Democratic People's Republic of Algeria

Ministry of Higher Education and Scientific Research

University of Larbi Tebessi – Tebessa

جمهورية الشعبية الديمقراطية الجزائرية

زارة التعليم العالي والبحث العلمي

امعة العربي التبسي – تبسة

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

Faculty of economics, business and management sciences

مطبوعة جامعية بعنوان:

محاضرات وتطبيقات لمادة الرياضيات -2-

من اعداد **د. هادية مسعودان**

موجهة لطلبة السنة الاولى ليسانس علوم اقتصادية

وعلوم تجارية وعلوم التسيير

2020/2019

الفهرس

مقدمة عامة

يشمل هذا العمل المتواضع المواضيع المقررة في برنامج السداسي الثاني لطلبة السنة الأولي ل . م . د علوم اقتصادية وتجارية وعلوم التسيير.

وتعتبر المواضيع المقدمة فيه كترسيخ وتتمة لما درس في القسم النهائي في الطور الثانوي؛ و التي من المفروض ان يكون الطالب ملما بها الماما جيدا ماعدا بعض الفصول الجديدة التي لم تسبق دراستها ؛ وتعتبر المواضيع المعروضة في هذه المطبوعة أساسا لمقررات متقدمة فهي حلقة وصل بين المقررات الأولية والمتقدمة.

كما تمت مراعاة احتياجات طالب العلوم الاقتصادية ولتجارية وعلوم التسيير لما يتفق مع ما يستخدمه من الرياضيات في بقية مقاييس دراسته بعيدا عن الالتواءات والتعقيد والاختزال الذي يولد الصعوبات بحدود الممكن ومراعاة المقرر .

وقد تمت مراعاة الصعوبة التي يواجهها الطالب في استيعاب هذا المقرر وذلك بتقديم عدد كبير من الأمثلة المحلولة و الجوانب التطبيقية بأقصر الطرق ؛ مع مراعاة الدقة في المصطلحات المستخدمة .

وأخيرا نأمل أن ينال عملنا المتواضع رضا طلبتنا الكرام و الزملاء ذوي الاختصاص.

الفصل الاول

الدوال الأصلية والتكاملات

مقدمة:

يعتقد البعض أن علم التفاضل قد سبق علم التكامل لأن التكامل عملية عكسية للتفاضل وهذا غير صحيح، لأنه توجد دلالات تاريخية على استخدام التكامل في عهد قدماء المصريين (حوالي 1800 سنة قبل الميلاد) فقد دلت بردية موسكو الرياضية على علمهم بصيغة لحساب حجم الهرم.

كما تبعهم اليونانيون في استخدام هذه الطريقة في عهد أرخميدس الذي أدخل فكرة الخبرة المكتسبة والتي تمثل جزءا أساسيا في علم التكامل. ثم انتقلت الطريقة إلى الصين حيث عملوا جاهدين على إيجاد مساحة الدائرة وحجم الكرة.

وفي العصر الإسلامي استطاع ابن الهيثم استخدام طريقة تكاملية لاستنباط الصيغة العامة لمجموع متوالية حسابية من الدرجة الرابعة. ثم ابتدع الصينيون معادلات تتعامل مع التكامل.

أما في الهند فقام عالم الرياضيات باسكارا(1114-1185) ، بإعطاء مثالَ على ما يدعى الآن "معامل تفاضلي" والفكرة الأساسية التي تعرف الآن بنظرية رول ." في القرن الرابع عشر قام عالم رياضيات هندي مادافا سويّة مع علماءِ الرياضيات الآخرينِ مدرسة كيرالا بإنشاء طرق رئيسيةَ أدت إلى حساب التفاضل والتكاملِ الذي لَمْ يظهر من جديد في أي مكان في العالم

مع ظهور عصر النهضة بدأ الغرب بتعلم وترجمة الكتب القديمة من العربية وتطوير علوم الرياضيات، الفيزياء، وبعض العلوم الأخرى وتطور علم التفاضل والتكامل بشكل

خاص على يد العالمين نيوتن و ليبينتز (Leibniz et Newton) كل على حدا ؛ فقام جوتفريد لايبنتز في 13 نوفمبر 1675 بأول عملية تكامل ثم إسحاق نيوتن وتورشيلي اللذين كان لهما دور هام في توسيع هذا العلم أوائل القرن السابع عشر واللذان قدما التلميحات الأولى للعلاقة بين التكامل و الاشتقاق.

ولقد كَانَ هناك نِقاش كبير حول إسهام نيوتن أَو لايبنتز في أولوية اكتشاف المفاهيمِ المهمةِ لحساب التفاضل والتكاملِ.

ويعد حساب تكامل Riemann، الذي تم تطويره عام 1850، نقطة الانطلاق لجميع التعميمات اللاحقة، خاصةً تلك التي تخص Lebesque في القرن العشرين والتي تجاوزت حساب المساحات، الأحجام و مراكز الثقل،... ، والذي سمح بالتطور الكبير للفيزياء والاحتمالات وأصبح حساب التكامل والتفاضل هو التحليل الذي يجعل من الممكن تحديد بدقة طول المنحنى، ومساحة السطح ...

1- تعريف الدالة الأصلية

لتكن f دالة معرفة ومستمرة على المجال I نقول أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال I

إذا كان مشتق الدالة F هو f أي أن :

.1 F دالة أصلية للدالة f $\Leftrightarrow \left(F(x)\right)' = f(x),\ \forall x \in I.$

من الواضح أنه إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فان $F(x)+C$ دالة أصلية للدالة f.

ونعبر عن هذا بالرمز

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

ويقرا الرمز السابق بتكامل غير محدود ل $f(x)$ تفاضل x .

ملاحظة : - واضح أن الدالة الأصلية إن وجدت فهي ليست وحيدة ويكون الفرق بين دالتين أصليتين لنفس الدالة هو عدد ثابت c يسمى ثابت المكاملة.

- إن حساب تكامل دالة هو المسألة المعاكسة لمسألة الاشتقاق.
- شرط وجود الدالة الأصلية هو استمرارية الدالة f.

أمثلة:

- من اجل $f(x) = 2x$ فان :

1. $F(x) = x^2$

$= x^2 + 1$

$= x^2 + 4 =$............

$= x^2 + C.$

- من اجل $f(x) = \cos x$ فان $\cos x + c = F(x)$
- من اجل $f(x) = \frac{1}{x}$ فان $\ln x + C = F(x)$

2 –الخواص الأساسية للدوال الأصلية: بفرض الدالة للدالة f وf_1 وf_2 تقبل دوال أصلية ; من اجل c ثابت عندئذ لدينا :

1) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$
2) $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)\, dx + \int f_2(x)dx + C$
3) $d\int f(x)dx = f(x)$
4) $\int f(x)dx = f(x) + C$

3 - مفهوم التكامل المحدود:

من اجل f دالة مستمرة على المجال [a, b]، b>a إذا كانت F هي الدالة الأصلية ل f عندئذٍ يرمز للتكامل المحدود للدالة f على المجال [a, b] بالرمز: $\int_a^b f(x)dx$ و هي العدد الحقيقي المعرف كما يلي:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

وتسمى العبارة بصيغة نيوتن ليبتنز ويدعى a و b بحدود التكامل السفلي والعلوي على الترتيب.

مثال

احسب

$$\int_a^b e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}|_a^b = \frac{1}{2}\left(e^{2b} - e^{2a}\right)$$

4 -خواص التكاملات المحدودة:

من اجل f دالة مستمرة على المجال [a, b]، من اجل F هي الدالة الأصلية ل f فان:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. من اجل $[a, b] \ni c$ فان:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

يمكن أن نعمم الخاصية السابقة كما يلي:

اذا كان: $a_1 \leq a_2 \leq ,,,,, \leq a_n$ فان $\int_{a_1}^{a_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{i=n} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)dx$

4. من اجل f دالة مستمرة وموجبة على المجال [a, b] فان: $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

- إذا كان $\int_a^b f(x)dx = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$
- من اجل f و g دوال مستمرة على المجال [a, b] إذا كانت :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$$

- إذا كانت:

$\forall x \in [a, b]: \alpha \leq f(x) \leq \beta$ فان: $(b-a)\alpha \leq \int_a^b f(\ \ )dx \leq \beta(b-a)$

- من اجل f دالة مستمرة على المجال [a, b] فانه يوجد $c \in]a, b[$ حيث:

$$\int_a^b f(x)dx \leq f(c)(b-a)$$

- ومنه تكون القيمة الوسطى للدالة f على المجال [a, b] هي العدد μ المعطى كمايلي:

$$\mu(f) =: \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

5-قواعد التكاملات

القاعدة 1: تكامل العدد الثابت

$$\int a dx = ax + c;\ \forall a \in \mathbb{R}$$

مثال:

- $\int \sqrt{5} dx = \sqrt{5}x + c$

- $\int \frac{5}{7} dx = \frac{5}{7} x + c$

القاعدة 2:

$$\begin{cases} \int ax^n dx = a\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \ , n \in \mathbb{R} - \{-1\} \\ \int ax^n dx = a ln|x| + c \ , n = -1 \, , x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

مثال:

احسب التكامل الأتي:

$$\int \left(7x^4 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^4} + \sqrt[5]{x^3}\right) dx$$

$$= 7\int x^4 dx - 2\int \frac{dx}{x} + 3\int \frac{dx}{x^4} + \int \sqrt[5]{x^3}\, dx =$$

$$7\int x^4 dx - 2\int \frac{dx}{x} + 3\int x^{-4} dx + \int x^{\frac{5}{3}} dx = = 7\frac{x^6}{6}$$

$$-2 \ln x + 3\frac{x^{-3}}{-3} + \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + c = \frac{7}{6}x^6 - 2\ln x - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C$$

$$= \frac{7}{6}x^6 - 2ln\, x - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{8}\sqrt[3]{x^8} + C.$$

القاعدة 3:

من اجل u دالة للمتغير x قابلة للاشتقاق ، ومن اجل n عدد حقيقي يختلف عن 1- فان :

$$\int au^n u dx = a\frac{u^{n+1}}{n+1} + C \ , n \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

امثلة :

- احسب $\int 2x(x^2+3)^5 dx$

نلاحظ أن مشتقة الدالة $x^2 + 3 = u(x)$ هو $u = 2x$ ومن اجل $n = 5$. بالتالي بتطبيق القاعدة 3 نجد:

$$\int 2x(x^2+3)^5 dx = \frac{(x^2+3)^6}{6} + C$$

- احسب $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$

نلاحظ أن مشتقة الدالة $x-2=u$ هو $u=1$ ومن اجل $n=\frac{-1}{2}$. بالتالي

بتطبيق القاعدة 3 نجد:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}} = \int 1.(x-2)^{\frac{-1}{2}}\,dx = \frac{(x-2)^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + c = 2(x-2)^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x-2} + C$$

القاعدة 4:

من اجل u دالة للمتغير x قابلة للاشتقاق ، فان :

$$\int a\frac{u'}{u}dx = aln|u| + C$$

أمثلة:

احسب $\int \frac{2x}{x^2+3}dx$

نلاحظ ان مشتقة الدالة $x^2+3=u$ هي $u'=2x$ بالتالي بتطبيق القاعدة 4 نجد:

$$\int \frac{2x}{x^2+3}dx = \ln(x^2+3) + c$$

- احسب $\int tgx\,dx$

لدينا $tgx = \frac{sinx}{cosx} = \frac{-(cosx)'}{cosx}$ بالتالي بتطبيق القاعدة 4 نجد:

$$\int tgx\,dx = -\ln(cosx) + C$$

القاعدة 5:

من اجل u دالة للمتغير x قابلة للاشتقاق، فان:

$$\int au'e^u dx = ae^u + C$$

أمثلة:

- احسب $\int e^{2x}dx$

لدينا: $(2x)' = 2$ لذلك كي نطبق القاعدة 5 نضرب ونقسم التكامل السابق في 2 فيكون:

$$\frac{1}{2}\int 2e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

- احسب

$$\int 2xe^{1-x^2}dx$$

بنفس الطريقة لدينا $(1-x^2)' = -2x$ لذلك كي نطبق القاعدة 5 نضرب ونقسم التكامل السابق في 1- فيكون:

$$\int 2xe^{1-x^2}dx = e^{1-x^2} + C$$

القاعدة 6:

$$\int sin\,(ax+b)dx = \frac{-1}{a}cos\,(ax+b) + C$$

و

$$\int cos\,(ax+b)dx = \frac{1}{a}sin\,(ax+b) + C$$

أمثلة :

احسب ما يلي:

$$\int sin\,(\sqrt{2}x)dx = \frac{-1}{\sqrt{2}}cos\,(\sqrt{2}x) + C$$

و

$$\int cos\,(3x-5)dx = \frac{1}{3}sin\,(3x-5) + C$$

القاعدة 7 :

من اجل u دالة للمتغير x قابلة للاشتقاق ، و a عدد موجب يختلف عن 1 فان :

$$\int u'a^u dx = \frac{a^u}{lna} + c$$

أمثلة :

- احسب $\int 5^{-6x}dx$

لدينا $(-6x)' = -6$ لذلك كي نطبق القاعدة 7 نضرب ونقسم التكامل السابق في 6 - فيكون:

$$\int u' a^u dx = \frac{a^u}{lna} + C$$

$$\frac{-1}{6}\int(-6)5^{-6x}dx = \frac{5^{-6x}}{6ln5} + \text{C}$$

- احسب $\int x4^{3x^2}dx$

لدينا $(3x^2)' = 6\,x$ لذلك كي نطبق القاعدة 7 نضرب ونقسم التكامل السابق في 6 فيكون:

$$\frac{1}{6}\int(6x)4^{3x^2}dx = \frac{4^{3x^2}}{6ln4} + C$$

-6- طرق حساب التكاملات

6-1 -التكامل بطريقة تغيير المتحول:

لحساب التكامل $\int f(x)dx$ ، ولم يكن بالإمكان حسابه مباشرة . لنفرض متحولا جديدا $t= g(x)$ وتكون الدالة $x=\varphi(t)$ ، حيث φ ، دالة قابلة للاشتقاق و مستمرة، عندئذ:

$dx=\acute{\varphi}(t)\,dt$ ، وبالتالي

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\acute{\varphi}(t)\,dt = F(t) + c = F(g(x)) + C$$

أمثلة

1- احسب $\int cos^3x\ sinx\ dx$

نضع $t = cos\ x$ فيكون: $dt = -\ sinx\ dx$: وبالتعويض في التكامل نجد:

$$\int cos^3x\ sinx\ dx = \int -t^3dt = -\frac{t^4}{4} = -\frac{cosx^4}{4} + C$$

2- احسب التكامل $\int \frac{dx}{xlnx}$

نضع $t = lnx$: وبالتالي $x = e^{t}$ ، $dt = \frac{dx}{x}$ ، وبالتعويض ، نجد:

$$\int \frac{dx}{xlnx} = \int \frac{e^t dt}{e^t t} = \int \frac{dt}{t} = ln|t| + C = ln|lnx| + C$$

- **2 -6 التكامل بطريقة التجزئة**

لتكن v و u دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال معين حسب قانون مشتق دالة الجداء فان:

وبالتالي :

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$udv = d(uv) - vdu$$

بمكاملة طرفي العلاقة الأخيرة، نجد:

$$\int udv = \int d(u\,v) - \int vdu$$

$$\int udv = (u\,v) - \int vdu$$

تسمى العلاقة الأخيرة دستور التكامل بالتجزئة.

أمثلة

- احسب التكامل $\int x\,ln\,x\,dx$

الحل

نفرض أن $u = \ln x$ ومنه ، $du = \frac{dx}{x}$

و $v = \frac{x^2}{2}$ ومنه $dv = xdx$ عندئذٍ، بالتعويض في عبارة التكامل بالتجزئة، نجد:

$$\int x\,ln\,x\,dx = \frac{x^2}{2}lnx - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}lnx - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}lnx - \frac{x^2}{4} + C$$

ملاحظة : يمكن استعمال طريقة التكامل بالتجزئة عدة مرات في نفس التكامل.

- احسب التكامل: $\int x^{2}e^{x}dx$

الحل :

نفرض أن $v = e^x$ ومنه $dv = e^{x}dx$

نفرض أن $u = x^2$ ومنه $du = 2x$ و عندئذٍ، بالتعويض في عبارة التكامل بالتجزئة، نجد:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int x e^x \, dx \quad ....(1)$$

نحسب مرة أخرى بالتجزئة التكامل: $\int x e^x \, dx$

نفرض أن $u = x$ و ومنه $du = 1$

$dv = e^x dx$ و $v = e^x$ عندئذٍ، بالتعويض في عبارة التكامل بالتجزئة ، نجد:

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C \quad ....(2)$$

نعوض عن قيمة التكامل (2) في عبارة التكامل (1) فنجد:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - x e^x + e^x + C$$

6- 3- تكاملات الدوال الكسرية

لحساب تكامل الدوال من الشكل $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ حيث g و h دوال كثيرات حدود لحسابها، هذا يعتمد على درجة كثيري الحدود g و h ونميز الحالات الاتية

*ا – درجة **g** اكبر او تساوي درجة **h**:*

عندئذٍ، نقوم بإجراء عملية القسمة الاقليدية لدالة البسط g على دالة المقام h سنحصل على حاصل القسمة، وهو كثير حدود وليكن Q ، و باقي القسمة P فتكتب f بالشكل الآتي:

$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}= Q(x) + \frac{P(x)}{h(x)}$$

حيث درجة P أقل تماما من درجة h وبالتالي فإن:

$$\int f(x)dx = \int \frac{g(x)}{h(x)} dx = \int Q(x)dx + \int \frac{P(x)}{h(x)} dx$$

وهنا يعود حساب التكامل الى حساب تكامل لدالة كسرية بحيث درجة البسط اقل من درجة المقام ، تسمى مثل هذه الدوال بالدوال الكسرية الصحيحة (او الدوال الكسرية النظامية).

