



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique  
Université Larbi Tébessi -Tébessa  
Faculté des sciences exactes et des sciences de la nature et de la vie  
Département de Mathématiques et Informatique

**T H È S E**  
pour obtenir le titre de  
**Docteur en Sciences**  
Mention : Mathématiques  
Présenté par  
**Allal Mehazzem**

**Etude des bifurcations et chaos dans  
quelques systèmes spatio-temporels  
discrets**

Soutenue publiquement, le 09/06 / 2022, devant le jury composé de :

Zeraoulia Elhadj	Professeur	Université de Tébessa	Président
Abdelouahab Mohammed-Salah	Professeur	Centre Universitaire de Mila	Directeur de thèse
Haouam Kamel	Professeur	Université de Tébessa	Co- Directeur de thèse
Belgacem Rebiai	Professeur	Université de Tébessa	Examineur
Boudjedaa Badredine	MCA	Centre Universitaire de Mila	Examineur
Bououden Rabah	MCA	Centre Universitaire de Mila	Examineur



## **Remerciements**

Avant tout, je remercie infiniment Dieu, le tout puissant, le tout miséricordieux de m'avoir donné la santé et la volonté pour réaliser cette thèse.

Je voudrais exprimer ma profonde et sincère gratitude à mon directeur de recherche Monsieur Mohammed Salah Abdelouahab professeur au centre universitaire de Mila qui m'a donné l'opportunité de faire ce travail et m'a fourni de précieux conseils tout au long de la réalisation de cette recherche.

Mes remerciements les plus sincères au professeur Kamel Haouam pour sa disponibilité et son soutien tout au long de mes années de thèse .

Les membres du jury qui ont accepté d'examiner cette thèse, Zeraoulia Elhadj et Rebaia Belgacem deux professeurs à l'université Larbi Tebessi, Monsieur Boudjedaa badredine et Monsieur Bououden Rabah de centre universitaire Abdelhafidh Boussouf de Mila.

Je suis extrêmement reconnaissant à toute ma famille et mes proches pour leurs soutien et leurs encouragements qui m'ont aidé à mener ce travail.

Enfin, j'adresse mes remerciements à toutes les personnes qui m'ont soutenu pour mener ce travail de recherche.

## **Dédicace**

Je dédie ce travail à:

L'âme de ma mère

Mon père,

Ma femme,

Mes deux filles Manar et Miral,

Mes sœurs et mes frères,

Toute ma famille,

Mes professeurs,

Mes amis,

Tous ceux qui m'ont encouragé.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités sur les systèmes dynamiques discrets</b>	<b>4</b>
1.1	Introduction . . . . .	5
1.2	Définition du système dynamique . . . . .	5
1.3	Échantillonnage: passage de temps continu à temps discret . . . . .	6
1.4	Définition d'un système dynamique discret d'ordre 1 de dimension $m$	6
1.5	Points fixes et orbites périodiques: . . . . .	8
1.6	Flot . . . . .	8
1.7	Stabilité des points fixes et des orbites périodiques . . . . .	9
1.7.1	Stabilité des points fixes . . . . .	9
1.7.2	Stabilité des orbites périodiques . . . . .	10
1.8	Critère de stabilité . . . . .	10
1.9	Points attracteurs et sources . . . . .	13
1.9.1	Nature des points fixes . . . . .	13
1.9.2	Orbites périodiques . . . . .	14
1.10	Attracteurs . . . . .	14
1.11	Orbites homoclines et hétéroclines . . . . .	16
1.11.1	Orbites homoclines . . . . .	16
1.11.2	Orbites hétéroclines . . . . .	17

1.11.3	Connexion homocline et hétérocline . . . . .	18
1.11.3.1	Connexion homocline . . . . .	18
1.11.3.2	Connexion hétérocline . . . . .	18
1.11.3.3	Intersections homoclines et hétéroclines . . . . .	18
1.12	Théorie des Bifurcations . . . . .	18
1.12.1	Définition de bifurcation . . . . .	19
1.12.2	Diagramme de bifurcation . . . . .	20
1.12.3	Type des bifurcations . . . . .	20
1.12.3.1	Bifurcations locales . . . . .	20
1.12.3.2	Bifurcations globales . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Équation de Schrödinger non linéaire discret</b>	<b>21</b>
2.1	Conception . . . . .	22
2.2	Méthode d'application bidimensionnelle pour les structures non linéaires à unidimensionnelle . . . . .	24
2.3	Équation de Schrödinger non linéaire discrète . . . . .	25
2.4	Des modèles pour des équations de Schrödinger non linéaires . . . . .	27
2.4.0.1	Équation DNLS de Ablowitz-Ladik (AL) . . . . .	27
2.4.0.2	Équation DNLS de Salerno . . . . .	28
2.4.0.3	Équation saturable DNLS . . . . .	28
2.5	Paires de Lax . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Orbites homoclines et solutions localisées pour un système de Schrödinger non linéaire discret</b>	<b>33</b>
3.1	Introduction . . . . .	34

3.2	Symétrie par inversion du temps dans les systèmes dynamiques . . . . .	34
3.2.1	Formulation hamiltonienne . . . . .	35
3.2.2	Description mathématique dans le cadre des systèmes dynamiques	36
3.3	Difféomorphismes réversibles . . . . .	39
3.4	Orbites homoclines et solutions localisées pour un système de Schrödinger non linéaire . . . . .	41
3.4.1	Points homoclines et hétéroclines . . . . .	41
3.4.2	Orbites homoclines d'un système planaire réversible . . . . .	42
3.5	Orbites homoclines et solutions localisées pour les équations de Schrodinger non linéaires discrètes avec interaction à longue portée.	44
3.6	Solutions localisées dans les milieux de Schrödinger non linéaires.	53
3.7	Discussion . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Structures homoclines pour un système NLSD</b>	<b>57</b>
4.1	Modèle: . . . . .	59
4.2	Théorie spectrale . . . . .	60
4.2.1	Exemple du spectre de Floquet . . . . .	62
4.2.2	Instabilité linéaire . . . . .	64
4.3	Résultats numériques . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Équation de Schrödinger non linéaire discret cubique CDNLS</b>	<b>74</b>
5.1	Approche de l'application de dimension 2 . . . . .	75
5.1.1	Propriétés d'orbites . . . . .	75
5.1.2	Propriétés des états stationnaires . . . . .	76

5.1.3	États stationnaires homogènes, périodiques, modulés et spatialement chaotiques . . . . .	76
5.2	Équation cubique CDNLS . . . . .	78
5.2.1	Approche de l'application de dimension deux pour l'équation cubique CDNLS . . . . .	78
5.2.2	Points fixes . . . . .	79
5.2.3	États stationnaires quasi-périodiques . . . . .	79
5.2.4	États stationnaires spatialement chaotiques . . . . .	81
5.3	Solutions spatialement localisées . . . . .	81
	<b>Bibliographie</b>	<b>94</b>



# Liste des figures

1.1	Étude graphique du système $f(x) = x - x^2$ . . . . .	13
1.2	La nature de point fixe. . . . .	13
1.3	Attracteurs chaotiques de Zeraoulia-Sprott voir [44] . . . . .	15
1.4	Orbite homocline . . . . .	17
1.5	Orbite hétérocline . . . . .	17
1.6	Connexion et intersection homocline/hétérocline . . . . .	19
4.1	Solution homocline pour le modèle (4.1) pour $0 \leq t \leq 40$ avec la condition initiale : $\psi(n, 0) = \frac{1}{2} + (1 + i)10^{-5}(\cos Qn)$ , a) la surface $\psi(n, t)$ . b) portrait de phase. . . . .	68
4.2	La solution pour $0 \leq t \leq 40$ avec la condition initiale $\psi(n, 0) = \frac{1}{2} + (i)0.1(\cos Qn)$ , a) le portrait de phase, b) la surface. . . . .	69
4.3	La solution pour $0 \leq t \leq 40$ avec la condition initiale $\psi(n, 0) = \frac{1}{2} + 0.1(\cos Qn)$ , a) le portrait de phase, b) la surface. . . . .	70
4.4	L'orbite homocline combinée, a) $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0,001$ , b) $\epsilon_1 = 0,001$ , $\epsilon_3 = 0,0001$ . . . . .	71
4.5	L'orbite homocline combinée, a) $N = 90$ , b) $N = 60$ . . . . .	72
5.1	Diagramme de bifurcation de l'équation DNLS pour paramètre $k \in [-4, -0.5]$ . . . . .	80
5.2	Diagramme de bifurcation de l'équation DNLS pour paramètre $k \in [-2.5, -2]$ . . . . .	80

5.3	Pour $k=-2.29$ , orbites périodiques dans un stade de billard (stadium billard) est présentée. . . . .	81
-----	--	----

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'équation de Schrödinger, conçue par le physicien autrichien Erwin Schrödinger en 1925 est une équation fondamentale en mécanique quantique. Elle décrit l'évolution dans le temps d'une particule massive, et remplit ainsi le même rôle que la relation fondamentale de la dynamique en mécanique classique. L'équation de Schrödinger non linéaire (NLS) se pose fréquemment dans des problèmes physiques, par exemple dans la propagation laser en optique non-linéaire. L'équation NLS de focalisation périodique a servi comme une équation pour décrire les phénomènes d'onde instables. Dans [23, 24, 25], ils ont simulé numériquement une chaîne d'oscillateurs non linéaires de Schrödinger. Ils ont étudié les effets de différents choix de paramètres (amortissement, force motrice et espacement des oscillateurs) sur la dynamique. Pour des forces motrices plus importantes, la chaîne est soumise à une évolution chaotique spatio-temporelle. Leur analyse du chaos spatio-temporel dans la chaîne homogène a révélé des résultats nouveaux et intéressants. Le chaos est souvent lié aux orbites homoclines dans la dynamique de détermination non linéaire [26, 27]. L'équation NLS est un Hamiltonien intégrable avec de nombreuses familles de solutions quasi-périodiques et homoclines, voir par exemple [32]. Les structures homoclines sont des sources de susceptibilité soumises à de petites perturbations qui peuvent faire bifurquer les solutions. Les orbites homoclines combinées apparaissent lorsque l'analyse linéarisée admet plusieurs modes instables. Les solutions de l'équation NLS sont décrites par le spectre des opérateurs des paires de Lax. La présence du contenu des modes non linéaires est entièrement basée sur l'emplacement des valeurs propres périodiques. Les instabilités linéaires et les structures homoclines peuvent être identifiées en examinant les points doubles complexes.

Récemment, une grande attention a été accordée à l'analyse des équations discrètes d'interaction à longue portée pilotée par des puissances fractionnaires du Laplacien

discret [13, 8, 4, 18, 5]. Par exemple, dans [5], les auteurs présentent le problème d'une étude assez complète des équations de diffusion discrètes d'interaction à longue portée impliquant les puissances fractionnaires. L'approche de l'orbite homocline pour l'existence de solutions de solitons d'équations DNLS utilisée ici [34] est précisément une généralisation du travail de [15] (interaction locale). Ils ont prouvé l'approche d'orbite homocline en utilisant les propriétés des systèmes planaires réversible. Dans [33], l'approche de l'application de dimension 2 pour l'obtention des solutions stationnaires dans l'équation unidimensionnelle non linéaire discret cubique de Schrodinger (CDNLS).

Notre objectif est de présenter quelques modèles des équations de Schrödinger non linéaire discret en utilisant la méthode des systèmes réversible, la méthode spectrale et enfin l'approche de l'application de dimension deux, cela en utilisant la théorie des systèmes dynamiques. Nous discutons l'équation de Schrödinger non linéaire discret, en fonction des données initiales, et examiner certaines caractéristiques d'une chaîne homogène d'oscillateurs. Nous discutons l'existence des structures homocline d'une équation de Schrödinger non linéaire discret.

Dans ce contexte, nous avons organisé notre travail en cinq chapitres:

**Dans le premier chapitre**, nous avons donné des définitions et résultats généraux sur les systèmes dynamiques discret ainsi que les points fixes, le flot, les orbites périodiques, en outre les orbites homoclines, orbites hétéroclines, connexion homoclines et hétéroclines.

**Dans le deuxième chapitre**, nous avons donné la formulation de l'équation de Schrödinger ainsi que l'Hamiltonien et rappelons quelques équations de Schrödinger non linéaires discrets avec quelques modèles. Nous avons abordé l'approche de l'application de dimension 2. Nous avons défini la notion des paires de Lax et l'intégrabilité de l'équation de Schrödinger non linéaire discret.

**Le troisième chapitre:** Comprend une étude sur l'application de la théorie des systèmes dynamiques réversibles pour prouver l'existence des orbites homoclines

et leur relation avec une équation de Schrödinger non linéaire à court interaction. Pour cela nous avons présenté une description mathématique plus précise de symétrie d'inversion du temps dans le cadre des systèmes dynamiques et par suite les difféomorphismes réversibles. Une attention particulière est accordée aux points homoclines et hétéroclines. Ensuite, notre objectif est d'améliorer l'approche de l'orbite homocline en utilisant les propriétés de symétrie des applications planaires réversibles, de sorte que nous puissions prouver rigoureusement les résultats d'existence sans supposer une petite perturbation. Des résultats sont obtenus pour l'existence des solitons. De plus en proposant une nouvelle DNLS à interaction de long terme. L'approche de l'orbite homocline pour l'existence de solutions de solitons d'équations DNLS utilisée ici est précisément une généralisation du travail de [15] (interaction locale). Le travail de cette généralisation fait l'objet d'une publication [34]:” **Homoclinic Orbits and Localized Solutions in Discrete Nonlinear Schrodinger Equation with Long-Range Interaction.**”

**Dans le quatrième chapitre**, nous discutons l'existence des structures homoclines d'une équation de Schrödinger non linéaire discret donnée à court interaction. L'intégrabilité de l'équation de Schrödinger discrète DNLS est prouvée par l'utilisation des paires de Lax. En termes du discriminant de Floquet on détermine les points périodiques, anti périodiques, doubles et critiques. On vérifie la stabilité du point fixe, la correspondance entre les points doubles et le nombre des modes linéairement instable et on termine par une simulation pour un bon choix de conditions initiales.

**Dans le dernier chapitre**, nous discutons l'approche de l'application de dimension 2 pour l'obtention des solutions stationnaires dans l'équation unidimensionnelle non linéaire discret cubique de Schrödinger (CDNLS). On utilise le changement de variable pour obtenir un système de dimension deux. Nous allons discuter des différents types d'orbites qui peuvent être générés (points fixes, états stationnaire périodique, quasi-périodique et états stationnaires spatialement chaotiques).

Finalement, nous avons conclu cette thèse par une conclusion générale où nous avons expliqué l'efficacité des résultats obtenus.

# Chapitre 1

## Généralités sur les systèmes dynamiques discrets

## 1.1 Introduction

Le but de la théorie des systèmes dynamiques est de modéliser des processus qui évoluent dans le temps et d'étudier leur comportement. Cette étude doit permettre de prédire le comportement du système et de le réguler afin d'obtenir les résultats souhaités. Pour développer un modèle, il faut d'abord définir les valeurs qui évoluent dans le temps, les états du système. Ensuite, il faut trouver des équations mathématiques qui décrivent leur évolution. Généralement, ce sont des équations différentielles (si le temps est considéré comme continu) ou aux différences finies (si le temps du modèle est discret). Les paramètres du modèle sont les coefficients de ces équations et les conditions initiales. Dans ce chapitre nous allons étudier essentiellement les systèmes dynamiques en temps discret.

## 1.2 Définition du système dynamique

Un système dynamique est un ensemble mécanique, physique, économique, environnemental ou de tout autre domaine dont l'état (ensemble de grandeurs suffisant à qualifier le système) évolue en fonction du temps.

### 1. Cas continu:

Dans le cas général un système dynamique en temps continu peut être représenté par une équation différentielle de la forme:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x, t, q),$$

où  $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $q \in \mathbb{R}^p$  est un paramètre réel,  $p$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

### 2. Cas discret:

Dans le cas général un système dynamique discret est décrit par un système d'équations aux différences finies, autrement dit, par une récurrence sous la forme:

$$x_{k+1} = f(x_k, q),$$

où  $x_k \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état,  $q \in \mathbb{R}^p$  est un paramètre réel,  $p$  et  $n \in \mathbb{N}$   $k = 1, 2, \dots$

Et c'est le cas qui nous concerne.

### 1.3 Échantillonnage: passage de temps continu à temps discret

Il existe plusieurs techniques de discrétisation (échantillonnage) des systèmes. Voici un exemple simple, souvent utilisé: la méthode d'Euler.

Soit une équation différentielle d'ordre 1:

$$\dot{x} = f(x).$$

Nous voulons étudier la trajectoire de cette équation seulement à des instants choisis, équidistants  $t_n - t_{n+1} = \Delta t$ . Si la période d'échantillonnage,  $\Delta t$  est choisie assez petite, on peut approcher la dérivée de  $x(t)$  par la différence:

$$\dot{x} \approx \frac{x(t_n) - x(t_{n+1}))}{\Delta t}.$$

Alors, le système dynamique à temps continu peut être approché par le système dynamique à temps discret suivant:

$$x(n+1) = x(n) + \Delta t \cdot f(x(n)).$$

### 1.4 Définition d'un système dynamique discret d'ordre 1 de dimension m

Dans le cas général, un système dynamique discret est décrit par un système d'équations aux différences finies, autrement dit, par une récurrence. Il existe, comme dans le cas continu, plusieurs types de systèmes.



Soit  $D \in \mathbb{R}^m$  un ensemble et  $f : D \mapsto D$  une fonction continue et dérivable. On appelle "SDD" d'ordre 1 en dimension  $m$  la récurrente suivante :

$$x(0) = x_0 \in D, \quad x(n+1) = f(x(n)), \quad n \geq 0. \quad (1.1)$$

On utilisera souvent la notation  $(f, D)$  pour désigner le système dynamique défini par une fonction  $f$  sur l'ensemble  $D$ .

Quand le système a plusieurs variables d'états nous pouvons le représenter sous forme vectorielle:

Soit:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ \vdots \\ x_m(n) \end{pmatrix}$  le vecteur des états du système.

L'espace formé par ces états s'appelle espace de phases du système.

Soit  $\vec{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application continue et dérivable.

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}). \end{pmatrix}$$

Alors le système  $(f, D)$  s'écrit sous la forme:

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0 \in D, \quad \vec{x}(n+1) = \vec{f}(\vec{x}(n)), \quad n \geq 0.$$

### **Orbite d'un système dynamique discret:**

Soit un SDD d'ordre 1 défini par l'itération d'une fonction  $f(x)$ :

$$x(0) = x_0, \quad x(n+1) = f(x(n)), \quad n \geq 0. \quad (1.2)$$

**Définition 1.4.1.** *Étant donné le point initial  $x_0$ , on appelle orbite du système (1.2) la suite:*

$$O(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), \dots, x(n+1) = f(x(n)), \dots\}.$$

## 1.5 Points fixes et orbites périodiques:

Nous allons considérer des systèmes dynamiques discrets d'ordre 1 de dimension  $m$  définis par (1.1).

**Définition 1.5.1.** On appelle "point fixe" d'un système dynamique tout point  $x_s$  tel que  $x_s = F(x_s)$ .

Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points d'équilibre. Une orbite  $O(x_0)$  s'appelle périodique s'il existe un  $p > 0$  t.q.

$$x(n+p) = x(n), \forall n. \quad (1.3)$$

**Définition 1.5.2.** Une orbite est dite éventuellement périodique s'il existe un  $p > 0$  et un  $N > 0$  tels que l'égalité (1.3) est vérifiée pour tout  $n > N$ .

Une orbite périodique  $O(x_0)$  est toujours une suite de points périodique. Tous ces points s'appellent point périodique de période  $p$ .

## 1.6 Flot

D'après le théorème d'existence et unicité de Cauchy-Lipschitz, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  alors il existe une solution maximale unique  $x(t)$  au système (1.1) telle que  $x(0) = x_0$ .

La correspondance  $\phi_t : x_0 \mapsto x(t)$  qui associe à une donnée initiale  $x_0$  la valeur de la solution maximale  $x(t)$  au temps  $t$ , qui correspond à cette donnée initiale, est appelée le flot au temps  $t$  du champ de vecteurs  $f$ .

Le flot du champ de vecteurs est l'application qui associe à  $(t, x)$  la solution maximale  $x(t)$  au temps  $t$  qui correspond à la donnée initiale  $x$ :

$$(t, x) \mapsto \phi(t, x) = \phi_t(x) = x(t)$$

Le flot est dit complet lorsque cette correspondance est définie pour toute valeur de  $t \in ]-\infty, +\infty[$

**Remarque 1.6.1.** On a trois remarques:

1. (Régularité du flot)

Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  le flot est lui-même de classe  $\mathcal{C}^k$ .

2. (Transitivité du flot)

Le flot vérifie, pour tous  $t$  et  $s \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\phi_t \circ \phi_s = \phi_{s+t}.$$

3. Pour un système linéaire  $\dot{x} = Ax$ , le flot est donné par

$$\phi_t(x) = e^{tA}x.$$

Un ensemble  $S \subset U$  est dit invariant par le flot  $\phi_t$  sur  $U$  (ou bien par le système  $\dot{x} = f(x)$  correspondant) si pour tout  $x \in S$  et tout  $t \in \mathbb{R}$  on a  $\phi_t(x) \in S$ .

Si  $S$  vérifie la propriété que  $\phi_t(x) \in S$  pour tout  $x \in S$  et tout  $t > 0$  alors on dit que  $S$  est positivement invariant.

## 1.7 Stabilité des points fixes et des orbites périodiques

### 1.7.1 Stabilité des points fixes

La notion de stabilité est très importante pour l'étude du comportement des systèmes autour de leurs points fixes.

\* Un point fixe  $x_s$  s'appelle **stable** si:  $\forall \varepsilon > 0$  il existe un  $\delta > 0$  tel que si  $|x_0 - x_s| < \delta$  alors pour tout  $n > 0$   $|f^n(x_0) - x_s| < \varepsilon$ .

