



جامعة العربي التبسي - تبسة
Université Larbi Tébessi - Tébessa

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique



جامعة العربي التبسي - تبسة
Université Larbi Tébessi - Tébessa

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire élaboré en vue de l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématique

Option : Equation aux dérivées partielles et applications

Thème :

**L'étude de la Stabilité et la Bifurcation de
Hopf pour un modèle d'alcoolisme
structuré en âge**

Présenté Par :

Rezaiguia Lokmane

Tahri Tarek

Devant le jury :

Mr : Abderrahmane Zaraï	Prof	Université Larbi Tébessi	Président
Mr : Belgacem Rebiai	Prof	Université Larbi Tébessi	Examineur
Mr : Abderrazak Nabti	MCA	Université Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 20/06/2021

Remerciements

*A l'issue de ce modeste travail, nous tenons tout d'abord à remercier "Dieu"
Qui nous donné le courage, la patience a fini notre travail.*

Nous voudrions dans un premier temps à remercier notre encadrant

*ABDERRAZAK Nabti, pour son aide, ses précieux conseils qui ont été nécessaires pour la
réalisation de ce travail.*

Je remercie également tous les membres du jury Mr: Abderrahmen Zarai,

*Mr : Belgacem Rebeai d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce travail. Nous
adressés nos sincères remerciements à tous les enseignants et toute*

*les personnes qui par leur paroles, conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions au
long de nos études de notre parcours universitaire.*

*Nous tenons à remercier nos chers collègues qui m'ont apporté leurs soutiens
moral et leurs agréables moments au long de nos chemins.*

*Un grand merci également à tous ceux qui nous soutiennent de près ou de
loin pour la réalisation de ce modeste travail.*

"إلى أمي العظيمة وأبي القوي، فخامة الكلمتين تكفي، أصل هنا لأنكما
كنتما دائما خلفي، إلى إخوتي أسامة وعدنان والصادق من شاركوني سقف
الحياة، إلى الصغير الذي يكبر مسلم، إلى زملائي الذين شاركوني
المقاعد، أسماؤكم أوسع من هذه السطور، أهدىكم تعبي لنحتفي به معا"

لقمان رزايقية

"إلى الجوهرة أمي والقنديل أبي رب ارحمهما كما علماني صغيرا، إلى
أخواتي سورية والطاوس وضحي، إلى إخوتي عادل ورايح وعيسى، إلى
شريكتي نسيمة، إلى كل من تقاطعت معهم في مدرسة وجامعة، أهدىكم
حصاد السنين"

طارق طاهري

Résumé

Dans ce travail, nous considérons un modèle d'alcoolisme dans lequel les individus alcooliques ont une structure d'âge. Nous formulons le modèle d'épidémie sous la forme d'un problème de Cauchy non homogène, puis nous étudions l'existence, l'unicité et la positivité des solutions du problème obtenu. Ensuite, nous cherchons les conditions d'existence des différents points d'équilibre du modèle proposé (le point d'équilibre trivial, et le point d'équilibre positif). Après, par la linéarisation du modèle, nous étudions la stabilité locale par le théorème de Routh-Hurwitz. Finalement, en utilisant le théorème de bifurcation, nous prouvons que la bifurcation de Hopf se produit lorsque le paramètre de bifurcation traverse certaines valeurs critiques.

ملخص

تعتبر ظاهرة إدمان الكحول من أخطر الظواهر المنتشرة في العالم, وهي المسببة لنسبة مقلقة للوفيات حول العالم وأيضا لبعض الأمراض المستعصية كالسرطان .

في هذه المذكرة سوف ندرس نموذجا وبائيا لإدمان الكحول, نقوم بصياغة النموذج الوبائي المتعلق بعمر الإدمان لدى الأفراد المدمنين والزمن على شكل مسألة كوشي غير متجانسة, ثم ندرس وجود و وحدانية و إيجابية حل هذه المسألة. بعد ذلك نبحث عن شروط وجود نقاط التوازن المختلفة للنموذج المقترح (نقطة التوازن التافهة ، ونقطة التوازن الإيجابية) من خلال نظام خطي مكافئ لمسألة كوشي غير المتجانسة, وهذا يمكننا من دراسة الإستقرار المحلي لنقاط التوازن. ثم أخيرا باستخدام نظرية تشعب هوبف, نثبت أن تشعب هوبف يحدث عندما يتقاطع وسيط التشعب مع قيم حرجة معينة.

Abstract

In this work, we investigate a new alcoholism model in which alcoholics have age structure. We rewrite the model as an abstract non densely defined Cauchy problem and obtain the condition which guarantees the existence of the unique positive steady state. By linearizing the model at steady state and analyzing the associated characteristic transcendental equations, we study the local asymptotic stability of the steady state. Furthermore, by using Hopf bifurcation theorem , we show that Hopf bifurcation occurs at the positive steady state when bifurcating parameter crosses some critical values.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	5
1.1 Définitions élémentaires	5
1.2 Généralités sur la théorie spectrale des opérateurs	6
1.3 Généralités sur la théorie de semi-groupe	7
1.4 Problème de Cauchy Homogène	8
1.5 Equation d'évolution non linéaire	9
1.6 Généralités sur la stabilité	10
1.7 Résumé historique et mathématique de la théorie de bifurcation de Hopf	13
2 Analyse mathématiques du modèle d'alcoolisme	18
2.1 Formulation du modèle d'alcoolisme	18
2.2 Equation de transport	20
2.3 Problème de Cauchy associé	22
2.4 L'existence et l'unicité de la solution	25
2.5 La positivité de la solution	32
3 Stabilité et bifurcation de Hopf des points d'équilibres du système	34
3.1 Linéarisation	37
3.2 Stabilité du point d'équilibre triviale	52
3.3 L'équation caractéristique de $M(\lambda)$	52

3.4	Stabilité du point d'équilibre positif $E_1^*(a)$	55
	Conclusion	64

Introduction

À l'échelle mondiale, la consommation d'alcool entraîne environ 3,3 millions de décès chaque année (5,9% de tous les décès), c'est plus que, par exemple, la proportion de décès dus à VIH / sida (2,8%), violence (0,9%) ou tuberculose (1,7%) [15]. La consommation d'alcool a été identifiée comme l'une des causes principales de plus de 200 maladies, blessures et autres problèmes de santé, comme décrit dans la Classification statistique internationale des maladies et problèmes de santé connexes (CIM) 10e révision (OMS, 1992), plus de 30 incluent l'alcool dans leur nom ou leur définition. Cela indique que ces conditions pathologiques n'existent pas du tout en l'absence de consommation d'alcool. Une forte association existe entre la consommation d'alcool et l'infection à VIH, les maladies sexuellement transmissibles [16]. La consommation d'alcool peut causer des dommages à d'autres personnes, comme des voies de fait, un homicide (intentionnel) ou un accident de la route, un accident de travail (non intentionnel). De plus, la consommation d'alcool entraîne une charge économique importante pour la société dans son ensemble. 5,1% de la charge mondiale de morbidité et de traumatisme sont imputables à l'alcool [15]. Comme discuté ci-dessus, la consommation d'alcool a un effet grave sur la santé et le bien-être des individus et des populations.

Récemment, on s'est rendu compte que les modèles mathématiques sont importants pour comprendre le processus de consommation d'alcool. Mulone et coll. [17] ont étudié un modèle en deux étapes pour les jeunes problèmes d'alcoolisme graves et leur traitement. Les jeunes ayant des problèmes d'alcool ont été divisés en deux composantes, à savoir ceux qui ont admis avoir le problème et ceux qui ne l'ont pas admis. La stabilité de deux états stationnaires a été analysée. Xiang et coll. [18] ont développé un modèle de consommation d'alcool avec des campagnes

d'éducation en santé publique. Des analyses mathématiques ont établi que la stabilité asymptotique globale des équilibres était déterminée par le numéro de reproduction de base R_0 . Si $R_0 \leq 1$, l'équilibre sans alcool était globalement asymptotiquement stable, et si $R_0 > 1$, l'équilibre présent d'alcool était globalement asymptotiquement stable, et ils ont conclu que les campagnes d'éducation en santé publique des consommateurs d'alcool pourraient ralentir la dynamique de la consommation d'alcool. Huo et coll. [19] a introduit un nouveau modèle d'alcoolisme qui impliquait l'impact de Twitter. La stabilité de tous les équilibres a été obtenue en termes du nombre de reproduction de base R_0 . La bifurcation en arrière et en avant, la bifurcation de Hopf ont également été analysées. Pour d'autres modèles d'alcoolisme ou d'épidémoc, nous nous sommes référés à [20],[21],[22],[23],[24],[25],[26],[27]. En 1990, Thieme [28] a observé que les modèles structurés par âge pouvaient être considérés comme des problèmes de Cauchy non densément définis, par la suite, Magal et Ruan [29], Liu et al. [30] ont développé la théorie des variétés centrales et le théorème de bifurcation de Hopf pour les ont défini les problèmes de Cauchy, respectivement. En utilisant la théorie et le théorème ci-dessus, Liu et al. [31] ont montré que le modèle structuré par âge du mutualisme consommateur-ressources présentait Hopf bifurcation à l'équilibre positif dans certaines conditions. Wang et Liu [11] ont considéré un modèle compartimental ravageur-pathogène structuré par âge. Leurs résultats ont montré que la bifurcation de Hopf s'est produite à un état d'équilibre positif lorsque le paramètre de bifurcation passait des valeurs. Tang et Liu [32] ont étudié un nouveau modèle prédateur-proie avec une structure par âge et ont montré une bifurcation de Hopf à un état d'équilibre positif. Motivé par les travaux ci-dessus, le but de cet article est d'étudier l'existence de la bifurcation de Hopf pour un modèle d'alcoolisme avec structure par âge. Notre modèle se compose de trois variables : les buveurs sensibles au temps t sont désignés par $S(t)$, qui ne boivent pas ou ne boivent que modérément ; les alcooliques au temps t avec un âge d'alcoolisme a sont désignés par $A(t, a)$, qui désirent fortement consommer de l'alcool, ayant des difficultés à contrôler son usage, persistant dans son utilisation malgré les conséquences néfastes ; et les personnes qui se remettent de l'alcoolisme après le traitement sont désignées par $R(t)$. L'alcoolisme en tant que maladie épidémique sociale de longue date, il est difficile de l'éliminer pendant une courte période. Alors on met le problème de l'alcoolisme dans la

population modèle de croissance à étudier. Nous supposons donc que les nouvelles recrues entrent dans la population à un taux $r(S(t) + \int_0^{+\infty} A(t, a)da + R(t))$.

Ce mémoire est composé par trois chapitres organisés comme suit :

- Le premier chapitre concerne des rappels sur la théorie des semi-groupe et quelques notions et concepts de stabilité et de bifurcation de Hopf.
- Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solution du modèle épidémique formulé, ainsi la positivité et la bornétude des solutions .
- Le troisième chapitre traite la stabilité et la bifurcation de Hopf des différents points d'équilibres du système proposé.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Définitions élémentaires

Définition 1.1. [1] Soient X un espace de Banach et $F : D(F) \subset X \longrightarrow X$ un opérateur. On dit que F est localement Lipschitzienne si et seulement si pour tout $C > 0$ il existe $K(C) > 0$ telle que

$$\|F(x) - F(y)\|_X \leq K(C)\|x - y\|_X,$$

pour tout $x, y \in \overline{D(F)} \cap \overline{B_C(0)}$ tel que $\overline{B_C(0)} = \{x \in \overline{D(F)}, \|x\| \leq C\}$.

Définition 1.2. [1] Supposant que V et W sont deux espaces vectoriels topologiques localement convexes (**par exemple deux espaces de Banach**), et soit $U \subset V$ un ouvert dans V et $f : U \longrightarrow W$. La dérivée de Gâteaux $\mathcal{D}f(U; \psi)$ de f pour tout $x \in U$ dans la direction $\psi \in V$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}f(x; \psi) &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x + \tau\psi) - f(x)}{\tau} \\ &= \left. \frac{d}{d\tau} f(x + \tau\psi) \right|_{\tau=0}. \end{aligned}$$

Définition 1.3. (**Homéomorphisme**) En topologie, un homéomorphisme est une application bijective continue, d'un espace topologique dans un autre, dont la bijection réciproque est continue. Dans ce cas, les deux espaces topologiques sont dits homéomorphes.

Définition 1.4. (*Opérateur compact*)[2] Soient X, Y deux espaces de Banach et $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire bornée. On dit que T est compact si l'image par T de la boule-unité B_X de X est relativement compact dans Y et d'une autre manière $\overline{T(B_X)}$ est compact dans Y .

Théorème 1.1. (*Kolmogorov*)[1] Soit B un ensemble borné dans $L^1(\mathbb{R}_+^n)$ alors le sous ensemble B est relativement compact si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfait

- i) $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} f(a) da = 0$ uniformément dans B .
 ii) $\lim_{h \rightarrow 0} \|f(a+h) - f(a)\| = 0$ uniformément dans B .

1.2 Généralités sur la théorie spectrale des opérateurs

Définition 1.5. [3] Soit X un espace de Banach sur le corps des nombres complexes \mathbb{C} . On note par $\mathcal{L}(X)$ des opérateurs linéaires bornés dans X et par I l'identité de $\mathcal{L}(X)$. Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ on note par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda I - A \text{ est inversible dans } X\},$$

l'ensemble résolvant de A .

Définition 1.6. [3] Soit $A \in \mathcal{L}(X)$ on appelle spectre de A l'ensemble

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (\lambda I - A) \text{ non inversible}\},$$

Toute scalaire $\lambda \in \sigma(A)$ est dit valeur spectrale et on a $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Définition 1.7. [3] On appelle valeur propre de A tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda I - A$ n'est pas injectif. On appelle spectre ponctuelle de A l'ensemble

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda \text{ valeur propre de } A\},$$

et on a toujours $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.

Proposition 1.1. [3] Soient $A, B \in \mathcal{L}(X)$, alors $A \circ B \in \mathcal{L}(X)$ et $\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\|$.

1.3 Généralités sur la théorie de semi-groupe

Définition 1.8. [4] On appelle C_0 -semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés sur X une famille $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ vérifiant les propriétés suivantes

i) $T(0) = I$.

ii) $T(t+s) = T(t)T(s); \forall t, s \geq 0$.

iii) $\lim_{t \rightarrow 0} T(t)x = x; \forall x \in X$.

Définition 1.9. [4] On appelle générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, un opérateur A définie sur l'ensemble

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ x \in X; \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

par

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \text{ pour tout } x \in X.$$

Définition 1.10. [1] Soient X un espace de Banach et $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire. S'il existe $M_A, \omega_A \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $\lambda > \omega_A$, on a $(\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq \frac{M_A}{(\lambda - \omega_A)^n},$$

on dit que A est un opérateur de Hille-Yosida.

Définition 1.11. [5] Soit $X_0 = \overline{D(A)}$ on défine A_0 la partie de A dans X_0 par

$$A_0 x = Ax, \forall x \in D(A_0) = \{x \in D(A); Ax \in X_0\}.$$

Lemme 1.1. [1] On suppose que $A \in \mathcal{L}(X)$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ alors A est un opérateur de Hille-Yosida avec

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda - \omega_A}, \text{ pour tout } \lambda > \omega_A.$$

Théorème 1.2. [1] Soit $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ un opérateur linéaire est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ si et seulement si A est un opérateur de Hille-Yosida, et en plus

$$\|T(t)\| \leq M_A e^{\omega_A t}; t \geq 0.$$

Le lemme suivante découle directement du théorème de Hille-Yosida.

