République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Laarbi Tbessi

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département des mathématiques et informatique

Mémoire
Présenté en vue de l'obtention du diplôme de MASTER

Filière : (Mathématiques/Informatique)

Option : Equations aux dérivées partielles et applications.

Par

ABDELMALEK Chahinez
MEBARKIA Khaoula

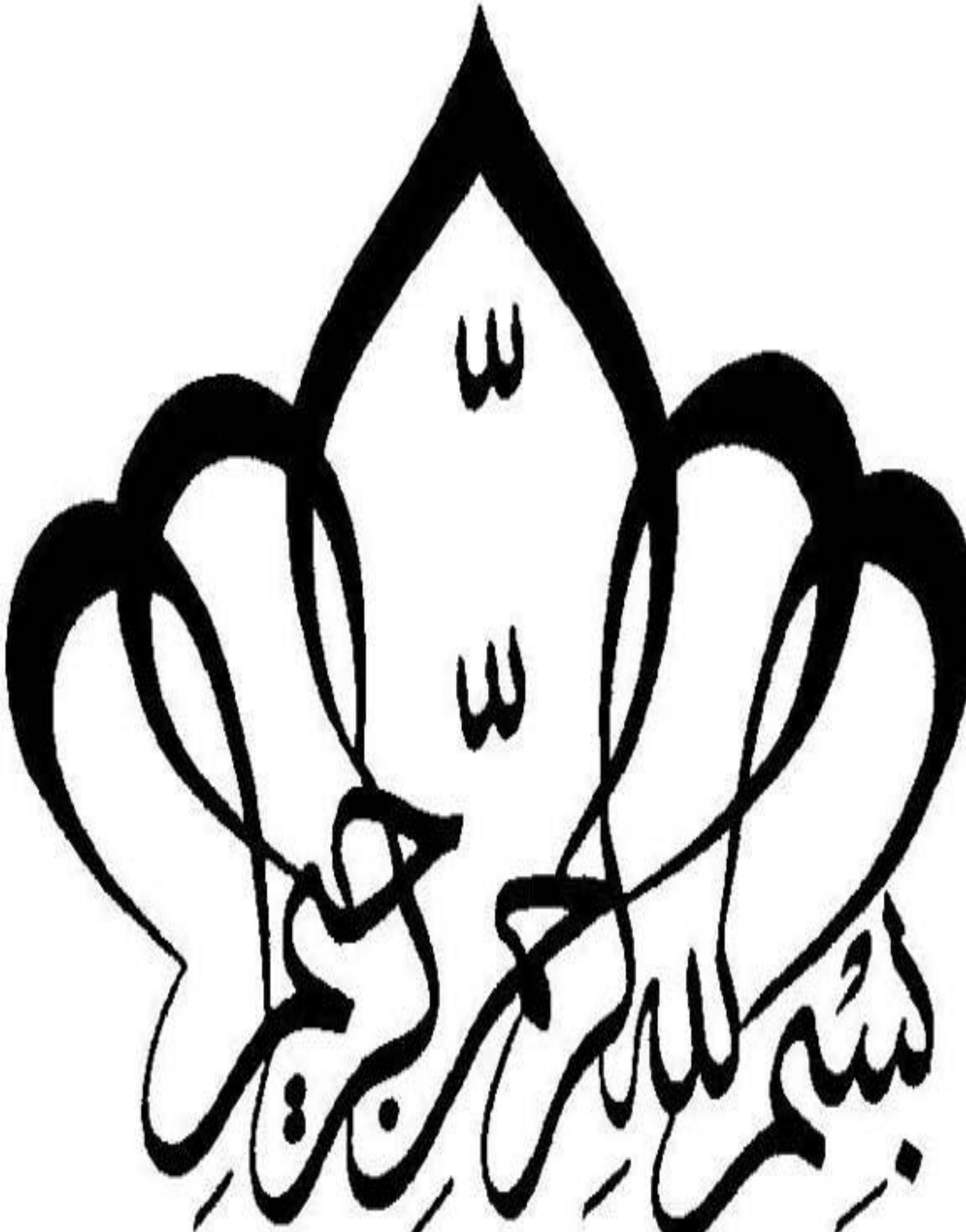
Étude de la classe des opérateurs p-hyponormaux

Date de soutenance: 19 /06/2021

Devant le jury

Dr/ Abdelatif Toualbia	MCB	Univérsité de Tébessa	Présiden
Dr/ Fatiha Mesloub	MCA	Univérsité de Tébessa	Rapporteuse
Dr / Hadia Messaoudene	MCA	Univérsité de Tébessa	Examinatrice

Année Universitaire: 2020/2021


بسم الله الرحمن الرحيم

ملخص

ليكن H فراغ هيلبرت مركب، و B (H) فراغ المؤثرات الخطية المحدودة المعرفة على H .

من اجل $T \in B(H)$، نرمز ب T^* لمرافق المؤثر T .

اذا كان $T \in B(H)$ ، فان:

$$|T| = (T^* T)^{\frac{1}{2}} \text{ و } |T^*| = (TT^*)^{\frac{1}{2}}.$$

نقول أن T مؤثر p - شبه الناظمي إذا تحقق: $|T|^{2p} \geq |T^*|^{2p}$

لما تكون $p = 1$ و $p = \frac{1}{2}$ نقول ان T مؤثر شبه الناظمي و نصف شبه ناظمي على الترتيب.

ان الهدف الرئيسي من هذا العمل هو إعطاء المزيد من المعلومات حول الخواص الأساسيۃ للمؤثرات p - شبه الناظمية (في جميع حالاته $P = 1$ ، $P = \frac{1}{2}$ والحالة العامة) وإعطاء النظرية الطيفية للمؤثرات المذكورة اعلاه.

الكلمات المفتاحية: فراغ هلبرت، مؤثر، p - شبه الناظمي، شبه الناظمي، نصف شبه الناظمي، طيف.

DEDICACE

Je tiens à témoigner ma reconnaissance à ***Allah*** le tout puissant, de m'avoir donné le courage et la force de mener à bien ce projet.

Toute ma gratitude à mes parents

Pour leurs sacrifices, leur amour, leur tendresse et leur Présence Dans les moments les plus difficiles.

Merci et que dieu vous garde

A mon fiancé ***Ramzi***

Pour ca présence et son soutien

A mes sœurs ***Faten***, ***Hadjer*** et ***Rania***

A mon frère ***Abdelkader***

A ma Tante ***Khadidja*** et à ses filles ***Radhia***, ***Maram*** et***Amira***

À mon cousin ***Adel***

A ***mes amies*** surtout **Khaoula** et ***Amira***

Un grand merci au Dr ***Abdelmalek Karima***, pour sa disponibilité et son soutien.