Autrement dit, toutes les orbites qui commencent près du point  $x_s$  restent dans un voisinage de ce point:

$$\text{si } x_0 \in U_\delta(x_s) \text{ alors pour tout } n > 0 \quad f^n(x_0) \in U_\varepsilon(x_s)$$

\* Un point fixe s'appelle **instable** s'il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $\forall \delta > 0$  il existe un  $x_0 \in U_\delta(x_s)$  et il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tels que

$$|f^n(x_0) - x_s| \geq \varepsilon.$$

Cela signifie que pour tout voisinage du point fixe  $x_s$  il existe une orbite qui, en commençant dans ce voisinage s'éloigne du point  $x_s$ .

## 1.7.2 Stabilité des orbites périodiques

$x_s$  est périodique de période  $r$  si:

$$f^r(x_s) = x_s$$

- \* l'orbite périodique s'appelle stable si chacun de ces points est un point fixe stable de l'application  $f^r$ .
- \* l'orbite périodique s'appelle instable si chacun de ces points est un point fixe instable de l'application  $f^r$ .

## 1.8 Critère de stabilité

Nous savons que la dynamique d'un système dépend des propriétés de la fonction  $f(x)$  qui le définit. Notamment on peut dans beaucoup de cas établir l'existence des points fixes en étudiant la dérivée de la fonction  $f$ . Pour un nombre positif  $\sigma > 0$  nous notons par  $U_\sigma(x)$  le  $\sigma$ -voisinage du point  $x$  :

$$U_\sigma(x) = \{y : |y - x| < \sigma\}$$

Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue sur  $I$  ayant un point fixe  $x^* \in I$  où  $I = [a, b]$  un intervalle. S'il existe un voisinage  $U_\sigma(x^*) \subset I$  tel que la fonction  $f$  est dérivable sur ce voisinage et que

$$\left| \frac{d}{dx} f(x) \right| \leq 1, \forall x \in U_\sigma(x^*).$$

alors le point  $x^*$  est stable .

Un point est instable si la dernière condition n'est pas vérifiée dans tout voisinage de  $x^*$ .

### Stabilité locale d'un point fixe:

Soit l'équation en temps discret admettant un point fixe  $x^*$  vérifiant :

$$x^* = f(x^*).$$

Nous définissons une variable locale  $u_n = x_n - x^*$ . Nous procédons à la linéarisation de l'équation au voisinage du point fixe de manière similaire au cas d'une équation différentielle ordinaire, c'est-à-dire en réalisant le développement limité de la fonction  $f$  au voisinage du point fixe  $x^*$ . Le modèle linéaire local s'écrit :

$$u_{n+1} = \lambda u_n.$$

avec  $\lambda = \frac{df}{dx_n}(x^*)$ .

Ce modèle linéaire n'est valable qu'au voisinage du point fixe, qui est l'origine pour le système linéarisé.

La stabilité locale du point fixe dépend de la valeur de la constante  $\lambda$ . En effet, la solution du système linéarisé s'écrit :

$$u_n = \lambda^n u_0.$$

où  $u_0$  est la condition initiale.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

1.  $\lambda < -1$ : Dans ce cas la solution s'écrit :  $u_n = (-1)^n |\lambda|^n u_0$ . La solution du système linéarisé prend alternativement des valeurs positives et négatives et son module augmente avec  $n$ . Dans ce cas, la solution s'éloigne du point fixe qui est donc instable.
2.  $\lambda = -1$ : Il s'agit d'un cas particulier et la solution s'écrit :  $u_n = (-1)^n u_0$ . La solution du système linéarisé prend alternativement des valeurs positives  $u_0$  et négatives  $-u_0$ .
3.  $-1 < \lambda < 0$ : Dans ce cas la solution s'écrit:  $u_n = (-1)^n |\lambda|^n u_0$ . La solution du système linéarisé prend alternativement des valeurs positives et négatives et son module diminue avec  $n$ . Dans ce cas, la solution s'approche et tend vers le point fixe lorsque  $n \rightarrow \infty$ , et ce point fixe est donc localement asymptotiquement stable.

4.  $\lambda = 0$ : Il s'agit d'un cas particulier. Dès la première itération on va au point fixe 0.
5.  $0 < \lambda < 1$ : Dans ce cas la solution s'écrit :  $u_n = \lambda^n u_0$ . La solution du système linéarisé est du signe de la condition initiale et son module diminue avec  $n$ . Dans ce cas, la solution s'approche du point fixe qui est localement asymptotiquement stable.
6.  $\lambda = 1$ : Ici, la solution est  $u_n = u_0$ . L'équation linéarisée est confondue avec la première bissectrice. Toute condition initiale est point fixe de l'équation.
7.  $\lambda > 1$ : Dans ce cas la solution s'écrit  $u_n = \lambda^n u_0$  et s'éloigne du point fixe qui est instable.

En résumé, il y a stabilité asymptotique de l'origine lorsque  $-1 < \lambda < 1$ , c'est-à-dire lorsque :

$$-1 < \frac{df}{dx_n}(x^*) < 1, \quad \text{encore} \quad \left| \frac{df}{dx_n}(x^*) \right| < 1.$$

Soit

$$f(x) = x - x^2.$$

Le point fixe est  $x_s = 0$  et

$$\frac{d}{dx}f(x) = 1 - 2x.$$

On remarque que si  $0 < f(x) < 1$  et que si  $0 < x < 1$  alors

$$\left| \frac{d}{dx}f(x) \right| < 1.$$

Ainsi toute trajectoire qui commence dans l'intervalle  $[0, 1]$  tend vers le point fixe.

Or pour  $x < 0$  la dérivée est supérieure à 1:

$$\frac{d}{dx}f(x) > 1$$

et  $f(x) < 0$ .

On en déduit que les trajectoires avec  $x_0 < 0$  tendent vers  $-\infty$ . On voit que le point fixe  $x_s = 0$  n'est pas stable.

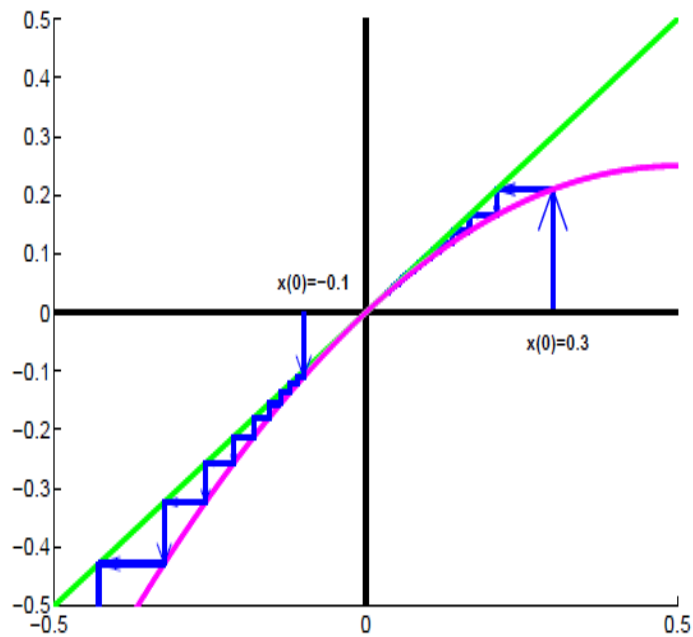


Figure 1.1: Étude graphique du système  $f(x) = x - x^2$ .

## 1.9 Points attracteurs et sources

### 1.9.1 Nature des points fixes

S'est résumé dans le tableau suivant:

$f'(x_s)$	$f''(x_s)$	$f'''(x_s)$	Caractéristique du point fixe
$ f'(x)  > 1$	Indifférent	Indifférent	<b>Point source</b>
$ f'(x)  < 1$	Indifférent	Indifférent	<b>Point attractif</b>
$ f'(x)  = 1$	$f''(x_s) < 0$	Indifférent	<b>Semi-stable à droite</b>
$ f'(x)  = 1$	$f''(x_s) > 0$	Indifférent	<b>Semi-stable à gauche</b>
$ f'(x)  = 1$	$f''(x_s) = 0$	$f'''(x_s) < 0$	<b>Attracteur faible</b>
$ f'(x)  = 1$	$f''(x_s) = 0$	$f'''(x_s) > 0$	<b>Source faible</b>

Figure 1.2: La nature de point fixe.

## 1.9.2 Orbites périodiques

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application définissant un SDD d'ordre 1.

Soit  $O(x_0) = x(0) = x_0, x(1), x(2), \dots, x(r-1)$  une orbite périodique de période  $r$  de ce système. On dit que cette orbite est **attractive (ou répulsive)** si chacun de ses points est un point fixe attractif ( respectivement un point répulsif ) de l'application  $f^r$ .

## 1.10 Attracteurs

**Définition 1.10.1.** *Dans la littérature on trouve plusieurs définitions d'attracteur. En général, un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers lui.*

**Il existe deux type d'attracteurs:** les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

1. **Attracteurs régulières :** les attracteurs régulières caractérisent l'évolution de système non chaotique et peuvent être de trois sortes :
  - a. **Point fixe :** c'est l'attracteur le plus simple, et c'est un point de l'espace de phase vers lequel tendent les trajectoires, c'est donc une solution stationnaire constante, satisfait  $f(x) = x$ .
  - b. **Attracteur périodique:** c'est une trajectoire fermé dans l'espace des phases vers laquelle tendent les trajectoires. C'est donc une solution périodique du système.
  - c. **Attracteur quasi périodique (tore):** représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodiques".



## 2. chaotiques (ou étrange):

En mathématiques, la théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales.

### Définition d'un système chaotique

Un système dynamique est dit chaotique si une portion significative de son espace des phases présente simultanément les deux caractéristiques suivantes:

- (a) le phénomène de sensibilité aux conditions initiales,
- (b) une forte récurrence.

La présence de ces deux propriétés entraîne un comportement extrêmement désordonné qualifié à juste titre de chaotique.

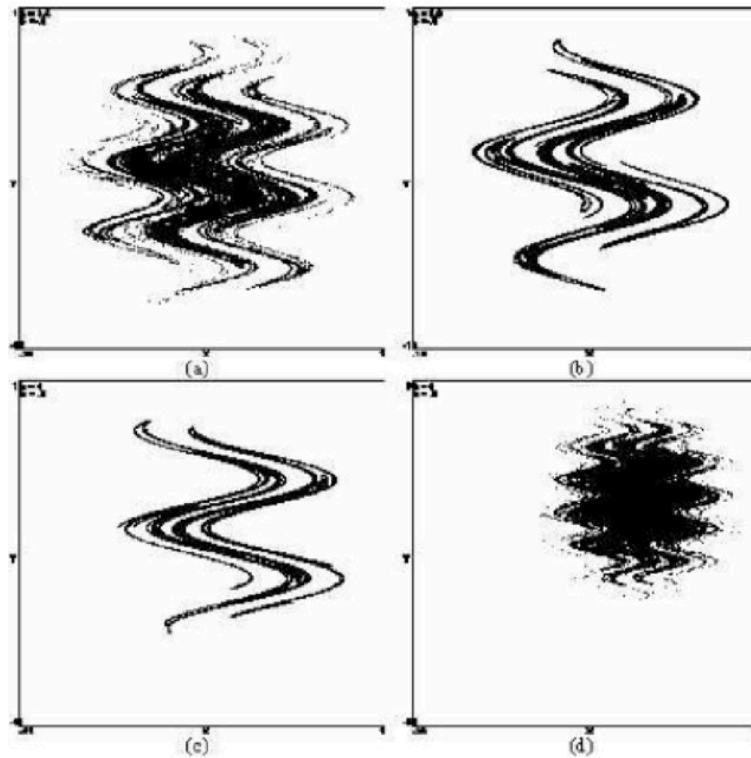


Figure 1.3: Attracteurs chaotiques de Zeraoulia-Sprott voir [44]

## 1.11 Orbites homoclines et hétéroclines

**Définition 1.11.1.** *On considère un système différentiel linéaire*

$$\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{K}.$$

*défini par la matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .*

*Notons  $\lambda_j = a_j + ib_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$  les valeurs propres de  $A$  et  $w_j = u_j + iv_j$  des vecteurs propres associés. Il est possible d'ordonner ces valeurs propres et ces vecteurs propres pour que les  $k$  premières valeurs propres de  $A$  soient réelles (et donc les  $k$  premiers vecteurs propres également) et que les vecteurs  $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \dots, u_m, v_m)$  forment une base de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n = 2m - k$ .*

*On désigne alors par  $(W^s)$ ,  $(W^u)$ ,  $(W^c)$  les sous-espaces stable, instable et centre sont définis respectivement par:*

- \*  $W^s$ , l'espace stable engendré par les vecteurs  $u_j, v_j$  tels que  $a_j < 0$ ,*
- \*  $W^u$ , l'espace instable engendré par les vecteurs  $u_j, v_j$  tels que  $a_j > 0$ ,*
- \*  $W^c$ , l'espace central engendré par les vecteurs  $u_j, v_j$  tels que  $a_j = 0$ .*

### 1.11.1 Orbites homoclines

Concentrons notre attention sur les orbites homoclines émanant de l'origine. Une orbite homocline correspond à une orbite qui relie, en avant et en arrière du temps, un point fixe avec lui-même. Ceci correspond à une solution d'état stationnaire non triviale qui décroît au point fixe pour  $n \rightarrow \pm\infty$ . Il s'agit de la solution soliton dite brillante. Une condition suffisante pour l'existence d'une orbite homocline pour une application de dimension 2 est que les variétés stables ( $W^s$ ) et instables ( $W^u$ ) du point fixe se croisent.

Ainsi, une condition nécessaire à l'existence de ces variétés est que le point fixe doit être un selle. Cette dernière condition, se traduit par un besoin (mais pas suffisante) condition sur les paramètres du système. Il est important de souligner que l'existence d'un selle ne garantit pas l'existence d'une homocline puisque les variétés stables et instables ne pourraient pas se croiser.

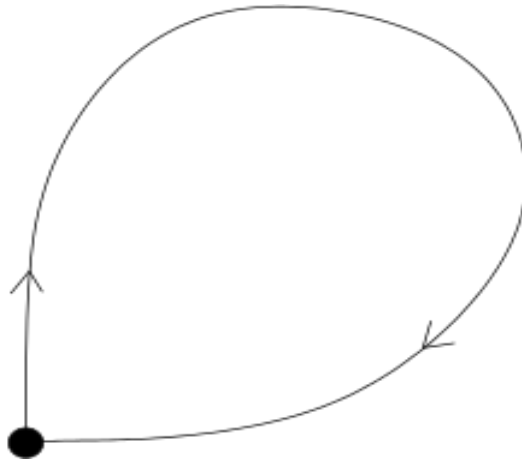


Figure 1.4: Orbite homocline

### 1.11.2 Orbites hétéroclines

Au lieu d'envisager des variétés impliquant un seul point fixe, considérons la variété stable  $W^s(x_1^*)$  émanant du point fixe  $x_1^*$  et la variété instable  $W^u(x_2^*)$  émanant du point fixe  $x_2^*$  avec  $(x_1^* \neq x_2^*)$ . Si ces variétés se croisent alors il est possible de déduire une orbite qui relie, en temps avant  $x_1^*$  avec temps arrière  $x_2^*$ . Il s'agit d'une orbite dite hétérocline et correspond à un état stationnaire qui se relie à des états stationnaire homogènes distincts ( $x_1^*$  et  $x_1^*$ ) à savoir un soliton sombre.

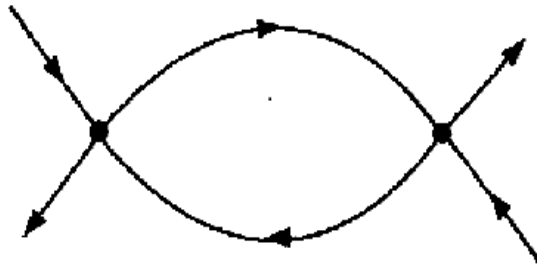


Figure 1.5: Orbite hétérocline

### 1.11.3 Connexion homocline et hétérocline

#### 1.11.3.1 Connexion homocline

Soit  $f : M \rightarrow M$  être une application définie sur une variété  $M$ , avec un point fixe  $p$ .

Soit  $W^s(f, p)$  et  $W^u(f, p)$  sont la variété stable et la variété instable du point fixe  $p$  respectivement.

Soit  $V$  une variété invariante connectée telle que

$$V \subseteq W^s(f, p) \cap W^u(f, p).$$

Alors  $V$  s'appelle une connexion homocline.

#### 1.11.3.2 Connexion hétérocline

C'est une notion similaire, mais elle se réfère à deux points fixes  $p$  et  $q$ . La condition satisfaite par  $V$  est remplacée par:

$$V \subseteq W^s(f, p) \cap W^u(f, q).$$

Cette notion n'est pas symétrique par rapport à  $p$  et  $q$

#### 1.11.3.3 Intersections homoclines et hétéroclines

Lorsque les variétés invariantes  $W^s(f, p)$  et  $W^u(f, q)$ , éventuellement avec  $p = q$ , se croisent mais il n'y a pas de connexion homocline/hétérocline, une structure différente est formée par les deux variétés, parfois appelées l'enchevêtrement homocline/hétérocline.

## 1.12 Théorie des Bifurcations

L'aspect fondamental de l'étude des systèmes dynamiques est la notion de bifurcation. Un terme qui a été introduit par Henri Poincaré au début du  $XX^e$  siècle dans

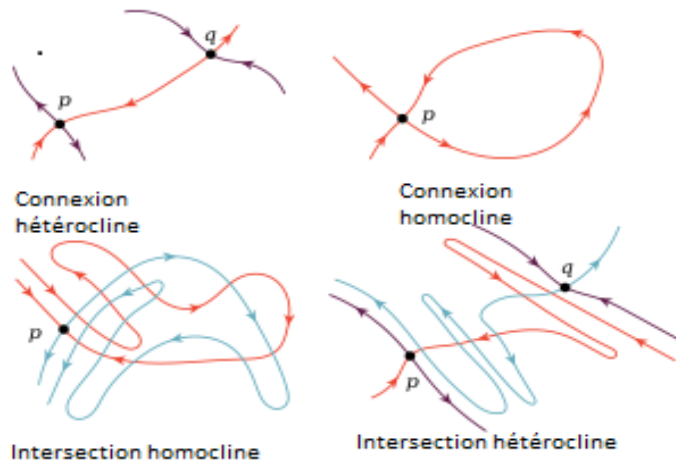


Figure 1.6: Connexion et intersection homocline/hétérocline

ces travaux sur les systèmes différentiels. Pour certaines valeurs critiques des paramètres de contrôle du système, la solution de l'équation différentielle change qualitativement: on dit qu'il ya bifurcation. Une première approche pour l'étude des systèmes dynamiques consiste à rechercher les points d'équilibre, c'est-à-dire les solutions stationnaires ne présentant pas l'évolution temporelle. L'étape suivante consiste à faire varier les paramètres de contrôle du système. On regarde alors que deviennent les points d'équilibre, en particulier ceux qui étaient stables avant de modifier les paramètres du système et les bifurcations qui apparaissent. Pour les valeurs des paramètres auxquelles de tels changements qualitatifs apparaissent, valeurs dites de bifurcation, la construction du portrait de phase nécessite des outils adoptés.

### 1.12.1 Définition de bifurcation

Soit le système dynamique non linéaire de dimension  $n$  :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu), \quad (1.4)$$

tel que  $\mu$  est un paramètre de contrôle, et  $x$  la solution de ce système.

**Définition 1.12.1.** *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution  $x$  du système (1.4) lorsqu'on modifie  $\mu$ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.*

## 1.12.2 Diagramme de bifurcation

Dans les systèmes dynamiques, un diagramme de bifurcation montre les comportements possibles d'un système, à long terme, en fonction des paramètres de bifurcation.

**Définition 1.12.2.** *Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.*

## 1.12.3 Type des bifurcations

### 1.12.3.1 Bifurcations locales

La codimension est la plus petite dimension de l'espace des paramètres permettant d'aboutir à cette bifurcation. On parle ici seulement de la bifurcation de codimension un et il existe quatre types de bifurcations de codimension un ( noeud-col, transcritique, fourche, hopf), qui correspondent tous ça des comportements génériques.

### 1.12.3.2 Bifurcations globales

Ces types de bifurcations correspondent à des collisions de deux variétés et elles ne font pas forcément intervenir le voisinage de la solution. Ici, les linéarisations locales autour de la solution ne seront donc d'aucunes d'aide. C'est pour cela que ces bifurcations sont appelées "globales", et deux types sont: orbites hétéroclines et orbites homoclines.

## Chapitre 2

# Équation de Schrödinger non linéaire discret

# Introduction

L'équation de Schrödinger est l'équation la plus essentielle de la physique quantique, comme l'est la loi de Newton en physique classique. Elle est appliquée à une grande variété de problèmes, tels que l'optique quantique (propagation des faisceaux laser), la physique atomique (supraconductivité, condensation de Bose-Einstein), l'électronique (semi-conducteurs, transistors, mémoires), la physique des plasmas, l'astrophysique, la microscopie électronique, la neutronique, la chimie ou la biologie... Nous introduisons dans ce chapitre la définition et la formulation de l'équation de Schrödinger [45, 6], la méthode de l'application en dimension 2 pour divers modèles de cette équation [33], l'équation DNLS, les paires de systèmes de Lax.

## 2.1 Conception

Une particule quantique, peu importe ce qu'elle est, par exemple un électron dans l'atome, est toujours représentée par une fonction d'onde. En principe, celle-ci dépend de l'espace et du temps,

$$(\vec{r}, t).$$

La densité de probabilité de la présence de la particule à l'emplacement  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  est la suivante

$$P(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2.$$

La densité de probabilité ne dépendant pas du temps, on dit que le système est dans un état stationnaire. Supposons une particule de masse  $m$  libre de se déplacer sur l'axe  $x$  et subit une force dérivée d'un potentiel  $V(x)$ . La fonction d'onde de la particule vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$ih \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \frac{-h^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t), \quad (2.1)$$

où  $\partial/\partial t$  et  $\partial/\partial x$  représentent les dérivées partielles par rapport à  $t$  et  $x$  respectivement et  $h$  la constante de Planck. L'équation est dite équation de Schrödinger (2.1). A partir de la condition initiale  $\psi(x, 0)$  et du potentiel  $V(x)$ , on obtient le calcul de  $\psi(x, t)$ .



L'opérateur différentiel qui figure à droite de l'équation de Schrödinger est nommé le **Hamiltonien** et désigné par  $\hat{H}$ .