Lemme 1.2. [1] Soit A un opérateur linéaire sur l'espace de Banach X . La partie A_0 de A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $\{T_{A_0}(t)\}_{t \geq 0}$ sur X_0 si et seulement si les condition suivantes sont satisfait

i) Pour tout $x \in X$; $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda I - A)^{-1} x = 0$.

ii) Il existe deux constantes positif ω_A et M_A tel que pour tout $\lambda > \omega_A$ et $n \geq 1$ on a

$$\|(\lambda I - A)^{-n}\|_{\mathcal{L}(X_0)} \leq \frac{M_A}{(\lambda - \omega_A)^n}.$$

1.4 Problème de Cauchy Homogène

Soient X un espace de Banach et $A : D(A) \subset X \rightarrow X$, étant donné $U_0 \in X$ le problème de Cauchy pour A avec données initiales U_0 consiste à la détermination d'une solution $U(t)$ au problème à valeur initiale

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = AU(t), t \geq 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Où par solution on veut dire une fonction $U(t)$ à valeur dans X tel que $U(t)$ est continue pour $t \geq 0$ continuellement différentiables et $U(t) \in D(A)$ pour $t > 0$ et 1.1 est satisfait.

Théorème 1.3. [4] Soit $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0 -semigroupe dans X d'un générateur infinitésimal A . Alors pour chacun $x \in D(A)$ le système 1.1 à une solution unique $U(t)$ dans $\mathcal{C}^1([0; +\infty[; D(A)) \cap \mathcal{C}([0; +\infty[; D(A))$ et $U(t) = T(t)x$; pour tout $t \geq 0$.

Où $\mathcal{C}^1([0; +\infty[; D(A))$ désigne l'espace des fonction continue de $[0; +\infty[$ dans $D(A)$.

$\mathcal{C}^1([0; +\infty[; D(A))$ désigne l'espaces des fonctions de classe \mathcal{C}^1 de $([0; +\infty[; D(A))$ dans $D(A)$.

1.5 Equation d'évolution non linéaire

Considérons le problème de Cauchy suivantes

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = AU(t) + F(t, U(t)), t \geq 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (1.2)$$

Où A est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ sur un espace de Banach X et $F : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ est continue.

Définition 1.12. [4] On dit que U est un solution (**Solution classique**) du problème 1.2 si et seulement si

i) $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, X)$, $U(t) \in D(A)$, $t \geq 0$.

ii) U satisfait à l'équation 1.2.

Théorème 1.4. [4] si U est une solution du problème 1.2 alors

$$U(t) = T(t)U_0 + \int_0^t T(t-s)F(s, U(s))ds, t \geq 0. \quad (1.3)$$

Remarque 1.1. [4] Si U satisfait 1.3 alors U n'est pas nécessairement une solution du problème 1.2.

Théorème 1.5. [4] Supposons que $F : \mathbb{R}^+ \times X \longrightarrow X$ est localement Lipschitzienne par rapport à la seconde variable alors pour tout $U_0 \in X$ le problème 1.2 admet un solution unique sur \mathbb{R}^+ .

Définition 1.13. [5] Soit $L : D(L) \subset X \longrightarrow X$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe $\{T_L(t)\}_{t \geq 0}$ sur l'espace de Banach X ; on définit la croissance liée $\omega_0(L) \in (-\infty, +\infty)$ de L par

$$\omega_0(L) = \frac{\ln(\|T_L(t)\|)_{\mathcal{L}(X)}}{t},$$

et la croissance essentielle liée $\omega_{0,ess}(L) \in (-\infty, +\infty)$ de L par

$$\omega_{0,ess}(L) = \frac{\ln(\|T_L(t)\|)_{ess}}{t}.$$

Où $\|T_L(t)\|_{ess}$ est la norme essentielle de $T_L(t)$ défini par $\|T_L(t)\|_{ess} = \kappa(T_L(t)B_X(0,1))$ tel que $B_X(0,1) = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$ et pour tout ensemble bornée $B \subset X$, $\kappa(B) = \inf\{\varepsilon > 0; B \text{ peut être couvert pour un nombre fini des boules de rayon } \leq \varepsilon\}$ est la mesure de Kuratovsky de la non compacité.

1.6 Généralités sur la stabilité

Considérons un système continue autonome décrit par une équation différentielle de premier ordre

$$\begin{cases} \frac{dU(t)}{dt} = AU(t) + F(t, U(t)), t \geq 0, \\ U(0) = U_0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Définition 1.14. [6] U^* est appelé point d'équilibre pour le problème 1.4 s'il vérifie l'équation suivante

$$AU^* = 0.$$

Définition 1.15. [6] Le point d'équilibre U^* est stable si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\rho(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\|U(0) - U^*\| < \rho \implies \|U(t) - U^*\| < \varepsilon,$$

sinon il est instable.

cela signifie que, quel que soit le rayon ε d'une boule centrée sur l'équilibre, il est possible de trouver une sous-boule de rayon $\rho(\varepsilon)$ telle que la trajectoire issue de n'importe quelle condition initiale dans cette sous-boule de rayon ρ ne quittera pas jamais la boule de rayon ε .

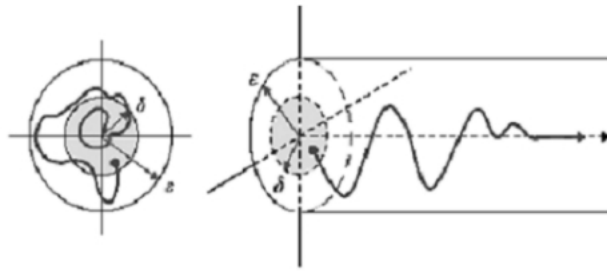


FIGURE 1.1 – Illustration de la stabilité asymptotique.

Définition 1.16. [6] *Le point d'équilibre U^* est asymptotiquement stable s'il est stable et il existe $\gamma > 0$ tel que pour tout solution $U(t)$ de 1.4 on a*

$$\|U(0) - U^*\| < \gamma \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t) - U^*\| = 0.$$

Linéarisation de système

Soit $J_F(U^*) = \frac{\partial f}{\partial U}(U^*)$ la matrice jacobienne de F évaluée au point U^* , considérons le système linéaire suivante

$$\frac{dU(t)}{dt} = AU(t),$$

où $A = J_F(U^*)$ s'appelle le linéarisé ou l'approximation linéaire du problème non linéaire 1.4 en U^* l'étude de la stabilité de l'origine pour le linéarisé permet dans certains cas de caractériser la stabilité de l'équilibre U^* du problème 1.4 plus précisément on a

Théorème 1.6. [6] *Si toutes les valeurs propres de la matrice A sont de partie réelle strictement négative alors l'équilibre U^* du problème 1.4 est stable.*

S'il existe au moins une valeur propre de la matrice A de partie réelle strictement positive alors U^ est instable.*

Lorsque'un équilibre U^ est stable mais pas asymptotiquement stable on dit que la stabilité est neutre c'est-à-dire les trajectoire qui commencent au voisinage de U^* restent au voisinage de cette équilibre lorsque $t \rightarrow +\infty$, dans tous les autres cas on ne peut rien dire sur la stabilité de U^* .*

Le critère de Routh-Hurwitz

Le critère de Routh-Hurwitz est un méthode pour montrer la stabilité du système en prenont les coefficients de l'équation caractéristique d'un système linéaire sans compter les racines.

Définition 1.17. [7] (**Polynôme de Hurwitz**)

Un polynôme de Hurwitz est un polynôme d'une variable à coefficients réels dont les racines sont tout à partie réelle strictement négative.

Théorème 1.7. (**Le critère de Routh-Hurwitz**) [7] *Soit $p(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_0$, est un polynôme à coefficient réelle, donc p est un polynôme de Hurwitz si et seulement si les n*

mineur principeux $\Delta_i =$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots & \vdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{i-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_i \end{vmatrix}, (i = 1, \dots, n)$$

sont tous strictement positif.

1.7 Résumé historique et mathématique de la théorie de bifurcation de Hopf

La théorie de la bifurcation et la théorie de la singularité ne sont devenues populaires que par la théorie des catastrophes, la théorie du chaos ou la synergie. Notez que le nom de point de retournement est également utilisé pour un phénomène complètement différent de la théorie des perturbation.

Bifurcation de Hopf

[8] Les points de bifurcation que nous avons traités jusqu'à présent ont une caractéristique commune. Toutes les branches ont représenté des équilibres c'est-à-dire que les deux branches se croisant en un point de bifurcation ont consisté en des solutions de l'équation soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $(t, \lambda) \rightarrow f(t, \lambda)$.

Considérons le problème suivante

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y(t), \lambda) = 0, t \geq 0, \quad (1.5)$$

où λ est le paramètre de bifurcation. Le terme équilibre caractérise une situation physique.

Mathématiquement parlant nous disons que les solutions sur la branche émanant restent dans le même espaces à savoir dans l'espace des vecteurs à n -dimension et dans l'espace des vecteurs à n -dimension, nous avons appelé une bifurcation qui se caractérise par des branches croisées de points d'équilibre bifurcation stationnaire.

Définitions et théorèmes de base

Définition 1.18. (*Solution maximale*)[13] Soit $\varphi(t, \lambda)$ la solution maximale de condition initiale $\varphi_0 \in E$, alors elle vérifie

i) $\varphi(0, \lambda) = \lambda$.

ii) $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \lambda) = f(\varphi(t, \lambda))$.

Définition 1.19. (*Orbite*)[13] On définit l'orbite complète issue de la paramètre de Bifurcation λ par

$$\Gamma(\lambda) = \{\varphi(t, \lambda), t \in \mathbb{R}^+\}.$$

Définition 1.20. (*Solution périodique*)[13] Une solution φ du système 1.5 est dite périodique de période T , où T périodique si elle est définie, et s'il existe un nombre $T > 0$ tel que, pour tout $t > 0$, $\varphi(t + T) = \varphi(t)$.

Définition 1.21. (*Courbe de Jordan*)[13] Une courbe de Jordan dans un plan affine réelle, est une courbe fermée simple. Autrement dit une courbe de Jordan est l'image par une application Ψ continue et injective, d'un cercle vers un plan ou encore une bijection du cercle dans son image.

Définition 1.22. [13] On dit qu'une orbite est fermée si elle est une courbe de Jordan (**c-à-d** homéomorphe à une cercle).

Cycles limites

Définition 1.23. [13] On dit qu'une trajectoire Γ est périodique, de période $T > 0$, si pour tout point p dans Γ , on a

$$\varphi(T, p) = p.$$

Où φ est une solution maximale du problème 1.5.

Définition 1.24. [13] Un cycle limite est une solution périodique non constante isolée, représentée dans le plan des phases par une trajectoire fermée et isolée. Elle reflète la périodicité du mouvement. L'intérêt du cycle limite, en tant qu'orbite périodique isolée, apparaît souvent dans plusieurs branches des sciences et technologies. Le fait qu'un système admette cycle limite implique l'existence d'une solution périodique isolée. Le problème général de trouver le nombre de cycles limites pour les systèmes dynamiques est un problème compliqué qui a quelques raccords au 16ème

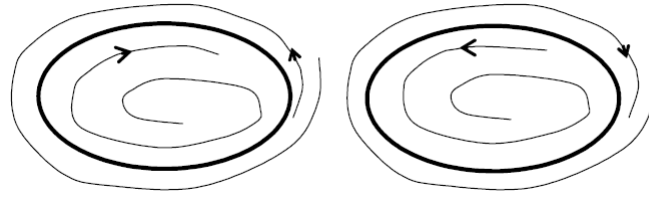


FIGURE 1.2 – Cycles limites

problème de Hilbert non encore résolu. L'étude intensive de l'existence de cycles limites pour les systèmes dynamiques est bien justifiée puisque l'existence et les propriétés des cycles limites pour un système dynamique donnent des informations importantes et introduisent des propriétés intéressantes des solutions du système dynamique étudié.

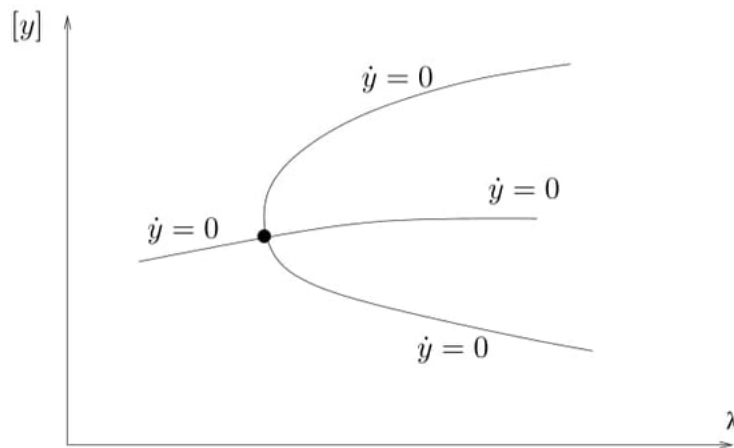


FIGURE 1.3 – Bifurcation stationnaire

L'analyse pour $\frac{dy(t)}{dt} = 0$, est bien plus simple que l'analyse de la situation avec $\frac{dy(t)}{dt} \neq 0$. L'hypothèse que $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ (quand en réalité $\frac{dy(t)}{dt} = \varepsilon d$ pour un vecteur d et petit ε).

Les véhicules mathématiques qui décrivent ce type de vie sont les fonction $y(t)$. Les espaces fonctionnels correspondants incluent les équilibre en tant que solution constantes des cas spéciaux.

Le type de bifurcation qui relie les équilibres au mouvement périodiques est la bifurcation de Hopf est la porte qui s'ouvre de la petite salle des équilibres à la grande salle des solution périodique, qui à son tour n'est qu'une petite partie du domaine des fonctions.

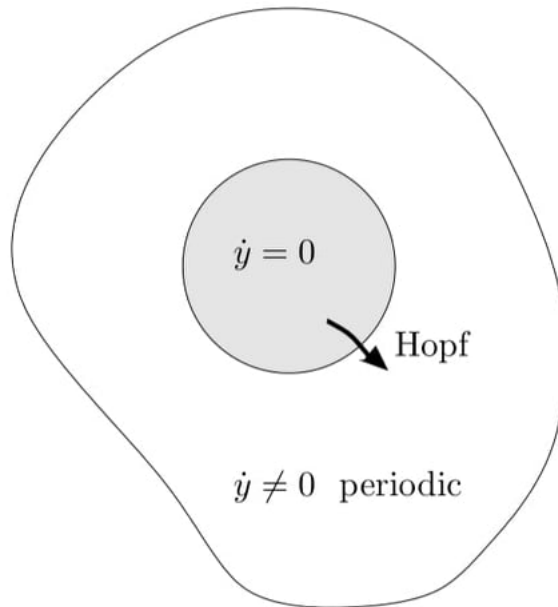


FIGURE 1.4 – Transition de la solution stationnaire à la solution périodique

Théorème 1.8. (Poincaré-Andronov-Hopf)[14] Supposons que le problème 1.5 a un point d'équilibre à l'origine $\hat{x} = 0$, et que l'associé Jacobienne $A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=\hat{x}=0}$ a une paire des valeurs propres purement imaginaires ($\omega(\lambda)$ et $\omega^*(\lambda)$). Si

$$\frac{d\Re(\omega(\lambda))}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_0} > 0.$$

Définition 1.25. [8] Une bifurcation d'une branche d'équilibres à une branche des oscillations périodiques sont appelées bifurcation de Hopf.

Théorème 1.9. (De Hopf) [8] Supposons que $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ et

i) $f(y_0, \lambda_0) = 0$.

ii) $f_y(y_0, \lambda_0)$ a une simple paire de valeurs propres purement imaginaires $\mu(\lambda_0) = \pm i\beta$ et aucune autre valeur propre avec zéro partie réelle et

iii) $\frac{d(\Re\mu(\lambda_0))}{d\lambda} \neq 0$.

