République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université de Larbi Tebessi -Tébessa-
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Sciences de la matière

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de **Master**
Domaine : Sciences de la matière
Filière : Physique
Option : Physique de la matière condensée

Présenté Par :

Bouamra Rihab
Lemouchi Tarek

Intitulé :

Étude des bosons scalaires avec la masse dépendante de la position en présence d'un globale monopole

Devant le jury :

Mr. Benkhedir Mohamed Lotfi	Professeur	***Université de TEBESSA***	Président
Mr. Aounallah Houcine	M.C.A	***Université de TEBESSA***	Rapporteur
Mme. Serdouk Fadila	M.C.A	***Université de TEBESSA***	Examinateur

Date de soutenance : 21 / 06 / 2022

ملخص

في هذه المذكرة، درسنا الحركة الكمومية النسبية للبوزونات العددية ذات اللف الذاتي 0،

أولا في غياب الكمون، ثم في وجود كمون كولوم $V = \frac{kq}{r}$ وذلك في الفضاء المنحني وذلك عندما تكون الكتلة متعلقة بالموضع $S(r) = m + \frac{\gamma}{r}$ ،حيث اخترنا فضاء غلوبال مونوبول كمثال لدراستنا.

تم الحصول على التعبيرات لطاقات الحالة المرتبطة وكذلك دالة الموجة من خلال دراسة وحل معادلة ديكابي، وكانت النتائج متعلقة بمعامل الفضاء المدروس.

Abstract

In this thesis, we studied the relativistic quantum motion of scalar bosons spin 0, first in the absence of potential, then in the presence of a coulomb potential $V = \frac{kq}{r}$ in the curved space, with the mass depending on position $S(r) = m + \frac{\gamma}{r}$ where we chose the global monopole space as an example for our study.

Expressions are obtained for bound state energies as well as wave functions by studying and solving the DKP equation, and the results were related to the studied space parameter.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié le mouvement quantique relativiste des bosons scalaires spin-0, d'abord en l'absence de potentiel, puis en présence d'un potentiel coulombien $V = \frac{kq}{r}$ dans un espace courbe avec la masse dépendant de la position $\mathrm{S(r)} = \mathrm{m} + \frac{\gamma}{r}$, où nous avons choisi l'espace global monopole comme un exemple pour notre étude.

Des expressions sont obtenues pour les énergies d'état liées ainsi que les fonctions d'onde par étudié et résoudre l'équation DKP, et les résultats ont été liés au paramètre spatial étudié.

Dédicace

A la plus belle créature que dieu a créée sur terre,

A cette source de tendresse, de patience et de générosité,

A ma mère !!

A mon soutien dans la vie, A mon père qui a toujours était à mes côtés.

A mon frère et mes sœurs.

A ma chère tante Mariem, à ma grand-mère.

A tous mes amis et collègues.

A tous ceux qui, par un mot, m'ont donné la force de continuer…

RIHAB

Dédicaces

Nous dédions ce modeste travail à :

Nos chères familles

En témoignage de leur gratitude de leurs dévouement, de leurs soutien permanent durant toutes nos année d'études, leurs sacrifices illimités, leurs réconforts moral.

Ils ont consenti tant d'effort pour nos études et surtout pour nous voir atteindre ce but, pour tout cela et pour ce qui ne peut être dit, nos affections sans limite.

Nos amis

Pour leur aide, leur temps consacrés à nous, leurs encouragements, leur assistance et soutien.

A tous ceux qui ont participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Tarek

Remerciements

*En tout premier lieu, on remercie **LE BON DIEU**, tout puissant, de nous avoir donné la force pour survivre, ainsi que l'audace pour dépasser toutes les difficultés.*

***NOS PARENTS**, pour leur soutien constant et leurs encouragements.*

*Ensuite nous tiens à exprimer toute nos reconnaissances à notre encadreur de mémoire, Monsieur **Aounallah Houcine**. Pour son apport substantiel dans la réalisation de ce modeste travail ainsi que pour son ensemble de consultations, tout au long de cette formation, qui ont inspiré et nourri nos savoir.*

*Nos vifs remerciements vont également aux membres du jury Monsieur **Benkhedir Mohamad Lotfi ,** pour l'honneur qu'il nous fait en présidant le jury de notre mémoire , et Mme **Serdouk Fadila** , qui a accepté de juger ce mémoire.*

Enfin, nous adressons nos plus sincères remerciements à tous nos proches et amis, qui nous ont toujours encouragés au cours de la réalisation de ce mémoire.

Table des matières

Liste de symboles

j^{μ} :Le quadricourant.

A^{μ} :Le quadripotentiel.

H_D :Hamiltonien de Dirac.

σ_x, σ_y :Matrices de Pauli.

$\Theta, \overline{\Theta}$:Paramétres de la non-commutativité.

$\square$:Le dalembertien.

$\widehat{W}$:Opérateur de Weyl.

$\widehat{\psi}_{KG}$:Fonction d'onde de Klein-Gordon dans un espace noncomutatif.

$\widehat{\psi}_D$:Fonction d'onde de Dirac dans un espace noncomutatif.

$\widehat{\psi}_K$:Fonction d'onde de Kemmer dans un espace noncomutatif.

$\widetilde{f}(k)$:Transformée de Fourier.

$\star$:Produit star de Moyal.

$\otimes$:Produit tensoriel.

s_i :Les matrices standards des particules de spin-1.

(DO) :L'oscillateur de Dirac.

$a/$:Slash de Feynman.

N_{norm} :La constante de normalisation.

$H_n(x)$:Fonction de Hermite.

R^D :Espace enclidien à D dimensions.

$\in_{\mu\nu}$:Tenseur Cevi-Levita.

ε :Champ électrique.

(EDP) :Energy-dependent potential.

(NC) :Noncommutatif.

NC :Noncommutatif.

β :Matrice de Kemmer.

$2m/e$:Moment magnétique anomale.

$\sum \mu\nu$:Tenseur de spin.

$\overrightarrow{\alpha}$:Les matrices de Dirac.

Δ :Laplacien.

ψ_{KG} :La fonction d'onde de Klein-Gordon.

ψ_D :La fonction d'onde de Dirac.

ψ_K :La fonction d'onde de Kemmer.

$g_{\mu\nu}$:Le tenseur fondamental.

$F_{\mu\nu}$:Tenseur électromagnétique.

.

Introduction Générale

Dans les systèmes de mécanique quantique, nous considérons la masse de la particule comme une constante, par exemple, la masse du problème de l'atome d'hydrogène, la masse de l'oscillateur harmonique tridimensionnel et la masse d'un problème électrique. Ce sont des problèmes classiques qui fournissent des résultats qui peuvent être approximés avec des problèmes réels et avec de grandes applications. Cependant, récemment, plusieurs études ont émergé avec la proposition que la masse peut être fonction de la position $[1-6]$. La justification de ce changement de masse repose sur des systèmes où il existe plusieurs applications, par exemple des hétérostructures à semi-conducteurs $[7]$, des propriétés électroniques des semi-conducteurs $[8]$, des puits quantiques, des fils et des points $[9-12]$, des liquides quantiques $[13]$. Il convient de noter que les systèmes quantiques où la masse est fonction de la position est connue dans la littérature en tant que système quantique de masse dépendant de la position $[14, 15]$.
Les systèmes quantiques de masse dépendant de la position ont été étudiés dans le contexte relativiste, par exemple, l'atome pionique $[16]$, en solution de l'équation de Dirac $[17]$, dans les implications en physique atomique $[18]$, dans l'interaction quark-antiquark $[19]$, dans les effets des champs externes sur une particule de Klein Gordon bidimensionnelle sous interaction d'oscillateur pseudo-harmonique $[20]$, dans l'espace non commutatif $[21]$, dans l'espace-temps cosmique $[22, 23]$, dans l'espace-temps de globale monopôle $[24]$, dans l'espace-temps de la corde cosmique en rotation $[25]$, dans l'espace-temps avec torsion $[14, 15, 26]$, dans des scénarios possibles de violation de la symétrie de Lorentz $[27-29]$, sur l'oscillateur Kelin-Gordon $[30-33]$, sur le fermion de Majorana $[34]$, dans l'espace-temps Som-Raychaudhuri $[35, 36]$, et dans la théorie de Kaluza-Klein $[37-38]$.
Certaines grandes théories unifiées ont suggéré que des défauts topologiques se forment lors de la transition de phase dans l'univers primitif par un mécanisme de rupture de symétrie spontanée $[39, 40]$. Divers défauts topologiques incluent les cordes cosmiques $[41, 42]$, les murs de domaine $[40, 43]$ et le globale monopole $[44-47]$. En physique de la matière condensée $[48-54]$, ces défauts linéaires peuvent être liés à des dislocations (torsion) et des désinclinaisons (courbure) $[50, 55]$. Les effets du globale monopole ont été étudiés dans le cadre de systèmes mécaniques quantiques, par exemple, dans la limite non relativiste, les oscillateurs harmoniques $[56]$, la diffusion quantique de particules chargées ou massives $[57-59]$, les solutions exactes de l'équation de Klein-Gordon en présence d'un dyon, flux magnétique et potentiel scalaire $[60]$, Solutions exactes des bosons scalaires et vecteurs en présence des potentiels Aharonov-Bohm et Coulomb $[61-63]$, Champ scalaire dans l'espace-temps de wormhole de type Ellis – Bronnikov chargé $[64-65]$ etc..

La dynamique quantique relativiste des particules massives chargées de spin-0 avec un champ électromagnétique suscite actuellement l'intérêt de la physique théorique. La dynamique quantique relativiste du spin-0 dans le fond de l'espace-temps courbe a été étudiée par plusieurs auteurs, par exemple, Propriétés thermiques d'un oscillateur de DKP [66] , présence d'un champ magnétique sous les effets d'un potentiel de type Cornell dans l'espace-temps de la corde cosmique [67], KG-oscillateur en présence d'un champ magnétique dans l'espace-temps de la corde cosmique [68], KG-oscillateur dans espace-temps de corde cosmique [69], oscillateur DKP dans l'espace-temps de corde cosmique [70], système de spin zéro de l'équation DKP dans l'espace-temps de corde cosmique [71], équation DKP pour les bosons de spin zéro avec un interaction dans l'espace-temps de la corde cosmique [72], effets de la torsion et du potentiel sur l'oscillateur KG [73] et dynamique quantique de la particule de spin-0 [74], respectivement dans l'espace-temps de la corde cosmique, effets non inertiels et de torsion sur Oscillateur KG soumis à un potentiel dans l'espace-temps de la corde cosmique [75], oscillateur KG sur fond courbe utilisant la théorie de Kaluza-Klein [76], et effets non inertiels sur l'oscillateur DKP généralisé dans l'espace-temps de la corde cosmique [77].

