الجمهورية الجزائرية الدمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي التبسي -تبسة

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم :الرياضيات والإعلام الالي

مذكرة تخرج لنيل شهادة الماستر

ميدان الرياضيات والإعلام الالي

فرع :الرياضيات

تخصص :معادلات تفاضلية جزئية وتطبيقاتها

الموضوع :

ثلاث طرق لحل مسألة انفجار الحلول لبعض المعادلات التطورية غير الخطية

من إعداد الطالبتين:

حجام أميرة　　　　حافي آنيسة

لجنة المناقشة :

أ - هوام كمال	أستاذ في جامعة العربي التبسي -تبسة	رئيسا
أ -زارعي عبد الرحمان	أستاذ في جامعة العربي التبسي -تبسة	مؤطرا
أ - بن زاهي مراد	أستاذ مساعد-أ في جامعة العربي التبسي -تبسة	ممتحنا

تاريخ المناقشة : 2022/06/11

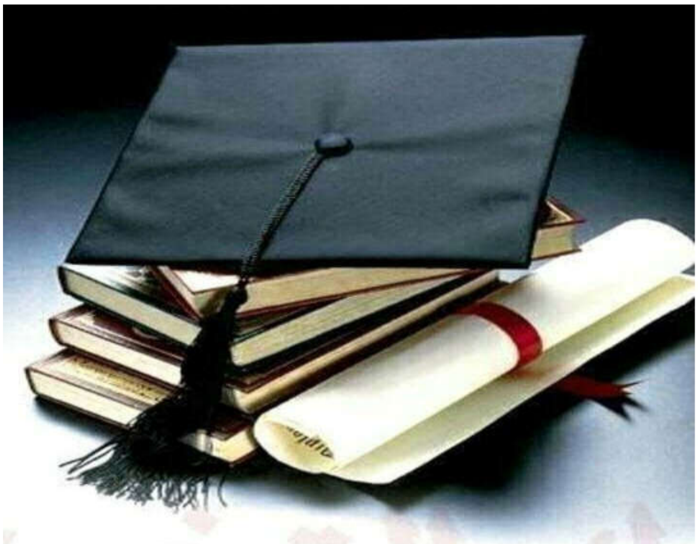
بسم الله الرحمن الرحيم

إهداء

إلى كل من وقف معنا وساندنا من قريب أو من بعيد نقول ...شكرا دمتم في حياتنا ...

إلى كل من حاول تثبيطنا ...زادتنا محاولاتكم الفاشلة تحفيزا وإصرارا على الوصول ...

إلى أصحاب الدعوات البريئة لنا بالنجاح ...تلاميذنا الأعزاء وفقكم الله وزادكم علما وأدبا ...



تشكر

قال تعالى (وسيجزي الله الشاكرين)

فلك الحمد حتى ترضى ، ولك الحمد إذا رضيت، ولك الحمد بعد الرضى لك الحمد أنت قيوم السماوات والأرض ومن فيهن ، والصلاة والسلام على حبيبك وحبيبنا محمد صلى الله عليه وسلم .

نتقدم بالشكر إلى :

الوالدين الكريمين وكل العائلة الكريمة (حافي ،حجام)

الأستاذ المؤطر *زارعي عبد الرحمان * على مجهوداته التي بذلها معنا ونصائحه وتوجيهاته لنا ونقول له... كنت حقامميزا

لجنة المناقشة لقبولها مناقشة مذكرتنا ...زادنا حضوركم شرفا.

جميع زملاءنا في الجامعة ...لم ولن ننسى تلك الأيام.

وأخيرا إلى كل من وقف معنا وساندنا من قريب أو من بعيد

طبتم وطاب ممشاكم وتبوأتم من الجنة مقعدا إن شاء الله.

أنيسة –أميرة

الفهرس

مقدمة

في العقود الأخيرة شهدت الرياضيات التطبيقية وخاصة المعادلات التفاضلية الجزئية استخداما واسعا في العلوم والتكنولوجيا وهذا ما أسهم في تطوير هذه الدراسات من طرف الباحثين, ولقد أخذت المسائل التطورية كمعادلات القطوع المكافئة والمعادلات الزائدية اهتماما بالغا من الباحثين حيث طوروا الكثير من التقنيات والنظريات لإثبات وجود ووحدانية الحلول وكذلك دراسة استقرار الحلول وانفجارها. الكثير من الأعمال ومن التطور والتقدم في هذا السياق تم إنجازه على سبيل المثال الأعمال [1-7].

الغرض من عملنا في هذه المذكرة هو تحديد شروط كافية يمكن في ظلها أن تضمحل الحلول في وقت منتهي لبعض المسائل التطورية في وجود قوة خارجية تعمل على تبديد الحلول بمعنى أن الحلول تؤول الى ما لانهاية عندما يقترب الزمن من زمن منتهي والذي يسمى زمن الانفجار. إن قوى التخامد هي التي تحقق الاستقرار في حلول المسألة, فمن السهل أن نرى أن في غياب القوى الخارجية، إذا كان هذا الحل موجودا محليا يمكننا دائما تمديده الى حل كلي. إن التفاعل بين القوى الخارجية وقوى التخامد قضية مركزية في العديد من الدراسات وإنها لا تزال كذلك. ومن المهم أن نعرف من يتفوق.

ولتحقيق هذا الهدف قمنا باستخدام ثلاثة طرق بتقنيات مختلفة على ثلاثة مسائل وهي طريقة ليفين [9] وطريقة لي [10] وطريقة جورجييف وتودوروفا [8].

بالإضافة إلى مقدمة ، وفصل المفاهيم الأولية وقسم يحتوي على 14 مرجعا ، وتتضمن الأطروحة أربعة فصول:

الفصل الأول نستعرض بعض المفاهيم والنظريات الأساسية والتي نحتاجها في بقية المذكرة.

في الفصل الثاني نقوم بإيجاد شروط كافية لانفجار الحلول في حالة الطاقة الابتدائية السالبة لمعادلة الأمواج في وجود قوة تخامد قوية, ولهذا الغرض نستخدم طريقة ليفين [9].

في الفصل الثالث ندرس نفس مسألة الفصل الثاني لكن باستخدام طريقة لي [10]بدل طريقة ليفين.

في الفصل الرابع نعطي شروطا كافية لاضمحلال الحلول لمعادلة كيرشوف مع قوة تخامد شاذة ضعيفة ويستند البرهان إلى طريقة جورجيف وتودوروفا وتقنية نتطار [11] في علاج المشتقات من الرتب الكسرية.

مفاهيم أساسية

في هذا الفصل، سنستذكر أهم المبادئ والنتائج الرئيسية التي تخص فضاءات L^P ، فضاءات سوبوليف،المتراجحات والحساب الكسري .

نرمز ب $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ للنقطة التي تنتمي للمفتوح Ω من $\mathbb{R}^n$ ، لتكن u دالة معرفة على Ω بقيم حقيقية ، نرمز بـ $D^i u(x)=\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$ للمشتق الجزئي للدالة u بالنسبة ل x_i .

نعرف التدرج و لابلسيان u على الترتيب كما يلي :

$$\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\frac{\partial u}{\partial x_2},...,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)(t) \text{ و } |\nabla u|^2=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2$$

$$\Delta u(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+...+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)(x)$$

نرمز ب $C(\Omega)$ لفضاء الدوال المستمرة على Ω بقيم حقيقية, $(C(\Omega))^m$ فضاء الدوال المستمرة على Ω بقيم في $\mathbb{R}^m$ ، $C_b(\overline{\Omega})$ فضاء الدوال المستمرة والمحدودة على $\overline{\Omega}$ المزودة بالنظيم $\|.\|_\infty$:

$$\|u\|_\infty=\sup_{x\in\overline{\Omega}}|u(x)|$$

من أجل $K\geq 1$ عدد طبيعي، $C_k(\Omega)$ فضاء الدوال uالقابلة للإشتقاق k مرة والمشتق من الرتبة k مستمر على Ω.

$C_c^k(\Omega)$ فضاء الدوال $C^k(\Omega)$ بحيث الحامل متراص ومستمر على Ω .

نعرف كذلك $C_k(\overline{\Omega})$ فضاء اقتصار عناصر من $C_k(\mathbb{R}^n)$ على $\overline{\Omega}$ أو فضاء الدوال لـ $C_k(\Omega)$ ، بحيث من أجل كل $0\leq j\leq k$ و كل $x_0\in\partial\Omega$ النهاية $\lim_{x\to x_0} D^j u(x)$ موجودة وتتعلق بـ x_0 فقط.

$C_0^\infty(\Omega)$ أو $D(\Omega)$ فضاء الدوال القابلة للإشتقاق مالانهاية مرة بحوامل متراصة، ويسمى فضاء دوال الاختبار.

1.1 فضاءات L^p

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ مزود بتكامل لوبيغ dx، نرمز ب $L^1(\Omega)$ لفضاء الدوال القابلة للتكامل على Ω بقيم حقيقية المزود بالنظيم :

$$\|u\|_{L^1}=\int_\Omega |u(x)|\,dx$$

ليكن $p\in\mathbb{R}$ حيث $1\le p\le +\infty$، نعرف فضاء الدوال من الصنف $L_p(\Omega)$ بـ:

$$L_p(\Omega)=\left\{ f:\Omega\to\mathbb{R};\ f\ \text{قابلة للقياس}\ \text{و}\ \int_\Omega \left| f(x)\right|^p dx<+\infty\right\}$$

ونظيمه معرف بـ :

$$\|u\|_{L^p}=\left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

نقول عن دالة $f:\Omega\to\mathbb{R}$ أنها تنتمي إلى $L^p_{loc}(\Omega)$ إذا كان $f_{1_k}\in L^p(\Omega)$ من أجل كل متراص $K\subset\Omega$.