Ensuite, il y a une naissance de cycles limites à (y_0, λ_0) et La période initiale (**du oscillation d'amplitude nulle**) est

$$T_0 = \frac{2\pi}{\beta}.$$

Chapitre 2

Analyse mathématiques du modèle d'alcoolisme

2.1 Formulation du modèle d'alcoolisme

Les modèles d'épidémies structures en âge est un outil efficace de modélisation et prédiction de la propagations des maladies épidémiologiques dans la population humaine. Selon l'OMS (organisation mondiale de la santé). Ici dans ce travail nous considérons le modèle d'alcoolisme suivant.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = r(S(t) + \int_0^{+\infty} A(t, a) da + R(t)) - S(t) \int_0^{+\infty} \beta(a) A(t, a) da - (\mu + \alpha)S(t), \\ \frac{\partial A(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial A(t, a)}{\partial a} = -(\mu + a_1 + \delta)A(t, a), \\ \frac{dR(t)}{dt} = \delta \int_0^{+\infty} A(t, a) da - (\mu + a_2 + \rho)R(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

avec la condition aux bord

$$A(t, 0) = S(t) \int_{a-t}^a \beta(a) A(t, a) da + \rho R(t) + \alpha S(t),$$

et les conditions initiales suivantes

$$A(0, a) = A_0(a) \in L_+^1((0, +\infty), \mathbb{R}), S(0) = s_0 > 0, R(0) = r_0 > 0,$$

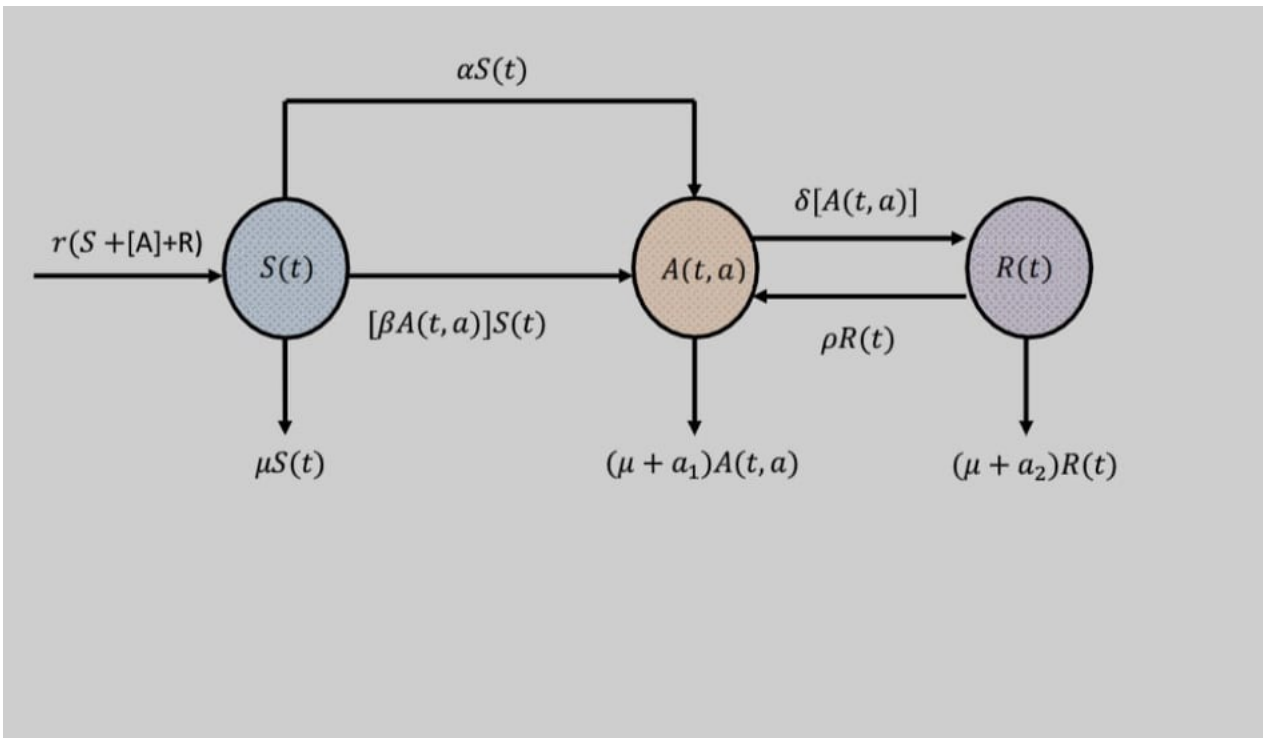


FIGURE 2.1 – Schéma du modèle d'alcoolisme 2.1 .

où les paramètres $r, \mu, \alpha, a_1, a_2, \rho, \delta$ sont des quantités positives telles que

r , représente le taux de natalité,

μ , représente le taux de mortalité naturelle,

a_1, a_2 , représentent les taux de mortalité liés à la consommation excessive d'alcool,

δ , est le taux de transfert des alcooliques aux individus rétablis,

ρ , c'est le taux de rechute des individus rétablis aux alcooliques,

α représente le coefficient de fraction de buveurs sensibles,

et $S(t)$, les individus susceptible d'être alcoolique au cours du temps t , ils ne consomment pas du tout d'alcool ou bien boivent modérément.

$A(t, a)$, les individus alcooliques en temps t , avec une période d'alcoolisme a (âge d'alcoolisme).

Ils s'agit d'individus qui boivent de l'alcool avec excès, et qui ont des difficultés de contrôler leurs consommations,

$R(t)$, ils sont les individus rétablis de l'alcoolisme grâce aux traitements en temps t .

et supposons que les nouvelles recrues entrent dans la population à un rythme $r(S(t) + \int_0^{+\infty} A(t, a) da + R(t))$.

• Le taux d'incidence en temps t , et avec une période d'alcoolisme a , est définie par $S(t)\beta(a)A(t, a)$, où $\beta(a)$ est le taux de transmission à cause de la pression des alcooliques avec une période d'alcoolisme a .

Remarque 2.1.

• La fonction $\beta(a)$ est définie par

$$\begin{cases} \beta^* & a > \tau, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Et $K_0 = \int_0^{+\infty} \beta(a)e^{-(\mu+a_1+\delta)a} da$, alors on peut écrire $\beta^* = (\mu + a_1 + \delta)K_0e^{(\mu+a_1+\delta)\tau}$, où

- τ est le temps pendant lequel un alcoolique débutant devient un invitant qui invite les individus sains à augmenter leurs consommation.
- K_0 , représente le nombre total d'alcooliques secondaires produits par un seul individu alcoolique.
- β^* : est le taux au quel un alcoolique avec une période d'alcoolisme a ($a > \tau$) infectera avec succès un buveur sensible.

2.2 Equation de transport

Soit l'équation de transport suivante

$$\frac{\partial A(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial A(t, a)}{\partial a} = -\alpha_1 A(t, a), \quad (2.2)$$

qui donne le système différentielle associé

$$dt = da = -\frac{dA(t, a)}{\alpha_1 A(t, a)}, \quad (2.3)$$

les deux premiers rapport donnent l'intégrale première

$$c_1 = u(t, a, A(t, a)) = a - t,$$

et les deux derniers rapports donnent l'intégrale première

$$c_2 = v(t, a, A(t, a)) = A(t, a)e^{\int_{a-t}^a \alpha_1 dt}.$$

Il est aisé de contrôler que u et v données respectivement par 2.2 et 2.3 sont indépendantes, on écrit alors la solution générale de l'équation 2.2 considérons sous la forme $c_2 = g(c_1)$

$$A(t, a)e^{-\int_{a-t}^a \alpha_1 dt} = g(a - t), \quad g \text{ fonction arbitraire.}$$

$$A(t, a) = g(a - t)e^{-\int_{a-t}^a \alpha_1 dt}.$$

Alors on a

$$A(t, a) = \begin{cases} A_0(a - t)e^{-\int_{a-t}^a \alpha_1 dt}, & \text{si } a - t > 0, \\ A_0(a - t)e^{-\int_{a-t}^a \alpha_1 dt}, & \text{si } a > t. \end{cases}$$

Et on a la condition aux bords

$$\begin{cases} A(t, 0) = S(t) \int_{a-t}^a \beta(a)A(t, a)da + \rho R(t) + \alpha S(t), \\ A(t, 0) = A_0(-t)e^{-\int_{a-t}^a \alpha_1 dt} = S(t) \int_{a-t}^a \beta(a)A(t, a)da + \rho R(t) + \alpha S(t), \\ A_0(-t) = e^{\int_{a-t}^a \alpha_1 dt} S(t) \int_{a-t}^a \beta(a)A(t, a)da + \rho R(t) + \alpha S(t). \end{cases}$$

Donc

$$A(t, a) = e^{\int_{a-t}^a \alpha_1 dt} (s(t - a) \int_{a-t}^a \beta(a)A(t - a, a)da + \rho R(t - a) + \alpha S(t - a)), \quad \text{si } a < t.$$

Finalement, la solution s'écrit comme suit

$$A(t, a) = \begin{cases} A_0(a-t)e^{-\int_{a-t}^a \alpha_1 dt}, & \text{si } a > t, \\ e^{\int_{a-t}^a \alpha_1 dt} (s(t-a) \int_0^{+\infty} \beta(a) A(t-a, a) da + \rho R(t-a) + \alpha S(t-a)), & \text{si } a < t. \end{cases} \quad (2.4)$$

2.3 Problème de Cauchy associé

Posant

$$S(t) = \int_0^{+\infty} s(t, a) da, R(t) = \int_0^{+\infty} r(t, a) da,$$

Alors on a

$$S(t+h) - S(t) = \int_0^{+\infty} s(t+h, a) - s(t, a) da.$$

En divisant par h on obtient

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \int_0^{+\infty} \frac{s(t+h, a) - s(t, a)}{h} da,$$

On peut écrire quand $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h) - S(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{s(t+h, a) - s(t, a)}{h} da.$$

Soit T l'âge maximal qui peut être fini ou infini ($0 \leq T \leq +\infty$), on a donc

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= \int_0^T \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h, a) - s(t, a)}{h} da \\ &= \int_0^T \left(\frac{\partial s(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial s(t, a)}{\partial a} da \right) \\ &= s(t, T) + \int_0^T \frac{\partial s(t, a)}{\partial t} da. \end{aligned}$$

En utilisant la première équation du système 2.1, on obtient

$$S(t, T) + \int_0^T \frac{\partial s(t, a)}{\partial t} da = r \left(\int_0^{+\infty} s(t, a) da + \int_0^{+\infty} A(t, a) da + R(t) \right) - \int_0^{+\infty} s(t, a) da \int_0^{+\infty} \beta(a) A(t, a) da - (\mu + \alpha) \int_0^T s(t, a) da. \quad (2.5)$$

Si $T = 0$, on trouve

$$s(t, 0) = r \left(S(t) + \int_0^{+\infty} A(t, a) da + R(t) \right) - S(t) \int_0^{+\infty} \beta(a) A(t, a) da.$$

En dérivant l'expression 2.5 par rapport à T , on obtient

$$\frac{\partial s(t, T)}{\partial t} + \frac{\partial s(t, T)}{\partial T} = -(\mu + \alpha) s(t, T).$$

On procède de la même manière que dans la première équation, on trouve

$$\frac{\partial v(t, T)}{\partial t} + \frac{\partial v(t, T)}{\partial T} = -(\mu + a_2 + \rho) v(t, T).$$

Maintenant, on peut écrire le système 2.1 sous la forme suivante

$$\begin{cases} \frac{\partial x(t, a)}{\partial t} + \frac{\partial x(t, a)}{\partial a} = -Dx(t, a), \\ x(t, 0) = B(x(t, \cdot)), \\ x(0, a) = x_0 \in L_+^1((0, +\infty), \mathbb{R}^3), \end{cases} \quad (2.6)$$

où

$$\begin{cases} x(t, a) = (s(t, a), A(t, a), v(t, a)), \\ D = \text{diag}(m_1, m_2, m_3), \\ m_1 = \mu + \alpha, m_2 = \mu + a_1 + \delta, m_3 = \mu + a_2 + \rho, \end{cases}$$

et $B(x(t, \cdot))$ est donnée par

$$B(x(t, \cdot)) = \begin{pmatrix} s(t, 0) \\ A(t, 0) \\ v(t, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\int_0^{+\infty} s(t, a) da + A(t, a) + v(t, a) \right) - \int_0^{+\infty} s(t, a) da \int_0^{+\infty} \beta(a) A(t, a) da \\ \int_0^{+\infty} s(t, a) da \int_0^{+\infty} \beta(a) A(t, a) da + \rho \int_0^{+\infty} v(t, a) da + \alpha \int_0^{+\infty} s(t, a) da \\ \delta \int_0^{+\infty} s(t, a) da \end{pmatrix}.$$

Considérons l'espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$

$$X = \mathbb{R}^3 \times L^1_+((0, +\infty), \mathbb{R}^3),$$

avec

$$\left\| \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} \right\|_X = \|\alpha\|_{\mathbb{R}^3} + \|\varphi\|_{L^1_+((0, +\infty), \mathbb{R}^3)}.$$

Définissant l'opérateur linéaire

$$L : D(L) \longrightarrow X$$

par

$$L \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varphi(0) \\ -\varphi'(0) - D\varphi \end{pmatrix},$$

avec

$$D(L) = \{0\}_{\mathbb{R}^3} \times W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}^3).$$

Comme $\overline{D(L)} = \{0\} \times L^1((0, +\infty), \mathbb{R}^3) \neq X$ alors L est défini sur domaine non dense dans X .

Définissons l'opérateur non linéaire $F : \overline{D(L)} \longrightarrow X$ par

$$F \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Posons $w(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ x(t, \cdot) \end{pmatrix}$.

Ensuite, on peut écrire le système 2.6 sous la forme de problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{dw(t)}{dt} = Lw(t) + F(w(t)), \\ w(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix} \in \overline{D(L)}. \end{cases} \quad (2.7)$$

2.4 L'existence et l'unicité de la solution

Considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \frac{dw(t)}{dt} = Lw(t) + F(w(t)), \\ w(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \end{pmatrix} \in \overline{D(L)}. \end{cases}$$

En intégrant l'équation sur l'intervalle $(0, t)$, on trouve

$$w(t) = w(0) + \int_0^t Lw(s)ds + \int_0^t Fw(s)ds,$$

et comme L est un opérateur linéaire, on peut écrire

$$w(t) = w(0) + L \int_0^t w(s)ds + \int_0^t Fw(s)ds. \quad (2.8)$$

Pour montrer l'existence et l'unicité de l'équation 2.8, on montre que

- i)* L est un opérateur de Hille-Yosida.
- ii)* F est localement Lipschitzienne.

