RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE LARBI TEBESSI DE TÉBESSA

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DOMAINE DE FORMATION : SCIENCES ET TECHNOLOGIES (ST)

Fatigue des matériaux
Cours et exercices

Matière : Fatigue des matériaux
Spécialité : Génie des matériaux
Niveau : Master 2

Réaliser par : Diha Abdallah

Année universitaire : 2021/2022

TABLE DES MATIERES

Préface

L'objet de la présente polycopie est de fournir une vision globale des phénomènes responsables de la ruine de matériaux de structure. Ceux-ci revêtent en effet une importance considérable puisque, peu ou prou, ils vont déterminer la durée de vie ou la disponibilité d'un composant, d'un assemblage et par enchainement, d'une installation industrielle complète.

Cette polycopie est donc principalement destinée à des étudiants en master LMD ou des ingénieurs déjà familiarisent avec la science des matériaux et qui voudraient approfondir inculquer à l'étudiant la notion de rupture par fatigue ainsi que la détermination de la durée de vie d'une structure. Ce travail s'articule sur six chapitres. Le premier sera consacré à une présentation des **c**oncepts généraux sur la fatigue : mécanismes de fatigue, différents approches en fatigue. Le deuxième chapitre est divisé en quatre parties, telle que la première partie comprend le comportement en fatigue des matériaux tandis que la deuxième, la troisième et la quatrième partie comprennent successivement : Aspects statistiques, facteurs influençant sur la tenue en fatigue, et diagrammes de Haigh, Goodman, Ros etc. Le troisième chapitre présente le comportement cyclique (fatigue oligocyclique). Le quatrième chapitre est consacré à l'étude de cumul de dommages. Dans le cinquième chapitre nous étudierons les propagations des fissures de fatigue (approche de la MLER, mécanismes, modèles de propagation empiriques et théoriques etc…). En fin Le sixième chapitre traite l'Effet d'entaille (coefficient de réduction de durée de vie K_f, coefficient de Neuber etc…). A la fin, une série d'exercices clôturent cette polycopie.

Introduction

Les défaillances par fatigue des structures métalliques sont un phénomène bien connu. Ces défaillances ont déjà été observées au siècle dernier, et les premières recherches sur la fatigue ont été menées à cette époque. August Wöhler est l'auteur de recherches techniques remarquables sur la fatigue. Il a constaté qu'une seule application de charge, bien en dessous de la résistance statique d'une structure, ne causait aucun dommage à la structure. Cependant, si la même charge était répétée plusieurs fois, elle pouvait provoquer une défaillance complète. Au siècle dernier, on pensait que la fatigue était un phénomène mystérieux dans le matériau, car les dommages dus à la fatigue n'étaient pas visibles. La défaillance se produisait apparemment sans aucun avertissement préalable. Au cours de ce siècle, nous avons appris que des applications répétées de charges peuvent déclencher un mécanisme de fatigue dans le matériau, conduisant à la nucléation d'une microfissure, à la croissance de la fissure et finalement à la défaillance complète d'une structure. L'histoire des ouvrages d'art a été marquée jusqu'à présent par de nombreuses défaillances par fatigue de machines, de véhicules en mouvement, de structures soudées, d'avions, etc. De temps en temps, ces défaillances ont provoqué un accident catastrophique, comme une explosion ou la rupture complète d'un pont ou d'autres grandes structures. En premier temps il est nécessaire de passer par des notions préliminaires pour parvenir à entrer directement dans le sujet commençant par le cas de contrainte complètement renversée par l’étude de la fameuse courbe de Wöhler qui constitue la base d’étude de la fatigue, suivi du cas de contrainte non complètement renversée (critère de Goodman). Ensuite c’est la généralisation pour le cas de changement complexe Finalement on étudiera le cas de cumul d’endommagement décrit par la loi de Miner.

Une structure est conçue dans le but d’accomplir une ou plusieurs fonctions, on distingue deux types : les unes qui sont soumises à des chargements mécaniques statiques et les autres qui sont soumises à des chargements dynamiques. Pratiquement les structures de la première catégorie durent plus longtemps ce qui justifie le dimensionnement en fonction de la résistance ou la rigidité lors la phase de conception.

I.1. Généralités

Une structure est conçue dans le but d’accomplir une ou plusieurs fonctions, on distingue deux types : les unes qui sont soumises à des chargements mécaniques statiques et les autres qui sont soumises à des chargements dynamiques. Pratiquement les structures de la première catégorie durent plus longtemps ce qui justifie le dimensionnement en fonction de la résistance ou la rigidité

lors la phase de conception. Un chargement dynamique de causes variables peut se traduire par des variations cycliques de contraintes. Malheureusement la ruine d'un nombre important de structures a été souvent observée et l'est encore aujourd'hui, elle peut, même parfois, être catastrophique en termes de pertes humaines. Il est à constater que les sollicitations dynamiques qui sont à l'origine de ces ruines sont beaucoup inférieures à la limite d'élasticité du matériau constituant la structure, c'est le phénomène de fatigue.

a) *C'est quoi la fatigue ?*

La fatigue est une forme de défaillance qui se produit dans des structures (ponts, aéronefs, pièces de machines…) subissant des contraintes dynamiques et variables. Elle est susceptible de se manifester même lorsque la contrainte est nettement inférieure à la résistance à la traction ou à la limite conventionnelle d'élasticité dans le cas d'une charge statique. Une telle défaillance porte le nom de fatigue pace qu'elle succède habituellement à une une longue période de cycles de déformation et de contrainte. Pour comprendre ce phénomène prenons un fil d'acier entre deux mains en le coudant dans un sens et puis dans l'autre sens, en faisant cela plusieurs fois jusqu'à la rupture (Fig. 1).

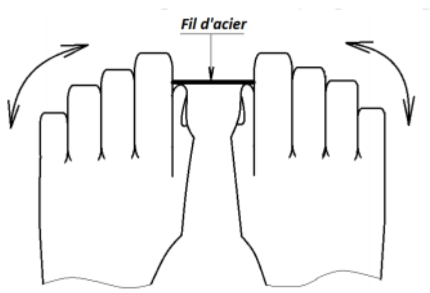


Figure I.1 : Rupture d'un fil d'acier sous l'effet d'une flexion cyclique aux mains

Analysons le problème (Fig. 2) : On assimile le fil d'acier à une poutre sur laquelle sont appliqués les efforts des deux mains, dans le premier sens la fibre AB est tirée (sens 1) contrainte positive, lorsqu'on inverse le chargement (sens 2) la fibre AB est comprimée et la contrainte est négative. En répétant plusieurs fois jusqu'à la rupture.

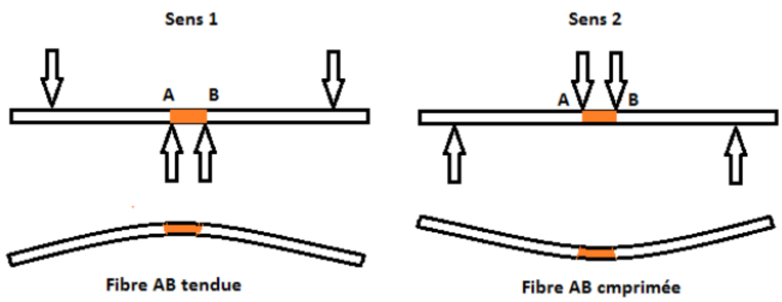


Figure I.2 : Modélisation du chargement appliqué par les mains sur le fil d'acier

1- Exemples de rupture par fatigue

Figure 3. Détachement d'une partie d'une roue dentée

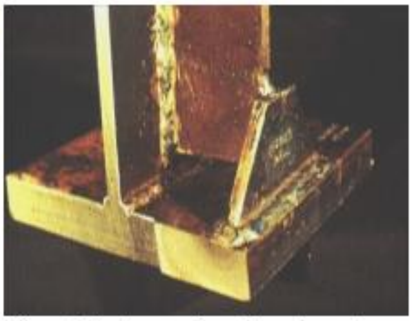


Figure 4. Rupture au niveau d'une charpente métallique

Figure 5. Fissuration d'un pont

Figure 6. Rupture d'un tirant

Figure 7. Rupture d'un arbre cannelé

Figure 8. Fissuration au niveau du mécanisme d'atterrissage d'un avion

I.2. Mécanismes de fatigue

Définition: La **fatigue** est un processus qui, sous l'action de contraintes ou déformations cycliques, répétées ou alternées, modifie les propriétés locales d'un matériau et peut entraîner la formation de fissures et éventuellement la rupture de la structure. Les étapes principales de la fatigue sont :

a) Amorçage :

A cause de la grande finesse du défaut initié, sa détection n'est possible que si on utilise de puissants équipements de laboratoire. Son initiation peut avoir lieu dans des endroits où l'accès est impossible. Dans la figure (Fig. 3) la zone d'amorçage est repérée par zone 1.

b) Propagation :

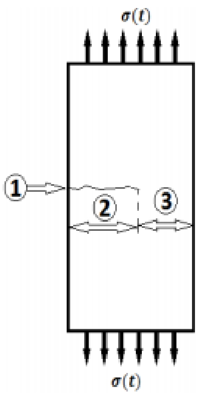
Sous l'effet du changement cyclique du chargement la fissure initiée commence à prendre des dimensions importantes menant finalement à la ruine. A ce stade la fissure qui a grandit résultait de la propagation des microfissures causées par le défaut initié dans la première étape, c'est elle qui deviendra la fissure de la fatigue. Sur la figure (Fig. 3) ce stade correspond à la zone 2

(a) (b)

Figure I.3 : (a): Faciès de rupture d'un arbre de transmission de voiture de .course. (b) : Faciès de fatigue d'un arbre épaulé sollicité en flexion plane alternée, A : zone d'amorçage, L: zone lisse de propagation des fissures;
G: zone accidentée de rupture.

c) Rupture brutale :

Lorsque la fissure atteint une distance de telle façon que la section résiduelle est trop faible pour supporter de fortes contraintes résultant d'une concentration au fond de la fissure, sur la figure (Fig. 3) cette section correspond à la zone 3.



1- Initiation

2- Propagation

3- section résiduelle

Figure I.4: La section résiduelle

I.3. Types de sollicitations en fatigue

I.3.1. ollicitations axiales (Traction/Compression)

Dans le système triangulaire ci-contre (Fig. 5) les barres AD, DE sont en compression, tandis que les barres AE et EB sont en traction.

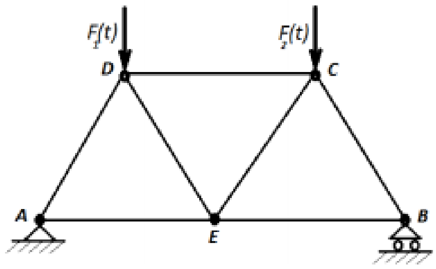


Figure I.5: Système en treillis

I.3.2. Flexion

On distingue deux types de flexion :

- ***a) Flexion ondulée :*** Les contraintes de flexion sont de même signe durant les cycles de fatigue. Les figures (Fig. 6).

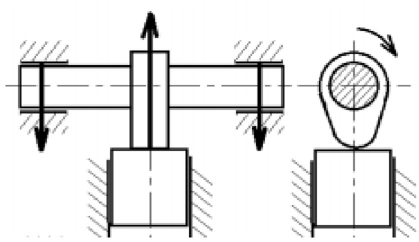


Figure I.6: Arbre à came

b) Flexion alternée

Dans ce cas de sollicitation les contraintes sont opposées en signes durant les cycles effectués. Une poutre vibrant sou l'effet d'un chargement dynamique est en flexion alternée, la fibre supérieure tantôt tirée tantôt comprimée.

c) Flexion rotative

Si on assimile la structure, soumise à une flexion rotative, à une poutre tournante par rapport à la direction de la charge (Fig. 7) la fibre A se trouve tantôt comprimée tantôt tendue. Ce cas de flexion correspond au type purement alternée c.à.d. les contraintes de flexion sont égales mais opposées durant les cycles effectués (Fig. 8) .

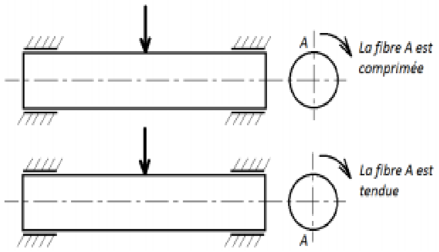


Figure I.7: Flexion rotative

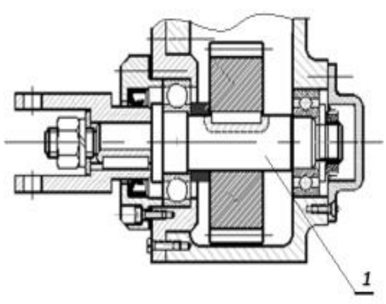


Figure I.8: Arbre en flexion rotative

I.3.3. Torsion: Cette sollicitation est analogue à la flexion en effet on distingue :

a) Torsion ondulée

Les contraintes tangentielles sont de même signes. Comme exemple on peut citer la barre de torsion de suspension arrière d'un véhicule (illustrée par la figure (Fig. 9)

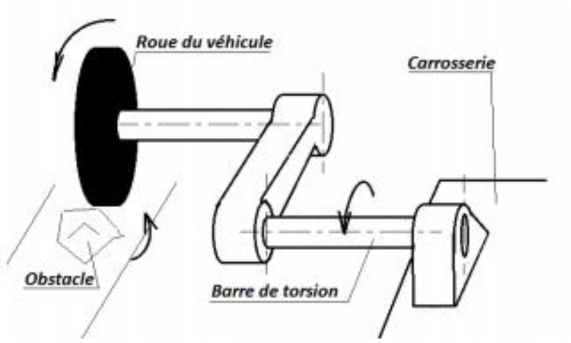


Figure I.9: Barre de torsion d'un véhicule

b) Torsion alternative

Les contraintes tangentielles sont de signes opposées. Dans la figure (Fig. 10) l'arbre tournant est en rotation continu et l'arbre oscillant est en rotation alternative, ce dernier est soumis à une torsion alternative.

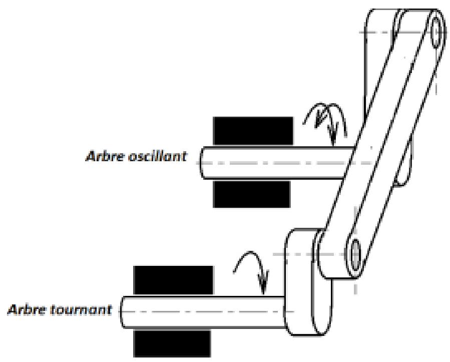


Figure I.10: Mécanisme oscillant

I.3.4. Sollicitation combinée

La sollicitation peut être la combinaison de traction, torsion ou de flexion. L'arbre 1 du réducteur de la figure (Fig. 8) est soumis à une flexion rotative et une torsion.

a) Fatigue en contact

Au moment du contact le corps 1 exerce une pression de contact sur le corps 2 cela engendrera des contraintes maximales de cisaillement sous la surface de contact (Fig. 11). Une pression répétée pourrait entrainer une fissuration et une détérioration de la zone de contact c'est la fatigue de contact. Ce phénomène est très rencontré surtout dans les roulements, les engrenages et les chemins de fer. (Fig. 12)

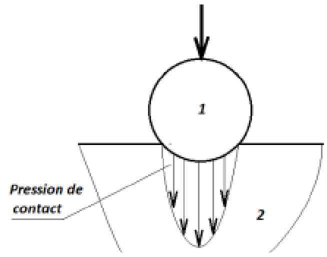


Figure I.11: Contact de deux corps

Figure I.12: Détérioration d'une bague de roulement

I.4. Différents approches en fatigue

I.4. 1. Approche en durée de vie

La vérification traditionnelle de la tenue des structures en fatigue au seuil de l'endurance (même en utilisant des critères d'endurance multiaxiaux) ne suffit plus aujourd'hui. En effet, dans un contexte de forte compétition économique, les industriels cherchent à optimiser leurs solutions pour assurer la durée de vie ou le coefficient de sécurité escomptés de leurs composants. Ces derniers ne sont donc plus dimensionnés au-delà de ce qui est strictement nécessaire et inscrit au cahier des charges. Dans un contexte de dimensionnement en fatigue, la plupart des structures mécaniques sont confrontées au problème de fatigue à grand nombre de cycles, et plus précisément de l'endurance limitée (on parle de durée de vie finie). Une autre exigence s'impose : comme les industriels se trouvent devant des composants de plus en plus complexes subissant de chargements complexes, ils recherchent un modèle de prédiction de durée de vie de leurs composants qui traite presque tous les cas de charges possibles La résistance d'une pièce de structure à la fatigue dépend du matériau, de la forme et de l'état de la surface de la pièce, de son mode de sollicitation et des conditions d'environnement (température, milieu ambiant plus au moins corrosif...). Cette résistance se caractérise par la durée de vie de la pièce, ou du nombre des cycles qu'elle peut supporter jusqu'à sa défaillance. La durée de vie d'une structure soumise à la fatigue est d'autant plus courte que le niveau de sollicitation appliquée est élevé. Inversement un niveau de sollicitation suffisamment faible. On appelle endurance l'aptitude d'un matériau ou d'une structure à résister à la fatigue. La conception d'une structure en fatigue se fait suivant deux approches différentes :

• Selon que l'on souhaite pour celle-ci une durée de vie infinie (ou illimitée)

• Selon que l'on souhaite pour celle-ci une durée de vie finie (ou limitée)

Concevoir une structure de vie infinie peut signifier deux choses :

- Aucun amorçage de fissure ne doit apparaitre dans la structure en service
- Ou bien, s'il existe des défauts ou des microfissures dans la structure, ceux-ci ne doit en aucun cas se propager.

I.4.2 Approche en tolérance aux dommages

Dans la conception d'une structure de durée de vie finie donnée, l'amorçage ou la présence de fissures et leur propagation sont acceptables, pourvu que l'état d'endommagement de la structure susceptible d'être atteint en fin de durée de vie ne présente aucun risque de défaillance de la structure vis-à-vis des performances attendues en service (notion de tolérance au dommage) une telle approche nécessite un suivi des défauts par des contrôles non destructifs adaptés

II.1. Durée de vie en Fatigue

II.1.2. Comportement en fatigue des matériaux

On appelle durée de vie ou endurance en fatigue, le nombre de cycles de contrainte N nécessaire pour que l'éprouvette ou la pièce se rompe pour un cycle de contraintes (σ_m, σ_a). Ces valeurs peuvent être déterminées à l'aide de méthodes statistiques.

Pour de manière facilement utilisable les résultats d'essais de fatigue, il existe un assez grand nombre de méthode ou arrangements possibles des paramètres utilisés en fatigue:

- temps : sous la forme d'un nombre de cycles N;
- contraintes:
  - statiques (Re ,Rm)
  - dynamiques (σm, σa, σmax, Rσ , σD (N))

II.1.3. Courbe de Wöhler

Cette courbe est appelée S-N (Stresses- Number of cycles) universellement connue la courbe la plus ancienne et qui permette de visualiser la tenue de la pièce ou des matériaux dans tout le domaine de fatigue. Elle définit une relation entre la contrainte appliquée et le nombre de cycles à rupture N_R. Pour la tracer, on réalise généralement des essais simples, qui consistent à soumettre chaque éprouvette à des cycles d'efforts périodiques, d'amplitude de chargement constante fluctuant autour d'une valeur moyenne fixée, et de noter le nombre de cycles à rupture N_R. La courbe S-N peut faire apparaître l'existence d'une « limite d'endurance », définie comme niveau de contrainte sous lequel un matériau résistera aux contraintes cycliques « indéfiniment » sans rompre. Évidemment, la connaissance d'un tel niveau de contrainte est importante pour un ingénieur puisqu'il lui donne une contrainte de référence réaliste sur lequel il peut baser sa conception. Cependant, pour beaucoup de matériaux, une telle limite n'est pas trouvée dans le temps pratique de l'expérience. Dans ces cas, le concepteur doit se référer directement à la courbe S-N pour la contrainte appropriée qui correspond à la vie attendue de ce qu'il conçoit. Par contre, dans certains cas, par exemple lorsqu'il y a simultanément fatigue et corrosion, il ne semble pas y avoir d'asymptote horizontale. On définit alors une limite conventionnelle d'endurance comme la valeur de la contrainte qui ne conduit pas à la rupture avant un nombre de cycles fixé (par exemple 10^7 cycles). La notion de limite d'endurance est relative et sa définition dépend du problème traité.

N=Nombre de cycles à rupture

R_m = Résistance à la traction

σ_D = (D pour **damage=dommage**): Limite de fatigue, en dessous de laquelle la probabilité de rupture est quasi-nulle. Une courbe S-N représente la durée de vie en fatigue caractérisée par trois ou quatre régimes]. On y distingue:

I. Le régime de la fatigue oligo-cyclique (oligo = petite quantité) ou à faible nombre de cycles (Low Cycle Fatigue - **LCF**) pour lequel la rupture de l'éprouvette a lieu à un nombre de cycles inférieur à 10^4 - 10^5 cycles. Les amplitudes de contrainte sont autour de la limite d'élasticité macroscopique du matériau.

II. Le régime de la fatigue à grand nombre de cycles (High Cycle Fatigue – **HCF**) pour lequel la rupture de l'éprouvette a lieu à un nombre de cycles compris entre à 10^5 et 10^7. Les amplitudes de contrainte sont environ deux fois inférieures à la **limite d'élasticité** macroscopique du matériau. La courbe S-N tend vers une asymptote horizontale représentant la limite d'endurance du matériau. Cette asymptote est plus ou bien marquée selon les matériaux et on définit également une limite de fatigue conventionnelle qui correspond à la résistance à la fatigue du matériau à 10^7 cycles. En dessous de la limite d'endurance ou de la limite de fatigue conventionnelle, la durée de vie du matériau est supposée être infinie. Ces limites servent donc pour dimensionner en fatigue les pièces mécaniques.

III. Le régime de la fatigue à très grand nombre de cycles (Very High Cycle Fatigue – **VHCF** ou Ultra High Cycle Fatigue), encore appelé fatigue **gigacyclique**. Les amplitudes de contrainte sont inférieures à la limite de fatigue conventionnelle. Néanmoins, le matériau se rompt après un nombre de cycles supérieur à 10^7 cycles.

IV. La question de l'existence d'une limite de fatigue reste aujourd'hui une question ouverte.

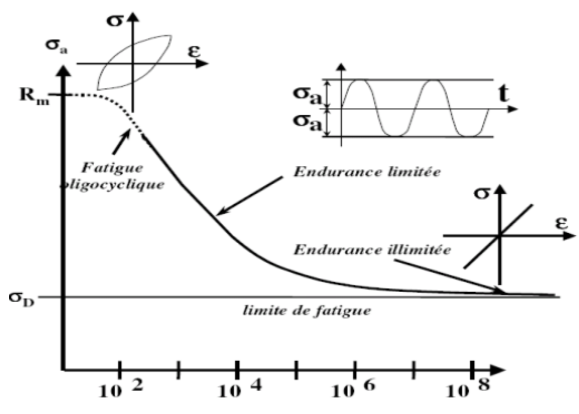


Figure II.1 : -Courbe de Wöhler (courbe S-N)

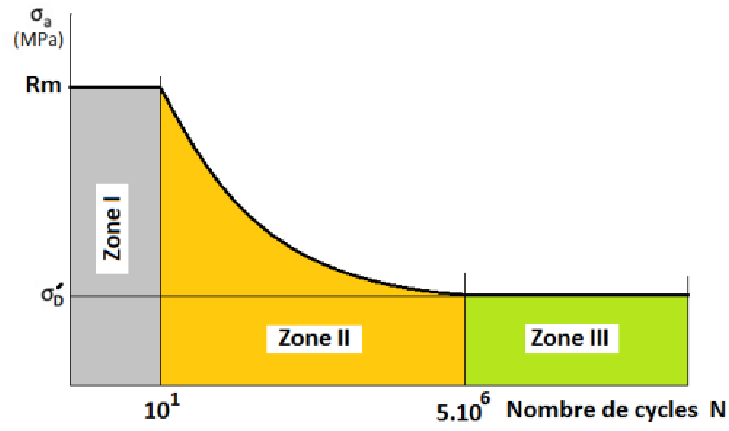


Figure II.2 : Partitionnement de la courbe de Wöhler

a) ***Fatigue oligocyclique (Zone 1):*** La contrainte σ_a est à la valeur de R_m, on observe la rupture des éprouvettes après quelques cycles (de 1 jusqu'à 10 cycles).

b) Fatigue à vie finie (Zone 11): Cette zone s'étale sur une étendue de 10 à 5. 10^6 cycles correspondant à une fourchette de contraintes $\sigma_D < \sigma_a < R_m$ toutes les éprouvettes rompent après un nombre de cycles pour chacune c'est la vie finie de l'éprouvette.

c) Vie infinie (Zone 111): Au dessous d'un seuil $\sigma_a \leq \sigma_D$ les éprouvettes ne rompent plus c'est la vie infinie, le seuil de contrainte σ_D est appelée **limite d'endurance**.

II.1.4. Diagramme d'endurance

Selon l'amplitude de la déformation due à la contrainte

Fatigue-endurance

- Faible amplitude des déformations (restent pratiquement **élastiques**)
- Durée de vie de la pièce > 10^4 ou 10^5 cycles

Fatigue plastique (ou oligocyclique)

- Les contraintes produisent des déformations **plastiques** à chaque cycle: Durée de vie < 10^4 cycles

II.1.5. Exemples de courbe Wöhler

II.1.5.1.Valeurs approximatives de la limite d'endurance

Précédemment on a effectué une approximation linéaire à la courbe expérimentale de fatigue, parmi les caractéristiques importantes déduites de la courbe il y a la limite d'endurance expérimentale **σ'_D**. Vus le coût des essais de fatigue, la diversité et l'aspect statistique des valeurs de cette caractéristique, on a intérêt à trouver des approximations à ses valeurs en fonction de l'une des caractéristiques mécaniques conventionnelles, soit la résistance mécanique **R_m**. Dans cette partie on continue avec l'approximation mais cette fois-ci avec la limite d'endurance.

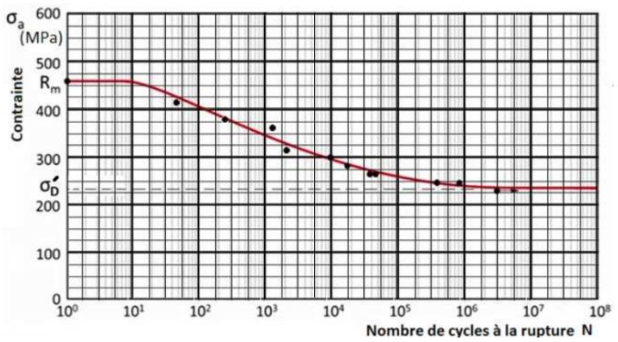


Figure II.3 : ***Courbe de Wöhler de l'acier***

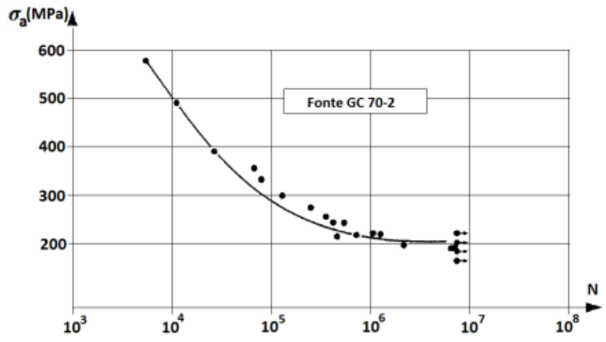


Figure II.4 : *Courbe de fatigue de la fonte*

II.1.5.2.Valeurs de R_m et σ'_D de quelques matériaux connus:

Ces valeurs sont données selon les normes américaines

Matériaux	Résistance mécanique Rm (MPa)	Limite d'endurance σ'_D (MPa)
Alliages ferreux		
ASTM 1010, normalisé	364	186
ASTM 1025, normalisé	441	182
ASTM 1035, normalisé	539	238
ASTM 1045, normalisé	630	273
ASTM 1060, normalisé	735	315
ASTM 1060, trempé (huile)	1295	574
ASTM 3325, trempé (huile)	854	469
ASTM 4340, trempé (huile)	952	512
ASTM 8640, trempé (huile)	875	476
ASTM 9314, trempé (huile)	812	476
ASTM, 302, recuit	560	238
ASTM, 316, recuit	560	245
ASTM 431, trempé et revenue	798	336
ASTM 20, fonte grise	140	70
ASTM 30, fonte grise	210	102
ASTM 60, fonte grise	420	168
Alliages d'aluminium		
AA 2011-T8	413	245
AA 2024, recuit	189	91
AA 6061-T6	315	98
AA 6063-T6	245	70
AA 7075-T6	581	161
AA 214, coulé	175	49
AA 380, coulé sous pression	336	140
Bronzes		
Bronzes au phosphore recuit	315	189
Bronzes au phosphore écroui	602	217
Bronzes à l'aluminium ¼ dur	581	206

II.1.5.3. Quelque valeurs approximatives de la limite d'endurance

- ***Aciers :***
  $\sigma'_D \approx 0.5R_m$ si $R_m \leq 1400$ Mpa
  $\sigma'_D \approx 700$ Mpa si $R_m > 1400$ Mpa
- **Fontes et aciers coulés**
  $\sigma'_D \approx 0.4R_m$
- **Alliages aluminium-magnésium**
  $\sigma'_D \approx 0.4R_m$ Alliages forgés ou laminés
  $\sigma'_D \approx 0.3R_m$ Alliages coulés
- Traction/compression
  $\sigma'_D \approx 0.8R_m$
- ***Torsion***
  $\tau'_D \approx 0.6Rm$ pour les aciers
  $0.8Rm < \tau'_D < R_m$ pour les fontes

II.1.6. Termes et symboles relatifs aux essais de fatigue

a) **Limite de fatigue**

C'est pour une contrainte moyenne $\boldsymbol{\sigma_m}$ donnée, la plus grande amplitude de contrainte pour laquelle il n'est pas observé de rupture après un nombre infini de cycles. Dans le cas particulier des aciers, il est expérimentalement constaté que ce nombre infini peut être ramené à $\mathbf{10^7}$ cycles. En revanche, pour les aciers en présence de corrosion et pour certains alliages d'aluminium, de cuivre ou de titane, cette limite de fatigue reste théorique et sans intérêt puisque tous les mécanismes ont durée de vie limitée par suite de l'usure. La corrosion ou d'autre causes inhérentes à leur service même; on est donc conduit à utiliser une autre grandeur appelée limite d'endurance.

b) Limite d'endurance

C'est pour une contrainte moyenne $\boldsymbol{\sigma_m}$ donnée, l' amplitude de contrainte pour laquelle il est constaté 50 % de rupture après un nombre fini N de cycles. Cette valeur peut être déterminée à l'aide de méthodes statistiques. Cette limite d'endurance est notée $\boldsymbol{\sigma'_D}$ **(N)** ou $\boldsymbol{\tau'_D}$ **(N).**

c) Rapport d'endurance

Dans la pratique, il est parfois intéressant de rapporter la limite d'endurance à la charge de rupture à la traction du matériau essayé en fatigue. On définit ainsi le rapport d'endurance R: avec, R = $\boldsymbol{\sigma'_D (N)/ R_m}$

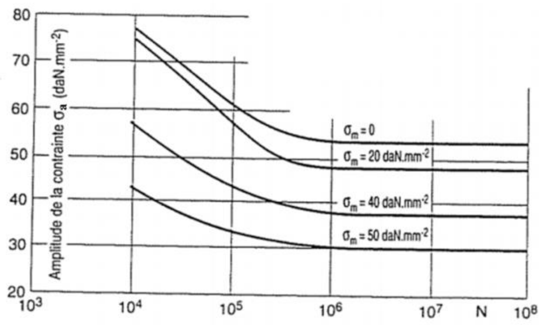


Figure II.5 : Courbe de Wöhler en fonction de l'amplitude de contrainte

Pour certains matériaux, il est difficile d'évaluer la limite de fatigue σ_D, on introduit la notion de limite de fatigue conventionnelle $\sigma_D(N)$ (ou limite d'endurance). Il s'agit de la plus grande amplitude de la contrainte pour laquelle on constate 50 % de rupture après N cycles de la sollicitation. Selon le cas N varie entre $\mathbf{10^6}$ à $\mathbf{10^9}$ cycles (> supérieur à la durée de vie envisagée pour la pièce)

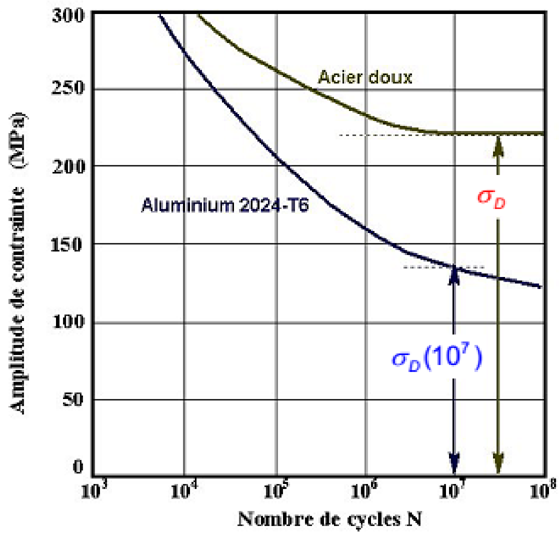


Figure II.6 : Courbe de Wohller pour des matériaux différents.

