

Université de Tébessa



Faculté des Sciences Exactes
et Sciences de la Nature et de la Vie

Département des mathématiques et informatique

Mémoire
Présenté en vue de l'obtention du diplôme de MASTER

Filière : (Mathématiques/Informatique)

Option : EDP et Appliquées

Par

-Harir Yasmina

-Mecheri Hanane

La coexistence de la synchronisation généralisée et
la synchronisation généralisée inverse entre deux
systèmes chaotiques et hyper chaotiques

Date de soutenance : 19/06/2021

Devant le jury

<i>-Mr. HANNACHI Fareh</i>	<i>MCA</i>	<i>Université de Tébessa</i>	<i>Président</i>
<i>-Mme. GASRI Ahlem</i>	<i>MCA</i>	<i>Université de Tébessa</i>	<i>Rapporteur</i>
<i>-Mme. MEZHOU D Rachida</i>	<i>MAA</i>	<i>Université de Tébessa</i>	<i>Examineur</i>

Année Universitaire: 2020/2021

الإهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات والصلاة والسلام على اشرف المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم " أهدي عملي هذا إلى أغلى ما في الوجود : إلى أبي و تعب و الجهد الجبار الذي قام به من أجل وصولي لهذه اللحظة ، لو أعطيتك عمري لما سددت ديني يا غالي "علي" إلى كل دعوة من دعوات أمي، إلى كل مسانداتها ، إلى كل الأحلام التي تمتها لي و كل طموحاتها لي في الوصول إلى أعلى المراتب ، إليك جنتي "مبروكة" إلى إخوتي سندي و قوتي في الحياة على رأسهم أخي "عادل" ، و أخواتي "ريمه" ، "سهام" " منى" و "صورية" الى البراعم الصغار " قهي" ، و ضياء و جود و أوس و سلسونة " و إلى الأقربون قلبا .

إلى كل الأساتذة و خاصة الأستاذة المشرفة "قصري أحلام" جزاك الله خيرا على مساعدتك و توجيهاتك القيمة لك كل الشكر و الامتنان كما أرجو من الله سبحانه وتعالى أن يجعله من صالح الأعمال.

الطالبة: مشري حنان

الإهداء:

سألت نفسي إلى من أهدي هذا العمل فوجدته
أشد ارتباطا وتعلقا برسول الله صلى الله عليه
وسلم بسببه كانت هدايتي وإليه أرفع هديتي إلى التي
حملتني وهنا ووضعتني وهنا وكانت دعواتها المباركة
نورا أهتدي به إلى التي سهرت الليالي من أجلي
والدتي "سليمة" إلى الذي زرع في حب العلم
والسعي إليه وكان تاجا أفتخر به إلى الذي شجعني
وبث فيّ روح الإرادة والتحدي وأعطاني كل شيء ولا
ينتظر مني شيء والدي "عبد العزيز" إلى أصدق
الأصحاب إخوتي وأخواتي: سمية، أحمد، صلاح
الدين، عبد الرزاق، عبد الرحمان، نور الإيمان إلى
كل الذين كانت لهم عليّ يد فضل وانتظروا بشغف
إنجاز هذا البحث المتواضع.

يسمينة حير

Remerciements

Avant tout, nous remercions infiniment Dieu, le Miséricordieux qui nous donné la force, le courage et la réussite, et qui nous a fourni les merveilles qui nous ont soutenus, de nous avoir gardés en bonne santé afin de mener à bien ce projet de fin d'étude.

Nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos sentiments sincères à notre rapporteuse, Dr. Gasri Ahlem, maitres de conférences à l'université de Tébessa, pour tous les efforts qu'il a déployés pour nous faciliter et nous aider à terminer le travail de fin d'études.

Nous remercions profondément monsieur Dr. Fareh Hannachi, maitre de conférences à l'université de Tébessa, pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Nous remercions sont aussi Mme. Mazhoud Rachida, maitre assistant à l'université de Tébessa, pour avoir accepté d'être membre de jury et pour leur volonté de lire et examiner notre mémoire.

N'oublions pas de remercier aussi l'ensemble des cors enseignants et administratifs du département de Mathématiques et Informatique de l'université de Tébessa.

Enfin nous remercions nos familles pour les sacrifices qu'elles ont consentis pour terminer nos études, et nous remercions également tous nos amis, et tous nos collègues sans exception, qui nous ont soutenus et encouragés toutes ces années.

Résumé

Ce travail porte sur la coexistence de deux types de synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques à temps continu. Par conséquent, nous avons construit un nouveau type de synchronisation basé sur la coexistence de la synchronisation généralisée (GS) et son inverse (IGS). En utilisant la théorie de stabilité de Lyapunov et la théorie de la stabilité des systèmes linaires à temps continu, quelques conditions suffisantes sont dérivées pour prouver la coexistence de (GS) et (IGS) entre un système en maître à 3-D et un système esclave à 4-D. les résultats théoriques trouvés ici sont prouvés par deux exemples numériques.

Les mots clés :

systèmes dynamiques, stabilité de Lyapunov, chaos, erreur de synchronisation, synchronisation généralisée, vecteur de contrôle, système maitre, système esclave.

Abstract

This work deals with the coexistence of two types of synchronization of continuous-time chaotic and hyperchaotic dynamic systems. Therefore, we have constructed a new type of synchronization based on the coexistence of generalized synchronization (GS) and its inverse (IGS). Using Lyapunov's stability theory, and the stability theory of linear continuous-time systems, some sufficient conditions are derived to prove the existence of (GS) and (IGS) between a 3-D master system and a 4-D slave system. The theoretical results found herein are proven by two numerical examples.

Keywords:

dynamical systems, Lyapunov stability, chaos, synchronization error, generalized synchronization, control vector, master system, slave system.

ملخص

يتعلق هذا العمل بالتعايش بين نوعين من المزامنة للأنظمة الديناميكية الفوضوية وفوق الفوضوية ذات الزمن المستمر. لذلك قمنا ببناء نوع جديد من المزامنة يعتمد على التعايش بين المزامنة العامة (GS) ومعكوسها (IGS) باستخدام نظرية الإستقرار Lyapunov ونظرية استقرار الأنظمة الخطية للزمن المستمر.

يتم اشتقاق بعض الشروط الكافية لإثبات وجود التعايش بين نظام سيد ثلاثي الأبعاد ونظام عبيد رباعي الأبعاد. تم إثبات النتائج النظرية الموجودة هنا من خلال مثالين عدديين.

الكلمات المفتاحية:

الأنظمة الديناميكية، الفوضى، خطأ المزامنة، المزامنة العامة، شعاع المراقبة، الإستقرار Lyapunov، النظام السيد، النظام العبيد

Table des matières

1	Representation mathématiques des systèmes dynamiques	9
1.1	Introduction	9
1.2	Définition basique	10
1.2.1	Définitions des systèmes dynamiques	10
1.2.2	systèmes dynamiques à temps continu	10
1.2.3	Systèmes dynamiques à temps discret	11
1.3	Solutions des systèmes dynamiques	11
1.4	Etude de la stabilité	12
1.4.1	Stabilité des systèmes dynamiques à temp continu	12
1.4.2	Classification des points d'équilibres	12
1.4.3	Stabilité au sens de Lyapunov à temps continu	14
1.5	Linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires	16
1.6	Conclusion	17
2	Théorie du chaos	18
2.1	Introduction	18
2.2	Définitions du chaos	18
2.3	Caractéristiques du chaos	19
2.3.1	La non linéarité	19
2.3.2	Le déterminisme	19
2.3.3	L'aspect aléatoire	20
2.3.4	Sensibilité aux conditions initiales	20
2.4	Les attracteurs	21
2.4.1	Définitions d'attracteurs	21
2.4.2	Bassin d'attracteur	21

2.4.3	Les propriétés d'un attracteur	22
2.4.4	Les différents types d'attracteurs	22
2.5	Détection du chaos	23
2.5.1	l'exposant de Lyapunov	23
2.5.2	Dimension fractale	26
2.5.3	Transitions vers le chaos	27
2.5.4	Cas cascade de doublements de période	27
2.5.5	Par intermittence	27
2.5.6	La quasi-periodicité	28
2.6	Exemples des systèmes dynamiques chaotiques à temps continu	28
2.6.1	Exemples des systèmes dynamiques chaotiques dans l'espace	28
2.6.2	Exemples des systèmes dynamiques hyperchaotiques	29
2.7	Conclusion	30
3	Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques	31
3.1	Introduction	31
3.2	Définitions de la synchronisation	31
3.2.1	Définitions générales	31
3.2.2	Définitions mathématiques	32
3.3	Différents types de synchronisation des systèmes dynamiques	33
3.3.1	Synchronisation complète	33
3.3.2	Anti-Synchronisation	33
3.3.3	Synchronisation décalée	34
3.3.4	Synchronisation généralisée (GS)	34
3.3.5	Synchronisation projective (PS)	35
3.3.6	Synchronisation Q.S	35
3.3.7	Synchronisation FPS	35
3.3.8	Synchronisation HPS	36
3.4	Méthode de synchronisation	37
3.4.1	Méthode de contrôleur actif	37
3.5	Simulation numérique	38
3.5.1	Synchronisation complète des systèmes chaotiques	38
3.6	Conclusion	40

4	La coexistence de GS et IGS entre systèmes chaotiques et hyperchaotiques	41
4.1	Introduction	41
4.2	Définitions de GS et IGS	41
4.3	Coexistence de GS et IGS en 3-D	42
4.3.1	Description des systèmes maître-esclave chaotiques	42
4.3.2	Formulation du problème en 3-D	42
4.3.3	Résultats analytiques en 3-D	43
4.4	Coexistence de IGS et GS en 4-D	45
4.4.1	Description des systèmes maître-esclave	45
4.5	Formulation du problème en 4-D	45
4.6	Résultats analytiques en 4-D	46
4.7	Exemples numériques	47
4.7.1	Exemple 1 :	47
4.7.2	Exemple 2	51
4.8	Conclusion	54

Liste des Figures	
--------------------------	--

Fig.1.1. Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2	13
Fig.2.1. Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales sur l'état x_1	20
Fig.4.1. Les attracteurs chaotiques pour le système maître (4.20) en 2-D	48
Fig.4.2. Les attracteurs chaotiques pour le système esclave (4.21) en 2-D	49
Fig.4.3. Evolution du temps des erreurs e_1 , e_2 et e_3 entre le système (4.20) et le système (4.21)	50
Fig.4.4. Les attracteurs chaotiques pour le système maître (4.27) en 2-D	51
Fig.4.5. Les attracteurs chaotiques pour le système esclave (4.28) en 2-D	52
Fig.4.6. Evolution du temps des erreurs e_1 , e_2 , e_3 et e_4 entre le système (4.27) et le système (4.2)	53

Liste des Tableaux

TAB. 2.1. Classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapunov	25
TAB. 2.2. Caractérisation des attracteurs par le signe des exposants de Lyapunov	26

Liste des symboles

x^*	point équilibrer
A	matrice constante
λ	valeur propre
$\text{Re}(\lambda)$	partie réel du valeur propre
$\text{Im}(\lambda)$	partie imaginaire du valeur propre
$Jf(x)$	la matrice Jacobienne
$f^{(j)}$	j éme itération de f
d	la distance
A	attracteur
$B(A)$	bassin d'attracteur
T	la période de solution
μ_d	la mesure le l'ensemble M
D_L	dimension de Lyapunov
$H(x)$	fonction de Heaviside
$e(t)$	l'erreur
$\ \cdot\ $	la norme euclidienne
$U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$	est un contrôleur
α_i	facteur d'échelle
$V(t)$	fonction de Lyapunov
$\dot{X}(t)$	système chaotique maître
$\dot{Y}(t)$	système chaotique esclave

Introduction générale

Actuellement, la synchronisation fait l'outil le plus moderne pour sécuriser la transmission de l'information, et aussi pour améliorer et accélérer l'accès aux informations. Par conséquent, plusieurs types de synchronisation ont été présentés. L'étude du schéma inverse de synchronisation est une idée séduisante, et qui peut améliorer le cryptage des systèmes de transmissions. Récemment, la combinaison de schémas de synchronisation est introduite et sert à sécuriser les communications. Dans ce travail de mémoire, on a étudié la coexistence de la synchronisation généralisée (GS) et son inverse (IGS) entre deux systèmes chaotiques et hyperchaotiques à temps continu.

On a réservé le premier chapitre à la présentation des systèmes dynamiques et leurs types dans le quel on a initié l'étude de la stabilité de ces systèmes. Dans le deuxième chapitre, on a présenté une vue panoramique sur la théorie du chaos et les attracteurs. Les systèmes dynamiques désignent couramment active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités, et qui s'efforce d'étudies les propriétés d'un système dynamique. Le phénomène de sensibilité aux conditions initiales des systèmes dynamique a été découverts en 1963 par Lorenz. Les systèmes répondant à cette propriété seront à partir de 1975 dénommés les systèmes chaotiques. Le mathématicien russe Lyapunov effectuait des recherches sur la stabilité du mouvement. Il introduisait l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines. Lorsque cet écart évolue exponentiellement, on parle de sensibilité aux conditions initiales. Les travaux de Lyapunov seront très précieux pour étudier certains aspects de la théorie du chaos. La théorie du chaos a toujours suscité l'intérêt de la recherche scientifique car elle a un large spectre d'applications, comme la communication sécurisée, la cryptographie, etc. . .