ولحسابه نميز الحالات الاتية:

ا - 1 *درجة البسط اقل بدرجة من درجة المقام :*

في هذه الحالة نحاول تفريق الكسر $\frac{P(x)}{h(x)}$ وكتابته على شكل مجموع كسرين احدهما على الشكل $\frac{h'(x)}{h(x)}$ والتي يكون تكاملها هو $\ln|h(x)|$ وكسر اخر $\frac{Q(x)}{h(x)}$ تكون درجة البسط اقل من درجة المقام بأكثر من واحد.

2 **لمكاملة الكسر الذي درجة البسط اقل من درجة المقام بأكثر من واحد** نقوم بتحليل المقام الى جداء عوامله الاولية كحاصل ضرب كثيرات حدود خطية $ax + b$ او تربيعية

$ax^2 + bx + c$

مع احتمال ان يكون احد الاقواس ذو تكرار n أي $(ax + b)^n$ او $(ax^2 + bx + c)^n$ حيث n عددصحيحموجب,وهنا نميز الحالات الاتية:

- عندما يكون المقام على صورة حاصل جداء لعوامل من الدرجة الاولى غير مكررة اي:

$$h(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \ldots\ldots (a_n x + b_n)$$

عندئذ نكتب الكسر على الشكل:

$$\frac{Q(x)}{h(x)} = \frac{\alpha_1}{a_1x + b_1} + \frac{\alpha_2}{a_2x + b_2} \ldots\ldots \frac{\alpha_n}{a_nx + b_n}$$

حيث $\alpha_{i\ /1\le i\le n}$ ثوابت حقيقية ويكون التكامل كما يلي :

$$\int \left(\frac{\alpha_1}{a_1x + b_1} + \frac{\alpha_2}{a_2x + b_2} \ldots \frac{\alpha_n}{a_nx + b_n} \right) dx =$$

$$\frac{\alpha_1}{a_1} \ln (a_1x + b_1) + \frac{\alpha_2}{a_2} \ln (a_2x + b_2) + \ldots + \frac{\alpha_n}{a_n} \ln (a_nx + b_n) + C$$

- المقام من الشكل: $h(x) = (ax + b)^n$

وفي هذه الحالة يكتب الكسر على الشكل:

$$\frac{Q(x)}{h(x)} = \frac{\beta_1}{ax + b} + \frac{\beta_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{\beta_n}{(ax+b)^n}$$

حيث $\beta_{i\ /1\le i\le n}$ ثوابت حقيقية ويكون التكامل كما يلي:

$$\int \frac{Q(x)}{h(x)} dx = \int \left(\frac{\beta_1}{ax + b} + \frac{\beta_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{\beta_n}{(ax+b)^n} \right) dx =$$

$$= \beta_1 \ln (ax + b) - \frac{\beta_2}{(ax+b)^1} - \dots\dots - \frac{\beta_n}{(ax+b)^{n-1}} + C$$

إذا كان احد العوامل الأولية لتحليل المقام عامل تربيعي غير مكرر من الشكل:

$$a\,x^2 + b\,x + c$$

وفي هذه الحالة بعد تجزيء الكسر إلى مجموع كسور مقاماتها العوامل الأولية لتحليل المقام يكون بسط الكسر الذي مقامه: $c + b\,x + a\,x^2$ هو: $e\,x + d$ وهنا نعود للحالة ا-1.

أمثلة:

- احسب التكامل الأتي

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + 11x + 5}{x^2 + 3x + 2} dx$$

لدينا

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 11x + 5}{x^2 + 3x + 2} = x + 2 + \frac{3x + 1}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\frac{3x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{3x + 1}{(x + 2)(x + 1)} = \frac{5}{(x + 2)} - \frac{2}{(x + 1)}$$

$$\int \frac{x^3 + 5x^2 + 11x + 5}{x^2 + 3x + 2} dx = \int \left(x + 2 + \frac{5}{x + 2} - \frac{2}{x + 1}\right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + 5\,ln(x + 2) - 2\,ln(x + 1) + C$$

- احسب التكامل الأتي

$$\int \frac{x + 3}{(x - 1)(x - 2)(x + 1)} dx$$

يمكن كتابة الكسر المعطى في التكامل السابق كما يلي :

$$\frac{x+3}{(x-1)(x-2)(x+1)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{\frac{5}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$\int \frac{x+3}{(x-1)(x-2)(x+1)} dx = -2\int \frac{dx}{x-1} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1}$$

$$=-2\ln(x-1)+\frac{5}{3}\ln(x-2)+\frac{1}{3}\ln(x+1)+C$$

- احسب التكامل $\int \frac{x+2}{(x-1)^3(x-2)}dx$

نلاحظ ان مقام الكسر المحدد للتكامل عبارة عن جداء عاملين احدهما غير مكرر والآخر ذو تكرار ثلاثة لذلك يكتب الكسر على الشكل:

$$\frac{x+2}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{a}{(x-2)}+\frac{b}{(x-1)}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{d}{(x-1)^3}$$

بتوحيد المقامات والمطابقة وحساب الثوابت المحددة للبسوط الأربعة نجد

$a= 4$, b = -4 ,c = -4 , d = -3

فيكون التكامل كما يلي :

$$\int \frac{x+2}{(x-1)^3(x-2)}dx = 4\int \frac{dx}{(x-2)} - 4\int \frac{dx}{(x-1)} - 4\int \frac{dx}{(x-1)^2} - 3\int \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= 4\ln(x-2) - 4\ln(x-1) + \frac{4}{(x-1)} + \frac{3}{2\,(x-1)^2} + C$$

تمرينات الفصل الأول

التمرين 1:

احسب التكاملات:

$$\int (2-2\,x^2)^2 d\,x \quad ، \int_1^2 \left(5x^3-\frac{3}{x}+\frac{\sqrt{5}}{x^7}-4\sqrt[5]{x^6}\right)dx,\ \int_{-2}^{0}|2x+3|dx,$$

$$\int (1-\sqrt{x})^3 dx$$

التمرين 2:

احسب التكاملات:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+2}};\int sinx\,cosx\,dx,\quad \int x^2\sqrt[3]{4-3x^3}dx,\int \frac{2x^3+1}{x^4+2x+1}dx,$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx,\int \frac{x}{(x^2+1)^3}dx.$$

التمرين 3:

احسب بالتجزئة التكاملات الآتية :

$$\int x\sqrt{x+4}dx;\int ln(3x-2)dx,\quad \int xe^{1-3x}dx,\int x^3e^x\,dx,$$

$$\int cos^2 xdx$$

$$\int ln(3x)dx,\int xcos2x\,dx.$$

التمرين 4 :

احسب التكاملات الآتية :

$$\int xe^{x^2},\int \frac{e^{4-\frac{2}{x^2}}}{x^3}dx,\qquad \int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+1)dx}{e^x}$$

التمرين 5:

احسب التكاملات الآتية باستخدام طريقة تحويل المتغير:

$$\int \frac{dx}{3+\sqrt{x}}/\ t=\sqrt{x},\int \frac{xdx}{cos^2(x^2+1)}/\ t=x^2+1,\int \frac{ln(lnx)dx}{xlnx}/t=\ln x,$$

$$\int \frac{xlnx}{x^4+1}, \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}, \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \int \frac{dx}{x(lnx)(ln(lnx))}$$

التمرين 6:

احسب التكاملات الآتية:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+1}, \int \frac{dx}{x^2-5x+6}, \int \frac{(2x^3+1)dx}{x^2+2x+1}, \int \frac{(x^4+1)dx}{x^2-2x+1}.$$

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية

مقدمة

ظهرت المعادلات التفاضلية أولاً مع اختراع حساب التفاضل والتكامل من قبل نيوتن ولايبنز. في العام 1671، قام إسحاق نيوتن في الفصل الثاني من كتابه *طريقة التدفقات*، بإدراج ثلاثة أنواع من المعادلات التفاضلية:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$x_1 \frac{dy}{dx_1} + x_2 \frac{dy}{dx_2} = f(x)$$

وفي عام 1695 اقترح جاكوب بيرنولي معادلة بيرنولي التفاضلية وهي من الشكل التالي:

والتي حاول لايبنز حلها من خلال تبسيطها في العام التالي .

وتعود الدراسات الاولى لما يسمى حاليا بالمعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى المتجانسة الى العام 1734 ل Alexis Clairaut بعدها طور كل من Lagrange et Euler الطريقة التي استخدمها Clairaut.

وفي العام 1739 في مسالة تدرس الاهتزازات ظهرت ل Euler معادلة تفاضلية من الرتبة الرابعة ذات معاملات حقيقية ، وتمكن هذا الاخير من وضع ما نسميه الان بالمعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية في العام 1743. كما قدم Lagrange اساسيات حل معادلة تفاضلية غير متجانسة.

تاريخيًا، درست مسالة اهتزاز حبل ما، حبل آلة موسيقية مثالاً، من طرف كل من لوران دالمبير وليونارد أويلر ودانييل برنولي وجوزيف لوي لاغرانج .وفي عام 1746، اكتشف لوران دالمبير معادلة الموجة أحادية البُعد وبعد عشر سنين، اكتشف أويلر معادلة الموجة ثلاثية الأبعاد .

تم تطوير معادلة أويلر-لاغرانج في خمسينيات القرن الماضي ، فيما يتعلق بدراساتهم لمشكلة التاوتكرون. هذه هي مشكلة تحديد منحنى تسقط عليه الجسيمات الموزونة إلى نقطة ثابتة في فترة زمنية محددة، بغض النظر عن نقطة البداية.

قام لاغرانج بحل هذه المشكلة في عام 1755 وأرسل الحل إلى أويلر .قام كلاهما بتطوير طريقة لاجرانج وتطبيقها على الميكانيكا، مما أدى إلى صياغة ميكانيكا لاغرانج.

في عام 1822، نشر فورييه عمله حول تدفق الحرارة في كتابه النظرية التحليلية للحرارة، حيث استند في تفكيره على قانون نيوتن للتبريد، أي أن تدفق الحرارة بين جزيئين متجاورين يتناسب مع اختلاف بسيط للغاية في درجات الحرارة.

يحتوي هذا الكتاب على اقتراح فورييه لمعادلة الحرارة الخاصة به من أجل نشر الحرارة الموصلة. يتم الآن تدريس هذه المعادلة التفاضلية الجزئية لكل طالب في الفيزياء الرياضية.

2- 1 تعريف المعادلة التفاضلية

لتكن y دالة للمتغير x قابلة للاشتقاق n مرة نسمي معادلة تفاضلية من الرتبة n كل معادلة من الشكل:

$$f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots\dots, y^{(n)}(x)\right) = 0 \,\dots\dots\dots (1)$$

حيث $y^{(n)}$ هي المشتقة النونية ل y.

يسمى الشكل العام ل $y(x)$ الذي يحقق المعادلة (1) بالحل العام للمعادلة التفاضلية. ونسمي حل خاص للمعادلة التفاضلية كل حل يحقق بعض الشروط الخاصة و تسمى هذه الشروط بالشروط الابتدائية .

مثال:

المعادلة التفاضلية $x^2y + y' = 0$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى.

المعادلة التفاضلية $x\, y'^2 + 5\, y'' = 0$ هي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية.

2- أنواع المعادلات التفاضلية:

سندرس الأنواع التالية من المعادلات التفاضلية وللعلم فانه توجد سبعة انواع منها لكننا سنكتفي بعرض الأنواع الآتية:

2 -1 المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى:

وهي علاقة بين دالة y (تعتبر مجهولة) وبين مشتقتها الأولى والمتغير x للدالة y وتكون من الشكل:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

مثال:

حل المعادلة التفاضلية التالية :

$$Y' = (y-1)(y-2)$$

الحل

$$Y' = (y-1)(y-2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{(y-1)(y-2)} = dx \Rightarrow \left(\frac{dy}{(y-1)}\right) - \left(\frac{dy}{(y-2)}\right) = dx$$

$$ln(y-1) - ln(y-2) = x + C \Rightarrow ln\frac{(y-1)}{(y-2)} = x + C$$

$$\frac{(y-1)}{(y-2)} = e^{x+C} \Rightarrow (1 - e^{x+C})\, y = 1 - 2e^{x+C} \Rightarrow y = \frac{1-2e^{x+C}}{1-e^{x+C}}$$

2 -1- 1 حل المعادلات من الرتبة الأولى بطريقة فصل المتغيرات

لتكن المعادلة من الرتبة الأولى المعطاة على الشكل الأتي:

$$(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0)$$

ولحل مثل هذه المعادلات نتبع الطريقة التالية:

نكتب المعادلة على الشكل : $h(x)dx + g(y)dy = 0$

حيث h دالة للمتغير x فقط و g داله للمتغير y فقط وبذلك فإن عملية فصل المتغيرات تكون تحققت ولحل المعادلة بعد عملية الفصل , ثم نجعل كل عبارة لنفس المتغير في احد طرفي المعادلة ثم نجري التكامل المباشر فيكون الحل :

$$\int h(x)\, dx + C = \int g(y) dy$$

حيث C ثابت اختياري , ويسمى ذلك الحل بالحل العام , ويمكن وضع الثابت الاختياري على أي صورة حسب متطلبات تبسيط شكل الحل العام .

وإذا علم شرط ابتدائي , نستطيع حذف الثابت الاختياري والحل الناتج يكون حلا خاصا .

امثلة :

حل المعادلة التفاضلية التالية: $y' = 2x-1$

الحل:

لنكتب المعادلة على الشكل $\frac{dy}{dx} = 2x-1$

إذا $dy = (2x-1)dx$

بمكاملة طرفي المعادلة نحصل على الحل العام للمعادلة التفاضلية $y(x) = x^2 - x + C$

- حل المعادلة التفاضلية التالية : $(1-x^2)\, y' - xy^2 = 0$

الحل :

لدينا $xy^2\, dx = (1-x^2)\, dy$

نقسم طرفي المعادلة على $y^2\,(1-x^2)$ فنحصل على :

$$\frac{\mathrm{xdx}}{(1-\mathrm{x}^2)} = \frac{dy}{y^2}$$

هي معادلة تفاضلية ذات متغيرات منفصلة بتكامل طرفي المعادلة نجد :

$$\int \frac{xdx}{(1-x^2)} = \int \frac{dy}{y^2}$$

- $(y)^{-1} = \frac{-1}{2} ln|1-x^2| + C$

$$C - (ln|1-x^2|)^{\frac{-1}{2}} = (y)^{-1}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{C - (ln|1 - x^2|)^{\frac{-1}{2}}}$$

2 -2 المعادلات التفاضلية المتجانسة:

2 – 2-1 تعريف الدالة المتجانسة :

لتكن g دالة معرفة على $\mathbb{R}^2$ نقول أن الدالة g متجانسة من الدرجة n إذا كان :

$g(tx,ty) = t^n g(x,y)$ من أجل كل قيم (x,y).

مثال:

بين أن الدالة التالية دالة متجانسة:

$$F(x,y) = y + xe^{\frac{x}{y}}$$

لدينا: $F(tx,ty) = ty + txe^{\frac{tx}{ty}} = t\left(y + xe^{\frac{x}{y}}\right) = t\,F(x,y)$

ومنه الدالة متجانسة من الدرجة الاولى .

2 – 2 -2 تعريف المعادلة التفاضلية المتجانسة :

هي معادلة تفاضلية من الرتبة الأولى غير قابلة لفصل المتغيرات ويمكن ان تصبح قابلة للفصل بعد إجراء تحويل متغير .