II.1.7.Équation de la courbe de Wöhler

Le domaine (zone 2) de la fatigue habituellement considéré, où la rupture apparaît après un nombre limité de cycles (compris entre $\mathbf{10^4}$ **et** $\mathbf{10^7}$), sans être accompagnée d'une déformation plastique d'ensemble mesurable. Le nombre de cycles à rupture N_R croît quand l'amplitude de la contrainte cyclique σ_a décroît. Parmi les nombreuses expressions empiriques proposées pour relier N_R à σ_a pour des contraintes $\sigma_a > \sigma'_D$, on peut citer celles de **Basquin, Strohmeyer, Palmgreen, Corson**...

Formule de Strohmeyer :

$$\sigma_a = \sigma_D + \frac{(A)^C}{(N)}$$

Formule de Palmgreen : **avec** A, B, C sont des constantes

$$\sigma_a = \sigma_D + \frac{(A)^C}{(N+B)}$$

Formule de Corson :

$$N = \frac{A\exp - C(\sigma_a - \sigma_D)}{\sigma_a - \sigma_D}$$

II.2.Comportement en fatigue de structures non fissurées

II.2.1.Contrainte moyenne nulle ($\sigma_m = 0$)

Le régime de la fatigue à grand nombre de cycles (High Cycle Fatigue – **HCF**)

Où les valeurs de σ_{max} et σ_{min} ne sont pas supérieur à la contrainte élastique.

A partir du diagramme de Wöhler, nous obtenons d'autres expressions analytiques de courbes $\sigma_a - N_R$:

A) L'expression de Basquin :

$$\sigma_a = \sigma'_f \, (2N_R)^b$$

$A = 2^b \;\; \sigma'_R$ **avec b=B , A, B sont des conxtantes**

$$\sigma_a = A N_R^B$$

avec σ_a : Amplitude de contrainte appliquée en fatigue

σ'_f : Résistance en fatigue

b : Exposant de la loi de **Basquin**

N_R : représente le nombre de cycles après rupture

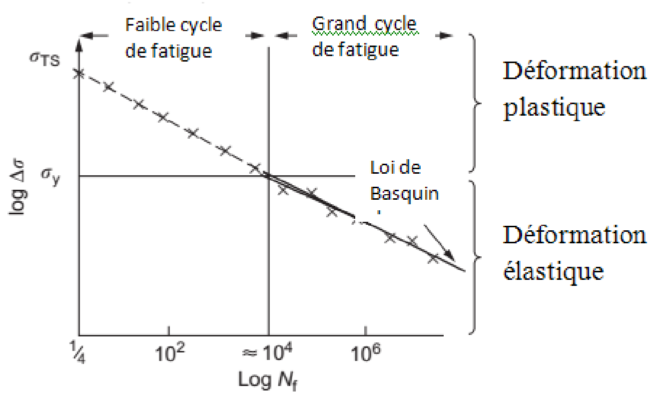
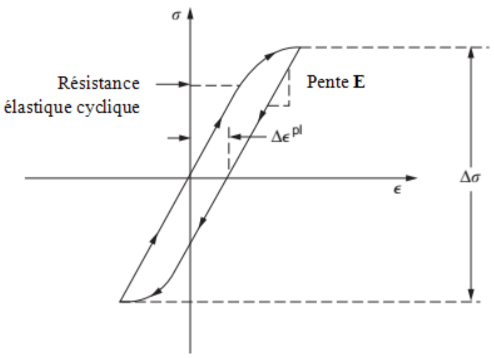


Figure II.7 : Initiation contrôlée du HCF

Le régime de faible nombre de cycles (Low Cycle Fatigue – **LCF,** où les valeurs de σ_{max} ou σ_{min} sont au dessus de la contrainte élastique. Le résultat est connu comme étant la loi de **Coffin- Manson** représenté comme suit :

$\Delta\epsilon^{pl}\ N_R^b = C_2$ Tel que : **b** est une constante de 0.5 – 0.6 ; C2 : constante



- etendue de variation de la déformation: $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{max}\text{-}\varepsilon_{min}$
- amplitude de déformation: $\varepsilon_a = 1/2\ (\varepsilon_{max}\text{-}\varepsilon_{min}) = \Delta\varepsilon\ /2$
- déformation moyenne : $\varepsilon_{moy} = 1/2\ (\varepsilon_{max+}\varepsilon_{min})$
- rapport de déformation: $R_\varepsilon = \varepsilon_{min} / \varepsilon_{max}$

Figure II.8 : Game de déformation plastique dans LCF

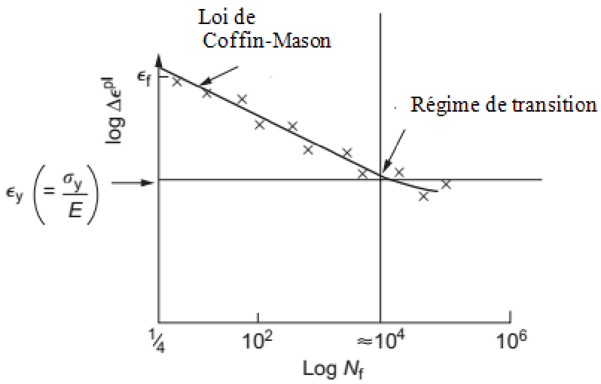


Figure II.9 : Initiation contrôlée du LCF de la loi Coffin–Manson

II.2.2. Dispersion des résultats

Les essais de fatigue présentent une dispersion importante, c'est-à-dire qu'il y a rupture, pour un même niveau de charge, à un nombre de cycles variable selon les éprouvettes, en raison :

- du matériau (inclusions, hétérogénéités de structure...)
- des éprouvettes (état de surface variable, tolérance dimensionnelles
- des conditions d'essai (centrage des éprouvettes, fréquence des cycles, effets d'environnement...)

La courbe de Wöhler est donc définie théoriquement comme une courbe moyenne à 50 % de rupture. Une étude statistique des résultats permet alors de définir la courbe moyenne ainsi que des courbes correspondant à une probabilité de tenue en service déterminée.

16.1 Aspects statistiques

L'analyse statistique de la fatigue permet d'estimer les paramètres de la courbe de réponse μ, amplitude de la contrainte pour laquelle la probabilité de rupture est de 0,5 et ***s*** l'écart-type de la dispersion en contrainte. En déterminant ces courbes pour un nombre de cycles variables, il est possible de définir la courbe d'équiprobabilité de rupture en fonction du nombre de cycles.

Les essais de fatigue conduisent généralement à une dispersion importante des résultats. Ce ci est du au phénomène de fatigue lui-même. L'endurance N a été définie comme le nombre de cycles pour lequel on obtient 50 % de rupture. La figure ci-dessous montre le tracé d'une courbe de Wöhler à partir d'essais à plusieurs niveaux de contrainte. Une étude statistique des résultats permet alors de définir la courbe moyenne ainsi que des courbes correspondant à une probabilité de tenue en service déterminée. Le tracé d'une courbe de Wöhler probabiliste nécessite environ 25 à 30 éprouvette.

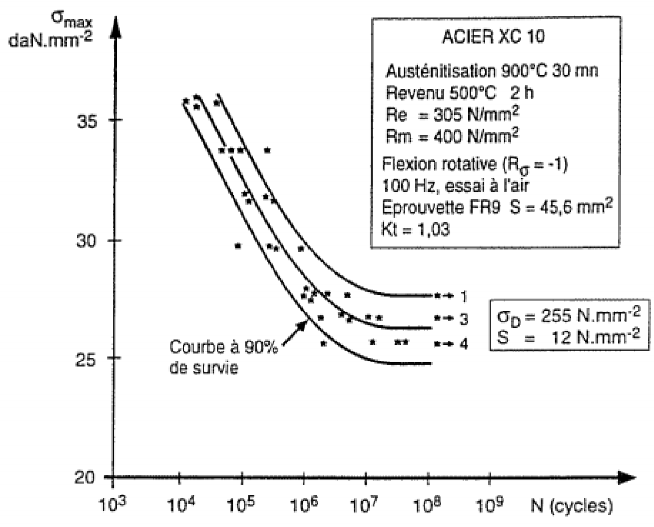


Figure II.10 *:* Approximation de la courbe de Wöhler

II.2.3.*Approximation analytique de la courbe de Wöhler*

Les résultats des essais de fatigue illustrés par la courbe de Wöhler ont un aspect statistique, pour permettre une exploitation de la courbe dans l'engineering on procède à une approximation linéaire de la courbe. Par comparaison les courbes de Wöhler des alliages ferreux et non ferreux possèdent les limites pouvant être représentées par la figure suivante :

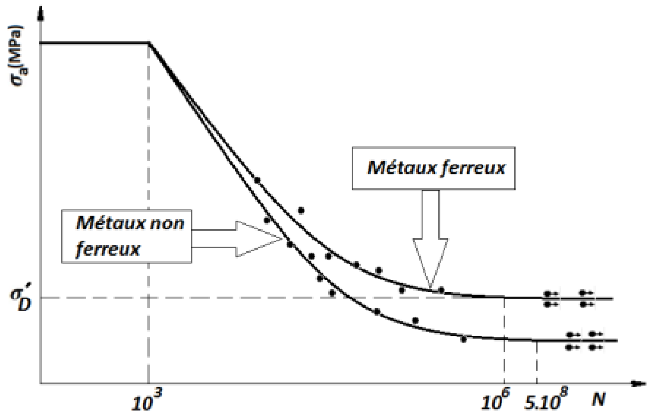


Figure II.11: Comportement au fatigue des métaux ferreux et non ferreux

En approximant linéairement la partie de la courbe ($10^3 < N < 10^6$) et en utilisant l'échelle logarithmique on aura :

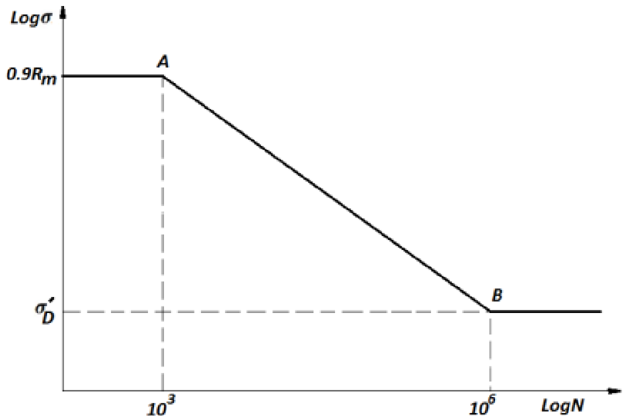


Figure II.12: approximant linéairement de la courbe de Wöhler

Les coordonnées des points A et B sont respectivement: (10^3, 0.9Rm) et (10^6, σ'_D): La droite (AB) aura pour équation :

Log**σ**=Log**a**.Log**N**+Log**b** (1)

Où Log représente le logarithme décimal et a et b sont positifs non nuls. L'équation (1) peut s'écrire : $Log\sigma = Loga^{LogN} + Logb = Log(b.a^{LogN})$

D'où : $\sigma = b.a^{LogN}$ (2)

Pour déterminer les constantes *a* et *b* de l'équation (2) on applique les conditions aux limites aux points *A* et *B* :

$$\sigma = 0.9R_m \left(\frac{\sigma'_D}{0.9R_m}\right)^{\frac{1}{3}(\log N-1)}$$

Cela donne : $\begin{cases} \sigma'_D = ba^6 \\ 0.9R_m = ba^3 \end{cases}$

$$a = \left(\frac{\sigma'_D}{0.9R_m}\right)^{\frac{1}{3}} \quad , \quad b = 0.9R_m \frac{R_m}{\sigma'_D} \quad (3)$$

Remplaçons dans (2) : $\sigma = 0.9R_m \frac{\sigma'_D}{R_m}\left(\frac{\sigma'_D}{R_m}\right)^{\frac{1}{3}\mathrm{Log}N}$

Par simplification (3) s'écrira : $\sigma = 0.9R_m \left(\frac{\sigma'_D}{0.9R_m}\right)^{\frac{1}{3}(\mathrm{Log}N-1)}$

Ou autrement : $\sigma = 0.9R_m \left(\frac{\sigma'_D}{0.9R_m}\right)^{\frac{1}{3}(\mathrm{Log}N-3)}$ (4)

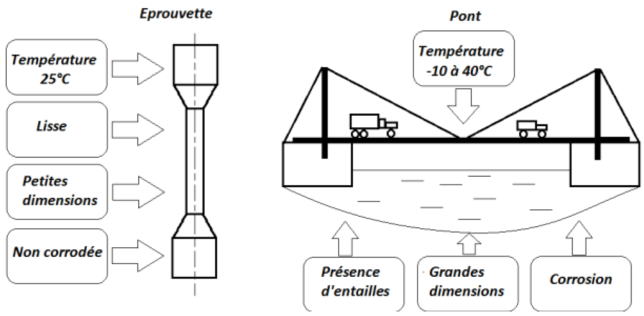
L'expression (4) permet de connaitre le niveau de contrainte lorsque le nombre de cycles *N* est connu. En écrivant l'expression (4) inversement c.à.d. N = f(σ) on obtiendra :

$$N = 1000\left[\frac{0.9R_m}{\sigma}\right]^{\overline{\log\left[\frac{0.9R_m}{\sigma'_D}\right]}^{\,3}} \quad (5)$$

L'expression (5) permet de connaitre le nombre de cycles *N* lorsque le niveau de contrainte est connu

II.3.Facteurs influençant sur la tenue en fatigue

La valeur expérimentale de la limite d'endurance σ'_D est obtenue dépend de l'éprouvette utilisée car celle-ci a été bien préparée du point de vue de géométrie de dimensions, d'état de surface, absence de défauts et des conditions de l'essai. Or le cas d'une structure en service diffère complètement de celui de l'éprouvette en effet on distingue la finition, la grosseur, la température, et d'autres facteurs qui seront pris en considération .



II.3.1.*Facteurs influençant la limite d'endurance expérimentale*

A) Corrosion

La corrosion est un facteur important, même en absence des chargements dynamiques, accompagnée par l'effet des sollicitations statiques peut causer une fissuration dans la structure. C'est ce qu'on appelle corrosion sous contrainte. Dans le cas de chargements dynamiques la corrosion entraine une apparition de piqûres qui constituent un milieu favorable à l'effet d'entaille, progressivement s'amorçant et provoquant ainsi une rupture brutale. Donc la résistance à la fatigue $\sigma'_{D\ corrodée}$ d'une pièce corrodée est inférieure à celle d'une pièce non corrodée $\sigma'_{D\ non\ corrodée}$. L'effet de la corrosion sur la structure peut être pris en compte par un facteur de divers K_f .

B) Fréquence du chargement dynamique

Selon des études réalisées au dessous de 200 Hertz la fréquence du chargement dynamique n'a aucun effet sur la limite d'endurance σ'_D. L'effet est inverse dans le cas où la fréquence atteigne des valeurs importantes, on observe un amélioration de σ'_D. Donc l'effet de fréquence ne sera pas pris en considération tant qu'elle n'a pas d'effet négatif sur σ'_D.

C) Rugosité (état de surface)

Généralement le défaut s'initie depuis la surface extérieure de la pièce, plus la surface est rugueuse plus les crêtes sont importantes et plus l'effet d'entaille est intense. Pour cela il faut considérer l'état de surface de la pièce en adoptant le facteur fini de surface K_a :

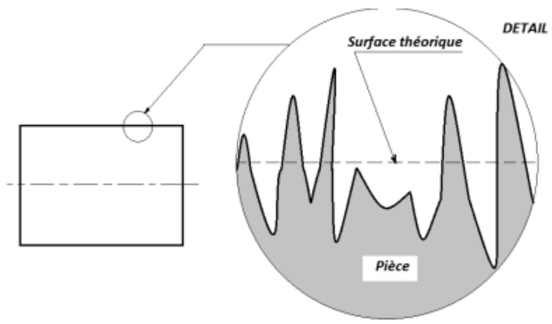


Figure II.13: État de surface réel

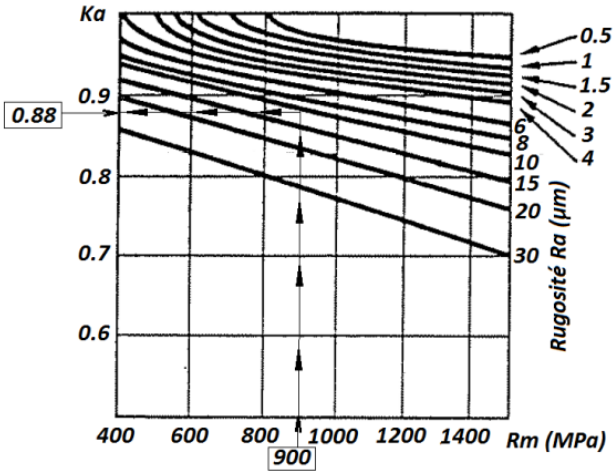


Figure II. 14: Abaque pour déterminer le facteur Ka pour les aciers

$$a = \frac{\sigma'_{Ds}}{\sigma'_{D}} \begin{cases} \sigma'_{Ds} : \text{limite d'endurance de la structure} \\ \sigma'_{D} : \text{limite d'endurance de l'éprouvette à rugosité référence} \end{cases}$$

Il est pratique d'utiliser des abaques pour déterminer K_a , pour l'exploiter il faut se disposer des valeurs de la rugosité et la résistance R_m. L'exemple utilisé : Une pièce en acier (R_m =900 MPa) avec une rugosité $R_a = 11\mu m$ on obtient : $K_a \approx 0.88$

D) *Effet de grosseur*

Statistiquement plus les dimensions de la structure sont importantes plus sont probables les défauts et moins est sa résistance à la fatigue. Pour ce fait on adopte le facteur de grosseur $\mathbf{K_b}$ qui peut être déterminé par :

$$K_b = \begin{cases} 1 & si\ d \leq\ 7.6\ mm \\ 0.85 & si\ 7.6 \leq d \leq 50\ mm \\ 0.75 & si\ \ d \geq\ 50\ mm \end{cases}$$, d: signifie la dimension caractéristique de la structure.

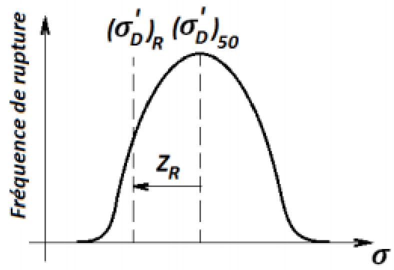
E) Fiabilité

On entend par la fiabilité, la probabilité que la structure soit en service pour une durée de vie déterminée. Rappelons que la fatigue admet un aspect statistique ce qui justifie la considération de la fiabilité. On introduit donc le facteur K_c.

- Fiabilité = 50% correspond à $K_c = 1$
- Fiabilité est au voisinage de 100% pour des valeurs de dl basses (voisinage de 0.5)

Si Fiabilité augmente $\mathbf{K_c}$ diminue (Voir tableau ci-dessous)

Fiabilité	Variable normalisée Z_R	Facteur de fiabilité
0,50	0,000	1,000
0,90	1,288	0,897
0,95	1,645	0,868
0,99	2,326	0,814
0,999	3,091	0,753
0,9999	3,719	0,702
0,99999	4,265	0,659
0,999999	4,753	0,620
0,9999999	5,199	0,584
0,99999999	5,612	0,551
0,999999999	5,997	0,520



$(\sigma'_D)_{50}$; σ'_D *lorsque la fiabilité* $= 50\ \%$

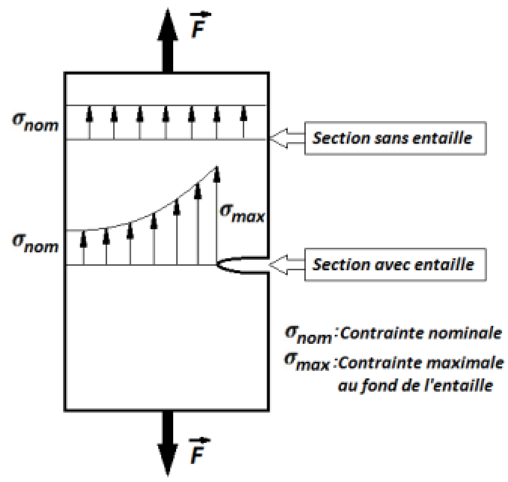
F) Température

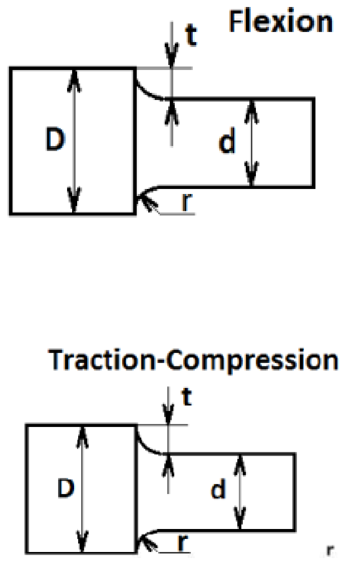
De nombreuses études montrent que le rapport σ'_D/R_m en général ne varie pas c.à.d. que la limite d'endurance est s'affecte aussi que la limite de la résistance à la rupture R_m. Considérant la variation de la température la limite R_m augmente quand la température est basse d'où une augmentation de la limite σ'_D. De l'autre côté un accroissement considérable de température entrainerait une chute de la valeur de la limite R_m .
Pour le cas aciers usuels on admet qu'au dessous de 150 °C il n'y aucun effet de température sur la limite σ'_D. On adopte qui le facteur tient en compte de la température et qu'on note K_d .

$$K_d = \begin{cases} \frac{344}{273+T} & \text{si } T > 71\ °C \\ 1 & \text{si } T \leq 71\ °C \end{cases}$$

G) Concentration de contraintes (effet d'entaille)

Lorsque la section d'une pièce soumise à une sollicitation ne présente pas d'entaille la distribution de contraintes est régulière alors que dans la présence d'entaille provoque un déséquilibre dans la distribution des contraintes engendrant une concentration de celles-ci dans le fond de l'entaille. La figure ci-dessous présente une pièce soumise à une traction simple, la distribution des contraintes est uniforme est uniforme σ_{nom}=F/S à chaque section mais au fond de l'entaille on observe une hausse de contrainte atteignant la valeur σ_{max}
Le rapport $K_t= \sigma_{max} / \sigma_{nom}$ est appelé facteur théorique de concentration de contraintes. Pour déterminer K_t on utilise des abaques .





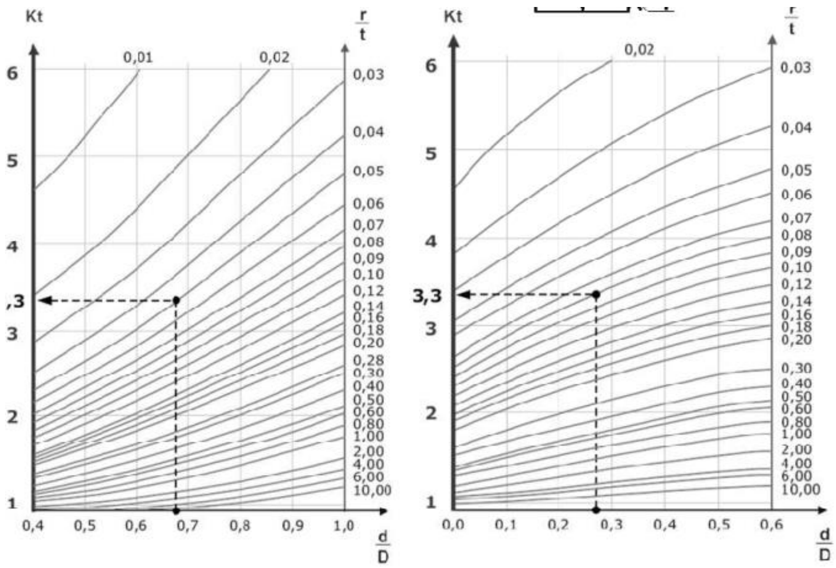


Figure II.15: (a) :Abaque de K_t (Flexion), (b) :Abaque de K_t (Traction/Compression)

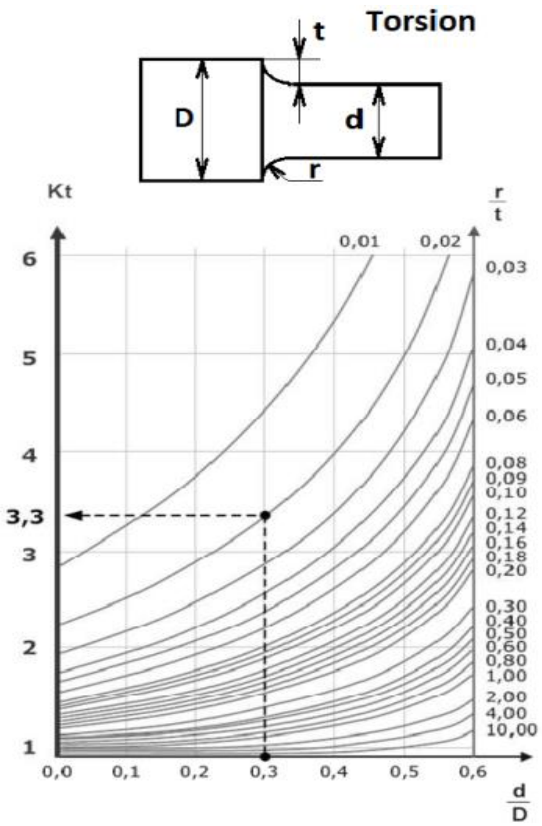


Figure II.16: Abaque de K_t (Torsion)

- ## Exemple

On peut également utiliser l'abaque suivant pour déterminer K'_f d'un arbre ayant un épaule pour lequel on a déterminé K_t= 3, l'arbre est fabriqué d'un acier R_m = 700 MPa en joignant les droites avec l'abaque K'_f= 3 K_t on obtiendra K'_f/K_t = 0.67 , d'où

$K'_f = 3 * 0.67 = 2.01$

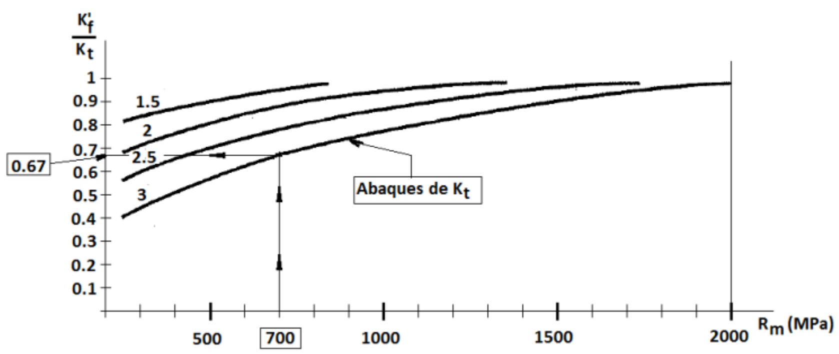


Figure II.17: Abaques pour déterminer le facteur de concentration de contraintes en fatigue K'_f

On définit le facteur de concentration de contraintes en fatigue

$$K'_f = \frac{\sigma'_{D\ Eprouvette\ lisse}}{\sigma'_{DEprouvette\ \ entaille}}$$

Finalement le coefficient de concentration de contraintes **K_e** s'écrira :

$$\mathrm{K_e} = \frac{1}{\mathrm{K'_f}}$$

Et en même temps ce facteur s'écrit :

$\mathrm{K'_f = q(K_t - 1)}$

q : indice de sensibilité aux effets d'entaille selon **Peterson** l'indice de sensibilité aux effets d'entaille peut s'écrire:

$$\mathrm{q} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{r}}}$$

a : constante telle que :

$a = \left(\frac{270}{R_m}\right)^{1.8}$ R_m ;Résistance à la rupture (MPa) ; r : Rayon du fond de l'entaille

<u>Correction de la valeur de σ_D</u>

$\mathrm{K_D = K_a.K_b.K_c.K_d.K_e.K_f.\sigma'_D}$

σ_D : Valeur de la limite d'endurance utilisée dans les calculs de structures

σ'_D: Valeur de la limite d'endurance déterminée expérimentalement en utilisant une éprouvette normalisée.