Parallèlement aux travaux sur le chaos, la synchronisation ou le couplage de deux ou plusieurs systèmes dynamiques attire l'intérêt des chercheurs scientifiques. Ce phénomène était un sujet de recherche active depuis plusieurs années. Il a commencé au XVIIe siècle par la découverte de Huygens et il a connu une amélioration très intéressante dans les années 1920.

Au fils des années, plusieurs concepts de synchronisation chaotiques ont été proposés. En 1990, Carroll et Pecora, pionniers de la synchronisation, ayant comme idée d'employer un signal chaotique. Le premier système produisant le signal chaotique, s'appelle le système émetteur (maître), le deuxième est le système récepteur (esclave). Alors, ils ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de la synchronisation identique. Après ces travaux, différentes méthodes pour la synchronisation des systèmes chaotiques sont proposées. Dans la dernière décennie, la synchronisation des systèmes chaotiques commence à attirer en plus l'attention de plusieurs chercheurs multidisciplinaires à travers le monde dû à ses applications potentielles dans plusieurs domaines

telles que les communications, la programmation, l'ingénierie, la physique, la médecine, etc... Récemment, plusieurs types de synchronisation sont présentés tels que la synchronisation généralisée (GS). Bien que l'étude de ce type de synchronisation soit assez importante, l'étude du problème inverse paraît une idée séduisante. De plus, l'étude de la coexistence de plusieurs types de synchronisation des systèmes dynamiques est un sujet d'actualité. Dans ce contexte, nous avons étudié dans ce mémoire la coexistence de la synchronisation généralisée (GS) et son inverse (IGS) pour les systèmes dynamiques et hyperchaotiques en temps continu.

Afin d'atteindre nos objectifs, ce mémoire est scindé en quatre chapitres, sa structuration se présente comme suit : le premier chapitre est consacré aux notions de base sur les systèmes dynamiques telle que (la définition de système discret et continu, les points fixes et nous représentons aussi la notion de stabilité des systèmes dynamiques continus). Le deuxième chapitre est réservé à la théorie du chaos nous donnons quelques définitions du chaos, caractéristique du chaos et sa détection et les attracteurs et leurs types (régulier et étrange). La notion de synchronisation chaotique sera évoquée dans le troisième chapitre, les idées principales de la méthode de synchronisation sont présentées ou un aperçu historique présente plusieurs méthodes afin de clarifier ce phénomène. Le quatrième est le dernier chapitre est focalisé sur l'étude de la combinaison de deux types de synchronisation, à savoir GS et son inverse notée (IGS) pour les systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques d'ordre entier à temps continu en 3-D et 4-D.

Chapitre 1

Representation mathématiques des systèmes dynamiques

1.1 Introduction

Les systèmes dynamiques désignent couramment la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités. un système dynamique consiste en un ensemble d'états possibles avec un loi qui détermine de façon unique l'état présent du système en fonction de ses états passés.

Les systèmes dynamiques se sont développés et spécialisés au cours du 19^{eme} siècle. En effet, vers la fin de ce siècle le mathématicien , physicien et philosophe français **Henri Poincaré** avait déjà mis en évidence le phénomène de sensibilité aux conditions initiales lors de l'étude astronomique du problème des trois corps.

Toujours au 19^{eme} siècle, le mathématicien russe **Alexandre Lyapunov** effectue des recherches sur la stabilité du mouvement, il introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initiales voisines lorsque cet écart évolue exponentiellement on parle de sensibilité aux conditions initiales.

Le but de ce chapitre est de donner les notions de base des systèmes dynamiques, quelques propriétés telles que la stabilité, les deux méthodes de stabilité, puis la linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires.

1.2 Définition basique

1.2.1 Définitions des systèmes dynamiques

Définition 1.1 Un système dynamique est un système dont l'état change avec le temps mathématiquement un système dynamique consiste en un espace d'états et une loi appelée dynamique qui permet de déterminer quel état correspondre dans un temps futur à un état présent donné on distingue de deux type des systèmes dynamiques : systèmes continues et systèmes discrets .

Définition 1.2 Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application :

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

définie sur tout $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n$ telle que :

1. $f(., x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
2. $f(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.
3. $f(0, x) = x$.
4. $f(t + s, x) = f(t, f(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}^+, x \in \mathbb{R}^n$.

1.2.2 systèmes dynamiques à temps continu

Définition 1.3 On dit que le système dynamique est continu s'il évolue en temps continu. La description mathématique de son évolution est présenté par un système d'équation différentielle [2, 3] de la forme :

$$\dot{x}(t) = f(x, t, v) \quad v \in \mathbb{R}^r, x \in \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

Avec f un champ de vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur d'état et $v = (v_1, v_2, \dots, v_r) \in V \subset \mathbb{R}^r$ vecteur des paramètres.

Lorsque le champ de vecteurs f dépend explicitement du temps, on dit que le système dynamique non autonome. Dans le cas contraire, on dit que le système est autonome.

Remarque 1.1 Par changement de variable approprié on peut transformer un système non autonome avec $x \in \mathbb{R}^n$ est un système dynamique autonome avec $x \in \mathbb{R}^{n+1}$.

1.2.3 Systèmes dynamiques à temps discret

Définition 1.4 On appelle système dynamique discret tout système d'équation algébriques récurrentes définie par :

$$x_{k+1} = f(x_k, p), x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r, k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

Où $x_k \in \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état ; p le vecteur des paramètres ; f la fonction de récurrence qui définit la dynamique du système discret.

Définition 1.5 (Trajectoire) Soit x_0 une condition initiale et $x(t, x_0)$ la solution du système dynamique autonome, l'ensemble des points ; $\forall t > 0$ $x(t, x_0)$ est la trajectoire dans l'espace d'état passant au point x_0 à l'instant initial.

Définition 1.6 (Flot) Soit $x(x_0, t)$ $x_0 \in D$ une solution du système dynamique autonome avec condition initiale $x(0) = x_0$. On appelle flot de ce système l'application $\phi_t : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $\phi_t(x_0) = x(x_0, t)$.

Définition 1.7 (Espace de phase) L'espace des phases est une structure correspondante à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, ou un espace mesurable (par exemple la représentation y par rapport à x).

Définition 1.8 (Portrait de phase) On appelle portrait de phase un graphe qui donne l'allure des trajectoires dans l'espace des phases.

Définition 1.9 (Orbite) On appelle orbite d'un point x l'image de la trajectoire issue de x c'est à dire le sous ensemble $\gamma(x)$ de l'espace des phases défini par $\gamma(x) = \{e^t(x)\}$.

1.3 Solutions des systèmes dynamiques

Définition 1.10 (Solutions d'équilibre) On appelle "point d'équilibre" d'un système dynamique tout point x^* tel que [4] :

$$f(x^*) = 0 \quad (1.3)$$

Les points de l'espace d'état vérifiant cette relation sont appelés points singuliers.

Une solution d'équilibre correspond à un point fixe dans l'espace d'état. Il n'est pas nécessairement stable, mais lorsqu'il est ce point représente un attracteur.

Définition 1.11 (*Solutions périodiques*) Soit $x(t, x_0)$ la solution d'un système dynamique continu, on appelle $x(t, x_0)$ solution périodique si et seulement si :

$$\exists \tau > 0 \quad \forall t \quad x(t + \tau, x_0) = x(t, x_0) \quad (1.4)$$

Définition 1.12 (*Solution quasi périodique*) Soit $x(t, x_0)$ une solution du système dynamique et soit $T = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un ensemble fini de réels linéairement indépendants. On dit que $x(t, x_0)$ est une solution quasi périodique de si elle est périodique pour chacune des périodes T_i de T . La solution $x(t, x_0)$ est également dite n -périodique [4].

Définition 1.13 (*Solution Chaotique*) Une solution chaotique est un comportement asymptotique borné qui n'est ni un point d'équilibre, ni une solution périodique ou quasi périodique. ni une solution s'échappant vers infini (c'est-à-dire on rest dans un borne).

1.4 Etude de la stabilité

1.4.1 Stabilité des systèmes dynamiques à temp continu

La notion de stabilité d'un système caractérisé le comportement de ses trajectoires autonome des points d'équilibres l'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Il existe quelques concepts pour la stabilité des système dynamique telle que la stabilité au sens de **Lyapunov**.

1.4.2 Classification des points d'équilibres

La stabilité est un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques lineaires et non lineaires.

a- Cas des systèmes linéaires

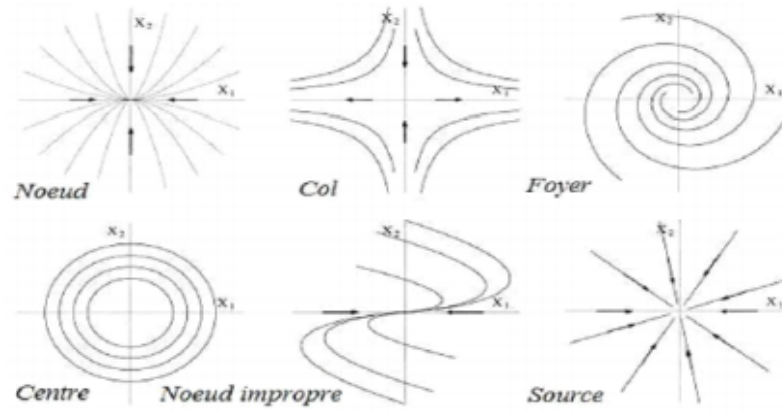
Considérons le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (1.5)$$

Où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et A une matrice constante inversible. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Définition 1.14 – Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles et même signe, la solution $x = 0$ est appelée nœud.

- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution $x = 0$ est appelée selle.
- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $Im(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$. La solution $x = 0$ est appelée foyer.
- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont complexes avec $Re(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, n$. La solution est appelée centre.


 Fig.1.1 – Classification des points d'équilibre dans \mathbb{R}^2

b- Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non linéaire :

$$\dot{X}(t) = f(x(t)) \quad (1.6)$$

Définition 1.15 x^* est un point équilibre de 1.6, et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$:

- 1- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ont des parties réelles négatives, alors x^* est stable.
- 2- Si les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive alors x^* instable

Théorème 1.1 Soit 1.6, $x \in \mathbb{R}^n, f \in C^1$, un système dynamique continue. On dit que x^* un point fixe ($f(x^*) = 0$) est stable, si les valeurs propres de $Df(x^*)$ sont de partie réelle négative. Dans le cas contraire, on dit que instable.

1.4.3 Stabilité au sens de Lyapunov à temps continu

Considérons la classe des systèmes non linéaires décrits par le système dynamique :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.7)$$

Où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue. Nous désignons par x^* un point d'équilibre de 1.7 $f(x^*, t) = 0, \forall t \geq t_0$, et par $x(t, t_0, x_0)$ la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système 1.7 initialisée en x_0 à l'instant t_0 , et f une fonction non linéaire.

Définition 1.16 (Stabilité) *l'origine est un point d'équilibre x^* stable au sens de Lyapunov du système 1.7 est :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.8)$$

Définition 1.17 (Stabilité uniforme) *l'origine est un point d'équilibre x^* uniformément stable au sens de Lyapunov du système 1.7 est :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad (1.9)$$

Définition 1.18 (Attractivité) *l'origine est un point d'équilibre x^* attractif du système 1.7 est :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t, t_0, x_0)) = 0, \forall t \geq t_0 \quad (1.10)$$

Lorsque $\delta(\varepsilon) = +\infty$, on dit que l'origine est globalement attractive.

Définition 1.19 (Stabilité asymptotique) *l'origine est un point d'équilibre x^* asymptotique*

(resp. *globalement asymptotique*) stable du système 1.7 S'il est : stable attractif (resp. *globalement attractif*).

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x(t_0)) - x^*\| = 0 \quad (1.11)$$

Donc , la stabilité asymptotique signifie qu'on peut déterminer un voisinage du point d'équilibre telle que n'importe quelle trajectoire, issue d'un point $x(0)$ appartenant à voisinage de x^* tende vers x^* lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Définition 1.20 (Instabilité) *le point d'équilibre x^* est dit instable s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.*

On va présenter les deux méthodes de **Lyapunov** (méthode directe et méthode indirecte), ces deux méthodes sont concrétisées par dans exemples pratiques.

a- Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte) La première méthode de **Lyapunov** est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre x^* du système 1.7. Plus précisément, on examine les valeurs propres λ_i de la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de x^* s'expriment comme suit :

1. Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative, x^* est exponentiellement stable.
2. Si la matrice jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, x^* est instable.

Exemple 1.1 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x \\ \dot{y} = x^3 - 2y - xz \\ \dot{z} = -z + xy \end{cases} \quad (1.12)$$

L'origine 0 est un point fixe

et son linéarisation est $Df(0) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Les valeurs propre de $Df(0)$ est $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = -1$, toutes négatives d'ou le point d'équilibre 0 est **asymptotiquement stable**.

b- Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe) La première méthode de **Lyapunov** est simple à appliquer mais ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. En outre, elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre mais, en contre partie, elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ est appelée fonction de **Lyapunov**, qui décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. Le théorème suivant résume cette méthode.

Théorème 1.2 Le point d'équilibre x^* du système 1.7 est stable si il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :

- 1- D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x^* \in D$.
- 2- $V(x^*) = 0$ et $V(x) > V(x^*), \forall x \neq x^*$ dans D .
- 3- $V(x^*) > 0$. Si de plus $\dot{V}(x^*) \leq 0, \forall x \neq x^*$ dans D . Alors x^* est **asymptotiquement stable** au sens de **Lyapunov**.

Si de plus pour x ,

Si on suppose encore que $V(x)$ tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x^* , tendent vers x^* (on dit que x^* est globalement, asymptotiquement stable).

