\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(\Gamma_1)} &\leqslant c\|u\|_{H^1_{\Gamma_0(\Omega)}}, \\
&\leqslant c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Alors

$$\int_{\Gamma_1} |h(u_t).u|\, d\Gamma \leqslant c\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.\left\{\int_{\Gamma_1} |h(u_t)|^2\, d\Gamma\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Maintenant on applique l'inégalité de Young :

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} |h(u_t).u|\, d\Gamma_1 &\leqslant c\|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}\left[\int_{\Gamma_1} |h(u_t)|^2\, d\Gamma\right]^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant c\delta_2\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4\delta_2}\int_{\Gamma_1} |h(u_t)|^2\, d\Gamma,\end{aligned}$$

on trouve :

$$\begin{aligned}\phi'(t) &\leqslant \|u_t\|^2 + \|u_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)} - (l+\xi_1\|\nabla u\|^2)\|\nabla u\|^2 - \int_{\Gamma_1} uf(u)d\Gamma\\ &+\delta_1\|\nabla u\|^2 + \frac{(1-l)}{4\sigma_1}\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta\|^2 ds + c\delta_2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\\ &+\frac{1}{4\delta_2}\int_{\Gamma_1} |h(u_t)|^2\, d\Gamma,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\phi'(t) &\leqslant \|u_t\|^2 + \|u_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)} - l\|\nabla u\|^2 - \xi_1\|\nabla u\|^4\\ &-\int_{\Gamma_1} uf(u)d\Gamma + \delta_1\|\nabla u\|^2 + \frac{(1-l)}{4\delta_1}\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta\|^2 ds\\ &+c\delta_2\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{4\delta_1}\int_{\Gamma_1} |h(u_t)|^2\, d\Gamma,\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}\phi'(t) &\leqslant \|u_t\|^2 + \|u_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)} - [l-\delta_1(1+c)]\,\|\nabla u\|^2\\ &-\xi_0\|\nabla u\|^4 + \frac{(1-l)}{4\delta_1}\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds\\ &-\int_{\Gamma_1} uf(u)d\Gamma + \frac{1}{4\delta_2}\int_{\Gamma_1} |h(u_t)|^2\, d\Gamma. \qquad (2.3.9)\end{aligned}$$

Maintenant on prend $\delta_1 > 0$ alors :

$$l - (1+c)\delta_1 > \frac{l}{2}.$$

Avec

$$c = \max\left\{\frac{1}{4\delta_1}, \frac{1-l}{4\delta_1}\right\}.$$

Donc la preuve est terminé ■

Lemme 2.3 *définir la fonctionnelle $\psi(t)$ comme*

$$\psi(t) = -\int_\Omega u_t(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)dsdx - \int_{\Gamma_1} u_t(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)dsd\Gamma.$$

Sous l'hypothése du théoréme 2, alors la fonctionnelle $\psi(t)$ satisfaite pour tout $\delta_2 > 0$ avec des canstants K_1 et K_2

$$\begin{aligned}\psi'(t) \leq\ & -\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\|u_t\|^2 - \frac{3}{4}(\xi_0 - l)\|u_t\|^2_{\Gamma_1} + \delta_2\|\nabla u\|^2 \\ & +\sigma^2 E(0)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 + K_1\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \\ & +K_2\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma. \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

Avec :

$$\begin{aligned} K_1 =\ & \left\{\frac{\xi_0 - l}{4\delta_2}\left(l + \frac{2b}{l}E(0)\right)^2 + \frac{\xi_0 - l}{2l}\right. \\ & \left. +(\xi_0 - l) + \frac{\xi_0 - l}{2}c_1 + \frac{\xi_0 - l}{4\delta_2}c_1\right\}, \end{aligned}$$

$$K_2 = \left\{\frac{g(0)C_\Omega^2}{(\xi_0 - l)} + \frac{g(0)C_{\Omega'}^2}{(\xi_0 - l)}\right\}.$$

Preuve. La dérivée de la fonctionnelle $\psi(t)$ par rapport à t, donnée par

$$\begin{aligned}\psi'(t) =\ & -\int_\Omega u_{tt}(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)dsdx - \int_{\Gamma_1} u_{tt}(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)dsd\Gamma \\ & -\int_\Omega u_t(t)\int_0^\infty g(s)\eta_t(s)dsdx - \int_{\Gamma_1} u_t(t)\int_0^\infty g(s)\eta_t(s)dsd\Gamma. \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Donc

$$\begin{aligned} & -\int_\Omega u_{tt}(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)dsdx \\ =\ & \int_\Omega\left[-\left(l + \xi_0\|\nabla u\|^2 + \sigma(\nabla u, \nabla u_t)\Delta u - \int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s)ds\right)\right]\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right)dx \\ =\ & \int_\Omega -\left(l + \xi_0\|\nabla u\|^2 + \sigma(\nabla u, \nabla u_t)\Delta u\right)\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right)dx \\ & -\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s)ds\right)\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)ds\right)dx. \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