ملاحظة 1.1

الفضاء L^2 المزود بالجداء السلمي :

$$\langle f,g\rangle=\int_\Omega fg\,dx,\ f,g\in L^2(\Omega)$$

هو فضاء هلبرت.

تعريف 1.1

ليكن X فضاء بناخ، $1\le p\le\infty$ و $[0,T]$ مجال من $\mathbb{R}$، نسمي فضاء لوبيغ بقيم في X ونرمز له بالرمز $L^p(0,T;X)$ فضاء الدوال $f:]0,T[\to X$ القابلة للقياس والتي تحقق:

أ- إذا كان $1\le p\le\infty$ فإن: $\left(\int_0^T \|f\|_X^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} := \|f\|_{L^p(0,T,X)} \langle\infty$

ب- إذا كان $p=\infty$ فإن: $\sup ess_{t\in]0,T[}\|f\|_X := \|f\|_{L^\infty(0,T,X)}\langle\infty$

قضية1.1

الفضاء $L^p(0,T,X)$ المزود بالنظيم $\|f\|_{L^p(0,T;X)}$ حيث $1\le p\le\infty$ هو فضاء بناخ.

2.1 فضاءات سوبوليف

1.2.1 المشتق الضعيف

تعريف 2.1

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}$ و $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ حيث $1\le i\le n$ ، نقول عن دالة أنها تملك مشتقة ضعيفة من الرتبة i في $L^1_{Loc}(\Omega)$إذا وجدت دالة $f_i\in L^1_{Loc}(\Omega)$ بحيث من أجل كل $\varphi\in C_0^\infty$لدينا:

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx$$

وهذا يسمح لنا بالقول أن f_i هو المشتق من الرتبة i لـ$u\in L^1_{Loc}(\Omega)$ بمفهوم التوزيعات ونكتب:

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i$$

2.2.1 فضاء $W^{1,p}(\Omega)$

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$، $p\in\mathbb{R}$ و $1\le p\le+\infty$،الفضاء $W^{1,p}(\Omega)$ معرف بـ :

$$W^{1,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega);\ \ \partial_i u\in L^p(\Omega), 1\le i\le n\right\}$$

حيث ∂_i هو المشتق الضعيف لـ $u\in L^1_{Loc}(\Omega)$.

نفرض : $H^1(\Omega)=W^{1,2}(\Omega)$

3.2.1 فضاءات $W^{m,p}(\Omega)$

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ ، $m\ge 2$ و p عدد حقيقي بحيث $1\le p\le +\infty$، نعرف $W^{m,p}(\Omega)$ كما يلي:

$$D^\alpha u=\partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_n^{\alpha_n} \qquad W^{m,p}(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega)\ ;\ \mathrm{D}^\alpha u\in L^p(\Omega), \forall\alpha, |\alpha|\le m\right\}$$

حيث : $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ و $D^\alpha u=\partial_1^{\alpha_1}\ldots\partial_n^{\alpha_n}$ المشتق الضعيف لـ $u\in L^1_{Loc}(\Omega)$ بمفهوم التوزيعات.

تعريف 3.1

الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$ مزود بالنظيم:

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\|u\|_{L^p}+\sum_{0\langle|\alpha|\le m}\left\|D^\alpha u\right\|_{L^p}$$

ملاحظة 2.1 $H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega)$

ملاحظة3.1

الفضاءات $H^m(\Omega)$ هي فضاءات هلبرت المزودة بالجداء السلمي:

$$(u,v)_{H^m}=(u,v)_{L^2}+\sum_{0\langle|\alpha|\le m}(D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2}\ ;\ \mathrm{u,v}\in \mathrm{H}^m(\Omega)$$

4.2.1 علاقة التكامل بالتجزأة وعلاقة قرين

تعريف 4.1

لتكن u و v دالتان من $H^1(\Omega)$ ، من أجل كل: $1 \le i \le n$

لدينا:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} vu\eta_i ds$$

حيث $\eta_i(x) = \cos(\eta, x_i)$ اتجاه جيب التمام للزاوية المحصورة بين النظيم الخارجي على ∂w في النقطة x و محور ال x_i.

تعريف 5.1

لتكن $u \in H^1(\Omega)$ و $v \in H^2(\Omega)$، وبالتالي لدينا:

$$\int_{\Omega} v\Delta u dx - \int_{\Omega} u\Delta v dx = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} v - \frac{\partial v}{\partial \eta} u \right) ds$$

ترميز1.1

ليكن $1 \le p \le \infty$ ، نرمز بـ q للدليل المشتق ل p معناه: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

3.1 بعض المتراجحات

نظرية1.1 (متراجحة هولدر)

p عدد بحيث : $1 \le p \le +\infty$ ولتكن $f \in L^p(\Omega), g \in L^q(\Omega)$.

إذن : $fg \in L^1(\Omega)$

و

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}$$

إذا كان: $p=q=2$ تصبح متراجحة كوشي شوارتز.

نظرية2.1 :(متراجحة بوان كاري)

ليكن Ω مفتوح محدود من $\mathbb{R}^n$ بحافة منتظمة.

إذن: $\|u\|_2 \le \beta \|\nabla u\|_2 , u \in H_0^1(\Omega)$

حيث: $B^{-1} = \inf_{\|u\|\neq 0} \frac{\|\nabla u\|_2}{\|u\|_2}$

نظرية 3.1 (متراجحة سوبوليف بوان كاري)

p عدد بحيث: $0 \le p < +\infty$ $(n=1,2)$ أو $(n\rangle 2), 0 \le p \le \frac{4}{n-2}$

إذن يوجد ثابت $C(p,\Omega)$ بحيث : $\|u\|_{p+1} \le C(p,\Omega)\|\nabla u\|_2 , u \in H_0^1(\Omega)$

تعريف 6.1

لتكن f و g دالتين من $L^1(R)$ ، فإنه من أجل تقريبا كل $x \in R$،الدالة :

$$y \to f(x-y)g(y)$$

قابلة للمكاملة والدالة المعرفة بـ :

$$F(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y)dy$$

تنتمي إلى $L^1(R)$. تسمى جداء الإلتفاف لـ f و g ويكتب $f*g$.

قضية 2.1 (نظرية هاردي- ليتلوود- سوبوليف):

ليكن $0<\lambda<1$, $u \in L^p(R)$ $(p>1)$, $\lambda > 1-\frac{1}{p}$

إذن $\left(\frac{1}{|x|^{\lambda}}\right)*u \in L^{q}(R)$ مع $\frac{1}{q}=\lambda+\frac{1}{p}-1$ والتطبيق $u \to \left(\frac{1}{|x|^{\lambda}}\right)*u \in L^{q}(R)$ المعرف من $L_p(R)$ في $L_q(R)$ مستمر.

$$\|u\|_{p+1} \le C(p,\Omega)\|\nabla u\|_2 \,, u \in H_0^1(\Omega)$$

4.1 الحساب الكسري

تعريف7.1

لتكن $f \in C([a,b])$. نعرف تكامل ريمان -ليوفيل للدالة f من الرتبة $\alpha \in \mathbb{R}$ بـ:

$$I_{at}^{\alpha} f(x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \ldots (1.1)$$

حيث $\Gamma(\alpha)$الدالة قاما المعروفة.

ملاحظة4.1

إذا كانت $\alpha \in \mathbb{N}$ فإن: (1 .1) ليست إلا صيغة كوشي التي تعطي لنا المشتقة النونية للدالة f.

نظرية4.1

لتكن $f \in C([a,b])$, التكامل الكسري لريمان -ليوفيل يحقق:

$$I_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(x) = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x)$$

من أجل: $\alpha > 0, \beta > 0$

حالة خاصة: من أجل كل $n \le \alpha$, لدينا: $\frac{d^n}{dt^n} I^{\alpha} = I^{\alpha-n}$

لتكن المعادلة التكاملية التالية:

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{\alpha-1} f(t)}{\Gamma(\alpha)} dt = g(x) \ldots (1.2)$$

حيث نبحث عن f انطلاقا من معرفة g. نرمز بـ $[\alpha]$ للجزء الصحيح لـ α, ينتج:

$$I_{a^+}^{[\alpha]+1} f(x) = I_{a^+}^{[\alpha]+1-\alpha} g(x)$$

وبالتالي:

$$f(x) = \frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} I_{a^+}^{[\alpha]+1-\alpha} g(x) \ldots (1.3)$$

إذن: إذا كانت (1 .2) قابلة للحل فإن حلها يعطى بالصيغة (1 .3).

تعريف8.1

المشتق الكسري لريمان -ليوفيل من الرتبة $\alpha \in]0,+\infty[$ للدالة f معرف كما يلي:

$$D_{a^+}^{\alpha} f := \frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} I_{a^+}^{[\alpha]+1-\alpha} f$$

ملاحظة5.1

من أجل $\alpha < 0$, نضع اتفاقا:

$$D_{a^+}^{\alpha} f := I_{a^+}^{-\alpha} f$$

إذن: $D_{a^+}^{\alpha} f$ موجودة من أجل كل $f \in ([a,b])$ و كل $x \in [a,b]$

نظرية5.1

إذا كانت $\alpha > 0$, فإنه من أجل كل $f \in C([a,b])$, لدينا:

$$D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f(x) = f(x)$$

ومن أجل $f \in C^{[\alpha]+1}([a,b])$ وإذا وضعنا: $n = [\alpha]+1$, فإن:

$$I_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\alpha} f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-\alpha)^{\alpha-k-1}}{\Gamma(\alpha-k)} \frac{d^{n-k-1}}{d_x^{n-k-1}} \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f(a) \right)$$

خصائص : [12].[13]

لتكن $f \in L^1([a,b])$, فإنه لدينا العلاقات التالية:

$\lim_{\alpha \to 0^+} I_{a^+}^{\alpha} f(x) = f(x)$ -1

$D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\beta} f(x) = I_{a^+}^{\beta-\alpha} f(x)$ -2

$D_{a^+}^{\alpha} D_{a^+}^{\beta} f(x) = D_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x)$ -3

ملاحظة6.1

دراسة المعادلات التفاضلية الكسرية حيث أن المشتق الكسري في معنى ريمان- ليوفيل يحتم علينا كتابة الشروط الابتدائية بواسطة المشتق الكسري للحل, وهذه المسائل غير واقعية ولا يوجد إسقاط فيزيائي لها. لذلك عمليا نستخدم المشتقات الكسرية لكابيتو لأنه بالإمكان دراسة المعادلات التفاضلية الكسرية بشروط ابتدائية اعتيادية .