Remarque 1.2 *Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov.*

Exemple 1.2 *Soit le système :*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (1.13)$$

le système à un point d'équilibre unique $(0, 0)$

On pose $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

On a : $V(0, 0) = 0$ et $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

De plus :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= \frac{d}{dt}V(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 \\ &= 2(x_1(x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)) + x_2(-x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2))) = 2(x_1^2 + x_2^2)^2 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Donc $\dot{V}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Alors : l'origine est instable.

1.5 Linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.15)$$

Où $x = (x_1, \dots, x_n)$, $f = (f_1, \dots, f_n)$

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}^* = f(\dot{x}^* + \dot{\varepsilon}(t)) \quad (1.16)$$

et soit x_0 un point d'équilibre de ce système.

Supposons qu'une perturbation $\varepsilon(t)$ soit appliquée au voisinage de point fixe, la fonction F peut être développée en série de **Taylor** au voisinage de point x_0 comme suite :

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}_0 = f(\dot{x}_0 + \dot{\varepsilon}(t)) \simeq f(x_0) + J_f(x_0) \bullet \varepsilon(t) \quad (1.17)$$

avec $J_f(x_0)$ est la matrice jacobienne de la fonction f défini par :

$$J_f(x_0) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x_0} \quad (1.18)$$

comme $f(x_0) = x_0$, alors l'équation 1.17 redevient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = J_f(x_0) \bullet \varepsilon(t) \tag{1.19}$$

l'écriture 1.19 veut dire que le système 1.16 est linéarité.

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre, on a donné les notions de base des systèmes dynamiques avec quelques définitions des systèmes linéaires et non linéaires à temps continu et discret. Ensuite, on a donné un aperçu sur l'étude de comportements des système dynamique et leurs notions de la stabilité.

Chapitre 2

Théorie du chaos

2.1 Introduction

La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales, de petites différences dans les conditions initiales produisent des résultats très divergents pour de tels systèmes dynamiques, le comportement futur des systèmes est entièrement déterminé par leurs conditions initiales, ce dernier est connu sous le nom de chaos déterministe, on tout simplement le chaos il n'existe pas de définition à la fois formelle et générale du chaos.

Dans ce chapitre, on donne une brève étude quantitative sur le chaos et quelques caractérisations du chaos. On parle aussi des attracteurs, et de détection du chaos, l'exposant du **Lypunov**, dimension fractale puis en passe a la transition vers le chaos. Enfin de chapitre, on donne quelque exemples des système dynamique à temps continu en 3-D et 4-D à savoir les systèmes de **lorenz**, de **Rössler**, de **Liu** et de **Chen**.

2.2 Définitions du chaos

Définition 2.1 On dit que la fonction $f : X \rightarrow X$ possède une sensibilité aux conditions initiales satisfaisant :

$$\exists \delta > 0, \forall x_0 \in X, \forall \varepsilon > 0 \exists y_0 \in X : d(x_0, y_0) < \varepsilon \Rightarrow d(f^{(j)}(x_0), f^{(j)}(y_0)) > \delta, j \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

ou d représente la distance et $f^{(j)}$ la j ième itération de f .

Définition 2.2 Supposons que X un ensemble et Y un sous-ensemble de X . Y est dense dans X si, pour n'importe quel élément $x \in X$, il existe un élément y dans le sous-ensemble Y arbitrairement proche de x , c'est-à-dire si la fermeture de Y est égale à X ($\bar{Y} = X$). Ce qui revient à dire que Y est dense dans x si pour tout $x \in X$ on peut trouver une suite de points $\{y_n\} \in Y$ qui convergent vers x .

Définition 2.3 f est topo-logiquement transitive si U et V étant deux ensembles non vides ouverts dans X , il existe $x_0 \in U$ et un indice $j \in \mathbb{Z}^+$, telle que pour $f^{(j)}(x_0) \in V$ ou, de façon équivalente, il existe un indice $j \in \mathbb{Z}^+$, telle que pour $f^{(j)}(U) \cap V \neq \phi$.

On est maintenant en position d'énoncer la définition du chaos, au sens de **Devaney** [5].

Définition 2.4 Une fonction $f : X \rightarrow X$ est dite constituée d'un dynamique chaotique si :

1. f possède une sensibilité aux conditions initiales.
2. f est topo-logiquement transitive.
3. L'ensemble des points périodiques de f est dense dans X .

Bien qu'il n'existe pas de définition universellement acceptée de la notion du chaos, cette définition reste la plus intéressante car les concepts sur les quels elle repose sont facilement observables [5].

2.3 Caractéristiques du chaos

2.3.1 La non linéarité

Pour prévoir des phénomènes réels générés par les systèmes dynamiques, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause. En général, un système chaotique est un système dynamique non linéaire, un système linéaire ne peut pas être chaotique.

2.3.2 Le déterminisme

La notion de déterminisme signifie la capacité de "prédire" le future d'un phénomène à partir d'un évènement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarité.

Dans les phénomène aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. À l'opposé, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.

2.3.3 L'aspect aléatoire

Si le mouvement est aléatoire, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard : aucune structure n'apparaît. Quand le mouvement est chaotique, les points paraissent à première vue aléatoires. Néanmoins, quand on observe le système suffisamment longtemps, on constate que les points dessinent une forme particulière.

2.3.4 Sensibilité aux conditions initiales

La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales, pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incompatibles.

D'un point de vue mathématique, on dit que f montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \exists (y, p) \in D; \|x - y\| < \varepsilon \Rightarrow \|f^p(x) - f^p(y)\| > \delta. \quad (2.2)$$

Une des propriétés essentielles du chaos est donc bien cette sensibilité aux conditions initiales que l'on peut caractériser en mesurant du taux de divergence des trajectoires [9].

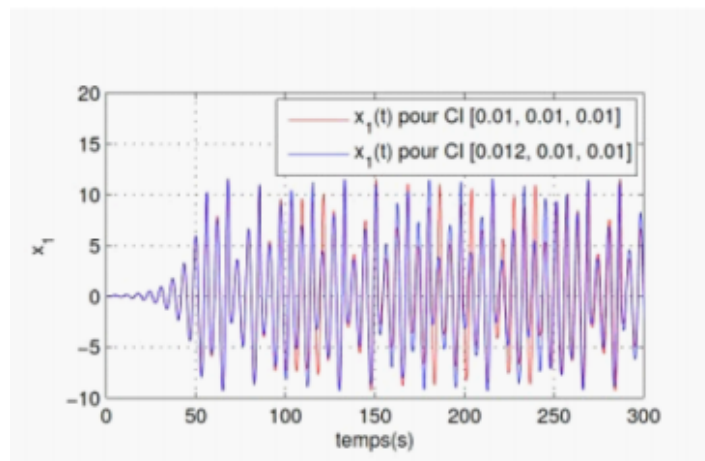


FIG. 2.2. – Illustration de la propriété de sensibilité aux conditions initiales sur l'état x_1 .

2.4 Les attracteurs

2.4.1 Définitions d'attracteurs

Définition 2.5 Un attracteur est défini comme une sous partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

Définition 2.6 Soit $(X, \{\varphi_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ un système dynamique, A un ensemble compact, fermé de l'espace des phases. On dit que A est un attracteur, s'il est vérifié trois conditions suivantes :

- a- A est invariant sous l'action du flot (i.e $\varphi_t(A) \subset A$ pour tout $t \in \mathbb{R}$).
- b- A est stable au sens de **Lyapunov** (si pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(x_0, t) = \varphi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$).
- c- Il existe une orbite dense dans A telle que $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A$.

Définition 2.7 (Ruelle)[6] Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires de l'espace des phases, c'est-à-dire, une situation ou un ensemble de situations vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales. Mathématiquement, si A un ensemble compact fermé de l'espace des phases, on suppose que A est invariant par le flot Φ_t , l'ensemble A est attracteur si :

- 1- Pour tout voisinage U de A , il existe un voisinage V de A tel que toute solution $x(t, x_0) = \Phi_t(x_0)$ restera dans U si $x_0 \in V$.
- 2- Il existe une orbite dense dans A , tel que $\bigcap \Phi_t(V) = A, t \geq 0$.

Définition 2.8 (Zeraoulia et Sprott) [7] Soit A un ensemble fermé de l'ensemble nonerrant $\Omega(f)$, A est dit attracteur si :

- Définition 2.9**
- 1- A est invariant par f , c'est-à-dire $f(A) = A$.
 - 2- Il existe un voisinage V de A dans \mathbb{R}^n tel que $\bigcap_{t \geq 0} f^t(V) = A$.
 - 3- f est transitive ($\exists C, D \subset A$ tel que $f^n(C) \cap D \neq \emptyset$; C, D ouvert).

2.4.2 Bassin d'attracteur

Le bassin d'attracteur $B(A)$ d'un attracteur A est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers A , donc $B(A) = \bigcup_{\varphi_t} (V)$. On appelle bassin d'attracteur $B(A)$ de A le plus grand des tels voisinages attirés, c'est-à-dire $B(A) = \bigcup \{U \in \varphi(x)\}$, U est un voisinage attiré A .

2.4.3 Les propriétés d'un attracteur

Un attracteur possède les propriétés suivante :

1. Un sous ensemble borné A de l'espace est de volume nul invariant par le flot. Autrement dit, tout point de l'espace d'états qui appartient à un attracteur demeure à l'intérieur de cet attracteur pour tout t .
2. Il existe un ensemble $A \subset B$; telle que pour voisinage de A ; la trajectoire qui prend son origine dans B se trouve au bout d'un temps fini dans ce voisinage de A . Cette "zone d'influence" est le bassin d'attraction, c'est l'ensemble : $W = \cup_{t < 0} \varphi_t(V)$; $t < 0$.
3. Un attracteur est indécomposable c'est-à-dire que la réunion de deux attracteurs n'est pas un attracteur.

2.4.4 Les différents types d'attracteurs

Il existe deux type attracteurs : les attracteurs régulières et les attracteurs étranges ou chaotiques.

A- Les attracteurs réguliers

Pour tous les attracteurs réguliers, c'est-à-dire pour tous les systèmes non chaotiques, des trajectoires qui partent des "points" proches l'un de l'autre dans l'espace de phase restent indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution de ces systèmes à partir d'une situation connue.

B- Les attracteurs étranges

L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique et toutes les définitions qui on trouve dans la littérature sont restrictives [8] [9] [10].

Définition 2.10 (Ruelle et Takens) [11] Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales.

Définition 2.11 (Berge et al) [12] Un attracteur étrange est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales et ayant une dimension fractale.

Définition 2.12 (Farmer et Sidorowich) [13] Un attracteur étrange est un attracteur possédant un exposant de Lyapunov $\lambda_k > 0$.

C- Les différents types d'attracteurs étranges

Les attracteur chaotiques peuvent être classés en trois types principales : attracteur hyperbolique, Quasi-attracteur, et attracteur de types **Lorenz**.

1. Attracteur hyperbolique

Les attracteurs hyperboliques sont des ensembles limites structurellement stable. Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à cette classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques.

2. Quasi-attracteur

Ces types d'attracteurs sont des ensembles limites renfermant des orbites périodiques des différents types topologiques et des orbites structurellement instable. Par exemple les attracteurs générés par le circuit de **chua** [14].

3. Attracteur de types Lorenz

Ces types des attracteurs ne sont pas structurellement stable mais leur orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stable (hyperbolique) et aucune des orbites périodiques instables apparaissent sous les petites variations des paramètres, comme par exemple dans le système de **Lorenz** lui-même [15].

2.5 Détection du chaos

Il existe plusieurs méthodes qui permettent de déterminer si les systèmes non linéaire est ou non chaotiques, on a choisi de mettre en œuvre deux des méthodes les plus couramment utilisées qui sont appelées : Les exposants de **Lyapunov** et dimension fractale.

2.5.1 L'exposant de Lyapunov

L'évolution chaotique est difficile à appréhender, car la divergence des trajectoires sur l'attracteur est rapide. Lorsque cette divergence croît exponentiellement avec le temps pour presque toutes les conditions initiales voisines d'un point donné, on a le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, idée à laquelle sont attachés les exposants de **Lyapunov**, qui donnent une mesure quantitative de cette divergence exponentielle locale et mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique. Rappelons d'abord cette formule et voyons comment **Lyapunov** a pu arriver à déduire une telle formule.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \left(f^i(x_{i-1}) \right) \right| \quad (2.3)$$

Considérons un système dynamique quelconque dont la condition initiale x_0 est affectée d'une erreur infinitésimal E_0 . Après n itération, l'erreur initiale E_0 sera donc amplifiée d'un facteur $\left| \frac{E_n}{E_0} \right|$, notons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à, puisque :

$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right|$, il suffit alors de calculer ce produit pour déterminer la façon dont s'amplifie l'erreur initiale.

Le logarithme d'un produit correspond à une somme de logarithme, utilisons plutôt le logarithme du produit pour compléter cette étude.