On applique La formulle de Green

$$
\begin{aligned}
= & -\int_{\Gamma_1}\left(l+\xi_1\|\nabla u\|^2+\sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\right) \frac{\partial u}{\partial v}\left(\int_0^{\infty} g(s) \eta(s) d s\right) d \Gamma \\
& +\int_{\Omega}\left(l+\xi_1\|\nabla u\|^2+\sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\right) \nabla u(t)\left(\int_0^{\infty} g(s) \nabla \eta(s) d s\right) d x \\
& +\int_{\Omega}\left(\int_0^{\infty} g(s) \nabla \eta(s) d s\right)^2 d x-\int_{\Gamma_1}\left(\int_0^{\infty} g(s) \frac{\partial \eta}{\partial v}(s) d s\right) d \Gamma, \qquad (2.3.13)
\end{aligned}
$$

alors puisque $E(t)$ est non croissante, alors on a

$$
\frac{l}{2}\|\nabla u\|^2 \leq E(t) \leq E(0).
$$

Ce qui nous donne

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|^2 & \leq \frac{2}{l} E(0) \qquad (2.3.14) \\
& \leq \delta^{\prime}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{4 \delta^{\prime}}\left(l+2 \frac{\xi_1}{l} E(0)\right)^2\left(\xi_0-l\right)\left(\int_0^{\infty} g(s)\|\nabla \eta(s)\|^2 d s\right) \\
& \leq \delta^{\prime}\|\nabla u\|^2+\frac{\left(\xi_0-l\right)}{4 \delta^{\prime}}\left(l+2 \frac{\xi_1}{l} E(0)\right)^2\left(\int_0^{\infty} g(s)\|\nabla \eta(s)\|^2 d s\right),
\end{aligned}
$$

alors on trouve

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega}\left(l+\xi_1\|\nabla u\|^2\right) \nabla u(t)\left(\int_0^{\infty} g(s) \nabla \eta(s) d s\right) d x \\
\leq & \left(l+2 \frac{\xi_1}{l} E(0)\right) \int_{\Omega} \nabla u(t)\left(\int_0^{\infty} g(s) \nabla \eta(s) d s\right) d x \\
\leq & \delta_3\|\nabla u\|^2+\frac{1}{4 \delta^{\prime}}\left(l+2 \frac{\xi_1}{l} E(0)\right)^2 \int_{\Omega}\left\{\int_0^{\infty} g(s) \nabla \eta(s) d s\right\}^2 d x \\
\leq & \delta^3\|\nabla u\|^2+\frac{1}{4 \delta^3}\left(l+2 \frac{\xi_1}{l} E(0)\right)^2 \int_{\Omega}\left(\int_0^{\infty} g(s) d s\right)\left\{\int_0^{\infty} g(s)|\nabla \eta(s)|^2 d s\right\} d x, \qquad (2.3.15)
\end{aligned}
$$

on applique l''inégalité de Young avec ε :

$$
|a b| \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2+\frac{1}{2 \varepsilon}|b|^2,
$$

avec l'inégalité de cauchy-shwartez, avec Fubini

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right) \nabla u(t)\left(\int_0^{\infty} g(s) \nabla \eta(s) d s\right) d x \\
\leq & \frac{l}{2} \sigma^2\left(\nabla u, \nabla u_t\right)^2\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2 l}\left[\int_0^{\infty} g(s) d s . \int_{\Omega}\left(\int_0^{\infty} g(s) \nabla \eta(s) d s\right) d x\right] \\
\leq & \frac{l}{2} \sigma^2\left(\nabla u, \nabla u_t\right)^2 \frac{2}{l} E(0)+\frac{1}{2 l}\left(\xi_0-l\right) \int_{\Omega} \int_0^{\infty} g(s)|\nabla \eta(s)|^2 d s d x \\
\leq & \sigma^2\left(\frac{1}{2} \frac{d}{d t}\|\nabla u\|^2\right)^2 E(0)+\frac{\left(\xi_0-l\right)}{2 l} \int_0^{\infty} g(s)\|\nabla \eta(s)\|^2 d s. \qquad (2.3.16)
\end{aligned}
$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)ds\right)^2 dx &= \int_\Omega \left[\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)ds\right]\left[\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)ds\right] dx \\
&= \int_0^\infty g(s)\left[\int_\Omega \nabla\eta(s)dxds. \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)ds\right] \\
&\leq (\xi_0 - l)\int_0^\infty g(s)\int_\Omega |\nabla\eta(s)|^2 dxds \\
&\leq (\xi_0 - l)\int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds, \qquad (2.3.17)
\end{aligned}$$