Dans notre mémoire, nous étudions l'équation de **Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)** spin-0 libre et en présence du potentiel Coulombien dans un espace de globale monopole avec la masse dépendante de la position. Ce mémoire se compose de trois chapitres comme suit : dans **le premier chapitre**, nous rappelons les équations relativistes bien connues telles que l'équation de **Klein-Gordon**, l'équation de **Dirac**, et l'équation de **DKP** dans un espace cartésienne. Dans **le deuxième chapitre**, nous étudions l'équation de **DKP** spin-0 libre , nous avons calculé les spectres des énergies et les fonctions d'onde en l'absence du potentiel avec la masse dépendante de la position. Dans **le troisième chapitre**, on résout l'équation de **DKP** pour spin-0 avec l'interaction (potentiel Coulombien) dans un espace de globale monopole avec la masse dépendante de la position. Enfin, nous terminerons notre mémoire par une **conclusion.**

Chapitre 1

Formalisme sur les équations relativistes

Le but de ce chapitre est d'essayer de donner quelques concepts nécessaires en mécanique relativiste. Et c'est en rappelant des notations relativistes. On définit aussi les equations relativistes (l'équation de Klein- Gordon spin-0, l'équation de Dirac spin-1/2 et l'équation de DKP spin-0)

1.1 Notation relativiste

Le système physique le plus simple est celui d'une particule libre, pour laquelle l'hamiltonien non relativiste est

$$H = \frac{p^2}{2m} \tag{1.1}$$

le passage à la mécanique quantique est réalisé avec la transcription

$$H \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$p \to -i\hbar\nabla \tag{1.3}$$

ce qui conduit à l'équation de Schrödinger non relativiste

$$i\hbar\frac{\partial\psi\left(x,t\right)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi\left(x,t\right) \tag{1.4}$$

Dans un système, leurs coordonnées espace-temps pourraient être écrire par la metrique sous la forme

$$ds^2 = c^2dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \tag{1.5}$$

On utilisons des indices Grecs pour distinguer les coordonnées espace-temps x^μ, tel que $x^\mu = \left(x^0, x^k\right)$, $\mu = 0, 1, 2, 3$ et $k = 1, 2, 3$. Spécifiquement :

$$\begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned} \tag{1.6}$$

Dans l'espace-temps, un point est représenté par le quadrivecteur x^μ tel que :

$$x^\mu = \left(x^0, x^k\right) = \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) = (ct, x, y, z) \tag{1.7}$$

$$\mu = 0, 1, 2, 3 \quad et \quad k = 1, 2, 3$$

Le lien entre le covariante de quadrivecteur et sont contravariante

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \tag{1.8}$$

Dans l'espace-temp $g^{\mu\nu}$ est le tenseur metrique de Minkowski, qui est considéré comme :

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu} \tag{1.9}$$

pour la forme covariante, on a

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -x, -y, -z) \tag{1.10}$$

Le quadrivecteur champ électromagnétique s'écrit

$$A^\mu = (V, \mathbf{A}) = (V, A_x, A_y, A_z) \tag{1.11}$$

Le lien entre le covariante de quadrivecteur champ électromagnétique et sont contravariante

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu \tag{1.12}$$

et

$$A_\mu = (V, -A_x, -A_y, -A_z) \tag{1.13}$$

L'opérateur gradient s'écrit :

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \boldsymbol{\nabla}\right) \tag{1.14}$$

et

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right) \tag{1.15}$$

avec

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.16}$$

L'operateur $\Box$ Dalembertien :

$$\Box = \partial^\mu\partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \boldsymbol{\nabla}^2 \tag{1.17}$$

La définition du vecteur à quatre moments est analogue,

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right), \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right) \tag{1.18}$$

avec la définition

$$p^2 = p^\mu p_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m^2c^2 \tag{1.19}$$

Donc hamiltonien d'une particule libre relativiste

$$H = \sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2} \tag{1.20}$$

1.2 L'équation de Klein-Gordon pour les particules de spin-0

Dans la mécanique quantique l'équation de Schrödinger est définie par

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right]\psi(x,t) \tag{1.21}$$

le principe de correspondance à l'énergie de particule relativiste libre est :

$$E^2 = m^2 + p^2 \tag{1.22}$$

Dans le cas libre ($V(x) = 0$), l'équation de Schrödinger s'écrit

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi_{KG} = 0 \tag{1.23}$$

En l'absence d'interaction, l'équation de KG devient :

$$\left(p^\mu p_\mu - m^2c^2\right)\psi_{KG} = 0 \tag{1.24}$$

Ou

$$\left(\Box + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi_{KG} = 0 \tag{1.25}$$

Les solutions libres sont de la forme :

$$\psi_{KG} = \exp(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu) \tag{1.26}$$

avec

$$p_\mu x^\mu = p_0 x^0 - \mathbf{p}.\mathbf{x} \tag{1.27}$$

$$p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{p}.\mathbf{x} \tag{1.28}$$

Alors ψ_{KG} devient,

$$\psi_{KG} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p}.\mathbf{x})\right] \tag{1.29}$$

Alors l'équation de KG devient sous la forme

$$p^\mu p_\mu \exp\left[\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p}.\mathbf{x})\right] = m^2c^2 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p}.\mathbf{x})\right] \tag{1.30}$$

Donc

$$E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2 \tag{1.31}$$

Il existe deux solutions, un solution positive $E = +\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$ (pour le particule), et un autre solution négative $E = -\sqrt{m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2}$ (pour l'antiparticule).

1.3 L'équation de Dirac pour les particules de spin-1/2

l'idée principale de Dirac est reformuler l'équation de Klein-Gordon avec une representation matricielle.

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4 &= \left(c\alpha_x p_x + c\alpha_y p_y + c\alpha_z p_z + \beta mc^2\right)^2 \\ &= \left(c\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{p} + \beta mc^2\right)^2 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Donc

$$\begin{aligned} &c^2\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + m^2c^4 \\ &= \left[c^2\left(\alpha_x^2 p_x^2 + \alpha_y^2 p_y^2 + \alpha_z^2 p_z^2\right) + \beta^2 m^2 c^4\right] \\ &+ \left[c^2 p_x p_y \left(\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x\right) + \ldots\right] + \left[mc^3 p_x \left(\alpha_x\beta + \beta\alpha_x\right) + \ldots\right] \end{aligned} \tag{1.33}$$

ces équations donnent :

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = \beta^2 = 1 \tag{1.34}$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0, \qquad i \neq j \tag{1.35}$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \tag{1.36}$$

et les relations d'anticommutation définissent une algèbre pour les ψ_{Dirac} matrices.

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \tag{1.37}$$

pour que l'Hamiltonien $H = c\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{p} + \beta mc^2$ est hermitien, les matrices α_i, β doivent également être hermitiennes ;

$$\alpha_i^\dagger = \alpha_i, \quad \beta^\dagger = \beta \tag{1.38}$$

Dans notre etude on utilisé les quatres matrices suivantes :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad ,i = 1,2,3 \tag{1.39}$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ sont les matrices de Pauli 2×2 et $\mathbf{I}$ sont les matrices 2×2 d'unité, Avec la forme explicite des matrices de Pauli, nous avons, en détail,

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

l'équation de Dirac prend la forme :

$$i\hbar\frac{\partial\psi_{Dirac}}{\partial t} = \left(c\boldsymbol{\alpha}.\mathbf{p} + \beta mc^2\right)\psi_{Dirac} \tag{1.41}$$

ou s'écrit sous la forme :

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi_{Dirac} = 0 \tag{1.42}$$

avec

$$\gamma^0 = \beta \tag{1.43}$$

$$\gamma^i = \gamma^0\alpha_i, \qquad i = 1,2,3 \tag{1.44}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{1.45}$$

Les solutions libres sont de la forme :

$$\psi_{Dirac} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \exp(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu) \tag{1.46}$$

l'équation de Dirac prend la forme :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \exp(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu) = \begin{pmatrix} mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \exp(-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu) \tag{1.47}$$

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p} \\ c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p} & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1.48}$$

En d'autre termes :

$$\left(E - mc^2\right) \varphi = c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p}\chi \tag{1.49}$$

$$\left(E + mc^2\right) \chi = c\boldsymbol{\sigma}.\mathbf{p}\varphi \tag{1.50}$$

Avec

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \text{ et } \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \tag{1.51}$$

et pour $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, les équations (1.49) et (1.50) devient sous la forme :

$$E = \pm mc^2 \tag{1.52}$$

pour l'énergie positive $E = mc^2$,

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1.53}$$

on trouve $\chi = 0$, et

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

pour l'énergie négative $E = -mc^2$,

$$E \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mc^2 & 0 \\ 0 & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \tag{1.55}$$

on trouve $\varphi = 0$, et

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

Donc, pour $\mathbf{p} = \mathbf{0}$

$$\psi_{Dirac} = e^{-imt}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \; e^{-imt}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \; e^{-imt}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \; e^{-imt}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.57}$$

Pour $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$, a partir des équations (1.49) et (1.50) on trouve que

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\\frac{p_z}{E+m}\\\frac{p_-}{E+m}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\frac{p_-}{E+m}\\\frac{-p_z}{E+m}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{p_z}{E-m}\\\frac{p_-}{E-m}\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{p_-}{E-m}\\\frac{-p_z}{E-m}\\0\\1\end{pmatrix}. \tag{1.58}$$

avec la notation,

$$p_\pm = p_x \pm ip_y \tag{1.59}$$

1.4 L'équation de DKP spin-0 un espace cartésienne

L'équation libre de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) est une extension du formalisme covariant de Dirac, aux particules scalaires de spin-0 et vectorielles de spin-1,remplaçons les matrices gamma γ par des matrices bêta β,s'écrit

$$(i\beta^\mu\partial_\mu - M)\Psi_{DKP} = 0 \tag{1.60}$$

avec M est la masse, dans le cas de l'interaction avec un champ électromagnétique A^μ ; l'équation DKP prend la forme :

$$\left(i\beta^\mu\left(\partial_\mu + ieA_\mu\right) - M\right)\Psi_{DKP} = 0 \tag{1.61}$$

Les matrices β^μ de DKP $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ sont des matrices de dimensions 5×5 pour le spin-0 et 10×10 pour le spin-1, satisfont l'algébre de Kemmer suivante :

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu = \eta^{\mu\nu}\beta^\lambda + \eta^{\nu\lambda}\beta^\mu \tag{1.62}$$

où $\eta^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique de Minkowiski, avec

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix} \tag{1.63}$$

Pour le spin-0 on choisit les matrices de DKP

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \upsilon & \widetilde{0} \\ \widetilde{0}_T & 0 \end{pmatrix}, \beta^i = \begin{pmatrix} \widehat{0} & \rho^i \\ -\rho_T^i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.64}$$

avec

$$\widetilde{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \widehat{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \upsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.65}$$

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.66}$$

et ρ_T^i représentant la matrice transposée de ρ^i.
Ce travail dans le système d'unité naturelle ;$(\hbar = c = 1)$
On définit par $\overline{\psi}$

$$\overline{\psi} = \psi^+ \left[2 \left(\beta^0 \right)^2 - 1 \right] \tag{1.67}$$

d'où

$$\overline{\psi} \beta^0 = \psi^+ \beta^0 \tag{1.68}$$

avec $\overline{\psi}$ étant l'adjoint de ψ ; qui vérifie l'équation adjointe suivante :

$$i \left(\partial_\mu - ieA_\mu \right) \overline{\psi} \beta^\mu + M \overline{\psi} = 0 \tag{1.69}$$

Et sachant que :

$$\overline{\psi} \beta^\mu \beta^0 = \psi^+ \beta^{\mu +} \beta^0 \tag{1.70}$$

on tire l'équation de continuité :