ABDELMALEK CHAHINEZ

DEDICACE

Toutes les lettres ne sauraient trouver les mots qu'il faut…
Tous les mots ne sauraient exprimer la gratitude,
L'amour, le respect, la reconnaissance…
Aussi, c'est tout simplement queÀ TOUS CEUX QUE J'AI OMIS DE CITER
Je dédie ce mémoire …

À MES CHERS PARENTS

Aucune dédicace ne saurait exprimer mon respect, mon amour éternel et ma considération pour les sacrifices que vous avez consenti pour mon instruction et mon bien être. Je vous remercie pour tout le soutien et l'amour que vous me portez depuis *mon enfance et j'espère que votre bénédiction m'accompagne toujours. Que ce modeste travail soit l'exaucement de vos vœux tant formulés, le fruit de vos innombrables sacrifices, bien que je ne vous en acquitterai jamais assez. Puisse Dieu, le Très Haut, vous accorde santé, bonheur et longue vie et faire en sorte que jamais je ne vous déçoive.*

À Ma deuxiéme mére Nadia

A MON MARI HAMZA

Pour l'amour et l'affection qui nous unissent. Je ne saurais exprimer ma profonde reconnaissance pour le soutien continu dont tu as toujours fait preuve. Tu m'as toujours encouragé, incité à faire de mon mieux, ton soutien m'a permis de réaliser le rêve tant attendu. Je te dédie ce travail avec mes vœux de réussite, de prospérité et de bonheur.
Je prie Dieu le tout puissant de préserver notre attachement mutuel, et d'exaucer tous nos rêves.

A MES CHERS ET ADORABLE FRERES ET SŒURES *Oussama le généreux, Imad, Mohamed &Taki, que j'aiment profondément,Haithem mon petit frère que j'adore, Batoul, la douce, au cœur si grand. En témoignage de mon affection fraternelle, de ma profonde tendresse et reconnaissance, je vous souhaite une vie pleine de bonheur et de succès et que Dieu, le tout puissant, vous protège et vous garde.*

À MES AMIES DE TOUJOURS

chahinez, Amira , Aya,

En souvenir de notre sincère et profonde amitié et des moments agréables que nous avons passés ensemble. Veuillez trouver dans ce travail l'expression de mon respect le plus profond et mon affection la plus sincère..

KHAOULA MEBARKIA

Table des matières

Résumé

Soient H un espace de Hilbert complexe et $B(H)$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés sur H.
Pour $T \in B(H)$, on note par T^* ; l' adjoint de l'opérateur T, pour un opérateur $T \in B(H)$; soient $|T| = (T^*T)^{1/2}$ et $|T^*| = (TT^*)^{1/2}$.
Pour $0 < p \leq 1$, T est un opérateur p-hyponormal si :

$$|T|^{2p} \geq |T^*|^{2p}.$$

Si $p = 1$ et $p = \frac{1}{2}$, T est dit hyponormal et semi-hyponormal, respectivement.
L'objectif principal de ce travail est de donner plus d'informations sur les propriétés de base des opérateurs p-hyponormaux dans les cas $p = 1, p = \frac{1}{2}$ et le cas général) et l' étude de la théorie spectrale de ces derniers.

Mots clés

Espace de Hilbert, opérateur, hyponormal, semi-hyponormal, p-hyponormal, spectre.

Abstract

Let H be a complex Hilbert space, and let $B(H)$ denote the set of all bounded linear operators on H.
For $T \in B(H)$, we denote by T^* ; the adjoint of T, For an operator $T \in B(H)$; let $|T| = (T^*T)^{1/2}$ et $|T^*| = (TT^*)^{1/2}$.
For $0 < p \leq 1$, T is said to be p-hyponormal if :

$$|T|^{2p} \geq |T^*|^{2p}.$$

When $p = 1$ and $p = \frac{1}{2}$, T is said to be hyponormal and semi-hyponormal, respectively.
The main objective of this work is to give more informations on the basic properities of p-hyponormal operators in all his cases $p = 1$, $p = \frac{1}{2}$ and the general case and to give the spectral theory of those operators.

Keywords

Hilbert space, operator, hyponormal, p-hyponormal , semi-hyponormal, spectrum.

Remerciements

On tient à remercier Dieu le tout puissant de nous avoir donné le courage, la volonté et la patience pour achever ce travail.

On exprime notre reconnaissance et respect les plus sincères à notre honorable directrice de recherche ; **docteur H.Messaoudene**, pour l'aide, les suggestions et les critiques qu'elle nous a apporté tout au long de ce travail.

On remercie aussi, le docteur : **Abdelatif Toualbia** d'avoir présidé ce jury et le docteur **F.Mesloub** d'avoir examiné ce mémoire.

Notations

$\mathbb{R}$	Nombres réels.
$\mathbb{C}$	Nombres complexes.
$\Vert.\Vert$	Norme.
$\langle .,. \rangle$	Produit scalaire.
$\vert.\vert$	Module complexe, valeur absolue.
$r(A)$	Rayon spectral de A.
$\sigma\ (A)$	Spectre de A.
$Re(A)$	Partie réelle de A.
$\mathbb{k}$	Corps quelconque.
$\rho\,(A)$	Resolvante de A.
$\oplus$	Somme dirécte.
$A^{\perp}$	Complémentaire orthogonale de A
A^{*}	Adjoint de A.
$d(.,.)$	Application de distance.
H	Espace de Hilbert.
$\ker(A)$	Noyau de A.
$\mathrm{Im}(A)$	Image de A.
$*$	Code d'auto-adjoint.
$B\,(H)$	Algèbre des opérateurs linéaires bornés de l'espace H.
$B\,(H,K)$	Algébre des opérateurs linéaires bornés de H vers K.
$\mathcal{L}(H)$	Algèbre des opérateurs linéaires de l'espace H.
$\mathcal{L}(H,K)$	Algébre des opérateurs linéaires de H vers K.
$W\,(A)$	Image numérique de A.

Introduction Générale

Soient H l'épace de Hilbert complexe et $B(H)$ l'espace de tous les opérateurs linéaires bornés définis dans l'espace de Hilbert H.

Soit T un opérateur dans $B(H)$,on note par T^*, l' adjoint de l'opérateur T. L'opérateur T est dit normal s'il satisfait à la condition $T^*T = TT^*$, et hyponormal si $T^*T \geq TT^*$ qui est équivalant à la condition $\|Ax\| \leq \|A^*x\|$ pour tout $x \in H$,
pour un opérateur $T \in B(H)$, on a : $|T|$ =$(T^*T)^{\frac{1}{2}}$ et $|T^*| = (TT^*)^{\frac{1}{2}}$).
T est un opérateur p-hyponormal si :
$|T|^{2p} \geq |T^*|^{2p}$. Si p = $\frac{1}{2}$, T est dit semi-hyponormal, i.e. semi-hyponormal si ; $(T^*T)^{\frac{1}{2}} - (TT^*)^{\frac{1}{2}} \geq 0$.
Il est évident que dans le cas ou $p = 1; T$ est hyponormal.