K_a : Facteur de fini de surface

K_b : Facteur de grosseur

K_c : Facteur de fiabilité

K_d : Facteur d'effet de température

K_f : Facteur de divers effets

K_e : coefficient de concentration de contraintes

II.4.Critère de résistance

II.4.1.en cas de contrainte complètement renversée

Dans le cas de contrainte complètement renversée le critère de résistance à la fatigue (figure ci-dessous) est simple et donné par:

σ_a $\leq$ **σ_D** dans le cas de vie infinie

σ_a $\leq$ **σ_f** dans le cas de vie finie **σ_D** : Limite d'endurance

σ_f : Contrainte limite correspondant à une durée de vie donnée N_f

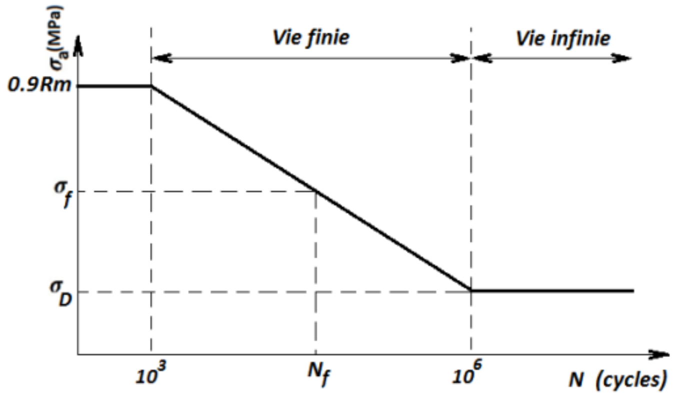


Figure II.18: les limites de résistances à la fatigue dans les deux cas de vies finie et infinie

II.4.2.Cas de contrainte non complètement renversée

II.4.2.1.Introduction

Le critère de résistance à la fatigue vu dans le chapitre précédent ne sera plus valide dans le cas où $\boldsymbol{\sigma_m \neq 0}$ n'est pas nul (contrainte non complètement renversée), il faut adopter un autre critère. C'est le but de ce cours. Une sollicitation à contrainte non complètement renversée peut être considérée la superposition de deux sollicitations l'une à contrainte complètement renversée et l'autre statique (Figure ci-dessous).

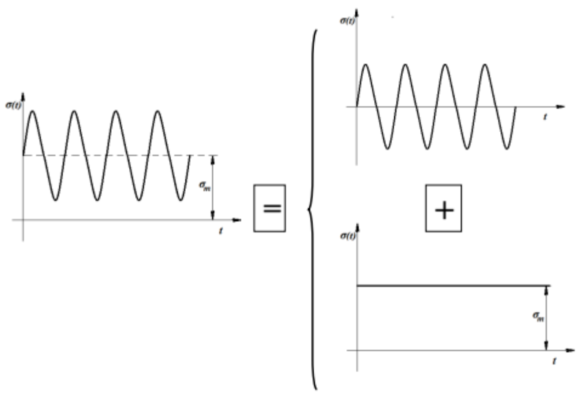


Figure II.19: La contrainte non complètement renversée est la résultante de deux contraintes l'une complètement renversée et l'autre constante

II.4.2.2.Influence de la contrainte moyenne

La figure 45 montre que lorsque la contrainte moyenne est négative (compression) la limite d'endurance augmente. De l'autre part lorsque est positive son augmentation entrainerait un baissement de la valeur de la limite d'endurance. Ces résultats peuvent être interprétés par la figure ci –dessous.

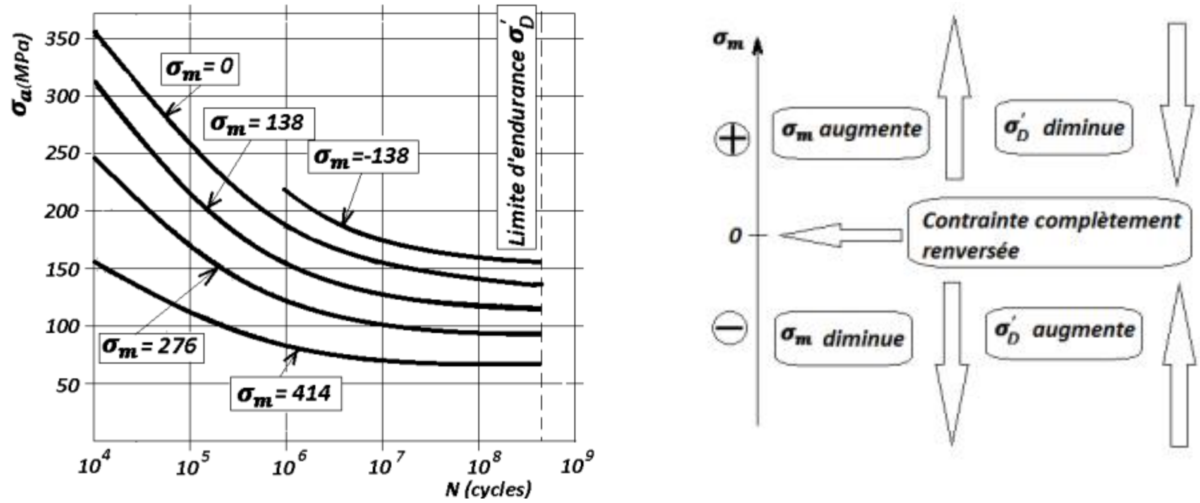


Figure II.20 : Influence de la contrainte moyenne sur la limite d'endurance AlZn5.5MgCu. (Rm=550MPa)

II.3.Approche pour l'obtention du critère de Goodman

Les résultats illustrés par la figure (ci-dessus) sont représentés dans le plan (σ_a, N) en même temps les deux paramètres σ_a et σ_m c.à.d de les représenter dans le plan (σ_a, σ_m) utilisons le tableau (Tab.1).

Tableau 1: Résultats extraits des courbes de la figure 45

σ_m (MPa)	N (cycles)	σ_a (MPa)	
-138	10^4	-	
	10^5	-	
	10^6	217	
	10^7	173,9	
	10^8	163	
	5.10^8	158,7	
0	10^4	**356,5**	$\sigma_{f1} = 356.5M$
	10^5	**260,8**	$\sigma_{f2} = 260.8M$
	10^6	**184,8**	$\sigma_{f3} = 184.8M$
	10^7	**156,6**	$\sigma_{f4} = 156.6M$
	10^8	**139,1**	$\sigma_{f5} = 139.1M$
	5.10^8	**134,8**	$\sigma'_D = 134.8\,M$
138	10^4	313	
	10^5	213	
	10^6	154,3	
	10^7	126	
	10^8	117,4	
	5.10^8	113	
276	10^4	254,6	
	10^5	171,7	
	10^6	121,7	
	10^7	102,1	
	10^8	93,5	
	5.10^8	93,5	
414	10^4	158,7	
	10^5	110,9	
	10^6	82,6	
	10^7	71,7	
	10^8	64,4	
	5.10^8	64,4	

Ce tableau permet de construire les courbes $\sigma_a = f(\sigma_m)$ en fonction de N dans le plan (σ_m, σ_a) (Voir Figure .46)

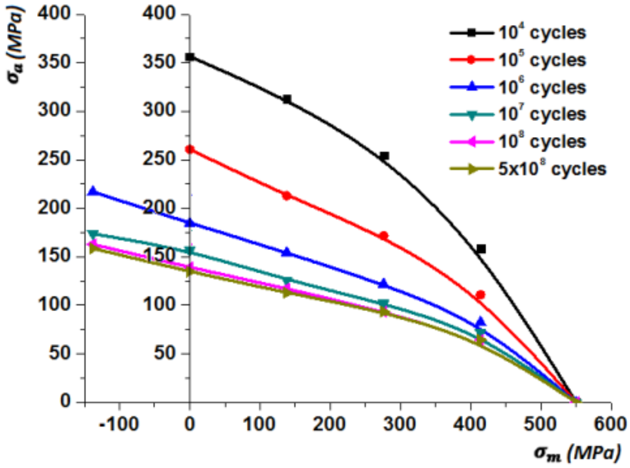


Figure II.21*: Représentation des résultats dans le plan* σ_m -σ_a

Dans la dernière étape divisons les valeurs de $(\sigma_a)_i$ correspondant à $(\sigma_m)_i$ par les valeurs $(\sigma_f)_i$ (vie finie) ou σ'_D (vie infinie) et mettons les dans le tableau (Tab. 2) Finalement représentons ces résultats sur un système de coordonnées où les valeurs $(\sigma_m)_i$ sont portées sur l'axe des abscisses et les valeurs d'amplitudes normalisées sur l'axe des ordonnées $(\sigma_a/\sigma_f)_i$ *ou* $(\sigma_a/\sigma'_D)_i$ (Fig. 46)

Tableau 2: Représentation des rapports $(\sigma_a/\sigma_f)_i$ ou $(\sigma_a/\sigma'_D)_i$

σ_m (MPa)	N (cycles)	σ_a (MPa)	(σ_a/σ_f) ou (σ_a/σ'_D)
-138	10^4	-	-
	10^5	-	-
	10^6	217	1,17424242
	10^7	173,9	1,11047254
	10^8	163	1,17181884
	5.10^8	158,7	1,1772997
0	**10^4**	**356,5**	**1**
	10^5	**260,8**	**1**
	10^6	**184,8**	**1**
	10^7	**156,6**	**1**
	10^8	**139,1**	**1**
	5.10^8	**134,8**	**1**

σ_m (MPa)	N (cycles)	σ_a (MPa)	(σ_a/σ_f) ou (σ_a/σ'_D)
138	10^4	313	0,87798036
	10^5	213	0,81671779
	10^6	154,3	0,83495671
	10^7	126	0,8045977
	10^8	117,4	0,84399712
	5.10^8	113	0,83827893
276	10^4	254,6	0,7141655
	10^5	171,7	0,6583589
	10^6	121,7	0,65854978
	10^7	102,1	0,65197957
	10^8	93,5	0,67217829
	5.10^8	93,5	0,69362018
414	10^4	158,7	0,44516129
	10^5	110,9	0,42523006
	10^6	82,6	0,4469697
	10^7	71,7	0,45785441
	10^8	64,4	0,46297628
	5.10^8	64,4	0,47774481

Remarque: La valeur de $(\sigma_f)_i$ est obtenu par l'intersection entre la droite issu de $(\sigma_m)_i$ et celle de la courbe de Wöhler $\sigma_m = 0$

Les résultats illustrés par le tableau (Tab. 2) montrent une certaine **constance** du rapport **($\sigma_a/\sigma_f)_i$** ***ou*** **($\sigma_a/\sigma'_D)_i$** pour chaque valeur de la contrainte σ_m . Donc une superposition de valeurs est observée sur la figure (Fig. 48). C'est le principe de l'approche de Goodman, en rapprochant cette configuration non linéaire des résultats à une autre plus simple (linéaire) on obtient une droite appelée **droite de Goodman**.

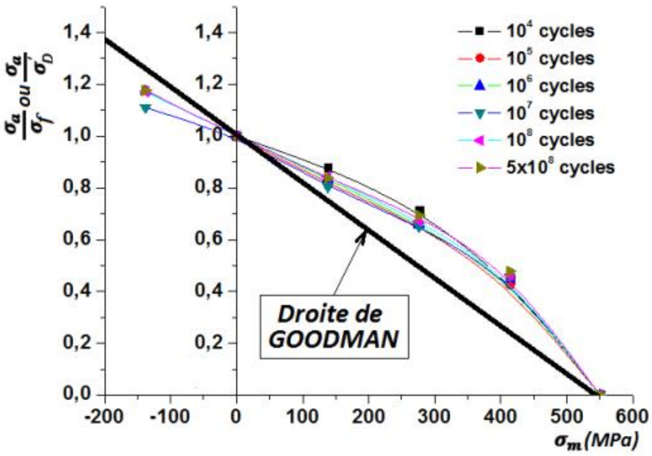


Figure II.22: Superposition des valeurs normalisées des amplitudes et obtention de la droite de Goodman

II.3.1. Équation de la droite de Goodman

Soient les deux points:

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_D} = 1, \sigma_m = 0\right) \; et \; \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_D} = 0, \sigma_m = R_m\right) \qquad (\text{Fig.} 5)$$

L'équation de la droite est de la forme

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} = \sigma_m + b$$

En remplaçant les coordonnées des deux points

$$\begin{cases} b = 1 \\ aR_m + b = 0 \end{cases}$$

Cela donne :

$$a = \frac{-1}{R_m}$$

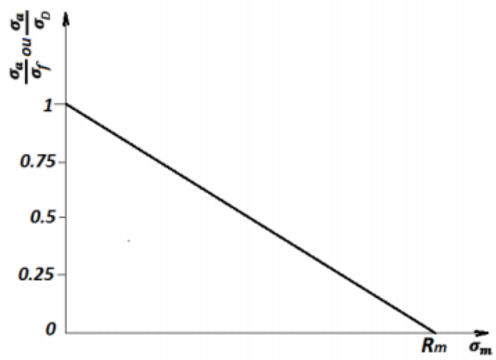


Figure II.23: Droite de Goodman

Finalement l'équation aura la forme suivante

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1 \qquad \text{Cas de vie infinie}$$

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1 \qquad \text{Cas de vie finie}$$

Remarque :

L'équation de la droite de Goodman peut s'écrire sous une autre forme

(Voir figure 6) :

$\sigma_a = -\frac{\sigma_D}{R_m}\sigma_m + \sigma_D$ Cas de vie infinie

$\sigma_a = -\frac{\sigma_D}{R_m}\sigma_m + \sigma_f$ Cas de vie finie

Le système de coordonnées et la droite de Goodman forment **le diagramme de Goodman**

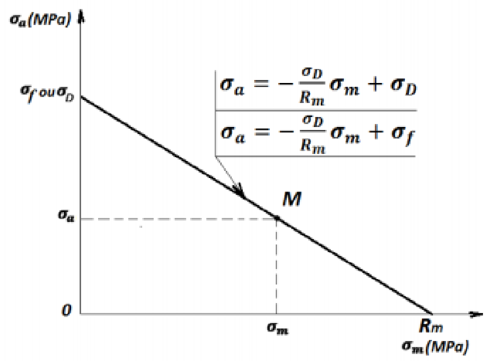


Figure II.24 : Diagramme de Goodman

II.3.2. Analyse *du diagramme de Goodman*

Soit le point M de coordonnées situé sur la droite de Goodman et considérons le cas de vie infinie (ou vie finie) par conséquent la condition $\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1$ est vérifiée. Le point M étant sur la droite veut dire qu'on est sur la limite de résistance de fatigue dans le cas de contrainte non complètement renversée **($\sigma_m \neq 0$)**.

Cas particuliers

1) Le point M est sur l'axe des ordonnées :($\boldsymbol{\sigma_m = 0}$, $\boldsymbol{\sigma_a = \sigma_D}$)

L'équation de la droite de Goodman devient : $\boldsymbol{\frac{\sigma_a}{\sigma_D} = 1}$

cela donne $\boldsymbol{\sigma_a = \sigma_D}$ c'est la condition ultime de résistance en fatigue en cas de contrainte complètement renversée.

2) Le point M est sur l'axe des abscisses : ($\boldsymbol{\sigma_m = R_m}$, $\boldsymbol{\sigma_a = 0}$)

On aura : $\boldsymbol{\frac{\sigma_m}{R_m} = 1}$ ou $\boldsymbol{\sigma_m = R_m}$ c'est la condition ultime de résistance en cas statique

II.3.3. Coefficient de sécurité

Le point M étant sur la droite est la limite de la sécurité d'équation :

$$\frac{\sigma_{aM}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{mM}}{R_m} = 1$$

Si on se situe à l'intérieur du triangle formé par la droite de Goodman et les axes soit le point N. Au point N la structure est plus sûre. Pour cela introduisons le coefficient de sécurité

$$\boldsymbol{F_s = \frac{OM}{ON}}$$

Pour déterminer le coefficient de sécurité au point N c.à.d. à $\boldsymbol{et\ \ \sigma_a = \sigma_{aN}}$ traçons la droite passant par N et parallèle à la droite de Goodman passant par M Cette nouvelle droite aura pour équation :

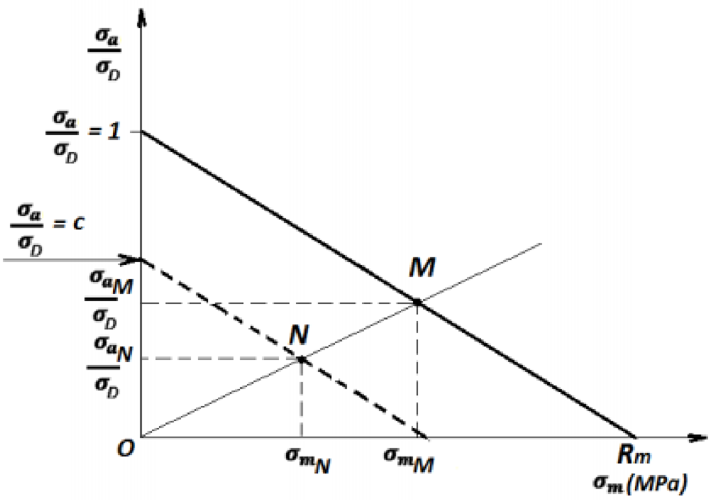
$\frac{\sigma_{aN}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{mN}}{R_m} = c$ avec c < 1 On a : $\frac{\boldsymbol{OM}}{\boldsymbol{ON}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{c}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\frac{\sigma_{aN}}{\sigma_D} + \frac{\sigma_{mN}}{R_m}}$

Donc le coefficient de sécurité s'écrira pour une situation quelconque $(\boldsymbol{\sigma_m};\ \boldsymbol{\sigma_a})$

$$F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m}}$$

Dans le cas de vie finie :

$$F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{R_m}}$$



A) Discussion des valeurs de F_s

F_s > 1 veut dire OM > ON et la structure se trouve dans la **zone de sécurité**

F_s =1 OM = ON ou $\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1$ et la structure est sur la **limite de résistance**

F_s < 1 OM < ON la structure est **hors zone de sécurité**

B) Critère de résistance de fatigue de Goodman

De ce qui précède on peut écrire le critère de **résistance de Goodman**

$\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} \leq 1$ Cas de vie infinie

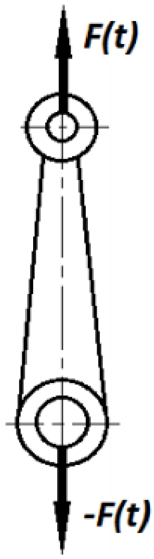
$\frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{R_m} \leq 1$ Cas de vie finie

Exemple *d'application* :

Une bielle en acier (σ_D = 120 MPa et R_m = 680 MPa) est soumise à un chargement dynamique induisant les contraintes : σ_m= 120 MPa et σ_a = 65 MPa

On demande de :

1) Calculer le coefficient de sécurité
2) Tracer le diagramme de Goodman
3) Si on considère le chargement σ_m = 180 MPa, σ_a = 100 MPa
4) Calculer alors la durée de vie.



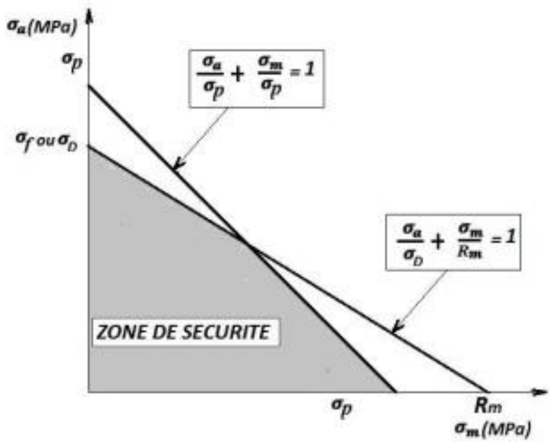
II.3.4. Diagramme de Goodman modifié

A) Cas d'écoulement plastique

Dans le cas où la contrainte moyenne σ_m est très importante et l'amplitude est relativement réduite il faut vérifier l'écoulement plastique c.à.d. la limite d'écoulement plastique σ_P :

$$\begin{cases} \frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1 \\ \frac{\sigma_a}{\sigma_p} + \frac{\sigma_m}{\sigma_p} = 1 \ ou \ \frac{\sigma_{max}}{\sigma_p} = 1 \end{cases} \quad \text{vie infinie}$$

$$\begin{cases} \frac{\sigma_a}{\sigma_f} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1 \\ \frac{\sigma_a}{\sigma_p} + \frac{\sigma_m}{\sigma_p} = 1 \ ou \ \frac{\sigma_{max}}{\sigma_p} = 1 \end{cases} \quad \text{vie finie}$$

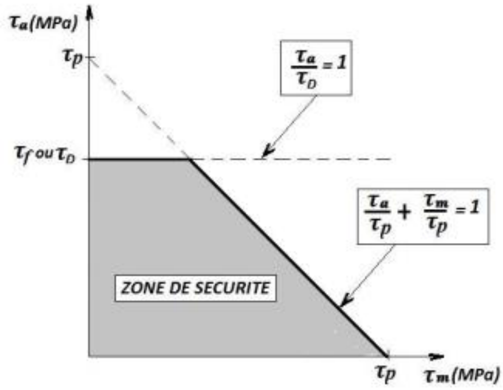


B) Cas de cisaillement

La contrainte moyenne de cisaillement τ_m n'a pas d'effet sur la limite d'endurance τ_D . Si on tient compte de l'écoulement plastique on aura:

$$\begin{cases} \frac{\tau_a}{\tau_D} = 1 \\ \frac{\tau_a}{\tau_p} + \frac{\tau_m}{\tau_p} = 1 \; ou \; \frac{\tau_{max}}{\tau_p} = 1 \end{cases} \quad \text{(vie infinie)}$$

$$\begin{cases} \frac{\tau_a}{\tau_f} = 1 \\ \frac{\tau_a}{\tau_p} + \frac{\tau_m}{\tau_p} = 1 \; ou \; \frac{\tau_{max}}{\tau_p} = 1 \end{cases} \quad \text{(vie finie)}$$



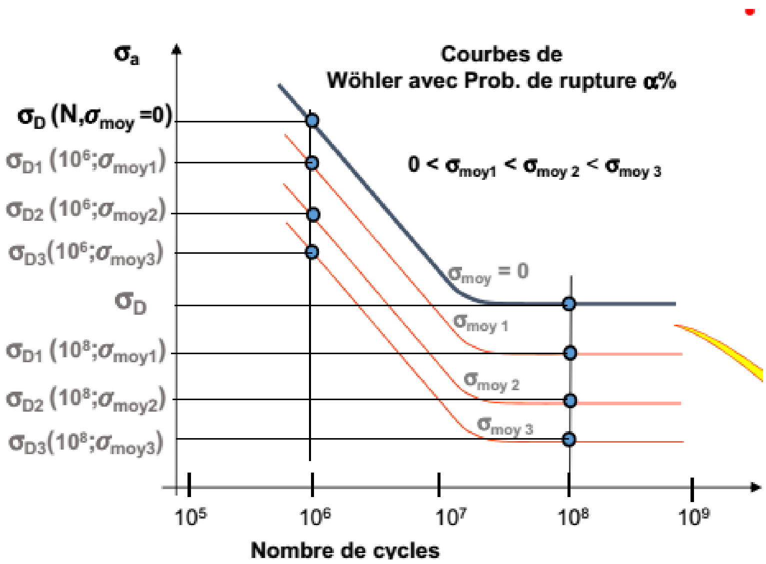
Dans ce cas le diagramme de Goodman aura la forme (figure ci-contre):

$$\begin{cases} F_{s1} = \frac{1}{\frac{\tau_a}{\tau_D}} = \frac{\tau_D}{\tau_a} \\ F_{s2} = \frac{1}{\frac{\tau_a}{\tau_p}+\frac{\tau_m}{\tau_p}} = \frac{\tau_p}{\tau_{max}} \end{cases} \quad \text{(vie infinie)}$$

$$\begin{cases} F_{s1} = \frac{1}{\frac{\tau_a}{\tau_D}} = \frac{\tau_f}{\tau_a} \\ F_{s2} = \frac{1}{\frac{\tau_a}{\tau_p}+\frac{\tau_m}{\tau_p}} = \frac{\tau_p}{\tau_{max}} \end{cases} \quad \text{(vie finie)}$$

II.3.5. Diagramme d'endurance de Haigh

Les diagrammes d'endurance (abscisse σ_m et ordonnée σ_a) sont issus des courbes de Wöhler. Ils définissent l'ensemble des limites d'endurance $\boldsymbol{\sigma_D}$**(N)** en fonction de la valeur de la contrainte moyenne pour un nombre de cycle déterminé.



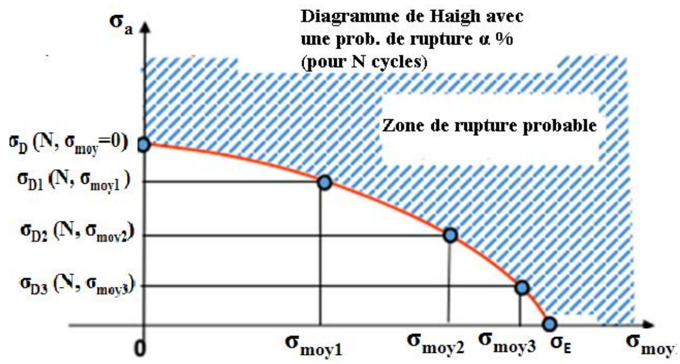


Figure II.25 : Diagramme de Haigh pour

Sur un diagramme de **Haigh**, l'amplitude de la contrainte $\boldsymbol{\sigma_a}$ est portée en fonction de la contrainte moyenne $\boldsymbol{\sigma_m}$ à laquelle a été réalisé l'essai de fatigue. Tracé en général pour un nombre de cycles à rupture donné (par exemple $\mathbf{10^6}$), deux points particuliers sont a noter :

- le point **A** qui représente la limite de fatigue $\boldsymbol{\sigma_f}$ en sollicitation alternée symétrique ($\boldsymbol{\sigma_m}$**=0**) :
- le point **B** qui représente le comportement limite du matériau pour une amplitude de contrainte nulle ($\boldsymbol{\sigma_a} = \mathbf{0}$). Ce point correspond schématiquement à la contrainte maximale de rupture (ou résistance maximale) $\mathbf{R_m}$ du matériau au cours d'un essai quasi-statique monotone.

II.3.6. Théorie de la limitation, Modélisation du diagramme de Haigh

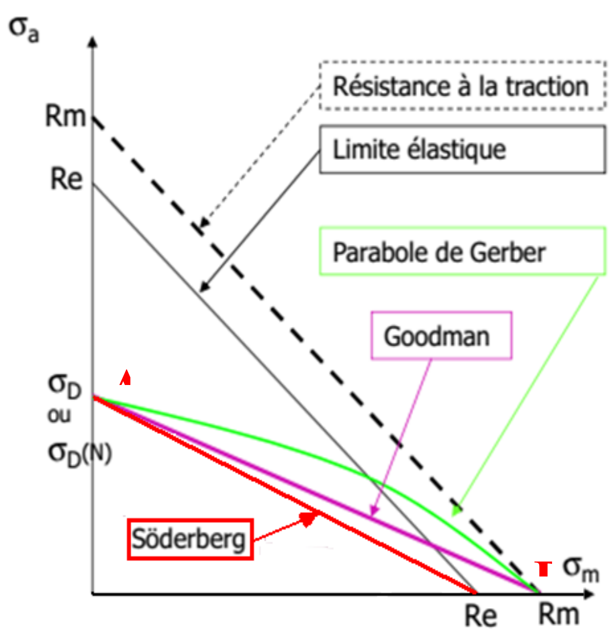
- **Parabole de Gerber**

$$\boldsymbol{\sigma_a = \sigma_{D(N)}\left[1-\left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)^2\right]}$$

- **Droite de Goodman**

$$\boldsymbol{\sigma_a = \sigma_{D(N)}\left[1-\left(\frac{\sigma_m}{R_m}\right)\right]}$$

- **Droite de Soderberg**
- $\boldsymbol{\sigma_a = \sigma_{D(N)}\left[1-\left(\frac{\sigma_m}{R_e}\right)\right]}$



Le domaine limité par la courbe AB et les deux axes de coordonnées représente le domaine d'endurance illimitée.

III. Définitions et terminologie

III.1. Types de variation des contraintes

Les sollicitations en fatigue peuvent être simples (traction, compression, torsion..) ou complexes (combinées). Les efforts répétés, varient en fonction du temps d'une façon périodique, dans ce cas on admet que leurs variations sont sinusoïdales, ou quelconque celle-ci posera des difficultés en calcul. On peut distinguer:

III.1.1. Contrainte sinusoïdale à amplitude constante

C'est la variation la plus simple elle est continue et à amplitude de contrainte constante.