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{1.71}$$

où J^μ est défini par :

$$J^\mu = \left(J^0, J^k \right) = \overline{\psi} \beta^\mu \psi \tag{1.72}$$

On utilise l'équation DKP dans les coordonnées cartésienne , A_μ c'est le potentiel quadratique, sous la forme :

$$A_0 = \frac{k}{r} \text{ le potentiel de Coulomb} \tag{1.73}$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0 \tag{1.74}$$

et

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \partial_t \tag{1.75}$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} = \partial_x \tag{1.76}$$

$$\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} = \partial_y \tag{1.77}$$

$$\partial_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} = \partial_z \tag{1.78}$$

Alors, l'équation DKP (1.61) se transforme à :

$$\left(i\beta^0\left(\partial_0 + i\frac{k}{r}\right) + i\beta^1\partial_1 + i\beta^2\partial_2 + i\beta^3\partial_3 - M\right)\Psi_{DKP} = 0 \tag{1.79}$$

la fonction d'onde totale Ψ_{DKP} est donnée par :

$$\Psi_{DKP} = e^{-iEt}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\\ \psi_5\end{pmatrix} \tag{1.80}$$

On pose (1.80) dans l'équation, et aprés un calcul, on trouve

$$\begin{pmatrix} 0 & \left(E-\frac{k}{r}\right) & -i\partial_x & -i\partial_y & -i\partial_z \\ \left(E-\frac{k}{r}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\\ \psi_5\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\\ \psi_5\end{pmatrix} \tag{1.81}$$

On trouve le systeme suivant :

$$\left(E-\frac{k}{r}\right)\psi_2 - i\partial_x\psi_3 - i\partial_y\psi_4 - i\partial_z\psi_5 = M\psi_1 \tag{1.82}$$

$$\left(E-\frac{k}{r}\right)\psi_1 = M\psi_2 \tag{1.83}$$

$$i\partial_x\psi_1 = M\psi_3 \tag{1.84}$$

$$i\partial_y\psi_1 = M\psi_4 \tag{1.85}$$

$$i\partial_z\psi_1 = M\psi_5 \tag{1.86}$$

Utilisons les équations (1.83), (1.84), (1.85) et (1.86) dans l'équation (1.82), on trouve :

$$\left\{\left(E-\frac{k}{r}\right)\left(E-\frac{k}{r}\right) - i\partial_x\left(i\partial_x\right) - i\partial_y\left(i\partial_y\right) - i\partial_z\left(i\partial_z\right)\right\}\psi_1 = M^2\psi_1 \tag{1.87}$$

Après un calcul simple,on trouve :

$$\left[\left(E-\frac{k}{r}\right)^{2}+\left(\partial_{x}^{2}+\partial_{y}^{2}+\partial_{z}^{2}\right)\right]\psi_{1}=M^{2}\psi_{1} \tag{1.88}$$

avec

$$\left(\partial_{x}^{2}+\partial_{y}^{2}+\partial_{z}^{2}\right)=\nabla^{2}=\Delta \tag{1.89}$$

Par conséquent

$$\Delta=\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^{2}}\left(-L^{2}\right) \text{ Voir l'annexe A.} \tag{1.90}$$

et

$$L^{2}\psi_{1}=l(l+1)\psi_{1} \tag{1.91}$$

Nous remplaçons l'équations (1.90) dans l'équations (1.88) on trouve :

$$\left[\frac{d^{2}}{dr^{2}}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\left(E-\frac{k}{r}\right)^{2}-\frac{L^{2}}{r^{2}}-M^{2}\right]\psi_{1}=0 \tag{1.92}$$

Alors

$$\left(\frac{d^{2}}{dr^{2}}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+E^{2}-M^{2}-\frac{l(l+1)-k^{2}}{r^{2}}-\frac{2kE}{r}\right)\psi_{1}=0 \tag{1.93}$$

Cherchons évidemment pour cette équation la solution, sous une forme séparable, comme suite :

$$\psi_{1}(r,\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi)R(r) \tag{1.94}$$

avec $Y(\theta,\varphi)$ (les harmoniques sphériques), et nous avons, pour la composante radiale $R(r)$, l'équation différentielle suivante :

$$\left(\frac{d^{2}}{dr^{2}}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+E^{2}-M^{2}-\frac{l(l+1)-k^{2}}{r^{2}}-\frac{2kE}{r}\right)R(r)=0 \tag{1.95}$$

Pour trouver la solution, introduisons la variable

$$\rho=\xi r \tag{1.96}$$

Et faisons les changements suivantes :

$$\zeta=\frac{2KE}{\xi},\xi^{2}=-4\left(E^{2}-M^{2}\right) \tag{1.97}$$

Alors

$$\frac{d}{dr}=\xi\frac{d}{d\rho} \tag{1.98}$$

et

$$\frac{d^{2}}{dr^{2}}=\xi^{2}\frac{d^{2}}{d\rho^{2}} \tag{1.99}$$

Les équations (1.97)-(1.99) dans l'équation (1.95), nous obtenons :

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho}-\frac{1}{4}-\frac{l\left(l+1\right)-k^2}{\rho^2}-\frac{\zeta}{\rho}\right)R\left(\rho\right)=0 \tag{1.100}$$

La solution générale est donnée par :

$$R\left(\rho\right)=e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^s u\left(\rho\right) \tag{1.101}$$

Alors, on a

$$\frac{dR\left(\rho\right)}{d\rho}=e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^s\left[\frac{du\left(\rho\right)}{d\rho}+\left(\frac{s}{\rho}-\frac{1}{2}\right)u\left(\rho\right)\right] \tag{1.102}$$

et

$$\frac{d^2R\left(\rho\right)}{d\rho^2}=e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^s\left[\frac{d^2u\left(\rho\right)}{d\rho^2}+\left(\frac{2s}{\rho}-1\right)\frac{du\left(\rho\right)}{d\rho}+\left(\frac{1}{4}-\frac{s}{\rho}+\frac{s\left(s-1\right)}{\rho^2}\right)u\left(\rho\right)\right] \tag{1.103}$$

Alors, (1.100) devient

$$\left[\frac{d^2u\left(\rho\right)}{d\rho^2}+\left(\frac{2\left(s+1\right)}{\rho}-1\right)\frac{du\left(\rho\right)}{d\rho}+\left(\frac{s\left(s+1\right)}{\rho^2}-\frac{l\left(l+1\right)-\gamma^2}{\rho^2}-\frac{s+1+\zeta}{\rho}\right)\right]u\left(\rho\right)=0 \tag{1.104}$$

Avec la condition :

$$s\left(s+1\right)=l\left(l+1\right)-k^2 \tag{1.105}$$

Donc

$$\left[\rho\frac{d^2}{d\rho^2}+\left(2\left(s+1\right)-\rho\right)\frac{d}{d\rho}-\left(s+1+\zeta\right)\right]u\left(\rho\right)=0 \tag{1.106}$$

L'équation (1.106) admet alors comme solution d'une fonction hypergéométrique confluente **voir l'annexe B.**

$$u\left(\rho\right)=N_{norm}\ {}_1F_1\left(s+1+\zeta,2\left(s+1\right);\rho\right)$$

Pour l'équation (1.105), on trouve la solution suivante :

$$s=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2}+l\right)^2-k^2\right]} \tag{1.107}$$

Cette condition est satisfaite seulement si

$$s+1+\zeta=-n \tag{1.108}$$

Alors

$$\frac{2kE}{\xi} = -\left(n + 1 + s\right)$$

$$\frac{2E}{\xi} = -\left(n + \frac{1}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2} + l\right)^2 - k^2\right]}\right) \tag{1.109}$$

Donc on trouve le spectre des énergies :

$$E_n = \pm M\left[1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} - \sqrt{\left[\left(\frac{1}{2} + l\right)^2 - k^2\right]}\right)^2}\right]^{\frac{-1}{2}}. \tag{1.110}$$

Ces résultats coïncident exactement avec ceux trouvés dans mecanique quantique [78].

Chapitre 2

Solutions libre des bosons scalaires avec la masse dépendante de la position en présence d'un monopole globale

Le but de ce chapitre est l'étude des solutions de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) de spin 0 en l'absence du potentiel, dans un espace de global monopole. On utilise la définition de l'équation DKP dans un espace courbe. On trouve le spectre des énergies et la fonction d'onde par la technique de tetrade.

2.1 L'équation DKP dans un espace courbe

2.1.1 Formalisme

Dans un espace courbe, L'équation de DKP s'écrit sous la forme $[11]-[12]$:

$$\left\{ i\widetilde{\beta}^{\mu} \left(\partial_{\mu} + \frac{\omega_{\mu ab}}{2} S^{ab} - \frac{ie}{\hbar c} A_{\mu} \right) - m \right\} \Psi = 0 \tag{2.1}$$

A_{μ} c'est le potentiel et $\widetilde{\beta}^{\mu}$ sont les matrices de DKP dans un espace courbe satisfaisant à la relation :

$$\widetilde{\beta}^{\mu} = e^{\mu}_{(a)} \beta^{\mu} \tag{2.2}$$

La metrique dans un espace monopole globale s'écrit sous la forme,

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right) \tag{2.3}$$

Le tenseur métrique dans cet espace $g_{\mu\nu}$,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^2 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

et $g^{\mu\nu}$ est l'inverse du tenseur

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\alpha^2 r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

avec

$$g_{\mu i} g^{i\nu} = \delta_\mu^\nu \tag{2.6}$$

Le cas particulier $\alpha = 1$ donne l'espace de Minkowski en coordonnées sphériques.

2.1.2 Symboles de Christoffel

Les Symboles de Christoffel sécrit :

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{g^{\mu\rho}}{2}\left(g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}\right) \tag{2.7}$$

avec $g_{\rho\nu,\lambda}$, $g_{\rho\lambda,\nu}$ et $g_{\nu\lambda,\rho}$ définies par :

$$g_{\rho\nu,\lambda} = \frac{d\left(g_{\rho\nu}\right)}{d\lambda} \tag{2.8}$$

$$g_{\rho\lambda,\nu} = \frac{d\left(g_{\rho\lambda}\right)}{d\nu} \tag{2.9}$$

$$g_{\nu\lambda,\rho} = \frac{d\left(g_{\nu\lambda}\right)}{d\rho} \tag{2.10}$$

On peut calculer les Symboles de Christoffel $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ comme suit :

$$\Gamma^1_{22} = \frac{g^{11}}{2}\left(-g_{22,1}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(-\alpha^2 r^2\right) = -\alpha^2 r \tag{2.11}$$

$$\Gamma^1_{33} = \frac{g^{11}}{2}\left(-g_{33,1}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(-\alpha^2 r^2 \sin^2\theta\right) = -\alpha^2 r \sin^2\theta \tag{2.12}$$

$$\Gamma^2_{12} = \frac{g^{22}}{2}\left(g_{22,1}\right) = -\frac{1}{2\alpha^2 r^2}\frac{d}{dr}\left(-\alpha^2 r^2\right) = \frac{1}{r} \tag{2.13}$$

$$\Gamma^2_{33} = \frac{g^{22}}{2}\left(-g_{33,2}\right) = -\frac{1}{2\alpha^2 r^2}\frac{d}{d\theta}\left(\alpha^2 r^2 \sin^2\theta\right) = -\sin\theta\cos\theta \tag{2.14}$$

$$\Gamma^3_{13} = \frac{g^{33}}{2}(g_{33,1}) = -\frac{1}{2\alpha^2 r^2 \sin^2\theta}\frac{d}{dr}\left(-\alpha^2 r^2 \sin^2\theta\right) = \frac{1}{r} \tag{2.15}$$

$$\Gamma^3_{23} = \frac{g^{33}}{2}(g_{33,2}) = -\frac{1}{2\alpha^2 r^2 \sin^2\theta}\frac{d}{d\theta}\left(-\alpha^2 r^2 \sin^2\theta\right) = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \tag{2.16}$$