La notion d'opérateur hyponormal a été introduite par Halmos en 1950 sous un autre nom dans [15]. Après une période nécessaire d'accumulation des notions, bien exposé dans le livre de problèmes de Halmos [16] sous le nom d'opérateur hyponormal, Putnam a soulevé le sujet à un niveau supérieur en découvrant sa fameuse inégalité et en considérant tout depuis les perspectives de l'algèbre des commutateurs. C'est Joel D. Pincus qui a poussé l'étude des opérateurs hyponormaux et semi-normaux à une nouvelle direction.
La classe des opérateurs semi-hyponormaux a été introduite par D. Xia [27] en 1983, et la notion d'opérateurs p-hyponormaux a été introduite par A. Aluthge [3] en 1990. depuis plusieurs auteurs l'ont étudié Muneo Cho et al, et Masatoshi Fujii et al.
Dans une certaine mesure, les opérateurs hyponormaux, semi-hyponormaux et p-hyponormaux sont proches àu opérateurs normaux. Bien que ces trois classes d'opérateurs contiennent les opérateurs normaux comme sous-classe,

Pour faire face à ces opérateurs non normaux, de nouveaux concepts doivent être introduit et un certain nombre de difficultés doivent être surmontées. Une chose en commun parmi ces opérateurs est qu'ils sont tous unitaires.

Dans ce mémoire, on étudie la classe des opérateurs p-hyponormaux(pour les cas $p = 1$, $p = \frac{1}{2}$ et le cas général). Un opérateur p-hyponormal est une génération des opérateurs normaux.

Ce mémoire se compose de trois chapitres.

Chapitre1 : Ce chapitre est le chapitre des notions préliminaires, on a donné quelques définitions et propriétés fondamentales des opérateurs et nous citons quelques classes des opérateurs (opérateur normal, positif, auto-adjoint,....).

Chapitre2 : Dans ce chapitre on présenté une étude du cas $p = 1$ des opérateurs p-hyponormaux qui est le cas des opérateurs hyponormaux avec quelques exemples et donner les propriétés les plus importants de cette classe d'opérateur, comme on a étudié la théorie spectrale de ces opérateurs.
Chapitre3 : Dans le derniére chapitre on a étudié les classes des opérateurs semi-hyponormaux et p-hyponormaux et leurs études spectrales.

Chapitre 1

Rappels et préliminaires sur la théorie des opérateurs

Dans ce chapitre, on présente les notions préliminaires qui concernent la défintion d'un opérateur borné dans un espace d'Hilbert et d'autres définitions et résultats que nous avons utilisé dans notre travail. On a donné quelques définitions des opérateurs : adjoint, isométriques, unitaires, positifs, auto-adjoints et compact avec des propositons et propriétés importantes. Puis on passe au spectre d'un opérateur borné avec la définition de tous ses types.

1.1 Espace Vectoriel

Définition 1.1 *On appéle espace vectoriel topologique tout espace E muni d'une topologie rendant continues les applications :*

$$(x, y) \in E \times E \to x + y$$

et

$$(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E \to \lambda x$$

On notera également qu'une application linéaire entre espaces vectoriels topologiques est continue si et seulement si elle l'est en 0. Enfin, on rappéle qu'un espace topologique est séparé, si pour tout couple de points distincts posséde des voisinages disjoints.

Définition 1.2 *Soit $\mathbb{k}$, un corps. On dit que $(E, +, .)$ est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel si $(E, +)$ est un groupe Abélien et si $\cdot$ est une loi externe sur E ayant $\mathbb{k}$ pour domaine d'opérateur, vérifiant les quatre points suivants :* $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{k}^2, \forall(x, y) \in E^2$,

(i) $1_{\mathbb{k}}.x = x$,

(ii) $\lambda.(x+y) = \lambda x + \lambda y$,

(iii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

(iv) $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

Définition 1.3 *Soient E un $\Bbbk$-espace vectoriel et $X \subset E$. On dit que X est un sous-espace vectoriel de E s'il satisfait aux conditions de stabilité linéaire, i.e. :*

$$\forall (x,y) \in E^2 \text{et } \forall \lambda \in K, x+y \in X \text{ et } \lambda x \in X$$

1.2 Espace Normé

Définition 1.4 *Un espace vectoriel linéaire X est dit **espace normé** si pour chaque élément $x \in X$; il existe un nombre réel noté par $\|x\|$ (norme de x), vérifiant les propriétés suivantes :*

1-$\|x\| \geq 0, \forall x \in X$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

2- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \forall x \in X, \forall \lambda \in \Bbbk$,

3- $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$ (inégalité triangulaire).

Dans cet espace, on introduit la métrique

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

(la distance entre x et y)

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.5 *Soit E un espace vecoriel sur le corps $\Bbbk$($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$). Un produit scalaire sur E est une fonction $\langle x, y\rangle : E \times E \to \Bbbk$ vérifiant les propriétes suivantes :*

-$\langle u, u\rangle \geq 0, \forall u \in E$,

-$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$,

-$\langle \lambda u, v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle$,

-$\langle u, v + h\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, h\rangle$,

-$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} \forall u, v \in E$.

Définition 1.6 *Un espace vectoriel E sur $\Bbbk$ est dit ; espace Euclidien ou préhilbertien s'il est muni d'un produit scalaire. Le produit scalaire d'un espace Euclidien nous donne une norme définie par :*

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$$

Définition 1.7 *On dit qu'un espace normé X est* ***complet*** *si toute suite de Cauchy a une limite dans X.*

Définition 1.8 ***Un espace de Hilbert*** *est la donnée d'un espace vectoriel H complexe et d'une forme sesquilinéaire, i.e. linéaire en la première variable :*

$$\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle, \ \forall x, y \in E, \ \lambda, \lambda' \in \mathbb{C}$$

Et anti-linéaire en la seconde :

$$\langle x, \beta y + \beta' y' \rangle = \overline{\beta} \langle x, y \rangle + \overline{\beta'} \langle x, y' \rangle, \ \forall x, y \in E, \ \beta, \beta' \in \mathbb{C}$$

Cette forme sesquilinéaire est de plus hermitienne : $\langle x,\ y\rangle = \overline{\langle x,\ y\rangle}$ et strictement positive : $x \neq 0 \Rightarrow \langle x,\ y\rangle > 0$.