أمثلة:

حل المعادلة التفاضلية التالية: $xydy = (x^2-y^2)dx$

الحل:

من المعادلة التفاضلية نحصل على: $\frac{dy}{d} = \frac{x^2-y^2}{2xy}$

بقسمة كل من البسط و المقام على x^2 نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2-y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} = \frac{1-\frac{y^2}{x^2}}{2\frac{y}{x}}$$

كما نلاحظ أن هناك نفس الكسر في البسط و المقام و لتبسيط المعادلة نعوض عن هذا الكسر

بمتغير أخر و ليكن و $z = \frac{y}{x}$ فتصبح المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{1-z^2}{2z}$

و بما أن: $z = \frac{y}{x}$ اذا $y = xz$ ومنه : $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$

و بالتعويض عن $\frac{dy}{dx}$ في المعادلة نحصل على معادلة للمتغيرين x,z :

$$x\frac{dz}{dx} + z = \frac{1-z^2}{2z} \Rightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{1-z^2}{2z} - z = \frac{1-3z^2}{2z} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2zdz}{1-3z^2}$$

$$\Rightarrow lnx + c = \frac{1}{3}ln(1-3z^2) = ln(1-3z^2)^{\frac{1}{3}} = ln\left(1-3\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$Cx = \left(\mathbf{1}-\mathbf{3}\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \mathbf{3}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \mathbf{1}-(\boldsymbol{Cx})^3 \Rightarrow \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{\mathbf{1}-(\boldsymbol{Cx})^3}{\mathbf{3}}$$

3-2-2 – المعادلات التفاضلية غير المتجانسة

تكون المعادلة التفاضلية غير متجانسة إذا كان $F(x,y) \neq F(tx, ty)$

مثال:

حل المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-4}{2x-y+1}$

الحل:

نلاحظ ان الشرط $F(x,y) = F(tx, ty)$ غير محقق لا ن:

$$F(x,y) = \frac{x+y-4}{2x-y+1} \neq \frac{tx+ty-4}{2tx-ty+1}$$

ومنه المعادلة ليست معادلة متجانسة ولا يمكن أبدا فصل الثابت t .

نلاحظ أن الدالة تمثل معادلتي خطين مستقيمين متقاطعين، لنجد نقطة التقاطع للمستقيمين ثم نضيف النقطة إلى x,y ثم بالتعويض عنهم في المعادلة تتحول المعادلة إلى معادلة متجانسة و تحل بنفس الطريقة.

نقطة التقاطع هي $(1,3)$ ثم نعوض عن كل $x= x+1$ و كذلك عن كل $y= y+3$ في المعادلة الأصلية نحصل على معادلة متجانسة $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{2x-y}$

بقسمة المعادلة على x نحصل على $\frac{dy}{d} = \frac{1+\frac{y}{x}}{2-\frac{y}{x}}$ ثم بوضع $\frac{y}{x}=z$ نحصل على

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+z}{2-z}$$

ثم بالتعويض عن $\frac{\quad}{dx}$ من المعادلة أعلاه $y = xz$

ثم بالتفاضل بالنسبة ل x يكون: $\frac{dy}{dx} = x\frac{dz}{dx} + z$

ثم بالتعويض في المعادلة نحصل على: $\frac{dy}{d} = x\frac{dz}{dx} + z = \frac{1+z}{2-z}$

بتبسيط المعادلة نجد: $\frac{(2-z)dz}{1-z-z^2} = \frac{dx}{x}$ وبهذا تم فصل المتغيرات

ثم نقوم بإجراء التكامل نحصل على الحل.

- **4-2-2 حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية ذات معاملات حقيقية :**

نسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة كل معادلة من الشكل:

$ay''+by'+cy =f(x)$ حيث f دالة و $a \neq 0$ و $(c,b)\in \mathbb{R}^2$.

في حالة $f(x)= 0$ تسمى المعادلة معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة متجانسة؛ لندرس بعض الحالات الخاصة.

<u>بعض الحالات الخاصة</u>: نفرض في كل الحالات الاتية ان $f(x)= 0$

- اذا كان $(c,b) = (0,0)$ فان $a\,y'' = 0$

$$y'' = 0 \Rightarrow \exists k_1 \in \mathbb{R}: y'(x) = k_1 \Rightarrow \exists\, (k_1; k_2) \in \mathbb{R}^2: y(x) = k_1x + k_2$$

اذا كان $(c =0)$ فان $a\,y'' + by' = 0$

$$y''+ ay' = 0 \Rightarrow (y')'+ ay' = 0$$

ومنه y' حل للمعادلة $z'+ az = 0$

بالتالي $y'(x) = \lambda e^{-ax}$ بحيث λ عدد حقيقي كيفي. إذن الحل العام للمعادلة:

$x \to \lambda e^{-ax}$ هي الدوال الأصلية ل $y'' + ay' = 0$

أي الدوال $x \mapsto \frac{-\lambda}{a} e^{-ax} + c$

- حل المعادلة التفاضلية $(a;b) \neq (0;0) \in \mathbb{R}^2 : y'' + ay' + by = 0 \ldots\ldots(*)$

لنبحث عن حلول من نوع $r \in \mathbb{R}; y : x \to e^{rx}$

y حل للمعادلة $(*)$ $\Leftarrow r^2e^x + are^x + be^x = 0 \Leftarrow r^2 + ar + b = 0$

إذن إذا كان r حل للمعادلة $r^2 + ar + b = 0$ فان الدالة $x \to e^{rx}$ حل للمعادلة $(*)$.

تسمى المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $(*)$.

خاصية

لتكن المعادلة التفاضلية $y'' + ay' + by = 0$ و لتكن $r^2 + ar + b = 0$ المعادلة المميزة

- إذا كانت المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين حقيقين r_2, r_1

$$y(x) = \alpha\ e^{r_1 x} + \beta\ e^{r_2 x}$$

هي الحل العام ل $(*)$ حيث α , β عددان كيفيان حقيقيان

إذا كانت المعادلة المميزة لها جذر مضاعف $r_0 \Leftarrow y(x) = (\alpha\ x + \beta)\ e^{r_0 x}$

الحل العام ل $(*)$ حيث α , β عددان كيفيان حقيقيان.

إذا كانت المعادلة المميزة لها جذرين مختلفين مركبين $r_1, r_2 \,/\, r_1 = p + iq$

$r_2 = p - iq$ $\Leftarrow y(x) = e^{px}(\alpha \cos qx + \beta \sin qx)$

هي الحل العام ل $(*)$ حيث α , β عددان كيفيان حقيقيان .

مثال

عين حل عام للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0$ ثم حل خاص يحقق الشرطين الابتدائيين :

$y'(0) = -1 ; y(0) = 2$

الحل

المعادلة المميزة للمعادلة السابقة هي المعادلة: $r^2 + 3r - 4 = 0$ وجذورها هي $r_1 = 1, r_2 = -4$

ومنه ; حل للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = \alpha\ e^{x} + \beta\ e^{-4x}$$

من اجل $y(0) = 2$ فان $\alpha + \beta = 2$ ومن اجل $y'(0) = -1$ فان $\alpha - 4\beta = -1$ بحل جملة المعادلتين السابقتين نجد ان $\alpha = \frac{7}{5}$ و $\beta = \frac{3}{5}$ فيكون الحل الخاص للمعادلة التفاضلية هو :

$$y(x) = \frac{7}{5}e^{x} + \frac{3}{5}e^{-4x}$$

مثال

عين حل عام للمعادلة $y'' - 2y' + 4y = 0$

الحل

المعادلة المميزة للمعادلة السابقة هي المعادلة : $r^2 - 2r + 4 = 0$ وتقبل جذر مضاعف هو $r_0 = 2$ ومنه :

حل للمعادلة التفاضلية هو $y(x) = (\alpha x + \beta)e^{2x}$

مثال

عين حل عام للمعادلة $y'' + y' + y = 0$

الحل

المعادلة المميزة للمعادلة السابقة هي المعادلة : $r^2 + r + 1 = 0$ وجذورها مركبة هي $r_{1,2} = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}$, ومنه :

حل للمعادلة التفاضلية هو:

$$y(x) = e^{\frac{-1}{2}x}\left(\alpha\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \beta\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

- **حل المعادلة التفاضلية $(a;b) \neq (0;0) \in \mathbb{R}^2 : y'' + ay' + by = f(x)$......(**)**

لحل المعادلة ** نجد اولا الحل العام للمعادلة * ثم نعين حل خاص للمعادلة ** و هذا يعتمد على طبيعة الدالة **f** ويكون الحل العام للمعادلة ** هو حاصل جمع الحلين الخاص ل** والحل العام ل *

قواعد إيجاد الحل الخاص ل **.

يوضح الجدول التالي كيفية حساب الحل الخاص للمعادلة التفاضلية (**) حسب طبيعة الدالة **f**.

شكل الحل الخاص	ملاحظات	f(x)
$\alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$	$n \geq 0$	ax^n
αe^{rx}	$r \neq r_1 \neq r_2$	ae^{rx}
$\alpha x e^{rx}$	$r = r_1$ ou $r = r_2$	
$\alpha x^2 e^{rx}$	$r = r_1 = r_2$	
$\alpha_1 \cos kx + \alpha_2 \sin kx$	$k \neq q$	asin(kx) ou
$x(\alpha_1 \cos kx + \alpha_2 \sin kx)$	$k = q$	acos(kx)

حيث $\alpha_n; \alpha_{n-1}; \ldots ; \alpha_1 ; \alpha_0; \alpha$ ثوابت حقيقية تحسب بالتعويض في قيم $y''; y'; y$.

مثال .

جد حل المعادلة التفاضلية $y'' -2 y' - 15y = 3x^2 + 1$ ...... *

ثم عين حل خاص يحقق الشرطين الابتدائيين $y'(0) = -1 ; y(0) = 0$

الحل

لنجد أولا الحل العام للمعادلة $y'' -2 y' - 15y = 0$ ...... **

والتي معادلتها المميزة هي المعادلة: $r^2 -2r -15 = 0$ وجذورها هي $r_1=5, r_2 = -3$ ومنه

الحل العام للمعادلة التفاضلية ** هو:

$$y(x) = \alpha e^{5x} + \beta e^{-3x}$$

لنجد الآن الحل الخاص للمعادلة * . وبما أن الطرف الثاني للمعادلة * من الدرجة الثانية

بالتالي يكون الحل الخاص ل * من الشكل:

$$y_p = ax^2 + c + bx$$

ومنه: $y''_p = 2a$ و $y'_p = 2ax + b$

بالتعويض في المعادلة * نجد:

$$2a-4ax-2b-15ax^2-15bx-15c=3x^2 + 1$$

فيكون الحل الخاص للمعادلة *

$$y_p = \frac{-1}{5}x^2 + \frac{4}{75}x + \frac{109}{75}$$

ومنه الحل العام للمعادلة * هو:

$$y(x) = \alpha\ e^{5x} + \beta\ e^{-3x} + \frac{4}{75}x + \frac{109}{75} + \frac{-1}{5}x^2$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow \frac{109}{75} + \alpha + \beta = 0$$

$$y'(0) = -1 \Rightarrow 5\alpha - 3\beta + \frac{4}{75} = -1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{109}{75} \\ 5\alpha - 3\beta = \frac{-79}{75} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-203}{300}\ et\ \beta = -\frac{233}{300}$$

فيكون الحل العام ل * هو :

$$y(x) = \frac{-203}{300}\ e^{5x} - \frac{233}{300}\ e^{-3x} + \frac{4}{75}x - \frac{1}{5}x^2 + \frac{109}{75}$$

تمرينات الفصل الثاني

التمرين 1:

عين الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

$$y' = -3y + 2 \text{ ؛ } y' = y \text{ ؛ } y' = -3y \text{ ؛ } y' = -3e^{x} \text{ ؛ } y' = \frac{2x-1}{x+3}$$

ثم عين حل خاص للمعادلة التفاضلية $y' = -3y + 2$ يحقق الشرط $y(1) = 2$.

التمرين 2:

عين الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

$$y'' = 3x^2 + 5x - 7 \,,\, y'' = \ln x \,,\, y'' = \frac{1}{x}$$

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \text{ ؛ } y'' - 5y' + 6y = 0,\ \ y'' - y' - 6y = 0$$

ثم عين حل خاص للمعادلة التفاضلية $y'' - 5y' + 6y = 0$ يحقق الشروط $y(0) = 1$.

$y'(0) = -1$

التمرين 3:

عين الحل العام للمعادلات التفاضلية الآتية :

$$y'' - 4y' + 4y = x + 5 \text{ ؛ } y'' - 5y' + 6y = e^{x},\ \ y'' - y' - 6y = 3x^2 + 3x - 6$$

$$y'' - 4y' = 2x + 3,\ y'' - 3y = x + 8.$$

ثم عين حل عام ثم حل خاص للمعادلة التفاضلية $y'' - 5y' + 6y = x + 5$ يحقق الشروط

$y'(0) = -1$.$y(0) = 1$

الفصل الثالث

الدوال ذات متغيرين

مقدمة:

بدا مفهوم الدوال ذات عدة متغيرات في الظهور قبل قرون عديدة في الفيزياء ، حيث درست كثيرًا الكميات المعتمدة على كميات أخرى ، لكنها تطورت إلى حد كبير منذ نهاية القرن السابع عشر. في عام 1667 ، قدم جيمس غريغوري ، في كتابه Vera circuli et hyperbolae quadratura ، أحد التعاريف الرسمية الأولى للدالة : " على انها كمية تم الحصول عليها من كميات أخرى عن طريق سلسلة من العمليات الجبرية أو أي عملية يمكن تخيلها".

وتطور في نهاية القرن السابع عشر حيث قام James Gregory في العام 1667 بإعطاء أول تعريف للدالة ذات عدة متغيرات.

كان أول استعمال للرمز ∂ عام 1770 من طرف CONDORCET Marie Jean Antoine Caritat في مذكرة حول المعادلات التفاضلية .

ولم يستعمل بعدها إلى أن عاد للظهور و الانتشار مرة أخرى عام 1841من طرف Carl Gustav Jacob

ويعتبر كل من الرياضيين (الفرنسي CLAIRAUT Alexis-Claude عام 1747 ثم السويسري EULER Leonhard عام 1783) مؤسسي مفهوم المشتقات الجزئية وقد قدما مفهوم التفاضل التام لدالة ذات متغيرين حقيقيين :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$$

لكن القواعد الأساسية للدوال ذات عدة متغيرات وضعت في نهاية القرن التاسع عشر وبدايات القرن العشرين تطورت دراسة المشتقات الجزئية وخاصة من الرتبة الثانية للدوال ذات عدة متغيرات.[4]s

1 - تعريف:

نسمي دالة ذات متغيرين كل دالة معرفة من المجموعة $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ بحيث ترفق بكل ثنائية (x.y) قيمة عددية وحيدة ولتكن z ونرمز للدوال ذات متغيرين كما يلي :

$$f:\mathcal{R}\times\mathcal{R}\to\mathcal{R}$$
$$(x.y)\mapsto \mathrm{z}=f\ (\mathrm{x.y})$$

مثال:

$$f_1\ (\mathrm{x.y})=2\ x^5\mathrm{y}^3-5x^3\mathrm{y}^2+x\mathrm{y}-19x-\mathrm{y}+3$$
$$f_2\ (\mathrm{x.y})=ln(x^2+\mathrm{y}^2-x+\mathrm{y}-3)$$
$$f_3\ (\mathrm{x.y})=\frac{x-7}{2x-3\mathrm{y}-2}$$

ملاحظة:

نسمي المجموعة الجزئية من مجموعة البدء التي لجميع عناصرها صورة في مجموعة الوصول بمنطقة تعريف الدالة ونرمز لها $=\{(x.y)\in\mathcal{R}\times\mathcal{R}: z=f(x.y)\}$ D_f وهذه مجموعة جزئية من المستوي.

مثال:

منطقة التعريف هي المستوي بأكمله. $f_1(x.y)$ في المثال السابق بالنسبة للدالة

$$D_{f_2}=\{(x.y)\in\mathcal{R}\times\mathcal{R}: x^2+y^2-x+y-3>0\}$$

$$x^2+y^2-x+y-3>0\Rightarrow\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)+\left(y^2+y+\frac{1}{4}\right)>\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2>\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2,$$

بالتالي تكون منطقة تعريف الدالة هي خارج الدائرة ذات المركز $(\frac{1}{2},\frac{-1}{2})$ ونصف قطرها $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

$$D_{f_3}=\{(x.y)\in\mathcal{R}\times\mathcal{R}: 2x-3y-2\neq 0\}$$

$$2x-3y-2\neq 0\ \Rightarrow y\neq\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$$

فتكون منطقة التعريف هي نقاط المستوي ماعدا المستقيم ذو المعادلة $y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$

2. المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى:

لتكن f دالة للمتغيرين $(x.y)$ تكون المشتقة الجزئية من المرتبة الأولى للدالة (f) بالنسبة للمتغير x هي المشتقة الاعتيادية للدالة (f) بالنسبة للمتغير x وذلك باعتبار y ثابت ونر<مز لها f'_x او $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

أما المشتقة الجزئية من المرتبة الأولى للدالة (f) بالنسبة للمتغير y هي المشتقة الاعتيادية للدالة (f) بالنسبة للمتغير y وذلك باعتبار x ثابت ونرمز لها f'_y او $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.

مثال

عين المشتقات الجزئية من الرتبة الأولى للدالة التالية:

$$f(x.y)= ln(x^2 + xy^2 - x + y - 3)$$

الحل

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+xy^2-x+y-3)'_x}{x^2+xy^2-x+y-3} = \frac{2x+y^2-1}{x^2+xy^2-x+y-3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+xy^2-x+y-3)'_y}{x^2+xy^2-x+y-3} = \frac{2xy+1}{x^2+xy^2-x+y-3}$$

3- المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية.