On trouve six Symboles de Christoffel et les autres sont nuls.

$$\begin{array}{ccc} \Gamma^r_{\theta\theta} = -\alpha^2 r & \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -\alpha^2 r\sin^2\theta & \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \\ \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r} & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{array} \tag{2.17}$$

2.2 Connections de spin

2.2.1 Methode 1

Les connexions de spin $\omega_{\mu ab}$ peuvent être écrites en fonction des symboles de Christoffel $\Gamma^l_{j\mu}$ comme suit :

$$\omega_{\mu ab} = e_{(a)l} e^j_{(b)} \Gamma^l_{j\mu} - e^j_{(b)} \partial_\mu e_{(a)j} \tag{2.18}$$

avec $e^\mu_{(a)}$ et $e_{(b)\mu}$ sont les tetrades et les inverses de tetrades. Nous avons choisis les tetrades $e^\mu_{(a)}$

$$e^\mu_{(a)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\alpha r\sin\theta} \end{pmatrix} \tag{2.19}$$

et l'inverse $e_{(b)\mu}$

$$e_{(b)\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha r\sin\theta \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

avec

$$e^\mu_{(a)} e_{(b)\mu} = \eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.21}$$

η_{ab} et la metrique de Minkowski. On peut calculer les connexions de spin $\omega_{\mu ab}$ comme suit :

$$\omega_{212} = -e^2_{(2)}\Gamma^r_{\theta\theta} = -\frac{1}{\alpha r}\left(-\alpha^2 r\right) = \alpha \tag{2.22}$$

$$\omega_{221} = e_{(2)2} e^{1}_{(1)} \Gamma^{\theta}_{r\theta} = -\alpha r \left(\frac{1}{r}\right) = -\alpha \tag{2.23}$$

Alors

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

et pour les autres connexions de spin $\omega_{\mu ab}$:

$$\omega_{313} = e_{(1)1} e^{3}_{(3)} \Gamma^{r}_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{\alpha r \sin\theta} \left(-\alpha^2 r \sin^2\theta\right) = \alpha \sin\theta \tag{2.25}$$

$$\omega_{323} = e_{(2)2} e^{3}_{(3)} \Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\alpha r \frac{1}{\alpha r \sin\theta} \left(-\sin\theta\cos\theta\right) = \cos\theta \tag{2.26}$$

$$\omega_{331} = e_{(3)3} e^{1}_{(1)} \Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = -\alpha r \sin\theta \left(\frac{1}{r}\right) = -\alpha \sin\theta \tag{2.27}$$

$$\omega_{332} = e_{(3)3} e^{2}_{(2)} \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = -\alpha r \sin\theta \frac{1}{\alpha r} \left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right) = -\cos\theta \tag{2.28}$$

Donc

$$\omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & -\alpha\sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

2.2.2 Methode 2

On peut aussi calculer les connexions de spin en utilisant l'équation de structure de Maurer-Cartan dont :

$$de^a + \omega^a_b \wedge e^b = 0 \tag{2.30}$$

avec la définition :

$$e^0 = dt \tag{2.31}$$

$$e^1 = dr \tag{2.32}$$

$$e^2 = \alpha r d\theta \tag{2.33}$$

$$e^3 = \alpha r \sin\theta d\varphi \tag{2.34}$$

On peut calculer les connexions de spin $\omega_{\mu ab}$:

$$dt \wedge dt = 0 \tag{2.35}$$

$$dr \wedge dr = 0 \tag{2.36}$$

$$d\theta \wedge d\theta = 0 \tag{2.37}$$

$$d\varphi \wedge d\varphi = 0 \tag{2.38}$$

Donc, la metrique de global monopole,

$$ds^2 = \left(e^0\right)^2 - \left(e^1\right)^2 - \left(e^2\right)^2 - \left(e^3\right)^2 \tag{2.39}$$

On trouve,

$$de^0 = dt \wedge dt = 0 \tag{2.40}$$

$$de^1 = dr \wedge dr = 0 \tag{2.41}$$

$$de^2 = d\left(\alpha r d\theta\right) = \alpha dr \wedge d\theta + \alpha r d\theta \wedge d\theta = \alpha dr \wedge d\theta \tag{2.42}$$

$$de^3 = d\left(\alpha r \sin\theta d\varphi\right) = \alpha \sin\theta dr \wedge d\varphi + \alpha r \cos\theta d\theta \wedge d\varphi \tag{2.43}$$

a partir l'équation (2.42), on trouve :

$$de^2 = \alpha dr \wedge d\theta = -\alpha d\theta \wedge dr$$

$$de^2 + \alpha d\theta \wedge dr = 0$$

$$de^2 + \omega_1^2 \wedge e^1 = 0 \tag{2.44}$$

Alors, par la formule de Cartan :

$$\omega_1^2 = \alpha = -\omega_2^1 \tag{2.45}$$

et

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

a partir l'équation (2.43), on trouve :

$$de^3 + \alpha \sin\theta d\varphi \wedge dr + \alpha r \cos\theta d\varphi \wedge d\theta = 0$$

$$de^3 + \omega_1^3 \wedge e^1 + \omega_2^3 \wedge e^2 = 0 \tag{2.47}$$

Alors, par la formule de Cartan :

$$\omega_1^3 = \alpha \sin\theta = -\omega_3^1 \tag{2.48}$$

$$\omega_2^3 = \alpha \cos\theta = -\omega_3^2 \tag{2.49}$$

et

$$\omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta \\ 0 & -\alpha\sin\theta & -\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

2.3 L'équation DKP libre dans un espace courbe avec la masse dépendante de la position

Maintenant étudions l'équation de DKP spin-0 libre, l'interaction de champ électromagnétique $A^{\mu} = 0$, l'équation de DKP (2.1) devient,

$$\left\{ i\widetilde{\beta}^{\mu} \left(\partial_{\mu} + \frac{\omega_{\mu ab}}{2} S^{ab} \right) - m \right\} \Psi = 0 \tag{2.51}$$

.avec $\widetilde{\beta}^{\mu}$ sont les matrice dans un espace courbe,

$$\widetilde{\beta}^{\mu} = e^{\mu}_{(a)} \beta^{\mu} \tag{2.52}$$

Ici, la masse m dépendante de la position en introduisant un potentiel scalaire comme modification du terme de masse de l'équation de DKP sous la forme $m \to m + S(r)$ où $S(r)$ est le potentiel scalaire, on peut introduire le généralisé l'équation de DKP comme forme

$$\left\{ ie^{\mu}_{(a)} \beta^{\mu} \left(\partial_{\mu} + \frac{\omega_{\mu ab}}{2} S^{ab} \right) - [m + S(r)] \right\} \Psi = 0 \tag{2.53}$$

avec $\mu = 0, 1, 2, 3$, on trouve

$$\begin{aligned} &\left\{ ie^{0}_{(a)} \beta^{0} \left(\partial_{0} + \frac{\omega_{tab}}{2} S^{ab} \right) + ie^{1}_{(a)} \beta^{1} \left(\partial_{r} + \frac{\omega_{rab}}{2} S^{ab} \right) \right. \\ &\left. + ie^{2}_{(a)} \beta^{2} \left(\partial_{\theta} + \frac{\omega_{\theta ab}}{2} S^{ab} \right) + ie^{3}_{(a)} \beta^{3} \left(\partial_{\varphi} + \frac{\omega_{\varphi ab}}{2} S^{ab} \right) - [m + S(r)] \right\} \Psi = 0 \end{aligned} \tag{2.54}$$

On utilise,

$$\partial_0 = \partial_t \tag{2.55}$$

$$\partial_1 = \partial_r \tag{2.56}$$

$$\partial_2 = \partial_\theta \tag{2.57}$$

$$\partial_3 = \partial_\varphi \tag{2.58}$$

$$\omega_{tab} = \omega_{rab} = 0 \tag{2.59}$$

on trouve

$$\left\{ie^{0}_{(a)}\beta^{0}\partial_{t}+ie^{1}_{(a)}\beta^{1}\partial_{r}\right.$$
$$\left.+ie^{2}_{(a)}\beta^{2}\left(\partial_{\theta}+\frac{\omega_{\theta ab}}{2}S^{ab}\right)+ie^{3}_{(a)}\beta^{3}\left(\partial_{\varphi}+\frac{\omega_{\varphi ab}}{2}S^{ab}\right)-[m+S(r)]\right\}\Psi=0 \tag{2.60}$$

avec

$$e^{0}_{(a)}\rightarrow e^{0}_{(0)}=1 \tag{2.61}$$
$$e^{1}_{(a)}\rightarrow e^{1}_{(1)}=1 \tag{2.62}$$
$$e^{2}_{(a)}\rightarrow e^{2}_{(2)}=\frac{1}{\alpha r} \tag{2.63}$$
$$e^{3}_{(a)}\rightarrow e^{3}_{(3)}=\frac{1}{\alpha r\sin\theta} \tag{2.64}$$

on trouve

$$\left\{i\beta^{0}\partial_{t}+i\beta^{1}\partial_{r}+\frac{i}{\alpha r}\beta^{2}\left(\partial_{\theta}+\frac{\omega_{\theta ab}}{2}S^{ab}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^{3}\left(\partial_{\varphi}+\frac{\omega_{\varphi ab}}{2}S^{ab}\right)-[m+S(r)]\right\}\Psi=0 \tag{2.65}$$

et

$$\left\{i\beta^{0}\partial_{t}+i\beta^{1}\partial_{r}+\frac{i}{\alpha r}\beta^{2}\left(\partial_{\theta}+\frac{\omega_{\theta 12}}{2}S^{12}+\frac{\omega_{\theta 21}}{2}S^{21}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^{3}\left(\partial_{\varphi}+\frac{\omega_{\varphi 13}}{2}S^{13}+\frac{\omega_{\varphi 31}}{2}S^{31}+\frac{\omega_{\varphi 23}}{2}S^{23}+\frac{\omega_{\varphi 32}}{2}S^{32}\right)-[m+S(r)]\right\}\Psi=0 \tag{2.66}$$

et

$$S^{ab}=\left[\beta^{a},\beta^{b}\right]=\beta^{a}\beta^{b}-\beta^{b}\beta^{a}=-S^{ba} \tag{2.67}$$

on trouve

$$\left\{i\beta^{0}\partial_{t}+i\beta^{1}\partial_{r}+\frac{i}{\alpha r}\beta^{2}\left(\partial_{\theta}+\frac{\alpha}{2}S^{12}-\frac{\alpha}{2}S^{21}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^{3}\left(\partial_{\varphi}+\frac{\alpha\sin\theta}{2}S^{13}-\frac{\alpha\sin\theta}{2}S^{31}+\frac{\cos\theta}{2}S^{23}-\frac{\cos\theta}{2}S^{32}\right)-[m+S(r)]\right\}\Psi=0 \tag{2.68}$$