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x).$$

Considérons  $\mathcal{H}$  comme l'espace des fonctions d'onde du système. L'opérateur est une application linéaire de  $\mathcal{H}$  dans  $\mathcal{H}$ .

$\hat{H}$  correspond physiquement à l'énergie cinétique et potentielle de la particule. En fonction de l'opérateur  $\hat{H}$ , l'équation de Schrödinger a la forme compacte

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(x, t). \quad (2.2)$$

## Fonctions propres de $\hat{H}$ et les états stationnaires

Nous cherchons les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger. Pour cela, il faut d'abord calculer les "fonctions propres" de l'opérateur  $\hat{H}$ . Il s'agit de fonctions tels que

$$\hat{H} \varphi(x) = E \varphi(x), \quad (2.3)$$

avec  $E$  un nombre réel. C'est à partir des fonctions propres de  $\hat{H}$  que l'on construit les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger. Considérons en effet une fonction d'onde de la forme

$$\psi(x, t) = \phi(t) \varphi(x),$$

où  $\varphi(x)$  vérifie l'équation (2.3), et nous l'injectons dans l'équation de Schrödinger (2.2). Nous obtenons

$$i\hbar \frac{d\phi(t)}{dt} \varphi(x) = E \phi(t) \varphi(x) \quad \rightarrow \quad \phi(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} E t}, \quad (2.4)$$

on a une solution de l'équation de Schrödinger

$$\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-\frac{i}{\hbar} E t}. \quad (2.5)$$

La densité de probabilité pour la particule à l'endroit  $x$  à l'instant  $t$ ,

$$P(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = |\varphi(x)|^2, \quad (2.6)$$

ne dépend pas du temps. L'état  $\psi$  décrit dans (2.5) est un état "stationnaire" dont les propriétés ne varient pas dans le temps.

$E$  dans (2.4) est l'énergie de la particule.

## 2.2 Méthode d'application bidimensionnelle pour les structures non linéaires à unidimensionnelle

L'approche d'application bidimensionnelle que nous exposons peut être utilisée en général pour toute structure non linéaire unidimensionnelle, à condition que le couplage soit de courte durée. La formule la plus courante d'un tel schéma de couplage est le laplacien discret  $\Delta\psi_n = \psi_{n-1} - 2\psi_n + \psi_{n+1}$ . Pour décrire l'approche en dimension 2 sous sa forme la plus générale, prenons en considération une structure non linéaire générique de la forme :

$$\dot{\psi}_n = G(\psi_{n-1}, \psi_n, \psi_{n+1}) + F(\psi_n) \quad (2.7)$$

où  $G$  est la fonction de couplage à court terme et  $F$  correspond à la non-linéarité. Le cas du DNLS avec la non-linéarité cubique standard est obtenu en choisissant  $G = (c/i)\Delta$  ( $\Delta$  sera utilisé pour désigner le Laplacien discret) et  $F(\psi) = (b/i)|\psi|^2\psi$ , où  $c \geq 0$  est la constante de couplage et  $b = \pm 1$  correspond à la défocalisation et la focalisation des non-linéarités, respectivement. Pour que cette approche soit directement applicable, nous avons besoin de réécrire la solution stationnaire de l'équation (2.7) comme une relation de récurrence. L'approche de l'application de dimension 2 exige dans le cas général du système (2.7) que la fonction de couplage soit inversible par rapport à  $\psi_{n+1}$  tel que  $G(\psi_{n-1}, \psi_n, \psi_{n+1}) = G_0$  est peut être explicitement réécrit comme  $\psi_{n+1} = G^{-1}(\psi_{n-1}, \psi_n, G_0)$ . En particulier, c'est le cas pour la fonction de couplage définie comme une combinaison linéaire à court terme (ce qui est le cas du Laplacien discret).

Commençons par une équation DNLS de dimension 1, et on cherchons les états stationnaires. Dans des dimensions supérieures, pour des solutions telles que des

tourbillons discrets, il est nécessaire de considérer une amplitude d'état stationnaire complexe  $u_n$ . Néanmoins, il est crucial de souligner que l'approche de l'application de dimension 2 n'est applicable qu'aux équations de dimension 1.

L'équation d'état stationnaire peut être réécrit comme la relation récurrente

$$u_{n+1} = R(u_n, u_{n-1}). \quad (2.8)$$

qui peut être exprimé comme l'application de dimension 2

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}, \quad M : \begin{cases} u_{n+1} = R(u_n, v_n) \\ v_{n+1} = u_n \end{cases} \quad (2.9)$$

où la deuxième équation définit la variable intermédiaire  $v_n = u_{n-1}$ .

C'est important de souligner que, par construction, chaque orbite de l'application de dimension 2 correspond à une solution stationnaire du DNLS. En particulier, toute condition initiale  $P_0 = (u_0, v_0)^T$  car l'application de dimension 2 va génère l'orbite décrit par la suite doublement infinie des points  $(\dots, P_{-2}, P_{-1}, P_0, P_1, P_2, \dots)$  où  $P_{n+1} = M(P_n)$ . Cette orbite correspond à son tour à l'état stationnaire  $(\dots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots)$ , où  $v_n = [M^n(P_0)]_y$  est la coordonnée  $y$  (projection) de la nième itération de  $P_0$  par  $M$ . Alternativement, on pourrait aussi obtenir l'état stationnaire comme  $\{u\}_{n=-\infty}^{\infty}$ , où  $u_n = [M^{n+1}(P_0)]_x$  est la coordonnée  $x$  (projection) du  $(n + 1)$  ème itération de  $P_0$ . Il est également important de mentionner que l'approche de l'appliaction 2D, bien qu'elle est outille pour décrire/trouver des solutions stationnaires du structure non linéaire associées, ne donne aucune information sur la stabilité des états stationnaires eux-mêmes. Ceci est une conséquence de la séparation du temps de l'état stationnaires où l'on perd toute l'information temporelle ( $y$  compris les propriétés de stabilité).

## 2.3 Équation de Schrödinger non linéaire discrète

L'équation de Schrödinger non linéaire discrète permet de décrire un modèle de structure particulièrement simple pour un oscillateur anharmonique couplé. Dans

une dimension d'espace, la forme générale de l'équation est :

$$i \frac{d\psi_n}{dt} = G(\psi_{n+1}, \psi_n, \psi_{n-1}) + F(\psi_n), \quad (2.10)$$

où,  $F(\psi_n)$  représente le terme non linéaire d'équation de Schrödinger,  $G(\psi_{n+1}, \psi_n, \psi_{n-1})$  est la fonction de couplement à court terme.

## Équation de Schrödinger semi-linéaire

L'équation de Schrödinger semi-linéaire est une équation comportant un terme linéaire de type équation de Schrödinger et un terme de réaction non-autonome:

$$i \frac{d\psi_n}{dt} + \Delta\psi_n + f(n, \psi_n) = 0.$$

L'équation de Schrödinger semi-linéaire intervient dans de nombreux domaines de la physique: propagation d'ondes, optique non-linéaire, modèles de lasers, modèles de plasma, ... etc.

## Équation de Schrödinger cubique focalisante et défocalisante

$$i \frac{d\psi_n}{dt} + \Delta\psi_n + |\psi_n|^2\psi_n = 0.$$

L'équation de Schrödinger cubique défocalisante est de la forme

$$i \frac{d\psi_n}{dt} + \Delta\psi_n - |\psi_n|^2\psi_n = 0.$$

La solution stationnaire de l'équation de Schrödinger est sous la forme :

$$\psi_n = u_n e^{ikt}, \quad (2.11)$$

avec  $k \in \mathbb{R}$ , et  $u_n$  répond au problème indépendant du temps, les solutions sont aussi appelées "états stables".

## 2.4 Des modèles pour des équations de Schrödinger non linéaires

Du point de vue historique, l'équation cubique DNLS a été obtenue pour la première fois par Holstein en 1959 pour représenter le mouvement d'un électron auto-pierrant (polaron) dans un réseau cristallin unidimensionnel. L'équation est réapparue en 1972 lorsque Davydov a examiné le transfert d'énergie dans les biomolécules. La même équation a été également utilisée par D. N. Christodoulides et R. I. Joseph en 1988 pour modéliser la dynamique d'un champ optique dans un réseau de guides d'ondes non linéaires couplés. En revanche, dans les années 1990, l'équation DNLS a également été étudiée en tant que modèle de systèmes d'oscillateurs anharmoniques couplés qui admettent les modes localisés ou discrets dits intrinsèques. Très récemment, A Trombettoni et A Smerzi ont également utilisé cette équation en 2001 pour la description d'un condensat de Bose-Einstein (BEC) piégé dans un potentiel périodique. L'équation DNLS cubique est la forme simple la plus étudiée de l'équation de Schrödinger non linéaire à l'équation de Schrödinger linéaire, on peut dire que cette équation est "standard" ou une structure simple. L'équation DNLS cubique est définie par :

$$i\frac{d\psi_n}{dt} = -c\Delta\psi_n + b|\psi_n|^2\psi_n, \quad (2.12)$$

où  $\psi_n \equiv \psi_n(t)$  représente une fonction complexe du temps  $t$  au site  $n$ ,  $\dot{\psi}_n$  indique la dérivé par rapport au temps et  $c$  la constante du couplage entre deux sites adjacents,  $\Delta\psi_n = \psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}$  est le Laplacien discret de dimension 1 et  $b$  le paramètre de la non-linéarité.

La valeur de  $b$  peut être négative ou positive, ce qui indique la non-linéarisation de la focalisation ou de la défocalisation, respectivement.

### 2.4.0.1 Équation DNLS de Ablowitz-Ladik (AL)

Un autre type d'équations DNLS, s'appelle l'équation d'Ablowitz-Ladik (AL). Cette équation a été formulée à l'origine par Ablowitz et Ladik en 1976 [41]. Cette équation obtenue en remplaçant la non linéarité diagonale dans l'équation

cubique avec une non linéarité hors-diagonale, résultant :

$$i\frac{d\psi_n}{dt} = -c\Delta\psi_n + b|\psi_n|^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}). \quad (2.13)$$

#### 2.4.0.2 Équation DNLS de Salerno

En 1992 [42], Salerno a proposé un modèle intéressant de l'équation DNLS de la forme:

$$i\dot{\psi} = -c\Delta\psi_n + 2(1 - b)|\psi_n|^2\psi_n + b|\psi_n|^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1}). \quad (2.14)$$

qui représente le DNLS cubique à  $b = 0$  et le système AL (2.13) à  $b = 1$ . En raison de sa propriété d'incorporer les structures cubiques et AL de l'équation de Schrödinger, l'équation de Salerne devient un modèle général idéal pour étudier, par exemple l'interaction entre les non-linéarités sur place et entre sites.

#### 2.4.0.3 Équation saturable DNLS

Une autre variante des équations DNLS qui est très pertinente à discuter est une structure DNLS présentant la non-linéarité dite saturable. Cette équation est écrite comme

$$i\dot{\psi} = -c\Delta\psi_n + \frac{b\psi_n}{1 + |\psi_n|^2}, \quad (2.15)$$

qui représente une version discrète de l'équation de Vinetskii-Kukhtarev. Plus récemment, la version continue de l'équation dans le cas de défocalisation c'est également produit dans un cristal liquide hématique dopé par un colorant azoïque, comme rapporté par Piccardi comme dans le cas cubique, le terme de non-linéarité dans l'équation DNLS saturable peut être soit la focalisation soit la dé focalisation, indiqué par  $b > 0$  ou  $b < 0$ , respectivement.

## 2.5 Paires de Lax

En mathématique, dans la théorie des systèmes intégrable une paire de Lax est une paire de matrices dépendant du temps ou d'opérateurs qui satisfont une équation différentielle correspondante, appelée l'équation Lax.

**Définition 2.5.1.** Une paire de Lax est une paire de matrices ou d'opérateurs  $L(t)$ ,  $P(t)$  dépendant du temps et agissant sur un espace de Hilbert fixe, et satisfaisant l'équation de Lax :

$$\frac{dL}{dt} = [P, L]$$

où  $[P, L] = PL - LP$  est le commutateur. Souvent,  $P$  dépend de  $L$  d'une manière prescrite, il s'agit donc d'une équation non linéaire pour  $L$  en fonction de  $t$ .

### Propriété isospectrale

On peut alors montrer que les valeurs propres et plus généralement le spectre de  $L$  sont indépendants de  $t$ . On dit que les matrices/opérateurs  $L$  sont isospectraux lorsque  $t$  varie.

L'observation principale est que les matrices  $L(t)$  sont toutes similaires en vertu de la règle suivante:

$$L(t) = U(t, s)L(s)U(t, s)^{-1}$$

où  $U(t, s)$  est la solution du problème de Cauchy

$$U(t, s) = P(t)U(t, s), \quad U(s, s) = I,$$

où  $I$  désigne la matrice d'identité. Notez que si  $P(t)$  est auto adjoint,  $U(t, s)$  sera unitaire.

En d'autres termes, pour résoudre le problème des valeurs propres  $L\psi = \lambda\psi$  au temps  $t$ , il est possible de résoudre le même problème au temps 0 où  $L$  est généralement mieux connu, et de propager la solution avec les formules suivantes:

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \lambda(0) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= P\psi. \end{aligned}$$

### Lien avec la méthode de diffusion inverse

La propriété ci-dessus est à la base de la méthode de diffusion inverse. Dans cette méthode,  $L$  et  $P$  agissent sur un espace fonctionnel (donc  $\psi = \psi(t, x)$ ), et dépendent d'une fonction inconnue  $u(t, x)$  qui doit être déterminée. On suppose généralement que  $u(0, x)$  est connue, et que  $P$  ne dépend pas de  $u$  dans la région de diffusion où  $\|x\| \rightarrow \infty$ . La méthode prend alors la forme suivante:

Calculer le spectre de  $L(0)$ , en donnant  $\lambda$  et  $\psi(0, x)$ . Dans la région de diffusion où  $P$  est connu, propager  $\psi$  dans le temps en utilisant  $\frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x) = P\psi(t, x)$  avec la condition initiale  $\psi(0, x)$ , Connaissant  $\psi$  dans la région de diffusion, calculer  $L(t)$  et/ou  $u(t, x)$ .

### Équation de Schrödinger non linéaire discret intégrable

En général, toute discrétisation donnée d'une PDE intégrable est plus susceptible d'être non intégrable. Même si la PDE intégrable est la condition de compatibilité d'une paire d'opérateurs linéaires, il n'y a pas en général de paire d'équations linéaires correspondant à une discrétisation générique. De plus, compte tenu d'une discrétisation semble être intégrable. Il n'y a pas de méthode algorithmique pour construire la paire linéaire associé à partir du système discret. Cependant, l'IDNLS,

$$i \frac{d}{dt} q_n = \frac{1}{h^2} (q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) \pm |q_n|^2 (q_{n+1}, q_{n-1}), \quad (2.16)$$

est une simple discrétisation de l'équation Schrödinger non linéaire, pour laquelle il existe des paires d'opérateurs associée (voir les équations (2.20), (2.21)). Avec cette paire d'opérateurs, le problème de valeur initiale pour l'IDNLS peut être résolu via la transformée de diffusion inverse. Nous formulons l'IST, sur le réseau doublement infini (c'est-à-dire,  $-\infty < n < +\infty$ ), pour le système un peu plus général:

$$i \frac{d}{d\tau} Q_n = Q_{n+1} - 2Q_n + Q_{n-1} - Q_n R_n (Q_{n+1}, Q_{n-1}). \quad (2.17)$$

$$-i \frac{d}{d\tau} R_n = R_{n+1} - 2R_n + R_{n-1} - Q_n R_n (R_{n+1}, R_{n-1}). \quad (2.18)$$

et inclure l'IDNLS (2.16) dans un cas particulier.

L'IDNLS a une infinité de quantités conservées et une structure hamiltonienne.



Comme dans la cas du NLS, les quantités conservées sont dérivées de la méthode IST.

## Transformée de diffusion inverse pour IDNLS

### Paire d'opérateurs

Une approche de la construction d'équations d'évolution non linéaire semi-discrètes intégrables consiste à calculer la condition de compatibilité d'un problème de diffusion spatialement discret et d'une équation de dépendance temporelle.

En particulier, pour construire une discrétisation spatiale intégrable d'une PDE intégrable, on peut d'abord discrétiser le problème de diffusion associé à l'PDE. Ensuite, en développant de manière appropriée la matrice de dépendance temporelle dans les puissances du paramètre de diffusion, on peut dériver des systèmes compatibles d'ODEs.

Cette méthode a été utilisée avec succès dans pour construire la discrétisation intégrable DNLS, c'est-à-dire, l'IDNLS (2.16).

Une discrétisation naturelle du problème de diffusion (2.16) est:

$$\frac{v_{n+1} - v_n}{h} = \begin{pmatrix} -ik & q_n \\ r_n & ik \end{pmatrix} v_n + O(h^2), \quad (2.19)$$

où  $v_n = v(nh) = (v_n^1, v_n^2)^T$ ,  $q_n = q(nh)$  et  $r_n = r(nh)$ .

Nous récrivons cette différence finie comme:

$$v_{n+1} = \begin{pmatrix} z & Q_n \\ R_n & z^{-1} \end{pmatrix} v_n, \quad (2.20)$$

où  $Q_n = hq_n$ ,  $R_n = hr_n$ ,  $z = e^{-ikh} = 1 - ihk + O(h^2)$ ,

$$z^{-1} = e^{ikh} = 1 + ikh + O(h^2).$$

Puis supprimez les termes  $O(h^2)$  et plus.

Le problème de diffusion (2.20) est parfois appelé problème de diffusion Ablowitz-Ladik. Compte tenu du problème de diffusion (2.20) et de l'équation de dépendance temporelle :

$$\frac{d}{d\tau}v_n = \begin{pmatrix} iQ_n R_{n-1} - \frac{i}{2}(z - z^{-1})^2 & -i(zQ_n - z^{-1}Q_{n-1}) \\ i(z^{-1}R_n - zR_{n-1}) & -iR_n Q_{n-1} + \frac{i}{2}(z - z^{-1})^2 \end{pmatrix} v_n. \quad (2.21)$$

La condition de compatibilité discrète

$$\frac{d}{d\tau}v_{n+1} = \left(\frac{d}{d\tau}v_m\right)_{m=n+1}$$

est équivalent aux équations d'évolution (2.17),(2.19).

Afin d'obtenir l'IDNLS (2.16) du système (2.17),(2.19), nous changeons les variables comme suit:

$$Q_n \rightarrow hq_n, \quad R_n \rightarrow hr_n, \quad \tau \rightarrow h^{-2}t. \quad (2.22)$$

Ensuite, le système (2.17),(2.19) devient

$$i \frac{d}{dt}q_n = \frac{1}{h^2}(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) - q_n r_n (q_{n+1} + q_{n-1}). \quad (2.23)$$

$$i \frac{d}{dt}r_n = \frac{1}{h^2}(r_{n+1} - 2r_n + r_{n-1}) - q_n r_n (r_{n+1} + r_{n-1}). \quad (2.24)$$

Ce qui correspond à l'IDNLS (2.16) sous la réduction  $r_n = \mp q_n^*$ .

## Chapitre 3

# Orbites homoclines et solutions localisées pour un système de Schrödinger non linéaire discret

## 3.1 Introduction

Ce chapitre comprend une étude sur l'application de la théorie des systèmes dynamiques réversible pour prouver l'existence des orbites homoclines et leur relation avec une équation de Schrödinger non linéaire à court interaction. Pour cela nous avons présenté une description mathématique plus précise de symétrie d'inversion du temps dans le cadre des systèmes dynamiques et par suite les difféomorphismes réversibles. Une attention particulière est accordée aux points homoclines et hétéroclines. Ensuite, Notre objectif est d'améliorer l'approche de l'orbite homocline en utilisant les propriétés de symétrie des applications planaires réversibles, de sorte que nous puissions prouver rigoureusement les résultats d'existence sans supposer une petite perturbation. Des résultats sont obtenus pour l'existence des solitons. De plus en proposant une nouvelle DNLS à interaction de longue terme. L'approche de l'orbite homocline pour l'existence de solutions de solitons d'équations DNLS utilisée ici est précisément une généralisation du travail de [15] (interaction locale).

## 3.2 Symétrie par inversion du temps dans les systèmes dynamiques

La symétrie par inversion du temps est l'un des fondements de symétries discutées en sciences naturelles. Par conséquent, il est posé dans de nombreux systèmes dynamiques en physique, en particulier dans la mécanique quantique.

Nous considérons les équations différentielles ordinaires et les difféomorphismes possédant une inversion symétrique.

La notion conventionnelle de symétrie par inversion du temps concerne l'observation des phénomènes physiques. Nous prenons l'exemple de la dynamique d'un pendule idéal classique, on a pas de perte d'énergie due au frottement.

Nous proposons maintenant l'expérience suivante: nous laissons le pendule balancer, le filmer et le regarder à l'aide d'un projecteur qui joue le film en arrière (dans le sens inverse).

Nous voyons donc que le mouvement du pendule est dans le sens inverse du

temps, si nous ne connaissons pas le film original, alors il serait impossible de dire que le film a été joué en sens inverse. Puisque le mouvement dans le film inverse est correspond également à un mouvement possible du même pendule, et le mouvement inverse satisfait les mêmes lois du mouvement que le mouvement dans le film original. La seule différence entre le mouvement dans les deux décrit versions avant et arrière du film est la position initiale et la vitesse du pendule au moment où nous commençons à jouer le film. Si on ne peut pas décider si un film d'un système mécanique est joué en avant ou en arrière, on dit que ce système a une inversion symétrique du temps.

Quand nous considérons une situation physique plus réaliste d'un pendule oscillant en présence du frottement, nous pouvons faire la différence entre un film original d'un pendule et son inverse. Parce que, dans le film original (en avant) nous voyons que le pendule en train de perdre son amplitude jusqu'à l'arrêt. Cependant, dans le film en sens inverse nous voyons que l'amplitude ce pendule oscillant augmente avec le temps. Le film dans le sens inverse est clairement non physique car il ne satisfait pas les lois naturelles du mouvement (supposant qu'il n'y a pas une source d'énergie cachée alimentant le pendule). La présence de frottement brise la symétrie par inverse du temps du pendule idéal. La symétrie d'inversion du temps décrite dans cet exemple se pose très fréquemment en mécanique classique. Bien que dans la nature, nous rencontrons rarement les systèmes mécaniques symétriques parfaits dans le temps. Un pendule véritablement isolé présente une symétrie par inversion du temps. Le frottement et le transfert d'énergie sont simplement dus au couplage du pendule avec son environnement.