لتكن الدالة f دالة ذات متغيرين ؛ إذا كانت الدالة (f) لها مشتقات جزئية من الرتبة الأولى وكانت مشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولى هي نفسها دوال لها مشتقات جزئية . تسمى هذه المشتقات بالمشتقات الجزئية من الرتبة الثانية وتكون وفق المخطط الأتي:

$$\begin{tikzcd}
 & & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \\
 & fx' = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\
f(x.y) \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\
 & & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \\
 & f_y' = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)
\end{tikzcd}$$

ملاحظة:

المشتقات f_x'' , f_y'' تسمى مشتقات جزئية من الرتبة الثانية متجانسة؛ أما f_{xy}'' , f_{yx}'' تسمى مشتقات جزئية من الرتبة الثانية مختلطة. وتكون المشتقات الجزئية المختلطة دائما متساوية.

مثال

عين المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة التالية:

$$f(x.y)= ln(x^2 + xy^2 - x + y - 3)$$

الحل

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{(x^2+xy^2-x+y-3)'_x}{x^2+xy^2-x+y-3} = \frac{2x+y^2+1}{x^2+xy^2-x+y-3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{(x^2+xy^2-x+y-3)'_y}{x^2+xy^2-x+y-3} = \frac{2xy+1}{x^2+xy^2-x+y-3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(x^2+xy^2-x+y-3) - (2x+ y^2-1)(2x+y^2+1)}{(x^2+xy^2-x+y-3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2x(x^2+xy^2-x+y-3)-(2xy+1)^2}{(x^2+xy^2-x+y-3)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2y(x^2+xy^2-x+y-3)-(2xy+1)(2x+y^2+1)}{(x^2+xy^2-x+y-3)^2}$$

- **معادلة لابلاس :** لتكن f دالة قابلة للاشتقاق؛ نقول أن الدالة تحقق معادلة لابلاس إذا تحقق الشرط الأتي:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

مثال

بين ان الدالة المعطاة كما يلي $f(x.y) = e^{-2y} cos 2x$ تحقق معادلة لابلاس.

الحل

لدينا

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2\, e^{-2y} sin2x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\, 4\, e^{-2y}\, cos\, 2\, x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\, e^{-2y} cos2x \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \; 4\, e^{-2y}\, cos\, 2\, x$$

ومنه

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

وعليه فان الدالة تحقق معادلة لابلاس.

4 - التكاملات البسيطة لدالة ذات متغيرين:

لتكن f دالة ذات متغيرين معرفة ومستمرة على المنطقة $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ فيكون حساب التكامل غير المحدود للدالة f بالنسبة للمتغير x هو حساب دالتها الاصلية بالنسبة للمتغير x واعتبار y كثابت وتكون الدالة الاصلية دالة للمتغيرين (x,y) ونفس الطريقة في حال التكامل بالنسبة للمتغير y.

أما لحساب التكامل المحدود للدالة f بالنسبة للمتغير x على المجال $[a,b]$ هو حساب تكاملها المحدود على المجال $[a,b]$ بالنسبة للمتغير x واعتبار y كثابت ويكون الناتج هو دالة

للمتغير (y) ونفس الطريقة في حال التكامل بالنسبة للمتغير y وفي هذه الحالة يكون الناتج دالة بالنسبة ل x . أي أن:

$$\int f(x,y)\ dx = g(x,y) + C$$ و

و $$\int f(x,y)\ dy = h(x,y) + C$$

و $$\int_a^b f(x,y)\ dx = k(y)$$

$$\int_c^d f(x,y)\ dy = l(y).$$

مثال

- احسب التكاملات الآتية

- $\int (x^2 + xy^2 - x + y - 3)dx$
- $\int (x^2 + xy^2 - x + y - 3)dy$
- $\int_1^2 (x^2 + xy^2 - x + y - 3)dx$
- $\int_{-1}^0 (x^2 + xy^2 - x + y - 3)dy$

الحل

- $\int (x^2 + xy^2 - x + y - 3)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}y - \frac{x^2}{2} + yx - 3x + C$
- $\int (x^2 + xy^2 - x + y - 3)dy = x^2y + \frac{y^3}{3}x - xy + \frac{y^2}{2} - 3y + C$
- $\int_1^2 (x^2 + xy^2 - x + y - 3)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}y - \frac{x^2}{2} + yx - 3x\Big|_1^2 =$

  $\frac{8}{3} + 2y - 2 + 2y - 6 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} - y + 3 = \frac{5}{2}y - \frac{7}{2} + \frac{7}{3} == \frac{5}{2}y - \frac{7}{6}.$
- $\int_{-1}^0 (x^2 + xy^2 - x + y - 3)dy = x^2y + \frac{y^3}{3}x - xy + \frac{y^2}{2} - 3y\Big|_{-1}^0 =$

  $x^2 + 2\frac{x}{3} + \frac{5}{2}$

4- التكاملات المضاعفة لدالة ذات متغيرين:

لتكن f دالة ذات متغيرين معرفة ومستمرة على المنطقة $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ المعرفة وفق دالتين كما يلي:

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ et } \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathcal{R}^2 / c \leq y \leq d \text{ et } \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\}$$

نظرية Fubini

يمكن حساب التكامل المضاعف للدالة f على Ω بحساب تكاملين بسيطين كما يلي:

$$\iint_\Omega f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dx\right] dy$$

مثال

احسب التكامل المضاعف الأتي :

$$\iint_\Omega (x^2+y)dxdy \ : \Omega = \{ (x,y) \in \mathcal{R}^2, 0 \leq x \leq 1 \ et \ 0 \leq y \leq 1-x\}$$

$$I = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} (x^2+y)dy\right] dx = \int_0^1 x^2 y + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^3 - 2 + \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx = \frac{x^4}{4} - 2x - \frac{(1-x)^3}{6}\Big|_0^1 = \frac{5}{6}.$$

6 - خواص التكاملات المضاعفة

لتكن f دالة ذات متغيرين معرفة ومستمرة على المنطقة $\Omega \subset \mathcal{R}^2$ ومن اجل $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ فان :

- التكامل المضاعف خطي اي انه:

$$\iint (\alpha f + \beta g)\ (x,y)dxdy = \alpha \iint f\ (x,y)dxdy + \beta \iint g\ (x,y)dxdy$$

- التكامل المضاعف تجميعي آي إن من اجل $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ و $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ فان:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x,y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy$$

- الإشارة الموجبة: من اجل f موجبة على Ω فان:

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy \geq 0.$$

- من اجل φ دالة للمتغير x وψ دالة للمتغير y فان حساب التكامل المضاعف لجداء هاتين الدالتين على المساحة $D = [a,b] \times [c,d]$ يعود إلى حساب جداء تكاملين بسيطين لكل دالة منهما بالنسبة لمتغيرها أي أن :

$$\iint_{D} \varphi(x)\psi(y)dx\mathrm{dy} = \int_a^b \varphi(x)\left[\int_c^d \psi(y)dy\right] dx$$
$$= \left[\int_a^b \varphi(x)dx\right] \times \left[\int_c^d \psi(y)dy\right]$$

تمرينات الفصل الثالث

التمرين 1:

من اجل f دالة ذات متغيرين معرفة كما يلي:

$$f(x,y) = 3x^2\sqrt{y} \ \ -1$$

عين منطقة التعريف و مثلها بيانيا واحسب $f(1,4)$.

التمرين 2:

عين منطقة التعريف للدوال الآتية و مثلها بيانيا:

$$f_1(x,y) = \frac{3x^2y}{2x-4y+1}\ ,f_2(x,y) = ln(5x+2y-4), f_3(x,y) = \frac{3x^2+y}{2x^2+2y^2-4x+y+1}$$

التمرين 3:

عين المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدوال الآتية :

$$f_1(x,y) = \frac{3x^2y}{2x-4y+1}\ ,f_2(x,y) = ln(5x+2y-4), f_3(x,y) = \sqrt{2x^2y-3xy^3+y+1}$$

$$f_4(x,y) = e^{3x^2y-5x}$$

التمرين 4:

بين إن الدوال الآتية تحقق معادلة لابلاس:

$$f_1(x,y) = e^{ax}sinay\ , \qquad f_2(x,y) = ln(\,x^2+y^2)$$

التمرين 5:

احسب التكاملات الآتية :

$$\int ln(5x+2y)dx\ ,\int_a^b ln(5x+2y)dy, \iint (2x^2y-3xy^3+y+1)\,dxdy$$

$$\int_0^1\int_{-1}^1 (e^{xy}+x^3y-2)\,dxdy$$

الفصل الرابع

الفضاءات الشعاعية

مقدمة

يعتبر أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي مؤسس علم الجبر حيث عرض في كتابه ***حساب الجبر والمقابلة*** أول حل منهجي للمعادلات الخطية والتربيعية .

ظهرت البنى الجبرية مع ظهور الأعداد ، بداية مع الأعداد الطبيعية ثم الصحيحة و العمليات الحسابية عليها، ثم أدى البحث عن طرق لحل المعادلات إلى ظهور الجبر المجرد، إن الفكرة الفيزيائية ؛ الشعاع تم تعميمها إلى الفضاءات الشعاعية و تمت دراستها في الجبر الخطي.

ظهرت دراسة الفضاء مع الهندسة، وبدأت مع الهندسة الاقليدية و علم لمثلثات، في الفضائين ثنائي و ثلاثي البعد، ثم تم تعميم ذلك لاحقا إلى علوم هندسية غير اقليدية، لتلعب دورا في النظرية النسبية العامة.

ويعود أول ظهور لتعريف الفضاء الشعاعي إلى القرن السابع عشر مع العالم الايطالي جيوسيبي بيانو Giuseppe Peano ،

واعتمادا على حل الجمل الخطية ، تطورت نظرية الفضاءات الشعاعية ، ففي عام 1750 ، تم نشر عملين مهمين لتاريخ الفضاءات الشعاعية ؛ الأول ، "مقدمة في تحليل المنحنيات الجبرية" بقلم غابرييل كرامر حيث وضعت الأسس لتطوير نظرية المحددات ، والثاني "حول تناقض واضح في الخطوط المنحنية" بقلم ليونارد أولر ، المتعلق بالمنحنيات الجبرية وعلى مفارقة كرامر.

كما نشر غراسمان هيرمان غونتر جزءًا من نتائجه في عام 1844 في أطروحة بعنوان "علم الكميات الضخمة أو نظرية الفضاء" (اكتمل في عام 1863). ومن خلالها نحن مدينون له بالمفاهيم الأولى التالية:

- الاستقلال الخطي
- مجموع فضائين جزئيين
- الجداء الخطي ، الموافق حاليا للجداء السلمي

لكن التطور الفعلي لنظرية الفضاءات الشعاعية بدأ فقط بعد عام 1920.

حاليا، تطبق الفضاءات الشعاعية في الجبر والهندسة، حيث تشكل البنية الجبرية الملائمة لدراسة أنظمة المعادلات الخطية و الإطار العام لدراسة سلاسل فوربيه.

1- تعاريف جبرية:

- لتكن E مجموعة غير خالٌية ,نسمًي (⋆) عمليـة داخليـة على E أو قانون تركيب داخلًي كل تطبيق من E× E نحوE؛ بحيث لكل ثنائية

مثال: الجمع في مجموعة الأعداد الطبيعية عملية داخلية لكن الطرح على نفس المجموعة ليس داخلي.

- لتكن E مجموعة غير خالٌية ,مزودة بعمليـة داخليـة (+)، تكون $(E,+)$ زمرة إذا تحقق:

- العملٌية (+) تجميعية أي : $\forall x,y,z\in E: x+(y+z)=(x+y)+z$
- يوجد في Eعنصر حيادي نرمز له0_E ويحقق: $\forall x\in E: x+0_E=0_E+x=x$
- لكل عنصر $x\in E$ نظير x' فيE يحقق: $\forall x\in E: x+x'=x'+x=0_E$

إذا تحقق بالإضافة للشروط السابقة أن العملٌية+ تبديليه أي :
$\forall x,y\in E: (x+y)=(y+x)$: نقول ان الزمرة $(E,+)$ تبديليه.
مثال : مجموعة الأعداد الطبيعة مزودة بالجمع ليست زمرة، لكن الأعداد الصحيحة مزودة بالجمع زمرة تبديليه.

- لتكن E مجموعة غير خالية ,نسمًي عملية خارجية علًى E بتمثيل في $\mathbb{R}$ كل تطبيق منE نحو E

مثال: الضرب بعدد حقيقي ليس عملية خارجية علي مجموعة الأعداد الطبيعية.

- لتكنE مجموعة غير خالية مزودة بعملتي جمع وضرب، نقول أن$(E,+,.)$ حقلا إذا كانت عمليتي الجمع والضرب تحقق الخصائص التالي:$\forall x,y,z\in E$

- خاصية التجميع لعملية الجمع $x+(y+z)=(x+y)+z$ وعملية الضرب $x.(y.z)=(x.y).z$
- خاصية التبديل لعملية الجمع $(x+y)=(y+x)$ وعملية الضرب $(x.y)=(y.x)$
- العنصر الحيادي لعملتي الجمع والضرب: وجود عنصرين مختلفين 0 و 1 في E بحيث أن $x+0=x$ و. $x.1=x$

- النظير الجمعي : لكل عنصر $x \in E$، يوجد عنصر $x' \in E$ يحقق :

$(x + x') = (x' + x) = 0$ وتسمى x' نظيرة x بالنسبة للجمع.

- النظير بالنسبة للضرب: لكل عنصر $x \in E$، يوجد عنصر $x' \in E$ يحقق :

$(x.x') = (x'.x) = 1$ وتسمى x' نظيرة x بالنسبة للضرب.

- الخاصية التوزيعية للضرب على الجمع :

$\forall x, y,$

لتكن F مجموعة الأعداد الحقيقة التي بالشكل $\left(a + b\sqrt{3}\right)$ حيث a,b أعداد كسرية

فان: (. , +,F) هي حلقة تبديلية.

2- تعريف الفضاء الشعاعي:

ليكن K حقل تبديلي و E مجموعة مزودة بعمليتين الأولى داخلية و الثانية خارجية حيث:

يكون $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل التبديلي K إذا تحققت الشروط التالية:

1. $(E,+)$ زمرة تبديليه أي إن:

إذا تحققت الشروط الثالثة التالّية

العملية. تحقق الشروط الآتية:

- $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in E : (\alpha + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$
- $\forall \alpha \in K, \forall x, y \in E : \alpha.(x + y) = \alpha.x + \alpha.y$
- $\forall \alpha, \beta \in K, \forall x \in E : (\alpha \times \beta).x = \alpha(\beta x)$
- $\forall x \in E; 1.x = x.1 = x$

تسمى عناصر الفضاء الشعاعي بالأشعة أما عناصر الجسم فتسمى سلميات.

نرمز ب 0_E للعنصر الحيادي بالنسبة لقانون (+) ويدعى بالشعاع الصفري .

أمثلة

- إن الحقل $(K,+,\times)$ هو فضاء شعاعي على نفسه وذلك عندما نعرف القانون الخارجي $(\times)$ بالشكل التالي:

نضع- $x \in K$ و $\lambda \in K: \lambda \times x = \lambda.x$

– اذا كان $K = \mathbb{R}^2$ و $E = \mathbb{R}^2$:نعرف جمع شعاعين بالشكل التالي

$$\forall x , y \in \mathbb{R}^2; x = (x_1 , x_2), y = (y_1 , y_2): x + y = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$$

ونعرف ضرب شعاع بسلمية λ كما يلي:

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}^2; x = (x_1 , x_2): \lambda x = (\lambda x_1 , \lambda x_2)$$

ان $(\mathbb{R}^2,+,\times)$ هو فضاء شعاعي فوق الحقل $\mathbb{R}$.

2- تعريف

ليكن K حقل تبديلي نسمي جبرًا على K كل بنية جبرية $(E ,+,\times)$ تحقق الشروط التالية

- البنية $(E ,+, .)$ على الحقل K فضاء شعاعي
- البنية $(E,+,\times)$ حلقة

$$\forall \lambda \in K; \forall (x,y) \in E^2: \lambda (x.y) =(\lambda x).y$$

1- قواعد الحساب في الفضاءات الشعاعية

- **خاصية 1**

ليكن $(E,+, .)$ فضاءاً شعاعيا معرفًا على الحقل K؛ وليكن $\lambda, \mu \in K$, $(x, y)\in E^2$.عندئذ.