on applique Cauchy_Shwartez avec Young, avec l'injection de $H^1_{\Gamma_0} \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$ et la relation $\|u\|_{H^1_0} = \|\nabla u\|_{L^2}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} h(u_t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)dsd\Gamma &\leq \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|h(u_t)|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}\left(\int_0^\infty g(s)|\eta(s)|\,ds\right)^2 d\Gamma \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|h(u_t)|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}(\xi_0 - l)\int_0^\infty g(s)\left\|\eta(s)\right\|^2_{L^2(\Gamma)} ds,
\end{aligned}$$

il existe un constant c positive :

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|h(u_t)|^2 d\Gamma + \frac{(\xi_0 - l)}{2}c\int_0^\infty g(s)\left\|\eta(s)\right\|^2_{H^1_{\Gamma_0}} ds \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|h(u_t)|^2 d\Gamma + \frac{(\xi_0 - l)}{2}c\int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds. \qquad (2.3.18)
\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Young

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} f(u)\int_0^\infty g(s)\eta(s)dsd\Gamma &\leq \delta'_3\int_{\Gamma_1}|f(u)|^2 d\Gamma \\
&\quad + \frac{(\xi_0 - l)}{3\delta'_3}c_1\int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds. \qquad (2.3.19)
\end{aligned}$$

combainon $(2.3.14) - (2.3.19)$ on trouve I_1 sous la forme

$$\begin{aligned}
I_1 \leq\ & \left[\frac{(\xi_0 - l)}{4\delta'_2}\left(l + \frac{2b}{l}E(0)\right)^2 + \frac{(\xi_0 - l)}{2l} + (\xi_0 - l)\right. \\
& \left. + \frac{(\xi_0 - l)}{2}c_1 + \frac{(1-l)}{4\delta'_2}c_1\right].\int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds + \delta_2\left\|\nabla u\right\| ds \\
& + \sigma^2 E(0)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2\right)^2 + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|h(u_t)|^2 d\Gamma. \qquad (2.3.20)
\end{aligned}$$

D'autre part on a

$$I_2 = -\int_\Omega u_t\int_0^\infty g(s)\eta_t(s)dsdx.$$

On a : $\eta_t = -\eta_s + u_t$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty g(s)\eta_t(s)dsdx &= \int_0^\infty g(s)\left[u_t - \eta_s(s)\right]ds \\
&= -\int_0^\infty g(s)\eta_s(s)ds + \eta_s(s)u_t ds,
\end{aligned}$$

on applique l'intégration par partie :

$$\int_0^\infty g(s)\eta_t(s)dsdx = \int_0^\infty g'(s)\eta_s(s)ds + (1-l)\,u_t(t),$$

donc on trouve :

$$\begin{aligned}
I_2 &= -\left[\int_\Omega (\xi_0 - l)\,u_t^2(t)dt + \int_\Omega \int_0^\infty g'(s)\eta(s)ds.u_t dx\right] \\
&= -(\xi_0 - l)\left\|u_t\right\|^2 - \int_\Omega u_t \int_0^\infty g'(s)\eta\left(s\right)dsdx,
\end{aligned}$$

puis on applique l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq -(\xi_0 - l)\left\|u_t\right\|^2 + \frac{(\xi_0 - l)}{4}\left\|u_t\right\|^2 \\
&\quad + \frac{1}{(\xi_0 - l)}\int_\Omega \left[\int_0^\infty g'(s)\eta(s)ds\right]^2 dx \\
&\leq -\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\left\|u_t\right\|^2 + \frac{1}{(\xi_0 - l)}\int_0^\infty -g'(s)ds\left[\int_0^\infty -g'(s)\left\|\eta\left(s\right)\right\|^2 ds\right] \\
&\leq -\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\left\|u_t\right\|^2 + \frac{g(0)}{\xi_0 - l}\left[\int_0^\infty -g'(s)\left\|\eta\left(s\right)\right\|^2 ds\right],
\end{aligned}$$

et on applique l'inégalité de Poincaré :

$$\begin{aligned}
\left\|\eta\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq C_\Omega^2\left\|\eta\left(s\right)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq C_\Omega^2\left\|\nabla\eta\left(s\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

par conséquent

$$I_2 \leq -\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\left\|u_t\right\|^2 + \frac{g(0)C_\Omega^2}{\xi_0 - l}\left[\int_0^\infty -g'(s)\left\|\nabla\eta\left(s\right)\right\|^2 ds\right]. \tag{2.3.21}$$