et

$$\left\{i\beta^{0}\partial_{t}+i\beta^{1}\partial_{r}+\frac{i}{\alpha r}\beta^{2}\left(\partial_{\theta}+\frac{\alpha}{2}S^{12}+\frac{\alpha}{2}S^{12}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^{3}\left(\partial_{\varphi}+\frac{\alpha\sin\theta}{2}S^{13}+\frac{\alpha\sin\theta}{2}S^{13}+\frac{\cos\theta}{2}S^{23}+\frac{\cos\theta}{2}S^{23}\right)-[m+S(r)]\right\}\Psi=0 \tag{2.69}$$

et

$$\left\{i\beta^{0}\partial_{t}+i\beta^{1}\partial_{r}+\frac{i}{\alpha r}\beta^{2}\left(\partial_{\theta}+\alpha S^{12}\right)+\right.$$
$$\left.\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^{3}\left(\partial_{\varphi}+\alpha\sin\theta S^{13}+\cos\theta S^{23}\right)-[m+S(r)]\right\}\Psi=0 \tag{2.70}$$

et

$$\left\{ i\beta^0\partial_t + i\beta^1\partial_r + \frac{i}{\alpha r}\beta^2 \left[\partial_\theta + \alpha\left(\beta^1\beta^2 - \beta^2\beta^1\right)\right] \right.$$
$$\left. + \frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^3\left[\partial_\varphi + \alpha\sin\theta\left(\beta^1\beta^3 - \beta^3\beta^1\right) + \cos\theta\left(\beta^2\beta^3 - \beta^3\beta^2\right)\right] - \left[m + S(r)\right]\right\}\Psi = 0 \tag{2.71}$$

avec

$$\beta^2\beta^1\beta^2 = \beta^3\beta^1\beta^3 = \beta^3\beta^2\beta^3 = 0 \tag{2.72}$$

on trouve

$$\left\{ i\beta^0\partial_t + i\beta^1\partial_r + \frac{i}{\alpha r}\beta^2\left(\partial_\theta - \alpha\beta^2\beta^1\right) \right.$$
$$\left. + \frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^3\left(\partial_\varphi - \alpha\sin\theta\beta^3\beta^1 - \cos\theta\beta^3\beta^2\right) - \left[m + S(r)\right]\right\}\Psi = 0 \tag{2.73}$$

et

$$\Psi = e^{-iEt}\psi\left(r,\theta,\varphi\right) \tag{2.74}$$

avec

$$\partial_t\Psi = \frac{d}{dt}\left[e^{-iEt}\psi\left(r,\theta,\varphi\right)\right] = -iEe^{-iEt}\psi\left(r,\theta,\varphi\right) \tag{2.75}$$

on trouve

$$\left\{ E\beta^0 + i\beta^1\partial_r + \frac{i}{\alpha r}\beta^2\left(\partial_\theta - \alpha\beta^2\beta^1\right) + \right.$$
$$\left. \frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^3\left(\partial_\varphi - \alpha\sin\theta\beta^3\beta^1 - \cos\theta\beta^3\beta^2\right) - \left[m + S(r)\right]\right\}\Psi\left(r,\theta,\varphi\right) = 0 \tag{2.76}$$

Nous choisissons les matrices β^μ par :

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

On touve que

$$\beta^2\beta^2\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.78}$$

$$\beta^3\beta^3\beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.79}$$

$$\beta^3\beta^3\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.80}$$

Alors l'équation

$$\Big\{ E\beta^0 + i\beta^1\partial_r + \frac{i}{\alpha r}\beta^2\left(\partial_\theta - \alpha\beta^2\beta^1\right) + \frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^3\left(\partial_\varphi - \alpha\sin\theta\beta^3\beta^1 - \cos\theta\beta^3\beta^2\right) - [m + S(r)] \Big\}\Psi(r,\theta,\varphi) = 0 \tag{2.81}$$

devient

$$\begin{pmatrix} -[m+S(r)] & E & -i\partial_r - 2\frac{i}{r} & -\frac{i}{r\alpha}\partial_\theta - \frac{i}{r\alpha}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} & -\frac{i}{r\alpha}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta} \\ E & -[m+S(r)] & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_r & 0 & -[m+S(r)] & 0 & 0 \\ \frac{i}{r\alpha}\partial_\theta & 0 & 0 & -[m+S(r)] & 0 \\ \frac{i}{r\alpha}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta} & 0 & 0 & 0 & -[m+S(r)] \end{pmatrix}\psi(r,\theta,\varphi) = 0 \tag{2.82}$$

avec

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \psi_1(r,\theta,\varphi) \\ \psi_2(r,\theta,\varphi) \\ \psi_3(r,\theta,\varphi) \\ \psi_4(r,\theta,\varphi) \\ \psi_5(r,\theta,\varphi) \end{pmatrix} \tag{2.83}$$

On trouve le systeme suivant :

$$E\psi_2 - \left(i\partial_r + 2\frac{i}{r}\right)\psi_3 - \left(\frac{i}{\alpha r}\partial_\theta + \frac{i}{\alpha r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\psi_4 - \frac{i}{\alpha r}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta}\psi_5 = [m + S(r)]\,\psi_1 \tag{2.84}$$

$$E\psi_1 = [m + S(r)]\,\psi_2 \tag{2.85}$$

$$i\partial_r\psi_1 = [m + S(r)]\,\psi_3 \tag{2.86}$$

$$\frac{i}{\alpha r}\partial_\theta\psi_1 = [m + S(r)]\,\psi_4 \tag{2.87}$$

$$\frac{i}{\alpha r}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta}\psi_1 = [m + S(r)]\,\psi_5 \tag{2.88}$$

Utilisons les équations (2.85), (2.86), (2.87) et (2.88) dans l'équation (2.84), on trouve

$$\left\{E^2 + \left(\partial_r + \frac{2}{r}\right)\partial_r + \left(\frac{\partial_\theta}{\alpha r} + \frac{1}{\alpha r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\frac{\partial_\theta}{\alpha r} + \frac{1}{\alpha^2 r^2}\frac{\partial_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right\}\psi_1 = [m + S(r)]^2\,\psi_1 \tag{2.89}$$

Après un calcul simple,on trouve :

$$\left\{E^2 + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{1}{\alpha^2 r^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\varphi^2}\right)\right\}\psi_1 = [m + S(r)]^2\,\psi_1 \tag{2.90}$$

Par conséquent

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(-L^2\right) \text{ Voir l'annexe A.} \tag{2.91}$$

et

$$L^2\psi_1 = l(l+1)\psi_1 \tag{2.92}$$

Nous remplaçons l'équations (2.91) dans l'équations (2.90) on trouve :

$$\left\{E^2 + \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{L^2}{\alpha^2 r^2} - [m + S(r)]^2\right\}\psi_1 = 0 \tag{2.93}$$

Cherchons évidemment pour cette équation la solution, sous une forme séparable, comme suite :

$$\psi_1(r,\theta,\varphi) = Y(\theta,\varphi)R(r) \tag{2.94}$$

avec $Y(\theta,\varphi)$ (les harmoniques sphériques), et nous avons, pour la composante radiale $R(r)$, l'équation différentielle suivante

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + E^2 - \frac{l(l+1)}{\alpha^2 r^2} - [m + S(r)]^2\right\}R(r) = 0 \tag{2.95}$$

Nous choisissons l'expression $S(r)$ est de la forme $S(r) = \frac{\gamma}{r}$, avec γ est un constant. On trouve :

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{\alpha^2 r^2} + \left(E^2 - m^2\right) - 2\frac{m\gamma}{r} - \frac{\gamma^2}{r^2}\right\}R(r) = 0 \tag{2.96}$$

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1) + \alpha^2\gamma^2}{\alpha^2 r^2} + \left(E^2 - m^2\right) - 2\frac{m\gamma}{r}\right\}R(r) = 0 \tag{2.97}$$

2.3.1 Le spectre des énergies

$$\xi = kr \tag{2.98}$$

$$\frac{d}{dr} = k\frac{d}{d\xi} \tag{2.99}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = k^2\frac{d^2}{d\xi^2} \tag{2.100}$$

et les changements suivantes :

$$4\left(E^2 - m^2\right) = -k^2 \tag{2.101}$$

$$\eta = \frac{2m\gamma}{k} \tag{2.102}$$

Et faisons les changements suivante :On trouve

$$\left\{k^2\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}k^2\frac{d}{d\xi} - k^2\frac{l(l+1)+\alpha^2\gamma^2}{\alpha^2\xi^2} - \frac{k^2}{4} - K^2\frac{\eta}{\xi}\right\}R(\xi) = 0 \tag{2.103}$$

$$k^2\left\{\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d}{d\xi} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\eta}{\xi} - \frac{\frac{l(l+1)}{\alpha^2}+\gamma^2}{\xi^2}\right)\right\}R(\xi) = 0 \tag{2.104}$$

et

$$\left\{\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi}\frac{d}{d\xi} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\eta}{\xi} - \frac{\frac{l(l+1)}{\alpha^2}+\gamma^2}{\xi^2}\right)\right\}R(\xi) = 0 \tag{2.105}$$

La solution générale est donnée par :

$$R\left(\xi\right) = e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^s u\left(\xi\right) \tag{2.106}$$

Alors, on a

$$\frac{dR\left(\xi\right)}{d\xi} = e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^s\left[\frac{du\left(\xi\right)}{d\xi} + \left(\frac{s}{\xi} - \frac{1}{2}\right)u\left(\xi\right)\right] \tag{2.107}$$

et

$$\frac{d^2R\left(\xi\right)}{d\xi^2} = e^{-\frac{\xi}{2}}\xi^s\left[\frac{d^2u\left(\xi\right)}{d\xi^2} + \left(\frac{2s}{\xi} - 1\right)\frac{du\left(\xi\right)}{d\xi} + \left(\frac{1}{4} - \frac{s}{\xi} + \frac{s\left(s-1\right)}{\xi^2}\right)u\left(\xi\right)\right] \tag{2.108}$$

Alors, (2.105) devient

$$\left[\frac{d^2u\left(\xi\right)}{d\xi^2} + \left(\frac{2\left(s+1\right)}{\xi} - 1\right)\frac{du\left(\xi\right)}{d\xi} + \left(\frac{s\left(s+1\right)}{\xi^2} - \frac{\frac{l(l+1)}{\alpha^2}+\gamma^2}{\xi^2} - \frac{\eta+s+1}{\xi}\right)\right]u\left(\xi\right) = 0 \tag{2.109}$$

Avec la condition :

$$s\,(s+1)=\frac{l(l+1)}{\alpha^2}+\gamma^2 \tag{2.110}$$

Donc

$$\left[\xi\frac{d^2}{d\xi^2}+\left(2\,(s+1)-\xi\right)\frac{d}{d\xi}-(\eta+s+1)\right]u\,(\xi)=0 \tag{2.111}$$

2.3.2 La fonction d'onde

L'équation (2.111) admet alors comme solution d'une fonction hypergéométrique confluente **voir l'annexe B**.

$$u\,(\xi)=N_{norm}\,._1F_1\,(\eta+s+1,2\,(s+1)\,;\xi)$$

2.3.3 Le spectre des energie

Pour l'équation (2.110), on trouve la solution suivante :

$$s=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left[\frac{1}{4}+\frac{l(l+1)}{\alpha^2}+\gamma^2\right]} \tag{2.112}$$

Cette condition est satisfaite seulement si

$$\eta+s+1=-n \tag{2.113}$$

Alors

$$\frac{2m\gamma}{k}=-\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\frac{1}{4}+\frac{l(l+1)}{\alpha^2}+\gamma^2\right]}\right) \tag{2.114}$$

Donc on trouve le spectre des énergies est

$$E_n=\pm m\left[1-\frac{\gamma^2}{\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\frac{1}{4}+\frac{l(l+1)}{\alpha^2}+\gamma^2\right]}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{2.115}$$

La forme de l'énergie obtenue dans l'expression (2.115) nous dit que l'énergie dépend du paramètre α de l'espace de global monopole et le paramètre γ que la masse dépendant de la position, Ce sont parmi les résultats prédits par Einstein en relativité générale.