الخواص التالية محققة

1- $\lambda (x - y) = \lambda.x -\lambda.y$ و $(\lambda -\mu).x = \lambda.x -\mu.x$

2- $\lambda 0_E = 0_E \; et \; 0_K\lambda= 0_E$

3- $(-\lambda).x = -(\lambda.x) = \lambda.(-x)$

4- $\lambda.x=0 \Rightarrow \lambda = 0 \; où \; x = 0$

- **خاصية جداء الفضاءات الشعاعية**

ليكن K حقلا تبديليًا و ليكن $E_1 , E_2 ,..., E_n$ فضاءات شعاعيه على الحقل K لنعرف على $E = E_1 \times ... \times E_n$

القانونين (+) و(.) كما يلي:

$$\forall\lambda \in K.\ \forall(x_1,x_2,\dots,x_n),(y_1,y_2,\dots,y_n) \in E:$$

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,y_2,\dots,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,\dots,x_n+y_n)$$

$$\lambda(x_1,x_2,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n)$$

عندئذ $(E,+,.)$ هو فضاء شعاعي ويسمى فضاء الجداء والعنصر الحيادي فيه بالنسبة للجمع هو $(0_{E1},0_{E2},\dots,0_{En})$.

- خاصية الفضاء الشعاعي للدوال

لتكن A مجموعة ما وليكن E فضاء شعاعيًا معرفًا فوق الحقل K ولنرمز ب $F(A,E)$ إلى مجموعة كل الدوال من A في E .

لنعرف على المجموعة $F(A,E)$ القانونين التاليين:

$$\forall f,g \in F(A,E),\ f+g: A\to E$$

$$x\mapsto f(x)+g(x)$$

$$\forall\lambda \in K,\ \lambda f: A\to E$$

$$x\mapsto \lambda.f(x)$$

عندئذ البنية $(F(A,E),+,.)$ هي فضاء شعاعي على الحقل K .

2- تعريف التراكيب الخطية

ليكن $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل K نسمي جملة أشعة من E و لتكن $S=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ والتي عناصرها عبارة عن أشعة من E. نسمي كل عنصر من E من الشكل:

$$\sum_{i=1}^{i=n}\lambda_i x_i=\lambda_1 x_{1i}+\lambda_2 x_2+\cdots.+\lambda_n x_n$$

تركيب خطي بالجملة S حيث $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in K^n$.

مثال:

من اجل $U_1=(6,4,2)$, $U_2=(1,2,-1)$ شعاعين بين أن الشعاع $V=(9,2,7)$ هو تركيب خطي لهما؟

الحل

كي يكون V تركيباً خطياً ل U_1, U_2 يجب وجود أعداد ثابتة K_1 , K_2 بحيث:

$$V= K_1 U_1 + K_2 U_2$$

أي : $K_1 (6,4,2) + K_2 (1,2,-1) = (9,2,7)$

$6K_1 + K_2=9$..................(1)

$4K_1 + 2K_2= 2$................(2)

$2K_1 - K_2 =7$..................(3)

بجمع (1) و(3) نحصل على $K_1=2$

وبالتعويض في المعادلة (1) نجد $K_2=-3$ مع ملاحظة صحة المعادلة الثانية من اجل هذه القيم،

ومنه:

$$V = 2 U_1 - 3 U_2$$

تركيبة خطية

3- تعريف الفضاءات الشعاعية الجزئية

ليكن $(E,+, .)$ فضاء شعاعي على الحقل K و لتكن $F \subset E$. نقول أن F فضاء شعاعي جزئي من E إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

- $0_E \in F.$

- $\forall(x,y) \in F^2;\ \forall(\alpha,\beta) \in E^2:\ \alpha x + \beta y \in F.$

أمثلة

- ليكن $(E,+, .)$ فضاء شعاعي على الحقل K فإن كل من E و $\{O_E\}$ هي فضاءات شعاعية جزئية من E وتسمى بالفضاءات البديهية.
- ليكن K حقلا تبديليًا ولتكن $K[x]$ مجموعة كثيرات الحدود ذات متغير واحد x ومعاملاته من الحقل K. إن $K[x]$ بالنسبة إلى قانون جمع كثيرات الحدود وضربها بسلمية $\lambda \in K$ هو فضاء شعاعي والمجموعة:

$$K_n[x]=\{P(x) \in K[x];\ deg\ P \leq n\}$$

- هي فضاء شعاعي جزئي من E.

خاصية:

من اجل $(E,+,.)$ فضاء شعاعي على الحقل K؛ و لتكن الجملة $S = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ من عناصر E عندئذ مجموعة كل التراكيب الخطية الناتجة عن الجملة S هي فضاء شعاعي جزئي من E.

نتيجة

- إن أي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء $(E, +, .)$ هو فضاء شعاعي أيضًا.
- لتكن $(F_i)_{i\in I}$ مجموعة فضاءات جزئية من الفضاء الشعاعي $(E,+,.)$ على الحقل K ؛ فان :

$F = \bigcap_{i\in I} F_i$ هو فضاء شعاعي جزئي من E .

4- الفضاء الشعاعي المولد

تعريف

نقول أن الجملة S مُولدة للفضاء الشعاعي E إذا وفقط إذا كان كل عنصر من E يكتب كتركيب خطي للجملة S أي أن:

S جملة مُولدة للفضاء الشعاعي$\Leftrightarrow$

$$\forall x \in E, \exists(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in K^n : x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n$$

ونرمز لذلك ب $E = vect(S)$

مثال

من اجل $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ حيث $x_1 = (1,1), x_2 = (2,3)$ et $x_3 = (2,2)$ بين أن الأشعة السابقة تمثل جملة مولدة ل$\mathbb{R}^2$.

الحل

ليكن $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ ، فان أي تركيب خطي من الأشعة الثلاثة المعطاة يكتب كما يلي:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3; (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$$

وبالتالي نجد أن أي شعاع $v \in \mathbb{R}^2$ يمكن أن يكون كتركيب خطي بواسطة الجملة

$S = (x_1, x_2, x_3)$ وذلك بحل جملة المعادلات

$$\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2+3\,\lambda_3=v_1\\ \lambda_1+3\lambda_2+2\,\lambda_3=v_2\end{cases}$$

و هذه الجملة لها عدد لا نهائي من الحلول في $\mathbb{R}$.إذن S هي جملة مولدة.

5- الجمل المستقلة والمرتبطة خطيا

تعريف:

نقول أن الجملة $S=(\ \ _1,x_2,\ldots\ldots x_n)$ من عناصر E أنها مستقلة خطيا إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in K^n:\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_nx_n=0\Rightarrow\ \lambda_1=\lambda_2$$
$$=\cdots\lambda_n=0$$

اذا لم يتحقق هذا تكون الجملة مرتبطة خطيا .

خواص الجمل المستقلة والمرتبطة خطيا

لتكن الجملة $S=(x_1,x_2,\ldots\ldots x_n)$ من عناصر E فان :

- إذا كان أحد عناصر هذه الجملة هو الشعاع الصفري فان الجملة مرتبطة خطيا.
- إذا كان في الجملة شعاع مكرر أكثر من مرة فإن الجملة مرتبطة خطيا.
- إذا كانت الجملة مرتبطة فإن أي شعاع من هذه الجملة يكتب كتركيب خطي ببقية العناصر أو الأشعة الأخرى في S أي ان:

$$\forall i\epsilon\mathbb{N}:\exists(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_{i-1},\lambda_{i+1},..\lambda_n)\in K^{n-1}$$
$$:\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots+\lambda_{i-1}x_{i-1}+\lambda_{i+1}x_{i+1}\ldots+\ \lambda_nx_n=x_i$$

مثال:

الجملة $S=(x_1,x_2,x_3)$ حيث $x_1=(1,0,2),\ x_2=x_3=(1,1,1)$ هي جملة مرتبطة لأنه من اجل

$\lambda_1\quad _1+_2x_2+\lambda_3\,x_3\ =0$ نحصل على $\lambda_1=0,\lambda_2,\lambda_3=-1$

6- قاعدة (أساس) فضاء شعاعي

تعريف:

نقول عن جملة الأشعة $S=(x_1,x_2,\ldots\ldots x_n)$ أنها تشكل أساس للفضاء الشعاعي E إذا وفقط إذا كانت:

- الجملة S مستقلة خطيا.
- الجملة S مولدة.

نتيجة: اذا كانت الجملة S تشكل قاعدة للفضاء الشعاعي E فان كل شعاع من E يكتب كتركيب خطي وبشكل وحيد بالجملة S .

ملاحظة: نسمي قاعدة قانونية الجملة $S = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ حيث

$e_1 = (1,0,\dots 0),\ e_2 = (0,1,\dots,0), \dots, e_n = (0,0,\dots,0,1)$

مثال

أثبت أن الجملة $S = (e_1, e_2, e_3)$ حيث $e_1 = (1,0,1),\ e_2 = (1,-1,1),\ e_3 = (0,1,1)$ هي أساس للفضاء $\mathbb{R}^3$.

الحل

الجملة $S = (e_1, e_2, e_3)$ مستقلة خطيا لان:

$$\forall(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0 \Rightarrow$$
$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, -\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

وتكون $S = (e_1, e_2, e3)$ جملة مولدة إذا استطعنا كتابة x كتركيب خطي بعناصر S أي إذا وجدنا $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ بحيث $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = x$ ومنه:

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, -\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, -\lambda_2 + \lambda_3, \lambda_2 + \lambda_3) = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = x_1 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = x_2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

فيكون الحل المشترك للجملة هو:

$$\lambda_1 = x_1 - x_3 \text{ و } \lambda_2 = \frac{x3 - x2}{2} \text{ و } = \frac{x3 + x2}{2}\ \lambda_3.$$

ملاحظة:

إذا كان E فضاء شعاعي أساسة $S = (e_1, e_2 ...., e_n)$ فإن أي شعاع $x \in E$ يكتب حسب الملاحظة السابقة على شكل تركيب خطي $(\lambda_1, \lambda_2 .., \lambda_3) \in K^n$ بحيث:

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots . + \lambda_n e_n$$

نسمي $(\lambda_1, \lambda_2 .., \lambda_3) \in K^n$ المركبات السلمية ل x.

7- بعد فضاء شعاعي:

نقول عن فضاء شعاعي E انه ذو بعد منته إذا وجدت جملة مولدة ل E منتهية تشمل عدد منته من العناصر. نرمز لبعد الفضاء E ب $dim\ E$;

مثال:

الفضاء $E = \mathbb{R}^2$ هو فضاء شعاعي جزئي ذو بعد منته لأنه مولد بالجملة :

$$\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

خاصية 1:

إذا كان E فضاء جزئي شعاعي ذو بعد منته فان كل جملة مكونة من n شعاع تكون اساس إذا كانت مستقلة أو مولدة.

خاصية 2:

إذا كان E فضاء شعاعي ذو بعد منته و F فضاء شعاعي جزئي من E فان F ذو بعد منته يحقق:

$$dim\ F \leq dim\ E.$$

ومن اجل :

$$dim\ F = dim\ E \Leftrightarrow E = F.$$

مثال:

إن الفضاء $E = \mathbb{R}^n$ فوق الحقل $\mathbf{K} = \mathbb{R}$ هو فضاء ذو بعد n لأن الجملة $S = (e_1, e_2 ...., e_n)$ حيث:

$$e_1 = (1,0,\ldots 0),\ e_2 = (0,1,\ldots,0),\ldots,e_n = (0,0,\ldots,0,1)$$

تشكل أساسًا للفضاء $\mathbb{R}^n$

و بشكل عام إذا كان $E = K^n$ فان K^n هو فضاء شعاعي فوق الحقل K ذو بعد n أساسه مكون من الأشعة التالية: $e_1 = (1_K, 0_K,\dots 0_K)$, $e_2 = (0_K, 1_K,\dots, 0_K),\dots, e_n = (0_K, 0_K,\dots, 0_K, 1_K)$

ملاحظة

إذا لم يكن الفضاء منتهي البعد أي $\dim E = \infty$ فإننا نقول أن الفضاء لا نهائي البعد

8- رتبة جملة أشعة:

ليكن E فضاء شعاعي و $T = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ جملة أشعة نعرف **رتبة** T بأنها بعد الفضاء الشعاعي الجزئي المولد ب T. نرمز لرتبة الفضاء الشعاعي ب $rang\mathrm{T}$ و هي تحقق:

$$rang\mathrm{T} = \dim(\mathrm{vect}(\mathrm{T}))$$

رتبة جملة أشعة تحقق الخواص الآتية :

- $\mathrm{rang}(\mathrm{T}) \le p.$
- $\mathrm{rang}(\mathrm{T}) = p \Leftrightarrow$ T مستقلة خطيا
- رتبة T هي العدد الأكبر من الأشعة المستقلة خطياٌ التي يمٌكن استخراجها من T.
- $\mathrm{rang}(\mathrm{T})) \le \mathrm{n} \Rightarrow$ n ذو بعد منته E.
- $\mathrm{rang}(\mathrm{T}) = \mathrm{n} \Leftrightarrow$ T, n مستقلة خطيا ذو بعد منته E

9- تعريف المجموع المباشر

ليكن F_2, F_1 فضائين شعاعيين جزئيين من E . نقول أن المجموع $F_2 + F_1$ هو مجموع مباشر إذا وإذا فقط تحقق: $F_2 \cap F_1 = \{0\}$ ونرمز لها ب $F_2 \oplus F_1$ ويكتب أي عنصر $x \in F$ بشكل وحيد كمجموع عنصرين $x = x_1 + x_2$ حيث $x_1 \in F_1$ و $x_2 \in F_2$

الفضاءات الشعاعية المتتامة

نقول أن الفضائين الشعاعيين الجزئيين F_2, F_1 من الفضاء E أنهما متتامين إذا وفقط إذا كان:

$E = F_2 \oplus F_1$.

خواص:

- ليكن F_2, F_1 فضائين شعاعيين جزئيين من E حيث $E = F_2 \oplus F_1$ إذا كانت $(e_1 ....,e_p)$ قاعدة ل F_1 و

$(u_1 ....,u_q)$ قاعدة ل F_2 فان $(e_1 ....,e_p, u_1 ....u_q)$ تشكل قاعدة ل $E = F_2 \oplus F_1$.

- اذا كان $E = F_2 \oplus F_1$ فان $dim\, E = dim\, F_1 + dim\, F_1$.

- إذا كان F فضاء شعاعي جزئي من E ذو بعد منته فيوجد فضاء جزئي وليكن G يحقق:

$E = F \oplus G$.

تمرينات الفصل الرابع

تمرين1:

بين ان مجموعة كل المستقيمات المارة بالمبدأ هي فضاء شعاعي جزئي من $\mathbb{R}^2$.

تمرين2:

هل مجموعة الاعداد الحقيقية مزودة بالعمليات الاتية:

الجمع: $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \boxplus y = 2x + 2y$

الضرب بسلمية كما يلي: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \lambda \odot x = \lambda x$

هي فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{R}$.

تمرين3:

عين رتبة الجملة $S = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ حيث

$$a_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, a_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \\ 13 \\ 12 \end{bmatrix}$$

تمرين 4:

عين الفضاء الجزئي المكمل للفضاء الجزئي S حيث:

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

تمرين 5 :

ليكن F_2, F_1 فضائين جزئيين من $\mathbb{R}^3$ حيث :

$$F_1 = \{(x , y , z) \in \mathbb{R}^3 ; z = 3x +17y \} \text{ et } F_2 = \{(x , y , z) \in \mathbb{R}^3 ; z = x - y \}$$

احسب $F_2 \cap F_1$.

تمرين6:

ليكن لدينا $E = \{(x, y, z) \in IR^3 : f_1 = 0 \wedge f_2 = 0\}$ حيث:

$$f_1 (x, y, z) = x - y; f_2 (x, y, z) = y - z$$

- بين ان E هي فضاء شعاعي جزئي من الفضاء IR^3 على الحقل IR. اوجد أساس و بعد.
- بين أن هذا التطبيق: $f(x, y, z) = (f1, f2, z)$؛ هو تطبيق خطي .

الفصل الخامس

المصفوفات والعمليات عليها

مقدمة

على الرغم من أن الحساب المصفوفي الفعلي لم يظهر إلا في بداية القرن التاسع عشر ، إلا أن المصفوفات بصفتها صفوف من الأرقام ، لها تاريخ طويل من التطبيقات في حل المعادلات الخطية. ففي النص الصيني "الفصول التسعة في فن الرياضيات" ، الذي كتب في القرن الثاني قبل الميلاد ، وهو أول مثال معروف لاستخدام الجداول في حل جمل المعادلات ، كما تم تقديم مفهوم المحدد.

وفي عام 1545 ، ادخل Girolamo Cardano هذه الطريقة الى أوروبا .

في عام 1683 استخدم الرياضياتي الياباني Seki Kōwa نفس التقنيات بشكل مستقل لحل جمل المعادلات. بين 1700 و 1710 ، أوضح لايبنز كيفية استخدام الجداول لتسجيل البيانات أو الحلول ، وجرب أكثر من 50 نظامًا للجدول لهذا الغرض. في عام 1750 ، نشر غابرييل كرامر القاعدة التي تحمل اسمه. في عام 1850 ، تم صياغة مصطلح "المصفوفة" (والذي تمت ترجمته عن اللغة اللاتينية):

في عام 1854 ، نشر آرثر كايلي أطروحة عن التحولات الهندسية باستخدام المصفوفات على نطاق أوسع بكثير من أي شيء قبله. حيث حدد العمليات المعتادة لحساب المصفوفة (الجمع والضرب) وبين خصائص ضرب المصفوفات.