Remarque 1.1 *L'****espace de Hilbert*** *sur K est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est de plus complet pour la norme $\|.\|$.*

Exemple 1.1 *1- L 'espace $\mathbb{k}^n$, muni du produit scalaire défini par :*

$$\langle x,\ y\rangle = \sum_{1\leq i\leq n} x_i \overline{y_i}$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.9 *Si $g, h \in H$, on dit que g et h sont* ***orthogonaux****, et on écrit $g \perp h$ si $\langle g, h\rangle = 0$. Si M est une partie de H, l'****orthogonal*** *de M défini par :*

$$M^{\perp} = \{h \in H \ : \ \forall g \in M, \ h \perp g\}$$

Lemme 1.1 *[10] Soit E une partie non vide d'un espace préhilbertien H, on a :*
1) $E^{\perp}$ est un sous-espace fermé de H.
2) $E \subset F \Rightarrow F^{\perp} \subset E^{\perp}$.
3) E a même orthogonal que le sous-espace fermé engendré par E.

La remarque suivante est souvent utile :

Remarque 1.2 *Un sous-espace $M \subset H$ est dense si et seulement si $M^{\perp} = \{0\}$. De plus, si M est un sous-espace fermé, alors H se décompose en somme directe*

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Définition 1.10 *On appelle* ***espace de Banach*** *sur K tout espace vectoriel normé $\{E, \|.\|\}$ complet pour la métrique associée à la norme.*

1.4 Opérateur linéaire borné

Définition 1.11 *Soient H, H_0 des espaces de Hilbert, un opérateur T est une application définie de H a valeurs dans H_0 vérifiant les conditions suivantes :*
(i) Additive : $T(x+y) = Tx + Ty, x, y \in H$.
(ii) Homogéne : $T(\alpha x) = \alpha Tx, x \in H$ et pour tout nombre complexe α.
Le sous-espace vectoriel $D(T) \subset H$ a valeurs dans H_0 ; tel que $D(T) = \{x \in H, Tx \in H_0\}$ est appelé le domaine de l'opérateur.

Exemple 1.2 *Soient X un* espace vectoriel *sur le corps $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$; l'application $A : X \to X$ définie*

pour $x \in X$ par :

$$\mathbf{A}_\lambda(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{x}$$

est un opérateur linéaire.
En effet pour x_1, $x_2 \in X$ et $\alpha \in \mathbb{C}$;
Ona :

$$A_\lambda(\alpha x_1 + x_2) = \lambda(\alpha x_1 + x_2)$$

$$= \alpha(x_1) + (\lambda x_2)$$

$$= \alpha A(x_1) + A_\lambda(x_2)$$

Remarque 1.3 *Soient H, H_0 et H_1 des espaces de Hilbert et $A_1 \in B(H, H_0)$; $A_2 \in B(H_0, H_1)$.*

L'opérateur composé des deux opérateurs noté

$$A_2 \circ A_1 \in B(H, H_1)$$

.

Remarque 1.4 *[10] - On notera $KerT$ le noyau de l'opérateur T i.e.*

$$KerT = \{x \in H, Tx = 0\}$$

.

- ImT désignera le sous-espace de H_0 image de H par T. On le notera aussi $T(H)$.

- $KerT$ (resp. ImT) est un sous-espace vectoriel de H (resp. de H_0). On notera que $KerT$ est toujours un sous-espace fermé de H mais ImT n'est pas forcément fermé dans H_0.

Remarque 1.5 *- Opérateur identité noté I est défini par :*

$$Ix = x, \forall x \in H$$

- Opérateur nul 0 est défini :

$$0x = 0, \forall x \in H$$

- On note $L(H)$ l'ensemble des opérateurs sur H. Si $A \in L(H)$, on définit la norme de l'opérateur A par :

$$\|A\| = sup \, \|Ah\| \ , \ \{h \in H, \ \|h\| \ \leq \ 1\}$$

Définition 1.12 *Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur T défini sur X dans Y et dit linéaire, s'il vérifie les conditions suivantes : Pour tout $u, v \in X$ et $\alpha, \beta \in \Bbbk \, (\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$:*
i) $Au \in Y$.
ii) $A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$.

Définition 1.13 *Soient X et Y deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur X dans Y est dit borné s'il existe une constante positive C, telle que :*

$$\|Au\|_Y \leq C \, \|u\|_X \, , \forall u \in X$$

Exemple 1.3 *Soit H un Hilbert. L'opérateur I (l'identité) est borné car*

$$\forall x \in H : \|I(x)\| = \|x\|$$

Soit $H = l^2$. L'opérateur (shift)

$$A : H \to H$$

$$x \to A(x) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$$

Soit $H = l^2$. L'opérateur

$$A : H \to H$$

$$x \to S(x) = (x_1, 3x_2, x_3, 3x_4, x_5, 3x_6, ...)$$

est borné car ;

$$\|Ax\|^2 = |x_1|^2 + 9\,|x_2|^2 + |x_3|^2 + 9\,|x_4|^2 + ... + 9\,|x_{2n}|^2 + ...$$

d'ou ;

$$\|Ax\|^2 \leq |x_1|^2 + 9\,|x_2|^2 + |x_3|^2 + 9\,|x_4|^2 + ... + 9\,|x_{2n}|^2 + ...$$

par conséquent :

$$\|Ax\|^2 \leq 9\,\|x_2\|^2$$

donc :

$$\exists c = 3 \geq 0,\ \textit{telque}\,;\, \|Ax\|^2 \leq 3\,|x|\,, \forall x \in l^2$$

d'ou A est borné.

Définition 1.14 *Soient E et F deux espaces de Banach, on appelle opérateur borné de E dans F toute application linéaire continue de E dans F.*

Définition 1.15 *On dit que A est continu (borné) s'il existe $C \geq 0$ tel que :*

$$\|Ax\| \leq C\,\|x\|$$

Remarque 1.6 *[10] Si A est un opérateur defini sur un espace de Hilbert H,*

1. $L(H)$ désigne l'algèbre des opérateurs linéaires définis et à valeurs dans H.
2. $B(H)$ désigne l'algèbre des opérateurs linéaires bornés définis et à valeurs dans $H.B(H)$ est muni de la topologie engendrée par la norme :

$$\|A\| = sup\,\{\|Ax\|\,, x \in H :\ \|x\| = 1\}$$

.

3. Pour un élément A de $L(H)$, on note l'image de A par

$$R(A) = \{Ax : x \in H\}$$

et le noyau de A par

$$\ker(A) = \{x \in H : Ax = 0\}$$

4. *Si $A \in B(H)$,et si*

$$\langle Ax, x\rangle = 0$$

pour tout $x \in H$, alors :

$$A = 0$$

Lemme 1.2 *Soient A,$B \in L(H)$ et $0 \leq A \leq B$, alors $A^\alpha \leq B^\alpha$, pour touts $\alpha \in [0,1]$.*

1.5 Quelques classes des opérateurs

Opérateur adjoint

Définition 1.16 *Soient H et K deux espaces de Hilbert et $T \in L(H, K)$. L'opérateur $T^* \in L(K', H')$ tel que pour tous $x \in H, y \in K$ on ait :*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle$$

T^* est appelé adjoint de T.