### 3.2.1 Formulation hamiltonienne

Dans la formulation hamiltonienne de la mécanique classique, nous décrivons le système avec des variables  $(q, p)$ , où  $q$  est un vecteur décrivant la position du système et  $p$  un vecteur décrivant son élan (momentum). Dans sa forme la plus simple, l'hamiltonien  $H(q, p)$  est une fonction qui génère les équations du mouvement via:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad , \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \quad (3.1)$$

La notion classique de symétrie par inversion du temps telle que discutée ci-dessus est directement liée à une propriété de symétrie de l'hamiltonien:

$$H(q, p) = H(q, -p). \quad (3.2)$$

Si l'hamiltonien satisfait (3.1), alors les équations de mouvement (3.2) sont invariantes sous la transformation:

$$R_0 : (q, p, t) \mapsto H(q, -p, -t). \quad (3.3)$$

Cela implique que lorsque  $(q(t), p(t))$  est une trajectoire dans l'espace de phase décrivant un mouvement possible du système avec une position initiale et un élan (momentum)  $(q_0, p_0)$ , alors il en est de même  $(q(-t), -p(-t))$  avec une condition initial  $(q_0, -p_0)$ . En configuration (position), cela signifie que si nous avons une trajectoire  $q(t)$ , alors nous avons aussi une trajectoire  $q(-t)$ . C'est précisément ce que nous voyons quand nous jouons un film d'un système réversible dans le temps en sens inverse.

### 3.2.2 Description mathématique dans le cadre des systèmes dynamiques

Nous allons maintenant donner une description mathématique plus précise de symétrie d'inversion du temps dans le cadre des systèmes dynamiques (voir [11]). Nous considérons deux types de systèmes dynamiques, avec temps continu ( $t \in \mathbb{R}$ ) et temps discret ( $t \in \mathbb{Z}$ ) sur un espace de phase  $\Omega$ . Les systèmes à temps continu sont considérés comme des flots de champs de vecteurs. Les systèmes dynamiques en temps discret sont supposés être générés par une application inversible  $f$ . Dans la plupart des applications d'intérêt  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Dans le temps continue, nous considérons les équations différentielles ordinaires autonomes de la forme:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) \quad (x \in \Omega), \quad (3.4)$$

où  $F : \Omega \mapsto T(\Omega)$  est une application (simple, continu).

La dynamique de (3.4) est donnée par un opérateur d'évolution d'un seul paramètre:

$$\varphi_t : \Omega \rightarrow \Omega,$$

$$\varphi_t : x(\tau) \rightarrow \varphi_t(x(\tau)) = x(\tau + t),$$

tel que,

$$\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2} \quad \text{pour } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Nous disons maintenant qu'une application inversible (simple)  $R : \Omega \mapsto \Omega$  est une symétrie inverse de (3.4) quand:

$$\frac{dR(x)}{dt} = -F(R(x)). \quad (3.5)$$

En termes d'opérateur d'évolution  $\varphi_t$ , (3.5) implique:

$$R \circ \varphi_t = \varphi_{-t} \circ R = \varphi_t^{-1} \circ R. \quad (3.6)$$

Dans le contexte de la mécanique classique, où les équations différentielles ordinaires sont dérivées par un Hamiltonien  $H(q, p)$ , la symétrie d'inversion classique est donnée par:

$$R(q, p) = (q, -p). \quad (3.7)$$

Notez que dans ce cas particulier,  $R$  est une involution (c'est-à-dire  $R^2 = id$ ).

Par analogie avec la définition (3.6) dans le cas des flots, nous appelons une application inversible  $R : \Omega \mapsto \Omega$  une inversion symétrique d'une application inversible  $f : \Omega \mapsto \Omega$  à chaque fois:

$$R \circ f = f^{-1} \circ R. \quad (3.8)$$

La notion d'inversion de symétrie pour les flots autonome s'étend naturellement aux flots non autonome,

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t). \quad (3.9)$$

A savoir, nous appelons  $R_a : (x, t) \mapsto (R(x), -t + a)$  une inversion symétrique de (3.9) chaque fois que (3.9) est invariant sous la transformation  $R_a$  (pour certains

$a \in \mathbb{R}$ ), c'est-à-dire:

$$\frac{dR(x)}{dt} = -F(R(x), -t + a). \quad (3.10)$$

Nous introduisons une nouvelle variable  $\tau = t - \frac{a}{2}$ , l'équation différentielle étendue:

$$d(x, \tau)/dt = (F'(x, \tau), 1)$$

(avec :  $(F'(x, \tau), 1) = F(x, \tau + a/2)$ ) est autonome et a une symétrie inverse:

$$R_0 : (x, \tau) \mapsto (R(x), -\tau).$$

La présence et l'importance de la symétrie par inversion du temps a été reconnu dans les premiers jours des systèmes dynamiques de Birkhoff [43]. Il l'utilisa dans son étude des problèmes restreint à trois corps en mécanique classique. En particulier, il a noté qu'une application  $f$  avec une symétrie inverse  $R$  toujours doit être écrit comme la composition de deux involutions:

$$f = R \circ T \quad (3.11)$$

où  $R^2 = T^2 = id$ .

Notons que  $R$  n'est pas une involution, on vérifie facilement que la propriété de décomposition (3.11) se généralise par:

$$f = R \circ T \quad (3.12)$$

où  $R^2 \circ T^2 = id$ .

Dans les flots des champs des vecteurs non autonomes (3.9) lorsque  $F(x, t)$  est périodique dans le temps, c'est-à-dire  $F(x, t) = F(x, t + 1)$ , puis de manière naturelle l'application d'inverse en temps de chaque flot est autonome. De plus, il est facile de vérifier que lorsque les système non autonome est invariant sous  $R_a$ , alors l'application inverse en temps est retourné par rapport à la surface de  $t = a/2$  a l'inversion symétrique  $R$ .

Un résultat similaire s'applique également aux applications d'inverse locales pour les orbites périodiques de flot autonomes à symétrie inverse  $R$ .



**Définition 3.2.1.** (*Système dynamique réversible*)

Un système dynamique est appelé réversible quand il possède une inversion symétrique  $R$  satisfaisant (3.5), (3.8) ou (3.10), pour des flots autonomes, des applications ou des flots non autonomes, respectivement [11].

### 3.3 Difféomorphismes réversibles

Dans cette section, pour simplifier, nous ne considérons que les difféomorphismes de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Soit  $R$  un difféomorphisme régulier satisfaisant:

- $R \circ R = \text{identité}$ .
- La dimension de l'ensemble du point fixe de  $R$ ,  $Fix(R)$ , est  $n$ .

$R$  est appelé une involution inversée. Un difféomorphisme  $F$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  est appelé  $R$ -réversible si:

$$R \circ F = F^{-1} \circ R.$$

La motivation de cette terminologie vient de la mécanique.

Certains points périodiques de difféomorphismes réversibles sont faciles à déterminer; ce sont les points périodiques symétriques décrits par la proposition suivante:

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $p \in Fix(R)$  et supposons  $F^k(p) \in Fix(R)$ , alors  $F^{2k}(p) = p$ .*

**preuve 3.3.1.** *On a  $F^k(p) = RF^k(p) = F^{-k}R(p) = F^{-k}(p)$  par conséquent  $F^{2k}(p) = p$ .*

Par conséquent, des points périodiques symétriques peuvent être trouvés géométriquement, nous cherchons que les auto-intersections de l'ensemble de points fixes de  $R$  sous l'itération de  $F$ .

On retrouve également certains points homoclines de difféomorphismes  $R$ -réversibles géométriquement, comme illustré par ce qui suit.

**Proposition 3.3.2.** *Soit  $p \in \text{Fix}(R)$  un point fixe symétrique pour  $F$  et soit  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$  désignent la variété stable et instable de  $p$ , ensuite  $R(W^u(p)) = W^s(p)$  et  $R(W^s(p)) = W^u(p)$ . En particulier, si  $q \in W^u(p) \cap \text{Fix}(R)$ , alors  $q$  est un point homocline.*

**preuve 3.3.2.** *Soit  $x \in W^u(p)$  de sorte que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{-n}(x) = p$ . Ainsi nous:*

$$p = R \lim_{n \rightarrow \infty} (F^{-n}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(R(x))$$

*de sorte que  $R(x) \in W^s(p)$ , d'où  $RW^u(p) \subset W^s(p)$ .*

*On a de même  $RW^s(p) \subset W^u(p)$ , de sorte que  $RW^s(p) = W^u(p)$*

*Si  $q \in W^u(p) \cap \text{Fix}(R)$ , alors  $q = R(q) \in W^s(p) \cap \text{Fix}(R)$  aussi, de sorte que  $q$  est un point homocline.[22]*

Par conséquent, pour avoir des points homoclines pour les difféomorphismes réversibles, il suffit de trouver les intersections de  $W^u(p)$  avec  $\text{Fix}(R)$ . Comme nous le montrons ci-dessous, c'est souvent facile à faire. Nous remarquons que les deux propositions ci-dessus sont vraies ou bien plus générales.

Les points homoclines qui se trouvent également dans  $\text{Fix}(R)$  sont classés comme des points symétriques homoclines. Un tel point est appelé un point homocline régulier si la variété instable (et donc aussi la variété stable) rencontre  $\text{Fix}(R)$  transversalement au point homocline. Nous soulignons que les points symétrique régulière homoclines n'ont pas besoin d'être non dégénérés (c'est-à-dire, les variétés stables et instables n'ont pas besoin de se croiser transversalement à un tel point).

C'est un exercice facile pour prouver que les points homocline symétrique non dégénérée doivent être réguliers.

Par conséquent, la notion de régularité est plus faible que la non-dégénérescence. Dans les applications, il est souvent plus facile de vérifier la régularité, et plus un rappel important, la régularité donne lieu à une infinité de points à proximité.

**Proposition 3.3.3.**

*Soit  $p$  un point fixe symétrique et soit  $q$  un point régulier homocline symétrique dans  $W^u(p)$ . Soit  $V$  n'importe quel voisinage de  $p$  dans  $\text{Fix}(R)$ . Alors il existe une infinité de points périodiques symétriques dans  $V$  [11].*

Tous les points périodiques d'un difféomorphisme réversible ne sont pas symétriques. Cependant, les points périodiques non symétriques doivent apparaître par paires. En effet, si  $p$  est un point fixe pour  $F^k$ , alors  $R(p)$  est également fixe par  $F^k$  par réversibilité. Arguments comme ci-dessus s'étendent facilement au cas non symétrique.

**Proposition 3.3.4.** *Soit  $p$  un point périodique non symétrique. Supposons  $q \in W^u(p) \cap \text{Fix}(R)$ . Alors  $q \in W^u(p) \cap W^s(R(p))$ .*

Ainsi certains points hétéroclines peuvent être trouvés géométriquement tout comme les points homoclines symétriques. Les points hétéroclines symétriques réguliers sont définis comme des points homoclines réguliers.

La proposition suivante est vérifiée d'une manière similaire à ce qui précède.

**Proposition 3.3.5.** *Soit  $F$  un difféomorphisme  $R$ -réversible du plan et supposons que  $p$  soit un point selle non symétrique pour  $F$ . Supposons une branche de  $W^u(p)$  et une branche de  $W^s(p)$  rencontrent  $\text{Fix}(R)$  transversalement. Alors il existe une infinité d'orbites périodiques symétriques qui entrent dans n'importe quel voisinage de  $p$  et  $R(p)$ . [6]*

## 3.4 Orbites homoclines et solutions localisées pour un système de Schrödinger non linéaire

### 3.4.1 Points homoclines et hétéroclines

Dans certaines conditions les variétés stable et instable d'un point singulier  $x_p$  peuvent avoir des points d'intersection distincts de  $x_p$ . De même, deux variétés instables de deux points singuliers distincts  $x_{p1}$  et  $x_{p2}$  peuvent se croiser.

**Définition 3.4.1.**

*On appelle point homocline toute intersection  $W^s(x_p) \cap W^u(x_p)$  distincte de  $x_p$ .*

*On appelle point hétérocline toute intersection  $W^s(x_{p1}) \cap W^u(x_{p2})$  (où  $W^u(x_{p1}) \cap W^s(x_{p2})$ )  $x_{p1}$  et  $x_{p2}$  étant deux points singulier distincts.*

### 3.4.2 Orbites homoclines d'un système planaire réversible

Les difféomorphismes R-réversibles ont certaines propriétés spéciales de symétrie que nous avons besoin pour étudier l'existence des solutions localisées dans les milieux non linéaire de Schrödinger.

**Proposition 3.4.1.** [11] *Soit  $p$  un point fixe non symétrique.*

*Supposons que  $q \in W^u(p) \cap \text{Fix}(R)$ . Alors,  $q \in W^u(p) \cap W^s(R(p))$ .*

Une classe des applications planaires réversibles classiques est dérivée d'équations de différences symétriques de la forme:

$$x_{n+1} + x_{n-1} = g(x_n) \quad (3.13)$$

qui apparaissent dans la discussion des états stationnaires d'oscillateurs couplés dans des réseaux unidimensionnels [11], ou des solutions de solitons d'une chaîne de Schrödinger non linéaire discrets.

Le système (3.13) peut être écrit comme une application plan, notée  $T$ , de la forme:

$$x_{n+1} = z_n, \quad z_{n+1} = -x_n + g(z_n), \quad \text{i.e.} \quad T(x, z) = (z, -x + g(z)).$$

Il est facile de vérifier que  $T$  est inversible et  $T^{-1}(x, z) = (-z + g(x), x)$ .

De plus,  $T$  est un Difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  si  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Nous supposons toujours que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et une fonction impaire.

On peut vérifier que  $T$  est  $R_1$ -réversible par rapport à l'involution  $R_1(x, z) = (z, x)$ , et  $R_2$ -réversible par rapport à l'involution  $R_2(x, z) = (-z, -x)$  puisque  $g$  est une fonction impaire.

Notez que les ensembles de points fixes  $\text{Fix}(R_1)$  et  $\text{Fix}(R_2)$  sont donnés par les lignes  $z = x$  et  $z = -x$ , notés  $S_1$  et  $S_2$ , respectivement.

Soit:

$$f(z) = g(z) - 2z.$$

**Proposition 3.4.2.** [11] *Soit  $p \in \text{Fix}(R)$  un point fixe symétrique de  $T$ . Soit  $W^s(p)$  et  $W^u(p)$  désignent les variétés stables et instables (respectivement) de  $p$ ,*

alors  $R(W^u(p) = W^s(p))$  et  $R(W^s(p) = W^u(p))$ .

En particulier: si  $q \in W^u(p) \cap \text{Fix}(R)$  alors  $q$  est un point homocline.

**Théorème 3.4.1.** [15] Supposons que:

(i)  $f(z)$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  et impaire, admet trois zéros réels,  $-z_0, 0$  et  $z_0$  ( $z_0 > 0$ ) avec  $f'(0) > 0$ ,

(ii)  $\sup_{z \geq z'} \{f(z)\} < 0$ , pour certains  $z' \geq z_0$

Alors, l'application planaire  $T$  a une orbite homocline.

**Théorème 3.4.2.** Suppose que

(i)  $f(z)$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  et impaire, et  $f(z) + 4z$  n'a que des trois zéros réels,  $-z_0, 0$  et  $z_0$  ( $z_0 > 0$ ) avec  $f'(0) < -4$ ,

(ii)  $\inf_{z \geq z'} (\{f(z) + 4z\}) > 0$ , pour certains  $z' > z_0$ .

Alors, l'application planaire  $T$  a une orbite homocline.

**Preuve** Notons d'abord que nous avons la symétrie suivante:

si  $x_n$  est une solution de l'équation aux différences:

$$f(x_n) = x_{n-1} + x_{n+1} - 2x_n, \quad (3.14)$$

alors  $\{y_n = (-1)^n x_n\}$  est une solution de l'équation aux différences.

On a  $g(x_n) = x_{n-1} + x_{n+1}$ , alors si  $n$  est pair on aura :

$$\begin{cases} y_n = (-1)^n x_n \\ y_{n+1} = (-1)^{n+1} x_{n+1} \\ y_{n-1} = (-1)^{n-1} x_{n-1} \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} y_n = x_n \\ y_{n+1} = -x_{n+1} \\ y_{n-1} = -x_{n-1} \end{cases}$$

on remplace dans (3.14) on trouve:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(y_n) &= -y_{n+1} - y_{n-1} - 2y_n \\
&= -g(y_n) - 2y_n \\
&= -f(y_n) - 2y_n - 2y_n \\
&= -f(y_n) - 4y_n
\end{aligned}$$

D'où  $\mathfrak{f}(z) = -f(z) - 4z$  et vice versa. Les hypothèses (i) et (ii) du théorème (3.4.1) sont satisfaites pour  $\mathfrak{f}(z)$ .

Il s'ensuit que l'application planaire  $T$  induite à partir de (3.4.2) a une orbite homocline, impliquant l'existence d'une orbite homocline pour l'application planaire  $T$ .

**Théorème 3.4.3.** [15] *Suppose que  $f(z)$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  et impaire, et admet trois zéros réels,  $-z_0, 0$  et  $z_0 (z_0 > 0)$  avec  $f'(z_0) > 0$ . Donc, l'application planaire  $T$  a une orbite hétérocline.*

**Théorème 3.4.4.** [15] *Suppose que  $f(z)$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$  et impaire, et  $f(z) + 4z$  n'a que des trois zéros réels,  $-z_0, 0$  et  $z_0 (z_0 > 0)$  avec  $f'(z_0) < -4$ . Donc, l'application planaire  $T$  a une orbite hétérocline.*

## 3.5 Orbites homoclines et solutions localisées pour les équations de Schrodinger non linéaires discrètes avec interaction à longue portée.

Récemment, beaucoup d'attention a été accordée à l'analyse des équations discrètes avec interaction à longue portée pilotée par des puissances fractionnaires [13,8,4,18,5]. Par exemple, dans [5], les auteurs présentent le problème d'une étude assez complète des équations discrètes de diffusion avec interaction à longue portée impliquant des puissances fractionnaires. Dans [16], une chaîne unidimensionnelle d'oscillateurs linéaires et non linéaires avec interaction à longue portée définie par un terme proportionnel de  $1/(n - m)^{1+\alpha}$ , ( $n \neq m$ ) a été considérée. Dans [18], un cadre

variationnel pour une équation aux différences fractionnelle sur  $\mathbb{Z}$  pilotée par le Laplacien discret fractionnel a été introduit. En particulier, dans [13], une version fractionnaire de l'équation de Schrödinger non linéaire discrète, dans laquelle le Laplacien discret régulier est changé à un Laplacien discret fractionnaire a été étudiée.

Nous mettons l'accent sur le fait que l'existence des solitons brillants pour divers cas est discutée par la méthode de Melnikov en supposant une perturbation petite et ainsi par la méthode d'anti-intégrabilité [12, 7], certaines solutions localisées persistent pour les cas de petits couplages. Dans [14], l'approche variationnelle peut également être utilisée, mais la région de fréquence permise ne peut être déterminée par la méthode variationnelle de manière explicite.

Nous examinons l'existence de solutions périodiques dans le temps et spatialement localisées dans lesquelles une équation algébrique d'amplitude complexe est obtenue.

Nous limitons notre attention aux amplitudes réelles et au cas où correspond à des solitons brillants et sombres, par exemple [2, 9, 10].

L'approche de l'orbite homocline pour l'existence de solutions de solitons d'équations DNLS utilisée ici est précisément une généralisation du travail de [15] (interaction locale).

## Orbites homoclines des applications planaires réversibles

Dans cette section nous ne considérerons que les difféomorphismes de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Soit  $R$  un difféomorphisme lissé satisfaisant :

- $R \circ R = \text{identité}$ .
- La dimension de l'ensemble des points fixes de  $R$ ,  $Fix(R)$ , est de  $n$ .

Un difféomorphisme  $T$  de  $\mathbb{R}^{2n}$  est appelé  $R$ -réversible si  $R \circ T = T^{-1} \circ R$ .

Une classe des applications planaires réversibles classiques est dérivée des équations de différence symétriques de la forme [11, 15]:

$$x_{n+1} + x_{n-1} = g(x_n), \tag{3.15}$$

Nous traitons le cas le plus général :

$$\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{x_{n+l} + x_{n-l}}{l^{1+\alpha}} = g(x_n), \quad (3.16)$$

apparaissent souvent dans la discussion des états stationnaires des interactions à longue portée où  $l$  est la distance entre les oscillateurs et  $\alpha$  une valeur fractionnaire.

Le système (3.16) peut être exprimé comme une application planaire, notée  $T$ .

Nous calculons l'application  $T$  pour les états stationnaires des oscillateurs. Nous dérivons l'application  $T$  pour l'ordre  $M$  tel que  $M = \frac{N}{2} - 1$ .