1- تعريف

المصفوفة من المرتبة $m\times n$ هي منظومة مستطيلة مكونة من $m\times n$ من العناصر المرتبة، موزعة في m سطراً و n عموداً، ومحاطة بقوسين، ونرمز لهذه المجموعة من العناصر بحرف كبير:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

حيث a_{ij} تدعى عناصر المصفوفة $i=1,2,....,m$ $j=1,2,.....,n$ و يكون الشكل المختصر للمصفوفة كما يلي:

$j = 1,2,.....,n$ و $i = 1,2,....,m$ ، $A = (a_{ij})$

- يرفق رمز المصفوفة بدليلين للدلالة على مرتبة المصفوفة، مثلا $A_{4\times5}$ ، نعني المصفوفة المكونة من 4 أسطر و5 أعمدة.
- نقول عن المصفوفة A انها مصفوفة مربعة اذا كانت من الشكل $n\times n$.
- نقول عن مصفوفة إنها مصفوفة عمود إذا كانت مكونة من عمود واحد، أي إذا كانت مرتبتها $m\times1$ ونقول عن مصفوفة إنها مصفوفة سطر إذا كانت مرتبتها $1\times n$ ، أي مكونة من سطر واحد.
- نقول إن المصفوفتين A,B متساويتان ونكتب $A = B$ إذا تساوت العناصر المتقابلة في كل منهما أي:

$a_{ij} = b_{ij}$ وذلك $\forall i,, j$

- نقول عن المصفوفة A إنها مصفوفة صفرية إذا كانت جميع عناصرها مساوية الصفر ونرمز لها بـ O مرفقا بالدليلين.

مثال:

$$O_{2\times3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- نسمي عناصر المصفوفة التي يتساوى لأجلها رقم السطر مع رقم العمود عناصر قطرية، أي a_{ii}

مثالً:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

العناصر القطرية هي $a_{11} = 1$, $a_{22} = 2$

إذا كانت المصفوفة مربعة فإن العناصر القطرية تشكل ما يسمى قطر المصفوفة، ويدعى أحيانا القطر الرئيسي لهذه المصفوفة.

- نقول عن المصفوفة B إنها قطرية إذا كانت مربعة وجميع عناصرها معدومة عدا عناصر القطر

مثال:

$$B=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

وتكتب هذه المصفوفة في بعض الحالات كما يلي:

$$B=Diag(5,-3,0)$$

وهذا للدلالة على أن المصفوفة القطرية Diag مشتقة من كلمة (Diagonal) التي معناها قطري.

- نقول عن المصفوفة I أنها مصفوفة واحدية من المرتبة n إذا كانت مصفوفة قطرية من المرتبة $(n\times n)$ وكانت جميع عناصرها القطرية مساوية الواحد، ونرمز لها بـ I_n، مثلاً:

$$I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

- نقول عن المصفوفة C إنها تناظرية إذا كانت جميع عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر متساوية أي $c_{ji}=c_{ij}$ وذلك $\forall_{i,j}$.

مثال:

$$\begin{pmatrix}5&3&4\\-3&-2&6\\4&6&0\end{pmatrix}$$

من الملاحظ أن المصفوفة الواحدية هي مصفوفة تناظرية.

- نقول عن المصفوفة T إنها ضد تناظرية إذا كانت عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر متساوية بالقيمة المطلقة ومتعاكسة بالإشارة أي:

$t_{ij}=-t_{ji}$ وذلك $\forall i,j$

من الواضح أن عناصر القطر في المصفوفة T معدومة، أي $t_{ii}=0$ ،

مثال:

$$T=\begin{pmatrix}0&2&4\\-2&0&-6\\-4&6&0\end{pmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة الصفرية $O_{n\times n}$ هي مصفوفة تناظرية تخالفية.

وتكون المصفوفة تناظرية إذا كانت عناصرها المتناظرة بالنسبة للقطر متساوية.

مثال:

$$T=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- نقول عن مصفوفة أنها مصفوفة قياسية إذا كانت مربعة وعناصر قطرها الرئيسي متساوية القيمة وباقي عناصرها أصفار فمثلاً :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

– نقول عن المصفوفة $D=(d_{ij})$ ، $i,j=1,2,....,n$ إنها مثلثيه إذا كانت مربعة وجميع عناصرها $d_{ij}=o$ من أجل $i<j$ أو من أجل $i>j$.

فمن أجل $i<j$ تكون مصفوفة مثلثيه عليا $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$ وفي الحالة العكسية تكون مثلثية سفلى $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

- **منقول مصفوفة**

لتكن المصفوفة $A=(a_{ij})$ حيث $i=1,2,....m$ ، $j=1,2,....n$. إذا بدلنا أسطر المصفوفة A بأعمدتها نحصل على مصفوفة تدعى منقول المصفوفة ونرمز لها بـ A^T ، أي:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow$$

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21}\cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22}\cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & a_{2n}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ومنه إذا كانت المصفوفة A من المرتبة $m\times n$ فإن منقولها من المرتبة $n\times m$.

نتيجة:

المصفوفة تساوي منقولها إذا وفقط إذا كانت متناظرة.

– 3 العمليات على المصفوفات

- نقول عن مصفوفتين A و B من نفس الرتبة أنهما متساويتان ونكتب $A=B$ إذا كانت جميع عناصر هما المتقابلة متساوية، أي إذا تحقق $A_{ij}=B_{ij}$ لجميع قيم i و j.

3- 1 ضرب مصفوفة بعدد

لتكن لدينا المصفوفة $M=(m_{ij})$ من المرتبة $m\times n$ وليكن $\alpha\mathbb{R}$ فان $\alpha.M$ أو $M.\alpha$ هي المصفوفة $\alpha.M=\alpha(m_{ij})=(\alpha m_{ij})$

أي لضرب المصفوفة بعدد حقيقي α نضرب كل عنصر من عناصر ها بهذا العدد.

$$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

نتيجة.

يمكن أن نخرج أي عامل مشترك خارج قوسي المصفوفة بتقسيم جميع عناصر ها على هذا العدد، مثلاً:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & -10 \\ 6 & 2 & 12 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

2-3 جمع المصفوفات

لتكن لدينا المصفوفتين A و B من المرتبة نفسها، نعرف مجموع هاتين المصفوفتين بأنه المصفوفة C: $C = A + B$

التي نحصل على عناصرها أي c_{ij} من جمع العناصر المتقابلة في المصفوفتن A, B أي:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 6 \\ 12 & 2 & 6 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

إن عملية جمع المصفوفات تحقق الخواص التالية:

I. $A + B = B + A$ (الخاصية التبديلية).

II. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (الخاصية التجميعية).

III. المصفوفة الصفرية هي العنصر المحايد (الحيادي) في عملية جمع المصفوفات

$$A = O + A = A + O$$

IV. لكل مصفوفة A نظير بالنسبة إلى عملية الجمع، وهذا النظير نرمز له بـ $-A$:

$$A + (-A) = 0$$

V. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ حيث A, B مصفوفتان من المرتبة نفسها و $\alpha \in \Re$.

VI. $(A + B)^T = A^T + B^T$ أي منقول مجموع هو مجموع المناقيل.

3-3جداء المصفوفات

1. <u>ضرب مصفوفة سطر بمصفوفة عمود</u>

إذا كانت R مصفوفة سطر من المرتبة n و C مصفوفة عمود من المرتبة n:

نعرف حاصل الضرب $R \cdot C$ بأنه مصفوفة من الدرجة 1×1 كما يلي:

$$(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}) \mathrm{x} \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1})$$

2. **<u>ضرب مصفوفتين بشكل عام</u>**

حتى يمكن ضرب المصفوفة A في B يشترط ان يكون عدد اعمدة المصفوفة A يساوي عدد اسطر المصفوفة B، في هذه الحالة تكون مصفوفة الجداء من ضرب كل سطر من A في كل عمود من B نضع العنصر الناتج في مصفوفة بنفس ترتيب ذلك السطر والعمود. المصفوفة المتكونة هي حاصل الضرب $A \cdot B$. يمكن التعبير عن ذلك بكتابة A على شكل اسطر و B على شكل أعمدة:

لتكن A مصفوفة من المرتبة $m \times n$ ولتكن B مصفوفة من المرتبة $n \times p$ عندئذٍ نعرف الجداء لهاتين المصفوفتين بأنه المصفوفة: $C = AB$ من المرتبة mxp التي حدها العام معرف بالعلاقة التالية:

If $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ and $B = [b_{ij}]_{n\times p}$,

$$\text{then } AB = [a_{ij}]_{m\times n}[b_{ij}]_{n\times p} = [c_{ij}]_{m\times p} = C,$$

should be equal

size of $C=AB$

حيث
$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \vdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & & & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{in} \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$AB = \begin{bmatrix} (-1)(-3)+(3)(-4) & (-1)(2)+(3)(1) \\ (4)(-3)+(-2)(-4) & (4)(2)+(-2)(1) \\ (5)(-3)+(0)(-4) & (5)(2)+(0)(1) \end{bmatrix}_{3\times 2}$$
$$= \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ -4 & 6 \\ -15 & 10 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

- **خواص جداء المصفوفات:**

إذا كان AB معرف ممكن أن يكون BA غير قابلة للضرب .(المثال السابق يوضح هذه الحالة.)

أ- جداء المصفوفات غير تبديلي بشكل عام أما في حالات المصفوفات القطرية فإن الجداء يكون تبديلياً.

مثال:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad , \; B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A.B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix} \quad \neq B.A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

ب- جداء المصفوفات تجميعي:

لتكن لدينا المصفوفات A,B,C عندئذٍ يكون:

$$A.(B.C)=(A.B).C$$

فإذا كانت A من المرتبة $m\times n$ و B من المرتبة $n\times P$ و C من المرتبة $p\times q$. فإن الحد العام للجداء:

$$L=B.C$$

يكون $l_{ij}=\sum_{k=1}^{b} b_{ik}c_{kj}$

والحد العام للجداء:

$R=A.(B.C)$ يكون:

$$r_{ij}=\sum_{d=1}^{n} a_{id}l_{dj}=\sum_{d=1}^{n} a_{id}\sum_{k=1}^{p} b_{dk}c_{kj}$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\ (\sum_{d=1}^{n} a_{id}b_{dk})c_{kj}$$

وهذا يمثل الحد العام للجداء $(A.B).C$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix},\ \text{and } C=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}.$$

$$(AB)C=\left(\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -2 & 1\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-5 & 4 & 0\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 4\\ 13 & 14\end{bmatrix}$$

ج- جداء المصفوفات توزيعي بالنسبة لجمع المصفوفات:

$$A.(B+C)=A.B+A.C$$
$$(B+C).A=B.A+C.A$$

لتكن A من المرتبة $m\times n$ ولتكن كل من C و B من المرتبة $n\times p$ فإن الحد العام للمصفوفة:

$$R=A.(B+C)$$

يكون:

$$r_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})$$
$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}$$

وهذا يمثل الحد العام لـ $A.B+A.C$

إذاً: $A.(B+C)=A.B+C.A$

وبالطريقة نفسها يمكن أن نبين $(B+C).A=B.A+C.A$

د- منقول جداء يساوي جداء المناقيل بالترتيب المعاكس:

$$(A.B)^T=B^T.A^T$$

ه- العنصر المحايد بالنسبة لجداء المصفوفات هو المصفوفة الواحدية

$$I.A=A.I=A$$

و- جداء مصفوفتين قطريتين هو مصفوفة قطرية عناصر قطرها هو جداء عناصرالقطرين.

$$
\begin{aligned}
A.B &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0.... & 0 \\ 0 & a_{22}.... & 0 \\ 0 & 0.... & a_{nn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b_{11} & 0.... & 0 \\ 0 & b_{22}.... & 0 \\ 0 & 0.... & b_{nn} \end{pmatrix} \\
&= diag(a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, ..., a_{nn}b_{nn}) \\
&= B.A
\end{aligned}
$$

تمرينات الفصل الخامس

التمرين 1:

- لتكن المصفوفات الاتية:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&2&-3\\2&1&2\end{bmatrix}\ et\ B=\begin{bmatrix}0&1&2\\3&-2&1\\1&2&1\end{bmatrix}$$ احسب المصفوفات الاتية وماذا تستنتج

.A + B; B + A; A B; B A

ثم احسب A +2 B و AB - 3B A

- لتكن المصفوفات التالية:

$$A=\begin{pmatrix}3&4&2\\5&6&0\\3&0&4\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}8&-4&2\\10&0&6\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&-6&0\\2&3&2\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}-2&2&0\\0&4&2\\2&0&1\end{pmatrix}$$

المطلوب حساب ما يلي: $A+D.B^T$.$|A|$.DA.AD.$(AD)^T$.

التمرين 2:

لتكن المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ احسب A^2, A^4 وA^3 ثم استنتج A^n

نفس السؤال من اجل $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$

الفصل السادس

المحددات و مقلوب مصفوفة

مقدمة

استخدمت المصفوفات منذ تاريخ طويل في حل المعادلات الخطية ، فأقدم شكل لاستخدام المصفوفات في حل المعادلات نص صيني يدعى" الفصول التسعة في فن الرياضيات "والذي كُتب في حوالي القرن الثالث قبل الميلاد. كما تضمن على دراسة لمبدأ المحددات.

أما في أوروبا، استُخدم المحدد 2*2 من طرف عالم الرياضيات كاردانو في نهاية القرن السادس عشر، واستُخدم المحدد من حجم أكبر من ذلك من طرف عالم الرياضيات الألماني لايبنتز.

1.6. تعريف المحدد لمصفوفة

لتكن A مصفوفة مربعة نعرف محدد مصفوفة بأنه العدد الحقيقي الذي نرمز له ب $\det(A)$ او $|\,:\,|$

والذي يحدد حسب رتبة المصفوفة .

- محدد مصفوفة من المرتبة 1.1 هو العدد نفسه .
- من اجل رتبة المصفوفة 2 يكون محددها هو:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال

أوجد قيمة المحدد $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

الحل:

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

- محدد مصفوفة من الرتبة الثالثة: يمكن حسابه وفق الطرق الآتية:

<u>طريقة 1. طريقة سارس:</u> هي طريقة سهلة لحساب المحدد 3x3 لمصفوفة مربعة و نحصل عليه بإضافة عمودين رابع وخامس لأعمدة المصفوفة وهما العمود الأول والثاني فيكون المحدد هو مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسة الثلاثة نزولا يحذف منها مجموع حاصل ضرب عناصر الأقطار غير الرئيسة الثلاثة صعودا .

$$\begin{array}{ccccc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}$$

$$\Delta = (a_1\, b_2\, c_3 + b_1\, c_2\, a_3 + c_1\, a_2\, b_3) - \\ -(a_3\, b_2\, c_1 + b_3\, c_2\, a_1 + c_3\, a_2\, b_1)$$

مثال

احسب محدد المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$Det\ A = \begin{matrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{matrix} = (3.1.3)+(2.2.5)+(1.0.1)-[(5.1.1)+(1.2.3)+(3.0.2)]$$

=9+20+0-5-6-0=18

طريقة 2. نضع اشارات وهمية متناوبة بداية ب **+** على السطر الاول للمحدد فيكون محدد مصفوفة من المرتبة 3x3 هو مجموع كل الجداءات الناتجة من الإشارة الوهمية في العدد أسفلها في المحدد 2x2 الناتج بحذف سطر وعمود هذا العنصر .

مثال

من اجل المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ فان محددها هو

$$\det\begin{bmatrix}3&2&1\\0&1&2\\5&1&3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0&2\\5&3\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0&1\\5&1\end{bmatrix}$$

$$= 3(3-2)-2(0-10)+1(0-5)= 3+20-5= 18$$

6. 2. خواص المحددات :

- إذا كان أحد اسطر أو أعمدة محدد تساوى أصفار فان المحدد معدوم.
- إذا تساوى سطرين أو عمودين في محدد فان المحدد معدوم.
- إذا شمل المحدد سطرين أو عموديين احدهما مضاعف الأخر فان المحدد معدوم.
- محدد مصفوفة قطرية أو مثلثيه هو جداء عناصر القطر.
- لا تتغير قيمة المحدد إذا أبدلنا الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف .
- تتغير إشارة المحدد إذا أبدلنا فيه سطرين أو عمودين .
- إذا ضربت عناصر سطر أو عمود في عدد فإن قيمة المحدد تضرب في هذا العدد.
- لا تتغير قيمة المحدد إذا أضيفت إلى عناصر أي سطر أو عمود عناصر سطر آخر أو عمود آخر مضروبة في رقم ثابت .
- إذا كان سطر(أو عمود) في محدد مكونا من مجموع حدين (أو أكثر) فإن قيمة المحدد تساوى مجموع محددين (أو أكثر) عناصر هذا الصف (أو العمود) في المحدد الأول هى عناصر الحد الأول وعناصر هذا الصف أو العمود في المحدد الثاني هي عناصر الحد الثاني أي أن :

$$\begin{vmatrix}a_1+b_1&c_1&d_1\\a_2+b_2&c_2&d_2\\a_3+b_3&c_3&d_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&c_1&d_1\\a_2&c_2&d_2\\a_3&c_3&d_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_1&c_1&d_1\\b_2&c_2&d_2\\b_3&c_3&d_3\end{vmatrix}$$

ملاحظة:

بإتباع قائمة الإشارات والفك كما في المحددات من الرتبة الثانية والثالثة يمكن فك أي محدد من أي رتبة وإيجاد قيمته وكذلك تنطبق الخواص السابقة للمحددات على المحددات من أي رتبة .