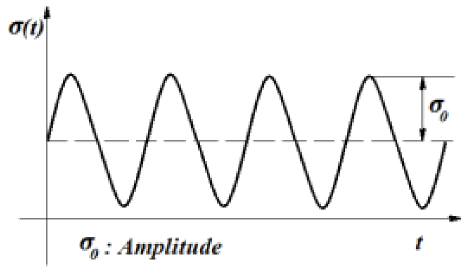


Figure III.1: Contrainte sinusoïdale à amplitude constante

III.1.2. Contrainte sinusoïdale à amplitude variable

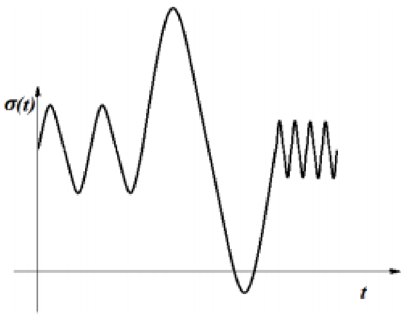


Figure III.2 : Contrainte sinusoïdale à amplitude variable

III.1.3. Contrainte aléatoire

La courbe de variation est d'allure quelconque

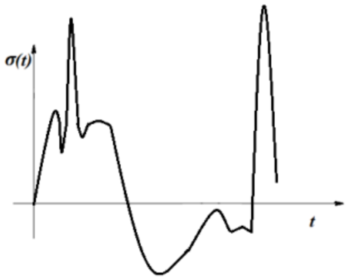


Figure III.3; Contrainte aléatoire

Pour simplifier les calculs en fatigue nous considérons ici que les contraintes sinusoïdales à amplitude constante ou à amplitude variable.

III.1.4. Cycle de contrainte

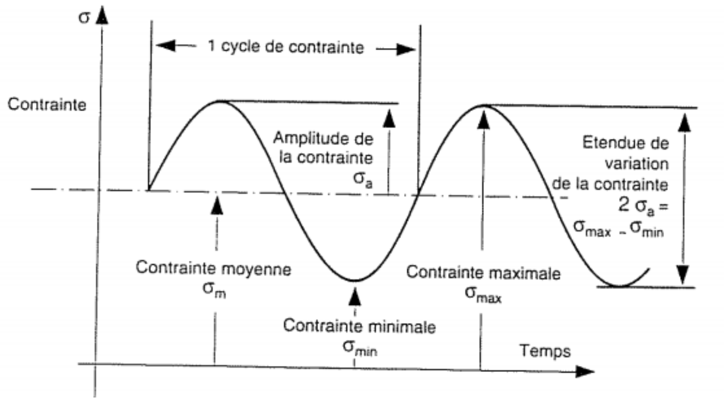


Figure III.4; Cycle de contrainte en fatigue

(σ_{max} ,τ_{max}) *:contrainte* maximale, $\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a$

(σ_{min} , τ_{min}) : Contrainte minimale, $\sigma_{min} = \sigma_m + \sigma_a$

(σ_m , τ_m) : Contrainte moyenne, $\sigma_m = \frac{\sigma_{max}+\sigma_{mni}}{2}$

(σ_a , τ_a) : Amplitude de contrainte, $\sigma_a = \frac{\sigma_{max}-\sigma_{mni}}{2}$

($\Delta\sigma$, $\Delta\tau$) : Étendue de contrainte, $\Delta\sigma = \sigma_{max} = \sigma_{mni} = 2\sigma_a$

Rapport de contrainte R_σ, $R_\sigma = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$

Nombre de cycles (**n**): nombre de répétitions de cycle de contrainte l'essai de fatigue

Nombre de cycles à rupture **(N)**: nombre de répétitions de cycle de contrainte jusqu'au rupture.

Rapport du nombre de cycles: n/N

Fréquence (f): nombre de cycles de contrainte appliqués par unité de temps (cycle par seconde ou par minute.

Par considération des signes des termes σ_{min} et σ_{max} et les termes σ_m et σ_a les sollicitations peuvent être classées comme suit :

A) Sollicitation ondulée: $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} > 0$

C'est le cas où les termes σ_{max} et σ_{min} sont ou bien positifs ou bien négatifs (Fig.17 et Fig.18)

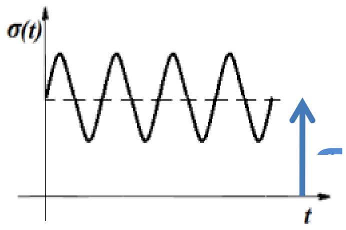


Figure III.5 : Sollicitation ondulée (**σ_m > 0**)

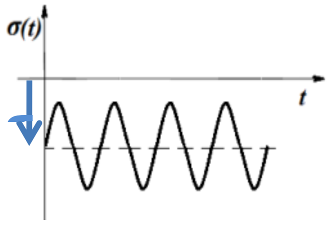


Figure III.6 : Sollicitation ondulée (**σ_m < 0**)

B) Sollicitation alternée

Dans ce cas : $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} < 0$

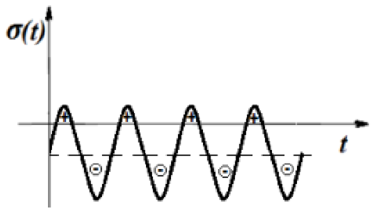


Figure III.7: Sollicitation alternée (**σ_m < 0**)

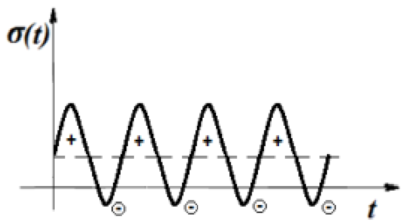


Figure III.8: Sollicitation alternée (**σ_m > 0**)

Cas particulier : $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = -1$

Figure III.9: Sollicitation complètement renversée (**σ_m = 0**)

C) Sollicitation statique

C'est le cas où $\sigma_a = 0$ et $\sigma_m \neq 0$, $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = 1$

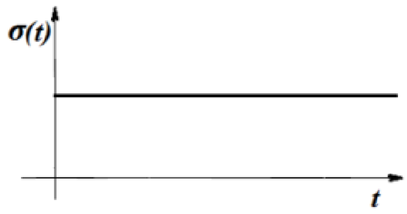


Figure III.10 : Sollicitation statique ($\sigma_m > 0$)

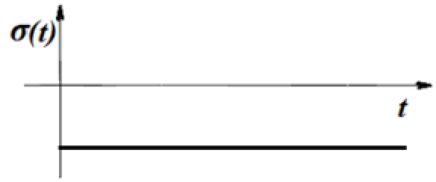


Figure III.11: Sollicitation statique ($\sigma_m < 0$)

III.2. Systèmes d'essai

La méthode la plus couramment utilisée pour obtenir des courbes d'endurance est l'essai de flexion rotative ou de flexion plane (voir Figure 24) . Les machines utilisées pour ces essais permettent des fréquences proches de 20 Hz.

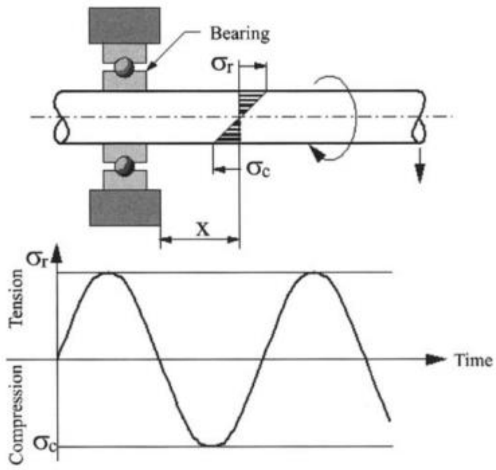
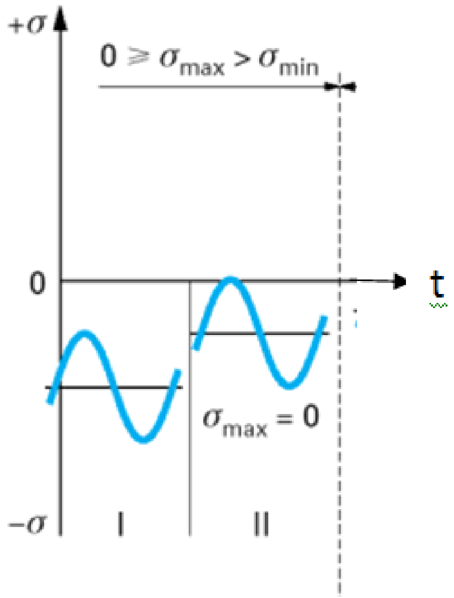


Figure III.12: Principe des essais de flexion rotative

III.3. Différents domaines de la fatigue

Considérons dans un premier temps les essais de fatigue sous amplitude de contrainte constante. Les fluctuations de contrainte susceptible d'être rencontrées dans une structure peuvent être de formes variées : variations sinusoïdales, variations cycliques par blocs répétés, variations aléatoire. Des surcharges ou des sous -charges peuvent également apparaitre, comme celles enregistrées sur une voiture ou un camion sur route. Les caractéristiques de résistance à la fatigue ou endurance d'un matériau sont généralement obtenues grâce à des essais sur éprouvettes lisses soumises à des sollicitations cycliques en cycle sinusoïdal ou triangulaire d'amplitude et de fréquence constantes. Le nombre de cycles conduisant à la rupture sous le niveau de sollicitations appliqué est appelé **durée de vie**, et désigné par **N**



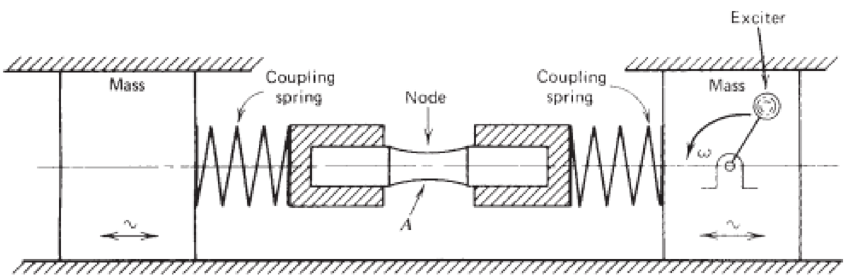
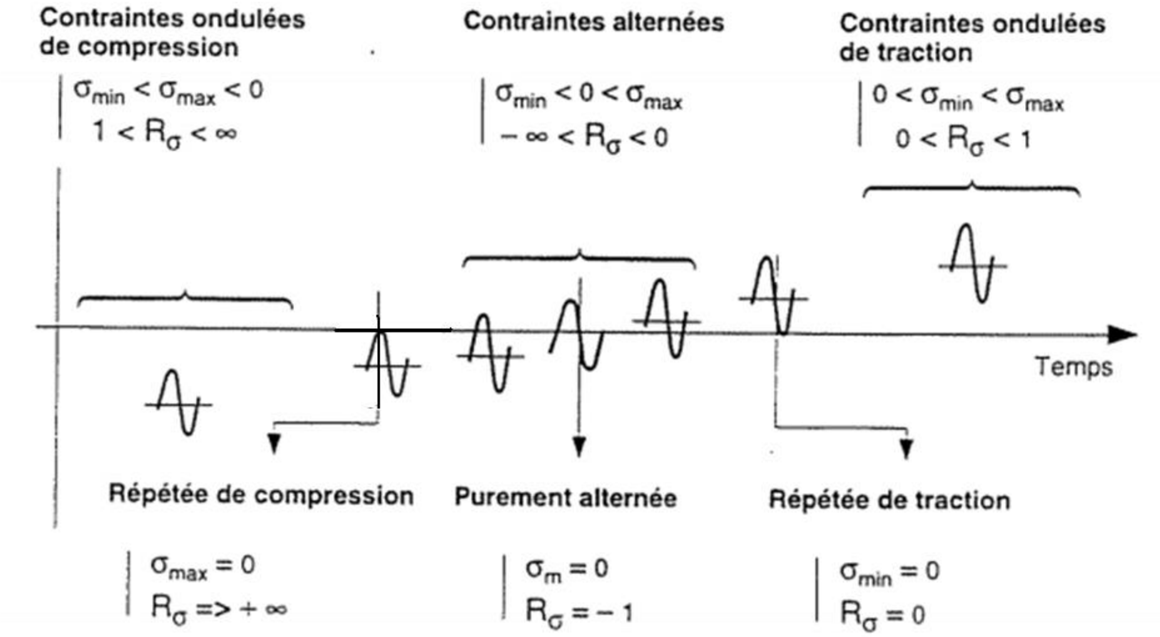
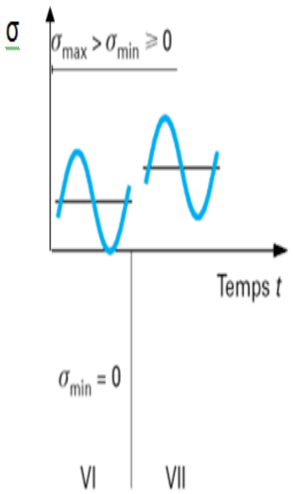


Figure III.13: Machine de fatigue axiale basée sur vibration de résonance causée par une rotation excentrique de masse.

III.4.Les formes de cycle de contraintes





I. Contrainte ondulée de compression :

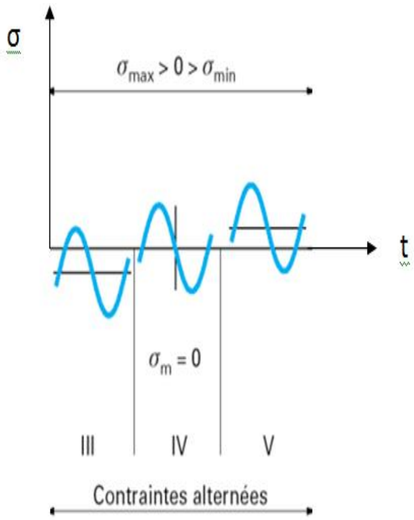
$$1 < R_\sigma < \infty$$

II. **Contrainte** répétée de compression : $R_\sigma \rightarrow \infty$

III. Contrainte alternée dissymétrique : $-\infty < R_\sigma < -1$

IV. Contrainte purement alternée : $R_\sigma = -1$.

V. Contrainte alternée dissymétrique : $-1 < R_\sigma < 0$

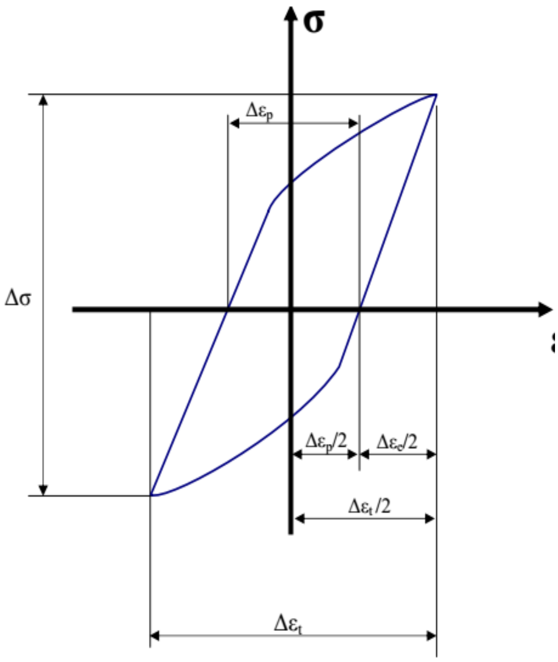


VI. Contrainte **répétée de traction** : $R_\sigma = 0$

VII. Contrainte **ondulée de traction**: $0 < R_\sigma < 1$

III.5. Comportement sous sollicitation cyclique

L'enregistrement de l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation, appliquée au cours d'un cycle, conduit au tracé d'une boucle schématisée sur la Figure 1 et appelée boucle d'hystérésis. La forme et taille de ces boucles évoluent en fonction du nombre de cycles et éventuellement se stabilisent.



Étendue de variation de la déformation :

$\Delta\varepsilon = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}$

Amplitude de déformation :

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon max - \varepsilon min}{2}$$

Déformation moyenne :

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon max + \varepsilon min}{2}$$

Rapport de déformation :

$$R_\varepsilon = \frac{\varepsilon min}{\varepsilon max}$$

Figure III.14: Boucle hystérésis

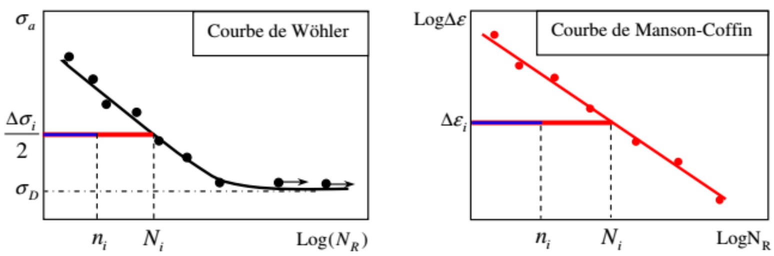
IV.1. Cumul de dommage par fatigue

Lorsqu'un élément de structure est soumis à un chargement d'amplitude constante, de contrainte $\Delta\sigma$ ou de déformation plastique $\Delta\varepsilon_p$, les courbes de Wöhler ou de Manson Coffin fournissent directement sa durée de vie. Si en revanche l'amplitude de chargement varie au cours du temps, la façon classique d'aborder le problème consiste à définir l'endommagement associé à chaque amplitude et à utiliser ensuite une loi de cumul de l'endommagement : La durée de vie est définie par le nombre de cycles à rupture $\mathbf{N_R}$. Ainsi, l'application de n cycles (n < $\mathbf{N_R}$) entraine une détérioration partielle de la pièce.

La connaissance de ce dommage est importante à déterminer car elle permet d'évaluer la capacité restante de durée de vie et de décider s'il faut ou non remplacer la pièce pour éviter une rupture catastrophique. La règle la plus simple consiste à considérer une évolution linéaire du dommage. Cette approche est appelée règle de cumul linéaire de Miner Ainsi, le dommage associé à n_i cycles (n_i < N_{Ri}), pour une sollicitation donnée, est déterminé par la fraction représentant le nombre de cycles n_i divisé par le nombre de cycles à rupture N_{Ri} associé au niveau de contrainte de la sollicitation. Le dommage élémentaire D_i sous amplitude constante ($\Delta\sigma_i$ ou $\Delta\varepsilon_i$) est défini par la relation suivante :

$$D_i = \frac{n_i}{N_{Ri}}$$

- n_i le nombre de cycles effectué à l'amplitude $\Delta\sigma_i$ ou $\Delta\varepsilon_i$
- N_i le nombre de cycles à rupture correspondant (déduit de la courbe de Wöhler ou de celle de Manson-Coffin).



La règle de cumul linéaire de Miner suppose que l'endommagement total est la somme algébrique des endommagements élémentaires. L'endommagement total *D* est donné par:

$$D = \sum_i D_i = \sum_i \frac{n_i}{NR_i}\ ,$$ **La rupture se produit lorsque *D* = 1.**

La règle du Miner est souvent appliquée pour évaluer des endommagements cumulés de fatigue sous chargement à amplitude variable, grâce à sa simplicité : prise en compte de données de fatigue sous amplitude constante (courbes de Wöhler). La règle linéaire d'endommagement a été remise en question par de nombreux résultats issus des travaux de plusieurs auteurs lors d'essais de fatigue, sur des éprouvettes de différentes géométries, en faisant varier graduellement le niveau de chargements de type traction-compression, flexion rotative et traction répetée. Ces résultats peuvent être résumés de la manière suivante :

- la somme des dommages est inférieure à l'unité dans le sens des séquences décroissantes ;
- la somme des dommages est supérieure à l'unité dans le sens des séquences croissantes. Les critiques importantes qui remettent en cause les lois de dommage cumulatif linéaire sont :
- l'endommagement partiel, qui s'appuie sur la notion de dommages indépendants, ne prend pas en compte les effets des séquences du chargement sur la fatigue. En effet, les résultats expérimentaux montrent que quelques cycles ($n2$) à un niveau élevé de contrainte ($\sigma 2$), suivis par un cyclage à un niveau inférieur ($\sigma 1$, $n1$), endommagent plus fortement que dans le cas où l'ordre est inversé. Ce phénomène peut s'expliquer par la non linéarité de l'endommagement, contrairement à l'hypothèse proposée par Miner ;
- l'utilisation de la courbe de Wöhler conduit à ignorer tous les cycles d'amplitude inférieure à la limite d'endurance dont l'endommagement partiel, selon la définition de Miner, est nul. Par conséquent, la durée de vie en fatigue du matériau est surestimée dans le cas de chargement variable.

  Les résultats obtenus montrent que la règle de Miner, qui est normalement utilisée pour le dimensionnement en fatigue des structures en acier, peut donner des prévisions non conservatives de la durée de vie, et que la distribution de l'histoire de chargement en traction et compression a une influence sur la validité des résultats obtenus en utilisant la règle de Miner. Plusieurs améliorations de la règle linéaire d'endommagement de Miner ont été suggérées et ont rencontré des degrés différents de réussite pour des applications particulières. On peut citer par exemple la loi de **Hashin** et **Laird** qui donne une relation d'accumulation de dommage sous deux niveauxdechargementdecontraintecyclique:

$$\frac{\left(\frac{N_1}{N_{R1}}\right)^{\log\left(\frac{N_2}{N_e}\right)}}{\log\left(\frac{N_1}{N_e}\right)} + \frac{N_2}{N_{R1}} = 1$$

Ne : nombre de cycles à la limite de fatigue,

N_{R1} et N_{R2} : nombres de cycles à rupture pour les niveaux de chargement 1 et 2.

N_1 et N_2 :le nombre de cycles effectué à l'amplitude $\Delta\sigma i$.

IV.1.2. Les lois d'endommagement de fatigue

La théorie de l'endommagement, a pour objet de décrire l'évolution des phénomènes entre l'état vierge (matériau dépourvu de fissures ou de cavités à l'échelle microscopique) et l'amorçage de la fissure macroscopique. Le stade final de l'endommagement correspond à la rupture de l'élément, c'est à dire à l'existence d'une fissure macroscopique de la taille de cet élément (de 0.1 à 1 mm pour les métaux). Au delà, c'est le domaine de la fissuration. Seul l'endommagement de fatigue, c'est à dire l'endommagement dû à la répétition des sollicitations, les modifications des caractéristiques mécaniques d'un élément peuvent être interprétées en terme de variable d'endommagement. Les paramètres de dommage sont nombreux et leur choix est souvent lié au domaine dans lequel s'effectue l'étude en fatigue. On peut citer:

- ❖ La mesure de la plasticité dans le cas de la fatigue à faible nombre de cycles (fatigue oligocyclique), qui correspond à un nombre de cycles à rupture (*Nr*) inférieur à 50000. Les déformations plastiques interviennent alors de manière prépondérante.
- ❖ La variation de la limite d'endurance pour les grands nombres de cycles (***N*r >50000**). Les déformations sont alors quasi élastiques. Lorsque ***Nr*** $>10^7$, on considère que la durée de vie est illimitée, c'est à dire que les sollicitations sont inférieures à la limite d'endurance. Les paramètres de dommage les plus fréquemment rencontrés sont : ·

- ➢ **La fraction de vie** (utilisée par exemple dans la loi linéaire d'endommagement de Miner). ·
- ➢ **La section effective** (Rabotnov - Lemaitre - Chaboche).·
- ➢ **La déformation plastique** cumulée (Papadopoulos, Morel).
- ➢ ·**L'énergie de déformation** (Ellyin).

Le cas le plus général de sollicitations pouvant être imposées à un système mécanique est un chargement multiaxial aléatoire. Les sollicitations uniaxiales aléatoires forment un cas particulier de ce cas général. Les lois d'endommagement peuvent être classées suivant deux catégories :

- La première regroupe les lois d'endommagement ne pouvant être utilisées que dans le cas de, sollicitations uniaxiales. Elles sont appelées lois d'endommagement **uniaxiales**.
- La seconde englobe l'ensemble des lois d'endommagement applicables dans le cas de sollicitations multiaxiales. Elles sont appelées lois d'endommagement **multiaxiales**.

IV.1.3. Lois d'endommagement uniaxiales

a) Loi de Palmgreen-Miner

Cette loi est sans aucun doute la plus connue et la plus utilisée en bureau d'étude, du fait de sa simplicité. Elle suppose que le dommage se cumule de manière linéaire. Le paramètre de dommage retenu dans cette formulation est la fraction de vie définie par : $D_i = \frac{n_i}{N_{Ri}}$

$$\sum_i D_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_i \frac{n_i}{NR_i} = 1$$

Cette loi rend bien compte du fait que les niveaux de contraintes inférieurs à la limite d'endurance sont supposés non endommageant. Le dommage induit par un cycle de sollicitation est donc fonction de la durée de vie N_{Ri} du matériau pour le cycle en question. Une évaluation de cette quantité peut être obtenue à partir de la connaissance de la courbe de Wöhler relative aux conditions de chargement. Cette courbe représente la contrainte dynamique σ_m (contrainte maximale, contrainte minimale ou encore amplitude de contrainte), en fonction du nombre de cycles N à rupture (reporté sur une échelle logarithmique), pour une contrainte moyenne σ_m fixée

b) **Loi de Lemaitre-Chaboche**

Cette loi repose sur les notions de fraction de vie $\frac{n_i}{N_{Ri}}$ et de contrainte effective introduite par Rabotnov

$$D_n = \frac{S_D}{S}$$

S: aire d'une section d'un élément de volume endommagé de normale .
S_D : aire totale des traces des défauts (microcavités, microfissures).

D_n permet de mesurer mécaniquement l'endommagement local relatif à la direction . La contrainte effective représente la contrainte rapportée à la section qui réside effectivement aux efforts. Dans le cas d'un endommagement isotrope (c'est-à-dire : D = D_n pour tout N_{Ri}), elle est définie par : $\sigma = \frac{\sigma}{1-D}$

L'expérience montre que les courbes d'évolution du dommage en fonction du paramètre d'endommagement $\frac{n_i}{N_{Ri}}$, peuvent dépendre du niveau de sollicitation imposée. Il n'y a donc pas de cumul linéaire du dommage. La figure ci-dessous permet d'illustrer ces propos. Elle est relative à un essai de fatigue à deux niveaux de contrainte.

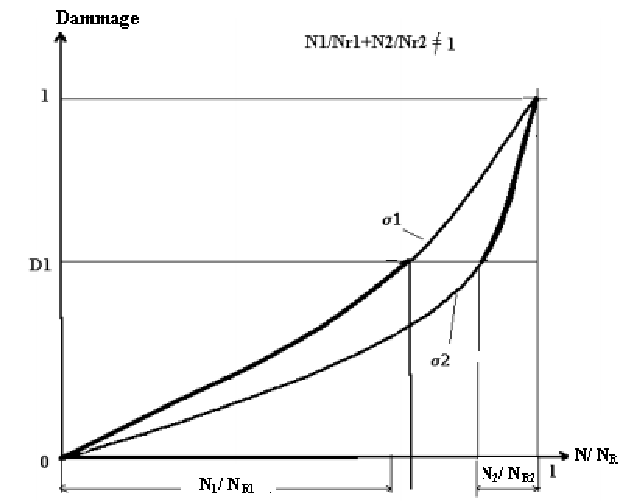


Figure IV.1 : Cumul non linéaire

On constate à la vue de cette courbe que le cumul du dommage n'est pas linéaire ;en effet on a :

$$\sum \frac{N_i}{N_{Ri}} = \frac{N_1}{N_{R1}} + \frac{N_2}{N_{R2}} \neq 1$$

Une façon simple de rendre compte de cette remarque dans la formulation de l'évolution du dommage consiste à rendre non séparables les variables de chargement et la variable de dommage. Les auteurs ont proposé l'expression suivante :

$$dD = \left[1 - (1-D)^{1+\beta}\right]^{\alpha} \left[\frac{\sigma_a}{M_0(1 - b\sigma_m)(1-D)}\right]^{\beta} dN$$

Où

- D est le dommage représentant l'état actuel du matériau
- dD est l'accroissement de dommage dû à Dn
- σ_a est l'amplitude de contrainte du cycle
- σ_m est la contrainte moyenne du cycle
- β, M_0 et b sont des constantes liées au matériau
- α est un paramètre dépendant des caractéristiques de chargement ainsi que du matériau. L'évolution du dommage est donc non seulement fonction de l'état de contrainte appliquée, mais aussi de l'état de dommage de la structure étudiée.

  Observation: La loi d'endommagement de Lemaitre-Chaboche permet de rendre compte du comportement d'un matériau d'une manière plus correcte que la loi de MINER mais est beaucoup moins pratique pour les bureaux d'études car plus difficile à mettre en œuvre.

IV.1.4. Calcul par la théorie de Miner

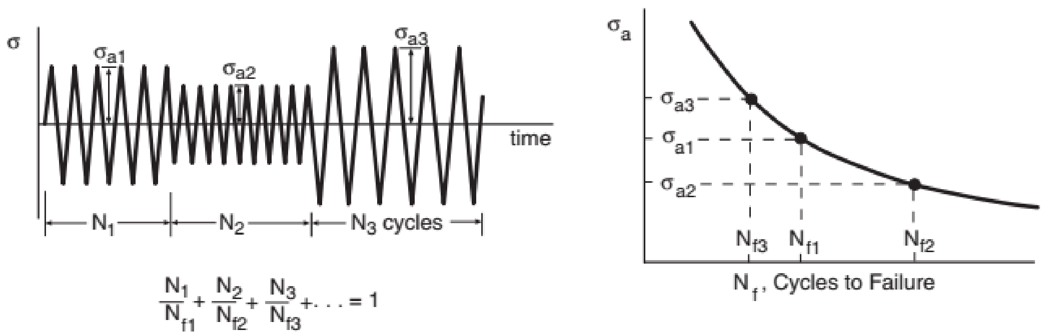
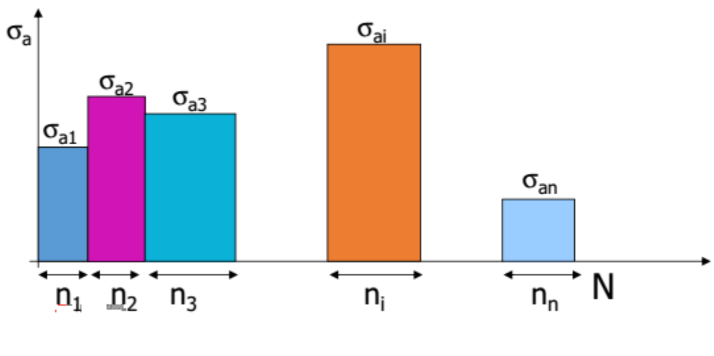


Figure IV.2: utilisation de la règle de Palmgren-Miner pour la prédiction de la durée de vie pour des chargement variable à amplitude complètement renversé.