Les mêmes arguments nous donne

$$I_3 = -\int_{\Gamma_1} u_t(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)dsd\Gamma,$$

et par la même méthode et même étapes on trouve

$$I_3 \leq -\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\left\|u_t\right\|^2_{L^2(\Gamma_1)} - \frac{g(0)C_\Omega^2}{\xi_0 - l}\left[\int_0^\infty -g'(s)\left\|\nabla\eta\left(s\right)\right\|^2 ds\right]. \tag{2.3.22}$$

On remplaçons (I_1) et $(2.3.21)$ et $(2.3.22)$ dans $(2.3.11)$, on trouve :

$$\begin{aligned}\psi'(t) \leq & -\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\|u_t\|^2 + \left(\frac{-3}{4}(\xi_0 - l)\right)\|u_t\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \delta_2\|\nabla u\|^2 \\ & +\sigma^2 E(0)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 + K_1\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \\ & +K_2\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|h(u_t)|^2 d\Gamma. \end{aligned} \tag{2.3.23}$$

Avec :

$$\begin{aligned} K_1 = & \left\{\frac{\xi_0 - l}{4\delta_2}\left(l + \frac{2b}{l}E(0)\right)^2 + \frac{\xi_0 - l}{2l}\right. \\ & \left. +(\xi_0 - l) + \frac{\xi_0 - l}{2}c_1 + \frac{\xi_0 - l}{4\delta_2}c_1\right\}, \end{aligned}$$

$$K_2 = \left\{\frac{g(0)C_\Omega^2}{(\xi_0 - l)} + \frac{g(0)C_{\Omega'}^2}{(\xi_0 - l)}\right\}.$$

■

Lemme 2.4 *Il existe un constant positive m telle que pour tout $t \geq 0$*

$$L'(t) \leq -mE(t) + C\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds + C\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma. \tag{2.3.24}$$

Preuve. *On utilise les formules de $E'(t)$, $\Phi'(t)$, $\psi'(t)$*

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -\left[\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right]\|u_t\|^2 - \left[\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right]\|u_t\|^2_{\Gamma_1} \\ & -[l\varepsilon_1 + \delta_1(1+c)\varepsilon_1 - \delta_2\varepsilon_2]\|\nabla u\|^2 \\ & -\xi_0\varepsilon_1\|\nabla u\|^4 - \sigma(1 - \sigma E(0)\varepsilon_2)(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2)^2 \\ & +\left(\frac{1}{2} - k_2\varepsilon_2\right)\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta\|^2 ds \\ & +\left(\left(\frac{\xi_0 - l}{4\delta_1}\right)\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2\right)\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \\ & +\left(\frac{1}{4\delta_1}\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\int_{\Gamma_1}|h(u_t)|^2 d\Gamma. \end{aligned} \tag{2.3.25}$$

On choisit $\delta_2 > 0$ verifieé

$$\delta_2 < \frac{3l}{8}(\xi_0 - l)$$

qui nous donne

$$\frac{2}{l}\delta_2\varepsilon_2 < \frac{3}{4}(\xi_0 - l)\varepsilon_2.$$

Pour $\varepsilon_2 > 0$ *et* $\delta_2 > 0$ *fixé et on pose*

$$\begin{cases} \frac{1}{4\delta_1}\varepsilon_1 = C_{\varepsilon_1}, \\ \frac{\varepsilon_2}{2} = C_{\varepsilon_2}. \end{cases}$$

Et pour $\varepsilon_2 > 0,$ *et pour* ε_1 *est plus petit* $\varepsilon_1 > 0$ *on trouve*

$$\frac{3(\xi_0 - l)}{4}\varepsilon_2 - \varepsilon_1 > 0,$$

$$(\varepsilon_1 + \delta_1 (1 + c) \varepsilon_1 - \delta_2\varepsilon_2) > 0,$$

et

$$\left(\frac{1}{2} - k_2\varepsilon_2\right) > 0,$$

on trouve pour $t \geq 0$

$$L'(t) \leq -mE(t) + C\int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds + C\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma.$$

■

Lemme 2.5 *Sous les hypothése du théoremes 2, il existe une constante positive* $\gamma > 0$ *de tel sorte que pour tout* $\varepsilon_0 > 0$

$$G'\left(\varepsilon_0 E(t)\right)\int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds \leq -\gamma_1 E'(t) + \gamma_1 E(t)G'(\varepsilon_0 E(t)). \tag{2.3.26}$$