مثال:

اثبت باستخدام خواص المحددات أن:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & a & a \\ 1 & a & b & a \\ 1 & a & a & b \end{vmatrix} = (b-a)^2$$

الحل:

نجري عمليات حسابية على اسطر المحدد نرمز ب l_i إلى السطر i

حتى يتحول المحدد إلى محدد مصفوفة مثلثيه وتكون قيمته هي جداء عناصر القطر.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a & a \\ 1 & b & a & a \\ 1 & a & b & a \\ 1 & a & a & b \end{vmatrix} \xrightarrow[l_4-l_1]{\substack{l_2-l_1 \\ l_3-l_1}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & a & a \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix} = (b-a)^3$$

مثال:

باستخدام خواص المحددات أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} \xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix} = xy$$

محدد فاندر موند: محدد فاندر موند من الرتبة الثالثة يكون على الصورة :

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

وقيمته تكون على الصورة: $\Delta = (c-b)\,(c-a)\,(b-a)$.

ونفس هذه القاعدة تطبق على محدد فاندر موند من أي رتبة وبدون فك .

مثال

اثبت باستخدام خواص المحددات صحة مفكوك محدد فاندرمون

الحل:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[l_3-l_1]{l_2-l_1} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & (b-a)(b+a) \\ c-a & (c-a)(a+c) \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & a+c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)[a+c-b-a] = (c-b)\,(c-a)(b-a)$$

مثال

حول المحدد التالى الى محدد فاندر موند ثم اوجد قيمة

$$\begin{vmatrix} a+b & a^2+b^2 & a^3+b^3 \\ b+c & b^2+c^2 & b^3+c^3 \\ c+a & c^2+a^2 & c^3+a^3 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} a+b & a^2+b^2 & a^3+b^3 \\ b+c & b^2+c^2 & b^3+c^3 \\ c+a & c^2+a^2 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \xrightarrow[l_2-l_3]{l_1-l_2} \begin{vmatrix} a-c & a^2-c^2 & a^3-c^3 \\ b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ c+a & c^2+a^2 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \xrightarrow{l_1+l_3}$$

$$\begin{vmatrix} 2a & 2a^2 & 2a^3 \\ b-c & b^2-c^2 & b^3-c^3 \\ c+a & c^2+a^2 & c^3+a^3 \end{vmatrix} \xrightarrow[l_3-l_1]{l_2-l_1} \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = 2abc \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \quad 2abc\ (c-b)\ (c-a)\ (b-a)$$

6. 3. تعريف المقلوب

لتكن A مصفوفة مربعة، إذا أمكن إيجاد مصفوفة B بحيث يكون $AB = I$ $\qquad BA = I$

فـي هذه الحالة نقول أن A مصفوفة قابلة للقلب كما نسمي B مقلوب المصفوفة A وهذا المقلوب وحيد. إذا كانت المصفوفة A قابلة للقلب سوف نرمز لمقلوبها بالرمز A^{-1}.

وتكون المصفوفة قابلة للقلب إذا كان محددها غير معدوم.

1.3.6. طرق حساب مقلوب مصفوفة

يمكن إيجاد مقلوب المصفوفة المربعة ذات المحدد غير المحدود بإحدى الطرق الآتية :

1- باستخدام المحددات.

2- طريقة جاوس.

3- طريقة العمليات المختصرة على الصفوف.

4- طريقة العوامل المرافقة.

5- طريقة التقسيم.

وجميع هذه الطرق المستخدمة في إيجاد مقلوب المصفوفة تعطى نفس النتيجة. غير أننا سوف نتناول هنا طريقتين فقط لإيجاد المقلوب وهما:

أولاً : طريقة العوامل المرافقة :

وتتخلص هذه الطريقة في الخطوات الآتية :

(i) نجد قيمة محدد المصفوفة (Δ).

(ii) نجد مصفوفة المرافقات.

(iii) نجد منقول مصفوفة المرافقات.

(iv) نقسم منقول مصفوفة المرافقات على قيمة محدد المصفوفة فنحصل على مقلوب المصفوفة.

مثال :

أوجد مقلوب المصفوفة الآتية :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل :

لإيجاد مقلوب المصفوفة نتبع الخطوات الآتية:

(i) نجد محدد المصفوفة.

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -6 + 5 = -1$$

(ii) نجد مصفوفة المرافقات مع أخذ قاعدة الإشارات فى الاعتبار.

مصفوفة المرافقات $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

(iii) نجد منقول مصفوفة المرافقات وهو المصفوفة :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(iv) فيكون المقلوب هو ضرب المصفوفة السابقة بمقلوب المحدد اي

مثال :

أوجد مقلوب المصفوفة الآتية :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

الحل:

(i) نجد محدد المصفوفة باستخدام عناصر الصف الثانى.

$$Det\ A=\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & 5\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-4+(19\times 2)=34$$

(ii) نجد مصفوفة المرافقات مع الأخذ في الاعتبار قاعدة الإشارات.

$$\text{مصفوفة المرافقات} = \begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}5 & 3\\ 1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 5\\ 4 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}5 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 0\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(0-2) & +(2-8)- & (2-0)\\ (5-3)- & (1-12)+ & (1-20)\\ (10-0)+ & (2-6) & -(0-10)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 19- & 2-\\ 4- & 11 & 6-\\ 10- & 2 & 2\end{bmatrix}$$

(iv) نقسم منقول مصفوفة المرافقات على قيمة محدد المصفوفة ونحصل على مقلوب المصفوفة المطلوب.

$$\text{أ}^{1-}=\frac{1}{34-}\begin{bmatrix}10 & 19- & 2-\\ 4- & 11 & 6-\\ 10- & 2 & 2\end{bmatrix}$$

ولكي نتأكد من صحة هذا الحل نقوم بضرب المصفوفة في مقلوبها والنتيجة يجب أن تكون مصفوفة الوحدة.

$$\begin{bmatrix} 10 & -19 & -2 \\ -4 & 11 & -6 \\ -10 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{-34}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -34 \\ 0 & -34 & 0 \\ -34 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{-34} \qquad = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ثانياً : طريقة العمليات المختصرة على الصفوف:

تستخدم طريقة العمليات المختصرة على الأسطر(التحويلات السطرية المختصرة) لإيجاد مقلوب المصفوفة. وتتلخص هذه الطريقة في الخطوات الآتية :

(i) نضع المصفوفة المطلوب إيجاد مقلوبها بجوار مصفوفة الوحدة من نفس الدرجة ويفصل بينهما خط رأسي، وتسمى المصفوفة الممتدة.

(ii) نقوم ببعض العمليات (التحويلات) على الأسطر حتى تتحول المصفوفة الأولى إلى مصفوفة الوحدة، وتتحول مصفوفة الوحدة إلى مصفوفة جديدة هي المقلوب المطلوب الحصول عليه للمصفوفة الأصلية.

مثال

أوجد مقلوب المصفوفة الآتية باستخدام طريقة العمليات المختصرة على الاسطر.

$$أ = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر 2 فى السطر الأول والعمود الأول واحداً صحيحاً وذلك بقسمة السطر الأول على (2).

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right]$$

نضرب السطر الأول فى (-4) ونجمع الناتج على السطر الثانى ونحصل على :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1- & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر (-1) في السطر الثاني والعمود الثاني واحداً صحيحاً وذلك بضرب عناصر السطر الثاني في (-1).

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 1- & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر $\left(\frac{3}{2}\right)$ في السطر الأول والعمود الثاني صفراً وذلك بضرب عناصر السطر الثاني فئ $\left(\frac{3}{2}-\right)$ وجمع الناتج على عناصر السطر الأول المناظرة فنحصل على.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{3}{2} & \frac{5}{2}- & 0 & 1 \\ & \text{أ}^{1-} & & \mathrm{I} \\ 1- & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

ولكي نتحقق من الحل :

$$\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-3 & 6+5- \\ 5-6 & 10+10- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2}- \\ 1- & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \text{أ}^{1-}$$

مثال

أوجد مقلوب المصفوفة :

$$\text{أ} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل :

لإيجاد مقلوب هذه المصفوفة سوف نستخدم طريقة العمليات المختصرة على الاسطر.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر (4) في السطر الأول والعمود الأول واحداً صحيحاً وذلك بقسمة عناصر السطر الأول على العدد (4).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

نجعل باقي عناصر العمود الأول أصفاراً وذلك بتنفيذ العمليتين الآتيتين :

1- نضرب السطر الأول في (-6) ونجمع الناتج على السطر الثاني.

2- نضرب السطر الأول فى (-1) ونجمع الناتج على السطر الثالث.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}- & \frac{3}{2} & 1- & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4}- & \frac{15}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر (-1) فى السطر الثاني والعمود الثاني واحداً صحيحاً موجباً وذلك بضرب عناصر السطر الثاني في (-1).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1- & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}- & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{4}- & \frac{15}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

نجعل باقي عناصر العمود الثاني أصفاراً وذلك بضرب السطر الثاني فئ $\left(\frac{1}{2}-\right)$ ثم نجمع الناتج مرة على السطر الأول ومرة أخرى على السطر الثالث.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & \frac{18}{4} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نجعل العنصر $\left(\frac{18}{4}\right)$ بالسطر الثالث والعمود الثالث واحداً صحيحاً وذلك بضرب عناصر السطر الثالث فى العدد $\left(\frac{4}{18}\right)$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

نجعل باقي عناصر العمود الثالث أصفاراً بتنفيذ العمليتين الآتيتين :

1- بضرب السطر الثالث فى $\left(\frac{3}{2}\right)$ وجمع الناتج على السطر الثانى.

2- بضرب السطر الثالث فى (-1) وجمع الناتج على السطر الأول.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -\frac{4}{18} & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} & 0 & 0 & 1 \\ \frac{6}{18} & \frac{15}{18} & \frac{21}{18} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{18} & \frac{2}{18} & -\frac{4}{18} & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{4}{18} & \frac{7}{18} & -\frac{5}{18} \\ \frac{6}{18} & \frac{15}{18} & \frac{21}{18} \\ \frac{4}{18} & \frac{2}{18} & -\frac{4}{18} \end{bmatrix} = A^{-1} \quad = \left(\frac{1}{18}\right) \begin{bmatrix} -4 & 7 & -5 \\ 6 & 15 & 21 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن : $I = A . A^{-1}$

الطرف الأيمن = $\left(\frac{1}{18}\right)\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 3 & 2 & 6\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4- & 7 & 5-\\ 6 & 15 & 21\\ 4 & 2 & 4-\end{bmatrix}$

$$=\left(\frac{1}{18}\right)\begin{bmatrix}0 & 0 & 18\\ 0 & 18 & 0\\ 18 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

مثال

إذا كان لدينا المصفوفة : $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 5 & 3\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 1 & 1\end{bmatrix}$

أثبت أن: $\left(A^{-1}\right)' = (A')^{-1}$ أي مقلوب المنقول مساوي لمنقول المقلوب .

الحل :

الطرف الأيمن

$$A' = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 5\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$(A')^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{2}{34}- & \frac{6}{34} & \frac{2}{34}\\ \frac{2}{34}- & \frac{11}{34}- & \frac{19}{34}\\ \frac{10}{34} & \frac{4}{34} & \frac{10}{34}-\end{bmatrix}$$

الطرف الأيسر

$$(A')^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{10}{34}- & \frac{19}{34} & \frac{2}{34}\\ \frac{4}{34} & \frac{11}{34}- & \frac{6}{34}\\ \frac{10}{34} & \frac{2}{34}- & \frac{2}{34}-\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{34}- & \frac{6}{34} & \frac{2}{34} \\ \frac{2}{34}- & \frac{11}{34}- & \frac{19}{34} \\ \frac{10}{34} & \frac{4}{34} & \frac{10}{34}- \end{bmatrix} = {}'(A^{1-})$$

$${}'(^{1-\prime}\,A) = {}^{1-}(\,A')$$

تمرينات الفصل السادس

تمرين 1:

أوجد قيم المحددات التالية :

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 13 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} \log_2 16 & \log_3 27 \\ \log_4 64 & \log_5 625 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} \sin \pi/4 & \tan \pi/4 \\ \cot \pi/4 & \sin \pi/4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ \frac{2}{3} & -1 & 3 \\ 4 & 6 & \frac{1}{3} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 7 \\ 6 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 3 & 11 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

تمرين 2: أوجد حل المعادلات الآتية

(i) $x^2 + \begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(ii) $\begin{vmatrix} 3 & 15-x^2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & x \end{vmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ x & -4 & 6 \\ -1 & x & -3 \end{vmatrix} = 0$

(iii) $\begin{vmatrix} x^2-3 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5x & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 7x \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 0$

(iv) $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & x \end{vmatrix} = 9$

التمرين 3:

اثبت باستخدام خواص المحددات ان (بدون فك)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 2a & 3a \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0\ ,\ \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 7 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 3 & 7 & -2 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & a & b & a \\ a & b & a & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a-b)^4$$

(4) حول المحددات التالية إلى محدد فاندرموند ثم أوجد قيمته :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} x^3-1 & x^2-1 & x-1 \\ y^3-1 & y^2-1 & y-1 \\ z^3-1 & z^2-1 & z-1 \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} y^2 & z+x & y \\ x^2 & y+z & x \\ z^2 & x+y & z \end{vmatrix}$$

الفصل السابع

حل جمل المعادلات الخطية

مقدمة

إن منشأ الجبر الخطي يعود إلى النصف الثاني من القرن السابع عشر وذلك عند دراسة جمل المعادلات ؛ ومن أوائل الرياضيين الذين أسهموا في هذا المجال نذكر Leibintz ومن بعده العالم Maclaurin الذي أعطى العلاقات التي تسمح بحل جمل المعادلات الخطية بمجهولين وبثلاثة مجاهيل.

أما دراسة الحالة العامة لجمل المعادلات الخطية فيعود الفضل في ذلك إلى العالم Cramer في النصف الثاني من القرن الثامن عشر. و نتيجة لهذه الدراسات نشأ مفهوم المحدد من المرتبة nنذكر أن Laplace و Vandermonde الذين عملا في هذا المجال وجاء بعد ذلك مفهوم المصفوفة على يد العالم Gauss . إن تطور نظرية المصفوفات سمح في منتصف القرن التاسع عشر بظهور مفهوم الفضاء الشعاعي ذو n بعدًا. وأول من تحدث عن هذا المفهوم ألشعاعي Cayley وأما التعريف النهائية للفضاءات الشعاعية فقد وضعت من قبل العالم Peano في عام 1888.

1.7 تعريف

نسمي جملة m معادلة خطية ل n مجهول كل جملة من الشكل الآتي:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{2+} \dots \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_{2+} \dots \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_{2+} \dots \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

يمكن كتابة جملة المعادلات الخطية بدلالة المصفوفات بالشكل المصفوفي الأتي :

$$AX=B$$

حيث تمثل A مصفوفة المعاملات (الأمثال):

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

وتمثل X مصفوفة عمود المجاهيل (في جملة المعادلات الخطية):

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$$

وتمثل B مصفوفة عمود الأعداد التي في الطرف الثاني لجملة المعادلات الخطية:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_m \end{pmatrix}$$

2.7 - طرق حل جمل المعادلات الخطية

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية السابقة, التي تكتب بالشكل المصفوفي:

$$A.X=B$$

ولنفرض أن المصفوفة A من المرتبة r , ولتكن C إحدى المصفوفات الجزئية الأعظمية في A عندئذٍ نستطيع أن نكتب:

$$A=\begin{pmatrix} C & K \\ L & N \end{pmatrix}$$

ويكفي للوصول إلى هذا الشكل بالتبديل في ترتيب المعادلات الخطية أو تبديل مركبات الشعاع X مع أشعة عمود معاملاتها في الشكل الأخير ل A ونلاحظ أنه:

عندما تكون $r=m<n$ فإن كلاً من المصفوفتين L,N تكون غير موجودة.

وعندما تكون $r=n<m$ فإن كلاً من المصفوفتين K,N تكون غير موجودة.

وعندما تكون $r=m=n$ فإن كلاً من المصفوفتين K,L,N تكون غير موجودة.

إذا نستطيع أن نكتب الشكل المصفوفي لجملة المعادلات الخطية بالشكل التالي:

$$\begin{pmatrix} C & K \\ L & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \ldots\ldots.(1)$$

حيث $x_2 \in R^{n-r}, x_1 \in R^r$ هي متجهات المجاهيل و $B_2 \in R^{n-r}, B_1 \in R^r$ هي متجهات الطرف الثاني لجملة المعادلات.