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \ln \left(\left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \right) \\ &= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| + \dots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \end{aligned} \quad (2.4)$$

Avant de faire tendre cette dernière quantité vers l'infini, calculons d'abord la moyenne de la somme obtenue. On arrive ainsi à l'exposant de **Lyapunov** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right) \quad (2.5)$$

E_i et E_{i-1} étant de très petites valeurs, le rapport correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation associée à l'équation utilisée si naturellement la fonction est dérivable. En effet soit $f(x_i)$ cette fonction.

$$E_i = f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1}) \quad (2.6)$$

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} \quad (2.7)$$

Puisque

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dot{f}(x) \quad (2.8)$$

Alors si f est dérivable, on a :

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} = \dot{f}(x_{i-1}) \text{ lorsque } E_{i-1} \rightarrow +\infty \quad (2.9)$$

Par conséquent

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \dot{f}(x_{i-1}) \right| \quad (2.10)$$

lorsque l'exposant de **Lyapunov** est positif :

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0 \quad (2.11)$$

et par conséquent

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1 \quad (2.12)$$

L'erreur infinitésimale du début ira donc en augmentant. Le système sera dans ce cas sensible aux très petites variations de sa condition initiale, une des caractéristiques des systèmes chaotiques. Si au contraire l'exposant de **Lyapunov** est négatif, l'erreur infinitésimale du début ira en diminuant. L'erreur initiale n'aura dans ce cas aucun effet à long terme. Généralement on peut distinguer trois cas suivant le signe de l'exposant de **Lyapunov** :

-Si $\lambda < 0$, l'orbite est attractive vers un point fixe ou orbite périodique stable. Il caractérise le système dissipatif. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique, plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est grande. Les points fixes et les points périodiques super stables ont un exposant de **Lyapunov** λ qui tend vers $-\infty$.

A- Classification des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapunov

-Si $\lambda = 0$, l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.

-Si $\lambda > 0$, l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités : ces points sont dit instables. Pour un système discret, on a un ensemble de points sans aucun rapport de liaison. Pour un système continu, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées.

Etat stable	Flot	Dimension de Lyapunov	Exposant de Lyapunov
point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
périodique d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
périodique d'ordre k	k-tore	k	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper-chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

" TAB. 2.1. Classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapunov"

B- Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de Lyapunov positive indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps. Il s'agit donc bien là d'un attracteur étrange.

Pour une application bidimensionnelle, on peut résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et signe des exposants de **Lyapunov** (ici ils sont deux) dans le tableau :

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
point d'équilibre	-, -, -
Cycle limite périodique	0, -, -
Cycle limite quasi périodique	0, 0, -
Attracteur étrange	+, 0, -

" TAB. 2.2.Caractérisation des attracteurs par le signe des exposants de Lyapunov "

2.5.2 Dimension fractale

Il existe plusieurs types de dimension fractale (dimension de capacité, dimension d'information, dimension de corrélation,...) pour les attracteurs chaotiques, parmi celle-ci on peut citer :

Dimension de Lyapunov

Paramètre permettant de mesurer la dimension du chaos suivant le type de chaos généré la dimension de **Lyapunov** est plus ou moins grande : pour des systèmes non retardés (dimension finie) tels que le système de **Lorenz** ou **Rössler** la dimension de **Lyapunov** est au maximum égale au nombre de variables du système (dimension faible) alors que pour les systèmes à retard (dimension infinie) la dimension de **Lyapunov** tend vers de grandes valeurs plus la dimension sera grande plus la complexité du chaos sera élevée classant les exposants de **Lyapunov** $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

La dimension de **Lyapunov** D_L est donné par [16] :

$$D_L = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{|j + 1|} + j \quad (2.13)$$

ou $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$ sont les exposants de **Lyapunov** d'un attracteur d'un système dynamique et j le grand entier naturel tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$: Ce type tient compte de la dynamique du système.

Dimension de corrélation

L'intégrale de corrélation est défini comme suit :

$$c(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} H(\varepsilon - |x_i - x_j|) \quad (2.14)$$

Où H la fonction de **Heaviside** donnée par $H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, et elle vérifie la relation

$\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \Phi(x) dx = \int_0^{+\infty} \Phi(x) dx$, pour une fonction de teste $\Phi(x)$. Dans les applications la fonction de **Heaviside** est utilisée dans les modèles des circuits électriques. Quand la limite au-dessous existe, la dimension de corrélation est définie comme suit :

$$D_2 = d_{cor} = \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left[\frac{c(\varepsilon)}{c(\varepsilon')} \right]}{\ln \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right)} \quad (2.15)$$

Équation de la dimension de corrélation pour un système M-Dimensionnelle avec exactement $(1 - Q, \text{exige}) N_{\min}$ points tel que :

$$N_{\min} \geq \left[\frac{R(2 - Q)}{(1 - Q)} \right]^M \quad (2.16)$$

Où $R \geq 1$ est la longueur de la «région de plateaux». Si attracteur existe, alors une évaluation de D_2 sature au-dessus certain M donné par : $M \geq 2D + 1^8$.

2.5.3 Transitions vers le chaos

Il existe plusieurs scénarios qui décrivent le passage vers le chaos. On constate dans tous les cas que l'évolution du point fixe vers le chaos n'est pas progressive, mais marquée par des changements discontinus qu'on a déjà appelés bifurcations. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre.

2.5.4 Cas cascade de doublements de période

Ce scénario a été observé dans les années 60 par **R.May** en dynamique de populations sur l'application logistique. Ce scénario est caractérisé par une succession de bifurcation de fourches. A mesure que la contrainte augmente, la période d'un système forcé est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8,... etc, Ces doublements de périodes sont de plus en plus rapprochés, lorsque la période est infinie, le système devient chaotique [17, 18].

2.5.5 Par intermittence

Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine.[19, 20].

2.5.6 La quasi-périodicité

Ce scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de **Ruelle** et **Takens** [11]. Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle comportement est périodique.

2.6 Exemples des systèmes dynamiques chaotiques à temps continu

2.6.1 Exemples des systèmes dynamiques chaotiques dans l'espace

Exemple 1 (Système de Lorenz)

Prenons comme exemple de système chaotique continu le système de Lorenz (1963) [15].

Le système dynamique s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \delta(y - x) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (2.17)$$

δ et b : valeurs fixées respectivement à 10 est $\frac{8}{3}$,

$r > 0$: paramètre de control positif,

δ : Le nombre de prandtl,

b : La taille physique dy système,

r : Le nombre de Rayleigh,

Exemple 2 (Système de Rössler)

Ce système semblable à celui de Lorenz, a été proposé par le biochimiste Allemand Otto Rössler en 1976 [21], il découle des équations de Navier Stokes, ainsi il est lié à l'étude de l'écoulement des fluides.

Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + \alpha y \\ \dot{z} = \beta - \gamma z + xz \end{cases} \quad (2.18)$$

Avec α, β et γ des constantes (paramètres de bifurcation)

Pour $a = 0,2; b = 0,2$ et $c = 5,7$ nous obtenons l'évolution aléatoire dans le temps de la coordonnée z et l'attracteur de **Rössler**.

2.6.2 Exemples des systèmes dynamiques hyperchaotiques

Un attracteur hyperchaotique est généralement défini, comme étant un comportement chaotique avec au moins deux exposants de **Lyapunov** positifs.

Remarque 2.1 La dimension minimale d'un système hyperchaotique (continu) est quatre (4).

Exemple 2.1 (Le système hyperchaotique de **Rössler**) Le premier système hyperchaotique à 4 dimensions a été proposé en 1979 par **Rössler** [22]. Ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + ay + \omega \\ \dot{z} = b + xz \\ \dot{w} = -cz + d\omega \end{cases} \quad (2.19)$$

Le système suit un comportement hyperchaotique (FIG.2.5), quand les paramètres $a; b; c$ et d prennent les valeurs suivantes : $a = 0.25; b = 3, c = 0.5$ et $d = 0.05$.

Les conditions initiales peuvent prendre les valeurs suivantes : $x_0 = 10; y_0 = 6; z_0 = 0; w_0 = 10$.

Exemple 2.2 (Les systèmes hyperchaotiques de **Liu** et de **Chen**)

Le système de **Liu** [23] est proposé en 2001, il est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = a_2x_1 + x_1x_3 - x_4 \\ \dot{x}_3 = a_3x_3 + x_2^2 \\ \dot{x}_4 = x_4x_1 + x_2 \end{cases} \quad (2.20)$$

où $a_1 = 10, a_2 = 35, a_3 = 1,4$ et $a_4 = 5$.

Le système hyperchaotique de **Chen** est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1x_1 + a_1x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + a_2x_2 + 4x_4 - 10x_1x_2 \\ \dot{x}_3 = -a_3x_3 + x_2^2 \\ \dot{x}_4 = a_4x_1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Où $a_1 = 35; a_2 = 21; a_3 = 3$ et $a_4 = 2$.

Remarque 2.2 *Seulement peu de comportements hyperchaotiques expérimentaux ont été identifiés. L'occurrence du comportement hyperchaotique a été trouvée, par exemple, dans un circuit électronique [24].*

2.7 Conclusion

Ce chapitre est consacré à la théorie du chaos qui est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales, la non-linéarité, etc. Les attracteurs réguliers et étranges et quelques dimensions fractales, en passant par les différents de transition vers le chaos ont été présenté. On a aussi donné quelques exemples des systèmes chaotiques et hyperchaotiques à temps continu.

Chapitre 3

Synchronisation des système dynamiques chaotiques

3.1 Introduction

La synchronisation des systèmes dynamiques ayant un comportement complexe tels que les oscillateurs et les systèmes chaotiques a suscité un intérêt croissant de par l'existence de nombreux champs d'applications ou d'investigations potentiels (télécommunication, neurosciences, informatique, etc.).

Dans la littérature, plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés. Tout d'abord les travaux de **Yamada et Fujisaka** (1983) [25] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite **Afraimovitch et al** [26] ont développé des concepts importants liés à la synchronisation chaotique. Ultérieurement, **Pecora et Carroll** (1990-1993) [27, 28] ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un maître et l'autre esclave. Ces travaux ont ouvert la voie des applications du chaos aux télécommunications [29].

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions de la synchronisation, puis on cite quelques schémas de synchronisation pour enfin arriver à traiter la méthode de contrôle actif.

3.2 Définitions de la synchronisation

3.2.1 Définitions générales

Définition 3.1 *synchronisation est un mot décomposé en deux parties : (syn) qui veut dire (ensemble) et (chronos) qui veut dire (temps), c'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre*

plusieurs opérations, en fonction du temps.

Définition 3.2 (Générale) *synchronisation est un manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque systèmes évolue en suivant le comportement de l'autre système.*

3.2.2 Définitions mathématiques

Après plusieurs tentatives pour définir un mouvement synchronisé, **Brown et Kocarev [30]** ont récemment fournir une définit mathématique de la synchronisation.

pour construire la définition, ils supposent deux sous système :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)) \\ \dot{Y} = G(Y(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

Où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $Y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Soit $\varphi(\omega_0)$ une trajectoire du système globale donné par 3.1. Avec les conditions initiale

$$\omega_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Pour chaque sous système, on forme une trajectoire $\varphi_x(\omega_0)$ et $\varphi_y(\omega_0)$ (ω_0 était une condition initiale donnée).

On note par χ l'espace de toutes les trajectoire du premier sous système et par ξ l'espace de toutes les trajectorés du seconde sous système, et on considère deux fonctions (propriétés) $g_x : \chi \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et $g_y : \xi \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^d$ qui une sont pas identiques nulle, la premier \mathbb{R} represente le temps, nous disons que les fonctions g_x et g_y sont les propretés des sont systèmes définis par (1) respectivement.

Enfin, pour définir une état synchronisé, **Brown et Kocarev [30]** et exigent une fonction $h(g_x, g_y) : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ telle que $\|h\| = 0$ ou $\|h\| \longrightarrow 0$ (où $\| \cdot \|$ est toute norme).

Nous disons que la fonction h , que est indépendante du temps, compare les propretés mesurées sur les deux sous systèmes et les deux mesures convergent dans le temps si et seulement si $h(g_x, g_y) = 0$.

Définition 3.3 (**Brown et Kocarev**) *Les sous systèmes dans 3.1 sont synchronisés sur la trajectoire de $\varphi(\omega_0)$, par rapport aux propriétés g_x et g_y s'il existe un instant indépendant de l'application h telle que $\|h(g_x, g_y)\| = 0$. Avec le chois de g_x , g_y et h on peut déterminer le type de synchronisation.*

Théorème 3.1 *Le système maître et le système esclave sont synchronisés si et seulement si tous les exposants de **Lyapunov** des synchronisations esclave appelés les exposants de **Lyapunov** conditionnels, sont négatif.*

3.3 Différents types de synchronisation des systèmes dynamiques

Dans cette section, aux sens d'une étude bibliographique, nous avons recueilli différents types de la synchronisation telle que : synchronisation complète (**SC**), anti-synchronisation, synchronisation généralisé (**SG**), synchronisation projective, synchronisation **M.P.S**, synchronisation décalée, synchronisation **Q.S**.

3.3.1 Synchronisation complète

La synchronisation complète a été réalisé grâce aux effet des forces d'accouplements unidirectionnelles des système c'est la forme de la synchronisation la plus simple et la plus typique.

Définition 3.4 *Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques liés par un accouplement unidirectionnel représentés par les équation différentielles :*

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)) \\ \dot{Y} = G(Y(t)) + U \end{cases} \quad (3.2)$$

Où $X(t)$ est le vecteur d'état du système maître de dimension n et $Y(t)$ le vecteur d'état du système esclave de dimension m , F et G sont des champs de vecteurs $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ à déterminer le vecteur de contrôle. L'erreur de la synchronisation complète est définie par :

$$e(t) = Y(t) - X(t), \quad \forall x(0), y(0) \quad (3.3)$$

telle que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0 \quad (3.4)$$

Où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

- Si $F = G$, on dit qu'on une synchronisation complète identique.
- Si $F \neq G$, on dit une synchronisation complète non identique.