L est un opérateur de Hille-Yosida

Soit $\zeta \in X$ et $U \in D(L)$ deux vecteurs définis par

$$\zeta = \left(\left(\begin{array}{c} \xi_0 \\ \zeta_0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \xi_1 \\ \zeta_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \xi_2 \\ \zeta_2 \end{array} \right) \right),$$

et

$$U = \left(\left(\begin{array}{c} 0 \\ \alpha_0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \alpha_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \alpha_2 \end{array} \right) \right).$$

Considérons l'équation

$$(\lambda I - L)U = \zeta, \tag{2.9}$$

avec

$$\lambda \in \rho(A).$$

Ensuite, on a

$$\lambda U = \left(\left(\begin{array}{c} 0 \\ \lambda \alpha_0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \lambda \alpha_1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \lambda \alpha_2 \end{array} \right) \right),$$

et

$$\begin{aligned}
 LU &= \left(\begin{array}{c} - \begin{pmatrix} \alpha_0(0) \\ \alpha_1(0) \\ \alpha_2(0) \end{pmatrix} \\ - \begin{pmatrix} \alpha'_0 \\ \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\mu + \alpha)\alpha_0 \\ (\mu + a_1 + \delta)\alpha_1 \\ (\mu + a_2 + \rho)\alpha_2 \end{pmatrix} \end{array} \right) \\
 &= \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -\alpha_0(0) \\ -\alpha'_0(0) - (\mu + \alpha)\alpha_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\alpha_1(0) \\ -\alpha'_1 - (\mu + a_1 + \delta)\alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -\alpha_2(0) \\ -\alpha'_2 - (\mu + a_2 + \rho)\alpha_2 \end{pmatrix} \end{array} \right) .
 \end{aligned}$$

Donc on a $(\lambda I - L)U = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_0(0) \\ \alpha'_0 + (\lambda + \mu + \alpha)\alpha_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_1(0) \\ \alpha'_1 + (\lambda + \mu + a_1 + \delta)\alpha_1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \alpha_2(0) \\ \alpha'_2 + (\lambda + \mu + a_2 + \rho)\alpha_2 \end{pmatrix} \end{array} \right) .$ Comme $(\lambda I - L)U = \zeta$ alors

$$U = (\lambda I - L)^{-1}\zeta$$

, et

$$\begin{cases} \alpha'_0(0) + (\lambda + \mu + \alpha)\alpha_0 = \zeta_0, \\ \alpha_0(0) = \xi_0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1' + (\lambda + \mu + a_1 + \delta)\alpha_1 = \zeta_1, \\ \alpha_1(0) = \xi_1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2' + (\lambda + \mu + a_2 + \rho)\alpha_2 = \zeta_2, \\ \alpha_2(0) = \xi_2. \end{cases}$$

La première équation est un problème de Cauchy associé à EDO du première ordre, La méthode de variation de constante implique que la solution de cette équation s'écrit sous la forme

$$\alpha_0 = \xi_0 e^{-(\lambda+\mu+\alpha)a} + \int_0^a \zeta_0(s) e^{\lambda\mu+\alpha(s-a)} da,$$

par conséquent on peut déduire que U peut se donner sous la forme

$$U = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_0 e^{-(\lambda+\mu+\alpha)a} + \int_0^a \zeta_0(s) e^{(\lambda+\mu+\alpha)(s-a)} ds \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_1 e^{-(\lambda+\mu+a_1+\delta)a} + \int_0^a \zeta_1(s) e^{(\lambda+\mu+a_1+\delta)(s-a)} ds \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_2 e^{-(\lambda+\mu+a_2+\rho)a} + \int_0^a \zeta_2(s) e^{(\lambda+\mu+a_2+\rho)(s-a)} ds \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

La norme de U dans l'espace X défini par

$$\begin{aligned} \|U\| &= \left\| \xi_0 e^{-(\lambda+\mu+\alpha)a} + \int_0^a \zeta_0(s) e^{(\lambda+\mu+\alpha)(s-a)} ds \right\| + \|\xi_1 e^{-(\lambda+\mu+a_1+\delta)a}\| \\ &\quad + \left\| \int_0^a \zeta_1(s) e^{(\lambda+\mu+a_1+\delta)(s-a)} ds \right\| + \left\| \xi_2 e^{-(\lambda+\mu+a_2+\rho)a} + \int_0^a \zeta_2(s) e^{(\lambda+\mu+a_2+\rho)(s-a)} ds \right\| \\ &\leq |(\xi_0)| \|e^{-(\lambda+\mu+\alpha)a}\| + \left\| \int_0^a \zeta_0(s) e^{(\lambda+\mu+\alpha)(s-a)} ds \right\| + |\xi_1| \|e^{-(\lambda+\mu+a_1+\delta)a}\| \\ &\quad + \left\| \int_0^a \zeta_1(s) e^{(\lambda+\mu+a_1+\delta)(s-a)} ds \right\| + |\xi_2| \|e^{-(\lambda+\mu+a_2+\rho)a}\| + \left\| \int_0^a \zeta_2(s) e^{(\lambda+\mu+a_2+\rho)(s-a)} ds \right\|. \end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \|e^{-(\lambda+\mu+\alpha)a}\| &= \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu+\alpha)a} da \\ &= -\frac{e^{-(\lambda+\mu+\alpha)a}}{\lambda + \mu + \alpha} \Big|_0^{+\infty}, \end{aligned}$$

pour $\lambda > -(\mu + \alpha)$, on obtien

$$\|e^{-(\lambda+\mu+\alpha)a}\| = \frac{1}{\lambda + \mu + \alpha}.$$

par la même calcul, on obtient

$$\begin{cases} \|e^{-(\lambda+\mu+a_2+\delta)a}\| = \frac{1}{\lambda+\mu+a_2+\delta}, \text{ pour } \lambda > -(\mu + a_2 + \delta), \\ \|e^{-(\lambda+\mu+a_2+\rho)a}\| = \frac{1}{\lambda+\mu+a_2+\rho}, \text{ pour } \lambda > -(\mu + a_2 + \rho). \end{cases}$$

Il résulte que

$$\begin{aligned} \|U\| &\leq \frac{|\xi_0|}{\lambda + \mu + \alpha} + \frac{|\xi_1|}{\lambda + \mu + a_1 + \delta} + \frac{|\xi_2|}{\lambda + \mu + a_2 + \rho} + \left\| \int_0^a \zeta_0(s) e^{(\lambda+\mu+\alpha)(s-a)} ds \right\| \\ &\quad + \left\| \int_0^a \zeta_1(s) e^{(\lambda+\mu+a_1+\delta)(s-a)} ds \right\| + \left\| \int_0^a \zeta_2(s) e^{(\lambda+\mu+a_2+\rho)(s-a)} ds \right\|, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^a \zeta_0(s) e^{(\lambda+\mu+\alpha)(s-a)} ds \right\| &= \int_0^{+\infty} \left| \int_0^a \zeta_0(s) e^{(\lambda+\mu+\alpha)(s-a)} ds \right| da \\ &\leq \int_0^{+\infty} \int_0^a |\zeta_0(s)| e^{(\lambda+\mu+\alpha)(s-a)} ds da \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu+\alpha)a} \int_0^a |\zeta_0(s)| e^{(\lambda+\mu+\alpha)s} ds da, \end{aligned}$$

comme $\begin{cases} 0 \leq a \leq +\infty \\ 0 \leq s \leq a \end{cases}$ alors $\begin{cases} s \leq a \leq +\infty \\ 0 \leq s \leq \infty \end{cases}$
 c-à-d

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^a \zeta_0(s) e^{(\lambda+\mu+\alpha)s} ds \right\| &\leq \int_0^{+\infty} |\zeta_0(s)| e^{(\lambda+\mu+\alpha)s} \int_s^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu+\alpha)a} da ds \\ &= \frac{1}{\lambda + \mu + \alpha} \int_0^{+\infty} |\zeta_0(s)| ds \\ &= \frac{1}{\lambda + \mu + \alpha} \|\zeta_0(s)\|. \end{aligned}$$

Donc, on en déduit que

$$\|U\| \leq \frac{|\xi_0| + \|\zeta_0(s)\|}{\lambda + \mu + \alpha} + \frac{|\xi_1| + \|\zeta_1(s)\|}{\lambda + \mu + a_1 + \delta} + \frac{|\xi_2| + \|\zeta_2(s)\|}{\lambda + \mu + a_2 + \rho}.$$

Posons $\varepsilon = \min(\alpha, a_1 + \delta, a_2 + \rho)$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|U\| &\leq \frac{1}{\lambda + \mu + \varepsilon} (|\xi_0| + \|\zeta_0(s)\| + |\xi_1| + \|\zeta_1(s)\| + |\xi_2| + \|\zeta_2(s)\|) \\ &= \frac{1}{\lambda + \mu + \varepsilon} \|\zeta\|. \end{aligned}$$

Alors

$$\|(\lambda I - L)^{-1} \zeta\| \leq \frac{1}{\lambda + \mu + \varepsilon} \|\zeta\|,$$

ce qui implique $\|(\lambda I - L)^{-1} \zeta\| \leq \frac{1}{\lambda + \mu + \varepsilon}$,

et d'après la proposition 1.1, il résulte

$$\|(\lambda I - L)^{-n} \zeta\| \leq \frac{1}{(\lambda + \mu + \varepsilon)^n}.$$

D'où L est un opérateur de Hille-Yosida

F est Lipschtizienne

Soit $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ \Phi \end{pmatrix} \in \overline{D(L)}$. Alors on a

$$\begin{aligned} \left\| F \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi \end{pmatrix} \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} B(\varphi) - B(\Phi) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix} \varphi_0(t, 0) - \Phi_0(t, 0) \\ \varphi_1(t, 0) - \Phi_1(t, 0) \\ \varphi_2(t, 0) - \Phi_2(t, 0) \\ 0 \end{pmatrix} \right\| \\ &= |\varphi(t, 0) - \Phi_0(t, 0)| + |\varphi_1(t, 0) - \Phi_1(t, 0)| + |\varphi_2(t, 0) - \Phi_2(t, 0)| \\ &\leq |r \int_0^{+\infty} (\varphi_0(t, a) + \varphi_1(t, a) + \varphi_2(t, a)) - (\Phi_0(t, a) + \Phi_1(t, a) + \Phi_2(t, a)) da| \\ &\quad + 2 \left| \int_0^{+\infty} \varphi_0(t, a) da \int_0^{+\infty} \beta(a) \varphi_1(t, a) da - \Phi_0(t, a) da \int_0^{+\infty} \beta(a) \Phi_1(t, a) da \right| \\ &\quad + \rho \int_0^{+\infty} |\varphi_2(t, a) - \Phi_2(t, a)| da + (\delta + \alpha) \int_0^{+\infty} |\varphi_0(t, a) - \Phi_0(t, a)| da. \end{aligned}$$

Et comme $\beta(a) \in L^\infty((0, +\infty), \mathbb{R})$ (il existe $M > 0$; $\sup_{a \in \mathbb{R}_*^+} |\beta(a)| \leq M$),

on en déduit que

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} \varphi_0(t, a) da \int_0^{+\infty} \beta(a) \varphi_1 da - \int_0^{+\infty} \Phi_0(t, a) da \int_0^{+\infty} \beta(a) \Phi_1(t, a) da \right| \\ & \leq M \|\Phi_1\| \|\varphi_0 - \Phi_0\| + M \|\varphi_0\| \|\varphi_1 - \Phi_1\|. \end{aligned}$$

Par conséquence

$$\begin{aligned} \left\| F \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi \end{pmatrix} \right\| &\leq r(\|\varphi - \Phi\|) + \max\{2M\|\Phi_1\|, \alpha + \delta\} \|\varphi_0 - \Phi_0\| \\ &\quad + 2M\|\varphi_0\| \|\varphi_1 - \Phi_1\| + \rho \|\varphi_2 - \Phi_2\| \\ &\leq R + 3 \max\{2 \max\{2M\|\Phi_1, \alpha + \delta\}, 2M\|\varphi_0\|, \rho\} \|\varphi - \Phi\|. \end{aligned}$$

Alors

$$\left| F \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} 0 \\ \Phi \end{pmatrix} \right| \leq 2 \max\{r, c'\} \|\varphi - \Phi\|,$$

où

$$c' = 3 \max\{2 \max\{2M\|\Phi_1\|, \alpha + \delta\}, 2M\|\varphi_0\|, \rho\}.$$

Finalement, il résulte que

$$\left\| F \begin{pmatrix} o \\ \varphi \end{pmatrix} - F \begin{pmatrix} o \\ \Phi \end{pmatrix} \right\| \leq 2 \max\{r, c'\} \left\| \begin{pmatrix} (\varphi - \Phi) \\ 0 \end{pmatrix} \right\|,$$

pour $K(C) = 2 \max\{r, c'\}$, on trouve que F est Lipschitzienne.

D'ou l'existence et l'unicité du problème de Cauchy associé à la modèle structuré en âge.

2.5 La positivité de la solution

Théorème 2.1. [9] *Si le problème de Cauchy associé au système 2.1 admet une unique solution et les condition suivantes sont satisfaites*

i) $(\lambda I - L)^{-1} X_+ \subset X_+$ pour tout $\lambda > \omega$.

ii) Pour tout $c > 0$ et $T > 0$, on a

$$F(t, x) + \omega x + \gamma(c, T)x \in X_+; \forall x \in B(0, C) \cap X_{0+}, \forall t \in [0, T],$$

alors le problème de Cauchy admet une unique solution positive.

Démonstration.

D'après la Théorème 1.4 on en déduit facilement que la condition (i) est satisfaite.

Soit r un nombre réel strictement positif et soit $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in B(0, r) \cap X_{0+}$, et soit $c > 0$, on a

$$\begin{aligned} F \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} B\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} B\varphi \\ c\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est clair que $c\varphi > 0$ pour tout $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in B(0, r) \cap X_{0+}$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned} B\varphi &= r \left(\int_0^{+\infty} s(t, a) da + \int_0^{+\infty} A(t, a) da + \int_0^{+\infty} v(t, a) da \right) \\ &\quad - \int_0^{+\infty} s(t, a) da \int_0^{+\infty} \beta(a) A(t, a) da, \end{aligned}$$

donc $B\varphi > 0$ équivaut à $\int_0^{+\infty} (r(s(t, a) + A(t, a) + v(t, a)) - s(t, a) \int_0^{+\infty} \beta(a) A(t, a) da) da > 0$,
alors $(r - \int_0^{+\infty} \beta(a) A(t, a) da) s(t, a) + r(A(t, a) + v(t, a)) > 0$, par conséquent pour assurer la positivité de la solution il suffit de choisir

$$r > \int_0^{+\infty} \beta(a) A(t, a) da.$$

□

Proposition 2.1. *La solution du problème de Cauchy 2.7 est bornée dans X .*

Chapitre 3

Stabilité et bifurcation de Hopf des points d'équilibres du système

Si $\bar{w}(a) = \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}(a) \end{pmatrix} \in X_0$ est une point d'équilibre on a

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}(a) \end{pmatrix} \in D(A) \quad \text{et} \quad L \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}(a) \end{pmatrix} + F \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}(a) \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui équivaut a

$$\begin{cases} -\bar{x}'(a) - D\bar{x}(a) = 0, \\ -\bar{x}(0) + B(\bar{x}(\cdot)) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

La première équation du système 3.1 devient $-\bar{x}'(a) - D\bar{x}(a) = 0$.

Identiquement

$$\bar{x}(a) = \begin{pmatrix} \bar{s}(a) \\ \bar{A}(a) \\ \bar{v}(a) \end{pmatrix} = e^{-Da}\bar{x}(0),$$

où

$$\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} r \left(\int_0^{+\infty} \bar{s}(a) da + \int_0^{+\infty} \bar{A}(a) da + \int_0^{+\infty} \bar{v}(a) da \right) - \int_0^{+\infty} \bar{s}(a) da \int_0^{+\infty} \beta(a) \bar{A}(a) da \\ \int_0^{+\infty} \bar{s}(a) da \int_0^{+\infty} \beta(a) \bar{A}(a) da + \rho \int_0^{+\infty} \bar{v}(a) da + \alpha \int_0^{+\infty} \bar{s}(a) da \\ \delta \int_0^{+\infty} \bar{A}(a) da \end{pmatrix}.$$

Par la définition de la fonction β on a

$$\int_0^{+\infty} \beta(a) \bar{A}(a) da = \int_{\tau}^{+\infty} \beta^* \bar{A}(a) da,$$

pour tout $a > \tau$, avec

$$\bar{A}(a) = \bar{A}_0(a - \tau) e^{-m_2 \tau}.$$

et $\beta^* = m_2 K_0 e^{m_2 \tau}$.