تعريف9.1

لتكن $f \in C^{[\alpha]+1}([a,b])$, نعرف المشتق الكسري لكابيتو من الرتبة $\alpha \in]0,+\infty[$ للدالة f بـ:

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha} f := I_{a^+}^{[\alpha]+1-\alpha} \frac{d^{[\alpha]+1}}{dt^{[\alpha]+1}} f$$

في الحالة الخاصة : إذا كان $0 < \alpha < 1$, لدينا:

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha} f := I_{a^+}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f \ldots(1.4)$$

من السهل ملاحظة العلاقة التي تربط بين المشتقات الكسرية في معنى كابيتو والمشتقات الجزئية في معنى ريمان-ليوفيل وهي كما يلي:

$$^{c}D_{a^+}^{\alpha} f(x) = D_{a^+}^{\alpha} f(x) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(x-a)^{[\alpha]-\alpha-k}}{\Gamma([\alpha]-\alpha-k+1)} \frac{d^{[\alpha]+k}}{dx^{[\alpha]-k}} f(a)$$

من أجل كل $f \in C^{[\alpha]+1}([a,b])$:

خصائص [12] إذا كان $f \in C^1([a,b])$ و $0 < \alpha < 1$, فإن:

1- $^{c}D_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f(x) = f(x)$

2- $I_{a^+}^{\alpha}\, {}^{c}D_{a^+}^{\alpha} f(x) = f(x) - f(0)$

تطبيق طريقة ليفين على معادلة أمواج غير خطية بتخامد قوي.

1.2 مقدمة

هدف هذا الفصل دراسة المسألة الحدية بالشروط الإبتدائية التالية :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \Delta^2 u + \Delta^2 u_t = |u|^p u \quad \text{dans } \Omega \times [0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) \ \text{ dans } \Omega \\ u(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad \ldots \quad (1,2)$$

حيث Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ بحافة منتظمة Γ ، $u(x,t)$ هو الانتقال العمودي لنقطة x في زمن t على عارضة.

المعادلة $(1,2)$ هي معادلة الأمواج الغير خطية التي لاقت إهتماما بالغا من الباحثين وتحصلوا على الكثير من النتائج في إثبات الوجود والوحدانية والإستقرار وانفجار الحلول ، أنظر [14]، [15] .

2.2 معادلة الطاقة

نعرف الطاقة للمسألة $(1,2)$ بـ:

$$E(t) = \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - \frac{2}{p+2}\|u\|^{p+2} \ldots (2.2)$$

نظرية 1.2

$E(t)$ دالة غير متزايدة على $[0, +\infty[$ و:

$$E'(t) = -\|\Delta u\|^2 < 0$$

البرهان:

بضرب المعادلة $(1,2)$ في u_t وإجراء التكامل على Ω نجد:

$$\int_\Omega u_{tt}u_t - \int_\Omega \Delta u\ u_t + \int_\Omega \Delta^2 u\ u_t + \int_\Omega \Delta^2 u_t\ u_t = \int_\Omega |u|^p\ u\ u_t ...(3.2)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx + \int_\Omega |\Delta u_t|^2 dx - \frac{1}{p+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^{p+2}\,dx = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\Delta u|^2\,dx + \int_\Omega |\Delta u_t|^2 dx - \frac{1}{p+2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u|^{p+2}\,dx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left\{\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - \frac{2}{p+2}\|u\|^{p+2}\right\} = -2\|\Delta u_t\|^2$$

نضع :

$$E(t) = \|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - \frac{2}{p+2}\|u\|^{p+2}$$

ومنه :

$$E'(t) = -\|\Delta u_t\|^2 \le 0$$

ينتج أن:

$$\int_0^t E'(s)ds = -\int_0^t \|\Delta u_t\|^2\,ds$$

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t \|\Delta u_t\|^2\,ds$$

$$E(t) = E(0) - \int_0^t \|\Delta u_t\|^2\,ds$$

3.2 ظاهرة الانفجار

في هذا الجزء، سيتم إثبات أن حل المسألة $(1,2)$ سينفجر في وقت منته، لهذا الغرض نستعمل طريقة التقعر لـ"ليفين" ، نعرف الدالة $G(t)$ بـ:

$$G(t)=\|u\|^2+\left\{\int_0^t\|\Delta u\|^2\,ds+(T_0-t)\|\Delta u_0\|^2\right\}+\beta(t+\tau)^2 \quad ...(4.2)$$

من أجل كل $t\in[0,T_0]$ حيث: $T_0>0,\beta\geq 0$ و $\tau>0$ ثوابت سنحددهم لاحقا، نبدأ بإثبات القضية التالية.

قضية 1.2

إذا كان: $E(0)<0$ و $p>2$. الدالة $G(t)$ تحقق:

$$G(t)G''(t)-\left(\frac{p-2}{4}+1\right)G'(t)^2\geq 0 \qquad ,[0,T_0]$$

البرهان:

باشتقاق الدالة (4.2) بالنسبة ل t مرة ومرتين نجد:

$$G'(t)=2(u,u_t)+\|\Delta u\|^2-\|\Delta u_0\|^2+2\beta(t+\tau)$$

$$G''(t)=2(u_t,u_t)+2(u_{tt},u)+\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2+2\beta$$
$$=2\|u_t\|^2+2\int_\Omega u_{tt}u+\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2+2\beta$$

من (3.2) نجد:

$$\int_\Omega uu_{tt}=\int_\Omega \Delta uu-\int_\Omega \Delta^2uu-\int_\Omega \Delta^2u_tu+\int_\Omega |u|^{p+2}$$
$$=-\int_\Omega|\nabla u|^2-\int_\Omega|\Delta u|^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\Delta u|^2+\|u\|^{p+2}$$
$$=-\|\nabla u\|^2-\|\Delta u\|^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2+\|u\|^{p+2}$$

بالتعويض في $G''(t)$ نجد:

$$G''(t)=2\|u_t\|^2-2\|\nabla u\|^2-2\|\Delta u\|^2-\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2+2\|u\|^{p+2}+\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2+2\beta$$
$$=2\left\{\|u_t\|^2+\|u\|^{p+2}-\|\nabla u\|^2-\|\Delta u\|^2+\beta\right\}...(5.2)$$

من (2.2) نجد:

$$\|u\|^{p+2}=\frac{p+2}{2}\left\{\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\Delta u\|^2-E(t)\right\}$$
$$=\frac{p+2}{2}\left\{\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2+\|\Delta u\|^2-E(0)+\int_{\Omega}\|\Delta u\|^2\right\}\quad ...(6.2)$$

بتعويض (6.2) في (5.2) نتحصل على:

$$\frac{1}{2}G''(t)=\frac{p+2}{2}\int_0^t 2\|\Delta u_t\|^2\,ds+\left(\frac{p}{2}+2\right)\|u_t\|^2+\frac{p}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{p}{2}\|\Delta u\|^2+\beta-\left(\frac{p}{2}+1\right)E(0)$$

لتكن $\beta=-E(0)$ ومنه:

$$\frac{1}{2}G''(t)=2\left(\frac{p}{2}+1\right)\int_0^t\|\Delta u_t\|^2ds+\left(\frac{p}{2}+2\right)\|u_t\|^2+\frac{p}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{p}{2}\|\Delta u\|^2+\left(\frac{p}{2}+2\right)\beta$$

نجدعندئذ:

$$\frac{1}{2}G''(t)\geq\left(\frac{p}{2}+1\right)\left\{\|u_t\|^2+\beta+\int_0^t\|\Delta u\|^2ds\right\}$$

إذا اخترنا τ كبير بما يكفي نجد:

$$G'(0)=2\left\{\int_{\Omega}u_0u_1+\beta\tau\right\}>0$$

نضع:

$$A=\|u_t\|^2+\int_0^t\|\Delta u_t\|^2\,ds+\beta(t+\tau)^2\rangle 0$$

$$B=(u,u_t)+\int_0^t(\Delta u,\Delta u_t)ds+\beta(t+\tau)$$

$$C=\|u_t\|^2+\int_0^t\|\Delta u_t\|^2\,ds+\beta\rangle 0$$

من الواضح أن : $A\leq G(t)$, $C\leq\dfrac{G''(t)}{p+2}$ و $\beta=\dfrac{G'(t)}{2}$

نلاحظ أنه من أجل كل ثنائية $(\rho,\eta)\in\mathbb{R}^2$ و $t\rangle 0$ نتحصل على:

$$\begin{aligned}
&A\rho^2+2\beta\rho\eta+C\eta^2\\
&=\rho^2\|u\|^2+\rho^2\int_0^t\|\Delta u\|^2+\rho^2\beta\left(t+\tau\right)^2+2\rho\eta(u,u_t)\\
&+2\rho\eta\int_0^t(\Delta u,\Delta u_t)+2\rho\eta\beta(t+\tau)+\eta^2\|u_t\|^2+\eta^2\int_0^t\|\Delta u_t\|^2\,ds+\eta^2\beta\\
&=\left\{\rho^2\|u\|^2+2(\rho u,\eta u_t)+\eta^2\|u_t\|^2\right\}+\int_0^t\left\{\rho^2\|\Delta u\|^2+2\left(\rho\Delta u,\eta\Delta u_t\right)+\eta^2\|\Delta u_t\|^2\right\}ds\\
&+\beta\left\{\rho^2(t+\tau)^2+2\rho\eta(t+\tau)+\eta^2\right\}\\
&=\int_\Omega\left[\rho u+\mu u_t\right]^2dx+\beta\left[\rho(t+\tau)+\eta\right]^2+\int_0^t\int_\Omega\left[\rho\Delta u+\eta\Delta u_t\right]^2dx\,ds\geq 0
\end{aligned}$$

إذن:

$$\frac{G(t)G''(t)}{p+2}-\frac{1}{4}G'^2(t)\geq 0$$

ينتج :

$$G(t)G''(t)-\left(\frac{p-2}{4}+1\right)G'^2(t)\geq 0 \text{ sur } \left[0,T_0\right]...(7.2)$$

نظرية 2.2

نفرض أن $p>2$ و $E(0)<0$ ، إذن الحل u للمسألة (1.2) غير مستمر في حالة زمن منته $T>0$.