3.3.2 Anti-Synchronisation

Définition 3.5 *Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [31]. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit :*

$$e(k) = Y(k) + X(k) \quad (3.5)$$

3.3.3 Synchronisation décalée

Définition 3.6 Les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un décalage en temps [32]. On dit qu'on a une synchronisation retardée (ou anticipée) si les variables d'état $Y(k)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $X(k)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Y(k) - X(k - \tau)\| = 0, \text{ (ou } \lim_{k \rightarrow +\infty} \|Y(k) - X(k + \tau)\| \text{)}, \forall x(0). \quad (3.6)$$

Avec τ est un nombre positive très petit.

3.3.4 Synchronisation généralisée (GS)

La synchronisation généralisée est considérée, comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des chaotiques de dimensions et des modèles différent systèmes.

Elle manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotique : La synchronisation généralisé à été introduite pour des systèmes couplés uni-directionnellement par **Rulkov et al.** [33] en 1995.

Pour définir la synchronisation généralisée, on considère un cycle de système maître-esclave représenté par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t)) \\ \dot{Y}(t) = G(Y(t)) + U \end{cases} \quad (3.7)$$

Où $X(t) \in \mathbb{R}^n$, $Y(t) \in \mathbb{R}^m$, sont les états de système maître et le système esclave respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $U(t) = (u_i(t))_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ est un contrôleur à déterminer.

Définition 3.7 S'il existe une fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires du système maître et du système esclave avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - \Phi(X(t))\| = 0; \forall x(0), y(0). \quad (3.8)$$

Alors le système maître et le système esclave 3.2 se synchronisent au sues généralisé par rapport à la fonction Φ .

3.3.5 Synchronisation projective (PS)

La synchronisation projective a été d'abord rapportée par **Mainieri et Rehacek** [34] dans les systèmes chaotiques partiellement linéaires, dans les quels les réponses des deux systèmes identiques synchronisent jusqu'à un facteur d'échelle constant α_i .

XU et al [2] ont également introduit plusieurs régimes de contrôle basés sur la théorie stabilité de **Lyapunov** pour mener le facteur échelle à une valeur souhaitée et dérivé une condition générale pour la synchronisation projective que tous conditionnels des exposants de **Lyapunov** sont non positifs pour les systèmes en temps continu.

Définition 3.8 On dit qu'on a une synchronisation projective si les variables d'état $y_i(t)$ du système chaotique esclave $Y(t) = y_i(t)_{1 \leq i \leq n}$ se synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(t)$ du système chaotique maître $X(t) = x_i(t)_{1 \leq i \leq n}$ telle que :

$$\exists \alpha_i \neq 0 \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_i(t) - \alpha_i x_i(t)\| = 0; \forall (x(0), y(0)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.9)$$

On appelle α_i facteur d'échelle constant.

- Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète.
- Le cas où tous les α_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation complète.

3.3.6 Synchronisation Q-S

La synchronisation **Q-S** est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes [35].

Définition 3.9 Nous disons qu'un système maître, n -dimensionnelle, $X(t)$ et un système esclave, m dimensionnelle, $Y(t)$ sont en synchronisation **Q-S** dans la dimension d , s'il existe un contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et deux fonctions $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que l'erreur de synchronisation $e(t) = Q(X(t)) - S(Y(t))$, vérifie $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$.

3.3.7 Synchronisation FPS

La plupart des efforts de recherche mentionnés ci-dessus se sont concentrés sur l'étude d'un facteur d'échelle constant. Récemment, **Chen et Li** [36] ont présenté une nouvelle méthode de synchronisation notée **FPS** (en anglais : **Function Projective Synchronization**). Par la suite, **Hongyue Du et al.** [37] ont montré qu'un contrôle peut être utilisé pour manipuler le facteur échelle de telle sorte que le système émetteur et le système récepteur peuvent être synchronisés jusqu'à une fonction de mise à l'échelle souhaitée.

La **FPS** est une d'énition plus générale de la **PS**. En comparaison avec la **PS**, la **FPS** signifie que les deux systèmes maître-esclave peuvent être synchronisés à une fonction de mise en échelle, mais pas une constante. Cette fonction pourrait être utilisée pour obtenir une communication plus sécurisée, car il est évident que l'imprévisibilité de l'échelle de la fonction dans la méthode **FPS** peut en outre améliorer la sécurité de la communication.

Pour le meilleur de nos connaissances, à l'heure actuelle, il y a peu de résultats théoriques sur la **FPS**. Motivés par cette raison, nous référons aux travaux de **Hongyue Du et al.** [37] pour donner une définition et un exemple de la méthode.

Pour définir la synchronisation **FPS**, on décrit le terme d'erreur par :

$$e(t) = X(t) - H(t)Y(t) \quad (3.10)$$

ou $H(t)$ est une fonction continûment différentiable bornée et $H(t) \neq 0$ pour tout t .

Définition 3.10 Pour le système, s'il existe une fonction de mise à l'échelle $H(t)$ telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$, alors nous appelons cette synchronisation **FPS**.

3.3.8 Synchronisation HPS

la synchronisation notée **HPS** (en anglais : **Hybrid Projective Synchronization**) a été proposé par **Manfeng Hu et al.** [38]. Dans ce type de synchronisation, les deux systèmes émetteur et récepteur peuvent synchroniser jusqu'à des différents facteurs d'échelle. La **HPS** peut être considérée comme une extension de la synchronisation projective **PS**, car la synchronisation complète et anti-synchronisation sont ses deux cas particuliers. Depuis, la synchronisation **HPS** ne cesse d'être étudiée pour plusieurs disciplines, en particulier les communications présentés par **A. Khan et al** [39].

Pour définir la synchronisation **HPS**, le terme d'erreur est proposé comme :

$$e(t) = H(t)Y(t) - X(t) \quad (3.11)$$

ou $H(t)$ est une matrice de mise à l'échelle, $H(t) = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$, h_i est un facteur d'échelle et $h_i \neq 0$ pour tout t .

Définition 3.11 Pour le système, s'il existe une matrice réversible de mise à l'échelle H d'ordre n telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0$.

Alors il y a une synchronisation **HPS**.

1. Si $H = I$, ou I est la matrice unité, alors la synchronisation est appelée **CS**.

2. Si $H = I$, alors la synchronisation est nommée **AS**.
3. Si $H = I$, et $\neq \pm 1$ un réel constant différent de zéro, alors la synchronisation est appelée **PS**.
4. Si $H = \text{diag}(h_1, h_2, \dots, h_n)$ et h_1, h_2, \dots, h_n sont des constantes différentes non nulles, alors la synchronisation est nommée **MPS**. Donc **CS**, **AS**, **PS** et **MPS** sont des cas particuliers de la **HPS**.

3.4 Méthode de synchronisation

3.4.1 Méthode de contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques a été proposée par **Bai et Lonngren** [40]. C'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme a été présentée par **M. A. Ahan** [41], **O. I. Olusola et al** [42], **K. S. Ojo et al** [43].

Soient deux systèmes chaotiques à synchronisent maître et esclave définis par :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)) \\ \dot{Y} = G(Y(t)) + U \end{cases} \quad (3.12)$$

Où $X(t) \in \mathbb{R}^n, Y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs d'états des systèmes maître et esclave respectivement, et $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer.

Pour que les deux systèmes se synchronisent nulle faut que l'erreur entre les trajectoires des systèmes, donc le système converge vers zéro lorsque le temps tends vers l'infini, cet erreur est déterminé comme suit :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad (3.13)$$

Alors

$$\dot{e}(t) = \dot{Y}(t) - \dot{X}(t) \quad (3.14)$$

$$\dot{e}(t) = G(Y(t)) - F(X(t)) + U \quad (3.15)$$

Si on peut écrire la quantité $G(Y(t)) - F(X(t))$ de la façon suivante :

$$G(Y(t)) - F(X(t)) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) \quad (3.16)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U \quad (3.17)$$

d'om $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire, le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - N(x(t), y(t)) \quad (3.18)$$

d'où V est le contrôleur actif définit par :

$$V = -Le(t) \quad (3.19)$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue, on obtient donc la formule finale de l'erreur :

$$\dot{e}(t) = (A - L)e(t) \quad (3.20)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître et le système esclave et transformée en problème de zéro stabilité du système 3.19.

3.5 Simulation numérique

3.5.1 Synchronisation complète des systèmes chaotiques

On utilise la méthode de contrôleur actif

On assume qu'on a deux systèmes de **Lorenz** de 1963 [15], système maître contrôle le système esclave, représentés respectivement :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \delta(y_1 - x_1) \\ \dot{y}_1 = rx_1 - y_1 - x_1z_1 \\ \dot{z}_1 = -bz_1 + x_1y_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = \delta(y_2 - x_2) + u_1 \\ \dot{y}_2 = rx_2 - y_2 - x_2z_2 + u_2 \\ \dot{z}_2 = -bz_2 + x_2y_2 + u_3 \end{cases} \quad (3.21)$$

Pour la synchronisation complète, l'erreur est défini par :

$$\begin{cases} e_1 = x_2 - x_1 \\ e_2 = y_2 - y_1 \\ e_3 = z_2 - z_1 \end{cases} \quad (3.22)$$

Sa dynamique est :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \\ \dot{e}_3 = \dot{z}_2 - \dot{z}_1 \end{cases} \quad (3.23)$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \delta (e_2 - e_1) + u_1 \\ \dot{e}_2 = r e_1 - e_2 - x_2 z_2 + x_1 z_1 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -b e_3 + x_2 y_2 - x_1 y_1 + u_3 \end{cases} \quad (3.24)$$

d'après la méthode de contrôleur actif, l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\dot{e}(t) = A e(t) + N(X(t), Y(t)) + U \quad (3.25)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & \delta & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2 z_2 + x_1 z_1 \\ x_2 y_2 - x_1 y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

D'où

$$U = V - N(X(t) - Y(t)) \quad (3.26)$$

On définit le contrôleur U comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = x_2 z_2 - x_1 z_1 + v_2 \\ u_3 = -x_2 y_2 + x_1 y_1 + v_3 \end{cases} \quad (3.27)$$

Remplaçons 3.26 dans 3.23, on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \delta (e_2 - e_1) + v_1 \\ \dot{e}_2 = r e_1 - e_2 + v_2 \\ \dot{e}_3 = -b e_3 + v_3 \end{cases} \quad (3.28)$$

V le contrôleur actif défini par $V = -L e(t)$ nous le choisissons comme suit :

$$\begin{cases} v_1 = -\delta e_2 \\ v_2 = -r e_1 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

D'où la matrice de contrôle inconnue

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & \delta & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

On obtient la formule finale d'erreur :

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1(t) \\ \dot{e}_2(t) \\ \dot{e}_3(t) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -\delta & \delta & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \delta & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

$$= \begin{pmatrix} -\delta & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

On calcule le polynôme caractéristique et on trouve les valeurs propres $\lambda_1 = -\delta$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -b$, tous les λ sont négatives.

Donc le système est asymptotiquement stable au sens de **Lyapunov**, ce qui assure que pour tout $t \rightarrow +\infty$ l'erreur $e_i \rightarrow 0$ ($i = 1, 2, 3$).

C'est-à-dire la synchronisation complète de deux systèmes est réalisée.

3.6 Conclusion

Après avoir abordé un peu d'historique de la synchronisation, on a donné les définitions relatives à la : la synchronisation complète (**SC**), anti-synchronisation, décalé, généralisé (**GS**), projective (**PS**), **Q.S**, **FPS**, **HPS**.

Après, on a annoncé la méthode de contrôleur actif pour résliser la synchronisation, en donnat un exemple numérique pour atteindre la synchronisation complète de deux systèmes dynamiques chaotiques identiques de **Lorenz**.

Chapitre 4

La coexistence de GS et IGS entre systèmes chaotiques et hyperchaotiques

4.1 Introduction

Le comportement non linéaire telles que la stabilité, le contrôle et la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques est devenu un domaine de recherche actif. Il a attiré de plus en plus l'attention de nombreux chercheurs dans les domaines de la science et de la technique en raison de ses applications potentielles dans différentes disciplines [44, 45]. Vu l'importance des systèmes dynamiques non linéaires, ces applications ont trouvées des champs importants dans les mathématiques [46, 47, 48, 49, 50, 51].

Ce chapitre est concentré sur la coexistence de la synchronisation (**GS**) et son inverse (**IGS**) entre les systèmes chaotiques et hyperchaotiques en 3-D et 4-D à temps continu. On utilise la théorie de stabilité de **Lyapunov** et la théorie de stabilité des systèmes dynamiques linéaires pour prouver la coexistence de (**GS**) et (**IGS**) entre deux systèmes de dimensions différentes.

4.2 Définitions de GS et IGS

La synchronisation généralisée **GS** est caractérisée par l'existence d'une relation fonctionnelle entre l'état $Y(t)$ du système esclave et l'état $X(t)$ du système maître, de sorte que $Y(t) = \phi(X(t))$ après un temps transitoire [52]. Différents types de synchronisation peuvent être obtenus à partir du **GS** en fonction du choix ϕ . Une variation est représentée par son inverse (**IGS**). Pour **IGS**, la synchronisation devient $X(t) = \phi(Y(t))$ après un temps de transitoire.

Pour définir **GS** et **IGS**, nous considérons le système maître et le système esclave, respectivement

par :

$$\dot{X}(t) = F(X(t)) \quad (4.1)$$

$$\dot{Y}(t) = G(Y(t)) + U \quad (4.2)$$

où $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$, $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq m}$ sont les états du système maître et du système esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un contrôleur vectoriel.