Preuve. On a deux cas pour prouver le théoreme 2

cas 2.1 *La fonction* h_0 *est linéaire, on a* (A_2) *dite :* $\exists c_1, c_2 > 0,\ \forall\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} h_0\left(|s|\right) \leq |h(s)| \leq h_0^{-1}\left(|s|\right), & |s| \leq \varepsilon, \\ c_1\left|s\right| \leq |h(s)| \leq c_2\left|s\right|, & |s| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

donc

$$h^2(s) \leq c_2 sh(s),\ \forall s \in \mathbb{R}^+$$

alors

$$h^2(u_t) \leq c_2 u_t h(u_t) \tag{4}$$

On a d'aprés les résultats précendents :

$$E'(t) \leq -\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2\right)^2 - \int u_t h(u_t)d\Gamma + \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds,$$

et

$$E'(t) \leq 0,$$

$$L'(t) \leq -mE(t) + C\int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds + C\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma.$$

Alors come $E'(t) \leq 0$:

$$-\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2\right)^2 - \int u_t h(u_t)d\Gamma + \frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds \leq 0,$$

implique

$$-\int u_t h(u_t)d\Gamma \leq -\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds + \sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2\right)^2,$$

donc

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -\int u_t h(u_t)d\Gamma \\ &\leq -\frac{1}{2}\int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\eta(s)\right\|^2 ds + \sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|^2\right)^2, \end{aligned}$$

alors

$$\int u_t h(u_t)d\Gamma \leq E'(t) \tag{5}$$

D'aprés (4) *et* (5) *on trouve*

$$\begin{aligned} C\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma &\leq C\int_{\Gamma_1} C_2 u_t h(u_t)d\Gamma \\ &\leq -CE'(t). \end{aligned}$$

On a

$$\left(W_1\left(\varepsilon_1\right)\right)' \geq k_1$$

ou

$$W_1\left(\tau\right) = \int_\tau^1 \frac{1}{CsG'(\varepsilon_1 s)}ds,$$

et on a

$$\varepsilon_2'(t) \leq -k_1\varepsilon_1(t)G'\left(\varepsilon_1\right)$$

implique

$$\int_0^t \left(W_1\left(\varepsilon_1\right)\right)' dt \geq \int_0^t k_1 dt,$$

on trouve

$$W_1\left(\varepsilon_1\right) \geq k_1 t + k_2,$$

donc

$$\varepsilon_1(t) \leq W_1^{-1}\left(k_1 t + k_2\right)$$

Ce qui prouve le théoréme 2

cas 2.2 *La fonction h_0 est non linéaire sur* $[0.\xi]$.

En suivant les arguments comme dans $[20]$ on suppose d'abord que

$$\max\{r, h_0(r)\} < \xi$$

sinon on choisit plus petit r laisser

$$\xi_1 = \min\{r, h_0(r)\}$$

ça suit

$$(A_2)\, \xi_1 \leqslant |s| \leq \xi,$$

donc

$$\begin{aligned} |h(s)| &\leq \frac{h_0^{-1}(|s|)}{|s|}|s| \\ &\leq \frac{h_0^{-1}(|\xi|)}{\xi_1}|s|, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |h(s)| &\geq \frac{h_0(|s|)}{|s|}|s| \\ &\leq \frac{h_0(|\xi_1|)}{|\xi_1|}|s|. \end{aligned}$$

Et on a aussi

$$\begin{cases} h_0(|s|) \leq |h(s)| \leq h_0^{-1}(|s|) \text{ pour } |s| \leq \xi_1, \\ c_1|s| \leq |h(s)| \leq c_2|s| \text{ pour } |s| \geq \xi_1. \end{cases} \tag{2.3.27}$$

Qui nous donne pour tous $|s| \leq \xi_1$,

$$\begin{aligned} H\left(h^2(s)\right) &= |h(s)|\, h_0(|h(s)|) \\ &\leq sh(s), \end{aligned}$$

alors

$$h^2(s) \leq H^{-1}(sh(s)), \ \ \forall |s| \leq \xi_1. \tag{2.3.28}$$

Comme dans $[19]$, nous désignons

$$\Gamma_{11} = \{x\epsilon\Gamma_1 : |u_t(t)| > \xi_1\},$$

et

$$\Gamma_2 = \{x\epsilon\Gamma_1 : |u_t(t) \leq \xi_1|\}.$$

Il s'ensuit $(2.3.27)$ de la Γ_{12},

$$\begin{aligned} u_t h(u_t) &\leq \xi_1 h_0^{-1}(\xi_1) \\ &\leq h_0(r) r \\ &= H^2(r). \end{aligned} \tag{2.3.29}$$