Pour chaque cycle d'application d'une contrainte complètement renversée $\boldsymbol{\sigma_{ai}}$ un dommage **$1/N_i$** est accumulé, **N_i** vie de la pièce tel que $\sigma_{D(Ni)} = \sigma_{ai}$ Pour **n_i** applications de $\boldsymbol{\sigma_{ai}}$ le dommage D_i est ${}^{n_i}/_{N_i}$.

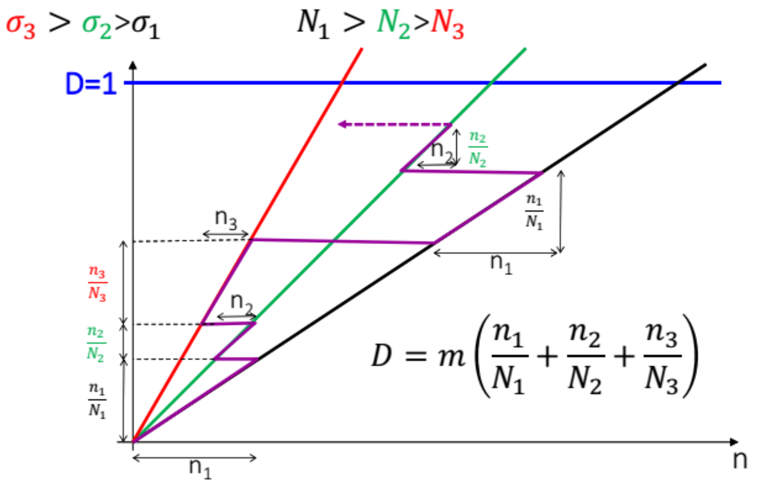
• Pour un spectre des contraintes $\boldsymbol{\sigma_{a1}}$, $\boldsymbol{\sigma_{a2}}$, .., $\boldsymbol{\sigma_{aj}}$ appliquées respectivement **n_1**, **n_2**, **n_3**,…, nj fois, le cumul des dommages est : $\sum_{i=1}^{j}\frac{n_i}{N_i}$ et la rupture se produit lorsque le dommage est égal à 1



IV.1.5. Principe du cumul des dommages linéaires, $D_i = n/N_i$,

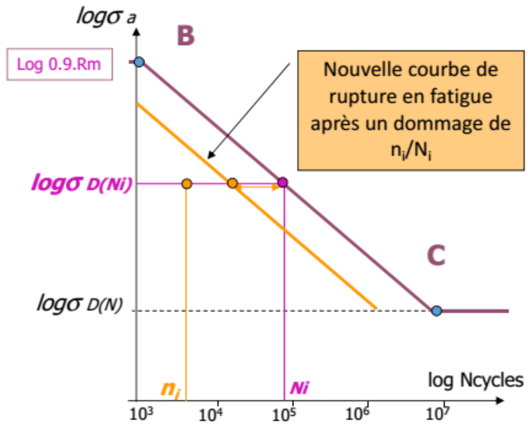
• Exemple pour trois niveaux

$$\log(\sigma_i) = a + b.\log(N_i) \qquad N_i = 10^{\frac{\log(\sigma_i) - a}{b}}$$



- **Calcul par la théorie de Miner**

$$N = 1000 \left[\frac{0.9R_m}{\sigma}\right]^{\frac{3}{\log\left[\frac{0.9R_m}{\sigma'_D}\right]}}$$



- **<u>Exemple de calcul par la théorie de MINER</u>**

Une pièce d'acier Rm =555 MPa et $\boldsymbol{\sigma_D}$ = 120 Mpa supporte les sollicitations suivantes :

$\mathbf{n_1}$ =40000 cycles à $\boldsymbol{\sigma_1}$=200 Mpa, puis $\mathbf{n_2}$=100000 cycles à $\boldsymbol{\sigma_2}$= 140 Mpa.

- Combien de cycles pourra-t-elle supporter à $\boldsymbol{\sigma_3}$ 50 Mpa ?

- il aura-t-il un endommagement de la pièce ?

<u>Solution :</u>

La contrainte σ_3 n'a pas d'influence sur la durée de vie de la pièce car $\sigma_3 < \sigma_D$. Il faut donc vérifier que la pièce résiste aux deux premiers niveaux de chargement (dommage <1)

N_1 = 84221 cycles N_2 = 473943 cycles

$$N = 1000\left[\frac{0.9R_m}{\sigma}\right]^{\frac{3}{\log\left[\frac{0.9R_m}{\sigma'_D}\right]}}$$

$\mathbf{N_3}$ = vie infinie

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{n_i}{N_i} = \frac{40000}{84221} + \frac{100000}{473943} = 0.68 < 1$$

La théorie de Miner prédit donc une durée de vie infinie pour l'application de σ_3 après les 2 premiers niveaux de sollicitations.

V.1. Propagation des fissures de fatigue

La MLR permet le calcul de la durée de vie d'une structure soumise à des sollicitations cycliques (phénomène de fatigue) ou sujette à des effets de corrosion sous tension, puisque dans ce cas :

- la vitesse de propagation des fissures est caractérisée par un paramètre tel que le FIC,
- et la taille critique de défaut (ne pas dépasser) est directement liée à la ténacité du matériau. Par exemple, pour la fissuration par fatigue des alliages métalliques, la propagation de fissure ***da/dN*** est généralement représentée par **la relation empirique de Paris** : $\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^m$

où A et m sont des constantes du matériau, et ΔK l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes. Parce que les structures contiennent inévitablement des défauts de type fissure, défauts en général inhérents aux procédés même de fabrication des composants, leurs dimensions sont choisies de sorte que ces défauts ne puissent atteindre la taille critique conduisant à la rupture brutale : il s'agit du concept de tolérance au dommage. La MLR fournit les outils nécessaires pour déterminer cette taille critique et suivre la propagation de la fissure. L'évolution au cours du temps de la taille d'un défaut (de type fissure de fatigue ou de corrosion sous tension) illustre bien le concept de tolérance au dommage.

En pratique, la longueur de fissure initiale $\mathbf{a_0}$ correspond à la limite de détection des moyens de contrôle non destructif, et la longueur critique est déterminée à partir du chargement appliqué et de la ténacité du matériau. Quant au coefficient de sécurité, il est choisi de sorte que la longueur admissible du défaut reste inférieure à la longueur critique. La durée de vie de la structure est alors déterminée en calculant le temps nécessaire pour que la longueur de défaut passe de a_0 à la longueur admissible.

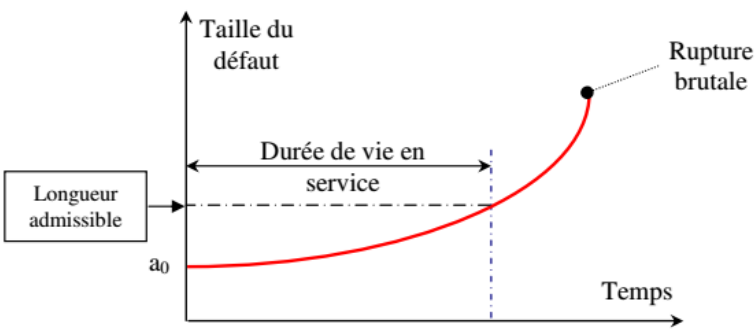


Figure V.1: Concept de tolérance au dommage

V.1.1. Représentation schématique de la da/dN en fonction de ΔK (en échelle log.)

3 régimes distincts :

Régime I : contraintes faibles ou petites fissures ⇨ Aucune propagation des fissures existantes

Régime II : courbe quasi-linéaire ⇨ Propagation régulière des fissures

Régime III : accélération de la fissuration ⇨ Propagation brutale des fissures

La courbe ainsi obtenue présente généralement une allure décrite sur la précédente figure est constituée de 3 domaines caractéristiques, désignés I, II, et III

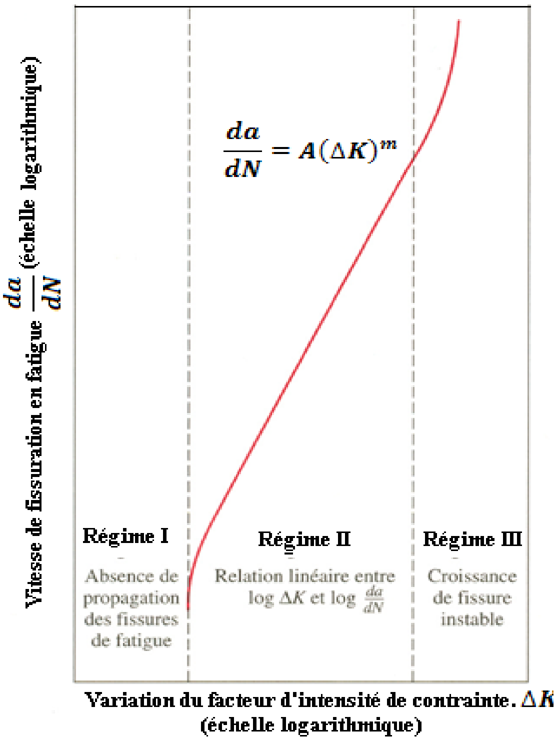


Figure V.2: representation schématique de la courbe de Paris.

- Le domaine **I** se caractérise par une rapide décroissance de la vitesse de propagation lorsque la valeur de ΔK approche d'une valeur caractéristique. Cette valeur est appelée seuil de propagation et notée ΔKseuil. En dessous de cette valeur, l'endommagement en pointe de fissure engendré par le chargement cyclique devient si faible qu'il est quasiment impossible de détecter expérimentalement une avancée de fissure. Ce domaine est en outre caractérisé par une forte influence de la

- microstructure, du rapport de charge et de l'environnement. Dans le domaine **II**, la courbe présente généralement une partie linéaire sur un assez large intervalle. Cette linéarité traduit une dépendance en loi puissance de la vitesse de propagation par rapport à l'amplitude de facteur d'intensité de contrainte ΔK.
- Le domaine **III** correspond à une accélération de la propagation juste avant la rupture brutale. Celle-ci intervient lorsque la valeur maximale du facteur d'intensité de contrainte au cours du cycle K_{max} devient égale à une valeur critique caractéristique du matériau notée K_c(ténacité). En pratique, ce dernier domaine ne revêt que peu d'importance dans la mesure où il ne concerne qu'une très faible partie de la durée de vie en propagation et que le dimensionnement a précisément pour objet d'éviter de faire opérer la structure dans ce domaine.

V.1.1.2. Vitesse de fissuration

Des études de fatigue ont montré que la durée de vie d'une pièce est liée à la vitesse de fissuration Durant le stade II, une fissure de très faible taille peut se propager et atteindre une taille critique Courbe de la longueur de la fissure (a) en fonction du nombre de cycle N s_1 et s_2 contraintes appliquées da/dN vitesse de fissuration

a_0 : longueur de fissure initiale

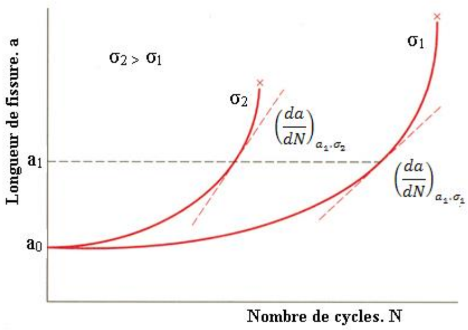


Figure V.3: Variation de la longueur de la fissuration en fonction dunombre de cycle

2 résultats importants :

- ❑ Au début la vitesse est faible, puis elle augmente avec la longueur de la fissure
- ❑ Elle s'accroît avec l'amplitude de la contrainte appliquée pour une longueur de fissure donnée

La vitesse de fissuration en fatigue lors du **stade II** varie en fonction de :

- l'amplitude de la contrainte appliquée
- la taille de la fissure
- les variables propres au matériau

La vitesse de fissuration en fatigue s'écrit sous la forme $\frac{da}{dN} = A(\Delta K)^m$

avec A et m constantes propres au matériau qui dépendent de l'environnement, de la fréquence et du rapport des contraintes (R), (m compris entre 2 et 10)

DK variation du facteur d'intensité de contrainte à l'extrémité de la fissure

$$\Delta K = \Delta K_{maw} - \Delta K_{min}$$

$$\Delta K = Y\Delta\sigma\sqrt{\pi a} = Y(\sigma_{max} - \sigma_{min})\sqrt{\pi a}$$

Régime II : **courbe quasi-linéaire**

$$log\left(\frac{da}{dN}\right) = log[A(\Delta K)^m] \implies log\left(\frac{da}{dN}\right) = mlog\Delta K + logA$$

Segment linéaire dont la pente et le point d'interception sont respectivement m et log A ⇨ déterminés à partir de données expérimentales.

V.1.1.3. Durée de vie en fatigue : *calcul de N_r*

$$dN = \frac{da}{A(\Delta K)^m}$$

$$\implies N_r = \int_0^{N_r} dN = \int_{a_0}^{a_C} \frac{da}{A(\Delta K)^m}$$

$$N_r = \int_0^{N_r} dN = \int_{a_0}^{a_C} \frac{da}{A(Y\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^m}$$

$$N_r = \frac{1}{A\pi^{m/2}(\Delta\sigma)^m} \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{Y^m a^{m/2}}$$

$$N_r = -\frac{1}{A.Y^m\sigma^m\pi^{m/2}} \times \frac{1}{m/2-1}\left[\frac{1}{a^{m/2-1}}\right]_{a_0}^{a_C}$$

$$N_r = \frac{1}{A.Y^m\sigma^m\pi^{m/2}} \times \frac{1}{m/2-1} \times \left(\frac{1}{a_0^{m/2-1}} - \frac{1}{a_C^{m/2-1}}\right)$$

La loi proposée par Paris ne décrit pas la totalité de la courbe; cependant, d'autres lois empiriques ou analytiques ont été proposées pour décrire l'ensemble de la courbe de propagation.

Forman, pour tenir compte de l'augmentation asymptotique de la vitesse de fissuration lorsque K_{max} K_{IC} , proposa une amélioration de la relation de Paris pour décrire les domaines II et III de la courbe de propagation :

$$\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dN}} = \frac{\mathrm{A}(\Delta \mathrm{K})^{\mathrm{m}}}{(1-\mathrm{R})(\mathrm{K_{IC}} - \mathrm{K_{max}})}$$

Où A est une constante dépendant du matériau, pour les aciers *m* est de l'ordre de 10. Cette relation ne tient pas compte de l'existence d'un seuil de fissuration mais fait intervenir l'influence du rapport de charge *R* sur la vitesse de fissuration.

Pour rendre compte de l'effet de seuil dans la région I, des auteurs proposèrent quant à eux une modification de la relation sous la forme

$$\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dN}} = \mathrm{A}(\Delta K_m - \Delta K_{seuil}^m)$$

Frost a alors proposé une relation qui rend compte de l'ensemble de la courbe de propagation, établie pour des aciers ferrito-perlitiques

$$\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{dN}} = \mathrm{B}\left[\frac{(\Delta K_m - \Delta K_{seuil}^m)^4}{R_m^2(K_{IC}^2 - K_{max}^2)}\right]^n$$

K_{IC} désignant la valeur critique du facteur d'intensité de contraintes, $\boldsymbol{K_{seuil}}$ est la valeur de ΔK au seuil de propagation pour un rapport de charge *R* donné, R_m est la résistance à la traction du matériau, ***B*** et ***n*** sont des constantes caractéristiques du matériau.

VI. Effet d’entaille

VI.1. Introduction

D'une manière générale, on appelle <<entaille> une discontinuité imposée ou accidentelle de la forme de la pièce ou une non-homogénéité du matériau qui la constitue. Les entailles peuvent être de trois types:

- métallurgiques,
- mécaniques (conception),
- de service (se formant durant l'utilisation). Ces discontinuités (qui peuvent effet un trou, un clavetage,...) conduisent à la modification du champ de contrainte (Figure 1). C'est à dire à ra création de zones dans les quelles les contraintes sont nettement supérieures à la contrainte nominale ou à la contrainte globale résultante des efforts appliqués. On appelle cette localisation élevée de la contrainte "concentration de contrainte"‘ ces concentrations de contrainte associées aux discontinuités géométriques réduisent les résistances statiques et cyclique des structures

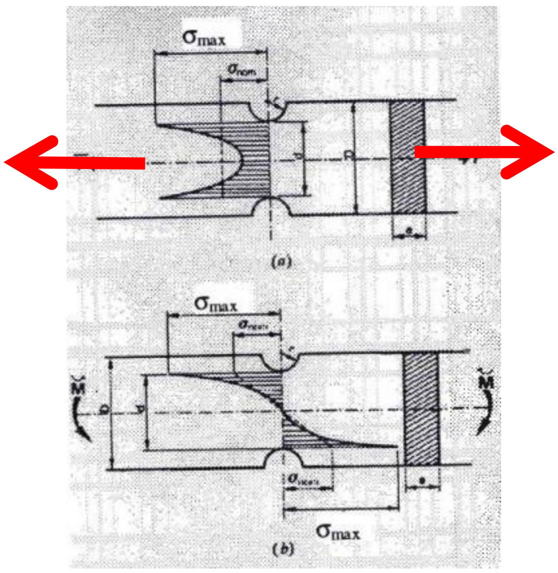
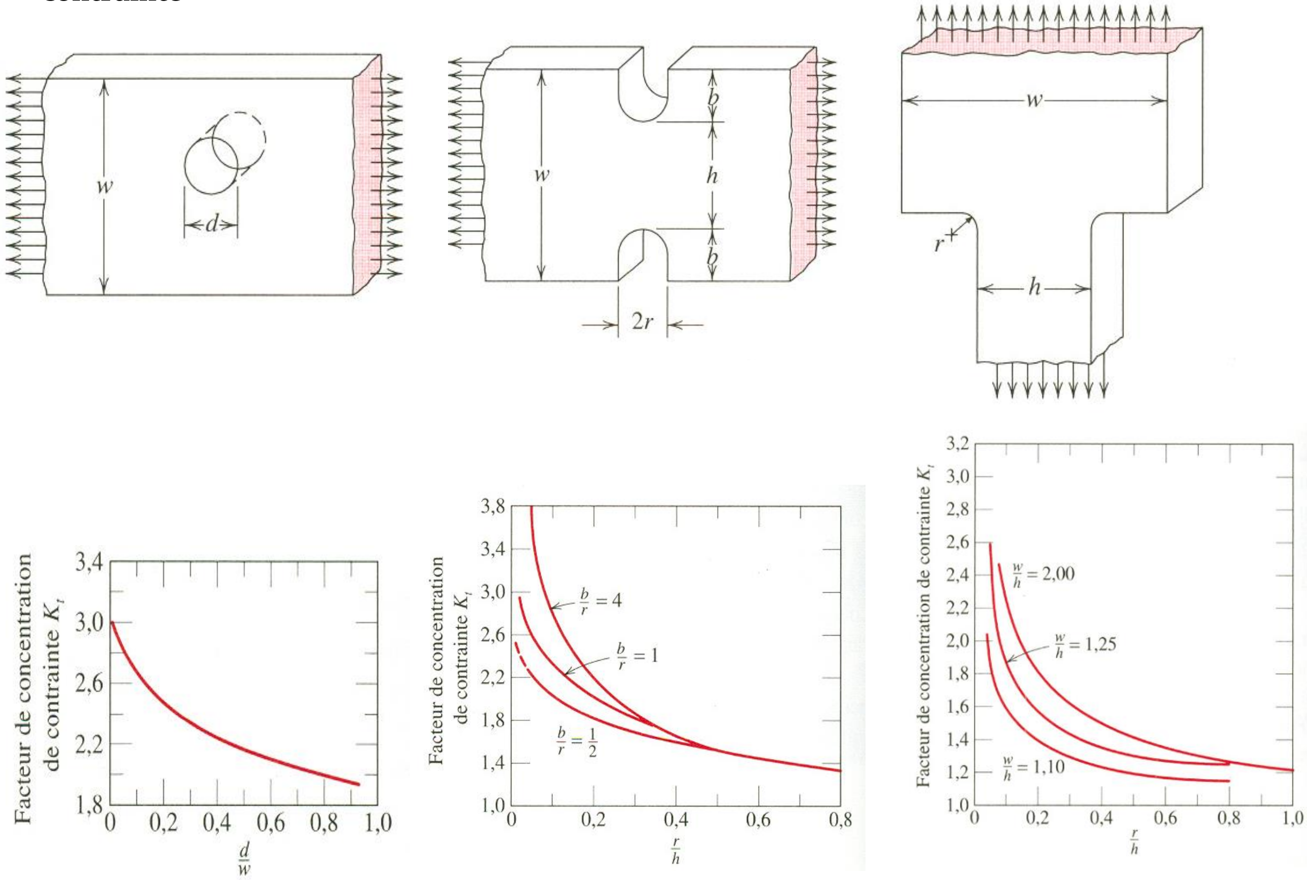


Figure VI.1: a) Éprouvette soumise à un effort de traction
b) Éprouvette soumise à un moment de flexion

VI.2. Formes géométriques entaillées et facteur de concentration de contrainte



VI.3. Facteur de concentration de contrainte

Dans le domaine élastique, Peterson définit le facteur de concentration de contrainte de deux manières différentes:

- La première est le rapport de la contrainte maximale à fond d'entaille et la contrainte nominale:

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad \text{Pour la contrainte normale (traction et flexion)}$$

$$K_{ts} = \frac{\tau_{max}}{\tau_{nom}} \quad \text{Pour le cisaillement et torsion}$$

σ_{max} et τ_{max} sont les contraintes maximales en fond d'entaille calculées par éléments finis ou évoluées par photoélasticimétrie.

σ_{nom} et τ_{nom} sont les contraintes nominales en fond d'entaille 'calculées à l’aide des formules de résistance des matériaux.

Seconde est le rapport de la contrainte maximale à fond d'entaille et la contrainte globale (contrainte loin de la zone perturbée).

$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_s}$ Pour la contrainte normale (traction et flexion)

$K_{ts} = \frac{\tau_{max}}{\tau_s}$ Pour le cisaillement et torsion.

$\boldsymbol{\sigma_{max}}$ et $\boldsymbol{\tau_{max}}$ sont les contraintes maximales en fond d'entail

$\boldsymbol{\sigma_g}$ et $\boldsymbol{\tau_g}$ sont les contrainte globales en fond d'entaille 'calculées à l'aide des formules de résistance des matériaux.

On constate que ce facteur dépend de la géométrie locale de la pièce et du type de sollicitation. Une autre définition du facteur de concentration de contrainte apparait dans le domaine élasto-plastique. Ce facteur est défini de deux façons:

- **La première** est le rapport de la contrainte **locale** et la contrainte **nominale** à fond d'entaille:

  $K_\sigma = \frac{\sigma_l}{\sigma_{nom}}$ Pour la contrainte normale (traction et flexion)

  $K_{\sigma s} = \frac{\tau_l}{\tau_{nom}}$ Pour le cisaillement (torsion)

  $\boldsymbol{\sigma_l}$ et $\boldsymbol{\tau_l}$ sont les contraintes locales

  $\boldsymbol{\sigma_{nom}}$ et $\boldsymbol{\tau_{nom}}$ sont les contrainte nominales en fond d'entaille 'calculées à l'aide des formules de résistance des matériaux.

- **La seconde** est le rapport de la contrainte **locale** à fond d'entaille et la contrainte **globale** (contrainte loin de la zone perturbée).

  $K_\sigma = \frac{\sigma_l}{\sigma_s}$ Pour la contrainte normale (traction et flexion)

  $K_{\sigma s} = \frac{\tau_l}{\tau_s}$ Pour le cisaillement (torsion)

  $\boldsymbol{\sigma_g}$ et $\boldsymbol{\tau_g}$ sont les contrainte globales en fond d'entaille 'calculées à l'aide des formules de résistance des matériaux.

On constate que ce facteur ne dépend pas seulement de la géométrie locale de la pièce et du type de sollicitation, mais de la nature du matériau et de la charge.

VI.4. Facteur de concentration de contrainte en fatigue (k_f)

Selon Peterson, le facteur de concentration de contrainte en fatigue K_f représente le rapport entre la limite d'endurance d'une éprouvette lisse et la limite d'endurance d'une éprouvette entaillée.

$K_f = \frac{\sigma_{D.L}}{\sigma_{D,ent}}$ Pour la contrainte normale (traction et flexion)

$K_{fs} = \frac{\tau_{D.L}}{\tau_{D,ent}}$ Pour le cisaillement (torsion)

$\sigma_{D.L}$ et $\tau_{D.L}$ ont les limites d'endurance d'éprouvette lisse

$\sigma_{D.ent}$ et $\tau_{D.ent}$ ont les limites d'endurance d'éprouvette entaillée

D'autres définitions présentent ce facteur comme le rapport de l'amplitude de contrainte d'une éprouvette lisse et l'amplitude de contrainte d'une éprouvette entaillée.

$K_{f(N_r)} = \frac{\sigma_L}{\sigma_n}$ Pour la contrainte normale (traction et flexion)

$K_{fs(N_r)} = \frac{\tau_L}{\tau_n}$ Pour le cisaillement (torsion)

σ_L et τ_L ont les limites d'endurance d'éprouvette lisse

σ_n et τ_n ont les limites d'endurance d'éprouvette entaillée

Ce facteur est donc un coefficient expérimental, calculé à partir d'essais de fatigue. Il rend une valeur comprise entre 1 et K_t.

$$\mathbf{1 \leq k_f < K_t}$$

VI.5. Facteur de sensibilité à t'entaille en fatigue (q)

Dans le cas de la rupture par fatigue, on notera que pour un matériau donné, la limite d'endurance diminue quand le facteur de concentration de contrainte $\mathbf{K_t}$ augmente. Cette diminution est d'autant plus forte que le matériau possède des caractéristiques mécaniques élevées. D'autre part, pour les fortes valeurs de $\mathbf{K_t}$ on observe que la limite d'endurance est sensible aux variations de la résistance statique de l'acier. Ces observation sont amené Peterson à définir un coefficient de sensibilité à l'entaille **q**, qui s'exprime par:

$q = \frac{K_f-1}{K_t-1}$ Pour la contrainte normale (traction et flexion)

$q = \frac{K_{fs}-1}{K_{ts}-1}$ Pour le cisaillement (torsion)

$\mathbf{k_f = 1+q(K_t-1)}$

VI.6. Relation du nombre de cycle(N) avec la fraction de la résistance à la fatigue (f)

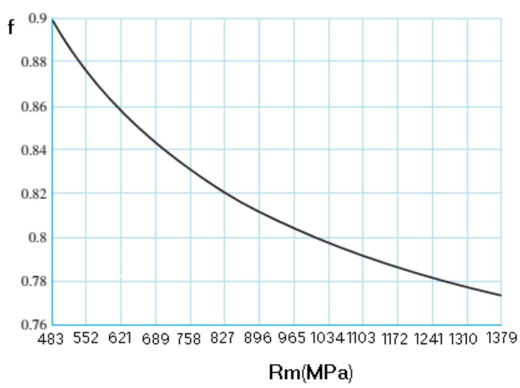


Figure VI.2 : fraction de résistance à la fatigue en fonction de la résistance maximale

f: Fraction de la résistance à la fatigue

Si Rm < 483 MPa, **f**=0.9

$$\sigma_f = aN^b$$

a et **b** constantes;

$$a = \frac{(fR_m)^2}{\sigma_D}$$

$$b = -\frac{1}{3} log\left(\frac{fR_m}{\sigma_D}\right)$$

$$\boxed{N = \left(\frac{\sigma_{rev}}{a}\right)^{1/b}}$$

K_f et K_{fs} sont les facteurs de concentration de contrainte en fatigue.

K_t et K_{ts} sont les facteurs de concentration de contrainte élastique

La connaissance du paramètre **q**, fonction des caractéristiques mécaniques du matériau et en particulier de sa charge à la rupture, permet d'estimer le facteur de concentration de contrainte en fatigue $\mathbf{K_f}$ de ce matériau entaillé ($\mathbf{K_t}$ connu) et conduit à la connaissance de la limite d'endurances sous entaille sans avoir à réaliser d'essais

VI.7. Détermination des durées de vie des pièce entaillés en fatigue

La variation du facteur de sensibilité à l'entaille en fatigue **q**, fonction du rayon en fond d'entaille **ρ** (Figure 2),est donnée par une relation empirique

$$q = \frac{1}{1 + \frac{a_p}{\rho}}$$

ρ est le rayon de l'entaille en mm.

$\mathbf{a_p}$ est une constante qui évolue en fonction du Rm (résistance ultime),et est donnée par la relation: $a_p = \left(\frac{270}{R_m}\right)^{1.8}$, Où a_p est en mm et Rm en MPa.

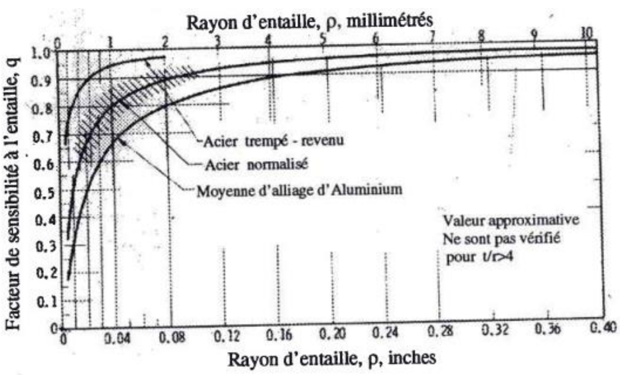


Figure VI.3 : Variation du facteur de sensibilité à l'entaille en fatigue **q** en fonction du rayon en fond d'entaille **ρ** selon Peterson

VI.7.1. Cas du comportement élasto-plastique

Si les contraintes locales amènent la région où a lieu l'amorçage en plasticité, le phénomène de l'amorçage est simulé par le comportement d'une éprouvette lisse dans la fatigue oligo-cyclique, c'est à dire dans le domaine des courtes durées de vie. On a alors deux façons de procéder pour connaitre l'amplitude des contraintes locales dans la zone d'amorçage :

· soit par un calcul éléments finis élasto-plastique (calcul long, couteux et surtout qui nécessite la connaissance de la loi de comportement local) · soit par des méthodes de calcul élasto-plastique simplifié, tells que celles qui utilisent la règle de **Neuber** et l'équation d'écrouissage cyclique du matériau étudié obtenue à partir d'essais uniaxiaux sur éprouvettes lisses, dont nous présentons ici la méthodologie.