Définition 4.1 *Le système maître 4.1 et le système esclave 4.2 sont en synchronisation généralisée (GS), s'il existe un contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et une fonction différentiable $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, tel que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - \phi(X(t))\| = 0.$$

Définition 4.2 *Le système maître (4, 1) et le système esclave (4, 2) sont en synchronisation généralisée inverse (IGS), s'il existe un contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et une fonction différentiable $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, tel que*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - \varphi(Y(t))\| = 0.$$

4.3 Coexistence de GS et IGS en 3-D

4.3.1 Description des systèmes maître-esclave chaotiques

Ici, nous supposons que le système maître peut être considéré comme suit :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j(t) + f_i(X(t)), \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (4.3)$$

où $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$ est l'état du système maître 4.3, $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Aussi, nous considérons le système esclave comme suit :

$$\dot{y}_i(t) = g_i(Y(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (4.4)$$

où $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq 4}$ est l'état du système esclave 4.4, $g_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, et u_i , $i = 1, 2, 3, 4$ sont des contrôleurs.

4.3.2 Formulation du problème en 3-D

Définition 4.3 *On dit que GS et IGS coexistent dans la synchronisation du système maître (4.3) et du système esclave (4.4), s'il existe des contrôleurs u_i , $i = 1, 2, 3, 4$, et des fonctions différentiables*

$\phi_1, \phi_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, de telle sorte que les erreurs de synchronisation :

$$\begin{cases} e_1(t) = y_1(t) - \phi_1(X(t)) \\ e_2(t) = x_2(t) - \varphi(Y(t)) \\ e_3(t) = y_3(t) - \phi_2(X(t)) \end{cases} \quad (4.5)$$

satisfont $\lim_{t \rightarrow +\infty} e_i(t) = 0, i = 1, 2, 3$.

4.3.3 Résultats analytiques en 3-D

Le système d'erreur 4.5 peut être dérivé comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = \dot{y}_1(t) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} \dot{x}_j(t), \\ \dot{e}_2(t) = \dot{x}_2(t) - \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \dot{y}_j(t), \\ \dot{e}_3(t) = \dot{y}_3(t) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_j} \dot{x}_j(t), \end{cases} \quad (4.6)$$

d'après 4.3 et 4.4 on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = g_1(Y(t)) + u_1 - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} \dot{x}_j(t), \\ \dot{e}_2(t) = \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j(t) + f_2(X(t)) - \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} \dot{y}_j(t), \\ \dot{e}_3(t) = g_3(Y(t)) + u_3 - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_j} \dot{x}_j(t), \end{cases} \quad (4.7)$$

on pose :

$$\begin{cases} R_1 = g_1(Y(t)) - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \phi_1}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j(t) + f_i(X(t)) \right) \\ R_2 = \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j(t) + f_2(X(t)) - \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} g_j(Y(t)), \\ R_3 = g_3(Y(t)) - \sum_{i=3}^3 \frac{\partial \phi_2}{\partial x_j} \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j(t) + f_i(X(t)) \right) \end{cases} \quad (4.8)$$

Alors, le système d'erreur 4.7 peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = u_1 + R_1, \\ \dot{e}_2(t) = - \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \varphi}{\partial y_j} u_j + R_2, \\ \dot{e}_3(t) = u_3 + R_3. \end{cases} \quad (4.9)$$

Pour atteindre la synchronisation entre le système maître 4.3 et le système esclave 4.4, nous supposons que : $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} \neq 0$ et les contrôleurs u_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) sont construits comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \sum_{j=1}^3 (a_{1j} - c_{1j}) e_j(t) - R_1, \\ u_2 = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}} \left(\sum_{j=1}^3 (a_{1j} - c_{1j}) e_j(t) - R_1 \right) - \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}} \left(\sum_{j=1}^3 (a_{2j} - c_{2j}) e_j(t) - R_2 \right) \\ \quad - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y_3}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}} \left(\sum_{j=1}^3 (a_{3j} - c_{3j}) e_j(t) - R_3 \right) \\ u_3 = \sum_{j=1}^3 (a_{3j} - c_{3j}) e_j(t) - R_3 \\ u_4 = 0. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

où $(c_{ij})_{3 \times 3}$ sont des constantes de contrôle.

d'après 4.9 et 4.10 on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1 = \sum_{j=1}^3 (a_{1j} - c_{1j}) e_j(t), \\ \dot{e}_2 = \sum_{j=1}^3 (a_{2j} - c_{2j}) e_j(t), \\ \dot{e}_3 = \sum_{j=1}^3 (a_{3j} - c_{3j}) e_j(t). \end{array} \right. \quad (4.11)$$

En substituant la loi de contrôle 4.11, le système d'erreur peut être écrit comme suit :

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^3 (a_{ij} - c_{ij}) e_j(t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.12)$$

ou sous la forme compacte :

$$\dot{e}(t) = (A - C)e(t). \quad (4.13)$$

où $e(t) = (e_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$, $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$.

Construire la fonction candidate de **Lyapunov** sous la forme $V(e(t)) = e^T(t)e(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \dot{e}^T(t)e(t) + e^T(t)\dot{e}(t) \\ &= e^T(t)(A - C)^T e(t) + e^T(t)(A - C)e(t) \\ &= e^T(t)[(A - C)^T + (A - C)]e(t). \end{aligned}$$

Si la matrice de contrôle C est choisie telle que : $(A - C)^T + (A - C)$ est une matrice définie négative, nous obtenons $\dot{V}(e(t)) < 0$.

Ainsi, à partir de la théorie de stabilité de **Lyapunov**, c'est la solution nulle du système d'erreur 4.11 qui est globalement asymptotiquement stable, c'est-à-dire : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e_i(t)\| = 0, i = 1, 2, 3$. Par conséquent, les systèmes 4.3 et 4.4 sont globalement synchronisés.

Théorème 4.1 *Il existe une matrice de contrôle appropriée $C = (c_{ij})_{3 \times 3}$ pour réaliser la coexistence de GS et IGS entre le système maître 4.3 et le système esclave 4.4 sous la loi de contrôle 4.9.*

4.4 Coexistence de IGS et GS en 4-D

4.4.1 Description des systèmes maître-esclave

Maintenant, le système maître et le système esclave peuvent être écrits, respectivement, dans les formes suivantes :

$$\dot{x}_i(t) = f_i(X(t)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.14)$$

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^4 b_{ij} y_j(t) - g_i(Y(t)) + u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.15)$$

où $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq 3}$, $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq 4}$ sont les états du système maître et du système esclave, respectivement, $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, ($i = 1, 2, 3$), $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$, $g_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions non linéaires et u_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) sont des contrôleurs.

4.5 Formulation du problème en 4-D

Définition 4.4 *On dit que IGS et GS coexistent dans la synchronisation du système maître 4.14 et du système esclave 4.15,*

s'il existe des contrôleurs u_i , $i = 1, 2, 3, 4$, et des fonctions différentiables $\chi_1, \chi_2 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ de telle sorte que les erreurs de synchronisation :

$$\begin{cases} e_1(t) = x_1(t) - \chi_1(Y(t)), \\ e_2(t) = y_2(t) - \psi_1(X(t)), \\ e_3(t) = x_3(t) - \chi_2(Y(t)), \\ e_4(t) = y_4(t) - \psi_2(X(t)). \end{cases} \quad (4.16)$$

satisfont $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e_i(t)\| = 0, i = 1, 2, 3, 4$.

4.6 Résultats analytiques en 4-D

Le système d'erreur 4.16 peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = -\sum_{j=1}^4 \frac{\partial \chi_1}{\partial y_j} u_j + T_1(t), \\ \dot{e}_2(t) = T_2(t) + u_2, \\ \dot{e}_3(t) = -\sum_{j=1}^4 \frac{\partial \chi_1}{\partial y_j} u_j + T_3(t), \\ \dot{e}_4(t) = T_4(t) + u_4. \end{cases} \quad (4.17)$$

on pose :

$$\begin{cases} T_1(t) = f_1(X(t)) - \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \chi_1}{\partial y_j} \left(\sum_{j=1}^4 b_{ij} y_j(t) + g_i(Y(t)) \right), \\ T_2(t) = \sum_{j=1}^4 b_{2j} y_j(t) + g_2(Y(t)) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j} f_j(X(t)), \\ T_3(t) = f_3(X(t)) - \sum_{j=1}^4 \frac{\partial \chi_2}{\partial y_j} \left(\sum_{j=1}^4 b_{ij} y_j(t) + g_i(Y(t)) \right), \\ T_4(t) = \sum_{j=1}^4 b_{4j} y_j(t) + g_4(Y(t)) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \psi_2}{\partial x_j} f_j(X(t)). \end{cases} \quad (4.18)$$

Dans ce cas, nous supposons que : $\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3} \neq 0$.

Ensuite, les contrôleurs u_i , ($i = 1, 2, 3, 4$), sont conçus comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{j=1}^4 \alpha_j \left(\sum_{j=1}^4 (b_{ij} - l_{ij}) e_j(t) - T_i \right), \\ u_2 = \sum_{j=1}^4 (b_{2j} - l_{2j}) e_j(t) - T_2, \\ u_3 = \sum_{j=1}^4 \beta_j \left(\sum_{j=1}^4 (b_{ij} - l_{ij}) e_j(t) - T_i \right), \\ u_4 = \sum_{j=1}^4 (b_{4j} - l_{4j}) e_j(t) - T_4. \end{cases} \quad (4.19)$$

où $(l_{ij})_{4 \times 4}$ sont des constantes de contrôle, et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial y_3}}{\frac{\partial x_1}{\partial y_3} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_3}}, \alpha_2 = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial y_3} \frac{\partial x_1}{\partial y_2} - \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \frac{\partial x_2}{\partial y_2}}{\frac{\partial x_1}{\partial y_3} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_3}}, \\ \alpha_3 = \frac{-\frac{\partial x_1}{\partial y_3}}{\frac{\partial x_1}{\partial y_3} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_3}}, \alpha_4 = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial y_3} \frac{\partial x_1}{\partial y_4} - \frac{\partial x_1}{\partial y_3} \frac{\partial x_2}{\partial y_4}}{\frac{\partial x_1}{\partial y_3} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_3}}, \\ \beta_1 = \frac{-\frac{\partial x_2}{\partial y_1}}{\frac{\partial x_1}{\partial y_3} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_3}}, \beta_2 = \frac{\frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_2} - \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_1}}{\frac{\partial x_1}{\partial y_3} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_3}}, \\ \beta_3 = \frac{\frac{\partial x_1}{\partial y_1}}{\frac{\partial x_1}{\partial y_3} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_3}}, \beta_4 = \frac{\frac{\partial y_1}{\partial y_1} \frac{\partial y_4}{\partial y_1} - \frac{\partial y_4}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial y_1}}{\frac{\partial x_1}{\partial y_3} \frac{\partial x_2}{\partial y_1} - \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial x_2}{\partial y_3}}, \end{array} \right.$$

En utilisant la loi de contrôle (4.17), le système d'erreur (4.15) peut être écrit comme suit :

$$e_i(t) = \sum_{j=1}^4 (b_{ij} - l_{ij}) e_j(t), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.20)$$

où

$$\dot{e}(t) = (B - L)e(t). \quad (4.21)$$

où $e(t) = (e_i(t))_{1 \leq i \leq 4}$, $B = (b_{ij})_{4 \times 4}$, $L = (l_{ij})_{4 \times 4}$ est une matrice constante de contrôle.

Dans ce cas, la matrice de contrôle L est sélectionnée de sorte que toutes les valeurs propres de $B - L$ aient une partie réelle négative.

Ainsi, par la stabilité asymptotique des systèmes linéaires à temps continu, toutes les solutions du système d'erreur 4.21 tend vers zéro comme $t \rightarrow +\infty$. Par conséquent, les systèmes 4.14 et 4.15 sont globalement synchronisés.

Théorème 4.2 *Il existe une matrice de contrôle appropriée $L = (l_{ij})_{4 \times 4}$ pour réaliser la coexistence de IGS et GS entre le système maître 4.14 et le système esclave 4.15 sous la loi de contrôle 4.20.*

4.7 Exemples numériques

4.7.1 Exemple 1 :

En tant que système maître, nous considérons un nouveau système chaotique 3-D proposé par Pham et al.[53] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -ax_3, \\ \dot{x}_2 = bx_1x_3 - cx_3^3, \\ \dot{x}_3 = x_1^4 + x_2^4 - k - dx_1x_3. \end{cases} \quad (4.22)$$

Lorsque les valeurs de paramètre sont prises comme : $a = 0.1$, $b = 3$, $c = 2.2$, $d = 0.2$ et $k = 0.81$, le système 4.22 présente un comportement chaotique, avec des équilibres situés sur la boucle carrée

arrondie (FIG. 4.1).