Soit:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,n+1} = x_{2,n} \\ x_{2,n+1} = x_{3,n} \\ \dots\dots\dots \\ x_{M,n+1} = x_{M+1,n} \\ x_{M+1,n+1} = x_{M+2,n} \\ \dots\dots\dots \\ x_{2M-1,n+1} = x_{2M,n} \\ x_{2M,n+1} = \phi_{n+M} \end{array} \right. \quad (3.17)$$

tel que:

$$x_{2M,n+1} = -x_{1,n} - (M)^{1+\alpha} \left( \sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l,n} + x_{(M+1)+l,n}}{l^{1+\alpha}} \right) + (M)^{1+\alpha} g(x_{(M+1),n}).$$

On met:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2, \dots, x_{2M}) &= (x_2, x_3, \dots, x_{2M}, -x_1 - M^{1+\alpha} \left( \sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l} + x_{(M+1)+l}}{l^{1+\alpha}} \right) \\ &\quad + M^{1+\alpha} g(x_{(M+1)})). \end{aligned}$$

Calculons  $T^{-1}$ :

Nous fixons:

$$H(t_1, t_2, \dots, t_{2M-1}) = -M^{1+\alpha} \left( \sum_{l=1}^{M-1} \frac{t_{M-l} + t_{M+l}}{l^{1+\alpha}} \right) + M^{1+\alpha} g(t_M).$$



En utilisant le changement de variable :

$$\begin{aligned} t_1 &= x_2, \\ t_2 &= x_3, \\ &\dots \\ t_{2M-1} &= x_{2M}, \end{aligned}$$

donc:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_{2M}) = (t_1, t_2, \dots, t_{2M-1}, -x_1 + H(t_1, t_2, \dots, t_{2M-1})),$$

et:

$$\begin{aligned} T^{-1} \circ T(x_1, x_2, \dots, x_{2M}) &= T^{-1}(t_1, t_2, \dots, t_{2M-1}, -x_1 + H(t_1, t_2, \dots, t_{2M-1})) \\ &= (x_1 + H(t_1, t_2, \dots, t_{2M-1}) - H(t_1, t_2, \dots, t_{2M-1}), t_1, t_2, \dots, t_{2M-1}) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_{2M}), \end{aligned}$$

donc

$$T^{-1}(t_1, t_2, \dots, t_{2M-1}, y) = (-y + H(t_1, t_2, \dots, t_{2M-1}), t_1, t_2, \dots, t_{2M-1}),$$

et

$$\begin{aligned} T^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2M}) &= (-x_{2M} + H(t_1, t_2, \dots, t_{2M-1}), x_1, x_2, \dots, x_{2M-1}) \\ &= (-x_{2M} - (M)^{1+\alpha} \left( \sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{M-l} + x_{M+l}}{l^{1+\alpha}} \right) \\ &\quad + (M)^{1+\alpha} g(x_M), x_1, x_2, \dots, x_{2M-1}), \end{aligned}$$

De plus,  $T$  est un difféomorphisme de classe  $\mathcal{C}^1$  si  $(M)^{1+\alpha} g = H$  est  $\mathcal{C}^1$ .  
 Nous supposons que  $H$  est toujours de classe  $\mathcal{C}^1$  est une fonction impaire.  
 Nous vérifions que  $T$  est  $R$ -réversible en respectant l'involution :

$$R_1(x_1, x_2, \dots, x_M, x_{M+1}, \dots, x_{2M}) = (x_{2M}, x_{2M-1}, \dots, x_1),$$

et  $R_2$ -réversible par rapport à l'involution :

$$R_2(x_1, x_2, \dots, x_M, x_{M+1}, \dots, x_{2M}) = (-x_{2M}, -x_{2M-1}, \dots, -x_1),$$

comme si  $H$  était une fonction impaire. Notons que l'ensemble des points fixes  $Fix(R_1)$  et  $Fix(R_2)$  sont déterminés respectivement par les droites  $S_1$  et  $S_2$ . Soit :

$$f(x_{M+1}) = g(x_{M+1}) - 2x_{M+1} \sum_{l=1}^M \frac{1}{l^{1+\alpha}}, \quad (3.18)$$

**Théorème 3.5.1.** *Supposons que:*

(i)  $f(z)$  est de  $C^1$  et une fonction impaire, et n'a que trois zéros réels,  $-z_0, 0$ , et  $z_0$  ( $z_0 > 0$ ) avec  $f(0) > 0$ ;

(ii)  $\sup_{z \geq z'} (f(z) + 2z \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}}) < 0$  pour certain  $z' > z_0$ .

Donc l'application planaire  $T$  a un orbite homocline.

### Preuve

Comme  $f$  est une fonction impaire et possède trois zéros réels distincts, on peut supposer que ses zéros réels sont  $-z_0, 0$  et  $z_0$  avec  $z_0 > 0$ . La fonction est donc une fonction à trois zéros réels distincts.

Pendant ce temps, l'application planaire  $T$  a trois points fixes  $P(-z_0, \dots, -z_0), O(0, \dots, 0)$  et  $Q(z_0, \dots, z_0)$ , qui sont tous symétriques par rapport à l'involution  $R_1$ . L'origine  $O$  est hyperbolique si  $f'(0) > 0$ .

De plus, le collecteur instable  $W^u(O)$  et le collecteur stable  $W^s(O)$  sont tangents aux espaces propres stables et instables  $E_s(0)$  et  $E_u(0)$  de la matrice jacobienne de  $T$  à l'origine.

Nous montrons tout d'abord que l'intersection de  $W^u(O)$  avec l'intérieur du segment  $EQ$  est non vide, où  $E(0, \dots, 0, z_0, \dots, z_0)$ . Nous pouvons facilement vérifier qu'une branche de  $W^u(O)$  pénètre initialement à l'intérieur du triangle  $\triangle OEQ$ , noté  $int(\triangle OEQ)$ .

L'intersection de  $W^u(O)$  avec l'intérieur du segment  $EQ$  est non vide.

Pour chaque point  $A(x_1, x_2, \dots, x_{2M})$  dans  $int(\triangle OEQ)$ , on a:

$$\begin{aligned} 0 &< x_1 < x^{N'+1} < z_0, \\ 0 &< x_2 < x_{M+2} < z_0, \\ &\dots \\ 0 &< x_M < x_{2M} < z_0 \end{aligned}$$

et les coordonnées du point image  $T(A)$  sont:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_{2M}) = (x_2, x_3, \dots, x_{2M}, -x_1 - M^{1+\alpha} \left( \sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l} + x_{(M+1)+l}}{l^{1+\alpha}} \right) + M^{1+\alpha} g(x_{(M+1)}))$$

De plus, puisque  $f(x_{(M+1),n})$  est positif pour  $x_{(M+1),n} \in (0, z_0)$ , la distance du point  $T(A)$  à la droite  $S_1$  est supérieure à la distance de  $A$  à  $S_1$ . Par conséquent, le manifold instable  $W^u(O)$  à l'intérieur du  $\triangle OEQ$  ne coupe pas les segments  $OE$  et  $OQ$ .

Dans ce qui suit, nous prouvons par contradiction que  $W^u(O)$  rencontre le segment  $EQ$ . Positionnons que la branche de  $W^u(O)$  dans le premier quadrant se trouve toujours à l'intérieur de  $\triangle OEQ$ .

Prenons un point  $B \in W^u(O) \cap \text{int}(\triangle OEQ)$ . Alors tous les points images  $T^n(B) \in \text{int}(\triangle OEQ)$  pour  $n = 1, 2, \dots$ . Par ailleurs, les suites de  $x_1$ -coordonnées,  $x_2$ -coordonnées, ...,  $x_{2M}$ -coordonnées de  $T^n(B)$  sont toutes deux strictement croissantes et bornées au-dessus, donc convergentes vers  $(x_1)^*, (x_2)^*, \dots, (x_{2M})^*$ , respectivement. En conséquence, la suite de points  $\{T^n(B)\}$  est convergente vers  $N((x_1)^*, (x_2)^*, \dots, (x_{2M})^*)$ , qui est un point fixe de  $T$ .

D'après les faits  $(x_1)^* > 0, (x_2)^* > 0, \dots, (x_{2M})^* > 0$ , il s'ensuit que  $N = Q$ .

D'autre part, la suite de la distance entre  $T^n(B)$  et  $S_1$  est aussi strictement croissante, ce qui implique que  $N \neq Q$ , une contradiction.

Par conséquent, le collecteur instable  $W^u(O)$  perce le segment  $EQ$ .

Deuxièmement, nous montrons que  $W^u(O)$  dans le premier quadrant rencontre la droite  $S_1$  en un point quelconque.

On note par:

$$H_0(x_{1,0}, x_{2,0}, \dots, x_{M,0}, z_0, \dots, z_0)$$

le point d'intersection de  $W^u(O)$  avec le segment  $EQ$ .

Soit

$$H_{n+1} = T(H_n), n = 0, 1, \dots$$

Les coordonnées de  $H_n$  sont

$$(x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{M,n}, x_{M+1,n}, \dots, x_{2M,n})$$

Il s'ensuit que  $x_{M+1,n} > z_0$ .

Puisque

$$f(x_{M+1,n}) + 2x_{M+1,n} \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}} < 0 \text{ for } x_{M+1,n} > x_{M+1,0}$$

on déduit de l'hypothèse (ii) que:

$$\sup_{x_{M+1} \geq x_{M+1,M}} (f(x_{M+1,n}) + 2x_{M+1,n} \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}}) < 0.$$

On note:

$$\sup_{x_{M+1} \geq x_{M+1,M}} (f(x_{M+1,n}) + 2x_{M+1,n} \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}}) = -a \quad (a > 0).$$

Supposons que  $W^u(O)$  dans le premier quadrant ne croise pas la droite  $S_1$ . Alors  $W^u(O)$  se trouve entre l'axe  $z$  et la droite  $S_1$ , et donc les points  $H_n$  se trouvent au-dessus de la droite  $S_1$ .

$$f(x_{M+1,n}) + 2x_{M+1,n} \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}} < -a \quad \text{for } n = 1, 2, \dots.$$

Soit  $d_n$  la distance de  $H_n$  à la droite  $S_1$ .

Alors

$$d_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^M (x_{M+j,n} - x_{j,n}), \quad n = 0, 1, \dots \quad (3.19)$$

Par conséquent, on a pour  $n = 0, 1, \dots$ :

$$\begin{aligned}
d_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^M (x_{M+j,n+1} - x_{j,n+1}) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} [(x_{M+2,n} - x_{2,n}) + (x_{M+3,n} - x_{3,n}) + \dots + (x_{2M,n} - x_{M,n}) \\
&\quad + (-x_{1,n} - M^{1+\alpha} (\sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l,n} + x_{(M+1)+l,n}}{l^{1+\alpha}}) + M^{1+\alpha} g(x_{(M+1),n}) - x_{M+1,n})] \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} [(x_{M+1,n} - x_{1,n}) + (x_{M+2,n} - x_{2,n}) + (x_{M+3,n} - x_{3,n}) + \dots + (x_{2M,n} - x_{M,n}) \\
&\quad - M^{1+\alpha} (\sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l,n} + x_{(M+1)+l,n}}{l^{1+\alpha}}) + M^{1+\alpha} g(x_{(M+1),n}) - 2x_{M+1,n}] \\
&= d_n + \frac{\sqrt{2}}{2} (-M^{1+\alpha} (\sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l,n} + x_{(M+1)+l,n}}{l^{1+\alpha}}) + M^{1+\alpha} g(x_{(M+1),n}) - 2x_{M+1,n}) \\
&= d_n + \frac{\sqrt{2}}{2} (-M^{1+\alpha} (\sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l,n} + x_{(M+1)+l,n}}{l^{1+\alpha}}) + M^{1+\alpha} (f(x_{(M+1),n}) \\
&\quad + 2x_{M+1,n} \sum_{l=1}^M \frac{1}{l^{1+\alpha}}) - 2x_{M+1,n}) \\
&= d_n + (M)^{1+\alpha} \frac{\sqrt{2}}{2} (-(\sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l,n} + x_{(M+1)+l,n}}{l^{1+\alpha}}) + f(x_{(M+1),n}) \\
&\quad + 2x_{M+1,n} \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}})
\end{aligned}$$

Il en résulte:

$$\left\{ \begin{array}{l}
d_1 = d_0 + M^{1+\alpha} \frac{\sqrt{2}}{2} (-(\sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l,0} + x_{(M+1)+l,0}}{l^{1+\alpha}}) + f(x_{(M+1),0}) + 2x_{M+1,0} \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}}) \\
d_2 = d_1 + M^{1+\alpha} \frac{\sqrt{2}}{2} (-(\sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l,1} + x_{(M+1)+l,1}}{l^{1+\alpha}}) + f(x_{(M+1),1}) + 2x_{M+1,1} \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}}) \\
\dots\dots \\
d_{n+1} = d_n + M^{1+\alpha} \frac{\sqrt{2}}{2} (-(\sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l,n} + x_{(M+1)+l,n}}{l^{1+\alpha}}) + f(x_{(M+1),n}) + 2x_{M+1,n} \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}})
\end{array} \right. \quad (3.20)$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sqrt{2}d_{n+1} \\
&= \sqrt{2}d_0 + \sum_{i=0}^n \sqrt{2} (M)^{1+\alpha} \left( - \left( \sum_{l=1}^{M-1} \frac{x_{(M+1)-l,i} + x_{(M+1)+l,i}}{l^{1+\alpha}} \right) \right. \\
&\quad \left. + f(x_{(M+1),i}) + 2x_{M+1,i} \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}} \right) \\
&\leq \sqrt{2}d_0 - nb - na, \quad b > 0 \quad \text{et} \quad a > 0.
\end{aligned}$$

En admettant  $n \rightarrow \infty$ , on obtient une contradiction.

Par conséquent, l'intersection de  $W^u(O)$  avec la droite  $S_1$  est non vide.

Enfin, de la proposition 3.4.2 il résulte que  $W^u(O)$  et  $W^s(O)$  se croisent en un point  $q$  sur  $S_1$ , ce qui implique l'existence d'une orbite homocline.  $\square$

**Théorème 3.5.2.** *Supposons que  $f(z)$  soit une fonction  $\mathcal{C}^1$  et impaire, et qu'elle ait seulement trois zéros réels,  $-z_0$ ,  $0$  et  $z_0$  ( $z_0 > 0$ ) avec  $f'(z_0) > 0$ . Donc l'application planaire  $T$  a une orbite hétérocline.*

**preuve 3.5.1.** *L'application réversible  $T$  a trois points fixes, dont deux,*

$$P(-z_0, -z_0, \dots, -z_0, -z_0) \text{ et } Q(-z_0, -z_0, \dots, -z_0, -z_0),$$

*sont hyperboliques si  $f'(z_0) > 0$ .*

*De manière similaire à la preuve du théorème précédent, on peut vérifier que  $W^u(Q)$  coupe l'axe  $x_1, x_2, \dots, x_M$  en  $H(x_1, x_2, \dots, x_M, 0, 0, \dots, 0)$  avec :*

$$\begin{aligned}
0 &< x_1 < z_0, \\
0 &< x_2 < z_0, \\
&\dots \\
0 &< x_M < z_0
\end{aligned}$$

*Des calculs simples montrent que  $T(H)$  et  $H$  sont symétriques par rapport à  $S_2$ . Alors l'intersection de  $W^u(Q)$  avec  $S_2$  est non vide. Par conséquent, de la proposition 3.4.2 il s'ensuit que l'intersection de  $W^u(Q)$  avec  $W^s(P)$  est non vide, et donc l'application planaire  $T$  a une orbite hétérocline.*

### 3.6 Solutions localisées dans les milieux de Schrödinger non linéaires.

A partir d'équations discrètes non-locales pilotées par des puissances fractionnaires du Laplacien discret, cette équation est valable pour tout  $n$  :

$$i \frac{\partial \psi_n}{\partial t} + h(|\psi_n|) \psi_n + J \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\psi_{n+l} - 2\psi_n + \psi_{n-l}}{l^{1+\alpha}} = 0 \quad (3.21)$$

où  $h$  est une fonction  $\mathcal{C}^1$ .

Une grande attention a été accordée aux solutions localisées de la forme  $\psi_n = \phi_n e^{i\omega t}$  où  $\phi_n$  sont indépendants du temps. Ces solutions sont périodiques dans le temps et localisées dans l'espace.

Notre objectif est de prouver l'approche de l'orbite homocline en exploitant les propriétés des systèmes planaires réversibles.

L'équation (3.21) devient:

$$-w\phi_n e^{i\omega t} + h(|\phi_n|)\phi_n e^{i\omega t} + J e^{i\omega t} \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_{n+l} - 2\phi_n + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}} = 0$$

donc

$$w\phi_n - h(|\phi_n|)\phi_n = J \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_{n+l} - 2\phi_n + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}}$$

où:

$$w\phi_n - h(|\phi_n|)\phi_n = J \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_{n+l} + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}} - 2J \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_n}{l^{1+\alpha}} \quad (3.22)$$

donc

$$\sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{\phi_{n+l} + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}} = \frac{1}{J} (w\phi_n - h(|\phi_n|)\phi_n) + 2\phi_n \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}} \quad (3.23)$$

on pose:

$$g(\phi_n) = f(\phi_n) + 2\phi_n \sum_{l=1}^{\frac{N}{2}-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}} \quad (3.24)$$

Nous allons calculer l'application  $T$  d'ordre  $M$  telle que  $M = \frac{N}{2} - 1$ .  
En utilisant une nouvelle variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,n} = \phi_{n-M} \\ x_{2,n} = \phi_{n-(M-1)} \\ \dots\dots\dots \\ x_{M,n} = \phi_{n-1} \\ x_{M+1,n} = \phi_n \\ x_{M+2,n} = \phi_{n+1} \\ \dots\dots\dots \\ x_{2M,n} = \phi_{n+(M-1)} \end{array} \right.$$

donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{1,n+1} = \phi_{n-(M-1)} = x_{2,n} \\ x_{2,n+1} = \phi_{n-(M-2)} = x_{3,n} \\ \dots\dots\dots \\ x_{M,n+1} = \phi_n = x_{M+1,n} \\ x_{M+1,n+1} = \phi_{n+1} = x_{M+2,n} \\ \dots\dots\dots \\ x_{2M-1,n+1} = \phi_{n+2} = x_{2M,n} \\ x_{2M,n+1} = \phi_{n+M} \end{array} \right.$$

On a:

$$\sum_{l=1}^M \frac{\phi_{n+l} + \phi_{n-l}}{l^{1+\alpha}} = g(\phi_n) \quad (3.25)$$



$g(\phi_n)$  est écrit comme:

$$g(\phi_n) = (\phi_{n-1} + \phi_{n+1}) + \frac{1}{2^{1+\alpha}} (\phi_{n-2} + \phi_{n+2}) + \frac{1}{3^{1+\alpha}} (\phi_{n-3} + \phi_{n+3}) \\ + \dots + \frac{1}{(N')^{1+\alpha}} (\phi_{n-M} + \phi_{n+M})$$

$$\phi_{n+M} = -(M)^{1+\alpha} \left( \sum_{l=1}^{M-1} \frac{\phi_{n-l} + \phi_{n+l}}{l^{1+\alpha}} \right) - \phi_{n-M} + (M)^{1+\alpha} g(\phi_n)$$

donc

$$f(x_{M+1}) = \left( \frac{1}{J} (wx_{M+1} - h(|x_{M+1}|)) x_{M+1} \right)$$

où  $f(z) = \left( \frac{1}{J} (wz - h(|z|)) z \right)$

Définire  $h_\infty = \lim_{r \rightarrow +\infty} h(r)$  si les limites existent. En revanche  $h_\infty = \infty$ .

**Théorème 3.6.1.** *1-Supposons que  $h$  est strictement croissant dans  $[0, +\infty[$ . Alors il existe un Solitons brillant de la forme  $\phi_n e^{i\omega t}$  avec  $h(0) + 2 \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}} < \omega < h_\infty$  pour le système (3.21) avec  $J > 0$ .*

*2-Assumons que  $h$  est strictement décroissant dans  $[0, +\infty[$ . Alors il existe un Solitons brillant de la forme  $\phi_n e^{i\omega t}$  avec  $h_\infty + 2 \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}} < \omega < h(0)$  pour le système (3.21) avec  $J < 0$ .*

**preuve 3.6.1.** *Supposons que  $h$  soit strictement croissant et  $J > 0$ . Il s'ensuit que  $f(z)$  n'a que trois zéros si  $h(0) + 2 \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}} < \omega < h_\infty$  et  $f'(0) = (\omega - h(0))/J < 0$  pour  $J > 0$ . Par conséquent, le système (3.21) admet des solutions de solitons brillants par le théorème 3.5.1. De même les autres cas peuvent être prouvés par le théorème 3.5.1.*

**Théorème 3.6.2.** *Supposons que  $h'(r) > 0$  ( $< 0$ ) pour  $r \in [0, +\infty[$ . Alors il existe un Solitons sombre de la forme  $\phi_n e^{i\omega t}$  avec  $h(0) + 2 \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}} < \omega < h_\infty$  ( $h_\infty + 2 \sum_{l=1}^{M-1} \frac{1}{l^{1+\alpha}} < \omega < h(0)$ ) pour le système (3.21) avec  $J < 0$  ( $> 0$ ).*

**preuve 3.6.2.** *La preuve est évidente par le théorème 3.5.2.*

### 3.7 Discussion

L'existence de solutions de solitons brillants a été étudiée par cette méthode pour une équation de Schrödinger discrète avec interaction à court terme dans [15] et aussi par la méthode variationnelle dans [17]. La fréquence  $\omega$  associée à la suite  $\phi_n$  dans laquelle est un minimiseur pour un certain problème variationnel. Ainsi, on doit d'abord résoudre un problème variationnel pour obtenir un minimiseur, puis dériver la fréquence correspondante. On ne peut pas déterminer explicitement la région autorisée de la fréquence  $\omega$  par la méthode variationnelle. Cependant, notre approche donne la fréquence  $\omega$  et la suite correspondante  $\phi_n$  simultanément, et ainsi on peut obtenir l'intervalle d'existence de la fréquence  $\omega$ . Un autre outil efficace pour trouver des solutions de soliton est la méthode d'anti-intégrabilité [1, 7]. D'un autre côté, si nous appliquons la méthode d'anti-intégrabilité, nous avons besoin que la force de couplage soit petite afin d'appliquer le théorème de la fonction implicite. D'autre part, dans notre résultat, l'existence de solitons brillants implique que la force de couplage pourrait être grande.

## Chapitre 4

# Structures homoclines pour un système NLSD

Dans ce chapitre, Nous discutons l'existence des structures homocline d'une équation de Schrödinger non linéaire discret.

L'équation de focalisation périodique de NLS a été considérée comme une équation permettant de décrire des modèles d'ondes instables. L'équation NLS est un Hamiltonien intégrable avec de nombreuses familles de solutions quasi-périodiques et homoclines, voir par exemple [32]. Les structures homoclines sont des sources de susceptibilité soumises à de petites perturbations qui peuvent faire bifurquer les solutions.

Dans [23, 24, 25], ils ont simulé numériquement une chaîne d'oscillateurs non linéaires de Schrödinger. Ils ont étudié les effets de différents choix de paramètres (amortissement, force motrice et espacement des oscillateurs) sur la dynamique. Pour des forces motrices plus importantes, la chaîne est soumise à une évolution chaotique spatio-temporelle. Leur analyse du chaos spatio-temporel dans la chaîne homogène a révélé des résultats nouveaux et intéressants.