Proposition 1.1 *Soient $A \in B(H_1, H_2)$ et $B \in B(H_2, H_3)$. Alors :*
1. A^* est borné et $\|A^*\| = \|A\|$.
2.$(A^*)^* = A$.
3. $Ker\,(A) = (im\,(A^*))^{\perp}$et $im\,(A) = (Ker A^*)^{\perp}$.
4.$(BA)^* = A^* B^*$

Définition 1.17 *On appelle module de T et on note par $|T|$ l'opérateur :*

$$|T| = (T^* T)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.18 *Si $T \in L(H, H)$ est tel que $T = T^*$, on dit que l'opérateur T est auto-adjoint (ou hermitien).*

Théorème 1.1 *[10] 1) Pour tout $A \in L(H, H^1)$, on a :*

$$(A^*)^* = A \text{ et } ||A^*|| = ||A||$$

2) Si $A \in L(H, H^1)$ et $B \in L(H^1, H)$, alors

$$(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$$

3) Pour tout $A_1, A_2 \in L(H, H^1)$ et tout $\lambda, \mu \in C$, on a

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)^* = \lambda \overline{A}_1^* + \mu A_2^*$$

Exemple 1.4 *Soit $H = L^2([a, b])(a < b)$ l'espace des classes de fonctions $x : [a, b] \to C$ de carré sommable avec le produit scalaire $< x, y >= \int x(t)\overline{y(t)}dt$ et soit $f : [a, b] \to C$ une fonction continue fixée. L'application T qui à la fonction $x \in H$ fait correspondre la fonction Tx définie sur $[a, b]$ par*

$$(Tx)(t) = f(t)x(t)$$

est un opérateur $T \in L(H, H)$ appelé opérateur de multiplication par f. L'opérateur $T^* \in L(H, H)$ est alors l'opérateur de multiplication par la fonction $\overline{f}$.

Remarque 1.7 *Pour tout $A \in B(H_1, H_2)$, l'opérateur $A^*A \in B(H_1)$ est auto-adjoint, car*

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$$

Remarque 1.8 *[10] Tout opérateur $A \in L(H)$ peut être représenté de manière unique comme*

$$A = T + iS$$

où $T, S \in L(H)$ sont opérateurs auto-adjoints. En effet, si on écrit $A = T + iS$, alors $A^* = T - iS$, d'où $T = \frac{A+A^*}{2}$ et $S = \frac{A-A^*}{2i}$.

Définition 1.19 *Un sous-espace E de H est invariant par T si $T(E) \subset E$.*

Exemple 1.5 *Chaque sous-espace propre de T est invariant. Plus généralement, l'espace engendré par n'importe quel sous-ensemble de vecteurs propres de T est un sous-espace invariant.*

Proposition 1.2 *Soit $T \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint. Si $E \subset H$ est un sous-espace invariant par T, alors $E^\perp$ est aussi un sous-espace invariant par T.*

Preuve. Soit $x \in E^\perp$. Alors pour tout $y \in E$,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0$$

d'où

$$Tx \in E^\perp$$

■

Définition 1.20 *[10] ∘ Un opérateur $U \in B(H)$ est appelé unitaire si :*

$$UU^* = \mathrm{Id}_H \text{ et } U^*U = \mathrm{Id}_H$$

∘ Un opérateur $U \in B(H)$ est appelé isométrie si :

$$U^*U = I$$

∘ Un opérateur $P \in B(H)$ est appelé positif si : P est auto-adjoint et si :

$$\langle P(x), x \rangle \geq 0, \forall x \in H$$

∘ On définie la projection orthogonale par :

$$P^2 = P, P = P^*$$

Définition 1.21 *La projection $P \in B(H)$ est un opérateur auto-adjoint.*

Opérateur normal

Définition 1.22 *Soient H un espace de Hilbert et $A : D(A) \subset H \to H$. On dit que A est normal si : $A^*A - AA^* = 0$ ce qui et équivalent à :*

$$D(A) = D(A^*) \text{ et } \|Au\| = \|A^*u\|$$

pour tout $u \in D(A) = D(A^*)$.

Corollaire 1.1 *Tout opérateur auto-adjoint est normal.*

Proposition 1.3 *Soit $A \in B(H)$, alors A est normal, si et seulement si,*

$$\|Ax\| = \|A^*x\| \text{ pour tout } x \in H$$

Preuve. A est normal $\Leftrightarrow A^*A - AA^* = 0$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \langle (A^*A - AA^*)\, x, x\rangle = 0 \text{ pour tout } x \in H \\ &\Leftrightarrow \langle A^*Ax, x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle \\ &\Leftrightarrow \|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2 . \ \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 1.4 *[10] Soit A normal, on a :*
1. L'opérateur αA est aussi normal pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.
2. L'opérateur A^n est aussi normal pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. 1) Nous avons

$$(\alpha A)(\alpha A)^* = \alpha\overline{\alpha}AA^*$$

et

$$(\alpha A)^*(\alpha A) = \overline{\alpha}\alpha A^*A;$$

Puisque A est normal, d'où il sont égaux.
2) A est normal, d'où $AA^* = A^*A$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (AA^*)^n = (A^*A)^n \\ &\Rightarrow A^n(A^*)^n = (A^*)^nA^n \\ &\Rightarrow A^n(A^n)^* = (A^n)^*A^n \end{aligned}$$

C'est -à-dire A^n est normal, pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\blacksquare$

Corollaire 1.2 *Soient P un polynôme et A est un opérateur normal. Alors $P(A)$ est aussi normal.*

1.6 Opérateurs compacts

Opérateurs compacts constituent une classe importante d'applications linéaires continues.

Définition 1.23 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application $T \in L(E, F)$ est un opérateur compact si $\overline{T(\overline{B}_E)}$est un compact de F, où $\overline{B}_E$ est la boule unité fermée de E.*

Définition 1.24 *Une combinaison linéaire $T = \alpha T_1 + \beta T_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$.*

Proposition 1.5 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Définition 1.25 *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application $T \in L(E, F)$ est dite de rang fini si la dimension de l'image de L est finie i.e. $\dim L(E) < +\infty$. On note $R(E, F)$ l'espace des opérateurs de rang fini.*

Remarque 1.9 *Tout opérateur de rang fini est compact. En effet, $\overline{T(\overline{B}_E)}$ est un fermé borné de l'espace de dimension finie $L(E)$, est donc compact. Comme $K(E, F)$ est fermé, il s'ensuit que tout opérateur qui peut être approché par des opérateurs de rang fini est également compact ; c'est un critère très utile pour montrer qu'un opérateur est compact.*

Corollaire 1.3 *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $T \in L(E, F)$, tel qu'il existe $T_n \in R(E, F)$, et $lim_{n \to +\infty} \|T_n - T_k\| = 0$. Alors T est compact.*

Remarque 1.10 *On a la réciproque, pour un espace de Hilbert, tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

1.7 Opérateur inverse

Définition 1.26 *On dit que $A \in L(E, F)$ est inversible s'il existe*

$$B \in L(F, E)$$

tel que :

$$AB = I_E, BA = I_F$$

l'opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle l'inverse de A noté par A^{-1}.