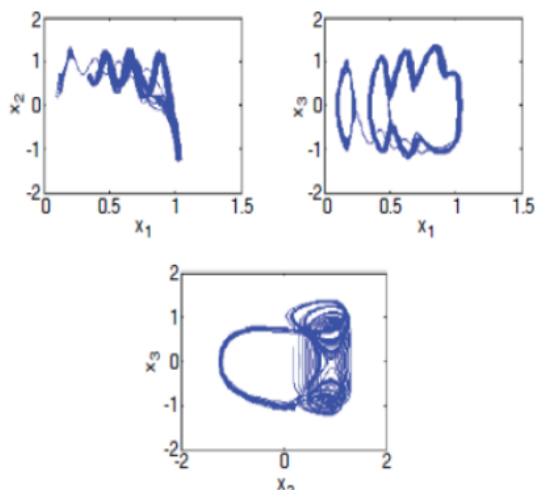


Fig.4.1 – Les attracteurs chaotiques pour le système maître (4.20) en 2-D

En tant que système esclave, nous considérons un nouveau système hyperchaotique en 4-D introduit par **Vaidyanathan** par [54] :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha (y_2 - y_1) + y_2 y_3 + y_4 + u_1, \\ \dot{y}_2 = -\gamma y_1 y_3 + \delta y_2 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1 y_2 - \beta + u_3, \\ \dot{y}_4 = -\epsilon (y_1 + y_2) + u_4. \end{cases} \quad (4.23)$$

Le système 4.23, avec $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$, présente un attracteur hyperchaotique étrange pour les valeurs des paramètres $\alpha = 60$, $\beta = 27$, $\gamma = 160$, $\delta = 0.3$ et $\epsilon = 2.8$.

Le système 4.23 n'a pas de points d'équilibre. Par conséquent, le système 4.23 a des attracteurs cachés. Lorsque les conditions initiales sont prises $(y_1(0), y_2(0), y_3(0), y_4(0)) = (1.2, 0.4, 0.3, 1.4)$,

la projection en 3-D du nouveau système hyperchaotique est montrée (FIG. 4.2).

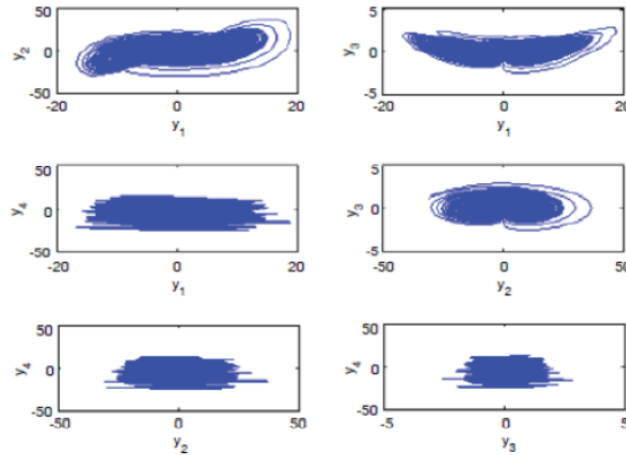


Fig.4.2 – Les attracteurs chaotiques pour le système esclave (4.21)

avec $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ en 2-D.

Selon la **définition 3**, les erreurs entre le système maître 4.22 et le système esclave 4.23 sont décrites comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - \varphi_1(x_1, x_2, x_3), \\ e_2 = x_2 - \phi(y_1, y_2, y_3, y_4), \\ e_3 = y_3 - \varphi_2(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (4.24)$$

où $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$, $\phi(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + y_4^2$ et $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_3$.

Alors, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1} = 1$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = 2$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial y_3} = 3$.

En utilisant les notations présentées dans la **Section 3**, la partie linéaire A et la partie non linéaire f du système maître 4.22 sont données comme suit :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } f = \begin{pmatrix} 0 \\ bx_1x_3 - cx_3^3 \\ x_1^4 + x_2^4 - k - dx_1x_3 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, la matrice de contrôle C est choisie comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

En s'appuyant sur l'équation 4.9, les contrôleurs u_1, u_2, u_3 et u_4 sont conçus comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -e_1 - R_1, \\ u_2 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}R_2 + \frac{9}{2}e_3 + \frac{3}{2}R_3, \\ u_3 = -3e_3 - R_3, \\ u_4 = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

où

$$\begin{cases} R_1 = \alpha(y_2 - y_1) + y_2y_3 + y_4 + ax_3 + (d - b)x_1x_3 + cx_3^3 - x_1^4 - x_2^4 + k, \\ R_2 = bx_1x_3 - cx_3^3 - (\alpha + 2\delta)y_2 + \alpha y_1 - y_4 + 2\gamma y_1y_3 + 3\beta - y_2(3y_1 + y_3) \\ + 2\epsilon y_4(y_1 + y_2), \\ R_3 = y_1y_2 - \beta + ax_2x_3 - bx_1^2x_3 + cx_3^3 - x_1^4 - x_2^4 + k + dx_1x_3. \end{cases} \quad (4.27)$$

Il est facile de montrer que : $(A - C)^T + (A - C)$ est une matrice définie négative. Par conséquent, les systèmes 4.22 et 4.23 sont globalement synchronisés en 3-D.

Le système d'erreur peut être décrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_1, \\ \dot{e}_2 = -2e_2, \\ \dot{e}_3 = -3e_3. \end{cases} \quad (4.28)$$

La figure FIG. 4.3 montre l'évolution du temps des erreurs e_1, e_2 et e_3 entre le système maître 4.22 et le système esclave 4.23.

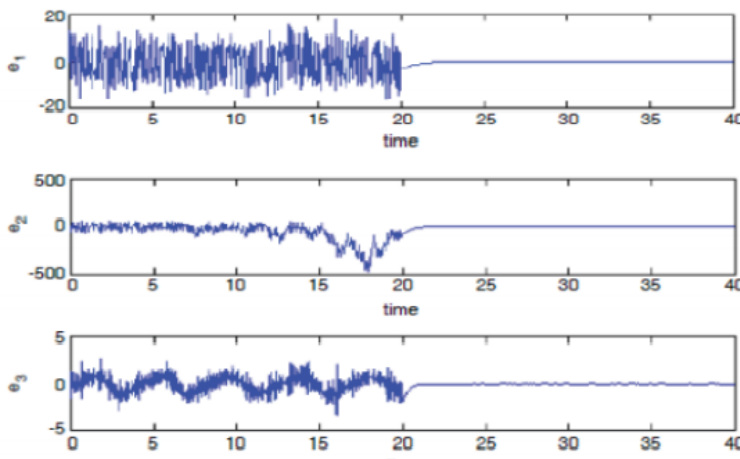


Fig.4.3 – Evolution du temps des erreurs $e_1; e_2$ et e_3 entre les deux systèmes (4.20) (4.21)

4.7.2 Exemple 2

Dans cet exemple, le système maître est défini par le nouveau système 3-D suivant [55] :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3x_2, \\ \dot{x}_3 = -x_1 - ax_1x_2 - bx_1x_3 + c. \end{cases} \quad (4.29)$$

Quand $(a, b, c) = (15, 1, -0.001)$ et les conditions initiales $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0, 0.5, 0.5)$, le système 4.29 présente un attracteur chaotique sans équilibre (FIG. 4.4).

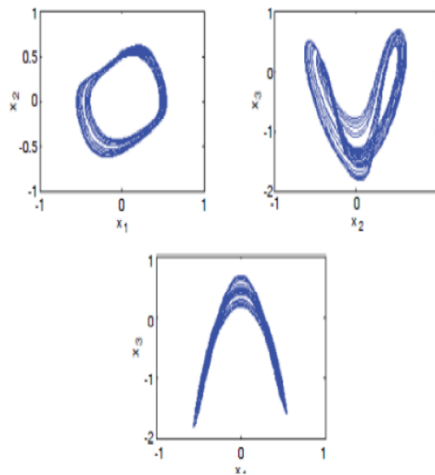


Fig.4.4 – Les attracteurs chaotiques pour le système maître (4.27) en 2-D.

Le système esclave est décrit par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(y_2 - y_1) + \gamma y_4 + u_1, \\ \dot{y}_2 = -y_1y_3 - y_2 + \gamma y_4 + u_2, \\ \dot{y}_3 = y_1y_2 - y_3 - \beta + u_3, \\ \dot{y}_4 = -\delta(y_1 + y_2) + u_4. \end{cases} \quad (4.30)$$

Le système 4.30 présente un attracteur hyperchaotique étrange pour les valeurs des paramètres $\alpha = 4$, $\beta = 20$, $\gamma = 0.2$ et $\delta = 0.5$ [56]. Le système 4.30 n'a pas de points d'équilibre. Par conséquent, le système a des attracteurs cachés. Lorsque les conditions initiales sont prises $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0.4, 0.4, 0.4, 0.4)$, la projection 3-D du nouveau système hyperchaotique est présentée (FIG. 4.5).

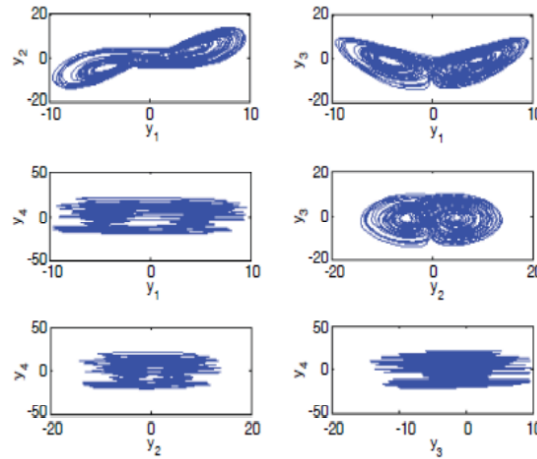


Fig.4.5 – Les attracteurs chaotiques pour le système esclave (4.28)

avec $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ en 2-D

Selon la **définition 4**, le système d'erreur entre le système maître (4.27) et le système esclave (4.28) est décrit par :

$$\begin{cases} e_1 = x_1 - \chi_1(y_1, y_2, y_3, y_4), \\ e_2 = y_2 - \psi_1(x_1, x_2, x_3), \\ e_3 = x_3 - \chi_2(y_1, y_2, y_3, y_4), \\ e_4 = y_4 - \psi_2(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (4.31)$$

où $\chi_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1 + y_3 + y_2y_4$, $\phi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$

$\chi_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{3}(y_1 - y_3 + y_2y_4)$, $\phi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2x_3$

Alors, $\frac{\partial \chi_1}{\partial y_3} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_1} - \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} \frac{\partial \chi_2}{\partial y_3} = y_1^2 + 1 \neq 0$.

En utilisant les notations présentées dans la **Section 4**, la partie linéaire B et la partie non linéaire g du système maître 4.30 sont données comme suit :

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0.2 \\ 0 & -1 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } g = \begin{pmatrix} 0 \\ -y_1y_3 \\ y_2y_2 - \beta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite, la matrice de contrôle L est sélectionnée comme suit :

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Selon l'équation 4.19, les contrôleurs u_1, u_2, u_3 et u_4 sont conçus comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{y_1^2+1} [(4e_1 + T_1) + 2y_4 (e_2 + T_2) + (e_3 + T_3) + 2y_2 (3e_4 + T_4)], \\ u_2 = -e_2 - T_2, \\ u_3 = \frac{4y_1^2}{y_1^2+1} (e_1 + T_1) + y_4 (e_2 + T_2) - \frac{1}{y_1^2+1} (e_3 + T_3) + 3y_2 (e_4 + T_4), \\ u_4 = -3e_4 - T_4. \end{cases} \quad (4.33)$$

où

$$\begin{cases} T_1 = x_2 - \alpha (y_2 - y_1) + y_4 (-\gamma + y_1 y_3 + y_2 - \gamma y_4) - y_1 y_2 + y_3 + \beta \\ \quad + \delta y_2 (y_1 + y_2), \\ T_2 = -y_1 y_3 - y_2 + \gamma y_4 + x_1 (2 + b x_3) - x_2 (1 + x_3) + a x_1 x_2 - c, \\ T_3 = -x_1 - a x_1 x_2 - b x_1 x_3 + c - y_1^2 (\alpha (y_2 - y_1) + \gamma y_4) \\ \quad - y_4 (-y_1 y_3 - y_2 + \gamma y_4) + (y_1 y_2 - y_3 - \beta) - y_2 (-\delta (y_1 + y_2)), \\ T_4 = -\delta (y_1 + y_2) - x_2 (x_3^2 + c) + x_1 x_2 (1 + a x_2 + b x_3) + x_1 x_3. \end{cases} \quad (4.34)$$

Nous pouvons montrer que toutes les valeurs propres de $B - L$ ont des parties réelles négatives. Par conséquent, les systèmes 4.29 et 4.30 sont globalement synchronisés en 4-D.

Le système d'erreur peut être écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -4e_1, \\ \dot{e}_2 = -e_2, \\ \dot{e}_3 = -e_3, \\ \dot{e}_4 = -3e_4. \end{cases} \quad (4.35)$$

Les résultats numériques représentés (FIG. 4.6) montrent l'efficacité de la méthode proposée.

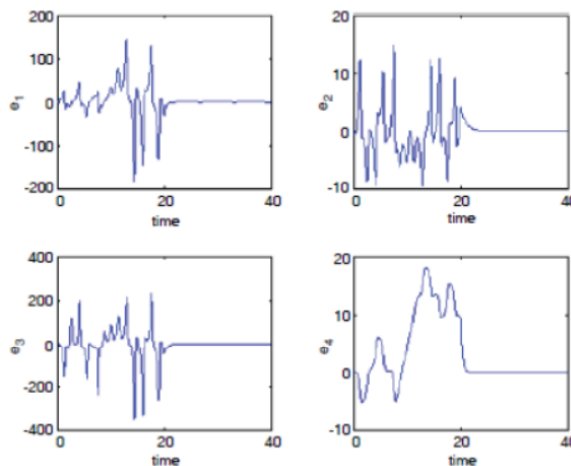


Fig.4.6 – Evolution du temps des erreurs e_1, e_2, e_3 et e_4 entre le système (4.27) et le système (4.28).