Le but est d'examiner certaines caractéristiques d'une chaîne homogène d'oscillateurs NLS, constituée d'une chaîne de pendules réduite à une chaîne de Schrodinger non linéaire. Le chaos est souvent lié aux orbites homoclines dans la dynamique de détermination non linéaire [26, 27]. Nous donnons les résultats de l'analyse d'une étude de stabilité linéaire de la solution de l'équation NLS. Les orbites homoclines combinées apparaissent lorsque l'analyse linarisée admet plusieurs modes instables. Les solutions de l'équation NLS sont décrites par le spectre des opérateurs des paires de Lax. La présence du contenu des modes non linéaires est entièrement basée sur l'emplacement des valeurs propres périodiques. Les instabilités linéaires et les structures homoclines peuvent être identifiées en examinant le spectre pour trouver les points doubles complexes. Le nombre de points doubles complexes est exactement le même que le nombre de modes linéairement instables.

Dans les références [28, 29], ils ont montré que la dynamique d'une chaîne de Schrödinger non linéaire avec un potentiel électrique peut être intégrée. Le système a une évolution périodique dans un champ électrique statique. En général, ce système n'est pas intégrable, et lorsque le terme de potentiel est dépendant du temps, le système n'est plus conservatif. Dans [30], ils ont analysé le système avec un potentiel de la forme  $V_n = E(t)n$ , où  $E(t)$  est une fonction quelconque du temps. Ce potentiel correspond à un champ électrique dépendant du temps

et spatialement uniforme le long de la direction de la chaîne. Lorsque  $V = 0$  est le potentiel est de cette formule, on constate que cette équation est parfaitement intégrable.

## 4.1 Modèle:

Dans [21] ils ont montré que l'équation de chaîne NLS peut être dérivée d'une chaîne de pendule. Nous considérons une chaîne Frenkel-kontovie de  $N$  pendules ie: chaque pendule dans la chaîne réagis seulement avec les deux proche pendules. Nous dérivons l'équation d'amplitude pour la chaîne de pendule.

Pour  $n = 0$  (l'oscillateur centrale) nous avons:

$$i \frac{d\psi_0}{dt} + k^2(\psi_1 - 2\psi_0 + \psi_{-1}) - \psi_0 + 2|\psi_0|^2\psi_0 = 0.$$

Cette équation peut être combinée a cette équation valide pour tout  $n$ :

$$i \frac{d\psi_n}{dt} + k^2(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) - \psi_n + 2|\psi_n|^2\psi_n = 0. \quad (4.1)$$

Nous introduisons la variable spatiale  $x$  donc:

$$\psi_n = \psi(x_n) \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n + \Delta x,$$

où

$$(\Delta x)^2 = \frac{1}{k^2}.$$

Le développement de Taylor  $\psi(x_n)$  nous donne:

$$\psi_{n\pm 1} = \psi \pm \psi'(\Delta x) + \frac{1}{2!}\psi''(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}\psi'''(\Delta x)^3 + \dots$$

donc:

$$\psi_{n+1} + \psi_{n-1} = 2\psi_n + \psi''(\Delta x)^2 + \dots$$

négligeons  $(\Delta x)^3$  et les autres terme, nous aurons:

$$\psi_n'' \simeq (\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) / (\Delta x)^2 = k^2(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}).$$

On peut écrire l'équation (4.1) comme

$$i \frac{d\psi_n}{dt} + \frac{d^2\psi}{dx^2} - \psi + 2|\psi|^2\psi = 0.$$

Nous considérons l'équation:

$$i \frac{d}{d\tau} \psi_n = -k^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) - 2\psi_n |\psi_n|^2 + \psi_n, \quad (4.2)$$

où  $i = \sqrt{-1}$ ,  $\psi_n$  sont des variables complexes,  $n \in \mathbb{Z}$ ; sous conditions frontières périodiques,  $\psi_{n+N} = \psi_n$ .

## 4.2 Théorie spectrale

L'intégrabilité de l'équation de Schrödinger discrète DNLS est prouvée par l'utilisation des paires de Lax :

$$\varphi_{n+1} = L_n^{(z)} \phi_n, \quad (4.3)$$

$$\dot{\varphi}_n = B_n^{(z)} \phi_n, \quad (4.4)$$

où

$$L_n^{(z)} = \begin{pmatrix} z & \psi_n \\ r_n & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

et

$$B_n^{(z)} = \begin{pmatrix} i(\psi_{n-1} r_{n-1} + \frac{k^2}{2}(z^2 + \frac{1}{z^2}) - \frac{2k^2+1}{2}) & izk^2\psi_n - i\frac{k^2}{z}\psi_{n-1} \\ -i\frac{k^2}{z}r_n + ik^2zr_{n-1} & -i(\psi_n r_n + \frac{k^2}{2}(z^2 + \frac{1}{z^2}) - \frac{2k^2+1}{2}) \end{pmatrix}$$

tq:  $r_n = \psi_n^*$  et  $z = e^{i\lambda}$  et qui vérifie la représentation de Lax:

$$\dot{L}_n = B_{n+1} L_n - L_n B_n$$

de la fonction de Schrödinger discrète DNLS.

On a:

$$\dot{L}_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d}{d\tau} \psi_n \\ \frac{d}{d\tau} r_n & 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part:

$$B_{n+1}L_n - L_nB_n = 2i\psi_n^2 r_n + ik^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) - i\psi_n$$

alors:

$$\frac{d}{d\tau}\psi_n = 2i\psi_n^2 r_n + ik^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) - i\psi_n$$

$$i\frac{d}{d\tau}\psi_n = -2\psi_n^2 r_n - k^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) + \psi_n$$

et comme  $r_n = \psi_n^*$ :

$$i\frac{d}{d\tau}\psi_n = -k^2(\psi_{n+1} + \psi_{n-1} - 2\psi_n) - 2\psi_n|\psi_n|^2 + \psi_n.$$

La compatibilité du système surdéterminé donne la représentation lax:

$$\dot{L}_n = B_{n+1}L_n - L_nB_n,$$

de l'équation discrète NLS.

Le discriminant de Floquet est définie par:

$$\Delta(z, \psi) = \text{tr}M(N, z, \psi),$$

où  $M(N, z, \psi)$  est la matrice fondamentale de (4.3) voir [31].

En termes du discriminant de Floquet  $\Delta$ , on définit le spectre:

$$\sigma(L) = \{z \in \mathbb{C} / -2D \leq \Delta(z, \psi) \leq 2D\}.$$

1. Les points périodique :  $z^s$  sont définis par

$$\Delta(z^s; \psi) = 2D$$

et les points anti périodique sont définis par:

$$\Delta(z^s; \psi) = -2D$$

2. Un point critique  $z^c$  est défini par la condition

$$\frac{d\Delta}{dz}(z^c, \psi) = 0, \quad \frac{d^2\Delta}{dz^2}(z^c, \psi) \neq 0$$

La multiplicité algébrique de  $z^m$  est l'ordre du zéro de  $\Delta(z, \psi) \pm 2$ . Habituellement, il est 2, mais il peut dépasser 2. Quand il est égale à 2, nous appelons le point périodique et antipériodique: un point double, et nous le désignons par  $z^d$ .

### 4.2.1 Exemple du spectre de Floquet

Considérons la solution:

$$\psi_n = \psi_a, \forall n : \psi_a = a \exp(-i2(a^2 - 1)t)$$

et considérons

$$z = (\sqrt{\rho}) \cos \beta + \sqrt{\rho \cos^2 \beta - 1}, \quad \rho = 1 + a^2$$

Le discriminant de Floquet est donné par:

$$\Delta = 2D \cos(N(\beta))$$

où  $D = \rho^{N/2}$ .

Les points périodiques et antipériodiques sont donnés par:

$$2D \cos(N\beta) = \pm 2D$$

si

$$\cos(N\beta) = 1$$

alors

$$N\beta = m\pi$$

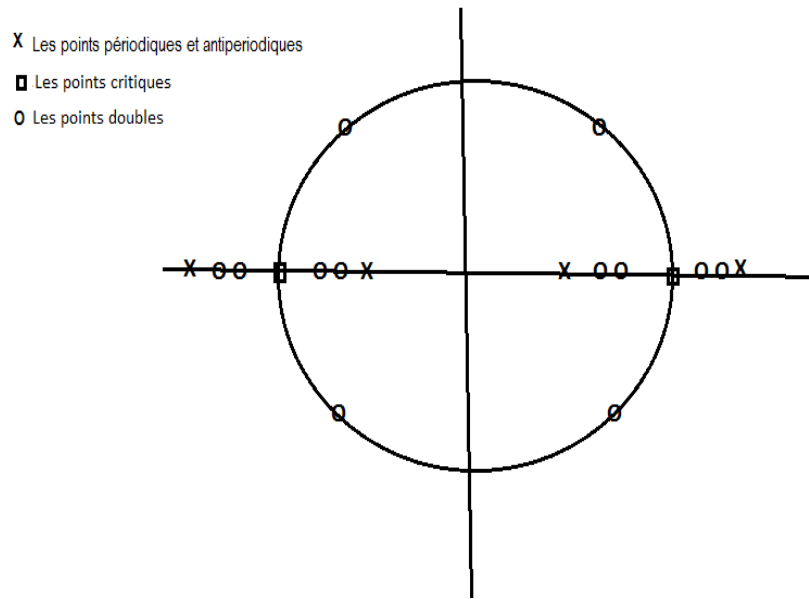
$$\beta = \frac{m}{N}\pi$$

$$z_m^s = \sqrt{\rho} \cos \frac{m}{N}\pi + \sqrt{\rho \cos^2 \frac{m}{N}\pi - 1}$$



Voir [36] pour savoir comment développer  $z$ .

1. Si  $N$  est impaire, tous les points périodiques et anti-périodiques sont sur l'axe réel pour un suffisant large  $|\psi_a|$ .
2. Si  $N$  est paire, sauf les points  $z = \pm i$ , tous les points périodiques et anti-périodiques sont sur l'axe réel pour un suffisant large  $|\psi_a|$ .



### Les points critiques:

La dérivation du discriminant de floquet par rapport à  $z$  est donnée par:

$$\frac{d\Delta}{dz} = 2ND \sin(N\beta) [z\sqrt{\rho} \sin \beta]^{-1} \sqrt{\rho \cos^2 \beta - 1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Delta}{dz^2} = & -2ND [2\sin^3(N\beta)]^{-1} [N \cos(N\beta) \sin \beta (\rho \cos^2 \beta - 1) \\ & + (1 - \rho) \cos \beta \sin(N\beta) + \sqrt{\rho} \sin(N\beta) \sin^2 \beta \sqrt{\rho \cos^2 \beta - 1}]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

pour

$$\frac{d\Delta}{dz} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2\Delta}{dz^2} \neq 0$$

Les points critiques sont donnés par:

$$\beta = \frac{m}{N}\pi \quad \beta \neq (0, \pi),$$

où

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{\rho}.$$

Les points doubles sont des points périodiques critiques.

### 4.2.2 Instabilité linéaire

Il convient d'étudier le modèle (4.2) et le point de départ pour développer la structure homocline est de trouver un point fixe approprié, dans ce cas le point fixe est donné par:

$$\psi_0(n, t) = ae^{-2i(a^2-1)t} \quad (4.6)$$

où  $a$  une constante complexe.

Nous vérifions la stabilité du point fixe en considérons une petite perturbation de la forme:

$$\psi(n, t) = \psi_0(n, t)(1 + \varepsilon_n(t)) \quad (4.7)$$

où  $0 < |\varepsilon| \leq 1$ ,

On substituons (4.7) dans (4.2) et prenant seulement les termes linéaire pour  $\varepsilon_n(t)$ :

$$\partial_t \varepsilon_n(t) = k^2(\varepsilon_{n+1}(t) + \varepsilon_{n-1}(t) - 2\varepsilon_n(t)) + 2i|a^2|(\varepsilon_n(t) + \varepsilon_n^*(t)) - \varepsilon_n(t). \quad (4.8)$$

On considérons  $\varepsilon_n(t)$  sous la forme

$$\varepsilon_n(t) = u_n + iv_n.$$

On trouve:

$$i(u_n + iv_n)' = ik^2((u_{n+1} + iv_{n+1}) + (u_{n-1} + iv_{n-1}) + 2(u_n + iv_n)) + 2i|a^2|(2u_n) - (u_n + iv_n).$$

Nous séparons l'équation en une partie imaginaire et une partie réelle:

$$\begin{cases} u'_n = k^2(v_{n+1} + v_{n-1} + 2v_n) - v_n, \\ -v'_n = k^2(u_{n+1} + u_{n-1} + 2u_n) + 4|a^2|u_n - u_n. \end{cases}$$

Nous considérons la modulation sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \exp(iQn + \Omega t), \quad (4.9)$$

où  $Q$  est le nombre d'onde et  $\Omega$  est la fréquence de la perturbation respectivement.

On obtient:

$$\begin{cases} \alpha\Omega = \beta[k^2(2\cos(Q) - 2) - 1], \\ -\beta\Omega = \alpha[k^2(2\cos(Q) - 2) + 4|a^2| - 1]. \end{cases}$$

Nous réécrivons ce système d'équations sous forme de matrice:

$$\begin{pmatrix} \Omega & k^2(2\cos(Q) - 2) - 1 \\ k^2(2\cos(Q) - 2) + 4|a^2| - 1 & -\Omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0,$$

d'où

$$\Omega^2 = [k^2(2\cos(Q) - 2) - 1] [k^2(2\cos(Q) - 2) + 4|a^2| - 1],$$

donc

$$\Omega = \pm \sqrt{\pm [k^2(2\cos(Q) - 2) - 1] [k^2(2\cos(Q) - 2) + 4|a^2| - 1]}$$

On pose

$$A = -k^2(4\sin^2(Q/2)) - 1, \quad B = 4|a|^2,$$

donc:

$$\Omega = \pm \sqrt{A(A + B)}$$

L'instabilité de la modulation apparaît donc lorsque :

$$4|a|^2 > k^2(4\sin^2(Q/2)) + 1, \quad \text{avec} \quad \cos(Q) > 0$$

Supposons:

$$\varepsilon(n, t) = \hat{\varepsilon}(t)e^{iQ_k n} + \hat{\varepsilon}(t)e^{-iQ_k n}, \quad Q_k = \frac{2\pi k}{L} \quad \text{et} \quad \hat{\varepsilon}(t) = \hat{\varepsilon}(0)e^{\Omega t} \quad (4.10)$$

où  $\Omega$  est le taux de croissance.

Le point fixe est hyperbolique lorsqu'on examine  $\Omega$ . En fonction de  $\Omega$  on vérifie si le point fixe est hyperbolique et le nombre de modes instables.

On pose:  $\hat{\varepsilon}_k = \varepsilon_0(iQ_k^2 - \Omega)$  donc :

$$\begin{aligned} \psi(n, t) &= ae^{-2i(a^2-1)t}(1 + \varepsilon(n, t)) \\ &= ae^{-2i(a^2-1)t}(1 + \varepsilon_0(iQ_k^2 - \Omega)(e^{iQ_k n} + e^{-iQ_k n})e^{\Omega t})\psi(n, 0) \\ &= ae^{-2i(a^2-1)t}(1 + \varepsilon_0(iQ_k^2 - \Omega)(e^{iQ_k n} + e^{-iQ_k n})) \end{aligned}$$

On obtient ainsi une condition initiale:

$$\psi(n, 0) = a + \varepsilon_0(Q_k^2 + i\Omega) \sin(Q_k n). \quad (4.11)$$

Lorsque (4.1) admet la symétrie  $(n, t) \rightarrow (n + n_0, t)$ , il est suffisant de considérer une condition initiale :

$$\psi(n, 0) = a + \varepsilon_0(Q_k^2 + i\Omega) \cos(Q_k n) \quad (4.12)$$

### 4.3 Résultats numériques

Les solutions DNLS sont caractérisées en termes de spectre de  $L_n^{(z)}$ . Il existe une correspondance entre le nombre de points doubles complexes, le nombre de modes instables de l'équation NLS linéarisée. Pour la solution de l'onde plane  $\psi(n, t)$ , calculée à  $t = 0$ , le système est résolu facilement.

Dans cette section sont présentés les résultats numériques obtenus à partir des solutions des équations du mouvement (4.1). Pour tous les ensembles de paramètres, nous intégrons les équations du mouvement (4.1) jusqu'à l'instant  $T = 40$ . Le nombre d'oscillateurs est de  $N = 64$  dans toutes les simulations.

Pour illustrer la solution numérique, nous traçons la surface  $|\psi(x, t)|^2$  et le "portrait de phase" de l'oscillateur central ( $n = 0, x_n = 0$ ) composé des variables:  $A(t) = |\psi(0, t)|^2 - 0.25$  et  $A_t = dA/dt$ .

Tous les graphes montreront les propriétés suivantes des oscillateurs : le plan  $(dA/dt, A)$  montre la projection de la trajectoire de l'oscillateur central dans l'espace des phases et les surfaces  $|\psi_n(t)|^2$  en fonction de  $t$  et  $n$ .

On considère la condition initiale

$$\psi(n, 0) = a + \varepsilon \cos(Qn),$$

où  $Q = 2\pi/L$ ,  $a = \frac{1}{2}$  et  $L = 2\pi\sqrt{2}$ .

Nous considérons trois possibilités pour ce type de données initiales, qui sont illustrées par:

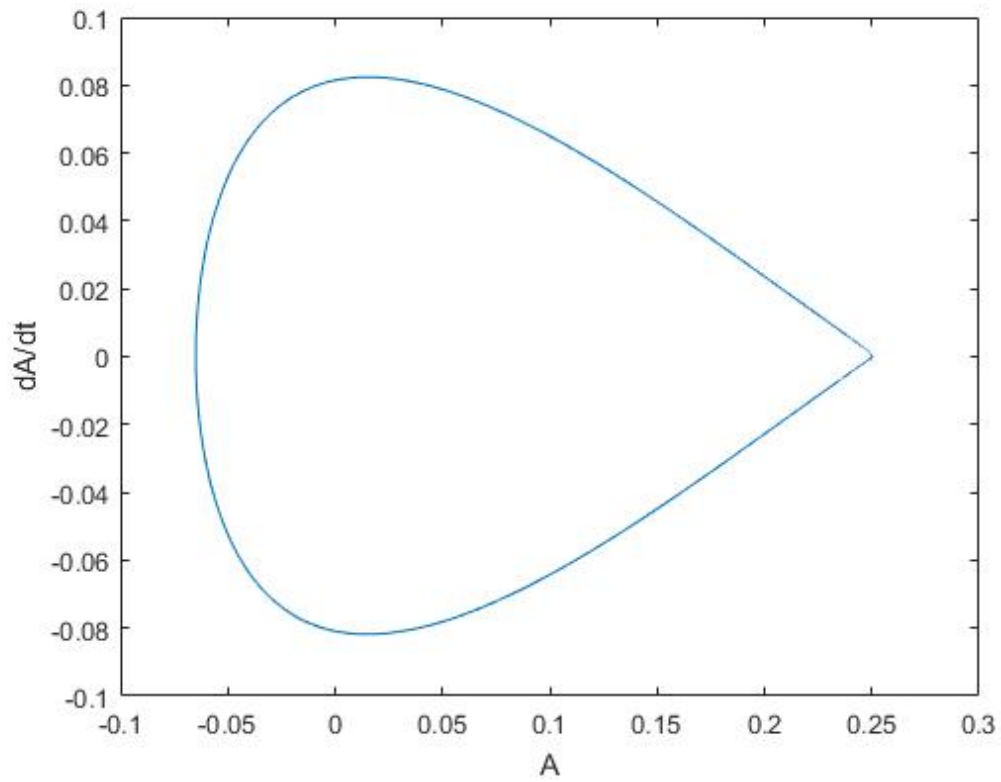
$$\begin{cases} \psi(n, 0) = \frac{1}{2} + (1+i)10^{-5}\cos Qn, \\ \psi(n, 0) = \frac{1}{2} + i0.1\cos Qn, \\ \psi(n, 0) = \frac{1}{2} + 0.1\cos Qn. \end{cases}$$

Dans les portraits de phase que nous considérons, l'espace de phase est formé par les deux variables suivantes:  $A(t)$  et  $A_t$  où  $A(t)$  représente la déviation de la norme d'amplitude par rapport à l'équilibre et  $(dA/dt, A)$  présente un comportement presque périodique.

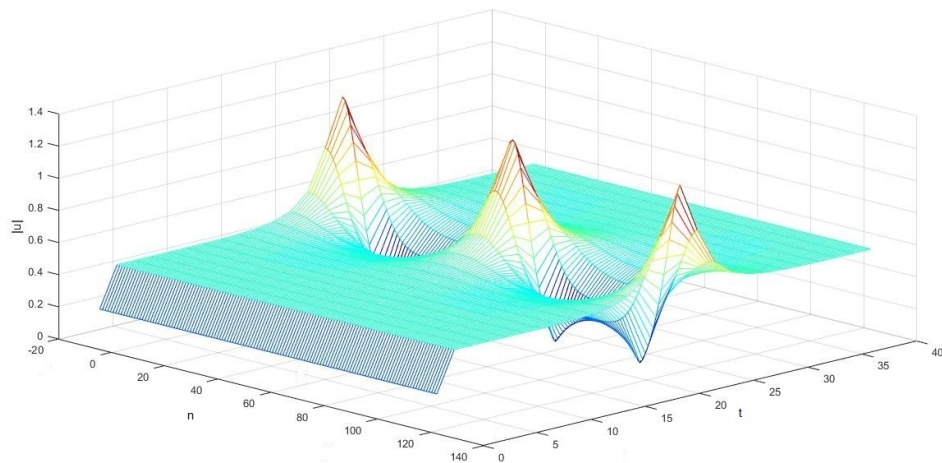
La figure (4.1a) montre la surface de l'orbite homocline associée à un point double complexe. L'orbite homocline est décrit par un mode unique qui est centré au milieu et la décroissance asymptotique de l'orbite d'homocline par rapport à l'onde plane est clairement visible.

La figure (4.1b) est le portrait de phase du lobe droit d'un séparateur.