Chapitre 3

Solutions des bosons scalaires avec la masse dépendante de la position en présence du potentiel Coulombien dans un espace de monopole globale

Le but de ce chapitre est l'étude des solutions de Duffin-Kemmer-Petiau de spin 0 avec l'intéraction, dans un espace de global monopole. On utilise la définition de l'équation de DKP dans un espace courbe. On utilise le potentiel A_μ dans l'équation DKP , A_μ c'est le potentiel quadratique, sous la forme :

$$A_0 = \frac{k}{r} \text{ le potentiel de Coulomb} \tag{3.1}$$

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0 \tag{3.2}$$

et

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial t} = \partial_t \tag{3.3}$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial}{\partial r} = \partial_r \tag{3.4}$$

$$\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} = \partial_\theta \tag{3.5}$$

$$\partial_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial \varphi} = \partial_\varphi \tag{3.6}$$

l'équation de DKP devient,

$$\left\{ i\widetilde{\beta}^{\mu} \left(\partial_\mu + \frac{\omega_{\mu ab}}{2} S^{ab} - iA_\mu \right) - [m + S(r)] \right\} \Psi = 0 \tag{3.7}$$

avec $\widetilde{\beta}^{\mu}$ sont les matrice dans un espace courbe,

$$\widetilde{\beta}^{\mu}=e^{\mu}_{(a)}\beta^{\mu} \tag{3.8}$$

$$\left\{ie^{\mu}_{(a)}\beta^{\mu}\left(\partial_{\mu}+\frac{\omega_{\mu ab}}{2}S^{ab}-iA_{\mu}\right)-[m+S(r)]\right\}\Psi=0 \tag{3.9}$$

avec $\mu=0,1,2,3$, on trouve

$$\begin{aligned}&\left\{ie^{0}_{(a)}\beta^{0}\left(\partial_{0}+\frac{\omega_{tab}}{2}S^{ab}-iA_{0}\right)+ie^{1}_{(a)}\beta^{1}\left(\partial_{r}+\frac{\omega_{rab}}{2}S^{ab}\right)\right.\\&\left.+ie^{2}_{(a)}\beta^{2}\left(\partial_{\theta}+\frac{\omega_{\theta ab}}{2}S^{ab}\right)+ie^{3}_{(a)}\beta^{3}\left(\partial_{\varphi}+\frac{\omega_{\varphi ab}}{2}S^{ab}\right)-[m+S(r)]\right\}\Psi=0\end{aligned} \tag{3.10}$$

On utilise,

$$\omega_{tab}=\omega_{rab}=0 \tag{3.11}$$

on trouve

$$\begin{aligned}&\left\{ie^{0}_{(a)}\beta^{0}\left(\partial_{0}-iA_{0}\right)+ie^{1}_{(a)}\beta^{1}\partial_{r}\right.\\&\left.+ie^{2}_{(a)}\beta^{2}\left(\partial_{\theta}+\frac{\omega_{\theta ab}}{2}S^{ab}\right)+ie^{3}_{(a)}\beta^{3}\left(\partial_{\varphi}+\frac{\omega_{\varphi ab}}{2}S^{ab}\right)-[m+S(r)]\right\}\Psi=0\end{aligned} \tag{3.12}$$

avec

$$e^{0}_{(a)}\rightarrow e^{0}_{(0)}=1 \tag{3.13}$$

$$e^{1}_{(a)}\rightarrow e^{1}_{(1)}=1 \tag{3.14}$$

$$e^{2}_{(a)}\rightarrow e^{2}_{(2)}=\frac{1}{\alpha r} \tag{3.15}$$

$$e^{3}_{(a)}\rightarrow e^{3}_{(3)}=\frac{1}{\alpha r\sin\theta} \tag{3.16}$$

on trouve

$$\begin{aligned}&\left\{i\beta^{0}\left(\partial_{t}-iA_{0}\right)+i\beta^{1}\partial_{r}+\right.\\&\left.\frac{i}{\alpha r}\beta^{2}\left(\partial_{\theta}+\frac{\omega_{\theta ab}}{2}S^{ab}\right)+\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^{3}\left(\partial_{\varphi}+\frac{\omega_{\varphi ab}}{2}S^{ab}\right)-[m+S(r)]\right\}\Psi=0\end{aligned} \tag{3.17}$$

et

$$\begin{aligned}&\left\{i\beta^{0}\left(\partial_{t}-iA_{0}\right)+i\beta^{1}\partial_{r}+\frac{i}{\alpha r}\beta^{2}\left(\partial_{\theta}+\frac{\omega_{\theta 12}}{2}S^{12}+\frac{\omega_{\theta 21}}{2}S^{21}\right)\right.\\&\left.+\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^{3}\left(\partial_{\varphi}+\frac{\omega_{\varphi 13}}{2}S^{13}+\frac{\omega_{\varphi 31}}{2}S^{31}+\frac{\omega_{\varphi 23}}{2}S^{23}+\frac{\omega_{\varphi 32}}{2}S^{32}\right)-[m+S(r)]\right\}\Psi=0\end{aligned} \tag{3.18}$$

et

$$S^{ab}=\left[\beta^{a},\beta^{b}\right]=\beta^{a}\beta^{b}-\beta^{b}\beta^{a}=-S^{ba} \tag{3.19}$$

on trouve

$$\left\{i\beta^{0}\left(\partial_{t}-iA_{0}\right)+i\beta^{1}\partial_{r}+\frac{i}{\alpha r}\beta^{2}\left(\partial_{\theta}+\frac{\alpha}{2}S^{12}-\frac{\alpha}{2}S^{21}\right)\right.$$

$$+\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^3\left(\partial_\varphi+\frac{\alpha\sin\theta}{2}S^{13}-\frac{\alpha\sin\theta}{2}S^{31}+\frac{\cos\theta}{2}S^{23}-\frac{\cos\theta}{2}S^{32}\right)-[m+S(r)]\Bigg\}\Psi=0 \quad (3.20)$$

et

$$\Bigg\{i\beta^0(\partial_t-iA_0)+i\beta^1\partial_r+\frac{i}{\alpha r}\beta^2\left(\partial_\theta+\frac{\alpha}{2}S^{12}+\frac{\alpha}{2}S^{12}\right)$$
$$+\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^3\left(\partial_\varphi+\frac{\alpha\sin\theta}{2}S^{13}+\frac{\alpha\sin\theta}{2}S^{13}+\frac{\cos\theta}{2}S^{23}+\frac{\cos\theta}{2}S^{23}\right)-[m+S(r)]\Bigg\}\Psi=0 \quad (3.21)$$

et

$$\Bigg\{i\beta^0(\partial_t-iA_0)+i\beta^1\partial_r+\frac{i}{\alpha r}\beta^2\left(\partial_\theta+\alpha S^{12}\right)+$$
$$\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^3\left(\partial_\varphi+\alpha\sin\theta S^{13}+\cos\theta S^{23}\right)-[m+S(r)]\Bigg\}\Psi=0 \quad (3.22)$$

et

$$\Bigg\{i\beta^0(\partial_t-iA_0)+i\beta^1\partial_r+\frac{i}{\alpha r}\beta^2\left[\partial_\theta+\alpha\left(\beta^1\beta^2-\beta^2\beta^1\right)\right]$$
$$+\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^3\left[\partial_\varphi+\alpha\sin\theta\left(\beta^1\beta^3-\beta^3\beta^1\right)+\cos\theta\left(\beta^2\beta^3-\beta^3\beta^2\right)\right]-[m+S(r)]\Bigg\}\Psi=0 \quad (3.23)$$

avec

$$\beta^2\beta^1\beta^2=\beta^3\beta^1\beta^3=\beta^3\beta^2\beta^3=0 \quad (3.24)$$

on trouve

$$\Big\{i\beta^0(\partial_t-iA_0)+i\beta^1\partial_r+$$
$$\frac{i}{\alpha r}\beta^2\left(\partial_\theta-\alpha\beta^2\beta^1\right)+\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^3\left(\partial_\varphi-\alpha\sin\theta\beta^3\beta^1-\cos\theta\beta^3\beta^2\right)-[m+S(r)]\Bigg\}\Psi=0 \quad (3.25)$$

et

$$\Psi=e^{-iEt}\psi(r,\theta,\varphi) \quad (3.26)$$

avec

$$\partial_t\Psi=\frac{d}{dt}\left[e^{-iEt}\psi(r,\theta,\varphi)\right]=-iEe^{-iEt}\psi(r,\theta,\varphi) \quad (3.27)$$

Alors l'équation

$$\Bigg\{\beta^0\left(E-\frac{k}{r}\right)+i\beta^1\partial_r+\frac{i}{\alpha r}\beta^2\left(\partial_\theta-\alpha\beta^2\beta^1\right)+$$
$$\frac{i}{\alpha r\sin\theta}\beta^3\left(\partial_\varphi-\alpha\sin\theta\beta^3\beta^1-\cos\theta\beta^3\beta^2\right)-[m+S(r)]\Bigg\}\Psi(r,\theta,\varphi)=0 \quad (3.28)$$

devient

$$\begin{pmatrix} -[m+S(r)] & \left(E-\frac{k}{r}\right) & -i\partial_r-2\frac{i}{r} & -\frac{i}{r\alpha}\partial_\theta-\frac{i}{r\alpha}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} & -\frac{i}{r\alpha}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta} \\ \left(E-\frac{k}{r}\right) & -[m+S(r)] & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_r & 0 & -[m+S(r)] & 0 & 0 \\ \frac{i}{r\alpha}\partial_\theta & 0 & 0 & -[m+S(r)] & 0 \\ \frac{i}{r\alpha}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta} & 0 & 0 & 0 & -[m+S(r)] \end{pmatrix}\psi=0 \quad (3.29)$$

avec

$$\psi\left(r,\theta,\varphi\right)=\begin{pmatrix}\psi_1\left(r,\theta,\varphi\right)\\ \psi_2\left(r,\theta,\varphi\right)\\ \psi_3\left(r,\theta,\varphi\right)\\ \psi_4\left(r,\theta,\varphi\right)\\ \psi_5\left(r,\theta,\varphi\right)\end{pmatrix} \tag{3.30}$$

On trouve le systeme suivant :

$$\left(E-\frac{k}{r}\right)\psi_2-\left(i\partial_r+2\frac{i}{r}\right)\psi_3-\left(\frac{i}{\alpha r}\partial_\theta+\frac{i}{\alpha r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\psi_4-\frac{i}{\alpha r}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta}\psi_5=\left[m+S(r)\right]\psi_1 \tag{3.31}$$

$$\left(E-\frac{kq}{r}\right)\psi_1=\left[m+S(r)\right]\psi_2 \tag{3.32}$$

$$i\partial_r\psi_1=\left[m+S(r)\right]\psi_3 \tag{3.33}$$

$$\frac{i}{\alpha r}\partial_\theta\psi_1=\left[m+S(r)\right]\psi_4 \tag{3.34}$$

$$\frac{i}{\alpha r}\frac{\partial_\varphi}{\sin\theta}\psi_1=\left[m+S(r)\right]\psi_5 \tag{3.35}$$