4.8 Conclusion

Motivés par l'importance de la synchronisation généralisée pour améliorer la sécurité et la transmission rapide de l'information, on a présenté dans ce chapitre un nouveau schéma de synchronisation. Ce nouveau schéma est basé sur la combinaison de la synchronisation généralisée (**GS**) et son inverse (**IGS**). Ce schéma a été construit pour réaliser la coexistence entre un système maître en 3-D et un système esclave à 4-D. Quelques exemples numériques sont incorporés dont l'attention de montrer l'efficacité des approches théoriques développées ici.

Conclusion générale

Actuellement, la synchronisation fait l'outil le plus moderne pour sécuriser la transmission de l'information, et aussi pour améliorer et accélérer l'accès aux informations. Par conséquent, plusieurs types de synchronisation ont été présentés. L'étude du schéma inverse de synchronisation est une idée séduisante, et qui peut améliorer le cryptage des systèmes de transmissions. Récemment, la combinaison de schémas de synchronisation est introduite et sert à sécuriser les communications. Dans ce travail de mémoire, on a étudié la coexistence de la synchronisation généralisée (GS) et son inverse (IGS) entre deux systèmes chaotiques et hyperchaotiques à temps continu.

On a réservé le premier chapitre à la présentation des systèmes dynamiques et leurs types dans le quel on a initié l'étude de la stabilité de ces systèmes. Dans le deuxième chapitre, on a présenté une vue panoramique sur la théorie du chaos et les attracteurs.

Dans le troisième chapitre, on a abordé les différentes définitions de la synchronisation des systèmes chaotiques, et en citant les différents types de la synchronisation et leur méthodes les plus utilisés. Dans le quatrième chapitre, on a examiné la combinaison de deux différents types de synchronisation (GS) et son inverse (IGS) entre deux systèmes chaotiques non identiques avec des différentes dimensions. Premièrement en 3-D en utilisant la théorie de la stabilité de Lyapunov. Ensuite, on a prouvé la coexistence de la synchronisation (IGS) et la synchronisation (GS) en 4-D en contrôlant la partie linéaire du système esclave et en utilisant la théorie de la stabilité des systèmes linéaires en temps continu. Les deux exemples numériques fournis dans ce travail ont clairement confirmé l'efficacité de l'analyse théorique.

Bibliographie

- [1] **C.M.MARLE**, "Systèmes dynamiques : une introduction.", **P.Pilibossian**, ellipsesédition, 2003.
- [2] **J.HUBBARD**, **B.WEST**, "Equations différentielles et systèmes mécaniques.", Cassini édition, 1999.
- [3] **F. Alain**, "Contribution à la prédiction et au contrôle des comportement apériodiques dans les convertisseurs électromécanique. Application de la théorie du chaos," Thèse de doctorat, Université de Reims France, 2005.
- [4] **A. Ikhlef**, "Control, Chaotification et Hyperchaotification des Systèmes Dynamiques ".
- [5] **Devaney, R.L.** An introduction to chaotic dynamical systems. In Addison-wisley, Redwood City, CA 37.
- [6] **D.Ruelle**, "Chaotic Evolution and Strange Attractors.", Cambridge : Cambridge University Press, 1989.
- [7] **E. Zeraoulia**, J. C. Sprott. "A two-dimensional discrete mapping with C1-multifold chaotic attractors", Electronic Journal of Theoretical Physics, vol. 5(17), pp .107-120,2008.
- [8] **Grebogi, C., OTT, E., Pelikan, S., Yorke, J.A.** (1984), "Strange attractors that are not chaotic," Physica D, Vol. 13, pp. 261-268.
- [9] **Mindlin, G.B., Hou, X-J., Solari, H.G., Gilmore, R., Tufilaro, N.B.** (1990), "Classification of strange attractors by integers", Phys. Rev. Lett., Vol. 64, pp. 2350.
- [10] **Farmer, J.D., Sidorowich, J.J.** (1987) "Predicting chaotic time series," Phys. Rev. Lett. Vol.59, pp. 84
- [11] **D. Ruelle, F. Takens.** "On the nature of turbulence", communication in Mathematica physics, vol. 20, pp .167-192 ; 1971.

-
- [12] **P. Berge, Y. Pomeau, C. Vidal.** "Order Within Chaos", Hermann and John Wiley and Sons, Paris, France, 1984.
- [13] **J. D. Farmer, J. J. Sidorowich.** "Predicting chaotic time series", Phys. Rev.Lett., vol. 59, 845,1987.
- [14] **L. O. Chua, C. W. Wu, A. Huang, G. Q. Zhong.** "A universal circuit for studying and generating chaos, part II : Routes to chaos", IEEE Trans. Circuit syst I : Fundamental Theory applications, vol. 40(10), pp .733 ; 1993.
- [15] **E.N.Lorenz.** "Deterministic non periodic flow", Journal of the Atmospheric Sciences, vol. 20(2), pp. 130-141, 1963.
- [16] **Li, T-Y., York, J.A.** (1975), "Period three implies chaos," Amer. Math. Mon., Vol. 82, pp.985-992
- [17] **Kaplan, D., Glass, L.** Finite-difference equations. Understanding nonlinear dynamics. New York : Springer-Verlag, 1995, pp. 1-53.
- [18] **Hilborn, R.** Chaos and Nonlinear Dynamics an Introduction for Scientists and Engineers,Oxford Student Edition, 1994
- [19] **Pomeau, Y., Manneville, P.** (1980), "Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems," Commun. Math. Phys., Vol. 74(2), pp. 189–197
- [20] **Eckmann, J.P.** (1981), "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems," Rev. Mod. Phys. Vol. 53, pp. 643-5
- [21] **O. E. Rössler.** "Continuous chaos-four prototype equations", Bifurcation theory and applications in scientific disciplines, Ann. New York Acad. Sci., vol. 316, pp. 376-392, 1979.
- [22] **O. E. Rössler.** "An equation for hyperchaos", Phys. Lett. A., vol. 71, pp. 155-157, 1979.
- [23] **Z. Liu.** "Strange nonchaotic attractors from periodically excited Chuas circuit", Int. J. of Bifurcation and Chaos in App. Sci. and Eng., vol. 11(1), pp. 225-230, 2001.
- [24] **T. Matsumoto.** "A chaotic attractor from Chuas circuit", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 31(12), pp. 1055-1058, 1984.
- [25] **T. Yamada, H. Fujisaka.** "Stability theory of synchronized motion in coupledoscillator." Progress of Theoretical Physics, 1983 : 32-47.
- [26] **V.S. Afraimovich, N.N. Verichev, M.N. Rabinovich.** "Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems." Radiophys. and Quantum Electronics, 1986 : 747751.
- [27] **L.M. Pecora, T.L.Caroll.** "Synchronization in chaotic systems." PHYSICAL REVIEW LETTERS, February 19, 1990 : 821-825.

- [28] **L.M. Pecora, T.L.Caroll.** "Synchronizing non-autonomous chaotic circuits." IEEE Transactions on Circuits and Systems II : Analog and Digital Signal Processing, Oct 1993 : 646-650.
- [29] **A.Khadra, X.Liu, X.Shen.** "Robust impulsive synchronization and application to communication security ." Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems– Series B : Applications & Algorithms, 2003 : 403-417.
- [30] **R.Brown , L.Kocarev,** "A unifying definition of synchronization for dynamical systems.", Chaos, vol. 10(2), pp. 344-349, June, 2000.
- [31] **Adeli, M., Zarabadipoor, H.** (2011), "Anti-synchronization of discrete-time chaotic systems using optimization algorithms," International Journal of Electronic Signals and Systems, pp 143-147. (2011),
- [32] **Diao, M., Yu, Y-G., Wang, S., Yu, J-Z.** (2010), "Hybrid lag function projective synchronization of discrete chaotic systems with different orders," Inter. J. Nonl. Sci. Num. Simu. Vol. 11 (7), pp. 503–508.
- [33] **N. FRulkov, K.M. Sushchik , L.S. Tsimring , H.D.I. Abarbanel,**"Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems.", Phys. Rev. E, 51, pp.980-994, 1995.
- [34] **R. Mainieri , J.Rehacek,** "Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems.", Phys. Rev. Lett. 82, pp. 3042-5,1999.
- [35] **M. Manfeng, Z. Xu.** "General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems", Nonlinear Analysis : Theory, methods and applications, vol. 69(4), pp. 1091-1099, 2008.
- [36] **Y. Chen, X. Li.** "Function projective synchronization between two identical chaotic systems", International journal of modern physics C., vol. 18(5), pp. 883-888, 2007.
- [37] **H. Du, Q. Zeng, C. Wang.** "Function projective synchronization of different chaotic systems with uncertain parameters", Phy. Lett.A., vol. 372, pp. 5402-5410, 2008.
- [38] **M. Hu, Y. Yang, Z. Xu, L. Guo.** "Hybrid projective synchronization in chaotic complex nonlinear system", Mathematics and Computers in Simulation, vol. 79, pp. 449-457, 2008.
- [39] **A. Khan, N. R Garg, G. Jain.** "Hybrid projective synchronization and chaos control", International Refereed Journal of Engineering and Science, vol. 3(1), pp. 09-14, 2014.
- [40] **E. Bai, K. E. Lonngren.** "Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control", Chaos, Solitons and Fractals, vol. 11(7), pp. 1041-1044, 2008.
- [41] **M. A. Ahan.** "Synchronization of different 3-D chaotic systems by generalized active control", J. Infor. Comp. Sci., vol. 7(4), pp. 272-283, 2012.

- [42] **O. I. Olusola, A. N. Njah, U. E. Vincent, E. Ali.** "Control and synchronization of chaos in biological systems via backstepping design", *International Journal of Nonlinear Science*, vol. 11(1), pp. 121-128, 2011.
- [43] **K. S. Ojo, A. N. Njah.** "A new active control method for control and tracking chaotic systems", *African Journal of Mathematical Physics*, vol. 9, pp. 59-71, 2010.
- [44] **Q. Gan.** "Exponential synchronization of generalized neural networks with mixedtime varying delays and diffusion reaction via periodically intermittent control", *Chaos*, vol. 27(1) :013113, 2017.
- [45] **B. Naderi, H. Kheiri .** "Exponential synchronization of chaotic system and application in secure communication", *Opik-International Journal for Light and Electron Optics*, vol. 127, pp. 2107-2412, 2016.
- [46] **K. S. Ojo, S. T. Ogunjo.** "Synchronization of 4-D Rabinovich hyperchaotic systems for secure communication", *Journal of the Nigeria Association of Mathematical Physics*, vol. 21, pp. 35-40, 2012.
- [47] **B. R. Nana Nbandjo, H. G. E. Kadji, H. A. Cerdeira.** "Synchronization enhancement via an oscillatory bath in a network of self-excited cells", *Pramana-journal of Physics*, vol. 84(2), pp. 257-272, 2015.
- [48] **E. B. M. Ngouonkadi, H. B. Fotsin, P. L. Fotso, V. K. Tamba, H. A. Cerdeira.** "Bifurcations and multistability in the extended Hindmarsh-Rose neuronal oscillator", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 85, pp. 151-163, 2016.
- [49] **A. C. Rodrigues, H. A. Cerdeira, B. S. Machado.** "The influence of hubs in the structure of a neuronal network during an epileptic seizure", *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 225(1), pp. 75-82, 2016.
- [50] **V. S. G. Martins, A. C. Rodrigues, H. A. Cerdeira, B. S. Machado.** "Phase-lag synchronization analysis in complex systems with directed interrelations", *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 225 (1), pp. 41-49, 2016.
- [51] **A. Mishra, S. Saha, C. Hens, P. K. Roy, M. Bose, P. Louodop, H. A. Cerdeira.** "Coherent liberation to coherent rotational dynamics via chimeralike states and clustering in a Josephson junction array", *Physical Review E*. vol. 95(1) :010201, 2017.
- [52] **R. Martinez-Guerra, C. D. Cruz-Ancona, C. A. Pérez-Pinacho.** "Generalized multi synchronization viewed as a multi-agent leader-following consensus problem", *Applied Mathematics and Computation*, vol. 282, pp. 226-236, 2016

-
- [53] **V. T. Pham, S. Jafari, C. Volos, A. Giakoumis, S. Vaidyanathan, T. Kapitaniak.** "A chaotic system with equilibria located on the rounded square loop and its circuit implementation", *Circuits and Systems II : IEEE Transactions*. vol. 63(9), 2016.
- [54] **S. Vaidyanathan.** "Analysis, control and synchronization of a novel 4-D hyperchaotic system with hidden attractors", In : Azar A. T, Vaidyanathan S (eds) *Advances in Chaos Theory and Intelligent Control*, Studies in computational intelligence, Springer-Verlag, Germany, 2015.
- [55] **V. T. Pham, C. Volos, S. Jafari, W. Zhouchao, X. Wang.** "Constructing a novel no equilibrium chaotic system", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 24(5), ID 1450073, 2014.
- [56] **S. Vaidyanathan.** "A novel 4-D hyperchaotic Thermalconvection system and its adaptive control", In : Azar A. T, Vaidyanathan S(eds) *Advances in Chaos Theory and Intelligent Control*, Studies in computational intelligence, Springer-Verlag, Germany, 2015.
- [57] **A. Gasri, et al.** "Coexistence of generalized synchronization and inverse generalized synchronization between chaotic and hyperchaotic systems". *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, vol 23(4), 583-598, 2018.
- [58] **A. Gasri**, Thèse de Doctorat en sciences en Mmathématiques, "Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques", Université Frères Mentouri-Constantine1, 2018.