Alors, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \beta(a) \bar{A}(a) da &= \int_{\tau}^{+\infty} m_2 K_0 e^{m_2 \tau} \bar{A}(a - \tau) e^{-m_2 \tau} da, \\ &= \int_{\tau}^{+\infty} K_0 m_2 \bar{A}(a - \tau) da, \\ &= K_0 m_2 \int_0^{+\infty} \bar{A}(a) da. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\bar{x}(0) = \begin{pmatrix} r(\bar{S} + \bar{A} + \bar{V}) - K_0 m_2 \bar{A} \bar{S} \\ K_0 m_2 \bar{A} \bar{S} + \rho \bar{V} + \alpha \bar{S} \\ \delta \bar{A} \end{pmatrix},$$

où $\bar{A} = \int_0^{+\infty} \bar{A}(a) da$ et $\bar{S} = \int_0^{+\infty} \bar{s}(a) da$ et $\bar{V} = \int_0^{+\infty} \bar{v}(a) da$.

D'après 3.1 on peut écrire

$$\begin{cases} \bar{s}(a) = e^{-m_1 a} r(\bar{S} + \bar{A} + \bar{V}) - K_0 m_2 \bar{A} \bar{S}, \\ \bar{A}(a) = e^{-m_2 a} (K_0 m_2 \bar{A} \bar{S} + \rho \bar{V} + \alpha \bar{S}), \\ \bar{v}(a) = e^{-m_3 a} \delta \bar{A}. \end{cases}$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} m_1 \bar{S} = r(\bar{S} + \bar{A} + \bar{V}) - K_0 m_2 \bar{A} \bar{S}, \\ m_2 \bar{A} = (K_0 m_2 \bar{A} \bar{S} + \rho \bar{V} + \alpha \bar{S}), \\ m_3 \bar{V} = \delta \bar{A}. \end{cases}$$

Lemme 3.1. [5] *Le système 2.1 admet toujours $E_1(a) = (0, 0_{L^1((0, +\infty), \mathbb{R})}, 0)^\perp$, comme point d'équilibre trivial.*

Si la condition (H_1) satisfait alors il existe une unique point d'équilibre positive du système 2.1

$$\bar{E}^*(a) = e^{-Da} \begin{pmatrix} m_1 \bar{S}^* \\ m_2 \bar{A}^* \\ m_3 \bar{V}^* \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

Soit $E^*(a)$ un point d'équilibre non trivial, donc on peut écrire

$$\begin{cases} m_1 \bar{S}^* = r(\bar{S}^* + \bar{A}^* + \bar{V}^*) - K_0 m_2 \bar{A}^* \bar{S}^*, \\ m_2 \bar{A}^* = (K_0 m_2 \bar{A}^* \bar{S}^* + \rho \bar{V}^* + \alpha \bar{S}^*), \\ m_3 \bar{V}^* = \delta \bar{A}^*. \end{cases}$$

Alors on a $\bar{V}^* = \frac{\delta}{m_3} \bar{A}^*$ et

$$\begin{cases} m_1 \bar{S}^* = r \left(\bar{S}^* + \bar{A}^* + \frac{\delta}{m_3} \bar{A}^* \right) - K_0 m_2 \bar{S}^* \bar{A}^*, \\ m_2 \bar{A}^* = K_0 m_2 \bar{S}^* \bar{A}^* + \rho \frac{\delta}{m_3} \bar{A}^* + \alpha \bar{S}^*. \end{cases}$$

Ensuite

$$m_2 \bar{A}^* - r \left(1 + \frac{\delta}{m_3} \right) \bar{A}^* - \rho \frac{\delta}{m_3} \bar{A}^* = (r - m_1 + \alpha) \bar{S}^*,$$

c-à-d

$$\left[\left(m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3} \right) - r \left(1 + \frac{\delta}{m_3} \right) \right] \bar{A}^* = (r - \mu) \bar{S}^*,$$

donc

$$\bar{A}^* = \frac{(r - \mu) \bar{S}^*}{\left(m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3} \right) - r \left(1 + \frac{\delta}{m_3} \right)},$$

ce qui implique

$$\bar{S}^* = \frac{(r - m_1) \left(m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3} \right) + r \alpha \left(1 + \frac{\delta}{m_3} \right)}{(r - \mu) K_0 m_2},$$

si (H_1) $r > m_1$ et $m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3} > r \alpha \left(1 + \frac{\delta}{m_3} \right)$

alors le système 2.1 admet un unique point d'équilibre positif

$$\bar{x}_2(a) = \begin{pmatrix} \bar{s}^*(a) \\ \bar{A}^*(a) \\ \bar{v}^*(a) \end{pmatrix} = e^{-Da} \begin{pmatrix} m_1 \bar{S}^*(a) \\ m_2 \bar{A}^*(a) \\ m_3 \bar{V}^*(a) \end{pmatrix}.$$

□

3.1 Linéarisation

Pour étudier la stabilité des points d'équilibre nous cherchons le système linéarisé équivalent au système 2.7 par un changement de variable et par le développement de Taylor d'ordre 1. Soit le changement de variable suivant $y(t) = w(t) - \bar{w}(a)$, alors on obtient

$$\begin{cases} \frac{d(y(t) + \bar{w}(a))}{dt} = L(y(t) + \bar{w}(a)) + F(y(t) + \bar{w}(a)), \\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 - \bar{x}(a) \end{pmatrix} = y_0 \in X_0. \end{cases}$$

Et par la linéarisation de l'opérateur L on obtient

$$\frac{dy(t)}{dt} = L(y(t) + F((y(t) + \bar{w}(a)) + L(\bar{w}(a))),$$

D'autre part par la définition de l'opérateur L

$$\begin{aligned} L(\bar{w}(a)) &= L \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\bar{x}(a) \\ -\bar{x}'(a) - D\bar{x}(a) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'après le système 3.1 on peut écrire

$$\begin{aligned} L(\bar{w}(a)) &= \begin{pmatrix} -(B\bar{x}(\cdot)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -F \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{x}(a) \end{pmatrix} \\ &= -F(\bar{w}(a)). \end{aligned}$$

Par conséquent, le problème 2.7 est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = Ly(t) + F(y(t) + \bar{w}(a)) - F(\bar{w}(a)), \\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 - \bar{x}(a) \end{pmatrix} = y_0 \in X_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit $\bar{y}(a)$ un point d'équilibre du système 2.7 donc

$$\begin{aligned} \bar{y}(a) &= \bar{w}(a) - \bar{w}(a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc tout point d'équilibre du système 2.7 est transféré à un point d'équilibre nul du système 3.2.

L'opérateur F est localement Lipschitzienne pour $K(C) = 2 \max\{r, c'\}$ alors il est uniformément continue sur $X_0 \cap \overline{B}_c(0)$, par conséquent, il est admet un développement de Taylor d'ordre 1.

Soit $G(a, y(t)) = F(y(t) + \overline{w}(a)) - F(\overline{w})$ alors

$$G(a, 0) = 0,$$

et

$$\partial_y G(a, y(t)) = \partial_y F(y(t) + \overline{w}(a)) \text{ implique : } \partial_y G(a, 0) = \partial_y F(\overline{w}(a)),$$

Notons $\partial_y = D$ on obtient

$$\frac{y(t)}{dt} = Ay(t), \quad y_0 \in X_0, \text{ pour tout } t \geq 0,$$

et $G(a, y(t)) \approx G(a, 0) + G'(a, 0)y(t)$,

où $A = L + \mathcal{D}F(\overline{w})$. Le système 3.2 s'écrit comme suit

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + H(y(t)), \quad y_0 \in X_0, \text{ pour tout } t \geq 0, \tag{3.3}$$

tel que $H(y(t)) = F(y(t) + \overline{w}(a)) - F(\overline{w}(a)) - DF(\overline{w})y(t)$ vérifiant $H(0) = 0$, et $\mathcal{D}H(0) = 0$

Notons

$$\xi = \min\{m_1, m_2, m_3\} \quad \text{et} \quad \Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re}(\lambda) > -\xi\}.$$

Lemme 3.2. [5] Soit $\lambda \in \Omega, \lambda \in \rho(L)$, alors on a la formule suivante

$$(\lambda I - L)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \end{pmatrix} \in X, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in D(L),$$

et

$$\varphi(a) = e^{-(\lambda I + D)a} \alpha + \int_0^a e^{-(\lambda I + D)(a-s)} \psi(s) ds.$$

Il est facile de vérifier

$$\|(\lambda I - L)^{-1}\| \leq \frac{1}{(\operatorname{Re}(\lambda) + \xi)}, \text{ pour tout } \operatorname{Re}(\lambda) > -\xi.$$

Alors L est un opérateur de Hille-Yosida et

$$\|(\lambda I - L)^{-n}\| \leq \frac{1}{(\operatorname{Re}(\lambda) + \xi)^n}, \text{ pour tout } \operatorname{Re}(\lambda) > -\xi.$$

Définissons la partie de L dans $\overline{D(L)}$ par L_0 , comme suit

$$L_0 : D(L_0) \subset X \longrightarrow X,$$

avec

$$L_0 x = Lx, \text{ pour tout } x \in D(L_0) = \{x \in D(L) : Lx \in \overline{D(L)}\},$$

où

$$D(L_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in \{0_{\mathbb{R}^3}\} \times W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}^3) : \varphi(0) = 0 \right\}.$$

Il s'ensuit que L_0 est le générateur infinitesimal de C_0 -semigroupe $\{T_{L_0}(t)\}_{t \geq 0}$ dans $\overline{D(L)}$, et pour tout $t \geq 0$ l'opérateur linéaire $T_{L_0}(t)$ est défini par

$$T_{L_0}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{T}_{L_0}(t)\varphi \end{pmatrix},$$

où

$$\hat{T}_{L_0}(t)(\varphi)(a) = \begin{cases} e^{-Dt}\varphi(a-t), & \text{si } a \leq t \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Maintenant, on peut estimer la croissance essentielle bornée de C_0 -semigroupe généré par A_0 . La partie de A dans $\overline{D(A)}$.

On a pour tout $\begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \in D(L)$, on a

$$\mathcal{D}F(\bar{w}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}B(\bar{x})\varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

par utilisation de la formule de $B(\bar{x})\varphi$ on va trouver la formule de $\mathcal{D}B(\bar{x})\varphi$.

Soit $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} \in W^{1,1}((0, +\infty), \mathbb{R}^3)$ alors pour $\tau > 0$ on peut écrire

$$B(\bar{x} + \tau\varphi) = \begin{pmatrix} r(\bar{S} + \bar{A} + \bar{V} + \tau\bar{\varphi}_1 + \tau\bar{\varphi}_2 + \tau\bar{\varphi}_3) - \bar{S} \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{A}(a)da - \tau\bar{\varphi}_1 \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{\varphi}_2 da \\ \bar{S} \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{A}(a)da + \rho\bar{V} + \alpha\bar{S} + \tau\bar{\varphi}_1 \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{\varphi}_2 da + \tau\bar{\varphi}_3 + \alpha\bar{\varphi}_1 \\ \delta\bar{A} + \tau\delta\bar{\varphi}_2 \end{pmatrix}$$

telle que

$$\bar{\varphi}_1 = \int_0^{+\infty} \varphi_1(a)da, \quad \bar{\varphi}_2 = \int_0^{+\infty} \varphi_2(a)da, \quad \bar{\varphi}_3 = \int_0^{+\infty} \varphi_3(a)da,$$

Donc la différentiabilité de Gateaux de $B(\bar{x})\varphi$ où φ est la direction est définie par

$$\mathcal{D}B(\bar{x}) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{B(\bar{x} + \tau\varphi) - B(\bar{x})}{\tau}.$$

Ensuite l'expression de $B(\bar{x} + \tau\varphi) - B(\bar{x})$ est donné par

$$B(\bar{x} + \tau\varphi) - B(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \tau r(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_3) - \tau\bar{\varphi}_1 \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{\varphi}_2(a)da - \tau\bar{S} \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{A}(a)da \\ \tau\bar{S} \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{A}(a)da + \tau\bar{\varphi}_1 \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{\varphi}_2(a)da + \tau\rho\bar{\varphi}_3 + \tau\alpha\bar{\varphi}_1 \\ \tau\delta\bar{\varphi}_2 \end{pmatrix},$$

par conséquent

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{B(\bar{x} + \tau\varphi) - B(\bar{x})}{\tau} = \begin{pmatrix} r(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_3) - \tau\bar{\varphi}_1 \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{\varphi}_2(a)da - \tau\bar{S} \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{A}(a)da \\ \tau\bar{S} \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{A}(a)da + \tau\bar{\varphi}_1 \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{\varphi}_2(a)da + \tau\rho\bar{\varphi}_3 + \tau\alpha\bar{\varphi}_1 \\ \tau\delta\bar{\varphi}_2 \end{pmatrix},$$

et comme $\int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{A}(a)da = K_0 m_2 \bar{A}$ en déduire que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}B(\bar{x})\varphi &= \begin{pmatrix} r - K_0 m_2 \bar{A} & r & r \\ K_0 m_2 \bar{A} + \alpha & 0 & \rho \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 \\ \bar{\varphi}_2 \\ \bar{\varphi}_3 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -\bar{S} & 0 \\ 0 & \bar{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{\varphi}_1(a)da \\ \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{\varphi}_2(a)da \\ \int_0^{+\infty} \beta(a)\bar{\varphi}_3(a)da \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{D}B(\bar{x})\varphi &= \begin{pmatrix} r - K_0 m_2 \bar{A} & r & r \\ K_0 m_2 \bar{A} + \alpha & 0 & \rho \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} \varphi(a) \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & -\bar{S} & 0 \\ 0 & \bar{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} \beta(a)\varphi(a)da. \end{aligned}$$

Proposition 3.1. [5] *L'opérateur linéaire $\mathcal{D}F(\bar{w}) : \overline{D(L)} \subset X \rightarrow X$ est un opérateur compact.*

Démonstration.

On montre la compacité de l'opérateur $\mathcal{D}F(\bar{w})$ par l'utilisation du théorème de Kolmogorov. Alors on montre que

$$i) \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} \mathcal{D}F(\bar{w}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} (a) da = 0 \text{ uniformement dans } X.$$

$$ii) \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \mathcal{D}F(\bar{w}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi + h \end{pmatrix} - \mathcal{D}F(\bar{w}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \right\| = 0 \text{ uniformement dans } X.$$

$$\left\| \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} \mathcal{D}F(\bar{w}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} (a) da \right\| = \left\| \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} \mathcal{D}B(\bar{x})(\varphi)(a) da \right\|,$$

et comme $\mathcal{D}B(\bar{x})(\varphi)$ ne dépend pas à a on peut écrire

$$\left\| \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} \mathcal{D}F(\bar{w}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} (a) da \right\| \leq \| \mathcal{D}F(\bar{x})\varphi \| \left\| \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} da \right\| = 0.$$

Donc la condition $i)$ est vérifiée.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \mathcal{D}F(\bar{w}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi + h \end{pmatrix} - \mathcal{D}F(\bar{w}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \right\| &= \left\| \lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{D}B(\bar{x})(\varphi + h) - \mathcal{D}B(\bar{x})(\varphi) \right\| \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\| \begin{pmatrix} r - K_0 m_2 \bar{A} & r & r \\ K_0 m_2 \bar{A} + \alpha & 0 & \rho \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} (\varphi + h)(a) da \right. \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & -\bar{S} & 0 \\ 0 & \bar{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} \beta(a)(\varphi + h) da \\ &\quad - \begin{pmatrix} r - K_0 m_2 \bar{A} & r & r \\ K_0 m_2 \bar{A} + \alpha & 0 & \rho \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} (\varphi)(a) da \\ &\quad \left. - \begin{pmatrix} 0 & -\bar{S} & 0 \\ 0 & \bar{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} \beta(a)(\varphi) da \right\|, \end{aligned}$$

et par la continuité de la norme en déduire facilement que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| DF(\bar{w}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi + h \end{pmatrix} - DF(\bar{w}) \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix} \right\| = 0.$$

D'où la compacité de l'opérateur $DF(\bar{w})$. □

Pour $\lambda \in \Omega, \lambda \in \rho(L)$, et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \Phi \end{pmatrix} \in X$, on a

$$\begin{aligned} \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda I - L)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \Phi \end{pmatrix} \right\| &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left\| e^{-(\lambda I + D)a} \alpha + \int_0^a e^{-(\lambda I + D)(a-s)} \Phi(s) ds \right\| \\ &= \left\| \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} e^{-(\lambda I + D)a} \alpha + \int_0^a e^{-(\lambda I + D)(a-s)} \Phi(s) ds \right\| \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc on obtient l'inégalité suivante

$$\|T_{L_0}(t)\| \leq e^{-\xi t}, \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Proposition 3.2. [10] Soit $L : D(L) \subset X \rightarrow X$ est le générateur infinitesimal de C_0 -semigroupe $\{T_L(t)\}_{t \geq 0}$ dans l'espace de Banach X , alors on a

$$w_{0,ess}(L_0) \leq w_0(L_0).$$

Démonstration.