الزمن النهائي T_m مقدر بـ: $$T_m=t^*(\tau)\geq\frac{2}{p-2}\left\{\frac{\|u_0\|^2+\beta\tau^2}{(u_0,u_1)+\beta\tau}\right\}$$

البرهان:

المتراجحة(7.2) تسمح لنا بكتابة $\left(G^{-\frac{p-2}{4}-1}(t)G'(t)\right)'\geq 0$ بالمكاملة نجد أن:

$$G'^2(t)\left(-\frac{p-2}{4}-1\right)G^{-\frac{p-2}{4}-2}(t)+G^{-\frac{p-2}{4}-1}(t)G''(t)\geq 0$$

$$G^{-\frac{p-2}{4}-2}(t)\left[G''(t)G(t)-\left(\frac{P-2}{4}+1\right)G'^2(t)\right]\geq 0$$

$$G^{-\frac{p-2}{4}-1}(t)G'(t)\geq G^{-\frac{p-2}{4}-1}(0)G'(0)$$

$$\frac{-4}{p-2}\frac{d}{dt}G^{-\frac{p-2}{4}}\geq G^{-\frac{p-2}{4}-1}(0)G'(0)$$

$$\frac{d}{dt}G^{-\frac{p-2}{4}}\leq-\frac{p-2}{4}G^{-\frac{p-2}{4}-1}(0)G'(0)$$

$$G^{-\frac{p-2}{4}}(t)-G^{-\frac{p-2}{4}}(0)\leq-\frac{p-2}{4}G^{-\frac{p-2}{4}-1}(0)G'(0)t$$

$$G^{-\frac{p-2}{4}}(t)\leq-\frac{p-2}{4}G^{-\frac{p-2}{4}-1}(0)G'(0)t+G^{-\frac{p-2}{4}}(0)$$

$$G^{\frac{p-2}{4}}(t)\geq\frac{1}{G^{-\frac{p-2}{4}}(0)-\frac{p-2}{4}G^{-\frac{p-2}{4}-1}(0)G'(0)t}$$

$$G(t)\geq\left(\frac{1}{G^{-\frac{p-2}{4}}(0)-\frac{p-2}{4}G^{-\frac{p-2}{4}-1}(0)G'(0)t}\right)^{\frac{4}{p-2}}$$

$$G(t)\geq\left(\frac{4G^{-\frac{p-2}{4}-1}(0)}{4G(0)-(P-2)G'(0)t}\right)^{\frac{4}{p-2}}$$

وبالتالي الزمن t معرف كما يلي:

$$t(\tau)=t^*(\tau)=\frac{4}{p-2}\frac{G(0)}{G'(0)}=\frac{4}{p-2}\left\{\frac{\|u_0\|^2+T_0\|\Delta u_0\|^2+\beta\tau^2}{2(u_0,u_1)+2\beta\tau}\right\}$$

$$t^*(\tau)\geq\frac{2}{p-2}\left\{\frac{\|u_0\|^2+\beta\tau^2}{(u_0,u_1)+\beta\tau}\right\}$$

وهو زمن الإنفجار.

تطبيق الطريقة المباشرة لـ "لي" على معادلة أمواج غير خطية بتخامد قوي .

1.3 ظاهرة الانفجار

سوف ندرس نفس مسألة الفصل الثاني أي :

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+\Delta^2 u+\Delta^2 u_t=|u|^p u \quad \text{dans } \Omega\times[0,+\infty[\\ u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x) \quad \text{dans } \Omega \\ u(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial \eta}(x,t)=0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \qquad (1.3)$$

لإثبات إنفجارالحلول نستعمل الطريقة المباشرة لـ "لي"،في هذه الحالة نعرف دالة الطاقة لـ (1.3) كالتالي:

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u'\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\|\Delta u\|^2-\frac{1}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2} \quad ...(2.3)$$

نحصل على:

$$E(t)=E(0)-\int_0^t \|\Delta u'\|^2 ...(3.3)$$

ليكن u حلا للمسألة (1.3) ، نعرف :

$$H(t):=\|u\|^2+\int_0^t \|\Delta u\|^2\,dt \quad ...(4.3)$$

قضية1.3

نفرض أن $p>2$ ، يكون لدينا:

$$H''(t)-(p+4)\|u'\|^2 \ge 2(p+2)\left\{-E(0)+\int_0^t \|\Delta u'\|^2\,ds\right\} \quad ...(5.3)$$

البرهان:

باستقاق الدالة (4.3) بالنسبة لـ t نتحصل على:

$$H'(t)=2(u,u')+\|\Delta u\|^2 \quad ...(6.3)$$

لدينا من (2.3) و(3.3):

$$H''(t)-(p+4)\|u'\|^2=2(p+2)\left\{-E(0)+\int_0^t\|\Delta u'\|^2\,ds\right\}+2(p+2)\|\Delta u\|^2+(p+2)\left\{1-\frac{2}{p+2}\right\}\|\nabla u\|^2 \quad ...(7.3)$$

إذن:

$$H''(t)-(p+4)\|u'\|^2\geq 2(p+2)\left\{-E(0)+\int_0^t\|\Delta u'\|^2\,ds\right\}$$

نظرية 1.3

إذا كان $E(0)<0$ فإنه من أجل $t>t_0$

$$H'(t)>\|\Delta u_0\|^2$$

حيث

$$t_0=\max\left\{0,\frac{(u_0,u_1)}{(p+2)E(0)}\right\}$$

البرهان:

من (7.3) نجد:

$$H''(t)\geq -2(p+2)E(0)$$

ومنه:

$$H'(t)\geq H'(0)-2(p+2)E(0)t,\quad t\geq 0$$

وبالتالي :

$$H'(t)\geq\|\Delta u_0\|^2+2(u_0,u_1)-2(p+2)E(0)t$$

إذن من أجل كل $t\rangle\frac{(u_0,u_1)}{(p+2)E(0)}$ لدينا:

$$H'(t)\rangle\|\Delta u_0\|^2$$

نظرية 2.3 [10]

نفرض أن $u_0,u_1\in H_0^2(\Omega)$ بحيث $E(0)\langle 0$ و $p\rangle 2$ ، إذن الحل u للمسألة (1.3) ليس مستمر في كل لحظة $T_m\rangle 0$.

من جهة أخرى ، الزمن النهائي T مقدر بـ:

$$T\le T_m\le t_0+\frac{1}{\sqrt{-b}}\ln\left[\sqrt{\frac{a}{-b}}\left(\sqrt{\frac{a}{-b}}-J(t_0)\right)^{-1}\right]...(8.3)$$

$$J(t_0)\langle\min\left\{1,\sqrt{\frac{a}{-b}}\right\}...(9.3)$$

حيث $J(t)$, a و b تعطى لاحقا .

البرهان:

لتكن: $$J(t)=\left[H(t)+(T-t)\|\Delta u_0\|^2\right]^{-\gamma},\ pour\ t\in[0,T]...(10.3)$$

حيث $\gamma=\frac{p}{4}-\frac{1}{2}$ و $T>0$ ثابت سيحدد لاحقا.

باشتقاق $J(t)$ مرتين نجد:

$$J'(t)=-\gamma J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}}\left[H'(t)-\|\Delta u_0\|^2\right]...(11.3)$$

و $$J''(t)=-\gamma J(t)^{1+\frac{2}{\gamma}}Q(t)...(12.3)$$

حيث : $$Q(t)=H''(t)\left[H(t)+(T-t)\|\Delta u_0\|^2\right]-(1+\gamma)\left(H'(t)-\|\Delta u_0\|^2\right)^2$$

لدينا من (5.3):

$$H''(t) \geq (p+4)\|u'\|^2 - 2(p+2)E(0) + 2(p+2)\int_0^t \|\Delta u'\|^2 \, ds$$

ينتج أن:

$$H''(t) \geq -2(p+2)E(0) + (p+2)\left\{\|u'\|^2 + \int_0^t \|\Delta u'\|^2 \, ds\right\}$$

باشتقاق العلاقة (4.3) بالنسبة ل t، نتحصل على:

$$H'(t) = 2\left\{(u,u') + \int_0^t (\Delta u, \Delta u')ds\right\} + \|\Delta u_0\|^2$$

من الواضح أن:

$$\begin{aligned} Q(t) \geq & -2(p+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}} + (p+2) \\ & \times\left\{\|u'\|^2 + \int_0^t \|\Delta u'\|^2 \, ds\right\} \times \left\{\|u\|^2 + \int_0^t \|\Delta u\|^2 \, ds\right\} \\ & -4(1+\gamma)\left\{(u,u') + \int_0^t (\Delta u, \Delta u')ds\right\}^2 \end{aligned}$$

لتكن:

$$A = \|u(t)\|^2 + \int_0^t \|\Delta u\|^2 \, ds$$

$$B = (u, u') + \int_0^t (\Delta u, \Delta u')ds$$

$$C = \|u'\|^2 + \int_0^t \|\Delta u'\|^2 \, ds$$

نتحصل على:

$$Q(t) \geq -2(p+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}} + (p+2)\left\{AC - B^2\right\}$$