VI.7.2. Fatigue contrôlée par déformation élastique

Nous avons la relation de l'amplitude de contrainte en fonction du nombre de cycle de rupture:

$$\sigma_a = \sigma'_f (2N_R)^b$$

Tel que : σ_a= amplitude de la contrainte

σ'_f : Coefficient de la résistance à la fatigue

b: Constante de **Basquin** sa valeur est de 0.12- 0.2

$$\varepsilon_{ael} = \frac{\Delta\epsilon_{el}}{2} = \frac{\sigma_a}{E} = \left(\frac{\sigma'_f}{E}\right).(2N_f)^b$$

VI.7.3. Fatigue contrôlée par déformation plastique

$$\epsilon_a^{pl} = \frac{\Delta\epsilon_{pl}}{2} = \epsilon'_f.(2N_f)^c$$

Tel que: **c** constante **Manson-Coffin** = 0.5- 0.6

ε'_f : Coefficient de ductilité en fatigue.

Le coefficient ε'_f dépend du comportement en dureté du matériau

D'après Neuber, il associé l'effet de la déformation élastique et la déformation plastique sur la fatigue des matériaux (Figure 60).

Déformation élevée, cela veut dire une forte contrainte, cela entraine une déformation plastique (HCF).

Déformation diminue , cela veut dire une faible contrainte cela entraine une déformation plastique (LCF).

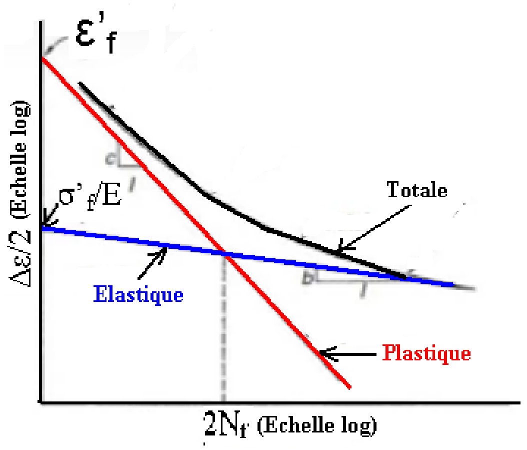


Figure VI.4 : Déformation en fonction du nombre de cycle

VI.8. Méthodologie de la règle de Neuber

En Prenant le cas d'un sotde entaillé, sollicité en cisaillement pur, Neuber a démontré que :

$k_t^2 = k_\sigma \cdot k_e$

Où

k_t est le facteur de concentration de contrainte dans le domaine élastique

kσ et ke sont les facteursde concentrationdansle domaineélasto-plastique définis par les relations: $k_\sigma = \frac{\sigma}{\sigma_{nom}}$, $k_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{nom}}$

σ et ε sont respectivement l'amplitude de la contrainte et de la déformation locale.

σ_n et ε_n l'amplitude de la contrainte et de la déformation nominale. D'une part, l'application de la règle de **Neuber** se fait à l'aide de l'équation suivante :

$\Delta\sigma\Delta\epsilon = K_f^2 \Delta\sigma_n . \Delta\epsilon_n$

Si le chargement nominal est élastique, on a : $\Delta\epsilon_{norm} = \frac{\Delta\sigma}{E}$

Où, E: est le module d'élasticité du matériau, $\Delta\sigma_{norm}$ et $\Delta\varepsilon_{norm}$ sont respectivement les variations des contraintes et des déformations.

On peut donc écrire que :

$$\Delta\sigma\Delta\epsilon = K_f^2 \frac{\Delta\sigma_{norm}^2}{E}$$

D'autre part, la courbe d'écrouissage cyclique, qui est issue d'essais sur éprouvettes comme le décrit la fig. 4, s'écrit sous la forme :

$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon^e}{2} + \frac{\Delta\epsilon^p}{2} \iff \frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\sigma}{2E} + \left(\frac{\Delta\sigma}{2K}\right)^{1/n}$, Où $\frac{\Delta\sigma}{2}$: amplitude de la contrainte

$\frac{\Delta\epsilon}{2}$: : amplitude de la déformation totale

$\frac{\Delta\epsilon^e}{2}$ et $\frac{\Delta\epsilon^p}{2}$: respectivement parties élastique et plastique de l'amplitude de déformation totale

E : module d'Young

n': coefficient d'écrouissage cyclique

K': coefficient de résistance à la déformation cyclique

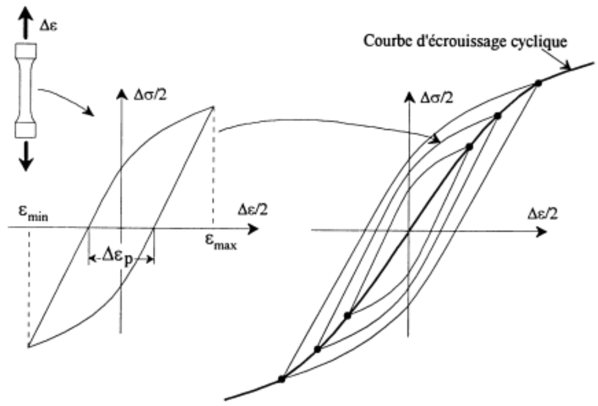


Figure. VI.5: Construction de la courbe d'écrouissage cyclique

La combinaison des deux équations précédentes donne l'état de contrainte locale *($\Delta\varepsilon$, $\Delta\sigma$)* . Enfin, la connaissance de l'équation de Manson-Coffin (ci-dessous) et de $\Delta\varepsilon$ permet de trouver le nombre de cycles à l'amorçage Na (figure 62)

$$\frac{\Delta\epsilon}{2} = \frac{\Delta\epsilon^e}{2} + \frac{\Delta\epsilon^p}{2}$$

$$\boxed{\varepsilon_{ael} + \varepsilon_a^{pl} = \left(\frac{\sigma'_f}{E}\right).(2N_f)^b + \epsilon'_f.(2N_f)^c}$$

Où

σ'_f : coefficient de résistance à la fatigue

$\acute{\varepsilon}_f$: coefficient de ductilité en fatigue

N_f : nombre de cycles à rupture

E , b, c : respectivement module d'Young, exposant de Basquin et exposant de ductilité en fatigue

T

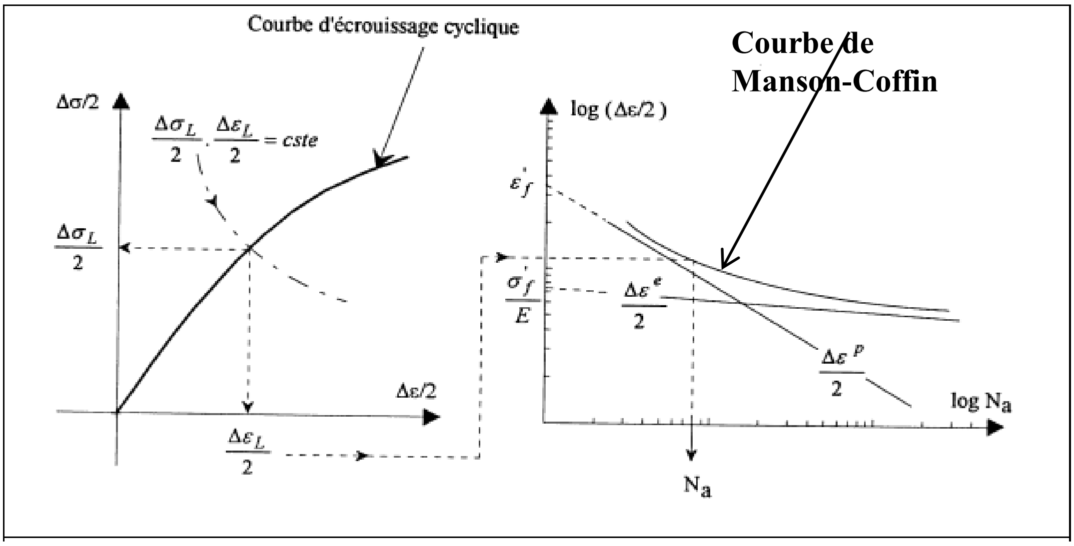


Figure VI.6: Procédure de calcul de Na avec l’approche de **Neuber**

Auteur	Expression	Paramètre
Peterson [3]	$K_f = 1+\dfrac{K_t-1}{1+\left(\dfrac{a_p}{\rho}\right)}$	a_p : constante du matériau
Heywood [11]	$K_f = \dfrac{K_t}{1+2\sqrt{\dfrac{C_H}{\rho}}}$	C_H = f (résistance ultime de matériau R_m, géométrie)
Siebel et Stieler [12]	$K_f = \dfrac{K_t}{1+\sqrt{1+Cs.\chi}}$	C_s = f (R_e, constante du matériau)
Neuber [13]	$K_f = 1+\dfrac{K_t-1}{1+\sqrt{\dfrac{a_N}{\rho}}}$	a_N = f (R_m)
Khun et Hardraht [14]	$K_f = 1+\dfrac{K_t-1}{1+\dfrac{\pi}{\pi-\omega}\sqrt{\dfrac{C_{KH}}{\rho}}}$	C_{KH} = f (R_m) ω : angle d’ouverture d’entaille

L'équation de Neuber, est donnée par la relation suivante :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a/r}}$$

L'équation de sensibilité à l'entaille est donné par :

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{r}}}$$

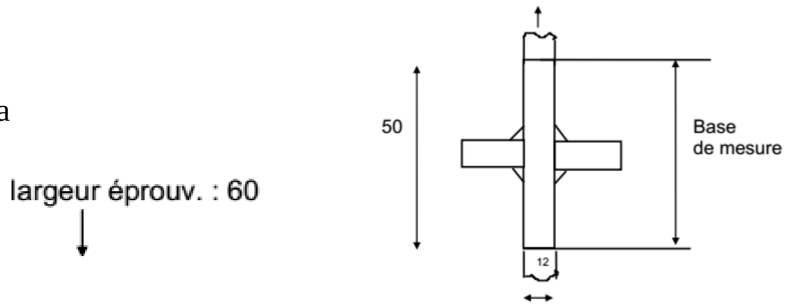
Exemple d'application 1

Des essais de fatigue oligocyclique ont été réalisés sur des joints soudés en croix réalisés en acier E 36 dont les caractéristiques sont les suivantes :

E=195000

Re=420 MPa

Rm=570 MPa



Les essais ont été réalisés sous amplitude de déformation imposée. Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous. L'essai a été arrêté lorsqu'une chute de charge de 50 % a été décelée.

1°/ Déterminer les courbes de Manson Coffin

2°/ Tracer la courbe d'écrouissage cyclique.

$\frac{\Delta\varepsilon_t}{2}$ %	$\frac{\Delta\varepsilon_e}{2}$ %	$\frac{\Delta\varepsilon_p}{2}$ %	$\frac{\Delta\sigma}{2}$ MPa	N
0,151	0,116	0,035	225	46520
0,216	0,131	0,085	255	17000
0,245	0,137	0,108	267	13150
0,246	0,140	0,106	273	9316
0,255	0,140	0,115	272	7911
0,260	0,140	0,120	273	10570
0,402	0,147	0,255	285	4460
0,570	0,180	0,390	349	1379
0,565	0,186	0,379	362	1315
0,570	0,179	0,391	349	1789
0,586	0,172	0,414	335	1751
0,628	0,185	0,443	360	820
0,739	0,190	0,549	370	563
0,861	0,216	0,645	420	388
0,995	0,203	0,792	394	452
1,001	0,208	0,793	404	503
1,016	0,203	0,813	394	592
1,013	0,207	0,806	403	465
1,601	0,220	1,381	428	99
1,626	0,229	1,397	446	110
1,627	0,233	1,394	454	165
1,641	0,226	1,415	439	108

Neuber a proposé un eautre relation pour calculer le coefficient de sensibilité à I'entaille :

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{a_n}{\rho}}}$$

Où an est un paramètre caractéristique, donné sur la Figure VI.6

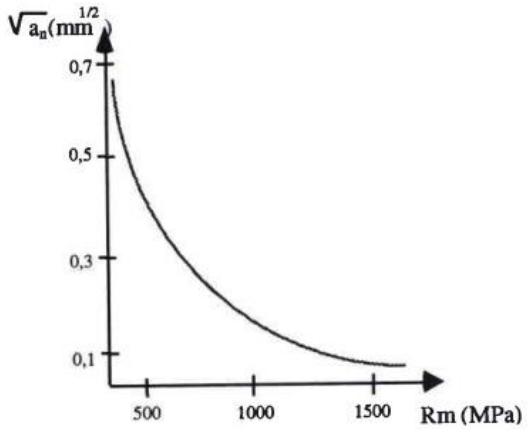


Figure VI.7: Variation de la grandeur caractéristique $\sqrt{a_n}$ dans la formule de Neuber.

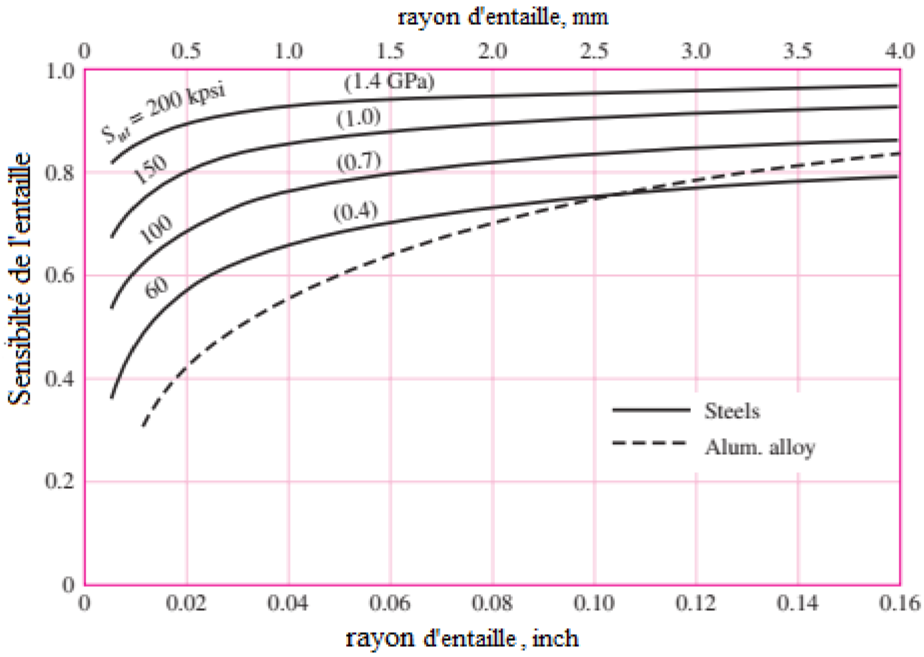


Figure VI.8: sensibilité à l'entaille pour aciers et alliages d'aluminium corroyés soumis à une flexion inversée ou charges axiales inversées.

Flexion ou axial : $\sqrt{a} = 0.246 - 3.08(10^{-3})\sigma_{max} + 1.5(10^{-5})\sigma_{max}^2 - 2.67(10^{-8})\sigma_{max}^3$

Torsion : $\sqrt{a} = 0.190 - 2.51(10^{-3})\sigma_{max} + 1.35(10^{-5})\sigma_{max}^2 - 2.67(10^{-8})\sigma_{max}^3$

Exemple d'application 2

Un arbre en acier en flexion a une résistance maximale de 690 MPa et un épaulement avec un rayon de congé de 3 mm reliant un diamètre de 32 mm à un diamètre de 38 mm.

Estimez K_f en utilisant :

(a) La figure VI.8.

(b) Les équations de Neuber.

Solution :

A partir de l'abaque, en utilisant D/d = 38/32 = 1.1875, r/d = 3/32 = 0.093 75, nous lisons le graphique pour trouver K_t =. 1.65.

D'après l'équation de Neuber σ_m = 690 MPa , $\sqrt{a}$ = 0,313$\sqrt{mm}$, avec

r = 3 mm, en substituant ce résultat dans l'équation de Neuber, on obtient :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{a/r}} = 1 + \frac{1.65 - 1}{1 + \frac{0.313}{\sqrt{3}}} = 1.55$$

VI.9. Kuhn et Hardraht

pour tenir compte de I'effet de I'angle d'entaille **w**, Kuhn et Hardraht proposent l'équation suivante :

$$q = \frac{1}{1 + \frac{\pi}{\pi - w}\sqrt{\frac{a_{nk}}{\rho}}}$$

p est le rayon d'entaille, et a_{nk} est une constante qui dépend de la résistance ultime. Elle prend des valeurs comprises entre 0,025 et 0,51mm, w est I'angle d'ouverture de I'entaille.

VI.10 Switech et Bush

Switech et Bush ont proposé une relation à deux paramètres pour calculer le facteur de concentration de contrainte:

$$\frac{K_f}{K_t} = f(\rho, A, h)$$

Où: ρ estle rayon en fond d'entaille.

A et h sont des constantes qui dépendent du matériau et du type d'éprouvette. Ils ont supposé que la rupture par fatigue se produit si la contrainte σ_k, sur la couche critique d eprofondeur h du fond d'entaille,est égale ou supérieure à une valeur critique σ_c.

$\sigma_k = \sigma_c = A\ \sigma_{D.L}$

Où $\sigma_{D.L}$ est la limite d'endurance d'une éprouvette lisse.

En supposant que A et h sont des constantes, le gradient de |a contraintes écrit:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{(\sigma_{max} - \sigma_k)}{h}$$

Mais on peut écrire :

$$\frac{d\sigma}{dx} = B\,\frac{\sigma_{max}}{\rho}$$

Où B est un facteur de proportionnalité déterminé à partir de Ia solution élastique de la distribution des contraintes, Dans ce cas:

$$\frac{(\sigma_{max} - \sigma_k)}{h} = B\,\frac{\sigma_{max}}{\rho}$$

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_k}{\left(1 - B\,\frac{h}{\rho}\right)} = \frac{A\sigma_{D.L}}{\left(1 - B\,\frac{h}{\rho}\right)}$$

En considérant que la contrainte nominale σ_{nom} est égale à la limite d'endurance de l'éprouvette entaillée $\sigma_{D.n}$,peut écrire:

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = \frac{A\sigma_{D.L}}{\sigma_{D.n}\left(1 - B\,\frac{h}{\rho}\right)}$$

Et quand:

$k_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$ et $k_f = \frac{\sigma_{D.L}}{\sigma_{D.n}}$

On obtient:

$k_f = \frac{k_t}{A}\left(1 - B\,\frac{h}{\rho}\right)$

Où A, h et B sont des constants qui dépendent du matériau et du type de l'éprouvette

VI.11. Approche basée sur la mécanique linéaire de la rupture

Topper et El Haddad calculent le facteur de concentration de contrainte en fatigue par la relation suivante :

$$k_f = \frac{1}{F_\sigma}\left(1 + \sqrt{\frac{a_0}{I_0}}\right)$$

Où : a_o est la profondeur de l'entaille

F_o est un facteur géométrique

I_o est une constante qui dépend du matériau

Ils ont défini le facteur de sensibilité à l'entaille par les relations suivantes:

$q = \frac{1}{F_\sigma}\sqrt{\frac{\rho}{4.I_0}}$ pour $\rho \leq 4.I_0$

q=1 pour $\rho > 4. I_0$

VI.12. Gradient de contrainte (Brand)

Selon Brand, I'effet d'échelle est pris en compte correctement en utilisant le gradient de contrainte χ:

$$\chi = \lim_{\chi \to 0} \frac{1}{\hat{o}} \frac{d\sigma}{d\chi}$$

où : ô est la contrainte maximale réelle enfond d'entaille.

X : est le gradient de contrainte, s'exprime en mm^{-1}

Deux éprouvettes entaillée sont la même section nette en fond entaille et sont soumises au même moment de flexion. L'une présente une entaille à faible k_t, et l'autre une entaille à fort k_t (Figure VI.8).on constateque les pentes de la tangente,au champ de contrainte en fond d'entaille,sont différentes.

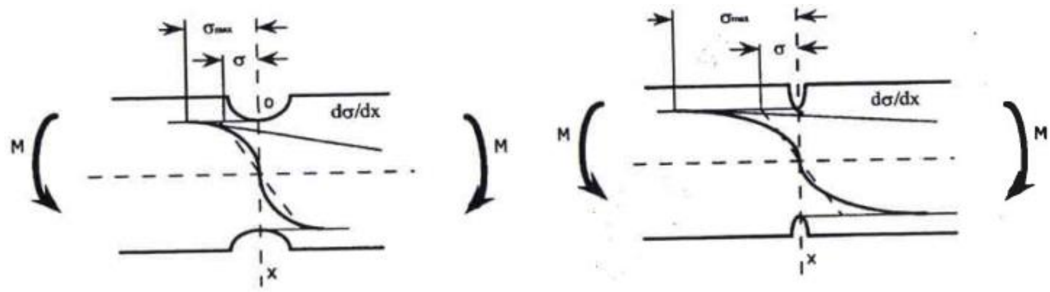


Figure VI.8: Evolution du champ de contrainte et de la tangente

Les valeurs de gradients de contrainte peuvent être calculées, dans certain cas,à l'aide du tableau VI.1:.

Après avoir analysé un grand nombre de données de fatigue obtenues sur des éprouvettes lisses et entaillées, Brand propose la relation suivante,pour déterminer la limite d'endurance.

$$\hat{o}_D = k_t . \sigma_D = a . \log \mathrm{X} + b$$

ô, estla limite d'endurance réelle.

σ_D est la limite d'endurance nominale pour une probabilité de 90 %

a et b sont des constantes du matériau données dans le tableau V.I.2.

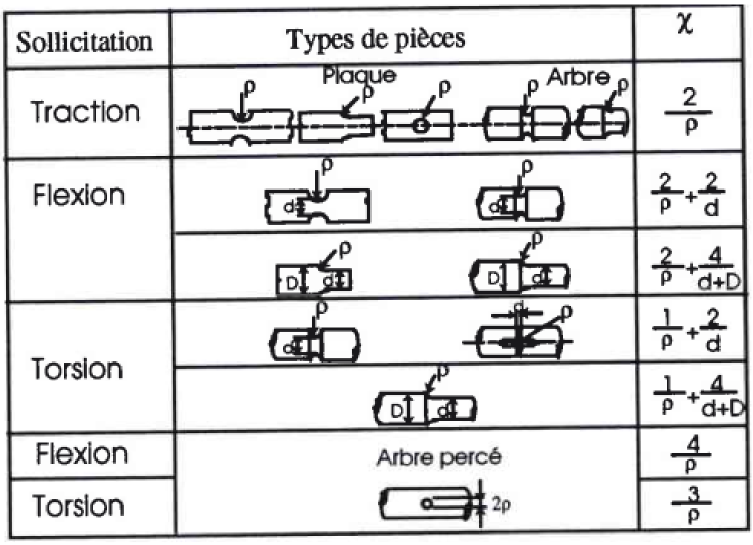
pour le tracé prévisionnel d'une courbede Wôhler en présence d'entaille,Brand a proposé la relation suivante:

$$\hat{o}_{DN} = c_2 + b_2 . \log N + a_2 . \log \mathrm{X}$$

$\hat{o}_{DNr}$, est la limite d'endurance réelle à N nombre de cycles.

a_2, b_2 et c_2 sontfonctions de la résistance maximales Rm (Figure VI.9)

Tableau VI.1: Formules permettant le calcul du gradient **X**



Sollicitation	Types de pièces	χ
Traction	Plaque Arbre	$\frac{2}{\rho}$
Flexion		$\frac{2}{\rho}+\frac{2}{d}$
		$\frac{2}{\rho}+\frac{4}{d+D}$
Torsion		$\frac{1}{\rho}+\frac{2}{d}$
		$\frac{1}{\rho}+\frac{4}{d+D}$
Flexion	Arbre percé	$\frac{4}{\rho}$
Torsion		$\frac{3}{\rho}$

Tableau VI. 2: Valeurs des coefTicients a et b dans la relation de Brand σ_D=f(**X**).

Classe acier (Rm en MPa)	**A**	**b**
Rm > 1400	100/3	655
1200≤ Rm <1400	110/3	585
1000≤ Rm <1200	120/3	520
900≤ Rm <1000	130/3	465
800≤ Rm <900	130/3	430
700≤ Rm <800	135/3	390
600≤ Rm <700	135/3	335
500≤ Rm <600	140/3	295
400≤ Rm <500	140/3	245
Rm <400	140/3	195
350≤ Rm <500	140/3	180
Rm <350	140/3	135

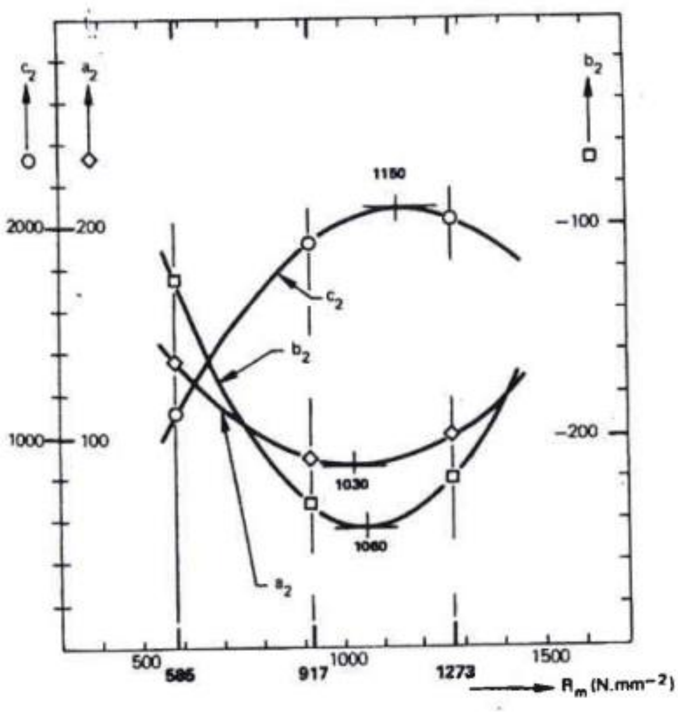


Figure VI.9 : Variation des coeffcients a_2, b_2 et c_2 en fonction de Rm

VI.13. Stieleret siebel

Stieleret Siebel ont calculéle le facteur de concentration de contrainte en fatigue k_f en fonction du gradient de contrainte **X :**

$$k_f = \frac{k_t}{1+\sqrt{1+S_g X}}$$

Où Sg est une constante du maté riau, calculée en fonction de la limite d'élasticité

$$S_{g=f(R_e)}$$

X est le gradient de contrainte en fond d'entaille Re est la limite d'élasticité

VI.14. ApprochedeYe Du-ytetrWang

Ye Du-yi et rWang ont proposé de calculer le facteur de concentration de contrainte en fatigue k_f,en fonction du matériau, du facteur de concentration de contrainte k_t
et de la déformation plastique en sebasant sur la règle de Neuber

$$k_f = \frac{k_t}{\sqrt{1+\frac{1-n'}{1+n'}\frac{1}{1+\frac{\Delta\epsilon_e}{\Delta\epsilon_p}}}}$$

Où : n' est le coefficient d'écrouissage cyclique.

$\Delta\varepsilon_e$: I'amplitudedela déformationélastique.

$\Delta\varepsilon_p$: l'amplitudedela déformationplastique

En remplaçant $\Delta\varepsilon_e$ et $\Delta\varepsilon_p$ par leurs valeurs estimées des équations de Manson- Coffin on peut écrire:

$$k_f = \frac{k_t}{\sqrt{1 + \frac{1-n'}{1+n'}\left[1 + \frac{\sigma_f'}{E\varepsilon_f'}(2Nr)^{b-c}\right]^{-1}}}$$

On utilise quelques approximations pour relier les exposant b et c avec le coefficient d'écrouissage cyclique n' :

$b = \frac{-n'}{(1+5n')}$; $c = \frac{-1}{(1+5n')}$

De la mêmemanière,on relie le coefficient de la contrainte en σ_f' et le coefficient de la ductilité en fatigue ε_f'|, aux caractéristiques de la traction monotone:

$\sigma_f' = \sigma_f$; $\varepsilon_f' = \varepsilon_f$

En intégrant les équations precedentes on obtient:

$$k_f = \frac{k_t}{\sqrt{1 + \frac{1-n'}{1+n'}\left[1 + \frac{\sigma_f}{E\varepsilon_f}(2Nr)^{\frac{1+n'}{1+5n'}}\right]^{-1}}}$$

Le facteur de concentration de contrainte en fatigue k_f peut être calculée en fonction du Nombre de cycles à la rupture Nr, en utilisant les relations precedente qui sont basées sur la connaissance des caractéristiques du matériau et de la géométrie de I'entaille.