Pour montre que $w_{0,ess}(L_0) \leq w_0(L_0)$, il suffait de prouver que

$$\|T_{L_0}(t)\|_{ess} \leq \|T_{L_0}(t)\|.$$

Soit : $B_X(0, 1) = \{x \in X; \|x\| \leq 1\}$.

Alors on peut écrire

$$T_{L_0}(t)B_X(0, 1) = \{T_A(t)x \in X; \|x\| \leq 1\}.$$

D'autre part, pour $x' \in B_X(0, 1)$ et $T_{L_0}(t)x' \in T_{L_0}(t)B_X(0, 1)$ on a

$$\begin{aligned} \|T_{L_0}(t)x'\| &\leq \|T_{L_0}(t)\| \|x'\| \\ &\leq \|T_{L_0}(t)\|, \end{aligned}$$

ce qui équivaut à

$\|T_{L_0}(t)\| \in \{\epsilon > 0; T_{L_0}(t)B_X(0, 1) \text{ peut être couverte par un nombre fini de boules de rayon } \leq \epsilon\}$,

et par la définition de $\kappa(T_{L_0}(t)B_X(0, 1))$ on déduit que

$$\|T_{L_0}(t)\|_{ess} \leq \|T_{L_0}(t)\|,$$

D'où

$$w_{0,ess}(L_0) \leq w_0(L_0).$$

□

À partir de la dernière proposition on obtient le résultat suivant

$$w_{0,ess}(L_0) \leq w_0(L_0) \leq -\xi < 0.$$

Théorème 3.1. [10] Soit L_0 le générateur infinitésimal d'un C_0 -semigroupe et soit C un opérateur linéaire borné compact telle que

$$C : \overline{D(L)} \subset X \longrightarrow X,$$

alors on a le résultat suivant

$$w_{0,ess}((L + C)_0) \leq w_{0,ess}((L + C)_0).$$

À partir de la dernière théorème on déduit que

$$w_{0,ess}(A_0) \leq -\xi < 0,$$

Sachant que $A = L + DF(\bar{w})$.

Théorème 3.2. [11] Soit A un opérateur de Hille-Yosida sur l'espace de Banach X et soit $B \in L(\overline{D(A)}, X)$ alors $A + B$ est un opérateur de Hille-Yosida.

Proposition 3.3. [11] L'opérateur linéaire A est un opérateur de Hille-Yosida.

Posant $C = DF(\bar{w})$ et soit $\lambda \in \Omega$, comme $(\lambda I - L)$ est inversible, alors $\lambda I - (L + C)$ est inversible par suite

$\lambda I - (L + C)$ inversible, est équivalente à $(\lambda I - L) - C$ est inversible

donc $(I - C(\lambda I - L)^{-1})(\lambda I - L)$ est inversible

par conséquent $(I - C(\lambda I - L)^{-1})$ est inversible

Donc on a

$$\begin{aligned} (\lambda I - (L + C))^{-1} &= ((I - C(\lambda I - L)^{-1})(\lambda I - L))^{-1} \\ &= (\lambda I - L)^{-1}(I - C(\lambda I - L)^{-1})^{-1}, \end{aligned}$$

Considérons l'équation

$$(I - C(\lambda I - L)^{-1}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix},$$

alors on trouve

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} - C(\lambda I - L)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix},$$

donc on peut écrire

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} - C \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-(\lambda I + D)a} + \int_0^a e^{-(\lambda I + D)(a-s)} \Psi(s) ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}.$$

Après, on obtient le système suivante

$$\begin{cases} \alpha - DB(\bar{x})(e^{-(\lambda I + D)a} \alpha + \int_0^a e^{-(\lambda I + D)(a-s)} \Psi(s) ds) = \hat{\alpha}, \\ \varphi(a) = \hat{\varphi}(a). \end{cases}$$

ce système est équivalent à

$$\begin{cases} \alpha - DB(\bar{x})(e^{-(\lambda I + D)a} \alpha) = \hat{\alpha} + DB(\bar{x}) \left(\int_0^a e^{-(\lambda I + D)(a-s)} \varphi(s) ds \right), \\ \varphi = \hat{\varphi}. \end{cases}$$

En utilisant la formule de $DB(\bar{x})$, on obtient

$$\alpha - DB(\bar{x})(e^{-(\lambda I + D)a} \alpha) = M(\lambda) \alpha,$$

où

$$\begin{aligned} M(\lambda) = & I - \begin{pmatrix} r - K_0 m_2 \bar{A} & r & r \\ K_0 m_2 \bar{A} + \alpha & 0 & \rho \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda I + D)a} da \\ & - \begin{pmatrix} 0 & -\bar{S} & 0 \\ 0 & \bar{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-(\lambda I + D)a} da. \end{aligned}$$

Notons

$$S(\lambda, \varphi) = DB(\bar{x}) \left(\int_0^a e^{-(\lambda I + D)(a-s)} \varphi(s) ds \right).$$

Alors

$$M(\lambda)\alpha = \hat{\alpha} + S(\lambda, \varphi).$$

Lorsque $M(\lambda)$ est inversible, on a

$$\alpha = M(\lambda)^{-1}(\hat{\alpha} + S(\lambda, \varphi)).$$

Lemme 3.3. [12] *Les résultats suivants sont valables*

- (i) $\sigma(L + C) \cap \Omega = \sigma_p(L + C) \cap \Omega = \{\lambda \in \Omega : \det(M(\lambda)) = 0\}$;
- (ii) Si $\lambda \in \rho(L + C) \cap \Omega$, nous avons la formule suivante pour le résolvant

$$(\lambda I - (L + C))^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix},$$

où

$$\varphi(a) = e^{-(\lambda I + D)a} M(\lambda)^{-1}(\hat{\alpha} + S(\lambda, \hat{\varphi})) + \int_0^a e^{-(\lambda I + D)(a-s)} \hat{\varphi}(s) ds,$$

et $M(\lambda), S(\lambda, \hat{\varphi})$ définis par $S(\lambda, \varphi) = DB(\bar{x}) \left(\int_0^a e^{-(\lambda I + D)(a-s)} \varphi(s) ds \right)$ et

$$M(\lambda) = I - \begin{pmatrix} r - K_0 m_2 \bar{A} & r & r \\ K_0 m_2 \bar{A} + \alpha & 0 & \rho \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda I + D)a} da \\ - \begin{pmatrix} 0 & -\bar{S} & 0 \\ 0 & \bar{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-(\lambda I + D)a} da.$$

Démonstration.

On suppose que $M(\lambda)$ est inversible, alors $\det M(\lambda) \neq 0$.

On a

$$\begin{aligned} (\lambda I - (L + C))^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} &= (\lambda I - L)^{-1} (I - C(\lambda I - L)^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soit $(I - C(\lambda I - L)^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix}$.

De ce qui précède, on obtient

$$\begin{cases} \alpha = M(\lambda)^{-1}(\hat{\alpha} + S(\lambda, \varphi)), \\ \varphi = \hat{\varphi}. \end{cases}$$

donc $(I - C(\lambda I - L)^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix}$, il existe alors $(\lambda I - (L + C))^{-1}$ est inversible c-à-d $\lambda \in \rho(L + C)$ par conséquent en déduire que

$$\{\lambda \in \Omega : \det M(\lambda) \neq 0\} \subset \rho(L + C),$$

donc on obtient $\sigma(L + C) \subset \{\lambda \in \Omega : \det(M(\lambda)) = 0\}$,

alors $\sigma(L + C) \cap \Omega \subset \{\lambda \in \Omega : \det(M(\lambda)) = 0\}$.

Inversement, supposons que $\lambda \in \Omega$ et $\det(M(\lambda)) = 0$,

maintenant cherchons $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} \in D(L)_{/\{0\}}$, vérifier

$$(L + C) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

En fait, définissant

$$(\lambda I - L) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix},$$

ce qui implique $\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = (\lambda I - L)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix}$, d'autre part

$$(L + C) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix},$$

la dernière équation devient $(\lambda I - (L + C)) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = 0$,

c-à-d $(I - C(\lambda I - L)^{-1})(\lambda I - L) \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} = 0$,

cela donne l'équation $(I - C(\lambda I - L)^{-1}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = 0$,

Ainsi nous pouvons trouver une solution de l'équation 3.4 si et seulement si trouver $\begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} \in X_{/\{0\}}$ satisfait

$$(I - C(\lambda I - L)^{-1}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} = 0.$$

Cela suffit donc pour trouver une solution au système suivant

$$\begin{cases} M(\lambda)\alpha = 0, \\ \varphi = 0. \end{cases}$$

Ce qui signifie que nous pouvons trouver une solution de l'équation 3.4 si et seulement si nous pouvons trouver $\alpha \neq 0$ vérifier $M(\lambda)\alpha = 0$ ce qui implique $\det M(\lambda) = 0$ pour trouver α qui est un vecteur propre associé à la valeur propre λ telle que $M(\lambda)\alpha = 0$, alors nous pouvons trouver

$\begin{pmatrix} 0 \\ \psi \end{pmatrix} \in D(L)_{/\{0\}}$ satisfait l'équation 3.4 et ainsi $\lambda \in \sigma_p(L + C)$.
D'où

$$\{\lambda \in \Omega : \det(M(\lambda)) = 0\} \subset \sigma_p(L + C),$$

□

si $\lambda \in \rho(L + C) \cap \Omega$ alors $\lambda I - (L + C)$ est inversible et $\det(M(\lambda)) \neq 0$.

on a $(\lambda I - (L + C))^{-1} = (\lambda I - L)^{-1}(I - C(\lambda I - L)^{-1})^{-1}$,

alors

$$\begin{aligned} (\lambda I - (L + C))^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} &= (\lambda I - L)^{-1}(I - C(\lambda I - L)^{-1})^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= (\lambda I - L)^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

telle que

$$\varphi(a) = e^{-(\lambda I + D)a} \alpha + \int_0^a e^{-(\lambda I + D)(a-s)} \hat{\varphi}(s) ds,$$

et comme $\det(M(\lambda)) \neq 0$ alors

$$\alpha = M(\lambda)^{-1}(\hat{\alpha} + S(\lambda, \hat{\varphi})),$$

D'où

$$\varphi(a) = e^{-(\lambda I + D)a} M(\lambda)^{-1}(\hat{\alpha} + S(\lambda, \hat{\varphi})) + \int_0^a e^{-(\lambda I + D)(a-s)} \hat{\varphi}(s) ds.$$

donc la preuve de (ii) est terminée. ci-dessous nous étudierons la stabilité de le point d'équilibre

par étudier les valeurs propre associé à $M(\lambda)$.

3.2 Stabilité du point d'équilibre triviale

Maintenant, on obtient la stabilité du point d'équilibre trivial $E_1(0, 0_{L^1((0, +\infty), \mathbb{R})}, 0)$

Soit

$$M(\lambda) = I - \begin{pmatrix} r & r & r \\ \alpha & 0 & \rho \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda I + D)a} da.$$

3.3 L'équation caractéristique de $M(\lambda)$

On a

$$-(\lambda I + D)a = \begin{pmatrix} -(\lambda + m_1)a & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda + m_2)a & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda + m_3)a \end{pmatrix},$$

alors

$$e^{-(\lambda I + D)a} da = \begin{pmatrix} e^{-(\lambda + m_1)a} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-(\lambda + m_2)a} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\lambda + m_3)a} \end{pmatrix},$$

donc, on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda I + D)a} da = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda + m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda + m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda + m_3} \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} M(\lambda) &= I - \begin{pmatrix} r & r & r \\ \alpha & 0 & \rho \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda+m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda+m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+m_3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{(\lambda+m_1)-r}{\lambda+m_1} & \frac{-r}{\lambda+m_2} & \frac{-r}{\lambda+m_3} \\ \frac{-\alpha}{\lambda+m_1} & 1 & \frac{-\rho}{\lambda+m_3} \\ 0 & \frac{-\delta}{\lambda+m_2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il résulte donc que

$$\begin{aligned} \det(M(\lambda)) &= \begin{vmatrix} \frac{(\lambda+m_1)-r}{\lambda+m_1} & \frac{-r}{\lambda+m_2} & \frac{-r}{\lambda+m_3} \\ \frac{-\alpha}{\lambda+m_1} & 1 & \frac{-\rho}{\lambda+m_3} \\ 0 & \frac{-\delta}{\lambda+m_2} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{(\lambda+m_1)-r}{\lambda+m_1} \left(\frac{(\lambda+m_2)(\lambda+m_3-\delta\rho)}{(\lambda+m_2)(\lambda+m_3)} \right) - \frac{\alpha}{\lambda+m_1} \left(\frac{r(\lambda+m_3)+r\delta(\lambda+m_2)}{(\lambda+m_2)(\lambda+m_3)} \right). \end{aligned}$$

Par simplification, on obtient l'équation caractéristique suivante

$$\det(M(\lambda)) = \frac{f_0(\lambda)}{(\lambda+m_1)(\lambda+m_2)(\lambda+m_3)} = 0,$$

où

$$f_0(\lambda) = \lambda^3 + a_0\lambda^2 + b_0\lambda + c_0.$$

et

$$a_0 = (m_1 + m_2 + m_3 - r).$$

$$b_0 = (m_1 - r)(m_2 + m_3) + (m_2m_3 - \rho\delta) - r\alpha.$$

$$c_0 = (m_1 - r)(m_2m_3 - \rho\delta) - (m_3 + \delta)r\alpha.$$

Il est clair d'observer que

$$\{\lambda \in \Omega : \det(M(\lambda)) = 0\} = \{\lambda \in \Omega : f_0(\lambda) = 0\}.$$

Soit $\lambda \in \Omega, f_0(\lambda) = 0$, alors

$$\lambda^3 + a_0\lambda^2 + b_0\lambda + c_0 = 0,$$

la dernière équation est équivalente à $\lambda^3 + a_0\lambda^2 + b_0\lambda = -c_0$,

$$\text{donc } \lambda(\lambda^2 + a_0\lambda + b_0) = -c_0$$

et si $c_0 < 0$ alors $f_0(\lambda)$ admet au moins une racine réelle positive alors le point équilibre E_1 est instable.