Théorème 1.2 *Soient H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(1) A est inversible.
(2) A est injectif.
(3) A est surjectif.
(4) A admet un inverse à droite (i.e. il existe $U \in L(H)$ tel que $A \circ U = I_H$).
(5) A admet un inverse à gauche (i.e. il existe $V \in L(H)$ tel que$V \circ A = I_H$).

Proposition 1.6 *Soient T, S des opérateurs liniaires bijectifs de l'espace de Hilbert H sur H, alors l'inverse $(ST)^{-1}$ du produit (composé) (ST) existe, défini*

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

Définition 1.27 *Considérons le couple d'espaces de Hilbert H_i $(i = 1, 2)$; et les opérateurs $A, B \in B(H_1), B(H_2)$ nous désignerons par $A \otimes B$ le produit tensoriel des opérateurs A, B qui est l'opérateur bilinéaire continu*

$$\otimes : B(H_1) \times B(H_2) \to B(H_1 \otimes H_2)$$

define par :

$$(A, B) \mapsto A \otimes B \text{ et } (A \otimes B) M = \langle A, M \rangle B$$

(on peut considérer le $(A \otimes B) M = BMA^*$). Le produit tensoriel vérifie :

$$(A \otimes B)(X \otimes Y) = (AX \otimes BY)$$

Définition 1.28 *Si $H = H_1 \oplus H_2$, un élément A de $B(H)$ est la* ***somme directe*** *des éléments A_1 et A_2. On note $A = A_1 \oplus A_2$, si $A_1 \in B(H_1)$ et $A_2 \in B(H_2)$; $\forall x = x_1 + x_2 \in H$, $x_1 \in H_1$ et $x_2 \in H_2$, on a :*

$$Ax = A_1x_1 + A_2x_2$$

Définition 1.29 *Soit S opérateur de $B(H)$, on dit que S est similair à un opérateur T, s'il existe un opérateur inversible A tel que :*

$$S = A^{-1}TA$$

Définition 1.30 *Soit $T \in$ B(H), alors $T = U|T|$ où $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ et U est une isometrie partielle avec l'espace initial $\overline{R(|T|)}$ et $N(U) = N(|T|)$, alors $T = U|T|$ est l*a* ***décomposition polaire de*** *T.*

1.7.1 Etude spéctrale d'un operateur

Définition 1.31 *On dit que λ est **une valeur spectrale** de l'opérateur A, si $A-\lambda I$ n'est pas inversible. L'ensemble des valeurs spectrales de A est **le spectre** de A noté $\sigma(A)$. On note $A_\lambda = (A-\lambda I)$ et*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas inversible}\}$$

On dit que λ est une valeur propre de l'opérateur A, s'il existe $x \in H$ non nul tel que : $Ax = \lambda x$, autrement dit si $A-\lambda I$ n'est pas injectif. L'ensemble des valeurs propres de A est noté par $\sigma_p(A)$.

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A_\lambda \text{ n'est pas injectif}\}$$

appelé spectre ponctuel de A.

Remarque 1.11 *[?] a) On a toujours $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.*
b) Soient V un espace vectoriel normé de dimension finie et T une application linéaire sur V. Alors $(T-\lambda I)$ est inversible précisément lorsque λ n'est pas une valeur propre de T. Il en résulte que le spectre $\sigma_p(T) = \sigma(T)$.

Exemple 1.6 *[?] Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{C}^*$ telle que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$. On définit l'opérateur T sur l^2 par $T(x_n) = (\lambda_n x_n)$ comme $(T-\lambda I)x = (\lambda_k - \lambda)x_k$, alors*

$$(T-\lambda I)^{-1}y = \frac{y_k}{\lambda_k - \lambda}$$

Il en résulte que $(T-\lambda I)$ est un opérateur borné si et seulement si λ n'est pas dans l'adhérence de $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, qui n'est autre que $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{0\}$. Comme $Te_k = \lambda_k e_k$, pour e_k un élément de la base canonique de l^2, on en déduit que tous les λ_k sont des valeurs propres de T. Mais 0 n'est pas une valeur propre car T est injective (puisque tous les $\lambda_k \neq 0$). D'où :

$$\sigma(T) = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \cup \{0\} \text{ et } \sigma_p(T) = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

- *La **résolvante** de l'opérateur A notée $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$.*
- *Le **spectre ponctuel approché** de A est :*

$$\sigma_a(A) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, \text{ tels qu'il existe une suite normée unitaire } \{x_n\} \in H : \lim_{n\to+\infty} A_\lambda x_n = 0\right\}$$

- *Le **spectre approché réduisant** de A est :*

$\sigma_{ar}(A) = \Big\{ \lambda \in \mathbb{C}$, *tels qu'il existe une suite normée unitaire* $\{x_n\} \in H : \lim_{n\to+\infty} A_\lambda x_n = 0, \lim_{n\to+\infty} (A_\lambda)^* x_n = 0$

- *Le **spectre ponctuel joint** (joint point spectrum) de A noté $\sigma_{pj}(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$, tels qu'il existe un élément non nul $x \in H$: $A_\lambda x = 0$ et $A_\lambda^* x = 0$. On a :*

$$\sigma_{pj}(A) \subset \sigma_p(A) \subset \sigma_a(A) \text{ et } \sigma_{ar}(A) \subset \sigma_a(A)$$

Proposition 1.7 *Soit $T \in B(H)$ un opérateur normal. Alors,*

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) = \sigma_{ap}(T)$$

Proposition 1.8 *Le spectre d'un opérateur normal est égale au spectre approximatif, i.e,*

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$$

Proposition 1.9 *Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.*

Théorème 1.3 *[?] (Identité de la résolvante) Soient $A \in L(E)$ et $\lambda, \mu \in \rho(A)$, Alors on a :*

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\mu(A)R_\lambda(A)$$

Définition 1.32 *[?] (Rayon spectral) Le rayon spectral de A est noté par $r(A)$ est le plus petit disque centré par zéro et contient $\sigma(A)$ i :e ;*

$$r(A) := \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} = \underset{\lambda\in\sigma(A)}{sup} |\lambda|$$

Si $\sigma(A) = \phi$, par convention on pose $r(A) := 0$.

Définition 1.33 *L'image numérique d'un opérateur A noté :*

$$W(A) = \{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\}$$

la fermeture de l'image numérique est notée par : $\overline{W(A)}$.