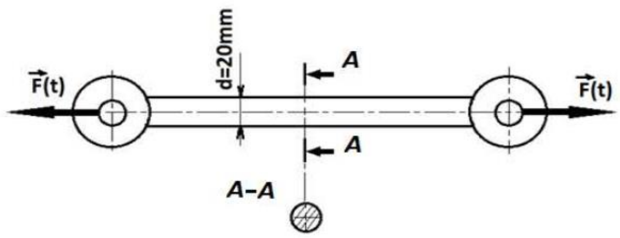
Exercice 1

La figure ci-dessous représente une biellette qui est soumise à une sollicitation cyclique (traction). L'effort variable à pour valeurs extrêmes :

F_{max} = 157000 N

F_{min} = 10000 N

1) De quelle sollicitation s'agit-il ?
2) Calculer σ_{max}, σ_{min}, σ_m, σ_a, R_σ



Solution exercice 1

1) Type de sollicitation cyclique : ondulé de traction
2)

$$\sigma_{max} = \frac{4F_{max}}{\pi d^2}$$
$$\sigma_{max} = 500\ MPa$$
$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 234.07\ MPa$$

$$\sigma_{min} = \frac{4F_{min}}{\pi d^2} = 31.84\ MPa$$
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 265.12\ MPa$$
$$R_\sigma = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0.064$$

Exercice 2

Un axe est soumis à un cisaillement, les données sont :

τ_m = 85 MPa ; R = -0 .85

1) Déterminer le type de sollicitation
2) Calculer τ_{max}, τ_{min} et τ_a

Solution exercice 2

1) Type de sollicitation cyclique est alternée
2) $\tau_m = \frac{\tau_{max}+\tau_{min}}{2}$ $\qquad 2\tau_m = \tau_{max} + \tau_{min}$ (1)

$R_\tau = \frac{\tau_{min}}{\tau_{max}}$ $\qquad \tau_{min} = R_\tau . \tau_{max} = -0.85 . \tau_{max}$ (2)

De (1) et (2) on trouve, $\tau_{max} = 1133\ MPa$, $\tau_{min} = -963\ MPa$

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = 1084\ MPa$$

Exercice 3 :

Une grue soulève du béton à une hauteur donnée en le faisant quinze fois par jour, le câble utilisé est de diamètre 20 mm et la charge à soulever est 2.5 tonnes

1) Déterminer σ_{max}, σ_{min}, σ_m, σ_a
2) Si le câble est conçu pour un service de 10^6 cycles et la fréquence 5jour par semaine et 11 mois par années calculer la durée de vie du câble

Solution exercice 3

P=mg=25000 N

$$\sigma = \frac{P}{S} = \frac{25000}{\pi r^2} = 79.61\ MPa$$

$$\sigma_{max} = 79.61\ MPa$$

$$\sigma_{min} = 0$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 79.61\ MPa$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 39.81\ MPa$$

N=f.t

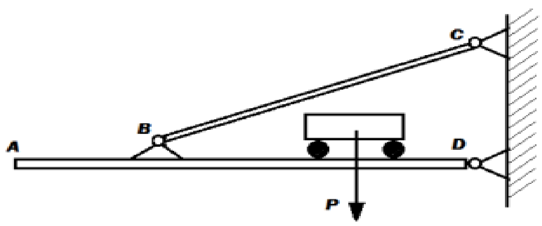
$$t = \frac{220 \times 10^6}{3300} = 66666\ Jours$$

Exercice 4 :

La barre BC de la structure ci-dessus en traction cyclique est soumise à un chargement axial tel que :

$F_{max}=2x10^5$ N et $F_{min}=8.5x10^3$ N de section $425mm^2$

1) Calculer σ_{max}, σ_{min}, σ_m , σ_a et R_σ
2) Ce chargement s'applique 300 fois/heure, quotidiennement de 8h00 à 17h00 tous les jours sauf Vendredi pendant 11mois par année durant 3 ans calculer le nombre de cycles.



Solution exercice 4

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{S} = 470.58\ MPa$$

$$\sigma_{min} = \frac{F_{min}}{S} = 20\ MPa$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 225.1\ MPa$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 245.29\ MPa$$

$$R_\sigma = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0.04$$

N=f.t= 300X9x6x4x11x3=2138400 Cycles

Exercice 5

Une pièce en acier est soumise à un effort cyclique, telle que son rapport de charge est de 0.2 et la valeur de la contrainte maximale et minimale sont respectivement 500 MPa et 100 MPa. Or la fréquence du signal étant de 0,01Hz.

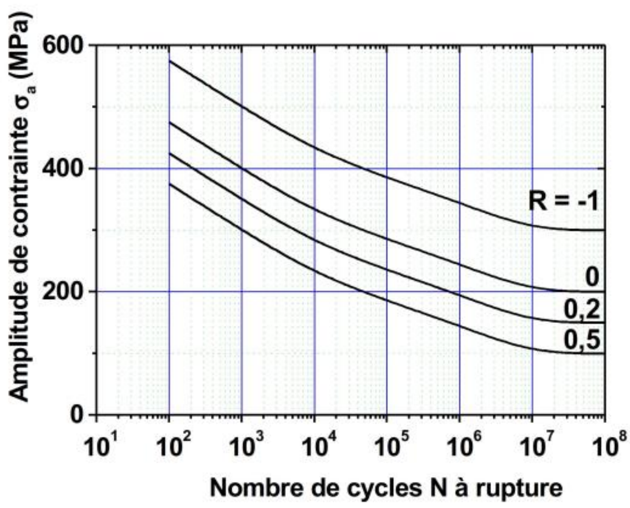
a) Calculez la valeur de : σ_a, σ_m

b) Utilisez la courbe de Wöhler ci-dessous pour trouver le nombre de cycles N qui correspondent à σ_a

c) Convertir ce nombre en jours

d) Pour que la pièce ait une durée de vie considérée infinie, donner la limite d'endurance σ_D du matériau (de la courbe de Wöhler).

e) Calculez σ_{max} et σ_{min} correspondant à la limite d'endurance



Solution exercice 5

le rapport de chargement R = $\sigma_{min}/ \sigma_{max}$, R = 100 /500 = 0,2

l'amplitude de contrainte $\sigma_a = \sigma_{max} - \sigma_{min}/2$ σa = 500- 100 /2= 200 MP a.

a) Il suffit alors de lire sur la courbe (R = 0,2) le nombre de cycles N qui correspond à σ_a = 200 MP a. On trouve N = $7x10^5$ cycles.

b) N=f.t , f : fréquence en HZ, : la durée de vie, N : nombre de cycle

t= N/f = $7x10^5/0.01 = 7x10^7$ s

c) il ya 86400 secondes dans une journée donc la durée de vie totale en jours sera :

t= $7x10^7$ /86400= 810 J

d) La pièce aura une durée de vie considérée infinie si l'on abaisse l'amplitude de contrainte à une valeur inféreure à la limite d'endurance $\boldsymbol{\sigma_D}$ du matériau.

Cela correspond à la valeur qui tend vers une limite asymptotique sur la courbe de Wöhler. On lit sur le graphe σ_D = 150 MP a.

e) suite aux relations de R = $\sigma_{min} / \sigma_{max}$ = 0,2 et avec $\sigma_a = \sigma_{max} - \sigma_{min}/2$, on peut calculer les nouvelles valeurs de σ_{max} et σ_{min} selon : $\sigma_{max} = 2\sigma_a /1 - R$= 375 MP a

$\sigma_{min} = R \times \sigma_{max}$ = 75 MP a

Exercice 6

Une pièce en acier de largeur 200 mm et d'épaisseur 3,0 mm, avec une fissure centrale d'une longueur de 10 mm. Tel que la ténacité du matériau est de K_{Ic} = 48 MPa.$m^{1/2}$ et sa résistance élastique

Re = 1400 MPa. La pièce est sous un chargement cyclique, avec une force maximale de 80 kN et d'une fréquence de 3 Hz. Le temps que mis la pièce pour se rompre est de 76.6 min.

1) Calculer la contrainte maximale, sachant que le facteur de forme Y= 1
2) Calculer la taille critique de la fissure
3) Calculer le nombre de cycles après rupture

Solution exercice 6

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{S} = \frac{80000}{600} = 133.33\ MPa$$

$$\mathrm{K_{IC}} = \mathrm{Y}\sigma_{max}\sqrt{\pi \times \mathrm{a}}$$

$$a_c = \frac{K_{IC}^2}{\sigma_{max}^2 \times \pi} = \frac{2304}{55819.43} = 0.0413\ m$$

$$a_c = 41.3 \text{ mm}$$

Exercice 7

Un arbre de 50 mm de diamètre est soumis à un moment de flexion de 3000 Nm. L'arbre possédant une entaille, tel que le facteur de concentration de contrainte est de 1.6. Calculer la contrainte au niveau de cette entaille.

Solution exercice 7

$$\sigma_n = \frac{v.M_f}{I} \quad , \; I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi (0.05)^4}{64} = 306.8 \times 10^{-9}\, m^4$$

$$v = \frac{d}{2} = 0.025\, m$$

$$\sigma_n = \frac{30000 \times 0.025}{30.68 \times 10^{-6}} = 244.5\, MPa$$

$$\sigma_{entaille} = \sigma_n \times K_t = 244.5 \times 1.6 = 391.1\, MPa$$

Exercice 8

Une barre ronde en acier de diamètre 28 mm. Cette barre est soumise à une flexion cyclique, avec un moment de fluctuation entre 565 Nm et 198 Nm provoquant une contrainte de traction.

Dans un point de la barre, il ya une entaille avec un facteur de concentration 1.18.

1) Calculer la contrainte maximale et minimale
2) L'amplitude de contrainte
3) La contrainte moyenne
4) Le rapport de charge
5) Donnez le type de chargement cyclique appliqué
6) La contrainte maximale au niveau de l'entaille
7) Si la dureé de vie de la barre est de 10^7 cycles, sachant que la fréquence est de 3.5Hz , calculer le temps (jours) que mis la barre pour se rompre

Solution exercice 8

1) $\sigma_{max} = \frac{v.M_{fmax}}{I} \quad , \; I = \frac{\pi d^4}{64} \qquad M_{fmax} = 565\, N.m\, , \; M_{fmin} = 198\, N.m$

$$\sigma_{max} = 268.29\, MPa$$

$$\sigma_{min} = \frac{v.M_{fmin}}{I}$$

$$\sigma_{min} = 91.98\, MPa$$

2)

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 85.18\, MPa$$

3) $\sigma_m = \frac{\sigma_{max}+\sigma_{min}}{2} = 177.11\ MPa$
4) $R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0.35$
5) Le type de chrgement cyclique est ondulé en traction
6) $\sigma_{entaille} = \sigma_a \times K_t = 85.18 \times 1.18 = 100.51 MPa$

Exercise 9

Trois éprouvettes A, B, C fabriqués d'un matériau non ferreux, sont soumis à la fatigue,. Chacune de ces éprouvettes subissent un maximum et un minimum de contrainte cyclique mentionné ci-dessous. La fréquence est la même pour toutes les éprouvettes.

éprouvette	σ_{max} (MPa)	σ_{min} (MPa)
A	+ 450	-350
B	+ 400	-300
C	+ 340	-340

a) Donnez le type de chargemnt cyclique appliqué de chaque éprouvette
b) Classer les durées de vie de chacune des éprouvettes de la plus longue à la plus courte ;
c) Justifier cette réponse en traçant un schéma d'une courbe Wöhler.

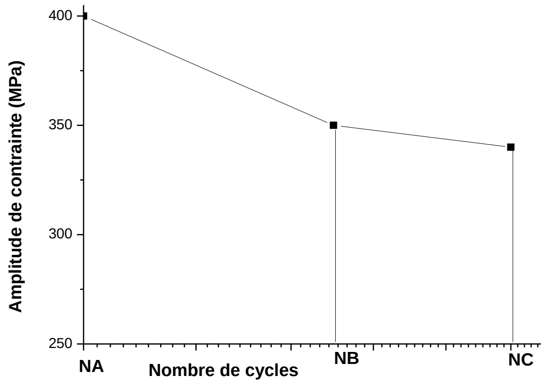
Solution exercice 9

$$\sigma_{aA} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{450 - 350}{2} = 400\ MPa$$

$\sigma_{aB} = 350\ MPa$

$\sigma_{aC} = 340\ MPa$

a) Type de chargement cyclique est alterné
b) Puisque la valeur de $\sigma_{aA} > \sigma_{aB} > \sigma_{aC} \iff N_C > N_B > N_A$
c) schéma d'une courbe Wöhler



Exercise 10

Un acier désigné par AISI 4340 est soumis à des chargements cycliques. Les essais sont effectués sur des éprouvettes sans entaille, sous chargement axial et avec une contrainte moyenne égale à zéro (σ_m= 0). Les résultats des essais sont présentés dans le tableau ci-dessous.

1- En appliquant l'équation de Basquin calculer la valeur de la constante A et B ?
2- Écrire l'équation de Basquin

σ_a (MPa)	N_f (cycles)
948	222
834	992
703	6004
631	14130
579	43860
524	132150

Solution exercice 10 :

Après le tracé de σ_a en fonction de N_f, la courbe obtenue est sous une forme de droite. Cconsidérant le premier point et le dernier point de cette droite :

On prend les points (σ_1, N_1) et (σ_2, N_2), de l'équation $\sigma_a = AN_f^B$:

On aura donc, $\sigma_1 = AN_1^B$, $\sigma_2 = AN_2^B$

Divisant la première équation par la deuxième on aura alors :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^B, \quad log\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = B\log\frac{N_1}{N_2}$$

$$B = \frac{\log\sigma_1 - \log\sigma_2}{\log N_1 - \log N_2} = \frac{\log 948 - \log 524}{\log 222 - \log 132150} = -0.928$$

A ?

$$A = \frac{\sigma_a}{N_1^B} = \frac{948}{(222)^{-0.0928}} = 1565$$

2)

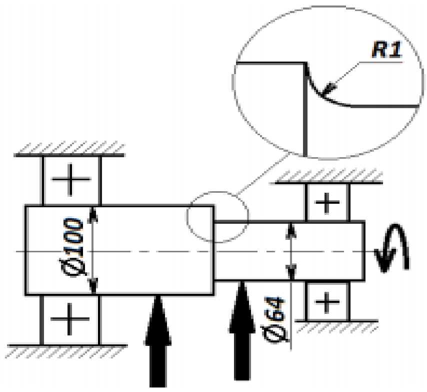
σ$_a$= AN_f^B , σ$_a$= $1565N_r^{-0.928}$

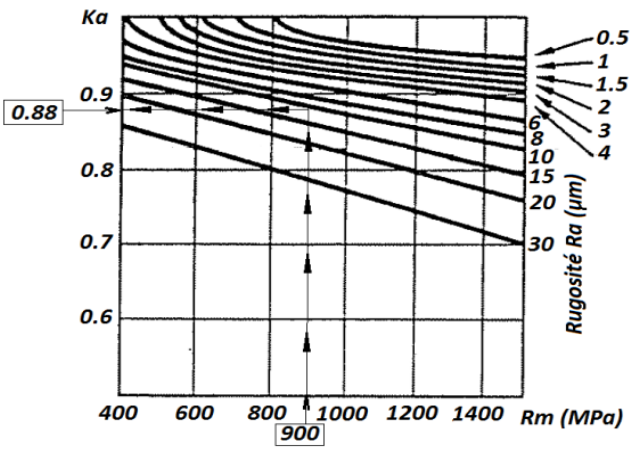
Exercise 11

La figure ci-dessous représente un arbre soumis à une flexion rotative, fabriqué d'un acier ayant les caractéristiques suivantes :

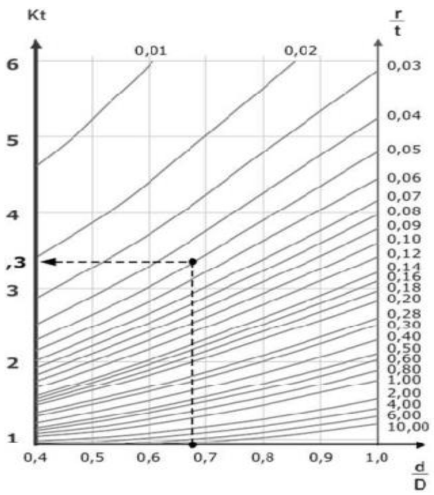
La résistance de fatigue expérimentale **σ'$_D$** = 500 MPa. La limite de résistance à la rupture R$_m$ = 1200 MPa. Sa rugosité moyenne est de 2µm.

Sachant que cet arbre fonctionne dans un milieu où règne une température T=80 °C. On admet une fiabilité de 95 % Calculer l'amplitude de contrainte admissible **σ$_{adm}$** pour effectuer N=10^5 cycles

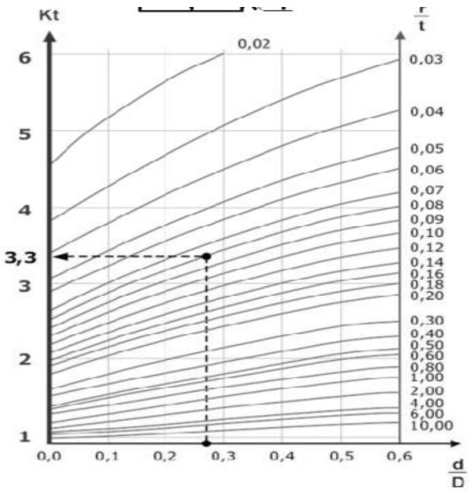




Abaque pour déterminer le facteur K$_a$ pour les aciers



Abaque de K_t (Flexion)



Abaque de K_t (Traction/Compression)

<u>Solution exercise 11</u> :

1) Correction de la valeur de la résistance à la fatigue :

- Facteur d'effet de température : $\mathbf{K_d}$ = 344/80+273 =0.97

Facteur de fini de surface : De l'abaque on tire (R_m = 1200 MPa et $Ra=2\mu m$) : $\mathbf{K_a}$ = 0.95,

- Facteur de grosseur (D=100mm): $\mathbf{K_b}$ = 0.75
- Facteur de fiabilité de 0.95 % , $\mathbf{k_c}$ =0.868
- Facteur de température, $\mathbf{k_d}=\frac{344}{80+273} = 0.97$
- Facteur de concentration de contraintes : d/D =64/100= 0.64 et r/t= 1/18 de l'abaque on tire :
- K_t = 3.2, K'_f =1+q(K_t -1), q= 1/(1+a/r) ,
- $a = \left(\frac{270}{R_m}\right)^{1.8} = \left(\frac{270}{1200}\right)^{1.8} = 0.068$
- $q = \frac{1}{1+\frac{0.068}{1}} = 0.936$
- $k'_f = 1 + (0.936)x(3.2 - 1) = 3.0592$

Finalement le coefficient de concentration de contraintes :

$$k_e = \frac{1}{k'_f} = \frac{1}{3.0592} = 0.326$$

- Facteur de fiabilité : Une fiabilité de 95 % correspond à $K_c = 0.868$

La limite d'endurance utilisée ;

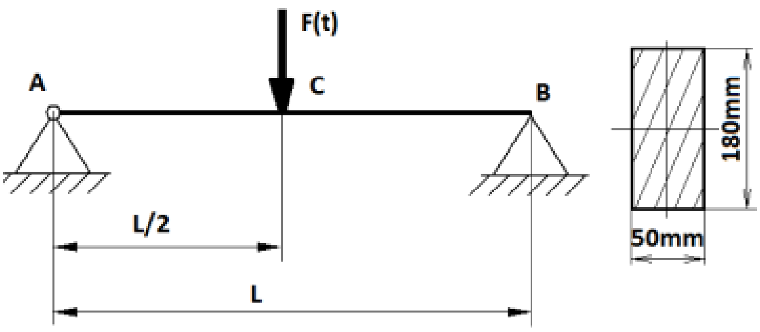
$$\sigma_D = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot \sigma'_D = 0{,}95.0{,}75.0{,}868.0{,}97.0{,}326.500 = 97{,}78\ MPa$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 0.9R_m \left(\frac{\sigma_D}{0.9R_m}\right)^{\frac{1}{3}(\log N - 3)} = 0.91200\left(\frac{97{,}78}{0.9.1200}\right)^{\frac{1}{3}(\log 10^5 - 3)} = 217.76\ MPa$$

exercice 12 :

Une poutre (Figure ci-contre) est soumise à un chargement variable
F_{max} = 600 KN
F_{min} =-600 KN
L=2m, la poutre est fabriquée d'un acier, R_m =1200 MPa

1- Quel est le type de chargement cyclique appliqué ?
2- Calculer le nombre de cycles pouvant etre supportés avant de rompre



Solution exercice 12 :

M_f=F/2 x L/2 , L= 2 m

M_f= 60 KN.m

σ= M_f. V/I , I= $bh^3/12$, b=50 mm , h= 180 mm, V= 90 mm

σ_{max}= 222 MPa , σ_{min}=-222 MPa, σ_a=222 MPa

σ'_D = 0.5 x Rm = 600 Mpa

$$N = 1000\left(\frac{0.9R_m}{\sigma_a}\right)^{\frac{3}{Log\left(\frac{0.9R_m}{\sigma'_D}\right)}} = 1000\left(\frac{0.9 \times 1200}{222}\right)^{\frac{3}{Log\left(\frac{0.9\times1200}{600}\right)}} = 1.17 \times 10^{11} \text{ cycles}$$

Exercice 13

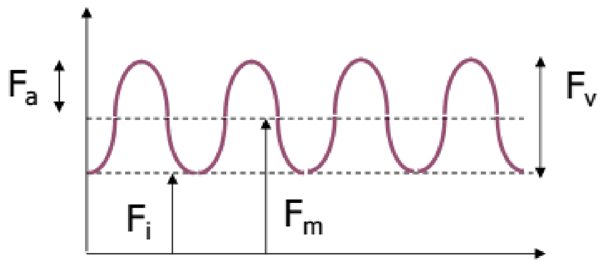
Arbre en acier étiré à froid (figure ci-dessous) de diamètre 40 mm :

R_e =490 MPa, R_m =590 MPa.

Soumis à une charge axiale initiale de 70 kN, et une charge variable de 0 à 100 kN. Aux extrémités une concentration de contraintes K_t =2.02 pour r =5 mm, avec ka =0.76

1- Calculer le facteur de sécurité selon **Goodman** et **Soderberg** pour une vie infinie et **une fiabilité de 90 %.**

2-Tracer les droites de Goodman et celle de Soderberg.



Solution exercice 13 :

$K_a = 0.76\ ,\ K_b = 0.85\ \ ,\ \ k_C = 0.87\ ,\ K_d = 1$

$k'_f = 1 + q(K_t - 1),\ \ q = \frac{1}{1+\frac{a}{r}} = 0.86\ ,\ k'_f = 0.95(3.02 - 1) + 1 = 2.927$

$K_e = \frac{1}{K'_f} = 0.342\ ,\ \ \ \sigma'_D = 0.5 \times R_m = 295\ MPa$

$\sigma_D = k_a \cdot k_b \cdot k_c \cdot k_d \cdot k_e \cdot \sigma'_D = 0{,}76 \times 0{,}85 \times 0{,}897 \times 1 \times 0.342 \times 295 = 58{,}46\ MPa$

$F_i = 70KN\ ,\ \ \ \ F_v = 100KN\ \ \ \ F_a = \frac{F_V}{2}\ ,\ \ F_m = F_i + F_a = 120KN$

$S_0 = \frac{\pi d^2}{4} = 1.257 \times 10^{-3}\ m^2\ \ \ \ ,\ \ \sigma_a = \frac{F_a}{S} == 39{,}8\ MPa\ ,\ \sigma_m = \frac{F_m}{S} = 95{,}5\ MPa$

Calcul du facteur de sécurité

- Goodman : $F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_D}+\frac{\sigma_m}{R_m}}\ ,\ \ \ \ \ \ F_{s1} = \frac{OB}{OA}$

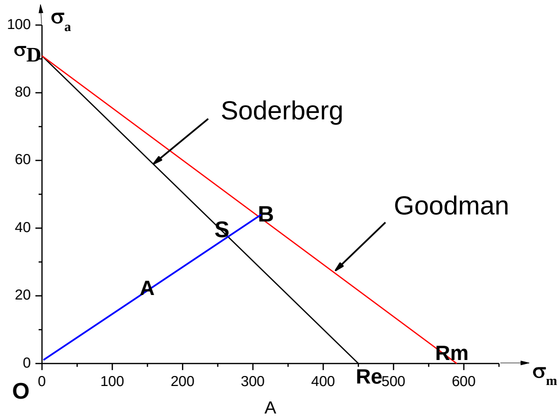
$F_{s1} = 1.19$ pour $\sigma_D = 58{,}46\ MPa\ ,\ \ F'_{s1} = 3.36\ ,$ pour $\sigma'_D = 295\ MPa$

- Soderberg

  $F_{s2} = \frac{OS}{OA}\ ,\ \ F_{s2} = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_D}+\frac{\sigma_m}{R_e}}$

$F_{s2} = 1.14$ pour $\sigma_D = 58{,}46\ MPa\ ,\ \ F'_{s2} = 3.03\ ,$ pour $\sigma'_D = 295\ MPa$

Comme OB $> OS \Longrightarrow \ \ \ F_{s1} > F_{s2}$



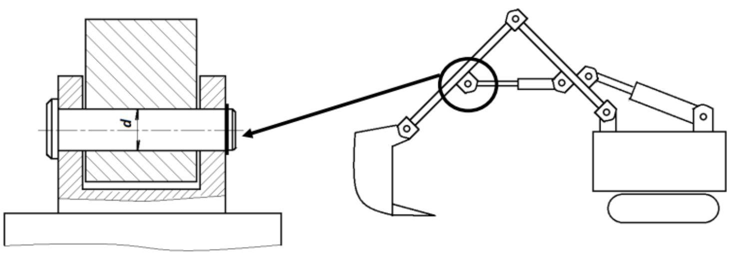
Exercice 14

Un axe d'une articulation (figure ci-dessous) est soumis au cisaillement avec effort dynamique variant entre -50 KN et 105 KN, l'axe est fabriqué d'un acier ayant une limite de rupture R_m=610 MPa, une limite d'écoulement plastique σ_p = 256 MPa et une limite d'endurance σ_D = 295 MPa

La limite d'endurance en cisaillement $\tau_D \approx 0.58\ \sigma_D$ ainsi que la limite d'écoulement $\tau_p \approx 0.58\ \sigma_p$

1) Calculer le diamètre minimal pour assurer une sécurité évaluée par un coefficient F_s = 2.25

2) Quelles seraient les valeurs extrêmes de l'effort appliqué pour que l'axe puisse effectuer
125000 cycles avant de rompre en utilisant un diamètre d= 32 mm et le même coefficient de sécurité ?



Solution exercice 14 :

$F_m = \frac{F_{max}+F_{min}}{2}$, $F_m = 27.5$ MPa,

$F_a = \frac{F_{max}-F_{min}}{2}$ F_a =77.5 MPa

Il ya deux surfaces cisaillées : $S_0 = \frac{\pi d^2}{4}$, $\tau_a = \frac{F_a}{2S_0}$, $\tau_a = \frac{F_a}{\frac{2\pi d^2}{4}} = \frac{2F_a}{\pi d^2}$, $\tau_m = \frac{F_m}{\frac{2\pi d^2}{4}}$

$\tau_m = \frac{2F_m}{\pi d^2}$, $F_{S1} = \frac{\tau_D}{\tau_a} = \frac{0.58\times\sigma_D}{\tau_a} = \frac{0.58\times\sigma_D\times\pi d^2}{2F_a}$, $d = \sqrt{\frac{2F_{S1}\times F_a}{0.58\times\sigma_D\times\pi}} = 25.47\ mm$

A l'écoulement plastique :

$F_S = \frac{\tau_p}{\tau_{max}} = \frac{0.58\times\sigma_p}{\tau_{max}}$, $\tau_{max} = \frac{F_{max}}{S_0}$, $d = \sqrt{\frac{2F_S\times F_{max}}{0.58\times\sigma_p\times\pi}} = \sqrt{\frac{2\times105000\times2.25}{0.58\times256\times\pi}} = 31.83\ mm$

Calculons la limite de résistance en fatigue correspondant à une vie finie

$$\sigma_f = 0.9R_m\left(\frac{\sigma_D}{0.9R_m}\right)^{\frac{1}{3}(LogN-3)}$$

$$\sigma_f = 335.65\ MPa$$

$$F_S = \frac{\sigma_p}{\tau_a} = \frac{0.58\times\sigma_p}{\tau_{max}}$$

$\tau_a = \frac{F_a}{2S_0}$ $\tau_a = \frac{0.58\times\sigma_p}{F_S}$, $F_a = 2S_0\times\tau_a$, $S_0 = \frac{\pi d^2}{4}$, $d = 32\ mm$

$F_a = 147389.95\ N$,

$F_S = \frac{\tau_p}{\tau_{max}} = \frac{0.58\times\sigma_p}{\tau_{max}}$, $\tau_{max} = \frac{F_{max}}{2S_0}$,

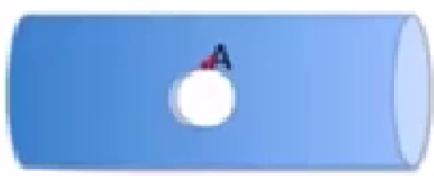
$$F_{max} = \frac{0.58\times\sigma_p\times\pi d^2}{2F_S} = \frac{0.58\times256\times\pi\times(32)^2}{2.25\times2} = 106092.58\ \text{N}$$

$$F_{min} = F_{max} - 2F_a = -188687.32\ N$$

Exercice 15

Une pièce cylindrique (figure ci-dessous) en acier A1045 soumise à un effort cyclique axial sous une contrainte minimale de -69 MPa et une contrainte maximale de 104 MPa, appliquées au point A. le cylindre a un trou au centre avec Kt=1.7 et q=0.9. Sachant que sa résistance maximale est de 565 MPa et sa résistance élastique est de 315 MPa. Sa limite d'endurance est de 138 MPa et f=0.85

1) Utilisant le critère de **Goodman**, calculer le facteur de sécurité
2) Estimer le nombre de cycle à rupture pour une vie finie



<u>Solution exercice 15</u>

1)
σ_a= 86.5 MPa

σ_m=17.5 MPa

$K_f=1+q(K_t-1)= 1+0.9(1.7-1) =1.63$ 1.021 0.05

$\sigma_a= K_f$ x86.5= 141 MPa

$\sigma_m= K_f$x17.5=28.52 MPa

d'après Goodman : $\frac{\sigma_a}{\sigma_D} + \frac{\sigma_m}{R_m} = 1$

$F_s = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{\sigma_D}+\frac{\sigma_m}{R_m}} = \frac{1}{\frac{141}{138}+\frac{28.52}{565}}$ =0.93

2)

$\sigma_f = aN^b$

$N = \left[\frac{\sigma_{eq}}{a}\right]^{1/b}$, avec $a = \frac{(f\times R_m)^2}{\sigma_D}$, $b = -\frac{1}{3}\log\left[\frac{f\times R_m}{\sigma_D}\right]$

De la relation de Goodman remplacer σ_{eq} par σ_D , donc on déduit la valeur de σ_{eq} comme suit :

$$\sigma_{eq} = \frac{\sigma_a}{1-\frac{\sigma_m}{R_m}} = \frac{141}{1-\frac{28.52}{565}} = 148.42 \text{ MPa}$$

$a = \frac{(0.85\times 565)^2}{138}$=1671.3 , $b = -\frac{1}{3}\log\left[\frac{0.85\times 565}{138}\right] = -0.18$

$$N = \left[\frac{148.42}{1671.3}\right]^{1/-0.18} = 721308.69 \text{ cycles}$$

<u>Exercice 16</u>

Une plaque d'acier à haute résistance (figure 7-21), dont la ténacité à la rupture par déformation plane est de est chargée alternativement en tension à 500 MPa et en compression à 60 MPa.