Nous définissons $J(t)$ par :

$$J(t) = \frac{1}{|\Gamma_{12}|} \int\limits_{\Gamma_{12}} u_t h(u_t) \, d\Gamma,$$

$$H^{-1}(J(t)) \geq c \int\limits_{\Gamma_{12}} H^{-1}(u_t h(u_t)) \, d\Gamma,$$

puisque H^{-1}est concave on déduit de l'inégalité de Jensen que :

$$H^{-1}(J(t) \geq c \int\limits_{\Gamma_{12}} H^{-1}(u_t h(u_t)) \, d\Gamma, \tag{2.3.30}$$

et

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Gamma_1} h^2(u_t) \, d\Gamma &\leq \int\limits_{\Gamma_{12}} H^{-1}(u_t h(u_t)) \, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_{11}} h^2(u_t) \, d\Gamma \\ &\leq cH^{-1}(J(t)) - cE'(t). \end{aligned}$$

Laquelle

$$k'(t) \leq -mE(t) + c\int\limits_0^\infty g(s) \|\nabla\eta(s)\|^2 ds + cH^{-1}(J(t)),$$

ou

$$k(t) = \lambda(t) + cE(t),$$

et

$$k(t) \sim E(t),$$

pour

$$\begin{aligned} \xi_0 &\leq rc_0 \\ &> 0 \end{aligned}$$

et le fait

$$E' < 0,$$

$$H' > 0,$$

et

$$H'' > 0.$$

On obtient que la fonctionnelle $k_1(t)$ définit par

$$k_1(t) = H'\left(\xi_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) k(t) + c_0 E(t),$$

est équivalent $E(t)$

$$\begin{aligned} k_1'(t) &= \xi_0 \frac{E(t)}{E(0)} H''\left(\xi_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) k(t) + H'\left(\xi_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) k'(t) + c_0 E'(t) \\ &\leq -mE(t)H'\left(\xi_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + cH^{-1}\left(J\left(t\right)\right) H'\left(\xi_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) + c_0 E'(t) \\ &\quad + cH'\left(\xi_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right) \int_0^\infty g(s) \|\nabla \eta(s)\|^2 ds. \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

Et on note maintenant la fonction conjuguée de la fonction H convexe parH^* voir ,par exemple arnold $[1]$,et lasieckaand tataru $[29]$,i,e..

$$H^*(s) = \sup(st - H(t)), \quad t\epsilon R^+,$$

alors

$$H^*(s) = s(H')^{-1}(s) - H\left[(H')^{-1}(s)\right].$$

Est la transformée de légende de H qui satisfait :

$$AB \leq H^*(A) + H(B).$$

Pour

$$A = H'\left(\xi_0 \frac{E(t)}{E(0)}\right)$$

et

$$B = H^{-1}\left(J\left(t\right)\right),$$

et notant

$$H^*(s) \leq s(H')^{-1}(s),$$

et on utilisant (2.3.31) nous verrons que :

$$\begin{aligned} k_1'(t) &\le -mE(t)H'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \\ &\quad +c\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}H'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \\ &\quad -cE'(t)+c_0E'+cH'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2ds \\ &\le -(mE(0)-c\xi_0)\frac{E(t)}{E(0)}H'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \\ &\quad -(c-c0)\,E'(t)+cH'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2ds. \end{aligned} \tag{2.3.32}$$

Dans (3.32) nous choisisson si petit que

$$mE(0)-c\xi_0>0$$

et c_0 si grand que $c-c_0<0$ pour obtenir n'importe $t>0$,

$$k'(t)\le -k\frac{E(t)}{E(0)}H'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)+cH'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2ds. \tag{2.3.33}$$

Multiplier (2.3.33) par $G'(\xi_0E(t))$ et on utilisant (2.3.26) on obtient :

$$\begin{aligned} G'(\xi_0E(t))\,k_1'(t) &\le -k\frac{E(t)}{E(0)}G'(\xi_0E(t))\,H'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \\ &\quad -\gamma_2E'(t)H'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \\ &\quad +\gamma_2\xi_0E(t)G'(\xi_0E(t))H'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \\ &\le -k\frac{E(t)}{E(0)}G'(\xi_0E(t))H'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)-cE'(t) \\ &\quad +\gamma^2\xi_0E(t)G'(\xi_0E(t))H'\left(\xi_0\frac{E(t)}{E(0)}\right). \end{aligned} \tag{2.3.34}$$