Exemple 1.7 *On utilise le théorème spectral pour calculer le spectre d'un polynome par exemple :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a : $\sigma(A) = \{1, 2\}$ Si on veut calculer $\sigma(A^2)$ à partir de $\sigma(A)$ on trouve

$$\sigma(A^2) = \{1, 4\}$$

car : si $P(x) = x^2$; alors

$$\sigma(A^2) = \sigma((A))^2$$

Chapitre 2

Opérateurs hyponormaux

Soient H un espace de Hilbert complexe et $B(H)$ l'algébre de tous les opérateurs linéaire définis sur H.
En généralisant le concept de normalité, plusieurs auteurs ont introduit des classes d'opérateurs non normaux. Le but de ce chapitre est l'étude de la classe des opérateurs hyponormaux qui occupe un endroit intérmediaire entre les opérateurs normaux et non normaux.
La notion d'opérateur hyponormal a été introduite par Halmos sous un autre nom dans $[15]$ en 1950. En 1967 dans son livre $[16]$ Halmos a utilisé le terme opérateur hyponormal.
Dans ce chapitre, nous présentons les principaux concepts des opérateurs hyponormaux en commençant avec ca définition et on clarifie cette définition par des exemples, ensuite on étudie quelques opérations sur les opérateurs hyponormaux, enfin, on conclut ce chapitre par des propriétés élémentaires.

Définition 2.1 *[23] Soit $T \in B(H)$, on dit que T est un opérateur hyponormal si et seulement si :*

$$T^{\star}T \geq TT^{\star}$$

$$T^{\star}T - TT^{\star} \geq 0, \text{ où } T^{*} \text{ est l'adjoint de } T$$

i.e., $\langle (T^{\star}T - TT^{\star})\, x, x\rangle \geq 0, \forall x \in H$. On note la classe des opérateurs hyponormaux par (HN).

Proposition 2.1 *[23] Soit $T \in B(H)$, si T est un opérateur hyponormal ; on a l'équivalence :*

$$T^{\star}T \geq TT^{\star} \Leftrightarrow \|Tx\| \geq \|T^{*}x\|, \forall x \in H$$

2.0.2 Quelques exemples des opérateurs hyponormaux

Exemple 2.1 *Soient* $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$. *On a :* $T^* = \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{pmatrix}$, *alors*

$$T^*T = \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a}a & 0 \\ 0 & \overline{b}b \end{pmatrix} = TT^*$$

d'où $T^*T - TT^* = 0$; *donc* T *est normal ; alors* $T^*T - TT^* \geq 0, T \in (HN)$.

Exemple 2.2 *Soient* $T \in B(H), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *:*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}$$

On a $TT^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ *et* $T^*T = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$. *Alors* $T^*T - TT^* = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta - \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc, T *est hyponormal sous la condition* $(\beta - \alpha^2) \geq 0$.

L'exemple suivant est d'un opérateur hyponormal mais qui n'est pas normal qui doit êtres défini dans un espace de Hilbert de dimension infinie.

Exemple 2.3 *Soient* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *une base orthonormal d'un espace de Hilbert separable H et* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *une suite de scalaire bornée.*
définie l'application linéaire bornée T comme suit :

$$\begin{aligned} T &: H \to H \\ Te_i &= a_i e_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ce qui équivaux à :

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle a_n e_{n+1}$$

d'où

$$T^{*}x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x,e_{n}\rangle\,\overline{a_{n}}e_{n+1}$$

T est hyponormal si est seulement si la suite $(|a_n|)_{n=1}^{\infty}$*est strictement décroissante.*
D'autre part, T est normal si est seulement si

$$a_{n}=0,\forall n\in\mathbb{N},$$

d'où

$$T=0.$$

2.1 Opérations sur les opérateurs hyponormaux

Proposition 2.2 *Soient* $T\in(HN)$ *et* α,β *des nombres complexes ; alors :* $\alpha T+\beta I\in(HN)$.

Preuve. Cela découle immédiatement de

$$\begin{aligned}
& (\alpha T+\beta I)^{*}(\alpha T+\beta I)-(\alpha T+\beta I)(\alpha T+\beta I)^{*}\\
= & \left(\overline{\alpha}T^{*}+\overline{\beta}I\right)(\alpha T+\beta I)-(\alpha T+\beta I)\left(\overline{\alpha}T^{*}+\overline{\beta}I\right)\\
= & \left(\overline{\alpha}\alpha T^{*}T+\overline{\alpha}\beta T^{*}+\overline{\beta}\,\alpha T+\beta\,\overline{\beta}\,I\right)\\
& -\left(\alpha\overline{\alpha}TT^{*}+\overline{\beta}\,\alpha T+\overline{\alpha}\beta T^{*}+\beta\,\overline{\beta}\,I\right)\\
= & |\alpha|^{2}(T^{\star}T-TT^{\star})\geq 0
\end{aligned}$$

d'où $\alpha T+\beta I\in(HN)$. ■

Corollaire 2.1 [23] *Soit* $T\in(HN)$*; alors pour* $\lambda\in\mathbb{C}$: $(T-\lambda I)$ *est un opérateur hyponormal), i.e.,*

$$\|(T-\lambda I)x\|\geq\left\|\left(T^{\star}-\overline{\lambda}I\right)x\right\|,\forall x\in H,\lambda\in\mathbb{C}$$

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition précédente pour $\alpha=1,\beta=-\lambda$.

$$\begin{aligned}
(T-\lambda I)^{*}(T-\lambda I)-(T-\lambda I)(T-\lambda I)^{*} &= \\
\left(T^{*}-\overline{\lambda}I\right)(T-\lambda I)-(T-\lambda I)\left(T^{*}-\overline{\lambda}I\right) &= \\
\left(T^{*}T-\lambda T^{*}-\overline{\lambda}\,T-\lambda\,\overline{\lambda}\,I\right)-\left(TT^{*}-\overline{\lambda}\,T-\lambda T^{*}-\lambda\,\overline{\lambda}\,I\right) &= \\
&= (T^{\star}T-TT^{\star})\geq 0
\end{aligned}$$

d'où $T-\lambda I\in(HN)$. ■

Proposition 2.3 *Soit T un opérateur hyponormal de $B(H)$, si T est inversible ; alors T^{-1} est hyponormal.*

Preuve. On a :

$$\left(T^{-1}\right)\left(T^{-1}\right)^{*}=\left(T^{-1}\right)\left(T^{\star}\right)^{-1}=\left(TT^{*}\right)^{-1}\leq\left(T^{*}T\right)^{-1}\leq\left(T^{\star}\right)^{-1}\left(T^{-1}\right)\leq\left(T^{-1}\right)^{*}\left(T^{-1}\right)$$

Donc, T^{-1} est hyponormal. ■

Proposition 2.4 *[?] Soit $T\in(HN)$; alors :*

$$\left\|T^{n}\right\|=\|T\|^{n},\forall n\in\mathbb{N}.$$

pour tout entier n positive.