نلاحظ أنه من أجل كل ثنائية $(\rho,\eta)\in\mathbb{R}^2$ و $t>0$:

$$\rho^2+2B\rho\eta+C\eta^2=\rho^2\left\|u(t)\right\|^2+\rho^2\int_0^t\left\|\Delta u\right\|^2ds+2\rho\eta(u,u')+2\rho\eta\int_0^t(\Delta u,\Delta u')ds+\eta^2\left\|u'\right\|^2+\eta^2\int_0^t\left\|\Delta u'\right\|^2ds$$

أو:

$$A\rho^2+2B\rho\eta+C\eta^2=\left\{\rho^2\left\|u(t)\right\|^2+2(\rho u,\eta u')+\eta^2\left\|u'\right\|^2\right\}+\int_0^t\left\{\rho^2\left\|\Delta u\right\|^2+2(\rho\Delta u,\eta\Delta u')+\eta^2\left\|\Delta u'\right\|^2\right\}ds$$

هذه المساواة يمكن كتابتها على الشكل:

$$A\rho^2+2B\rho\eta+C\eta^2=\int_\Omega\left[\rho u(t)+\eta u'(t)\right]^2dx+\int_0^t\int_\Omega\left[\rho\Delta u(t)+\eta\Delta u'(t)\right]^2dxds$$

من السهل التحقق أن: $A\rho^2+2\beta\rho\eta+C\eta^2\geq 0$

و $B^2-AC\leq 0...(13.3)$

من (13.3) نتحصل على :

$$Q(t)\geq -2(p+2)E(0)J(t)^{-\frac{1}{\gamma}},t\geq t_0...(14.3)$$

إذن من (12.3) و (14.3) نجد:

$$J''(t)\leq\left(\frac{p^2}{2}-2\right)E(0)J(t)^{1+\frac{1}{\gamma}},t\geq t_0...(15.3)$$

نلاحظ أنه حسب النظرية $J(t)<0$ من أجل كل $t\geq t_0$، بضرب (15.3) في $J'(t)$ وبالمكاملة من t_0 إلى t نجد:

$$J'(t)^2\geq a+bJ(t)^{2+\frac{1}{\gamma}}...(16.3)$$

حيث:

$$a=\left[\left(\frac{p}{4}-\frac{1}{2}\right)^{2}\left[H'(t_0)-\|\Delta u_0\|^{2}\right]^{2}-(p^{2}-4)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)E(0)J(t_0)^{-\frac{1}{\gamma}}\right]\times J(t_0)^{2+\frac{1}{\gamma}}>0\ldots(17.3)$$

و:

$$b=\left(p^{2}-4\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)E(0)<0\ldots(18.3)$$

حسب النظرية ، يوجد وقت منته T بحيث: $\lim_{t\to T^-} J(t)=0$

ومنه:

$$\lim_{t\to T^-}\left\{\|u(t)\|^{2}+\int_0^t\|\Delta u\|^{2}\,ds\right\}^{-1}=0$$

معناه:

$$\lim_{t\to T_0^-}\left\{\|u(t)\|^{2}+\int_0^t\|\Delta u\|^{2}\,ds\right\}=+\infty\ldots(19.3)$$

وهكذا يوجد T بحيث:

$0<T<T_0$ و $\lim_{t\to T^-}\left\{\|\nabla u\|^{4}+\|\Delta u\|^{2}\right\}=+\infty\ldots(20.3)$

إذا كان: $\lim_{t\to T^-}\|u(t)\|^{2}=+\infty$ فإنه من الواضح أن $\lim_{t\to T^-}\left\{\|\nabla u\|^{4}+\|\Delta u\|^{2}\right\}=+\infty$.

من جهة أخرى إذا كان:

$\lim_{t\to T^-}\|u(t)\|^{2}\langle+\infty$ نحصل من (19.3) على:

$$\sup_{0\le t\le T_0}\left\{\|\nabla u\|^{4}+\|\Delta u\|^{2}\right\}T_0\ge\lim_{t\to T^-}\int_0^t\left\{\|\nabla u\|^{4}+\|\Delta u\|^{2}\right\}ds=+\infty$$

وبالتالي نتحصل على (20.3) . في النهاية نحصل من النظرية بحيث: $J(t_0) < \min\left\{1, \sqrt{\frac{a}{-b}}\right\}$ على أن الحد الأعلى لـ T مقدر بـ:

$$T \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \sqrt{\frac{a}{-b}} \left(\sqrt{\frac{a}{-b}} - J(t_0) \right)^{-1}$$

وهذا ما يحقق إثبات النظرية .

تطبيق طريقة جروجيف -تودوروفا على معادلة غير خطية من نوع كيرشوف بتخامد كسري ضعيف

1.4مقدمة :

ندرس المسألة التالية :

$$\begin{cases} u_{tt}-\left(\xi_0+\xi_1 \|\nabla u(t)\|_2^{2\gamma}\right)\Delta u \\ +\dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)}\displaystyle\int_0^t (t-s)^{-(\alpha+1)} u_s(s)\,ds=|u|^{p-1}u; u\in\Omega\times[0,+\infty) \\ u(x,0)=u_0(x); u_t(x,0)=u_1(x)\in\Omega \\ u(x,t)=0 \; sur \; \Gamma \end{cases} \quad ...(1.4)$$

Ω مجال محدود من R^n مع Γ حافة منتظمة ، الدوال $u_0(x)$ و $u_1(x)$ المعطاة ، كل المتغيرات ξ_0,ξ_1,γ و p هي ثوابت موجبة مفروضة بحيث $p>1, -1<\alpha<0$ عندما يكون $\xi_1=0$ بدون التشتت الكسري الضعيف، المعادلة (1.4) تختزل الى معادلة الأمواج غير الخطية التي تمت دراستها على نطاق واسع .وقد وجدت العديد من النتائج تتعلق بالوجود وعدم الوجود ، اذا كان $\xi_0,\xi_1\neq 0$ وبدون التشتت الكسري الضعيف تختزل المعادلة (1.4) الى معادلة كريشوف لوصف الإهتزازات

غير الخطية لخيط مرن ، تمت دراسة المسألة (مع $\xi_0=1,\xi_1=0$) بواسطة Tatar[11]. في هذا العمل سنرى أن الطريقة التي قدمها وطورها [12] شاتينغر فعالة في حالتنا ،بدمج هذه الطريقة مع بعض التقديرات من [11] ، سنحدد مجموعة مستقرة بحيث إذا بدأنا من هذه المجموعة نبقى فيها في جميع الأزمنة ، وهذا يضمن الوجود الكلي .

ثم نثبت أن الحل ينفجر في زمن منتهي بشرط أن الشروط الإبتدائية كبيرة بما يكفي وهذا يعني أن التشتت الكسري ليس قويا بما يكفي لإستقرار النظام بوجود قوة خارجية .

من أجل إثبات هذه النتيجة فإننا نعتمد على برهان جورجيف (georgiev) وتودورفا (Todorova) [8].

يتم التغلب على الصعوبات التي تواجهنا بسبب العامل الكسري باستخدام تحويل فوريي ومتراجحة هاردي ليتلوود سوبوليف (Hardy-Littleuood-Sobolev), تم استخدام هذه التقنية من قبل Tatar من أجل مسألة الأمواج مع التشتت الكسري الضعيف [11] .

2.4 أساسيات

تعريف 1.4

لدينا الدالة $k(t)\in L^1_{loc}[0,+\infty)$ معرفة موجبة :

$$\int_0^t w(s)\int_0^s k(s-z)w(z)\,dz\,ds \geq 0 , t \geq 0$$

من أجل كل $w\in C[0,+\infty)$

تعريف 2.4

الدالة $k(t)$ معرفة موجبة بقوة ، يوجد ثابت موجب $\hat{c}$ بحيث $t\to k(t)-\hat{c}e^{-t}$ معرفة موجبة .

ملاحظة 1.4

عموما ليس من السهل الاختبار المباشر للشروط في التعريفين (1.4) و(2.4) ، ما نعلمه من طرف Nohel وShea [11] (كذلك Tatar[63-65]) أن دالة قابلة لتفاضل مرتين تحقق $k\neq 0$ ، $(-1)^n k^{(n)}(t)\geq 0$ من أجل كل $t\geq 0$ و $n=0,1,2$ تكون معرفة موجبة بقوة، لذلك تكون $\frac{(t-s)^{-(\alpha+1)}}{\Gamma(-\alpha)}$ معرفة موجبة تماما من أجل $-1<\alpha<0$.

3.4 الوجود الكلي :

نعرف طاقة المسألة (1.4) كما يلي :

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{\xi_0}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{\xi_1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}-\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}, t>0...(2.4)$$

قضية 1.4

$E(t)$ محدودة بانتظام بـ $E(0)$ و:

$$\frac{dE(t)}{dt}=-\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_\Omega u_t\int_0^t(t-s)^{-(\alpha+1)}u_t(s)\,dsdx\le 0, t>0...(3.4)$$

البرهان :

بضرب المعادلة (1.4) في u_t والمكاملة على Ω نتحصل على :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{\xi_0}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{\xi_1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}-\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}\right\}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_\Omega u_t\int_0^t(t-s)^{-(\alpha+1)}u_t(s)\,dsdx=0$$

نعوض t بـ z ، ثم نكامل من 0 الى t ، نحصل على :

$$E(t)-E(0)=-\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t\int_\Omega u_t\int_0^z(z-s)^{-(\alpha+1)}u_t(s)\,dsdxdz\le 0...(4.4)$$

وبذلك تكون $E(t)$ محدودة بانتظام بـ$E(0)$

$E(t)\le E(0)$ من أجل كل $t\ge 0$

لتكن الآن :

$$J(t)=\frac{\xi_0}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{\xi_1}{2(\gamma+1)}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}-\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}...(5.4)$$

إذن:

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+J(t)...(6.4)$$

نعرف جهد المحرك كما يلي :

$$W=\left\{u / I(u(t)):=\frac{\xi_0}{2}\|\nabla u\|^2-\|u\|_{p+1}^{p+1}>0\right\} U\{0\}$$

قضية 2.4

ليكن u حل لـ (1.4). إذا كان $u_0 \in W$ و:

$$\beta=\frac{2 C(p, \Omega)^{p+1}}{\xi_0^{\frac{p+1}{2}}}\left(\frac{2(p+1)}{p} E(0)\right)^{(p-1)/2}<1 \ldots(7.4)$$

إذن: $u(t) \in w$ من أجل $t \in[0, T]$.هنا $C(p, \Omega)$ هو ثابت (Sobolev-Poincare').