Définir la fonction $k_2(t)$ par :

$$k_2(t)=G'(\xi_0E(t))k_1(t)+cE(t),$$

c'est facile à vérifier : $k_2\sim E(t)$

$$\beta_1k_2(t)\le E(t)\le\beta_2k_2(t). \tag{2.3.35}$$

Notant

$$E'(t) \leq 0$$

et

$$G'' > 0$$

nous déduisons de $(2.3.34)$

$$k_2'(t) \leq -(k - \gamma^2 \xi_0) \frac{E(t)}{E(0)} G' \left(\xi_1 \frac{E(t)}{E(0)} \right) H' \left(\xi_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right). \quad (2.3.36)$$

Qui

$$\xi_1 = \xi_0 E(0)$$

pour un choix adapté ξ_0 nous obtenons de $(2.3.36)$ que pour une constante $k_1 > 0$

$$k_2'(t) \leq -k_1 \frac{E(t)}{E(0)} G' \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) H' \left(\xi_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) = -k_1 w_2 \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right). \quad (2.3.37)$$

Ou

$$W_2(t) = tH'(\xi_0 t) G'(\xi_1 t)$$

dénoter

$$R(t) = \frac{\beta_1 k_2(t)}{E(0)}$$

il en découle $(2.3.35)$

$$R(t) \sim E(t). \quad (2.3.38)$$

Par $(2.3.37)$ nous obtenons pour certains $k_2(t) > 0$,

$$R'(t) \leq -k_2 w_2(R(t)). \quad (2.3.39)$$

Ce qui implique

$$\left(w_1 \left(R \left(t \right) \right) \right)' \geq k_2,$$

ou

$$w_1(t) = \int_t^1 w_2(s) ds, \text{ pour } t \epsilon (0, 1]. \quad (2.3.40)$$

En intégrant $(2.3.39)$ extérieur $[0, t]$ nous avons pour tout $t > 0$,

$$R(t) \leq w_1^{-1} \left(k_2 t + k_3 \right).$$

Alors $(2.2.5)$ decoule de $(2.3.38)$ la preuve est terminer. ■

Conclusion

La décroissance générale à été traité dans ce travail d'un problème de membrane élastique avec le condition aux limites de Dirichlet homogène dans un partie de la frontière et un condition aux limites non local dynamique sur l'autre partie, par l'utilisation de quelque propriétés des fonctions convexe et sous hypothèses appliqué sur la fonction de relaxation.
Notre objectif ultime après ce travail de cette mémoire est de traiter autres problèmes appartenant à les problèmes d'évolution non linéaire contient des termes d'amortissement un peu compliqué avec d'autres méthodes et techniques pour obtenir différent type de décroissance.

Bibliographie

[1] Arnold, V.I. : Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer, NewYork (1989)

[2] R. W. Bass and D. Zes, Spillover, nonlinearity and flexible structures, in The Fourth NASA Workshop on Computational Control of Flexible Aerospace Systems, NASA Conference Publication 10065 (ed. L.W.Taylor), 1991, 1-14.

[3] Benaissa, A., Ferhat, M. : Stability results for viscoelastic wave equation with dynamic boundary conditions. $arXiv : 1801.02988v1$

[4] Berrimi, S., Messaoudi, S. : Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source. Nonlinear Anal. TMA 64, 2314–2331 (2006)

[5] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Prates Filho, J.S., Soriano, J.A. : Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping. Differ. Integr. Equ. 14, 85–116 (2001)

[6] Cavalcanti, M.M., Domingos Cavalcanti, V.N., Soriano, J.A. : Exponentian decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. Electron. J. Differ. Equ. 44, 1–14 (2002)

[7] Cavalcanti, M.M., Oquendo, H. : Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. SIAM J. Control Optim. 42(4), 1310–1324 (2003)

[8] Dafermos, C.M. : Asymptotic stability in viscoelasticity. Arch. Ration. Mech.Anal. 37, 297–308 (1970)

[9] Doronin, G.G., Larkin, N.A. : Global solvability for the quasilinear damped wave equation with nonlinear second-order boundary conditions. Nonlinear Anal. TMA 8, 1119–1134 (2002)

[10] E. H. Dowell, Aeroelasticity of plates and shells, Groninger, NL, Noordhoff Int. Publishing Co. (1975).

[11] Fabrizio, M., Polidoro, S. : Asymptotic decay for some differential systems with fading memory. Appl. Anal. 81(6), 1245–1264 (2002)

[12] Feng, Baowei. General decay rates for a viscoelastic wave equation with dynamic boundary conditions and past history. Mediterr. J. Math. 15 (2018), no. 3, Art. 103, 17 pp.