Remarque 3.1. *Tout polynôme de degré impair 0 coefficient réel admet au moins une racine réelle.*

$$\text{Si } c_0 > 0 \text{ alors on a } (m_1 - r)(m_2m_3 - \rho\delta) - (m_3 + \delta)r\alpha > 0,$$

$$\text{ce qui implique que } (m_1 - r)(m_2m_3 - \rho\delta) > (m_3 + \delta)r\alpha,$$

On rappelle que le système 2.7 admet $E_1(0, 0_{L^1((0,+\infty),\mathbb{R})}, 0)$ comme point d'équilibre trivial si la condition (H1) est satisfaite, donc en déduire que

$$a_0 = m_1 + m_2 + m_3 - r > 0,$$

$$b_0 = (m_1 - r)(m_2 + m_3) + (m_2m_3 - \rho\delta) - r\alpha.$$

En utilisant $m_2m_3 - \rho\delta > 0$, on trouve

donc

$$\begin{aligned} b_0 &> (m_1 - r)(m_2 + m_3) - r\alpha \\ &= r\alpha \left(\frac{(m_1 - r)}{r\alpha} (m_2 + m_3) - r\alpha \right), \end{aligned}$$

et comme $c_0 > 0$ on a

$$\frac{(m_1 - r)}{r\alpha} > \frac{(m_3 + \delta)}{(m_2m_3 - \rho\delta)},$$

alors on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} b_0 &> (m_1 - r)(m_2 + m_3) - r\alpha \\ &> r\alpha \left(\frac{(m_3 + \delta)(m_2 + m_3)}{m_2 m_3 - \rho\delta} - 1 \right) > 0. \end{aligned}$$

De plus on a

$$\begin{aligned} a_0 b_0 - c_0 &= (m_1 + m_2 + m_3 - r)((m_1 - r)(m_2 + m_3) + (m_2 m_3 - \rho\delta) - r\alpha) \\ &\quad - (m_1 - r)(m_2 m_3 - \rho\delta) + (m_3 + \delta)r\alpha \\ &> (m_1 + m_2 + m_3 - r)(m_2 m_3 - \rho\delta) - (m_1 - r)(m_2 m_3 - \rho\delta) + (m_3 + \delta)r\alpha \\ &= (m_1 - r)(m_2 m_3 - \rho\delta) + (m_2 + m_3)(m_2 m_3 - \rho\delta) - (m_1 - r)(m_2 m_3 - \rho\delta) \\ &\quad + (m_3 + \delta)r\alpha \\ &= (m_2 + m_3)(m_2 m_3 - \rho\delta) + (m_3 + \delta)r\alpha > 0. \end{aligned}$$

D'après le critère de Routh-Hurwitz $f_0(\lambda)$ admet un racine à partie réelle négative.

D'où le point d'équilibre $E_1(a)$ est stable.

Théorème 3.3. *Si $c_0 > 0$, alors le point d'équilibre $E_1(a)$ est asymptotiquement stable pour tout $\tau \geq 0$.*

Si $c_0 < 0$, alors $E_1(a)$ est unstable pour tout $\tau \geq 0$.

Remarque 3.2. $c_0 > 0$ signifie $r < \mu + \alpha - \frac{(m_3 + \delta)r\alpha}{(m_2 m_3 - \rho\delta)}$ si α assez petit alors le taux de natalité r peut être inférieur au taux de mortalité μ et toute la population est facilement éteinte, donc en réalité donc $E_1(a)$ est plus susceptible d'être instable.

3.4 Stabilité du point d'équilibre positif $E_1^*(a)$

On va calculer l'équation caractéristique associée à $E_1^*(a)$ du système 3.3 où (H1) est satisfait on a

$$M(\lambda) = I - \begin{pmatrix} r - K_0 m_2 \bar{A} & r & r \\ K_0 m_2 \bar{A} + \alpha & 0 & \rho \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda I + D)a} da$$

$$- \begin{pmatrix} 0 & -\bar{S} & 0 \\ 0 & \bar{S} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \int_0^{+\infty} \beta(a) e^{-(\lambda I + D)a} da.$$

Il s'ensuit que

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r - K_0 m_2 \bar{A}}{\lambda + m_1} & \frac{K_0 m_2 \bar{S} e^{-\lambda \tau} r}{-} & -\frac{r}{\lambda + m_3} \\ -\frac{(K_0 m_2 \bar{A} + \alpha)}{\lambda + m_1} & 1 - \frac{K_0 m_2 \bar{S} e^{-\lambda \tau}}{\lambda + m_2} & -\frac{\rho}{\lambda + m_3} \\ 0 & -\frac{\delta}{\lambda + m_2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } \det(M(\lambda)) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{r - K_0 m_2 \bar{A}}{\lambda + m_1} & \frac{K_0 m_2 \bar{S} e^{-\lambda \tau} r}{-} & -\frac{r}{\lambda + m_3} \\ -\frac{(K_0 m_2 \bar{A} + \alpha)}{\lambda + m_1} & 1 - \frac{K_0 m_2 \bar{S} e^{-\lambda \tau}}{\lambda + m_2} & -\frac{\rho}{\lambda + m_3} \\ 0 & -\frac{\delta}{\lambda + m_2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{(K_0 m_2 \bar{A} + \alpha)}{\lambda + m_1} \begin{vmatrix} \frac{K_0 m_2 \bar{S} e^{-\lambda \tau} r}{\lambda + m_2} & -\frac{r}{\lambda + m_3} \\ -\frac{\delta}{\lambda + m_2} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \left(1 - \frac{(r - K_0 m_2 \bar{A})}{\lambda + m_1}\right) \left(1 - \frac{K_0 m_2 \bar{S} e^{-\lambda \tau}}{\lambda + m_2}\right) - \frac{\delta \rho}{(\lambda + m_2)(\lambda + m_3)}$$

$$+ \frac{(K_0 m_2 \bar{A} + \alpha)}{\lambda + m_1} \left((K_0 m_2 \bar{S} e^{-\lambda \tau} - r) - \frac{r \delta}{(\lambda + m_2)(\lambda + m_3)} \right).$$

Pour simplifier nous trouvons

$$\det(M(\lambda)) = \frac{\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c + (e + f\lambda + g\lambda^2)e^{-\lambda\tau}}{(\lambda + m_1)(\lambda + m_2)(\lambda + m_3)} = \frac{f(\lambda)}{s(\lambda)} = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
 a &= m_1 + m_2 + m_3 - r + K_0 m_2 \bar{A}^*, \\
 b &= -\rho\delta + m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 - K_0 m_2 \bar{A}^* - r(m_1 + m_2) + k_0 m_2 \bar{A}^* (m_2 + m_3) - r\alpha, \\
 c &= -\rho\delta m_1 + (r - K_0 m_2 \bar{A}^*)\rho\delta - K_0 m_2 \bar{A}^* r\delta + m_1 m_2 m_3 - K_0 m_2 \bar{A}^* r m_3 - r m_2 m_3 \\
 &\quad + K_0 m_2 \bar{A}^* m_2 m_3 - r\delta\alpha - r\alpha m_3 \\
 &= -(r - m_1)(m_2 m_3 - \rho\delta) + K_0 m_2 \bar{A}^* ((m_2 m_3 - \rho\delta) - r(\delta + m_3)) - r\alpha(\delta + m_3) \\
 &= -(r - m_1)(m_2 m_3 - \rho\delta) + K_0 m_2 \bar{S}^* m_3 (r - \mu) - r\alpha(\delta + m_3) \\
 &= 0, \\
 e &= -K_0 m_2 \bar{S}^* (m_1 - r - \alpha) m_3, \\
 &= K_0 m_2 \bar{S}^* (r - \mu) m_3 > 0, \\
 f &= -K_0 m_2 \bar{S}^* (m_1 + m_3 - r - \alpha), \\
 g &= -K_0 m_2 \bar{S}^*.
 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 K_0 m_2 \bar{S}^* &= \frac{(r - m_1)(m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3}) + r\alpha(1 + \frac{\delta}{m_3})}{r - \mu}, \\
 K_0 m_2 \bar{A}^* &= \frac{(r - \mu) K_0 m_2 \bar{S}^*}{(m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3}) - r(1 + \frac{\delta}{m_3})}.
 \end{aligned}$$

Remarquer que les coefficients a, b, c, e, f, g sont indépendants de τ . Il est facile de voir que

$$\{\lambda \in \Omega : \det(M(\lambda)) = 0\} = \{\lambda \in \Omega : f(\lambda) = 0\}.$$

Si $\tau = 0$, alors on a

$$f(\lambda) = \lambda^3 + (a + g)\lambda^2 + (b + f)\lambda + e.$$

On a

$$\begin{aligned}
 a + g &= m_1 + m_2 + m_3 - r + K_0 m_2 \bar{A}^* - K_0 m_2 \bar{S}^* \\
 &> (m_1 + m_2 + m_3) - r + \left(r + \frac{r(\bar{A}^* + \bar{V}^*)}{\bar{S}^*} - m_1 \right) - \left(m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3} \right) \\
 &= m_3 + \frac{r(\bar{A}^* + \bar{V}^*)}{\bar{S}^*} + \rho \frac{\delta}{m_3} > 0,
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 b + \dot{f} &= -\rho\delta + m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 - K_0 m_2 \bar{A}^* r - r(m_1 + m_3) + K_0 m_2 \bar{A}^* (m_2 + m_3) \\
 &\quad - r\alpha - K_0 m_2 \bar{S}^* (m_1 + m_3 - r - \alpha) \\
 &= (m_2 m_3 - \rho\delta) + m_1 (m_2 + m_3) - K_0 m_2 \bar{A}^* r - r(m_2 + m_3) \\
 &\quad + \left(r + \frac{r(\bar{A}^* + \bar{V}^*)}{\bar{S}^*} - m_1 \right) (m_2 + m_3) - r\alpha + K_0 m_2 \bar{S}^* (r - \mu - m_3) \\
 &> -K_0 m_2 \bar{A}^* r + (m_2 m_3 - \rho\delta) + \frac{r(\bar{A}^* + \bar{V}^*)}{\bar{S}^*} (m_2 + m_3) - r\alpha + (r - m_1) \left(m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3} \right) \\
 &\quad + r\alpha \left(1 + \frac{\delta}{m_3} \right) - m_3 \left(m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3} \right) \\
 &= -K_0 m_2 \bar{A}^* r + \frac{r(\bar{A}^* + \bar{V}^*)}{\bar{S}^*} (m_2 + m_3) + (r - m_1) \left(m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3} \right) + r\alpha \frac{\delta}{m_3} \\
 &= \frac{1}{\bar{S}^*} (r(\rho\bar{V}^* + \alpha\bar{S}^* - m_2\bar{A}^*) + r(\bar{A}^* + \bar{V}^*)(m_2 + m_3)) + (r - m_1) \left(m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3} \right) \\
 &\quad + r\alpha \frac{\delta}{m_3} > 0.
 \end{aligned}$$

$e > 0$.

En appliquant le critère de Routh-Hurwitz (pour $\tau = 0$), alors les racines de $f(\lambda)$ admettent une partie réelle négative si et seulement si

$$(H2) \quad (a + g)(b + \dot{f}) > e.$$

Si $\tau \neq 0$, soit $\lambda = i\omega$ ($\omega > 0$) une racine purement imaginaire de $f(\lambda)$. Alors on a

$$a - i\omega^3 - a\omega^2 + ib\omega + ee^{-i\omega\tau} + i\dot{f}\omega e^{-i\omega\tau} - g\omega^2 e^{-i\omega\tau} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{cela résulte } & -i\omega^3 - a\omega^2 + ib\omega + e \cos(\omega\tau) - e \sin(\omega\tau) + i\dot{f}\omega \cos(\omega\tau) - i\dot{f}\omega \cos(\omega\tau) \\ & - g\omega^2 \cos(\omega\tau) + g\omega^2 \sin(\omega\tau) = 0. \end{aligned}$$

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans la dernière équation, on obtient le système suivante

$$\begin{cases} -\omega^3 + b\omega = (e - g\omega^2)\sin(\omega\tau) - \dot{f}\omega \cos(\omega\tau), \\ -a\omega^2 = (g\omega^2 - e) \cos(\omega\tau) - \dot{f}\omega \sin(\omega\tau). \end{cases} \quad (3.5)$$

Ainsi, en déduite que

$$(-\omega^3 + b\omega)^2 + (-a\omega^2)^2 = (e - g\omega^2)^2 + (\dot{f}\omega)^2, \quad (3.6)$$

et

$$\omega^6 + (a^2 - 2b - g^2)\omega^4 + (b^2 - \dot{f}^2 + 2ge)\omega^2 - e^2 = 0. \quad (3.7)$$

Posant $z = \omega^2$, alors 3.7 dévient

$$z^3 + (a^2 - 2b - g^2)z^2 + (b^2 - \dot{f}^2 + 2ge)z - e^2 = 0. \quad (3.8)$$

Soit z_1, z_2 et z_3 les trois racines de l'équation 3.8. On a

$$\begin{aligned}
 a^2 - 2b - g^2 &= (m_1 + m_2 + m_3 - r + K_0 m_2 \bar{A}^*)^2 - 2(-\rho\delta + m_1 m_2 + m_1 m_3 + m_2 m_3 - K_0 m_2 \bar{A}^* r \\
 &\quad - r(m_1 + m_3) + K_0 m_2 \bar{A}^* (m_2 + m_3) - r\alpha) - (-K_0 m_2 \bar{S}^*)^2 \\
 &= (r - m_1)^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2\rho\delta + (K_0 m_2 \bar{A}^*)^2 + 2K_0 m_2 \bar{A}^* m_1 \\
 &\quad + 2K_0 m_2 \bar{A}^* m_1 \\
 &\quad + 2r\alpha - (K_0 m_2 \bar{S}^*)^2 \\
 &> (r - m_1)^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2\rho\delta + (K_0 m_2 \bar{A}^*)^2 + 2K_0 m_2 \bar{A}^* m_1 + 2r\alpha - \left(m_2 - \rho \frac{\delta}{m_3}\right)^2 \\
 &> (r - m_1)^2 + m_2^2 + m_3^2 + 2\rho\delta + (K_0 m_2 \bar{A}^*)^2 + 2K_0 m_2 \bar{A}^* m_1 + 2r\alpha - m_2^2 > 0,
 \end{aligned}$$

et

$$a^2 - 2b - g^2 > 0, \quad -e^2 < 0,$$

alors

$$z_1 + z_2 + z_3 = -(a^2 - 2b - g^2) < 0 \text{ et } z_1 z_2 z_3 = e^2 > 0.$$

Il s'ensuit que l'équation 3.8 admet un seul racine réelle positif z^* . Alors l'équation 3.7 admet un unique racine réelle positif $\omega_0 = \sqrt{z^*}$.

Proposition 3.4. *Soit*

$$g(z) = z^3 + (a^2 - 2b - g^2)z^2 + (b^2 - f^2 + 2ge)z - e^2.$$

Alors. on a

$$g'(z)|_{z=z^*} > 0.$$

Démonstration.