Nous considérons les deux cas Figure (4.2) et Figure (4.3) comme "à l'intérieur" et "à l'extérieur" de l'orbite homocline.

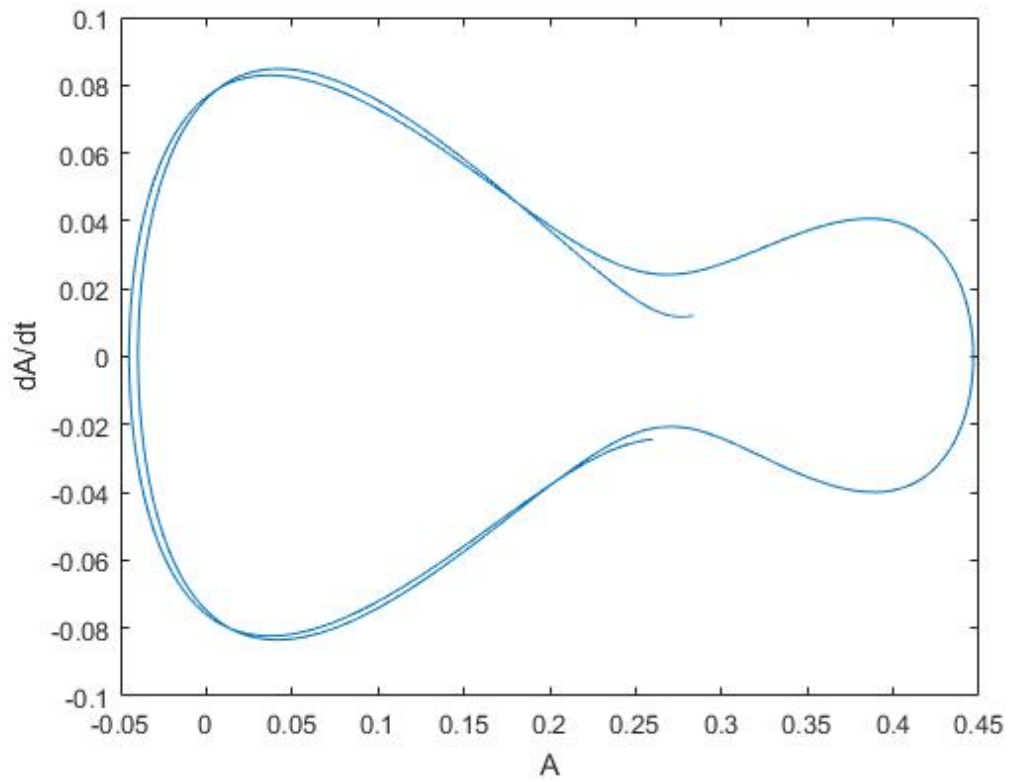


(a)

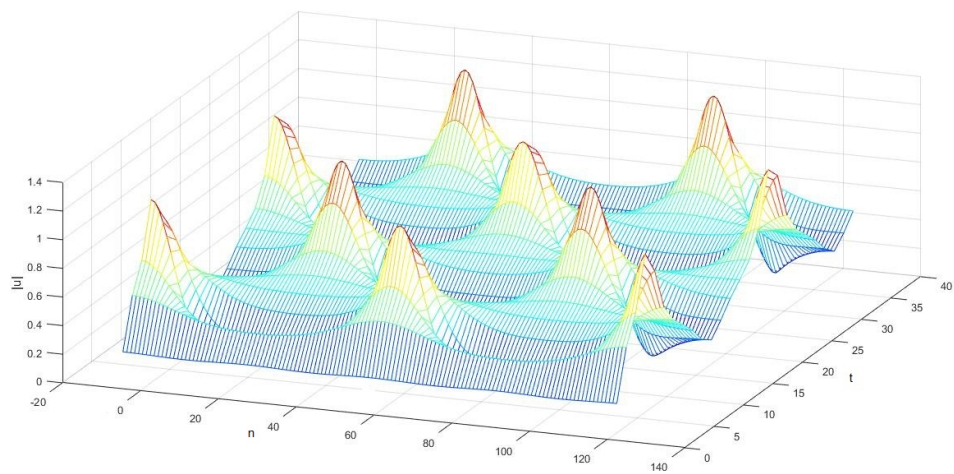


(b)

Figure 4.1: Solution homocline pour le modèle (4.1) pour  $0 \leq t \leq 40$  avec la condition initiale :  $\psi(n, 0) = \frac{1}{2} + (1+i)10^{-5}(\cos Qn)$ , a) la surface  $\psi(n, t)$ . b) portrait de phase.

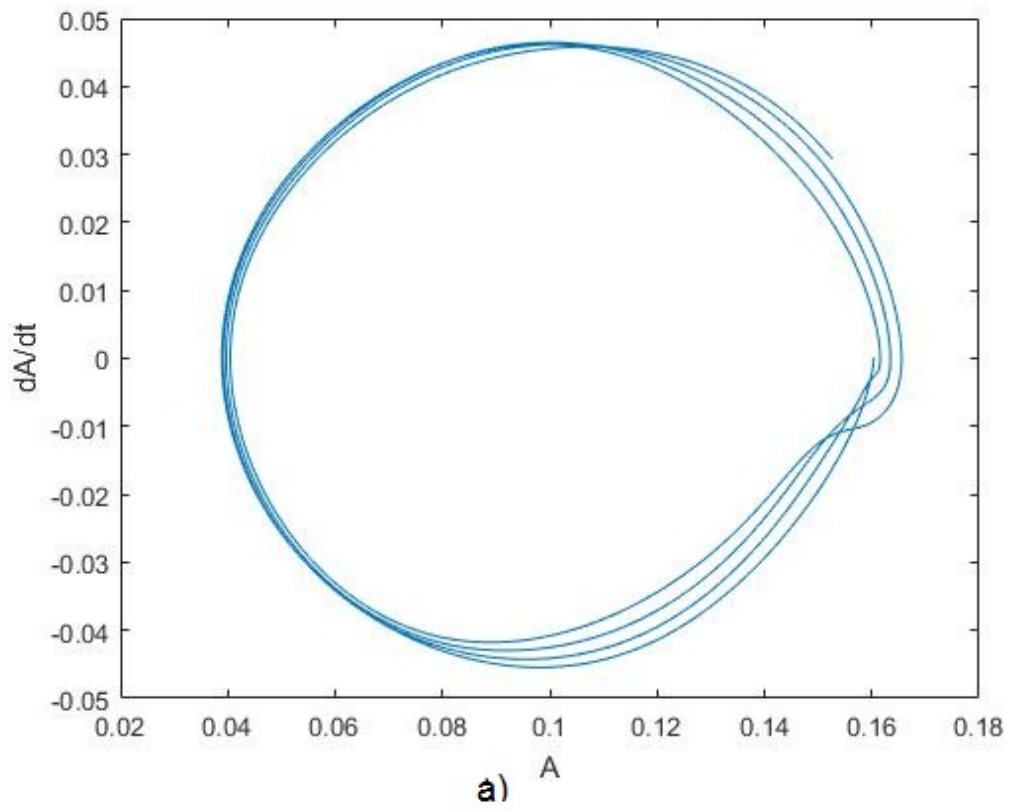


(a)

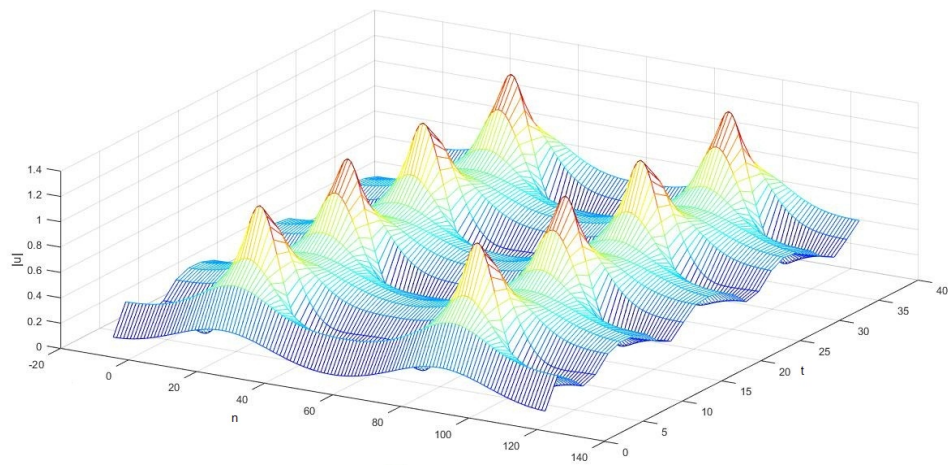


(b)

Figure 4.2: La solution pour  $0 \leq t \leq 40$  avec la condition initiale  $\psi(n, 0) = \frac{1}{2} + (i)0.1(\cos Qn)$ , a) le portrait de phase, b) la surface.



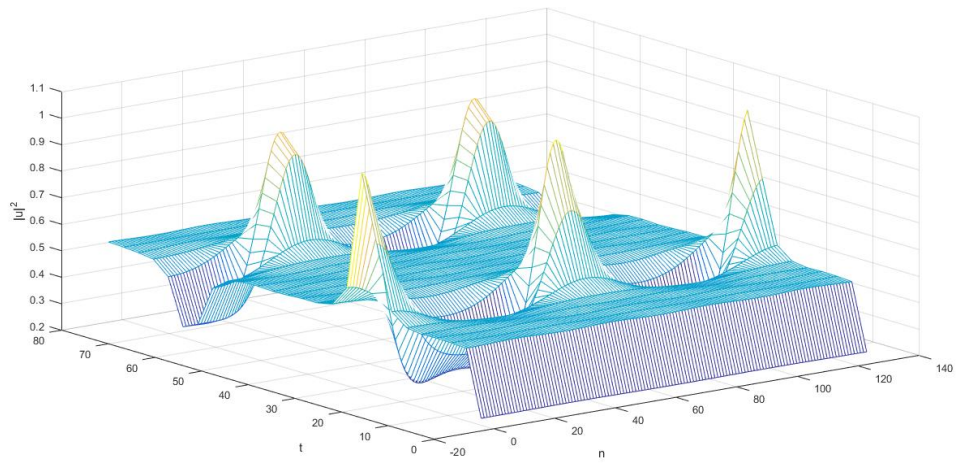
(a)



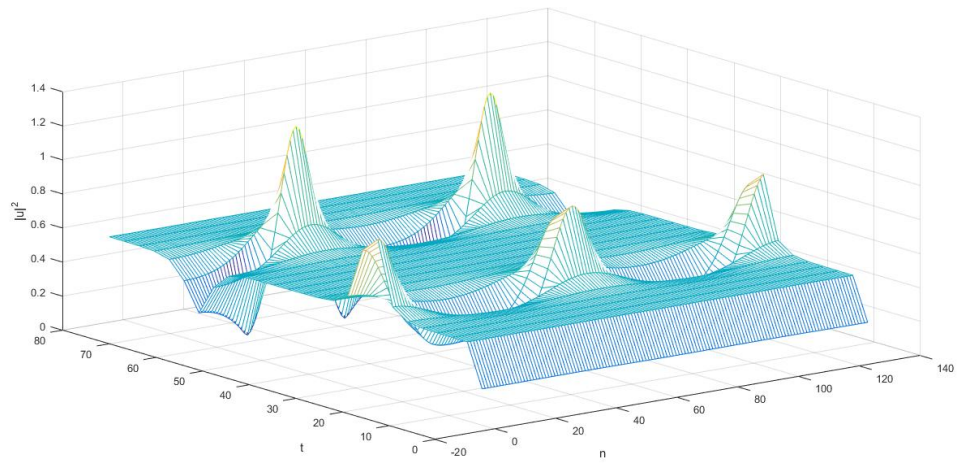
(b)

Figure 4.3: La solution pour  $0 \leq t \leq 40$  avec la condition initiale  $\psi(n, 0) = \frac{1}{2} + 0.1(\cos Qn)$ , a) le portrait de phase, b) la surface.



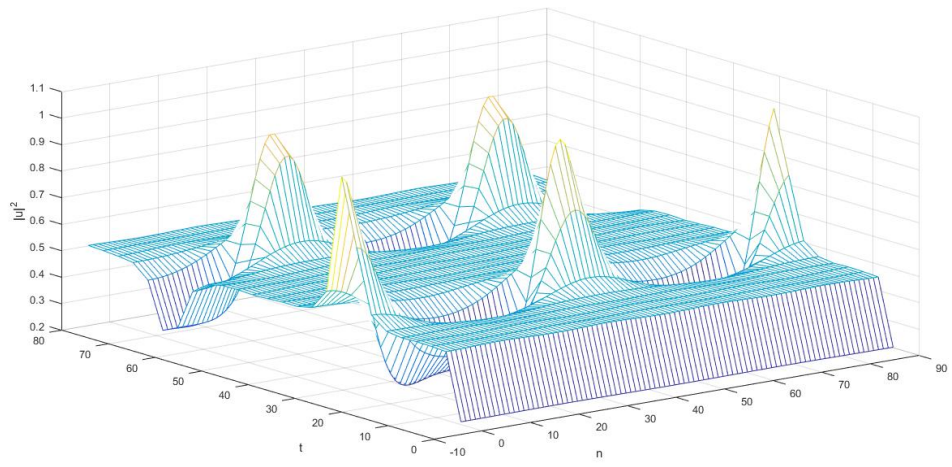


(a)

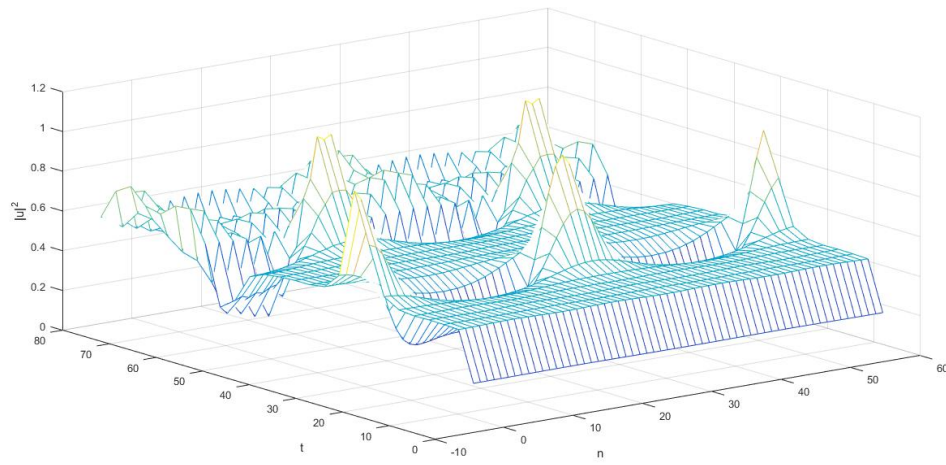


(b)

Figure 4.4: L'orbite homocline combinée, a)  $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0,001$ , b)  $\epsilon_1 = 0,001, \epsilon_3 = 0,0001$



(a)



(b)

Figure 4.5: L'orbite homocline combinée, a)  $N = 90$ , b)  $N = 60$ .

Une bonne condition initiale pour le calcul de l'orbite homocline combinée est obtenue. La figure 4.4 montre l'orbite homocline combinée sous forme numérique. Nous résolvons 4.1 numériquement en utilisant:

$$\psi(n, 0) = a(1 + 4i\epsilon_1 \sin\phi_1 \exp i\phi_1 \cos(p_1 n) + 4i\epsilon_3 \sin\phi_3 \exp i\phi_3 \cos(p_3 n))$$

en tant que condition initiale avec  $L = 2\sqrt{2}\pi$ ,  $a = 1/2$ ,  $p_3 = 2p_1 = 2\pi/L$ , et la valeur de  $\phi_j$  donnée par  $p_j = 2a \sin(\phi_j)$ .

Dans la figure (4.4a), nous prenons  $\epsilon_1 = \epsilon_3 = 0,001$ , et pour la figure (4.4b), nous prenons  $\epsilon_1 = 0,001$ ,  $\epsilon_3 = 0,0001$ .

On remarque ici que le changement des conditions initiales modifie la hauteur entre les modes.

Dans la figure 4.5(a) où nous utilisons les mêmes valeurs de paramètres que dans la figure 4.4(a), mais en résolvant le problème 4.1 avec  $N = 90$ . Si le niveau de discrétisation est raffiné à  $N = 60$ , toute irrégularité disparaît sur l'intervalle de temps en question (jusqu'à 80), comme le montre la figure 4.5(b). En fait, l'irrégularité disparaît assez brusquement lorsque  $N$  passe de 60 à 90.

## Chapitre 5

# Équation de Schrödinger non linéaire discret cubique CDNLS

Dans ce chapitre, nous discutons l'approche de l'application de la dimension deux pour obtenir des solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger cubique non linéaire discrète unidimensionnelle (CDNLS). Nous utilisons le changement de variable pour obtenir un système de dimension deux. Nous discuterons des différents types d'orbites qui peuvent être générées (points fixes, états stationnaires périodiques, quasi-périodiques et spatialement chaotiques).

## 5.1 Approche de l'application de dimension 2

Dans ce chapitre, nous étudions les solutions stationnaires dans le contexte d'une équation de Schrödinger non linéaire discrète (DNLS). Nous discutons l'approche de l'application en dimension 2 qui est établie pour les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger non linéaire discrète de dimension 1. La méthode repose sur la résolution du problème stationnaire résultant sous la forme d'une relation de récurrence qui peut être transformée en une application bidimensionnelle (2D). Dans cette description, toute orbite pour cette application bidimensionnelle correspond à une solution stationnaire de l'équation DNLS originale. L'approche par application est extrêmement utile pour trouver des solutions localisées telles que les solitons brillants et sombres. Comme nous le verrons dans ce qui suit, cette méthode permet une compréhension globale des types de solutions présentes dans le système et de leurs bifurcations respectives. Notre étude se déroule dans un espace à une et deux dimensions.

### 5.1.1 Propriétés d'orbites

Maintenant que nous avons établi l'équivalence entre un état stationnaire DNLS et les orbites de l'application de dimension 2, nous allons discuter des différents types d'orbites qui peuvent être générées en utilisant l'approche de l'application de dimension 2, de leurs bifurcations et de certaines de leurs propriétés de base.

### 5.1.2 Propriétés des états stationnaires

Toutes les symétries et propriétés inhérentes à l'application de la dimension 2 génèrent des symétries et propriétés pour les solutions stationnaires de la DNLS. Par exemple: en particulier, pour la DNLS cubique (voir équation 5.1, nous avons les symétries et propriétés suivantes :

1. L'application inverse  $M^{-1} : M^{-1}(u_n, v_n)^T = (u_{n-1}, v_{n-1})^T$  est identique à  $M$  après l'échange de  $u \leftrightarrow v$ . Par conséquent, toute orbite directe de l'application de dimension 2 aura une orbite symétrique arrière qui est symétrique par rapport à la ligne d'identité.
2. L'application de dimension 2 est une zone de préservation et par conséquent, les solutions stationnaires de DNLS ont les propriétés suivantes :
  - (a) Les centres linéaires de l'application de dimension 2 sont également des centres non linéaires et il y aura donc des orbites périodiques et quasi-périodiques autour de points fixes neutres (linéairement) stables. Ces orbites de l'application en dimension 2 correspondent, respectivement, à des solutions stationnaires spatialement périodiques et quasi-périodiques de la DNLS.
  - (b) Les points fixes selle de l'application bidimensionnelle auront une variété stable et instable avec les mêmes vitesses de convergence exponentielle. Ainsi, les solutions localisées de l'état stationnaire de la DNLS auront des queues symétriques lorsque  $n \rightarrow \pm\infty$ .

### 5.1.3 États stationnaires homogènes, périodiques, modulés et spatialement chaotiques

Dans cette section, nous nous concentrons sur la description des états stationnaires spatialement étendus (c'est-à-dire non localisés dans l'espace). Celles-ci correspondent aux points stationnaires, orbites périodiques, orbites quasi-périodiques et orbites chaotiques de l'application de dimension 2 de  $M$ .

## États stationnaires homogènes

L'orbite la plus simple qui peut être décrite par l'approche de l'application de dimension 2 est un point fixe. Supposons que  $P^* = (u^*, v^*)^T$  est un point fixe de  $M$ , à savoir  $M(P^*) = P^*$ . Cette orbite triviale génère la solution stationnaire homogène  $u_n = u^*$ . Notons que, par construction, tous les points fixes de  $M$  doivent satisfaire  $u^* = v^*$ . Dans le cas d'un point fixe de l'application de dimension 2 correspond à une solution homogène spatiale

$$\psi_n(t) = u^* e^{ikt}.$$

## États stationnaires périodiques

Considérons maintenant une orbite périodique de l'application 2D. Supposons que  $\{P_0, P_1, \dots, P_{p-1}\}$  est une orbite de période  $p$  de  $M$  (c'est-à-dire,  $M(P_{p-1}) = P_0$ ). Cette orbite périodique pour  $M$  génère une solution spatiale périodique en état stationnaire pour le DNLS. En général, une orbite  $p$ -période de l'application de dimension 2 génère un état stationnaire spatialement périodique avec une longueur d'onde spatiale (période) de  $p$ .

## États stationnaires quasi-périodiques

Une solution stationnaire intéressante est générée lorsqu'on considère les solutions quasi-périodiques de l'application de dimension 2. Cette application présente une famille infinie de solutions quasi périodiques tournant autour de l'origine. Ces orbites de l'application de dimension 2 correspondent à des ondes modulées à l'état stationnaire autour du point fixe (dans ce cas l'origine) pour le DNLS. La périodicité spatiale de ces ondes modulées est approximativement déterminée par l'argument des valeurs propres du jacobien au point fixe.

## Etats stationnaires spatialement chaotiques

Comme dernier exemple d'état stationnaire non localisé, considérons le niveau de complexité suivant pour une orbite 2D: une orbite chaotique. Les orbites

chaotiques seront fréquentes dans les applications non linéaires. Pour le cas considéré, l'application de dimension 2 induite par le DNLS devient chaotique proche de la séparatrice entre des orbites périodiques supérieures. Une telle orbite chaotique génère naturellement une solution stationnaire. Il est important de mentionner que, typiquement, ces orbites chaotiques présentent une "adhérence" à proximité de la séparatrice et restent donc proches d'une orbite périodique pendant un certain temps. Cependant, l'orbite chaotique est finalement expulsée (à la fois en avant et en arrière temps) donc l'état stationnaire devient illimité à  $n \rightarrow \pm\infty$ .