3.0.4 Le spectre des énergies

Utilisons les équations (3.32), (3.33), (3.34) et (3.35) dans l'équation (3.31), on trouve :

$$\left\{\left(E-\frac{k}{r}\right)^2+\left(\partial_r+\frac{2}{r}\right)\partial_r+\left(\frac{\partial_\theta}{\alpha r}+\frac{1}{\alpha r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\frac{\partial_\theta}{\alpha r}+\frac{1}{\alpha^2r^2}\frac{\partial_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right\}\psi_1=\left[m+S(r)\right]^2\psi_1 \tag{3.36}$$

Après un calcul simple,on trouve :

$$\left\{\left(E-\frac{kq}{r}\right)^2+\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\frac{1}{\alpha^2r^2}\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2}{d\varphi^2}\right)\right\}\psi_1=\left[m+S(r)\right]^2\psi_1 \tag{3.37}$$

Par conséquent

$$L^2\psi_1=l(l+1)\psi_1 \tag{3.38}$$

Nous remplaçons l'équations (3.38) dans l'équations (3.37) on trouve :

$$\left\{\left(E-\frac{k}{r}\right)^2+\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{L^2}{\alpha^2r^2}-\left[m+S(r)\right]^2\right\}\psi_1=0 \tag{3.39}$$

Cherchons évidemment pour cette équation la solution, sous une forme séparable, comme suite :

$$\psi_1(r,\theta,\varphi)=Y(\theta,\varphi)R(r) \tag{3.40}$$

avec $Y(\theta, \varphi)$ (les harmoniques sphériques), et nous avons, pour la composante radiale $R(r)$, l'équation différentielle suivante :

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \left(E - \frac{k}{r}\right)^2 - \frac{l(l+1)}{\alpha^2 r^2} - [m + S(r)]^2\right\} R(r) = 0 \tag{3.41}$$

on trouve

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + E^2 - \frac{2kE}{r} + \left(\frac{k}{r}\right)^2 - \frac{l(l+1)}{\alpha^2 r^2} - [m + S(r)]^2\right\} R(r) = 0 \tag{3.42}$$

Nous choisissons l'expression $S(r)$ est de la forme $S(r) = \frac{\gamma}{r}$, avec γ est un constant. On trouve :et

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \left(E^2 - m^2\right) - \frac{2\left(kE + m\gamma\right)}{r} - \frac{\frac{l(l+1)}{\alpha^2} - k^2 + \gamma^2}{r^2}\right\} R(r) = 0 \tag{3.43}$$

Pour trouver la solution, introduisons la variable

$$\rho = \xi r \tag{3.44}$$

Et faisons les changements suivante :

$$\xi^2 = -4\left(E^2 - m^2\right) \tag{3.45}$$

$$\varsigma = 2\frac{(kE + m\gamma)}{\xi} \tag{3.46}$$

On trouve

$$d\rho = \xi dr \tag{3.47}$$

et

$$\frac{d}{dr} = \xi\frac{d}{d\rho} \tag{3.48}$$

et

$$\frac{d^2}{dr^2} = \xi^2\frac{d^2}{d\rho^2} \tag{3.49}$$

On trouve

$$\xi^2\left\{\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\varsigma}{\rho} - \frac{\frac{l(l+1)}{\alpha^2} - \gamma^2}{\rho^2}\right)\right\} R(r) = 0 \tag{3.50}$$

et

$$\left\{\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{\varsigma}{\rho} - \frac{\frac{l(l+1)}{\alpha^2} - k^2 + \gamma^2}{\rho^2}\right)\right\} R(r) = 0 \tag{3.51}$$

La solution générale est donnée par :

$$R\left(\rho\right) = e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^s u\left(\rho\right) \tag{3.52}$$

Alors, on a

$$\frac{dR(\rho)}{d\rho} = e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^s\left[\frac{du(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{s}{\rho} - \frac{1}{2}\right)u(\rho)\right] \tag{3.53}$$

et

$$\frac{d^2R(\rho)}{d\rho^2} = e^{-\frac{\rho}{2}}\rho^s\left[\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} + \left(\frac{2s}{\rho} - 1\right)\frac{du(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{1}{4} - \frac{s}{\rho} + \frac{s(s-1)}{\rho^2}\right)u(\rho)\right] \tag{3.54}$$

Alors, (3.51) devient

$$\left[\frac{d^2u(\rho)}{d\rho^2} + \left(\frac{2(s+1)}{\rho} - 1\right)\frac{du(\rho)}{d\rho} + \left(\frac{s(s+1)}{\rho^2} - \frac{\frac{l(l+1)}{\alpha^2} - k^2 + \gamma^2}{\rho^2} - \frac{\varsigma + s + 1}{\rho}\right)\right]u(\rho) = 0 \tag{3.55}$$

Avec la condition :

$$s(s+1) = \frac{l(l+1)}{\alpha^2} - k^2 + \gamma^2 \tag{3.56}$$

Donc

$$\left[\rho\frac{d^2}{d\rho^2} + (2(s+1) - \rho)\frac{d}{d\rho} - (\varsigma + s + 1)\right]u(\rho) = 0 \tag{3.57}$$

L'équation (3.57) admet alors comme solution d'une fonction hypergéométrique confluente **voir l'annexe B**.

$$u(\rho) = N_{norm}\;{}_1F_1(\varsigma + s + 1, 2(s+1); \rho)$$

Pour l'équation (3.56), on trouve la solution suivante :

$$s = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{1}{4} + \frac{l(l+1)}{\alpha^2} - k^2 + \gamma^2\right]} \tag{3.58}$$

Cette condition est satisfaite seulement si

$$\varsigma + s + 1 = -n \tag{3.59}$$

Alors

$$2\frac{(kE + m\gamma)}{\xi} = -\left(n + \frac{1}{2} - \sqrt{\left[\frac{1}{4} + \frac{l(l+1)}{\alpha^2} - k^2 + \gamma^2\right]}\right) \tag{3.60}$$

On trouve

$$\left[k^2 + \left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left[\frac{1}{4} + \frac{l(l+1)}{\alpha^2} - k^2 + \gamma^2\right]}\right)^2\right]E^2$$

$$+2m\gamma kE+m^2\left[\gamma^2-\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\frac{1}{4}+\frac{l(l+1)}{\alpha^2}-k^2+\gamma^2\right]}\right)^2\right]=0 \tag{3.61}$$

et

$$\begin{aligned}\Delta=\Bigg(&\gamma^2k^2\\&-\left[k^2+\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\frac{1}{4}+\frac{l(l+1)}{\alpha^2}-k^2+\gamma^2\right]}\right)^2\right]\\&\times\left[\gamma^2-\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\frac{1}{4}+\frac{l(l+1)}{\alpha^2}-k^2+\gamma^2\right]}\right)^2\right]\Bigg)\end{aligned} \tag{3.62}$$

Alors

$$E_n=\frac{-m\gamma k\pm m\sqrt{\Delta}}{\left[k^2+\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\frac{1}{4}+\frac{l(l+1)}{\alpha^2}-k^2+\gamma^2\right]}\right)^2\right]} \tag{3.63}$$

La forme de l'énergie obtenue dans l'expression (3.63) nous dit que l'énergie dépend du paramètre α de l'espace de global monopole et le paramètre γ que la masse dépendant de la position, Ce sont parmi les résultats prédits par Einstein en relativité générale. Dans le cas de particule libre ($k=0$), on trouve

$$E_n=\pm m\left[1-\frac{\gamma^2}{\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\frac{1}{4}+\frac{l(l+1)}{\alpha^2}+\gamma^2\right]}\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.64}$$

C'est le même résultat que nous avons trouvé dans le deuxième chapitre dans l'équation (2.115). Dans le cas de particule libre ($\gamma=0$), on trouve

$$E_n=\pm m\left[1+\frac{k^2}{\left(n+\frac{1}{2}+\sqrt{\left[\frac{1}{4}+\frac{l(l+1)}{\alpha^2}-k^2\right]}\right)^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{3.65}$$

C'est le même résultat que nous avons trouvé dans mecanique quantique.

.

Conclusion

L 'objectif principal de ce mémoire, est de résoudre l'équation de **Duffin-Kemmer-Petiau** (**DKP**) correspond aux particules des spin-0 (les bosons scalaires) dans un espace courbe (monopole globale), libre et en présence du potentiel Coulombien avec la masse dépendant de la position.
La fonction d'onde ainsi que le spectre d'énergie, pour les deux cas, ont été obtenus (des solutions analytiques et de plus exactes), la fonction d'onde est à la forme de fonction hypergéométrique, et nous avons trouvé que le spectre d'énergie dépend du paramètre α de l'espace de global monopole, paramètre γ que la masse dépendant de la position, et du paramètre k du potentiel Coulombien.
Dans le cas de particule libre ($k = 0$) nous avons trouvé le même résultat de deuxième chapitre, et dans le cas de particule libre ($\gamma = 0$) nous avons trouvé le même résultat dans mecanique quantique.

Annexe A : Les moments cinétiques

On écrit la différentielle totale de $\psi(x,y,z)$

$$d\psi(x,y,z) = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}dz \tag{A.1}$$

On éxprime les dérivées des composantes cartesiennes en utilisants les relations :

$$X = r\sin\theta\cos\varphi \tag{A.2}$$

$$Y = r\sin\theta\sin\varphi \tag{A.3}$$

$$Z = r\cos\theta \tag{A.4}$$

On remplace dx, dy, dz dans la différentielle et on trouve :

$$\begin{aligned} d\psi(x,y,z) = &\left(\sin\theta\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)dr \\ &+ \left(r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\theta \\ &+ \left(-r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)d\varphi. \end{aligned} \tag{A.5}$$

On écrit la différentielle totale de $\psi(r,\theta,\varphi)$:

$$d\psi(x,y,z) = \frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}d\varphi \tag{A.6}$$

En identifiant terme à terme on obtient :

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} + \cos\theta\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{A.7}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = r\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + r\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{A.8}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x} + r\sin\theta\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{3.67}$$

En résolvant ce systéme ,on trouve les opérateurs :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{3.68}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{3.69}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{3.70}$$

2-Le laplacien s'écrit :

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{3.71}$$

On éxprime chaque opérateur en notant que :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} . \frac{\partial}{\partial x} \tag{3.72}$$

Chaque dérivée seconde conduit à une expression contenant des dérivées premiéres et secondes de combinaisons de r,θ, φ.Les opérateurs suivants x et y contiennent onzes termes alors que l'opérateur suivant z en a cinq.On déduit le laplacien :

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \tag{3.73}$$

3- Par définition , le moment cinétique classique s'écrit :

$$\overrightarrow{L_c} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{p} \tag{3.74}$$

Ou $\overrightarrow{p}$ est la quantité de moument de l'électron .En appelant $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$ les vecteurs unitaires suivant x, y, z,on trouve :

$$\overrightarrow{L_c} = (yp_z - zp_y)\,\overrightarrow{i} + (zp_x - xp_z)\,\overrightarrow{j} + (xp_y - yp_x)\,\overrightarrow{k} \tag{3.75}$$