البرهان :

انظر $[14]$.

نظرية 1.4

نفرض أن $u_0 \in W$ ونختبر (7.4) محققة ، إذن حل المسألة (1.4) شامل مع الزمن .

البرهان :

يكفي إثبات أن $\|u'\|^2+\|\nabla u\|^2$ محدودة بشكل مستقل عن t. وفقا للنظريتين (3.4) و(4.4) نحصل على :

$$E(0) \geq E(t) \geq \frac{1}{2}\left\|u_t{}^2\right\|+\frac{\xi_0}{2}\|\nabla u\|^2-\frac{1}{p+1}\|u\|_{p+1}^{p+1}$$

$$\geq \frac{1}{2}\left\|u_t{}^2\right\|+\frac{p \xi_0}{2(p+1)}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{p+1} I(t)$$

إذن لدينا $I(t)>0$ ينتج عنه :

$$\|u_t\|^2+\|\nabla u\|^2\le cE(0);\forall t>0...(8.4)$$

من المؤكد أن c هو ثابت موجب .

4.4 الإنفجار في زمن منتهي:

نظرية 2.4

ليكن $u(x,t)$ هو حل للمسألة (1.4) مع $-1<\alpha<0$ و $p>2\gamma+1$ ، إذن من أجل كل ثابت $T>0$ والشروط الإبتدائية $u_0(x)$ و $u_1(x)$ كبيرة بما يكفي. فإن $u(x,t)$ تنفجر في زمن منتهي T^* .

البرهان :

لتكن الدالة $H(t)$ معرفة ما يلي :

$$H(t)=-\int_0^t E(s)\,ds+(dt+l)\|u_0\|^2...(9.4)$$

حيث d و l ثوابت تحدد لاحقا ،نقوم باشتقاق $H(t)$ من تعريف $E(t)$. يتضح أن :

$$H'(t)=-E(t)+d\|u_0\|^2\ge -E(0)+d\|u_0\|^2$$

نفرض d بحيث يكون :

$$-E(0)+d\|u_0\|^2=H'(0)>0...(10.4)$$

إذن: $H(t)>0$ و

$$H'(0)-H'(t)=-\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t\int_\Omega u_t\int_0^s(s-z)^{-(\alpha+1)}u_t(s)\,dz\,dx\,ds\le 0...(11.4)$$

نعرف الدالة $Q(t)$ بـ :

$$Q(t)=H(t)^{1-\theta}+\frac{\xi}{2}\left(\|u\|^{2}-\|u_{0}\|^{2}\right)\ldots(12.4)$$

مع $\xi>0,0<\theta=\frac{p-1}{2(p+1)}<1$. **إذن :**

$$Q(0)=H(0)^{1-\theta}=l^{1-\theta}\|u_{0}\|^{2(1-\theta)}\ldots(13.4)$$

و

$$Q'(t)=(1-\theta)H(t)^{-\theta}H'(t)+\varepsilon\int_{\Omega}u_{t}u\,dx\ldots(14.4)$$

بالإشتقاق المتبوع بمكاملة (14.4) ينتج لدينا :

$$Q'(t)=(1-\theta)H(t)^{-\theta}H'(t)+\varepsilon\int_{\Omega}u_{0}u_{1}dx+\varepsilon\int_{0}^{t}\|u_{t}\|^{2}ds+\varepsilon\int_{0}^{t}\int_{\Omega}u_{tt}u\,dx\,ds\ldots(15.4)$$

من أجل تقييم الحد الأخير من (15.4) نضرب المعادلة الأولى للمسألة (1.4) في u ثم نكامل العبارة التي تم الحصول عليها على $\Omega\times(0,t)$, نحصل على :

$$\int_{0}^{t}\int_{\Omega}u_{tt}u\,dx\,ds=-\xi_{0}\int_{0}^{t}\|\nabla u\|^{2}ds-\xi_{1}\int_{0}^{t}\|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}ds+\int_{0}^{t}\|u\|_{p+1}^{p+1}ds\ldots(16.4)$$
$$-\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_{0}^{t}\int_{\Omega}u\int_{0}^{z}(z-s)^{-(\alpha+1)}u_{t}(s)\,ds\,dx\,dz$$

نعبر عن $\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}t^{-\beta}$ بـ $K_{\beta}(t)$ من أجل t ثابت ، نعرف التمديدات التالية على كل المجال R.

$$L_{t}W(\tau):=\begin{cases}W(\tau),\tau\in[0,t]\\0,\tau\in R/[0,t]\end{cases}$$

و

$$\widetilde{L}K_{\beta}(\tau):=\begin{cases}K_{\beta},\tau>0\\0,\tau\leq0\end{cases}$$

يتضح أن :

$$\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^t u(s)\int_0^s (s-z)^{-(\alpha+1)} u_t(z)\,dz\,ds$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s)\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{L}K_{\alpha+1}(s-z)\,L_t u_t(z)\,dz\,ds$$

باستعمال نظرية (Parseval) في [14] نكتب :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s)\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{L}K_{\alpha+1}(s-z)\,L_t u_t(z)\,dz\,ds$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} F(L_t u)(\sigma)\overline{F\left(\widetilde{L}K_{\alpha+1_t} * L_t u_t\right)}(\sigma)\,d\sigma$$

حيث $F(f)$ تعبر عن تحويل فوريي الإعتيادي لـ f ولدينا أيضا K_β يمتلك خاصية الإلتفاف (Voir[14])

$$K_{\beta+\eta-1}(t)=\left(K_\beta * K_\eta\right)(t)$$

نحصل على :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s)\int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{L}K_{\alpha+1}(s-z)\,L_t u_t(z)\,dz\,ds$$
$$\leq\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(L_t u_t)F\left(\widetilde{L}K_{\frac{\alpha+1}{2}}\right)\right|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(L_t u)F\left(\widetilde{L}K_{\frac{\alpha+1}{2}}\right)\right|^2 d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq\delta\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(L_t u_t)F\left(\widetilde{L}K_{\frac{\alpha+1}{2}}\right)\right|^2 d\sigma+\frac{1}{4\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|F(L_t u)F\left(\widetilde{L}K_{\frac{\alpha+1}{2}}\right)\right|^2 d\sigma$$

من أجل $\delta>0$ من العلاقة الموجودة في [14] نجد :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{L}K_{\alpha+1}(s-z) L_t u_t(z)\,dz\,ds \le$$

$$\frac{1}{\cos(\alpha\pi/2)} \times \left[\delta \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u_t(s)\left(\widetilde{L}K_{\alpha+1_t} * L_t u_t\right)(s)\,ds \ldots (17.4)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s)\left(\widetilde{L}K_{\alpha+1_t} * L_t u\right)(s)\,ds \right]$$

إذن وبالأخذ بعين الإعتبار كلا من: (15.4)، (16.4) و(17.4) نتحصل على :

$$Q'(t) \ge (1-\theta) H^{-\theta}(t) H'(t) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0 u_1\,dx + \varepsilon \int_0^t \|u_t\|^2\,ds$$

$$- \varepsilon \xi_0 \int_0^t \|\nabla u\|^2\,ds - \varepsilon \xi_1 \int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}\,ds + \varepsilon \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1}\,ds$$

$$- \frac{\varepsilon\delta}{\cos(\alpha\pi/2)} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u_t(s)\left(\widetilde{L}K_{\alpha+1_t} * L_t u_t\right)(s)\,ds$$

$$- \frac{\varepsilon}{4\delta\cos(\alpha\pi/2)} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s)\left(\widetilde{L}K_{\alpha+1_t} * L_t u\right)(s)\,ds$$

من (11.4) لدينا :

$$Q'(t) \ge \left[(1-\theta)H^{-\theta}(t) - \frac{\varepsilon\delta}{\cos(\alpha\pi/2)}\right] H'(t) + \frac{\varepsilon\delta}{\cos(\alpha\pi/2)} H'(0) + \varepsilon \int_{\Omega} u_0 u_1\,dx$$

$$+ \varepsilon \int_0^t \|u_t\|^2\,ds - \varepsilon\xi_0 \int_0^t \|\nabla u\|^2\,ds - \varepsilon\xi_1 \int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}\,ds + \varepsilon \int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1}\,ds \ldots (18.4)$$

$$- \frac{\varepsilon}{4\delta\cos(\alpha\pi/2)} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s)\left(\widetilde{L}K_{\alpha+1_t} * L_t u\right)(s)\,ds$$

الان سنقوم بتقدير العنصر الأخير للطرف الأيمن لـ (18.4) والذي نعبر عنه بـ J، باستعمال

متراجحة كوشي -شوارتز نجد :

$$J = \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} L_t u(s) \left(\widetilde{L} K_{\alpha+1_t} * L_t u \right)(s)\, ds$$

$$\leq \int_{\Omega} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| L_t u \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widetilde{L} K_{\alpha+1_t} * L_t u \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

الآن نأخذ ثلاث حالات :