## 5.2 Équation cubique CDNLS

### 5.2.1 Approche de l'application de dimension deux pour l'équation cubique CDNLS

Nous choisissons l'équation cubique de DNLS de dimension un sous la forme :

$$i\dot{\psi}_n = -(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1}) + 1/3|\psi_n|^2\psi_n. \quad (5.1)$$

On peut montrer que toute solution stationnaire de l'équation (5.1) doit être obtenu en séparant l'espace et le temps comme  $\psi_n = \exp(ikt)u_n$  où  $k$  est la fréquence de la solution, qui donne une équation pour les amplitudes réelles  $u_n$ :

$$ku_n = u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1} - 1/3u_n^3. \quad (5.2)$$

L'équation d'état stationnaire décrite peut être réécrit comme la relation récurrente suivant:

$$u_{n+1} = R(u_n, u_{n-1}) = (k+2)u_n - u_{n-1} + 1/3u_n^3.$$

On pose  $v_{n+1} = u_n$ , donc le nouveau système est:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= R(u_n, v_n) \\ v_{n+1} &= u_n \end{cases} \quad (5.3)$$

qui est à son tour peut être exprimé comme une application 2D.



## 5.2.2 Points fixes

L'orbite la plus simple qui peut être décrite par l'approche de l'application 2D est un point fixe. Il suffit de résoudre le système suivant:

$$\begin{cases} u_{n+1} &= R(u_n, v_n, k) \\ v_{n+1} &= u_n \end{cases} \quad (5.4)$$

L'équation ponctuelle de l'application 2D possède trois points fixes  $u^* = \{0, \pm\sqrt{-3k}\}$ , qui correspondent à leur tour aux deux solutions homogènes  $\psi_n(t) = 0$  et  $\psi_n(t) = \sqrt{-3k}e^{ikt}$ .

On fait la remarque que la stabilité des solutions d'équation pour les amplitudes réelles  $u_n$  ne donne aucune information sur la stabilité des solutions stationnaires du CDNLS.

## 5.2.3 États stationnaires quasi-périodiques

L'origine est un centre non linéaire (c'est à dire instable par rapport l'espace) pour  $-4 < k < 0$ . Autour de ce point central, l'application 2D présente une famille infinie de solutions quasi périodiques tournant autour de l'origine. Ces orbites correspondent à des ondes modulées à l'état stationnaire autour du point fixe (dans ce cas l'origine) pour le CDNLS. La périodicité spatiale de ces ondes modulées est approximativement déterminée par l'argument des valeurs propres du jacobien au point fixe.

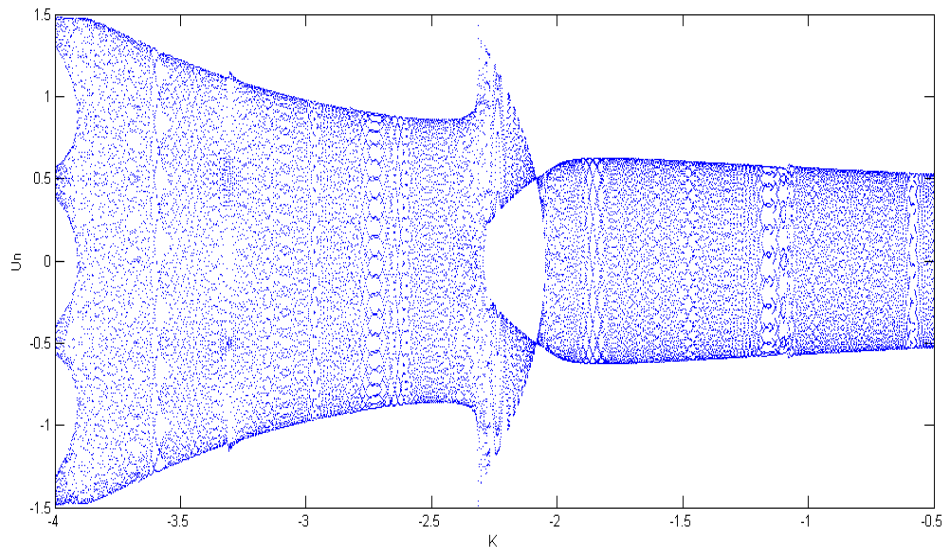


Figure 5.1: Diagramme de bifurcation de l'équation DNLS pour paramètre  $k \in [-4, -0.5]$

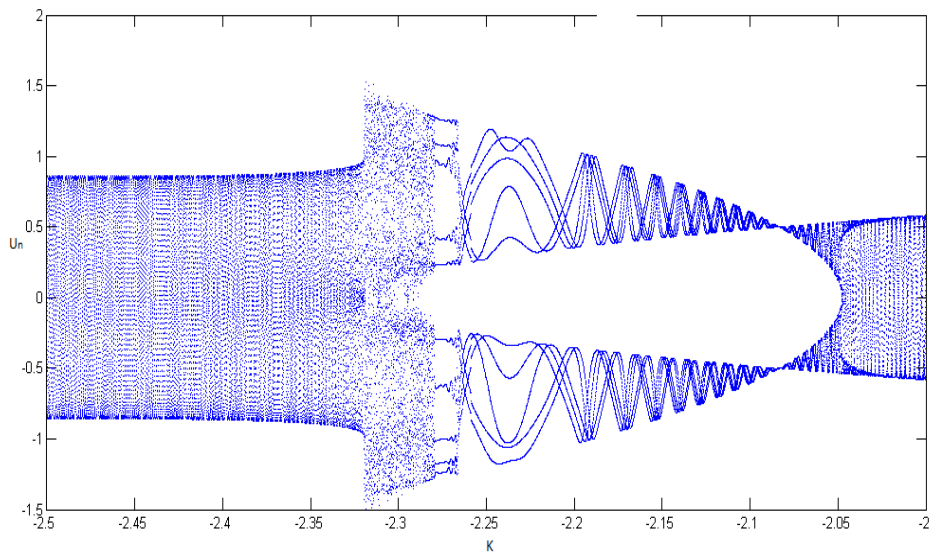


Figure 5.2: Diagramme de bifurcation de l'équation DNLS pour paramètre  $k \in [-2.5, -2]$

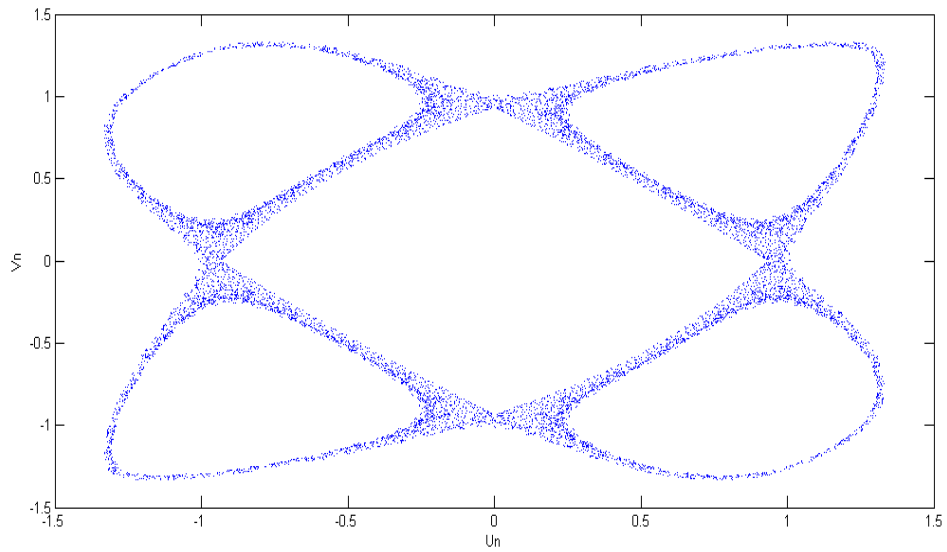


Figure 5.3: Pour  $k=-2.29$ , orbites périodiques dans un stade de billard (stadium billard) est présentée.

#### 5.2.4 États stationnaires spatialement chaotiques

Les orbites chaotiques seront fréquentes dans l'application non linéaire. Pour le cas considéré, l'application 2D induite par le CDNLS devient chaotique près du séparateur entre les orbites périodiques supérieures. Dans la figure (5.2) nous représentons une telle région chaotique ( $k \in [-2.32, -2.28]$ ).

### 5.3 Solutions spatialement localisées

Les orbites homoclines et hétéroclines de l'application 2D correspondent respectivement, aux solitons brillants et sombres du DNLS.

#### Orbites homoclines

En général, l'approche de l'application 2D établit non seulement l'existence de solutions soliton brillantes (ainsi que des solutions solitons sombres), mais détermine aussi leur taux de décroissance. Plus précisément, les valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  ( $\lambda_- <$

$1 < \lambda_+$ ) pour le point fixe selle supportant l'orbite homocline (l'origine dans le cas considéré) déterminent la décroissance exponentielle  $\lambda_-^{|n|} = \lambda_+^{-|n|}$  pour  $n \rightarrow \mp\infty$  où  $\lambda_- = \lambda_+^{-1}$ . Dans notre cas, les valeurs propres à l'origine sont donné par  $2\lambda_{\mp} = k + 2 \mp \sqrt{k(k+4)}$ .

# CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, on a présenté quelques modèles des équations de Schrodinger non linéaire discret et examiner certaines caractéristiques des chaînes homogène d'oscillateurs. L'existence de solutions de solitons brillants a été étudiée pour une équation de Schrodinger discrète avec interaction à court terme par l'approche des systèmes réversible et non pas par la méthode variationnelle ou la méthode anti-intégrabilité. De plus on considère une chaîne d'oscillateurs non linéaire a interaction a longue portée pilotée par des puissances fractionnaire qui est une généralisation du dernier DNLS grace a la methode des systèmes réversibles de sorte que nous avons pu prouver les résultats sans supposer des petites perturbations.

Notre but est d'examiner certaines caractéristiques d'une chaîne homogène d'oscillateurs NLS, constituée d'une chaîne de pendules réduite à une chaîne de Schrodinger non linéaire. Le chaos est souvent lié aux orbites homoclines dans la dynamique de détermination non linéaire. Nous donnons les résultats de l'analyse d'une étude de stabilité linéaire de la solution de l'équation NLS. Les orbites homoclines combinées apparaissent lorsque l'analyse linéarisée admet plusieurs modes instables. Les solutions de l'équation NLS sont décrites par le spectre des opérateurs des paires de Lax. La présence du contenu des modes non linéaires est entièrement basée sur l'emplacement des valeurs propres périodiques. Les instabilités linéaires et les structures homoclines peuvent être identifiées en examinant le spectre pour trouver les points doubles complexes. Le nombre de points doubles complexes est exactement le même que le nombre de modes linéairement instables.

Nous discutons l'approche de l'application de dimension 2 pour l'obtention des solutions stationnaires dans l'équation unidimensionnelle non linéaire discret cubique de Schrodinger (CDNLS). On utilise le changement de variable pour obtenir un système de dimension deux. Nous allons discuter des différents types d'orbites qui peuvent être générés (points fixes, états stationnaire périodique, quasi-périodique et états stationnaire spatialement chaotiques).



# PERSPECTIVES

Récemment, les équations DNLS à coefficients périodiques ont été abordées dans la littérature physique. De plus, des résultats sur la simulation numérique de solitons discrets à trous dans une équation DNLS périodique particulière sont obtenus. Ils font appel à une technique d'approximation périodique et à une approche généralisée du type manifold de Nehari pour l'existence de solitons dans des équations de Schrödinger non linéaires périodiques discrètes avec une non-linéarité cubique. Pour des travaux futurs on va aborder l'existence des solutions homoclines pour une classe d'équations aux différences périodiques avec non linéarité saturable. Elle donne lieu à un opérateur de Helmholtz et plus générale à un opérateur de Jacobi, cela en utilisant la méthode des systèmes réversibles.

# Bibliographie

- [1] S. Aubry, *Anti-integrability in dynamical and variational problems*, Physica D: Nonlinear Phenomena 86.1-2 (1995), 284-296.
- [2] D. Cai , A. R. Bishop, N. Grønbech-Jensen, *Localized states in discrete nonlinear Schrödinger equations*, Physical review letters 72.5 (1994), 591.
- [3] D. Cai, A. R Bishop, N. Grønbech-Jensen, M. Salerno, *Electric-field-induced nonlinear Bloch oscillations and dynamical localization*, Physical review letters 74.7 (1995), 1186.
- [4] Ó. Ciaurri, C. Lizama, L. Roncal, J. L. Varona, *On a connection between the discrete fractional Laplacian and superdiffusion* Applied Mathematics Letters 49 (2015), 119-125.
- [5] O. Ciaurri, L. Roncal, P.R. Stinga, J.L. Torrea, J. L. Varonaa, *Nonlocal discrete diffusion equations and the fractional discrete Laplacian, regularity and applications*, Advances in Mathematics 330 (2018), 688-738.
- [6] R. L. Devaney, *Homoclinic bifurcations and the area-conserving Hénon mapping*, Journal of differential equations 51.2 (1984), 254-266.
- [7] H. R. Dullin, J. D. Meiss, *Generalized Hénon maps: the cubic diffeomorphisms of the plane*, Physica D: Nonlinear Phenomena 143.1-4 (2000), 262-289.



- [8] C. S. Goodrich, *On positive solutions to nonlocal fractional and integer-order difference equations*, *Applicable Analysis and Discrete Mathematics* (2011), 122-132.
- [9] D. Hennig, K. Ø. Rasmussen, H. Gabriel, A. Bülow, *Solitonlike solutions of the generalized discrete nonlinear Schrödinger equation*, *Physical Review E* 54.5 (1996), 5788.
- [10] M. Jenkinson, M. I. Weinstein, *Discrete solitary waves in systems with nonlocal interactions and the Peierls–Nabarro barrier*, *Communications in Mathematical Physics* 351.1 (2017), 45-94.
- [11] J. S. W. Lamb, J. A. G. Roberts, *Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey*, *Physica-Section D* 112.1 (1998), 1-39.
- [12] R. S. MacKay, *Discrete breathers: classical and quantum*, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* 288.1-4 (2000), 174-198.
- [13] M. I. Molina, *The fractional discrete nonlinear Schrödinger equation*, *Physics Letters A* 384.8 (2020), 126180.
- [14] A. Pankov, N. Zakharchenko, *On some discrete variational problems*, *Acta Applicandae Mathematica* 65.1 (2001), 295-303.
- [15] W. X. Qin, X. Xiao, *Homoclinic orbits and localized solutions in nonlinear Schrödinger lattices*, *Nonlinearity* 20.10 (2007), 2305.
- [16] V. E. Tarasov, G. M. Zaslavsky, *Fractional dynamics of systems with long-range interaction*, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 11.8 (2006), 885-898.

- [17] M. I. Weinstein, *Excitation thresholds for nonlinear localized modes on lattices*, Nonlinearity 12.3 (1999), 673.
- [18] M. Xiang, B. Zhang, *Homoclinic solutions for fractional discrete Laplacian equations*, Nonlinear Analysis 198 (2020), 111886.
- [19] J. L. Pac, *Systèmes dynamiques-2e ed: Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2016.
- [20] A. Sinatra, *Introduction à la mécanique quantique*,(2008)
- [21] M. William, L. Robinson, *Solitons, spatiotemporal chaos and synchronization in arrays of damped driven non linear oscillators*, Department of Mathematics and Applied Mathematics University of Cape Town, (2008) pp[17-19].
- [22] R. L. Devaney. *Reversible diffeomorphisms and flows*. *Transactions of the American Mathematical Society*, 218, (1976), 89-113.
- [23] N. V. Alexeeva, I. V. Barashenkov, and D. E. Pelinovsky. *Dynamics of the parametrically driven NLS solitons beyond the onset of the oscillatory instability*. Nonlinearity 12.1 (1999): 103.
- [24] N. V. Alexeeva, I. V. Barashenkov, and G. P. Tsironis. *Taming spatiotemporal chaos by impurities in the parametrically driven damped nonlinear Schrödinger equation*. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics* 8.sup1 (2001): 5-12.
- [25] N. V. Alexeeva, I. V. Barashenkov, and G. P. Tsironis. *Impurity-induced stabilization of solitons in arrays of parametrically driven nonlinear oscillators*. *Physical review letters* 84.14 (2000): 3053.

- [26] M. J. Ablowitz, and B. M. Herbst. *On homoclinic structure and numerically induced chaos for the nonlinear Schrödinger equation*. SIAM Journal on Applied Mathematics 50.2 (1990): 339-351.
- [27] M. J. Ablowitz, and M. S. Constance, *Homoclinic manifolds and numerical chaos in the nonlinear Schrödinger equation*. Mathematics and computers in simulation 37.4-5 (1994): 249-264.
- [28] V. V. Konotop, O. A. Chubykalo, and L. Vázquez. *Dynamics and interaction of solitons on an integrable inhomogeneous lattice*. Physical Review E 48.1 (1993): 563.
- [29] C. David, et al. *Electric-field-induced nonlinear Bloch oscillations and dynamical localization*. Physical review letters 74.7 (1995): 1186.
- [30] M. J. Ablowitz, et al *Discrete and continuous nonlinear Schrödinger systems.*, Vol. 302. Cambridge University Press, 2004.
- [31] C. Li, A. Yurov, *Lie-Bäcklund-Darboux Transformations*. Somerville, Mass.: International Press.(2014)
- [32] C. S. West, and T. A. B. Kennedy. *Optical multiwave mixing: Dark solitary wave trains and quasiperiodic dynamics* . Physical Review A 47.2 (1993): 1252.
- [33] G. P. Kevrekidis, *The discrete nonlinear Schrödinger equation : mathematical analysis, numerical computations and physical perspectives*. Vol. 232. Springer Science and Business Media, 2009.
- [34] A.Mehazzem, M. S. Abdelouahab, K. Haouam, *Homoclinic Orbits and Localized Solutions in Discrete Nonlinear Schrodinger Equation with*

- Long-Range Interaction*. International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, 13(1) (2022), 353-363
- [35] M. Syafwan, *the existence and stability of solitons in discrete non linear Schrodinger equation*, Doctoral dissertation, uninersity of Nottingham, 2012
- [36] Y. C. Li, *Homoclinic tubes in discrete nonlinear Schrödinger equation under Hamiltonian perturbations*. Nonlinear Dynamics 31.4 (2003): 393-434.
- [37] Th. Holstein, *"Studies of polaron motion: Part I. The molecular-crystal model."* Annals of physics 8.3 (1959): 325-342.
- [38] A. S. Davydov and A. A. Serikov. *"Energy transfer between impurity molecules of a crystal in the presence of relaxation."* physica status solidi (b) 51.1 (1972): 57-68.
- [39] D. N. Christodoulides and R. I. Joseph. *"Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides."* Optics letters 13.9 (1988): 794-796.
- [40] A. Trombettoni and A. Smerzi. *"Discrete solitons and breathers with dilute Bose-Einstein condensates."* Physical Review Letters 86.11 (2001): 2353.
- [41] M. J. Ablowitz and J. F. Ladik. *"Nonlinear differential–difference equations and Fourier analysis."* Journal of Mathematical Physics 17.6 (1976): 1011-1018.
- [42] M. Salerno. *"Quantum deformations of the discrete nonlinear Schrödinger equation."* Physical Review A 46.11 (1992): 6856.

- [43] B.Y. Nikolaevich, and V. Aleksandrovich Pliss. "*The existence of invariant tori in the neighborhood of the zero solution of a system of ordinary differential equations.*" *Differentsial'nye Uravneniya* 3.11 (1967): 1864-1881.
- [44] E. Zeraoulia, and J. C. Sprott. "*A Two-dimensional Discrete Mapping with  $C^\infty$  Multifold Chaotic Attractors.*" *Electronic journal of theoretical physics*, 2008, vol. 5, no 17, p. 111-124.
- [45] B, Djoual, and K. Berehal. *Dynamique d'une équation de Schrödinger non linéaire*. Diss. Abdelhafid boussouf university Center mila, 2020.

## الخلاصة :

الهدف من هذه الأطروحة هو تقديم بعض نماذج معادلات شرودنغر المتقطعة غير الخطية باستخدام طريقة الأنظمة العكسية والطريقة الطيفية وأخيراً طريقة التطبيق دو البعد الثاني وذلك باستخدام نظرية الأنظمة الديناميكية. نناقش معادلة شرودنغر غير الخطية المتقطعة ، اعتماداً على الشروط الابتدائية ، ونفحص بعض خصائص سلسلة متجانسة من المذبذبات. نناقش وجود الهياكل الهموكلنية المتجانسة لمعادلة شرودنغر غير الخطية المتقطعة.

**كلمات مفتاحية:** معادلة شرودنغر المتقطعة غير الخطية، المدار الهموكلينيكي ، المدار الايطيروكلينيكي ، الانظمة العكسية ، التجاذب على المدى البعيد

# Résumé:

L'objectif de cette thèse est de présenter quelques modèles des équations de Schrödinger non linéaire discret en utilisant la méthode des systèmes réversible, la méthode spectrale et enfin l'approche de l'application de dimension deux, cela en utilisant la théorie des systèmes dynamiques. Nous discutons l'équation de Schrödinger non linéaire discret, en fonction des données initiales, et examiner certaines caractéristiques d'une chaîne homogène d'oscillateurs. Nous discutons l'existence des structures homocline d'une équation de Schrödinger non linéaire discret.

**Mots clés:** Equation de Schrödinger non linéaire discret, système réversible, orbite Homocline, orbite Hétérocline, interaction a longue terme.

# Abstract:

The objective of this thesis is to present some models of the discrete nonlinear Schrödinger equations using the method of reversible systems, the spectral method and finally the approach of the application of dimension two, this using the theory of dynamical systems. We discuss the discrete nonlinear Schrödinger equation, depending on the initial data, and examine some characteristics of a homogeneous chain of oscillators. We discuss the existence of homoclinic structures of a discrete nonlinear Schrödinger equation.

**Key words:** Discrete nonlinear Schrödinger equation, reversible system, Homoclinic orbit, Heteroclinic orbit, long range interaction.