La plaque doit survivre pendant 10 ans, la contrainte étant appliquée à une fréquence d'une fois toutes les 5 minutes. Concevoir une procédure de fabrication et d'essai qui garantit que le composant fonctionnera comme prévu. Supposez un facteur de géométrie f = 1,0 pour tous les défauts.

Solution Exercice 16

Pour concevoir notre capacité de fabrication et d'essai, nous devons déterminer la taille maximale des défauts qui pourraient entraîner une défaillance au cours de la période de 10 ans. La taille critique de la fissure en utilisant la ténacité à la rupture et la contrainte maximale est la suivante :

$K_{IC} = f.\sigma\sqrt{\pi . a_c}$

80 MPa$\sqrt{m}$ = (1.0)(500 MPa) $\sqrt{\pi_{a_c}}$

a_c=0.0081 mm

La contrainte maximale est de 500 MPa ; cependant, la contrainte minimale est nulle, et non de 60 MPa en compression, car les fissures ne se propagent pas en compression. Ainsi, $\Delta\sigma$ est :

$\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min} = 500 - 0 = 500$ MPa

Nous devons déterminer le nombre minimum de cycles que la plaque doit supporter :

N = (1 cycle 5 min)(60 min *h*)(24 *h j*)(365 j *a*)(10 a)

N = 1,051,200 cycles

Si nous supposons que f = 1,0 pour toutes les longueurs de fissure et notons que

C = 1,62x 10^{-12} et n = 3,2 de la figure 7-21 dans l'équation 7-20, alors

$$1.051.200 = \frac{2\left((0.008)^{(2-3.2)/2} - (a_i)^{(2-3.2)/2}\right)}{(2-3.2)(1{,}62\text{x } 10^{-12})(1)^{3.2}(500)^{3.4}\pi^{3.2/2}}$$

$$1.051.200 = \frac{2(18 - (a_i)^{0.6})}{(-1.2)(1{,}62\text{x } 10^{-12})(1)(4.32x10^{8})(6.244)}$$

$a_i^{-0.6} = 18 + 2764 = 2782$

a_i = 1.82x 10^{-6} m = 0.00182 mm pour un défaut de surface

2ai = 0.00364 mm pour les défauts internes

Le processus de fabrication doit produire des défauts de surface d'une longueur inférieure à 0,00182 mm. de longueur. En outre, des essais non destructifs doivent être disponibles pour garantir que des fissures approchant cette longueur ne sont pas présentes

Exercice 17

Pour l'arbre à paliers tel que K_f=1.55 , Rm=690 MPa, et f=0.845. La limite d'endurance entièrement corrigée est de σ_D = 280 MPa. Considérons que l'arbre subit une contrainte nominale entièrement réversible dans le congé de (σ_{rev})nom = 260 MPa.

Estimez le nombre de cycles jusqu'à la rupture.

Solution exercice 17

La contrainte maximale réversible est :

$$(\sigma_{rev})max = K_f(\sigma_{rev})nom = 1.55(260) = 403\ MPa$$

$$a = \frac{(f \times R_m)^2}{\sigma_D} = \frac{(0.845(690))^2}{280} = 1214 \text{ MPa}$$

$$b = -\frac{1}{3}\log\left[\frac{f \times R_m}{\sigma_D}\right] = -\frac{1}{3}\log\left[\frac{0.845(690)}{280}\right] = -0.1062$$

$$N = \left[\frac{\sigma_{eq}}{a}\right]^{1/b} = \left(\frac{403}{1214}\right)^{1/-0.1062} = 32.3x10^3\ Cycles$$

Exercice 18

La figure ci- contre montre un tirant soumis à un chargement variable en traction caractérisé par les efforts extrêmes suivants :

Fmax = 120 KN

Fmin= -20KN

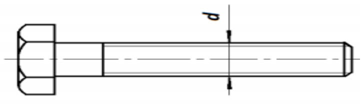
Le matériau du tirant est un acier de caractéristiques :

Rm= 785 MPa

σp= 590 MPa

σD= 250 MPa

On adopte un coefficient de sécurité en fatigue Fs =1.5, tenant compte de l'écoulement plastique du matériau du tirant déterminer le diamètre minimal pour satisfaire les conditions signalées ci-dessus



Exercice 19

Un villebreauin en acier avec *Kc* = 45 MN $m^{-3/2}$, chargé par une contrainte traction de 225 MPa et une contrainte de compression de 60 MPa. Le contrôle par le technique ultrasonique donne une longueur fissure de 2.5 mm.

Les constantes de la loi de Paris cet acier sont :

-*A* = 1.5 x 10^{-12} m/(MN m-3/2) m par cycle, *m* = 2.5

Calculer la durée de vie du villebrequin ?

Exercice 20

Lors d’une expertise, on effectue un examen au microscope électronique à balayage de la surface de rupture d’une pièce rompue. Celle-ci est formée de stries dont l’espacement varie en fonction de la longueur de la fissure. Pour un grossissement de 8000, on note que l’interstrie est respectivement égal à 0,8 ; 2 et 3,8 mm pour des longueurs de fissure de 2,5 ; 5 et 7,5 mm. Pour un grossissement égal à 2000, l’interstrie est de 1,5 et 2,3 mm pour des longueurs de fissure de 10 et 12,5 mm.

1°) Donner une estimation de la vitesse de fissuration pour chaque point de mesure

2°) En déduire l’allure de la courbe de progression de la fissure a = f(N), a représentant la longueur de la fissure et N le nombre de cycles

Exercice 21

Le controle du panneau d’un avion fabriqué d’un alliage d’aluminium 7074-T651

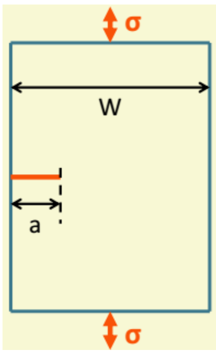
Les propriétès de ce matériau sont :

Kc = 25.8 MN $m^{-3/2}$, la résistance élastique σ_e =505 MPa. Le controle donne une fissure de coté d’une longueur de 6.4 mm,

Pendant le vol, ce panneau subirra une contrainte cyclique de 90 ± 30 MPa.

Ignorant l’effet de la contrainte moyenne, calculer le nombre de cycles de rupture, utilisant la loi de Paris, tels que les constantes du matériau sont :

A = 1.2 x 10^{-12} /(MN $m^{-3/2}$)m per cycle, m = 2.8

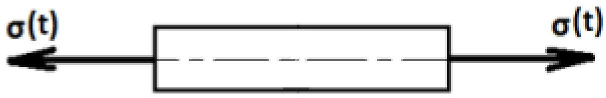


Y	a/W
1.12	0.0
1.37	0.2
2.11	0.4
2.83	0.5

Exercices proposés sans solution

Exercice 1

Une tige cylindrique en traction dynamique
F_{max} = 100 KN
F_{min} = -100 KN
σ_D = 100 MPa et R_m = 950 MPa
1) De quel type de sollicitation s'agit-il ?
2) Si le cable rompt à σ_a = 80 MPa quel serait le nombre de cycles correspondant à cette ruppture

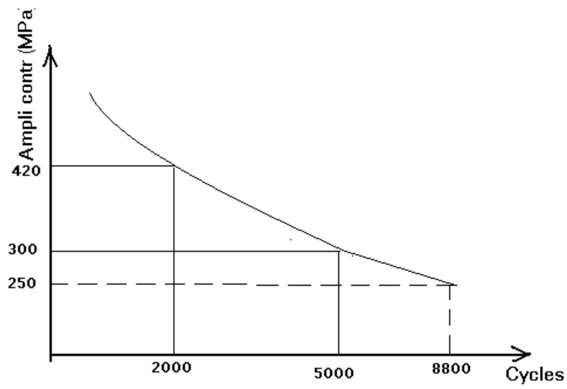


Exercice 2

Les résultats de la courbe de wohler d'un matériau sollicté en fatique sous des contraintes cycliques comme suit :

- Un cycle partiel n_1=100 cycles, sous une contrainte σ_{a1}= 420 MPa
- Un deuxième cycle partiel n_2=100 cycles, sous une contrainte σ_{a2}= 420 MPa
- Un troisième cycle partiel n_3, sous une contrainte σ_{a3}= 250 MPa

a) On appliquant la règle de Miner calculer le nombre de cycle partièl n_3



Exercice 3

Un cable de soutien est assujeti à une charge variable assimilée à un signal sinusoidal (voir figure ci-dessous) Le cable est fabriqué d'un matériau (σ 120MPa et Rm= 810 MPa)

Calculer le nombre de cycles avant la rupture

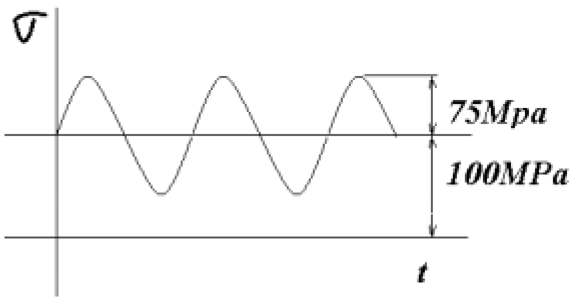
Exercice 4

Un élement de machinen a subit des contraintes cycliques variables de fatigue comme suit : Une contrainte allant de σ=-420 MPa à 140 MPa repeter 5 fois ayant une durée de vie de N_1= 10^4 cycles ensuite a subit un autre cycle de fatigue d'une conrainte σ=-210 MPa à 70 MPa, repeter 3 fois d'une durée de vie de N_2= 5x10^3 cycles

a) Schematiser le cycle appliqué à cet émement de machine ?

b) Calculer l'endommagement ausé à cet élement

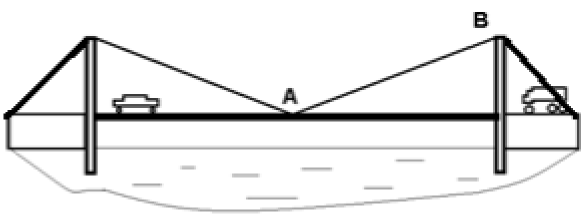
c) Que ce que vous pouvez conclure ?

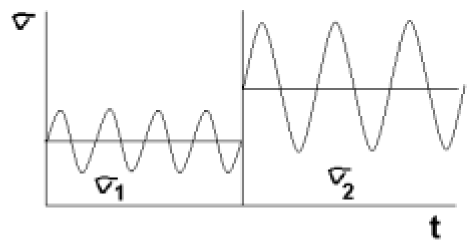


Exercice 5

Le cable AB du pont ci-contre s'est rompu après 4 années de son installation c.a.d un nombre de 2x10^5 de cycles. L'enquete menée par les experts a révélé que le cable a subit un chargement fluctuant entre σ_1 = 300. (sinωt) + 120 à un nombre de cycles ni et σ_2. = 450.(sinωt)+ 200 à un nombre de cycles n_2. Cette fluctuation est due au passage de gros et petits vehicules. Ce cable est fabriqué d'un acier (σ_D = 275 MPa et Rm = 1100 MPa)

1) Déterminer les nombres de cycles n_1 et n_2 relatifs aux chargements σ_1 et σ_2. .
2) Si on impose un facteur de sécurité 1.1 pour les deux chargements quelles seront les valeurs de n_1 et n_2 ?





Exercice 6

Un reservoir sphérique destiné à recevoir de l'air comprimé de pression variable entre *10* et *200* bars est fabriqué d'un acier (σ_D = 450 MPa et Rm = 1420 MPa) de rayon extérieur b=15cm et d'épaisseur e=5mm. On désire connaitre la durée de vie de ce reservoir si on utilise un coefficient de sécurité égal à 1.2

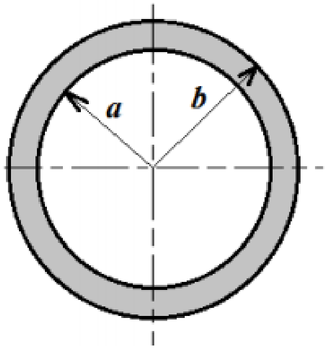
On donne :

$$\sigma_{rr} = A - \frac{2B}{r^3} \; ; \; \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = A + \frac{B}{r^3}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta\varphi} = 0$$

$$A = \frac{P_i a^3 - P_e b^3}{b^3 - a^3}$$

$$B = \frac{(P_i - P_e) a^3 b^3}{2(b^3 - a^3)}$$



Pi et Pe sont respectivement les pressions interne et externe

Exercice 7

Un élement mécanique soumis à des contraintesl cycliques en flexion suivantes :

a) +- 350N/mm^2 pour un temps de 85 %
b) -+ 400 N/mm^2 pour un temps de 12 %
c) +-500 N/mm^2 pour un temps de 3 %

Le matériau de cet element est 50C4 avec Rm=660 N/mm^2 et son endurance limite est de 280 N/mm^2

Déterminer la durée de vie de cet élement ?

Exercice 8

Un vaiceau mince de diamètre 300 mm et d'épaisseur de 2 mm est soumis à une pression intérieure variable de 4 à 8 MPa. La limite élast, la résistance maximale et la limite d'endurance sont respect 500, 900 et 300 MPa

Déterminer le facteur de sécurité selon Soderberg

Exercice 9

Un matériau ductile ayant une endurence limite de 200 MPa avec une limite élastique de 300 MPa sous une charge variable. Le max et min sont 150 et 50 MPa respect. Le facteur de concentration de contrainte en fatigue k_f=1.3

Clculer le facteur de sécurité selon Soderberg

Exercice 10

Un matériau de R_e =200 MPa soumis à une contrainte de flexion aternative entre 0 et 200 MPa. La conception est faite sous une conception de la théorie de Gerber avec un facteur de sécurité f_s=1
Calculer la resistance R_m

Exercice 11

Une plaque de 300 mm de large et de 11 mm d'épaisseur est soumise à une charge de fatigue à une fréquence de 1 Hz. La contrainte varie entre σ_{max} = 120 MPa et σ_{min} = 40 MPa. A un moment donné, une fissure de bord de 4,5 mm est découverte.

Calculez combien d'heures il faut avnt que la plaque se rompe.

Données du matériau : Relation de Paris : da/dn = $3{,}5\times10^{-10}\Delta K^{2.5}$, m/cycle avec ΔK en MPa$\sqrt{m}$ la limite d'élasticités σ_e = 381 MPa résistance à la rupture par déformation plane K_{Ic} = 35 MPa$\sqrt{m}$ résistance à la rupture pour une plaque mince (≈ 1 mm) K_c = 62 MPa$\sqrt{m}$

Exercice 12

Le fût du canon entre chaque tir, le fut est au repos, et donc non contraint. Ceci implique une contrainte minimale nulle. Il est résulte une variation de facteur d'intensité de contrainte ΔK. Compte tenu de la contrainte au moment du tir et de la fissure initiale. Avec ΔKs = 10 $MPa\sqrt{m}$.

La loi de Paris qui est donnée pour cet acier $\frac{da}{dN} = 8.10^{-11}\Delta K^{2.5}$, K_{IC}=125 $MPa\sqrt{m}$ telle que la longueur de fissure initiale est de 0 .5 mm, le facteur géometrique Y = 1.2

1) Calculer la taille critique de la fissure
2) Déterminer le nombre de cycles pour propager ce défaut

Exercice 13

Une tole plate contenant une fissure de longueur de 3.1 mm sous amplitude de contrainte cyclique, avec σ_{max} = 310 MPa et σ_{min} = 172 MPa. Cette tole est fabriquée d'un acier ferrito-perlitique, K_{IC}=165 MPa$\sqrt{m}$. Avec A= 6.8 X 10^{-12}, m = 3, Y =1.12

a) Déterminer la durée de propagation jusqu'à la rupture
b) Déterminer la durée de propagation si la longueur de fissure ne dépasse pas 25 mm

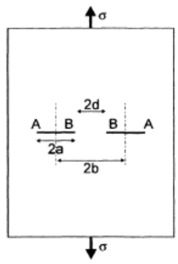
Exercice 14

Considérons le problème décrit à la figure ci-dessous . La plaque est soumise à une charge de fatigue de 0 à 130 MPa. Les deux fissures ont des demi-longueurs initiales a_0 =10 mm et la demi-distance initiale entre leurs centres est b_0 =18 mm .

Evaluez le nombre de cycles pendant lesquels les fissures coalescent. Le comportement du matériau obéit à la règle suivante : da/ dN =2.5 x 10^{-12} $(\Delta K)^4$ with da/dN in m/cycle and ΔK in MPa. La limite d'élasticité du matériau est σ_Y = 400 MPa . Les facteurs d'intensité des contraintes aux pointes A et B sont donnés par

$$K_A = \sigma\sqrt{\pi a}\left[1 - 0.0037(a/b) + 0.1613(a/b)^2 - 0.1628(a/b)^3 + 0.1560(a/b)^4\right]$$

$$K_B = \sigma\sqrt{\pi a}\left[1 - 0.00426(a/b) + 0.5461(a/b)^2 - 1.1654(a/b)^3 + 1.2368(a/b)^4\right]$$



Exercice 15

Une barre d'acier est soumise à des cycles de fatigue en traction alternée ($\Delta\sigma t$ = 100 MNm^{-2} depuis σ = 0 jusque σ = 100 MNm^{-2}). La dimension moyenne des fissures en surface est $l \leq 2$ mm. Estimer la durée de vie de cette barre sachant que la ténacité de l'acier est de K_{Ic} = 30 $MNm^{-3|2}$ et on donne les valeurs des coefficients suivant : m = 3 et A = $1 \cdot 10^{-12}$ pour $\Delta\sigma$ exprimé en MPa et l en m

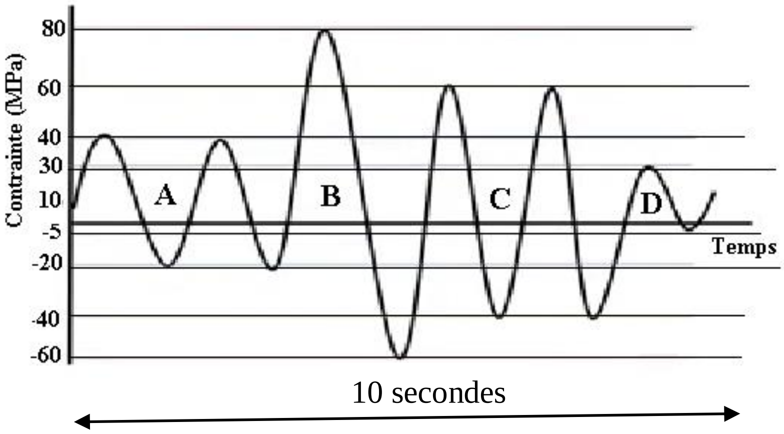
Exercice 16

Une pièce en acier a subit une variation cyclique de contrainte (figure ci-dessous), dont sa limite **d'endurance** est de σ_D = 30 MPa et sa résistance à la rupture est de R_m=120 MPa. On demande pour chaque cycle (A, B, C, D) de :

1° Calculer σ_a, σ_m, σ_{equv}, N (nombre de cycles de rupture)

2° En appliquant la règle de Miner calculer l'endommagement de cette pièce

3° Quelle est la durée de vie (en heures) de cette pièce ?



Exercice 17

Une barre circulaire solide en acier doit être soumise à un ensemble de charges axiales complètement renversées. comme suit : 10 kN pour 1000000 cycles et 13 kN pour 200000 cycles. Evaluez le diamètre requis de la barre afin de résister à ce type de chargement sans rupture en utilisant la règle de Miner. La courbe S-N du matériau de la barre pour une contrainte moyenne nulle est donnée par l'équation de Basquin $\sigma_a N_f^{\alpha} = $ C avec C = 400 MPa et α= 0,11.

Exercice 18

L'historique des contraintes de la figure I est appliqué à une éprouvette métallique. Utilisez la règle de Miner pour déterminer le nombre de cycles n_2 nécessaires à la rupture finale de l'éprouvette après qu'elle ait été soumise à n_1 =500000 cycles. Le matériau de l'éprouvette se comporte selon l'équation de Basquin $\sigma_a N_f^{\alpha} = $ C avec C = 400 MPa et α =0,11 .

Exercice 19

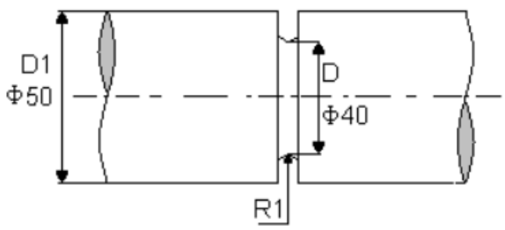
La courbe S--N d'un matériau est décrite par la relation suivante $\log N = 10 (1 - \sigma/\sigma_{max})$, où N est le nombre de cycles jusqu'à la rupture, σ est l'amplitude de la contrainte cyclique appliquée, et σ_{max} est la résistance à la rupture monotone, -c'est-à-dire $\sigma = \sigma_{max}$ à $N = 1$. Un élément rotatif constitué de ce matériau est soumis à 104 cycles à $\sigma = 0,5\ \sigma_{max}$. Si la charge cyclique est maintenant augmentée à $\sigma = 0,75\ \sigma_{max}$, utilisant la loi de Palmgren-Miner, combien de cycles de plus supportera le matériau ?

Exercice 20

Un arbre en acier St50 présente une gorge à fond semi-circulaire de rayon $R_1 = 1$ mm (figure ci-dessous). Il est soumis à un moment de torsion alternée, d'amplitude M_t.

On demande :

1. Le coefficient de concentration de contrainte k_t
2. La contrainte d'endurance τ_D
3. Le moment de torsion correspondant Mt



Exercice 21

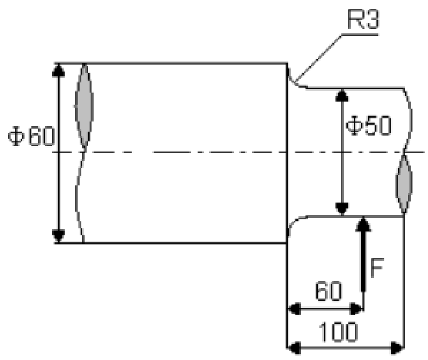
Un changement de section d'arbre, passant d'un diamètre de 120 mm à un diamètre de 100 mm est réalisé de trois façons :

— Sans congé de raccordement
— Avec un congé de 5 mm de rayon
— Avec un congé de 10 mm de rayon

On demande :

1. Quelle est la meilleure forme pour la résistance ?
2. Pour un acier St70, quelle est la contrainte limite de flexion en fatigue dans les 3 cas.

3. Quels sont les moments de flexion correspondants ?



Exercice 22

Déterminez la sécurité à la fatigue de l'arbre suivant (figure ci-dessous).

Données de l'exercice :

— Une force F de 10000 N crée un moment de flexion au niveau de l'épaulement

— L'arbre est en acier St50

— R_3 = 3 mm

Exercice 23

Un essai de fatigue est réalisé sur une plaue à entaille centrale de largeur W = 150 mm et d'épaisseur B = 2,5 mm. Les résultats obtenus sont les suivants :

Longueur de fissure a(mm)	**Nombre total de cycles appliqués**
1,27	0
5,08	24000
10,16	54000
17 ,78	68000
25,40	74000
50,80	77000

Un chargement à amplitude constante ($\Delta\sigma$ = 90MPa;R = 0,1) est appliqué pour effectuer cet essai. Les caractéristiques du matériau sont les suivantes : limite d'élasticité Re = 330 Mpa Ténacité : K_{IC} = 90 $MPa\sqrt{m}$

Tracer les courbes a = f (N) et da / dN = f (ΔK). En déduire les coefficients de la loi de Paris.

Exercice 24

On considère un composant de structure en alliage d'aluminium dans lequel se propage une fissure de fatigue. La limite d'élasticité Re de ce matériau est égale à 300 MPa. Le chargement appliqué est tel que l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte ΔK reste constante et égale à 6 MPa $\sqrt{m}$ durant le cyclage ; le rapport de charge est égal à 0. Un mauvais fonctionnement conduit à l'application d'une surcharge dont la valeur est

Kpic = 1,5 Kmax, Kmax représentant la valeur maximale du chargement à amplitude constante. Après la surcharge, le composant retrouve son fonctionnement normal.

1°) Si le modèle de Wheeler est utilisé et si le coefficient m de ce modèle prend pour valeur 1, sachant que les conditions de chargement qui prévalent sont des conditions de contrainte plane, de combien différera la vitesse de fissuration suivant immédiatement la surcharge de celle précédant la surcharge ?

2°) Déterminer la distance dont la fissure doit progresser après l'application de la surcharge pour retrouver la vitesse précédant la surcharge

3°) Calculer la valeur du coefficient de retard Φ pour une progression de fissure de 25 µm suivant l'application de la surcharge

4°) Discuter les limites d'une telle approche

$$\left(\frac{da}{dN}\right)_{\text{après surchage}} = \phi\left(\frac{da}{dN}\right)_{\text{amplitude constante}}$$

$$\text{avec } \phi = \left(\frac{r_{pi}}{a_o + r_{po} - a_i}\right)^m$$

Exercice 25

On considère une structure pouvant contenir des défauts dont la loi de propagation en fatigue est la suivante (R = 0) :

$da/dN = CK^4$

On admet que pour les défauts existants, le facteur d'intensité de contrainte se détermine de la manière suivante : $K = \sigma_w \sqrt{\pi a}$

- σ_w: contrainte de service
- a : longueur du défaut.

Avant sa mise en service, la structure est soumise à une contrainte d'épreuve $\sigma_p = \alpha\sigma_w$

1) Déterminer la longueur de défaut initiale a_o, tolérable après l'essai d'épreuve.

2) Calculer la taille de défaut critique en service.

3) Etablir une expression pour la durée de vie en service N_R, fonction des caractéristiques du matériau, et des conditions de chargement (α, σ_w). En déduire qu'une sécurité plus grande peut êtreassurée dans une structure épaisse construite à l'aide d'un matériau de plus basse ténacité si les coefficients C, σw et α restent les mêmes. Justifier votre réponse.

4) Sachant que pour α = 1,5 et K_{1C} = 80 MPa$\sqrt{m}$, 1000 cycles de fatigue sont permis, déterminer la valeur de α que l'on devra choisir pour obtenir la même durée devie lorsque K_{1C} = 100 MPa $\sqrt{m}$ si la contrainte de service σw reste la même.

<u>Exercice 26</u>

On considère une structure pouvant contenir des défauts dont la loi de propagation en fatigue est la suivante : $da/dN = 10^{-12}\ \Delta K^4$.

On admet que pour les défauts existants, le facteur d'intensité de contrainte se détermine de la manière suivante : $K = \sigma\sqrt{\pi a}$, σ représentant la contrainte appliquée et a la longueur du défaut. Soumise à réglementation, cette structure doit subir, avant sa mise en service, une contrainte d'épreuve statique telle que $\sigma_p = \alpha\sigma_s$

1°) déterminer la longueur de défaut initiale ao tolérable après l'essai d'épreuve

2°) calculer la taille de défaut critique en service

3°) calculer la durée de vie (nombre de cycles conduisant à la rupture brutale de la structure)

<u>Données :</u> contrainte de service, σ_s = 200 MPa

Coefficient

α = 1 5 , ténacité K_{1C} = 30 MPa $\sqrt{m}$

REFERENCES

1 M. A. Meyers and K. Kumar Chawla, Mechanical Behavior of Materials, , Cambridge University Press, (2009).

2 E.E.G Doutos Democritus, C.A. Rodopoulos and J.R. Yates, Problems of Fracture Mechanics and Fatigue**,** University of Thrace, Xanthi, Greece, (2003)

3 B. Meddour, Fatigue des matériaux , *Cours & Exercices, 2ème année Master,* Université de Abbas Laghrour Khenchela, (2006)

4 FET.L.Anderson,Fracture Mechanics, Fourth Edition, Taylor & Francis Group,(2017)

5 T. Dahlberg and A. Ekberg, Solutions Manual to problems in Failure, Fracture, Fatigue, (2002).

6 S. Lasek, Fracture Mechanics, Faculty of Metallurgy and Materials Engineering, Technical University of Ostrava, (2015).

7 Richard.G Budynas and J.Keith Nisbett, Mechanical engineering design, Tenth Edition, Mac Graw Education, (2015).

8 J. Zuidema and M. Janssen, Exercises on Fracture Mechanics, Taylor & Francis Group, (2002).

9 Norman E. Dowling, Mechanical Behavior of Materials, Fourth Edition, Polytechnic Institute and State University Blacksburg, Virginia, (2013)..

10 L. Aldon, Correction des exercices de Science des Matériaux, Institut Universitaire de Technologie de Nîmes, (2013).

11 Equipe GM-3-CDIM, Fatigue, Résistance Dynamique, Mécanique de la rupture

12 C. Bathias and A. Pineau, Fatigue of Materials and Structures, John Wiley & Sons, Inc. Hoboken, USA.

13 G. Octavian Turcan, Sensibilité des Métaux Ferreux à L’effet D’entaille en Fatigue, École Polytechnique de Montréal, (2011).

14 R. E. Peterson, Stress Concentration Factors, JohnWiley and Sons,New-York (1974).

15 Brand. et R.Sutterin, Calcul des pièces à la fatigue.Méthode de gradient, Publication Senlis-France CETIM (1980).

16 R.D. Askeland, P. P. Fulay and J.W. Wright, The Science and Engineering of Materials Sixth Edition, USA, (2010).