لنضرب طرفي الجملة (1) بالمصفوفة:

$$D = \begin{pmatrix} C^{-1} & 0 \\ -LC^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

فنحصل على الجملة المكافئة التالية:

$$= \begin{pmatrix} I & C^{-1}K \\ 0 & LC^{-1}K + N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{-1}B_1 \\ -LC^{-1}B_1 + B_2 \end{pmatrix} \ldots\ldots\ldots (2)$$

ولكن المصفوفة:

$$N - LC^{-1}K = 0$$

وذلك لأن أي عنصر غير معدوم من هذه المصفوفة يؤدي بإضافة العناصر الموافقة من سطره وعموده إلى I , أي مصفوفة جزئية نظامية من A مرتبتها $(r+1)\times(r+1)$ وهذا يناقض كون مرتبة المصفوفة A هي r .

إذاً يمكن كتابة جملة المعادلات (2) كما يلي:

$$\ldots\ldots\ldots.3 \quad = \begin{pmatrix} I & C^{-1}K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^{-1}B_1 \\ -LC^{-1}B_1 + B_2 \end{pmatrix}$$

لحل جملة المعادلات الخطية (3) نميز حالتين:

أ- عندما تكون المصفوفة:

$$-LC^{-1}B_1 + B_2 = 0$$

فإننا نستطيع أن نكتب (3) كما يلي:

$$X_1 + C^{-1}KX_2 = C^{-1}B_1 \ldots\ldots\ldots\ldots.4$$

وبالتالي تكون حلول جملة المعادلات الخطية هي:

حيث يتم إيجاد قيم المجاهيل X_1 بدلالة قيم اختيارية للمجاهيل X_2

ونستنتج في هذه الحالة أنه يمكن الاكتفاء بـــ r معادلة خطية مستقلة خطياً, ويكون عدد الحلول غير منتهٍ. إذا كانت المصفوفة K موجودة.

نسمي الحل $X_1 = C^{-1}B_1$ الذي يقابل $X_2 = 0$ بالحل القاعدي أو نقول عن المصفوفة C ذات المرتبة $r \times r$ إنها قاعدة.

ملاحظة:

كل مصفوفة مربعة نظامية يمكن أخذها قاعدة يقابلها حل قاعدي.

ملاحظة:

إذا كانت المصفوفة K غير موجودة فيكون الحل وحيداً:

$$X_1 = C^{-1}B_1$$

ب- إذا كانت المصفوفة:

$$-LC^{-1}B_1 + B_2 \neq 0$$

فإن جملة المعادلات الخطية (1.26) التي تكافئ جملة المعادلات الخطية:

$$A.X = B$$

تكون مستحيلة الحل لأن الطرف الأيسر لـــ(3) لن يكون مساويا طرفها الأيمن حينئذٍ لا يوجد حل لجملة المعادلات الخطية.

نتيجة:

يوجد حلول لجملة المعادلات الخطية $A.X = B$ إذا وفقط إذا كانت رتبة مصفوفة المجاهيل A مساوياً رتبة المصفوفة الموسعة $(A|B)$.

مثال:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_1 + 2x_2 + x_7 = 7 \end{cases}$$

إن مصفوفة الأمثال هي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

أما المصفوفة الموسعة فهي:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 1 & 7\end{array}\right)$$

وبعد إجراء العمليات الجبرية على المصفوفات الموسعة نجد:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 5/3\\ 0 & 1 & 0 & 2/3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)$$

ومنه نجد أن مصفوفة المعاملات من المرتبة 2 أما المصفوفة الموسعة فمن المرتبة 3 ,
إذاً فجملة المعادلات الخطية مستحيلة الحل.

مثال:

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=2\\ -2x_1+x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+x_3=6\end{cases}$$

إن مصفوفة المعاملات هي:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

أما المصفوفة الموسعة فهي:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 6\end{array}\right)$$

وبعد إجراء العمليات الجبرية على المصفوفة الموسعة نجد:

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

ومنه $r(A|B)=r(A)=3$

والحل هو:

$$x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 2$$

ويمكن أن نذكر بعض الطرق الأخرى لحل جملة ومنها:

I. **طريقة كرامر**: في حال كانت المصفوفة A مربعة ب n مجهول ذات محدد غير معدوم فان الجملة تقبل حل وحيد يمكن في هذه الحالة حل الجملة بطريقة كرامر والتي تعتمد على مايلي:

لتكن الجملة :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{2+} \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_{2+} \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_{2+} \dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

نرمز بـ : $A = (a_{ij})$, $1 \leq i,j \leq n$ وA_1 هي المصفوفة الناتجة عن A بتبديل عمودها الأول بالشعاع(B) , و بـ A_2 المصفوفة الناتجة عن A بتبديل عمودها الثاني بالشعاع (B) و هكذا.

إذن :

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & b_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & b_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \dots\dots\dots..$$

فيكون:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}; \dots . x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

مثال:

لتكن الجملة :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ 3x_1 - 4x_2 = -5 \end{cases}$$

لدينا: $\det A = -17$ و منه الجملة تقبل حل وحيد هو

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -5 & -4 \end{vmatrix}}{-17} = 1 \ , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}}{-17} = 2$$

II. حل جملة معادلات خطية بقلب مصفوفة المعاملات :

لتكن جملة المعادلات:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_{2+} \dots \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_{2+} \dots \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_{2+} \dots \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

التي شكلها المصفوفي: $AX = B$

إذا كان محدد A غير معدوم فان: $X = A^{-1}B$.

مثال :

حل الجملة :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -5 \end{cases}$$

لدينا : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$, و منه : $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

و عليه تكون :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} .$$

3. غوس – جوردان

لتكن لدينا جملة المعادلات الخطية:

$$AX = B$$

حيث مصفوفة المعاملات A مربعة ونظامية, أي أن $m = n$ والمحدد $|A|$ غير معدوم, إذا فمقلوب المصفوفة A^{-1} موجود, وبالتالي فإن:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow I\,X = A^{-1}B$$

$$\Rightarrow X = A^{-1}B$$

يمكن أن نحصل على مصفوفة المقلوب A^{-1} بعد أن توسع المصفوفة A بمصفوفة الواحدة I ذات المرتبة $n \times n$ ومتجه الطرف الثاني, ثم نجري على أسطرها العمليات الجبرية المنطقية المناسبة:

إن كل عمود في المصفوفة A يمثل متجهاً ونرمز له بـ A_i.

نسمي المتجهات $A_1, A_2, ..., A_n$ المتجهات الأساسية أما المتجهات $E_1\ ,\ E_2\ , ... , E_n$ (أعمدة مصفوفة الواحدة) فنسميها متجهات قاعدة الفضاء R^n.

A_1	A_2	...	A_n	E_1	E_2	...	E_n	B
a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	.....	0	b_1
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	0...	0	b_2
.								
.								
.								
a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}	0			0 1	b_n

تتلخص طريقة غوس- جوردان بما يلي:

نقسم السطر الأول على العدد a_{11} ثم تجعل بقية عناصر العمود الأول معدومة, وذلك بتطبيق عمليات جبرية, فنحصل على الشكل التالي:

A_1	A_2 ... A_n	E_1	E_2 ... E_n	B
1	a'_{12} ... a'_{1n}	$1/a_{11}$	0 0	b'_1
0	a'_{22} ... a'_{2n}	ε'_{21}	1 0... 0	b'_2
.				
.				
.				
0	a'_{n2} ... a'_{nn}	ε'_{n1}	0 ... 1	b'_n

والآن نقسم عناصر السطر الثاني على العدد a_{22} , ثم نعدم بقية عناصر العمود الثاني, وذلك بتطبيق عمليات جبرية, فنحصل على ما يلي:

A_1	A_2	... A_n	E_1	E_2 ... E_n	B
1	0	a''_{13} ... a''_{1n}	ε''_{11}	ε''_{12} 0 0...	b''_1
0	1	a''_{23} a''_{2n}	ε''_{21}	ε''_{22} 0 ... 0	b''_2
.			.		
.			.		
.			.		
0	0	a''_{n3} a''_{nn}	ε''_{21}	ε''_{22} 1	b''_n

وهكذا نتابع العملية فبعد عدد منته من الخطوات تصبح الاشعة $A_1,...,A_n$ اشعة قاعدة, إذاً تمكننا طريقة غوس – جوردان من نقل الاشعة الأساسية إلى اشعة قاعدة, ويصبح الشكل النهائي للمصفوفة الموسعة كما يلي:

A_1	A_2	...	A_n	E_1	E_2		... E_n	B
1	0		0	$\varepsilon^*{}_{11}$	$\varepsilon^*{}_{12}$	....	$\varepsilon^*{}_{1n}$	$b^*{}_1$
0	1		0	$\varepsilon^*{}_{21}$	$\varepsilon^*{}_{22}$	....	$\varepsilon^*{}_{2n}$	$b^*{}_2$
.				.				
.				.				
.				.				
0	0		1	$\varepsilon^*{}_{21}$	$\varepsilon^*{}_{22}$	....	$\varepsilon^*{}_{2n}$	$b^*{}_n$

يمثل الشعاع B قيم المجاهيل أي: $x_1 = b^*{}_1 \ , \ x_2 = b^*{}_n \quad ...... , \ x_n = b^*{}_n$

أما المصفوفة $(\varepsilon^*{}_{ij})$ فتمثل مقلوب A .

مثال:

أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية, وذلك بتطبيق طريقة غوس – جوردان:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \end{cases}$$

1	4	-3	1	0	0	1
2	-1	2	0	1	0	7
3	2	1	0	0	1	13
1	4	-3	1	0	0	1
0	-9	8	-2	1	0	5
0	-10	10	-3	0	1	10
1	0	5/9	1/9	4/9	0	29/9
0	1	-8/9	2/9	-1/9	0	-5/9
0	0	10/9	-7/9	-10/9	1	40/9
1	0	0	1/2	1	-1/2	1
0	1	0	2/5	-1	8/10	3
0	0	1	-7/10	-1	9/10	4

$$\Rightarrow x_1 = 1 \;\; x_2 = 3 \,,\; x_3 = 4$$

ويكون مقلوب المصفوفة A هو:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 2/5 & -1 & 8/10 \\ -7/10 & -1 & 9/10 \end{pmatrix}$$

ا. طريقة غوس – جوردان في حل جملة المعادلات الخطية ذات المصفوفة المستطيلة:

إن طريقة غوس – جوردان في حل جملة المعادلات الخطية ذات المصفوفة المستطيلة لا تختلف عن الطريقة السابقة, وإنما الاختلاف يقع في الحصول على النتائج.

إذ نلاحظ ما يلي:

أ- يكون الحل غير نظامي إذا كان أحد المجاهيل الأساسية معدوماً.

ب- لا يوجد مقلوب لمصفوفة المعاملات لأنها ليست مصفوفة مربعة.

مثال: *أوجد حل جملة المعادلات الخطية التالية باستخدام طريقة غوس جوردان.*

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_1 + 3x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

5	2	3	3	1	0	0	1
2	-2	5	2	0	1	0	4
3	4	2	2	0	0	1	-2
1	2/5	3/5	3/5	1/5	0	0	1/5
0	-14/5	19/5	4/5	-2/5	1	0	18/5
0	14/5	1/5	1/5	-3/5	0	1	-13/5
1	0	8/7	5/7	1/7	1/7	1	5/7
0	1	-19/7	-2/7	1/7	-5/14	0	-9/7
0	0	4	1	-1	1	1	1
1	0	0	3/7	3/7	-1/7	-2/7	3/7
0	1	0	3/54	-11/56	-1/56	19/56	-53/56
0	0	1	1/4	-1/4	1/4	1/4	1/4

يوجد في هذه الحالة عدد غير منتهٍ من الحلول من الشكل

$$x_1 = 3/7 - 3/7x_4$$

$$x_2 = -53/56 - 3/54x_4$$

$$x_3 = 1/4 - 1/4x_4$$

تمرينات الفصل السابع

التمرين 1:

باستخدام طريقة المحددات أوجد حل جمل المعادلات الخطية الآتية ان وجد :

a) (i) $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 4x - y = 14 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} 4x + y = 17 \\ 3x - 5y = 7 \end{cases}$ (iii) $\begin{cases} 7x - 5y - 6 = 0 \\ 7x - 5y - 4 = 0 \end{cases}$

(iv) $\begin{cases} 4x - 3y - 7 = 0 \\ 8x - 6y - 14 = 0 \end{cases}$ (v) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 6x - 4y = 0 \end{cases}$ (vi) $\begin{cases} 3x + 5y = 0 \\ 5x + 3y = 0 \end{cases}$

التمرين 2:

بين المعنى الهندسي لكل حل من حلول الجمل الآتية:

b) (i) $\begin{cases} 3x - y + z - 4 = 0 \\ x - 2y - z - 4 = 0 \\ 2x + y + 2z - 16 = 0 \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} x + 2y + 3z - 13 = 0 \\ 3x + 2y + 2z - 16 = 0 \\ 4x - 2y - 5z + 5 = 0 \end{cases}$

(iii) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 9 \end{cases}$ (iv) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2 \\ 6x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$

(v) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 13 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10 \end{cases}$ (vi) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -1 \end{cases}$

$$(vii)\begin{cases}3x + 4y + 1 = 0\\ 2x - 5y - 30 = 0\\ 2x + 3y - 17 = 0\end{cases}$$

$$(viii)\begin{cases}4x - 5y - 1 = 0\\ 4x + 2y + 12 = 0\\ x + 2y - 10 = 0\end{cases}$$

$$(viv)\begin{cases}2x + 3y - z = 0\\ 4x + 6y - 3z = 0\end{cases}$$

التمرين 3

هل للجمل التالية حل غير صفري أم لا ؟ ثم أوجده أن وجد .

$$(i)\begin{cases}x + 3y - 2z = 0\\ x - 8y + 8z = 0\\ 2x - 3y + z = 0\end{cases}$$

$$(ii)\begin{cases}x + 2y - 5z = 0\\ 3x - 2y + 3z = 0\\ 3x - 2y + 4z = 0\end{cases}$$

التمرين 4

أوجد حل جمل المعادلات التالية, وذلك باستخدام طريقة غوس – جوردان, ثم أوجد مقلوب المصفوفة المحددة للجملة إن وجد:

-1

$$\begin{cases}x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9\\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2\\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25\end{cases}$$

-2

$$\begin{cases}x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 2\\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6\\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7\end{cases}$$

المراجع

[1] K. Allab, Éléments d’analyse, OPU, 1990.
[2] K. Abdelkarim, Exercices résolus d’analyse avec rappels de cours, OPU, 1989.
[3] E. Azoulay, Mathématiques 1- Analyse, cours et exercices, McGrow-Hill, 1995.
[4] C. Baba Hamed et K. Benhabib, Algébre 1 rappels de cours et exercices avec solutions, OPU.
[5] C. Baba Hamed et K. Benhabib, Analyse 1 rappels de cours et exercices avec solutions, OPU.
[6] V. Blondel, Mathématiques pour économistes – analyse- Dunod ; 2004.
[7] N. Belbahri et A. Mansouri, Éléments d’analyse, cours et exercices resolus, édition Chihab, 1993.
[8] R. Benzine, Analyse reélle cours et exercices corrigés preparation aux grandes écoles premiére année mathématiques et informatique, OPU, 2010.
[9] A. Khelladi, Introduction à l´analyse mathématiques, Tome 3, OPU, 2002.
[10] F. Liret et D. Martinez, Mathématiques pour le deug, analyse, Dunod, 1997.
[11] R. Larson and D.L. Falvo, Elementry linear algebra, sixth edition, Houghton Mifflin Harcourt publishing company, 2009.
[12] L. Michelle et F. Pierre, Suites et fonctions numériques cours avec exercices, Dunod 1977.
[13] K. Sadallah, Cours d´analyse, Tome 2, OPU, 1985.
[14] S. Rondy ,Mathématiques ECS 1re année - 3e édition actualisée, ellipse, 2017.

[15] K. Zizi, Mathématiques, algébre et analyse, OPU, 2003.
[16] علي عزيز علي واخرون " مبادئ الرياضيات ، التفاضل والتكامل" الجامعة المستنصرية،

بغداد.2003

[17]رمضان محمد جهيمة " التفاضل والتكامل الطبعة الثالثة الجزء الثاني" دار الكتاب الجديد المتحدة. 1999.

[18]سايمور لبشوتز ترجمة د. علي مصطفى بن الأشهر " 3000 مسألة محلولة في الجبر الخطي" سلسلة المسائل المحلولة ملخصات شوم في الرياضيات . الدار الدولية للنشر والتوزيع.

[19]شيرزاد الطلباني و نزدار اسماعيل" محاضرات في الجبر الخطي" الطبعة الثالثة ، ديوان المطبوعات الجامعية 1989.

[20] فرانك آيزو؛ ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين مراجعة فاروق البتاتوني " سلسلة ملخصات شوم ـ نظريات ومسائل في المصفوفات " الدار الدولية للنشر والتوزيع.