On déduit les composantes de l'opérateur de moment cinétique (régle de quantification) :

$$L_x = i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{3.76}$$

$$L_x = i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3.77}$$

$$L_z = i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{3.78}$$

On exprime les coordonnées cartisiénnes en fonction de r,θ, φ (l'étape 1), on obtient :

$$L_x = i\hbar\left[\sin\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right] \tag{3.79}$$

$$L_y = i\hbar\left[-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right] \tag{3.80}$$

$$L_y = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{3.81}$$

On calcule le carré de l'opérateur de moment cinétique :

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \tag{3.82}$$

On trouve :

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \tag{3.83}$$

Donc :

$$\Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \tag{3.84}$$

Annexe B :Fonction hypergéométrique

La fonction hypergéométrique confluente ${}_1F_1\left(a;b;x\right)$ (ou fonction de Kummer) est :

$${}_1F_1\left(a;c;z\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(a\right)_n}{\left(c\right)_n}\frac{z^n}{n!},\tag{3.85}$$

où $\left(a\right)_n$ est symbole de pochhammer.
Elle est solution de l'équation différentielle d'ordre 2 :

$$\left[z\frac{d^2}{dx^2}+\left(b-z\right)\frac{d}{dx}-n\right]u\left(z\right)=0\tag{3.86}$$

Les fonctions de Bessel, les fonctions gamma incomplètes, les fonctions du cylindre parabolique et les polynômes de Laguerre peuvent être représentées à l'aide de fonctions hypergéométriques confluentes. E. T. Whittaker a introduit des fonctions $M_{\mu,\nu}(z)$ et $W_{\mu,\nu}(z)$ qui sont également liées aux fonctions hypergéométriques confluentes.
Le symbole de pochhammer définie par

$$\left(a\right)_n=\frac{\Gamma\left(a+n\right)}{\Gamma\left(a\right)}\tag{3.87}$$

Bibliographie

[1] A. D. Alhaidari, Rapid Communications Phys Rev A, **66**, 042116, **2002**.

[2] A. D. Alhaidari, Inte J the Phys, **42**, 2999–3009, **2003**.

[3] A. D. Alhaidari, Phys Letter A, **322**, 72, **2004.**

[4] S. Dong, J. J. Pena, C. Pacheco-Garc, and J. Garcia-Ravelo, Mod Phys Lett A, **22**, 1039–1045, **2007**.

[5] O. Von Roos, Phys Rev B, **27**, 7547, **1983**.

[6] A. R. Plastino, M. Casas, and A. Plastino, Phys Lett A, **281**, 297, **2001**.

[7] T. Gora and F. Williams, Phys Rev, **177**, 1179, **1969**.

[8] G. Bastard, Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructure, Les Editions de Physique, France, **1988**.

[9] P. Harrison, Quantum Wells, Wires and Dots : theoretical and Computational Physics, John Wiley, UK, 2nd edition, **2005**.

[10] J. Yu, S. H. Dong, and G. H. Sun, Phys Lett A, **322**, 290, **2004**.

[11] J. Yu and S. H. Dong, Phys Lett A, **325**, 194, **2004**.

[12] M. Lozada-Cassou, S. H. Dong, and J. Yu, Phys Lett A, **331**, 45, **2004**.

[13] F. Arias de Saavedra, J. Boronat, A. Polls, and A. Fabrocini, Phys Rev B, **50**, 4248–4251, **1994**.

[14] R. L. L. Vitoria and K. Bakke, Ge Rel and Gra, **48**, 161, **2016**.

[15] R. L. L. Vitoria and K. Bakke, Int J of Mod Phys D, **27**, 1850005, **2018**.

[16] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics : Wave Equations, Springer, Berlin, 3rd edition, **2000**.

[17] H. G. Dosch, J. H. D. Jensen, and V. F. Müller, Physica Norwegica, **5**, 2, **1971**.

[18] G. Soff, B. Müller, J. Rafelski, and W. Greiner, J of Nat Sci A, **28**, 1389–1396, **1973**.

[19] M. K. Bahar and F. Yasuk, Adv High Energy Phys, 2013, 814985, **2013**.

[20] S. M. Ikhdair and M. Hamzavi, Chi Phys B, **21**, 110302, **2012**.

[21] H. Motavalli and A. R. Akbarieh, Mod Phys Lett A, **25**, 2523–2528, **2010**.

[22] E. R. F. Medeiros and E. R. B. de Mello, Eur Phy J C, **72**, 2051, **2012**.

[23] L. C. N. Santos and C. C. Barros Jr, Eur Phys J C, **78**, 13, **2018**.

[24] A. L. C. de Oliveira and E. R. B. de Mello, Cla Qua Gra, **23**, 5249, **2006**.

[25] M. S. Cunha, C. R. Muniz, H. R. Christiansen, and V. B. Bezerra, Eur Phys J C, **76**, 512, **2016**.

[26] R. L. L. Vitoria and K. Bakke, Euro Phys J Plus, **133**, 490, **2018**.

[27] K. Bakke and H. Belich, Ann Phys, **360**, 596, **2015**.

[28] R. L. L. Vitoria, H. Belich, and K. Bakke, Adv High Energy Phys, **2017**, 6893084, **2017**.

[29] R. L. L. Vitoria and H. Belich, Adv High Energy Phys, 1248393, **2019**.

[30] K. Bakke and C. Furtado, Annals Physics, **355**, 48, **2015**.

[31] R. L. L. Vitoria and K. Bakke, Euro Phys J Plus, **131**, 36, **2016**.

[32] R. L. L. Vitoria, C. Furtado, and K. Bakke, Annals Physics, **370**, 128, **2016**.

[33] R. L. L. Vitoria and H. Belich, Euro Phys J C, **78**, 999, **2018**.

[34] R. F. Ribeiro and K. Bakke, Annals Physics, **385**, 36, **2017**.

[35] Z. Wang, Z. Long, C. Long, and M. Wu, Euro Phys J Plus, **130**, 36, **2015**.

[36] R. L. L. Vitoria, C. Furtado, and K. Bakke, Euro Phys J C, **78**, 44, **2018**.

[37] E. V. B. Leite, H. Belich, and K. Bakke, Adv High Energy Phys, **2015**, 925846, **2015**.

[38] E. V. B. Leite, H. Belich, and R. L. L. Vitoria, Adv High Energy Phys, **2019**, 6740360, **2019**.

[39] T. W. B. Kibble, Phys. Rep. **67**, 183, **1980**.

[40] A. Vilenkin, Phys. Rep. **121**, 263, **1985**.

[41] W. A. Hiscock, Phys. Rev. D **31**, 3288, **1985**.

[42] S. Zare, H. Hassanabadi and M. de Montigny, Gen. Relativ. Grav. **52**, 25, **2020**.

[43] A. Vilenkin, Phys. Lett. B **133**, 177, **1983**.

[44] M. Barriola and A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. **63**, 341, **1989**.

[45] D. P. Bennett and S. H. Rhie, Phys. Rev. Lett. **65**, 1709, **1990**.

[46] T. R. P. Carames, J. C. Fabris, E. R. Bezzera de Mello and H. Belich, Eur. Phys. J. C **77**, 496, **2017.**

[47] E. R. Bezerra de Mello and C. Furtado, Phys. Rev. D **56**, 1345, **1997**.

[48] A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, Strings and Other Topological Defects, Cambridge University Press, Cambridge **1994**.

[49] T. Vachaspati, Kinks and Domain Walls : An Introduction to Classical and Quantum Solitons, Cambridge University Press, Cambridge **2006**.

[50] M. O. Katanaev and I. V. Volovich, Ann. Phys. (N. Y.) **216**, 1, **1992**.

[51] H. Kleinert, Gauge Fields in Condensed Matter, Vol. 2, World Scienti c, Singapore **1989**.

[52] T. W. B. Kibble, J. Phys. A **9**, 1387, **1976**.

[53] C. Furtado and F. Moraes, Phys. Lett. A **188**, 394, **1994**.

[54] C. Furtado, B. G. C. da Cunha, F. Moraes, E. R. Bezzera de Mello and V. B.Bezzerra, Phys. Lett. A **195**, 90,**1994**.

[55] R. A. Puntigam and H. H. Soleng, Class. Quantum Grav. **14**, 1129, **1997**.

[56] C. Furtado and F. Moraes, J. Phys. A : Math. Gen. **33**, 5513, **2000**.

[57] A. L. C. de Oliveira and E. R. B. de Mello, Int. J. Mod. Phys. A **18**, 3175, **2003**.

[58] E. R. B. de Mello and C. Furtado, Phys. Rev. D **56**, 1345, **1997**.

[59] A. L. Cavalcanti de Oliveira and E. R. B. de Mello, Int. J. Mod. Phys. A **18**, 2051, **2003**.

[60] A. L. Cavalcanti de Oliveira and E R Bezerra de Mello, Class. Quantum Grav. **23**, 5249, **2006**.

[61] A. Boumali, H. Aounallah,Adv.High Energy Phys. **2018**, 1031763, **2018**.

[62] H. Aounallah, A. Boumali, Phys. Part. Nucl. Lett. **16**, 195, **2019.**

[63] A. Boumali, H. Aounallah, Revista Mexicana de Fsica **66**(2), 192, **2020**.

[64] H. Aounallah, A.R. Soares, R.L.L. Vitoria, Eur. Phys. J. C **80**, 447 , **2020**.

[65] A.R. Soares, R.L.L. Vitoria, H. Aounallah, Eur. Phys. J. Plus **136**, 1-8 , **2021**.

[66] H. Aounallah, B.C. Lütfüoğlu, J. Kříž, M Phys Letters A **35** (33), 2050278, **2020**.

[67] E. R. Figueiredo Medeiros and E. R. Bezerra de Mello, Eur. Phys. J. C, **72**, 2051, **2012**.

[68] A. Boumali and M. Nadjette, Can. J. Phys. **92**, 1460, **2014**.

[69] M. Hosseini, H. Hassanabadi, S. Hassanabadi and P. Sedaghatnia, Int.J. Geom. Meths. Mod. Phys. **16**, 1950054, **2019**.

[70] M. Hosseinpour, H. Hassanabadi and F. M. Andrade, Eur. Phys. J. C, **78**, 93, **2018**.

[71] M. de Montigny, M. Hosseinpour, H. Hassanabadi, Int. J. Mod. Phys. A **31**, 1650191, **2016**.

[72] H Hassanabadi, M Hosseinpour and M de Montigny, Eur. Phys. J. Plus, **132**, 1, **2017**.

[73] F. Ahmed, Adv. High Energy Phys. **2020**, 5691025, **2020**.

[74] F. Ahmed, Adv. High Energy Phys. **2020**, 4832010, **2020**.

[75] F. Ahmed, Chin. J. Phys. **66**, 587, **2020**.

[76] J. Carvalho, A. M. de M. Carvalho, E. Cavalcante and C. Furtado, Eur. Phys. J. C **76**, 365, **2016**.

[77] S. Zare H. Hassanabadi and Marc de Montigny, Gen. Relativ. Grav. **52**, 25, **2020**.

[78] A. S Davydov,QuantumMechanics,Pergamon,NewYork (**1976**).