[13] Ferhat, M., Hakem, A. : On convexity for energy decay rates of a viscoelastic wave equation with a dynamic boundary and nonlinear delay term. Facta Univ.Ser. Math. Inform. 30, 67–87 (2015)

[14] Ferhat, M., Hakem, A. : Asymptotic behavior for a weak viscoelastic wave equations with a dynamic boundary and time varying delay term. J. Appl. Math.Comput. 51, 509–526 (2016)

[15] Ferhat, M., Hakem, A. : Global existence and energy decay result for a weak viscoelastic wave equation with a dynamic boundary and nonlinear delay term.Comput. Math. Appl. 71, 779–804 (2016)

[16] Gerbi, S., Said-Houari, B. : Local existence and exponential growth for a semilinear damped wave equation with dynamic boundary conditions. Adv. Differ.Equ. 13, 1051–1074 (2008)

[17] Gerbi, S., Said-Houari, B. : Asymptotic stability and blow up for a semilinear damped wave equation with dynamic boundary conditions. Nonlinear Anal.TMA 74, 7137–7150 (2011)

[18] Gerbi, S., Said-Houari, B. : Global existence and exponential growth for a viscoelastic wave equation with dynamic boundary conditions. Adv. Nonlinear Anal. 2, 163–193 (2013)

[19] Guesmia, A. : Asymototic stability of abstract dissipative systems with infinite memory. J. Math. Anal. Appl. 382, 748–760 (2011)

[20] P. Holmes, Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations-a fnite dimensional analysis, Journal of Sound and Vibration, 53(1977), pp. 471-503.

[21] P. Holmes, J. E. Marsden, Bifurcation to divergence and flutter flow induced oscillations ; an in nite dimensional analysis, Automatica, Vol. 14 (1978).

[22] Kafini, M., Mustafa, M.I. : On the stabilization of a non-dissipative Cauchy viscoelastic problem. Mediterr. J. Math. 13, 5163–5176 (2016)

[23] Komornik, V. : Exact Controllability and Stabilization, the Multiplies Method.RMA, vol. 36. Masson, Paris (1994)

[24] Lasiecka, I., Tataru, D. : Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping. Differ. Integr. Equ. 6, 507–533(1993)

[25] Liu, W.J., Yu, J. : On decay and blow-up of th esolution for a viscoelastic wave equation with boundary damping and source terms. Nonlinear Anal. TMA 74,2175–2190 (2011)

[26] A. Merah,F.Mesloub, Elastic Membrane Equation with Dynamic Boundary Conditions and Infinite Memory , Bol.Soc.Paran.Mat ; ISSN-0037-8712.

[27] Messaoudi, S.A. : Blow up and global existence in nonlinear viscoelastic wave equations. Math. Nachr. 260, 58–66 (2003)

[28] Messaoudi, S.A. : Blow up of solutions with positive initial energy in a nonlinear viscoelastic wave equations. J. Math. Anal. Appl. 320, 902–915 (2006)

[29] Messaoudi, S.A. : General decay of solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source. Nonlinear Anal. TMA 69, 2589–2598 (2008)

[30] Messaoudi, S.A., Said-Houari, B. : Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms. J. Math. Anal. Appl. 365, 277–287 (2010)

[31] Messaoudi, S.A., Tatar, N.E. : Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem. Math. Methods Appl. Sci. 30, 665–680 (2007)

[32] Munoz Rivera, J.E., Andrade, D. : Exponential decay of non-linear wave equation with a viscoelastic boundary condition. Math. Methods Appl. Sci. 23,41–61 (2000)

[33] Mustafa, M.I. : Optimal decay rates for the viscoelastic wave equation. Math.Methods Appl. Sci. 41, 192–204 (2018)

[34] N-e. Tatar and A. A. Zaraï, Exponential stability and blow up for a problem with Balakrishnan-Taylor damping. Demonstratio Math. 44(2011), 67-90.

[35] N-e. Tatar and A. Zaraï, On a Kirchho® equation with Balakrishnan-Taylor damping and source term. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal. 18(2011), 615-627.

[36] Vitillaro, E. : Global existence for the wave equation with nonlinear boundary damping and source terms. J. Differ. Equ. 186, 259–298 (2002)

[37] A. Zaraï and N-e. Tatar, Global existence and polynomial decay for a problem with Balakrishnan-Taylor damping. Arch. Math. (Brno) 46(2010), 47-56.

[38] A. Zaraï and N-e. Tatar, Non-solvability of Balakrishnan-Taylor equation with memory term in RN. In : Anastassiou G., Duman O. (eds) Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 41. Springer, New York, NY 2013.

[39] A. Zaraï and N-e. Tatar and S. Abdelmalek, Elastic membrance equation with memory term and nonlinear boundary damping : global existence, decay and blowup of the solution. Acta Math. Sci. 33B (2013), 84-106.