1. إذا كان $\alpha > -\frac{1}{2}$ إذن متراجحة (Hardy-Littlewood-Sobolev) (تطبق بأخذ $q = 2, \lambda = \alpha + 1$ و $p = r$) تحقق :

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \widetilde{L} K_{\alpha+1_t} * L_t u \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| L_t u \right|^r ds \right)^{\frac{1}{r}}$$

مع $r = \frac{2}{1-2\alpha} > 1$ و C ثابت يتعلق ب α لذلك :

$$J \leq C \int_{\Omega} \left(\int_{0}^{t} |u|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |L_t u|^r ds \right)^{\frac{1}{r}} dx \ldots (19.4)$$

$$\leq C \left\{ \int_{\Omega} \int_{0}^{t} |u|^2 ds\, dx + \int_{\Omega} \left(\int_{0}^{t} |u|^r ds \right)^{\frac{2}{r}} dx \right\}$$

في باقي البرهان نلاحظ أن C ثابت عام يتعلق ب $p, |\Omega|$ و T يمكن أن يتغير من سطر الى آخر،
نلاحظ أن $r < 2$ وبالتالي فإن :

$$\int_{\Omega} \left(\int_{0}^{t} |u|^r ds \right)^{\frac{2}{r}} dx \leq \int_{\Omega} \left(t^{\frac{2-r}{2}} \left(\int_{0}^{t} |u|^2 ds \right)^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{2}{r}} dx \leq t^{\frac{2-r}{r}} \int_{\Omega} \int_{0}^{t} |u|^2 ds\, dx \ldots (20.4)$$

بتعويض التقديرات (19.4) و(20.4) في (18.4) نجد :

$$Q'(t) \geq \left[(1-\theta)H^{-\theta}(t) - \frac{\varepsilon\delta}{\cos(\alpha\pi/2)}\right]H'(t) + \frac{\varepsilon\delta}{\cos(\alpha\pi/2)}H'(0) + \varepsilon\int_{\Omega} u_0 u_1 dx$$

$$+\varepsilon\int_0^t \|u_t\|^2 ds - \varepsilon\xi_0\int_0^t \|\nabla u\|^2 ds - \varepsilon\xi_1\int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} ds + \varepsilon\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds$$

$$-\frac{\varepsilon}{4\delta\cos(\alpha\pi/2)}C\left(1+t^{\frac{2-r}{r}}\right)\int_0^t \|u\|^2 ds$$

ليكن: $\delta = M\cos(\alpha\pi/2)H(t)^{-\theta}$ (نلاحظ أن $H(t)\neq 0$ من أجل كل t في الواقع $H(t)\geq H(0) > l\|u_0\|^2$) نحصل على :

$$Q'(t) \geq [(1-\theta)-\varepsilon M]H(t)^{-\theta}H'(t) + \varepsilon MH(t)^{-\theta}H'(0) + \varepsilon\int_{\Omega} u_0 u_1 dx$$

$$+\varepsilon\int_0^t \|u_t\|^2 ds - \varepsilon\xi_0\int_0^t \|\nabla u\|^2 ds - \varepsilon\xi_1\int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} ds + \varepsilon\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds$$

$$-\frac{\varepsilon}{4M\cos^2(\alpha\pi/2)}C\left(1+t^{\frac{2-r}{r}}\right)H^{\theta}(t)\int_0^t \|u\|^2 ds$$

نحن بحاجة الى تقدير $H(t)^{\theta}\int_0^t \|u\|^2 ds$

$$H(t)^{\theta}\int_0^t \|u\|^2 ds \leq \left[\frac{1}{1+p}\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds + (dt+l)\|u_0\|^2\right]^{\theta} \times \int_0^t \|u\|^2 ds$$

$$\leq \left[\frac{1}{(1+p)^{\theta}}\left(\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds\right)^{\theta} + (dt+l)^{\theta}\|u_0\|^{2\theta}\right] \times \int_0^t \|u\|^2 ds$$

متراجحة هولدر(Holder) تحقق :

$$H(t)^{\theta}\int_0^t \|u\|^2 ds$$

$$\leq \left[\frac{1}{(1+p)^{\theta}}\left(\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds\right)^{\theta} + (dt+l)^{\theta}\|u_0\|^{2\theta}\right] \times Ct^{\frac{p-1}{p+1}}\left(\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds\right)^{\frac{2}{p+1}}$$

وفقا لـ $\frac{p-1}{p+1}<1$ ، نتحصل على :

$$H(t)^{\theta}\int_0^t \|u\|^2\,ds \le \frac{C}{(1+p)^{\theta}}\left(1+\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1}\,ds\right)^{\theta+\frac{2}{p+1}}(1+T)$$
$$+C\,(dt+l)^{\theta}\,\|u_0\|^{2\theta}\left(\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1}\,ds\right)^{\frac{2}{p+1}}(1+T)$$

الآن لدينا $1<\frac{p+3}{2(p+1)}=\theta+\frac{2}{p+1}$, نكتب :

$$H(t)^{\theta}\int_0^t \|u\|^2\,ds \le \frac{C}{(1+p)^{\theta}}\left(1+\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1}\,ds\right)(1+T)$$
$$+C\,(dt+l)^{\theta}\,\|u_0\|^{2\theta}\left(\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1}\,ds\right)(1+T)$$

إذن:

$$Q'(t)\ge\left[(1-\theta)-\varepsilon M\right]H(t)^{-\theta}H'(t)+\varepsilon M H(t)^{-\theta}H'(0)+\varepsilon\int_{\Omega}u_0u_1\,dx$$
$$+\varepsilon\int_0^t \|u_t\|^2\,ds-\varepsilon\xi_0\int_0^t \|\nabla u\|^2\,ds-\varepsilon\xi_1\int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}\,ds$$
$$-\frac{A\varepsilon}{M\cos^2(\alpha\pi/2)}\left(1+\varepsilon\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1}\,ds\right)$$

مع : $$A=\frac{C}{4}(2+T)^2\left[\frac{1}{(1+p)^{\theta}}+(dT+l)^{\theta}\,\|u_0\|^{2\theta}\right]$$

نختار ε بحيث $\varepsilon\le\frac{1-\theta}{M}$, نلاحظ أن $\cos^2(\alpha\pi/2)>1/2$ نتحصل على:

$$Q'(t)\ge\varepsilon M H(t)^{-\theta}H'(0)+\varepsilon\int_{\Omega}u_0u_1\,dx$$
$$+\varepsilon\int_0^t \|u_t\|^2\,ds-\varepsilon\xi_0\int_0^t \|\nabla u\|^2\,ds-\varepsilon\xi_1\int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)}\,ds$$
$$+\varepsilon\left(1-\frac{2A}{M}\right)\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1}\,ds-\frac{2A\varepsilon}{M}$$

بالإضافة إلى ذلك من الواضح أن الثابت C_1 محدد ، نضيف ونطرح $C_1H(t)$ نجد :

$$Q'(t) \geq C_1H(t) + \left(\frac{C_1}{2} + \varepsilon\right)\int_0^t \|u_t\|^2 ds + \xi_0\left(\frac{C_1}{2} - \varepsilon\right)\int_0^t \|\nabla u\|^2 ds$$
$$+\xi_1\left(\frac{C_1}{2(\gamma+1)} - \varepsilon\right)\int_0^t \|\nabla u\|^{2(\gamma+1)} ds - C_1(dt+l)\|u_0\|^2$$
$$+\varepsilon\int_\Omega u_0u_1dx + \left[\varepsilon\left(1 - \frac{2A}{M}\right) - \frac{C_1}{p+1}\right]\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1} ds - \frac{2A\varepsilon}{M}$$

نختار $C_1 = 2(\gamma+1)\varepsilon, u_0$ و u_1 بحيث :

$$\begin{cases} \int_\Omega u_0u_1dx - 2(\gamma+1)(dT+l)\|u_0\|^2 - \frac{2A}{M} \geq 0 \\ 1 - \frac{2A}{M} - \frac{2(\gamma+1)}{p+1} \geq b, b > 0 \end{cases}$$

نحدد u_0 و u_1 بحيث :

$$\int_\Omega u_0u_1dx - 2(\gamma+1)(dT+l)\|u_0\|^2 \geq 0 ...(21.4)$$

نختار M كذلك كبيرة من أجل :

$$\int_\Omega u_0u_1dx - 2(\gamma+1)(dT+l)\|u_0\|^2 \geq \frac{2A}{M} > 0$$

بالإضافة إلى ذلك ، في الحالة الثانية فرضنا M كبيرة لأجل :

$$\frac{p-(2\gamma+1)}{p+1} - \frac{2A}{M} > 0$$

نذكر أن $p > 2\gamma+1$ ونقوم باختيار $b > 0$ فنتحصل على :

$$Q'(t) \geq 2(\gamma+1)\varepsilon H(t)+(\gamma+1)\varepsilon\int_0^t \|u_t\|^2\,ds+\varepsilon b\int_0^t \|u\|_{p+1}^{p+1}\,ds \ldots(22.4)$$

من جهة أخرى لدينا :

$$Q(t)^{\frac{1}{1-\theta}} \leq 2^{\frac{1}{1-\theta}}\left\{H(t)+\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}\left(\int_0^t\int_\Omega |u_t u|\,dxds\right)^{\frac{1}{1-\theta}}\right\} \ldots(23.4)$$

باستعمال متراجحة كوشي شوارتز (Cauchy-Schwarz) ومتراجحة هولدر (Holder) نجد :

$$\left(\int_0^t\int_\Omega |u_t u|\,dxds\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \leq \left[\int_0^t\left(\int_\Omega u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega u_t^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}ds\right]^{\frac{1}{1-\theta}}$$

$$\leq C(\Omega)\left[\int_0^t\left(\int_\Omega |u|^{p+1}dx\right)^{\frac{1}{p+1}}\left(\int_\Omega u_t^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}ds\right]^{\frac{1}{1-\theta}}$$

$$\leq C(\Omega)\left[\int_0^t\left(\int_\Omega |u|^{p+1}dx\right)^{\frac{2}{p+1}}\right]^{\frac{1}{2(1-\theta)}}\left[\int_0^t\int_\Omega u_t^2\,dxds\right]^{\frac{1}{2(1-\theta)}}$$