L'équation 3.7 admet un racine réelle positif ω_0 , donc on a

$$g(z) = (z - \omega_0)(z^2 + pz + q) \text{ et } p, q \in \mathbb{R},$$

et

$$g'(z) = z^2 + pz + q + (z - \omega_0)(2z + p),$$

ce qui implique

$$g'(z)|_{z=z^*} = (z^*)^2 + pz^* + q > 0.$$

Par conséquent, on a

$$3z^2 + (2a^2 - 4b - 2g^2)z + (b^2 - \mathring{f}^2 + 2eg)|_{z=z^*} > 0.$$

Il résulte que

$$3\omega^4 + (2a^2 - 4b - 2g^2)\omega^2 + (b^2 - \mathring{f}^2 + 2ge)|_{\omega=\omega_0} > 0. \quad (3.9)$$

D'après système 3.5, l'équation $f(\lambda) = 0$ avec $\tau = \tau_k$ admet une paire de racines purement imaginaires $\pm\omega_0$ telle que

$$\tau_k = \begin{cases} \frac{1}{\omega_0} \left(\arccos \frac{(\mathring{f} - ag)\omega_0^4 + (ae - b\mathring{f})\omega_0^2}{\mathring{f}^2\omega_0^2 + (g\omega_0^2 - e)^2} \right) + 2k\pi; \eta \geq 0, \\ \frac{1}{\omega_0} \left(-\arccos \frac{(\mathring{f} - ag)\omega_0^4 + (ae - b\mathring{f})\omega_0^2}{\mathring{f}^2\omega_0^2 + (g\omega_0^2 - e)^2} \right) + 2(k+1)\pi; \text{ sinon.} \end{cases} \quad (3.10)$$

Pour $k = 0, 1, 2, \dots$ et $\eta = (g\omega_0^2)(\omega_0^3 - b\omega_0) + a\mathring{f}\omega_0^3$.

□

Lemme 3.4. *Supposons que la condition (H1) satisfait, alors*

$$\left. \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=i\omega_0} \neq 0.$$

De plus, $\lambda = i\omega_0$ est une racine simple de $f(\lambda) = 0$.

Démonstration.

La différenciation de l'équation $f(\lambda) = 0$ par rapport à λ donne

$$\left. \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=i\omega_0} = (3\lambda^2 + 2a\lambda + b) + (2g\lambda + f)e^{-\tau\lambda} - \tau(g\lambda^2 + f\lambda + e)e^{-\tau\lambda} \Big|_{\lambda=i\omega_0},$$

ce qui donne $\left. \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=i\omega_0} = 0$. En séparant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'équation ci-dessus, on trouve

$$\begin{cases} -3\omega_0^2 + b = -2g\omega_0 \sin(\omega_0\tau_k) - \mathring{f} \cos(\omega_0\tau_k) + \tau_k(e - g\omega_0^2) \cos(\omega_0\tau_k) + \tau_k \mathring{f} \omega_0 \sin(\omega_0\tau_k), \\ 2a\omega_0 = -2g\omega_0 \cos(\omega_0\tau_k) + \mathring{f} \sin(\omega_0\tau_k) - \tau_k(e - g\omega_0^2) \sin(\omega_0\tau_k) + \tau_k \mathring{f} \omega_0 \cos(\omega_0\tau_k). \end{cases}$$

On définit

$$G(\omega) = g(\omega^2) = (\omega^3 - b\omega)^2 - (e - g\omega^2)^2 + a^2\omega^4 - \mathring{f}^2\omega^2,$$

alors, $G(\omega_0) = 0$.

Et

$$G'(\omega) = 2(\omega^3 - b\omega)(3\omega^2 - b) + 2(e - g\omega^2)2g\omega + 4a^2\omega^3 - 2\mathring{f}^2\omega$$

. D'après le système 3.9, On sait

$$\begin{cases} -\omega_0^3 + b\omega_0 = (e - g\omega_0^2) \sin(\omega_0\tau_k) - \mathring{f} \cos(\omega_0\tau_k), \\ -a\omega_0^2 = (g\omega_0^2 - e) \cos(\omega_0\tau_k) - \mathring{f} \omega_0 \sin(\omega_0\tau_k). \end{cases} \quad (3.11)$$

Nous en déduisons que $G'(\omega_0) = 0$. D'autre part comme $G(\omega) = g(\omega^2)$ alors $G'(\omega_0) = 2\omega_0 g'(\omega_0^2) > 0$.

Donc $G'(\omega_0) = 0$ et $G'(\omega_0) > 0$ c'est contradiction.

D'où

$$\left. \frac{df(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=i\omega_0} \neq 0.$$

□

Lemme 3.5. *Supposons que la condition (H1) est satisfait, soit $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$ la racine de $f(\lambda)$ satisfait $\alpha(\tau_k) = 0$, $\omega(\tau_k) = \omega_0$, où τ_k est définie dans 3.10.*

Alors

$$\alpha'(\tau_k) = \operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right) \Big|_{\tau=\tau_k} > 0.$$

Démonstration.

comme $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$ est un racine de $f(\lambda)$ alors $f(\lambda(\tau)) = 0$ et comme la fonction f est dépend a τ alors on peut écrire

$$f(\tau, \lambda(\tau)) = 0. \tag{3.12}$$

Maintenant, en dérive λ par rapport à τ dans l'équation 3.12, on obtient

$$\frac{df}{d\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\tau} + \frac{df}{d\tau} = 0.$$

Donc

$$[(3\lambda^2 + 2a\lambda + b) + (2g\lambda + \mathring{f})e^{-\lambda\tau} - \tau(e + \mathring{f}\lambda + g\lambda^2)e^{-\lambda\tau}] \frac{d\lambda}{d\tau} - \lambda(e + \mathring{f}\lambda + g\lambda^2)e^{-\lambda\tau} = 0,$$

et

$$(3\lambda^2 + 2a\lambda + b) \frac{d\lambda}{d\tau} + (2g\lambda + \mathring{f})e^{-\lambda\tau} \frac{d\lambda}{d\tau} - (e + \mathring{f}\lambda + g\lambda^2)e^{-\lambda\tau} \left(\tau \frac{d\lambda}{d\tau} + \lambda \right) = 0.$$

D'après

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c + (e + \mathring{f}\lambda + g\lambda^2)e^{-\lambda\tau} = 0,$$

$$\text{on a } (e + \mathring{f}\lambda + g\lambda^2)e^{-\lambda\tau} = -(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c).$$

Il implique que

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_k} = \left(-\frac{(3\lambda^2 + 2a\lambda + b)}{\lambda(\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c)} + \frac{(2g\lambda + \mathring{f})}{(g\lambda^2 + \mathring{f}\lambda + e)\lambda} - \frac{\tau}{\lambda} \right) \Big|_{\tau=\tau_k}.$$

En utilisant l'équation 3.6, on trouve

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_k} = \frac{3\omega_0^4 + (2a^2 - 4b - 2g^2)\omega_0^2 + (b^2 - \dot{f}^2 + 2ge)}{(\dot{f}\omega_0^2)^2 + (e - g\omega_0^2)^2}.$$

Ici d'après l'inégalité 3.9, on obtient

$$3\omega_0^4 + (2a^2 - 4b - 2g^2)\omega_0^2 + (b^2 - \dot{f}^2 + 2ge) > 0,$$

il est facile de voir que

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_k} > 0.$$

par conséquent, on a

$$\operatorname{sign} \left(\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right) \Big|_{\tau=\tau_k} \right) = \operatorname{sign} \left(\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_k} \right).$$

D'où

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right) \Big|_{\tau=\tau_k} > 0.$$

□

Théorème 3.4. *Supposons que les conditions (H1), (H2) sont satisfaites.*

(i) Si $\tau \in [0, \tau_0[$ alors le point d'équilibre positif du système 2.1 est asymptotiquement stable.

(ii) Si $\tau > \tau_0$, le point d'équilibre positif $E^*(a)$ du système 2.1 est instable.

Théorème 3.5. *Si la condition (H1) est satisfait alors il existe $\tau_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$, telle que τ_k est définie dans 3.10 tel que le modèle structuré en âge 2.1, subit une bifurcation de Hopf à l'équilibre positif $E^*(a)$. En particulier lorsque $\tau = \tau_k$ une solution périodique non triviale bifurque de l'équilibre $E^*(a)$.*

Conclusion

Dans cet article, la bifurcation de Hopf d'un modèle d'alcoolisme structuré par âge est étudiée. Réel Les données épidémiques indiquent des fluctuations périodiques régulières de l'incidence de la maladie [33][34][35], mais la plupart Les modèles pour les maladies épidémiques prédisent la convergence vers un équilibre endémique stable unique, il est donc important d'examiner dans quelles conditions les fluctuations périodiques de la maladie l'incidence peut se produire. Parce qu'il y a des gens qui alcoolisent pour leurs propres raisons, l'alcoolisme, en tant que maladie épidémique sociale, est quelque peu différent de l'épidémie commune maladies. Cependant, dans notre analyse, nous avons constaté que des fluctuations périodiques régulières peuvent encore surgir. En choisissant comme paramètre de bifurcation et en analysant l'équation caractéristique correspondante, nous pouvons conclure que la stabilité asymptotique locale du trivial l'équilibre $E_1^*(a)$ est déterminé par c_0 . Si $c_0 < 0$, alors l'équilibre trivial $E_1^*(a)$ est instable pour tout $\tau \geq 0$. Si $c_0 > 0$ l'équilibre trivial $E_1^*(a)$ est local asymptotiquement stable pour tout $\tau \geq 0$. Pour l'équilibre positif, si la condition (H1) est vérifié, nous établissons des conditions pour assurer la stabilité locale. Le paramètre τ n'affecte pas la stabilité de l'équilibre trivial, mais peut modifier la stabilité de l'équilibre positif. En utilisant la théorie de la variété centrale [29] et le théorème de bifurcation de Hopf [30], qui s'est développé pour Cauchy non densément défini problèmes, l'existence d'une bifurcation de Hopf à l'équilibre positif est obtenue. Dans en particulier, une solution périodique non triviale bifurque de l'équilibre positif lorsque le paramètre de bifurcation τ passe par les valeurs critiques τ_k ; $k = 0, 1, 2, \dots$. Nos résultats analytiques indiquent que l'introduction du paramètre τ peut affecter le comportement dynamique du système 2.1. De plus, l'alcoolisme est souvent associé à certaines des raisons propres aux alcooliques, telles que les pertes de revenus, le

chômage ou les problèmes familiaux. En ce sens, comme tant que la population n'est pas éteinte, les alcooliques existeront toujours.

Bibliographie

- [1] X-Z. Li, T. Yang, M. Maia, *Age Structured Epidemic Modeling*, Springer (2020) p327.
- [2] D. Li, *Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés*, (ellipses) p177.
- [3] S. Saidi, *Cours sur la théorie spectrale des opérateurs*, Université Mohamed Seddik Ben Yahia Jijel, p17.
- [4] A.M. Amine, *Théorie des C_0 -semi-groupes et application.*, Université Dr Tahar Moulay - Saïda, p11.
- [5] Z.K. Guo, H/-F. Huo , H. Xiang, *Bifurcation analysis of an age-structured alcoholism model*, Journal of Biological Dynamics,.
- [6] S. Bentout, *Application de la Vaccination par Pulsation à Quelques Modèles Epidémiologiques*, Université Abou Bekr Belkaid-Tlemcen-. p1,2.
- [7] R Mahardika, *Routh-Hurwitz criterion and bifurcation method for stability analysis of tuberculosis transmission model*. J.Phys Conf, p4.
- [8] R. Seydel, *Practical Bifurcation and Stability Analysis*. Küoln, September 2009 (Springer), p75,76,77,79.
- [9] Q. Richard, *Global stability in a competitive infection-age structured model* Mathematical Modelling of Natural Phenomena, EDP Sciences
- [10] A. Ducrot, Z. Liu, and P. Magal, *Essential growth rate for bounded linear perturbation of non densely defined cauchy problems*, J. Math. Anal. Appl. 341(1) (2008), pp. 501–518.
- [11] W. Arendt, C. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander, *ector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, B. Verlag, Basel, 2001.

- [12] Z.Wang and Z. Liu, *Hopf bifurcation of an age-structured compartmental pest-pathogen model*, J. Math. Anal. Appl. 385(2) (2012), pp. 1134–1150.
- [13] Berrah abdelmalek, *Une étude de la stabilité de réduction de R.A.Smith et ses applications*, Université Abderrahmane Mira-Béjaïa, p10,11,12,13.
- [14] Jorge L Moiola, Guanrong Chen, *Hopf Bifurcation Analysis A Frequency Domain Approach unversldad Naclonal del Sur*, Argentina university of Houston, Texas, USA
- [15] W.H.Organization, *Global status report on alcohol and health*, 2014.
- [16] G.Thomas and E.M.Lungu, *A two-sex model for the influence of heavy alcohol consumption on the spread of HIV/AIDS*, Math.Biosci.Eng. 7(4) (2010), pp.871-904.
- [17] G.Mulone and B.Straughan, *Modeling binge driking*, Int.J.Biomath. 5(1)(2012),p.1250005.
- [18] H.Xiang, N.NSong, and H.F Feng, *Modelling effects pf public health educational campaigns on driking dynamics*, J. Biol. Dyn. 10(1) (2016), pp. 164-178.
- [19] H.F. Huo and X.M. Zhang, *Complex dynamics in an alcoholism model with the impact of twitter*, Math. Biosci. 281 (2016), pp. 24-35.
- [20] Y. Cai, J. Jiao, Z. Gui, Y. Liu, and W. Wang, *nvironmental variability in a stochastic epidemic model*, Appl. Math. Comput. 329 (2018), pp. 210 226.
- [21] H.F. Huo, R.Chen, and X.Y. Wang, *Modelling and stability of hiv/aids epidemic model with treatment*, *Appl.Math. Model.* 40 (2016), pp. 6550-6559.
- [22] H.F Hua, S.R. Huang, and H. Xiang, *Optimal control of a social epidemic model with media coverge*, J. Biol. Dyn. 11(2017), pp.226-243.
- [23] H.F. Hua, Y.L. and H. Xiang, *Stability of a binge drinking model with delay*, Biol.Dyn.11 (2017), pp. 210-225.
- [24] H.F. Hua, F.F. Cui, and H. Xiang *Dynamics of an saits alcoholism model on unweighted and weighted networks*, Phys. A 496 (2018), pp. 249-262.
- [25] X. -Y. Wang, K. Hattaf, H. -F. Huo, and H. Xiang. *Stability analysis of a delayed social epidemics model with general contact rate and its optimal control*, J. Ind. Manag. Optim. 12(4)(2016), pp.1267-1285.

- [26] H. Xiang, Y.L. Tang, and H.F. Huo. *Aviral model with intracellular delay and humoral immunity*, Bull. Malays.Math. Sci. Soc. 40(2017), pp. 1011-1023.
- [27] H. Xiang, Y.-P. Liu, and H.-F.Huo. *Stability of an SAIRS alcoholism model on scale-free networks*, Phys. A 473(2017), pp. 276-292.
- [28] H.R. Thieme. *Semiflows generated by Lipschitz perturbation of non-densely defined operators*, Differential Integral Equation 3(6)(1990), pp. 1035-1066.
- [29] P.Magal, S. Ruan. *Center manifolds for semilinear equations with non-dense domain and application on Hopf bifurcation in age structured models*, Mem.Amer.Math.Soc. 202(2009), pp 1-67. No. 951.
- [30] Z.Liu, P. Magal, and S. Ruan. *Hopf bifurcation for non-densely defined Cauchy problems*, Z. Angew. Math. Phys. 62(2) (2011), pp. 191-222.
- [31] Z.Liu, P. Magal, and S. Ruan. *Oscillations in age-structured models of consumer-resource mutualisms*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 21(2) (2016), pp. 537-555.
- [32] H. Tang and Z. Liu, *Hopf bifurcation for a predator-prey model with age structure*, Appl.Math.Model. 40(2) (2016), pp. 726-737.
- [33] P.E.M Fine and J.A. Clarkson *Measles in england and wales I. An analysis of factors underlying seasonal patterns*. Int.J. Epidemiol. 11(1) (1982), pp. 5-14.
- [34] P.E.M Fine and J.A. Clarkson *Measles in england and wales II. The impact of the measles vaccination programme on the distribution of immunity in the population*. Int. J. Epidemiol. 11(1).
- [35] P.E.M Fine and J.A. Clarkson *Measles in england and wales III. Assessing published predictions of the impact of vaccination of incidence*, Int. J. Epidemiol. 12(3) (1983), pp. 332-339.