باختيارنا لـ: $\theta=\dfrac{p-1}{2(p+1)}$ نستطيع تطبيق متراجحة يونغ (Young) ومتراجحة هولدر (Holder) لنتحصل على :

$$\left(\int_0^t\int_\Omega |u_t u|\,dxds\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \leq B\left\{\int_0^t\int_\Omega u_t^2\,dxds+\left[\int_0^t\left(\int_\Omega |u|^{p+1}dx\right)^{\frac{2}{p+1}}\right]^{\frac{1}{1-2\theta}}\right\}$$

$$\leq B\left\{\int_0^t\int_\Omega u_t^2\,dxds+\left(\int_0^t\int_\Omega |u|^{p+1}dxds\right)^{2/(p+1)(1-2\theta)} t^{(p-1)/(p+1)(1-2\theta)}\right\}$$

من أجل $B>0$. ليكن $\beta=\dfrac{p-1}{2}>0$ ، ينتج لدينا :

$$\left(\int_0^t\int_\Omega |u_t u|\,dxds\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \leq B\left\{\int_0^t\int_\Omega u_t^2\,dxds+T^{\beta}\int_0^t\int_\Omega |u|^{p+1}dxds\right\}$$

لذلك وبمراعاة ماهو موجود في (23.4) نجد :

$$Q(t)^{\frac{1}{1-\theta}} \le 2^{\frac{1}{1-\theta}}\left\{H(t)+\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}B\left(\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxds+T^\beta\int_0^t\int_\Omega|u|^{p+1}dxds\right)\right\}$$

نصل إلى :

$$Q(t)^{\frac{1}{1-\theta}} \le K\varepsilon\left\{2(\theta+1)H(t)+2(\theta+1)\int_0^t\int_\Omega u_t^2dxds+b\int_0^t\int_\Omega|u|^{p+1}dxds\right\}$$

من أجل $K>0$ وباستعمال (22.4) نجد :

$$Q(t)^{\frac{1}{1-\theta}} \le KQ'(t)...(24.4)$$

نختار K كبير لأجل :

$$\begin{cases} 2^{\frac{1}{1-\theta}} \le 2K\varepsilon(\theta+1) \\ 2^{\frac{1}{1-\theta}}\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}B \le 2K\varepsilon(\theta+1) \\ 2^{\frac{1}{1-\theta}}\varepsilon^{\frac{1}{1-\theta}}BT^\beta \le bK\varepsilon \end{cases}$$

نكامل (16.4) على $(0,t)$ نحصل على :

$$Q(t)^{\frac{\theta}{1-\theta}} \ge \frac{1}{Q(0)^{\frac{-\theta}{1-\theta}}-\frac{\theta}{(1-\theta)K}t}$$

كنتيجة $Q(t)$ تنفجر لما: $T^* \ge \frac{(1-\theta)KQ(0)^{\frac{-\theta}{1-\theta}}}{\theta}$. هذه المتراجحة محققة .

إذا كانت $Q(0)$ مختارة بحيث $Q(0)^{\frac{\theta}{1-\theta}} > \frac{(1-\theta)K}{\theta T}$ وهذا مكافئ لإختيار l بحيث $l^\theta > \frac{(1-\theta)K}{\theta T\|u_0\|^{2\theta}}$.

2.لدينا $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ ثم نستخدم مايلي :

$$\int_0^t \left| \int_0^s (s-z)^{-(\alpha+1)} u(z)\,dz \right|^2 ds$$
$$\leq \int_0^t \left(\int_0^s (s-z)^{-2(\alpha+1)}\,dz \right) \left(\int_0^s u^2(z)\,dz \right)$$
$$\leq \int_0^t \frac{s^{1-2(\alpha+1)}}{1-2(\alpha+1)} \left(\int_0^s u^2(z)\,dz \right) \leq C t^{-2\alpha} \int_0^s u^2(z)\,dz$$

إذن :

$$J(t) \leq C\left(2+T^2\right) \int_0^s \int_\Omega u^2(z)\,dx dz$$

هنا اختيار جيد ل δ بحيث يكون $\delta = MH^{-\theta}(t)/\cos(\alpha\pi/2)$. باقي البرهان مشابه لبرهان الحالة (1) .

3.إذا كان $\alpha = -\frac{1}{2}$, فإن :

$$\int_0^t \left[\left(\int_0^s (s-z)^{-\frac{p+1}{2p}}\,dz \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_0^s |u|^{p+1}\,dz \right)^{\frac{1}{p+1}} \right]^2 ds$$
$$\leq C \int_0^t \left[s^{\frac{p}{p+1}-\frac{1}{2}} \left(\int_0^s |u|^{p+1}\,dz \right)^{\frac{1}{p+1}} \right]^2 ds$$
$$\leq C \int_0^t s^{\frac{2p}{p+1}-1}\,ds \left(\int_0^s |u|^{p+1}\,dz \right)^{\frac{2}{p+1}}$$

ونكمل كما في الحالة (1) وهكذا يكون قد انتهى البرهان .

المراجع

[1] M. Aassila, M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, Existence and uniform decay of the wave equation with non linear boundary damping and boundary memory source term, Calc. Var. 15 (2002), 155-180.

[2]R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.

[3]F. Alabeau-Boussouira, Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems, SIAM J. Control Optim., Vol. 41, No. 2 2002).(

[4]M. R. Alaimia and N-e. Tatar, Blow up for the wave equation with a fractional damping, J. Appl. Anal., Vol. 11, No. 1 (2005), 133-144.

[5] M. M. Cavalcanti and J. A. Soriano, On solvability and stability of the wave equation with higher order terms and boundary damping, Rev. Mat. Appl., 18 (1997); 61-78.

[6]M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, and J. A. Soriano, On the existence and the uniform decay of a hyperbolic equation with non-linear boundary conditions, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 24 (2000), 183-199.

[7]T. Cazenave, A. Haraux, An introduction to semi linear evolution equations, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Application. 13 (1988).

[8]V. Georgiev and G. Todorova, Existence of a solution of the wave equation with nonlinear boundary damping and source terms, J. Diff. Eqs., 109 (1994), 295-308.

[9]H.A. Levine, Instability and nonexistence of global solutions of nonlinear wave equation of the form $Du_{tt} = Au + F(u)$, Trans. Amer. Math. Soc., 192 (1974), 1-21.

[10]MR. Li and L. Y. Tsai, Existence and nonexistence of global solutions of some systems of semilinear wave equations, Nonlinear Anal. Theory, Methods Appl. 54 (2003) 13971415.

[11]N.-e. Tatar, A blow up result for a fractionally damped wave equation, Nonl. Diff. Eqs. App. (NoDE) 12 (2) (2005).

[12] K. B.Oldham and J. Spanier, The fractional calculus. New York : Acad. Press 1974.

[13] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 198, Academic Press, (1999)

[14] Samko S. G., Kilbas A. A and O. I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Amsterdam : Gordon and Breach 1993 [Engl. Trans. from the Russian 1987].

.

خاتمة

الغرض من عملنا في هذه المذكرة هو تحديد شروط كافية يمكن في ظلها أن تضمحل الحلول في وقت منتهي لبعض المسائل التطورية في وجود قوة خارجية تعمل على تبديد الحلول بمعنى أن الحلول تؤول الى ما لانهاية عندما يقترب الزمن من زمن منتهي والذي يسمى زمن الانفجار.

إن قوى التخامد هي التي تحقق الإستقرار في حلول المسألة ،فمن السهل أن نرى أن في غياب القوى الخارجية، إذا كان هذا الحل موجودا محليا يمكننا دائما تمديده الى حل كلي.

إن التفاعل بين القوى الخارجية وقوى التخامد قضية مركزية في العديد من الدراسات وإنها لا تزال كذلك ،ومن المهم أن نعرف من يتفوق.

ولتحقيق هذا الهدف قمنا باستخدام ثلاثة طرق بتقنيات مختلفة على ثلاثة مسائل وهي طريقة ليفين وطريقة لي وطريقة جورجييف وتودوروفا .

نرجو أن نكون قد توفقنا في توفير مرجع باللغة العربية للباحثين حيث أن هذه الطرق حديثة وذات فعالية في ميدان المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية.

الملخص

الغرض من عملنا في هذه المذكرة هو تحديد شروط كافية يمكن في ظلها أن تنفجر الحلول في زمن منتهي لبعض المسائل التطورية من صنف معادلات القطوع الزائدية في وجود قوة خارجية تعمل على تبديد الحلول بمعنى ان الحلول تؤول الى مالانهاية عندما يقترب الزمن من زمن منتهي والذي يسمى زمن الانفجار, وهذا باستخدام ثلاثة طرق مختلفة.

Résumé

L'objet de cette mémoire de master porte essentiellement sur la détermination de conditions suffisantes pouvant explosé la solution en temps fini pour certains problèmes hyperbolique en présence d'un terme source de type polynomiale avec trois méthodes différents. Il s'est avéré que cette source empêche l'existence globale (en temps) de la solution du problème; c'est-à-dire que la solution (ou plus précisément l'énergie du problème) tend vers l'infini pour la norme de l'espace considéré quand s'approche d'une valeur finie appelée temps d'explosion. Pour cette raison on appelle le terme source terme d'explosion.

Abstract

The object of this master's thesis focuses on the determination of sufficient conditions that can explode the solution in finite time for certain hyperbolic problems in the presence of a source term of polynomial type with three different methods. It appears that this source prevents the global existence (in time) of the solution of the problem is to say that the solution (or more precisely the energy of the problem) tends to infinity for norm of the space when t approached to a finite time T.