Preuve. Soient $f\in H$ et $n\geq 1$, on a :

$$\left\|T^{n}f\right\|^{2}=\left\langle T^{n}f,T^{n}f\right\rangle=\left\langle T^{\star}T^{n}f,T^{n-1}f\right\rangle\leq\left\|T^{\star}T^{n}f\right\|\left\|T^{n-1}f\right\|\leq\left\|T^{n+1}f\right\|\left\|T^{n-1}f\right\|$$

par conséquent ;

$$\left\|T^{n}\right\|^{2}\leq\left\|T^{n+1}\right\|\left\|T^{n-1}\right\|$$

Nous allons maintenant prouver l'égalité par récurrence. Clairement, elle est vraie pour $n=1$, supposons donc que ;

$$\left\|T^{k}\right\|=\|T\|^{k}\text{ pour }1\leq k\leq n$$

Alors ;

$$\|T\|^{2n}=\left\|T^{n}\right\|^{2}\leq\left\|T^{n+1}\right\|\left\|T^{n-1}\right\|=\|T\|^{n+1}\|T\|^{n-1}$$

D'où

$$\|T\|^{n+1}\leq\left\|T^{n+1}\right\|$$

L'inégalité inverse est valable pour tous les opérateurs alors ;

$$\|T\|^{n+1}\leq\left\|T^{n+1}\right\|\leq\|T\|^{n+1}\Rightarrow\left\|T^{n+1}\right\|=\|T\|^{n+1}$$

Ainsi, pour chaque nombre naturel n,

$$\left\|T^{n}\right\|=\|T\|^{n}$$

La preuve est compléte. ■

Proposition 2.5 *Soient A un opérateur hyponormal et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $(A + \lambda A^*)$ est hyponormal si et seulement si ; $|\lambda| \leq 1$.*

Preuve. On a ;
$(A + \lambda A^*)^*(A + \lambda A^*) - (A + \lambda A^*)(A + \lambda A^*)^* =$
$(A^* + \overline{\lambda} A)(A + \lambda A^*) - (A + \lambda A^*)(A^* + \overline{\lambda} A) =$
$A^*A + \lambda (A^*)^2 + \overline{\lambda} A^2 + \overline{\lambda}\lambda AA^* - AA^* - \overline{\lambda} A^2 - \lambda A^{*2} - \lambda\overline{\lambda} A^*A =$
$(1 - |\lambda|^2)(A^*A - AA^*)$.
Comme A est un opérateur hyponormal d'où ;

$$A^*A - AA^* \geq 0,$$

donc

$$(A + \lambda A^*)$$

est hyponormal si et seulement si ; $|\lambda| \leq 1$. ∎

2.2 Propriétés des opérateurs hyponormaux

Proposition 2.6 *[8] Tout opérateur normal est hyponormal.*

$$\textit{normal} \subset \textit{hyponormal}$$

Preuve. On a :

$$\|T^*x\|^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\| \leq \|Tx\|^2$$

∎

Lemme 2.1 *Soit $T \in L(H), T = A + iB$ une décomposition cartésienne de T, soit $AB = C + iD$ une décomposition cartésiénne de AB, Alors T est un opérateur hyponormal si et seulement si ; $D \leq 0$.*

Preuve. On calcul

$$\begin{aligned} T^\star T - TT^\star &= (A - iB)(A + iB) - (A + iB)(A - iB) \\ &= AA + iAB - iBA + BB - AA + iABi + BA - BB \\ &= 2i(AB - BA) = 2i[(C + iD) - (C - iD)] \;= -4D \end{aligned}$$

Donc pour ; $-4D \geq 0 \Rightarrow D \leq 0$. ∎

Proposition 2.7 *[17] Soit $T \in L(H)$; Alors T est un opérateur hyponormal, si et seulement si :*

$$T^{\star}T + 2\lambda TT^{\star} + 2\lambda^2 T^{\star}T \geq 0, \ \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}$$

Preuve. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in H$; T est un opérateur hyponormal si et seulement si :

$$\begin{aligned}
\|T^{\star}(x)\| &\leq \|T(x)\| \Leftrightarrow 4\|T^{\star}(x)\|^4 - 4\|T(x)\|^2 . \|T(x)\|^2 \leq 0 \\
&\Leftrightarrow \|T(x)\|^2 + 2\lambda \|T^{\star}(x)\|^2 + \lambda^2 \|T(x)\|^2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \langle T(x), T(x)\rangle + 2\lambda \langle T^{\star}(x), T^{\star}(x)\rangle + \lambda^2 \langle T(x), T(x)\rangle \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \langle T^{\star}T(x), x\rangle + 2\lambda \langle T^{\star}Tx, x\rangle + \lambda^2 \langle T^{\star}Tx, x\rangle \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \left\langle \left(T^{\star}T + 2\lambda T^{\star}T + \lambda^2 T^{\star}T\right)(x), x\right\rangle \geq 0 \\
&\Leftrightarrow T^{\star}T + 2\lambda T^{\star}T + \lambda^2 T^{\star}T \geq 0
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.8 *Soient $S, T \in (HN)$; tels que : $TS^* = S^*T$et $ST = TS$, alors $S + T$ est un opérateur hyponormal.*

Preuve. *On a :*

$$\begin{aligned}
(S+T)(S+T)^* &= (S+T)(S^*+T^*) = SS^* + ST^* + TS^* + TT^* \\
&= SS^* + T^*S + S^*T + TT^* \leq S^*S + T^*S + S^*T + TT^* \\
&= (S^*+T^*)(S+T) = (S+T)^*(S+T)
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.9 *Soient A et B deux opérateurs hyponormaux tel que ; $AB^* = B^*A$; alors AB et BA sont hyponormaux.*

Théorème 2.1 *Soient $S, T \in (HN)$, alors $S \oplus T$est un opérateur hyponormal.*

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
(S \oplus T)(S \oplus T)^* &= (S \oplus T)(S^* \oplus T^*) \\
&= SS^* \oplus TT^* \ \leq S^*S \oplus T^*T \\
&= (S \oplus T)^*(S \oplus T)
\end{aligned}$$

alors $S \oplus T$ est un opérateur hyponormal. ■

Théorème 2.2 *Soient $S, T \in (HN)$, alors $S \otimes T$est un opérateur hyponormal.*

Preuve. On a :

$$(S \otimes T)(S \otimes T)^*(x_1 \otimes x_2) = (S \otimes T)(S^* \otimes T^*)(x_1 \otimes x_2)$$

pour $(x_1, x_2) \in H$:

$$\begin{aligned} &= SS^*x_1 \otimes TT^*x_2 \leq S^*Sx_1 \otimes TT^*x_2 \\ &= (S^* \otimes T^*)(S \otimes T)(x_1 \otimes x_2) \quad = (S \otimes T)^*(S \otimes T)(x_1 \otimes x_2) \end{aligned}$$

Donc $S \otimes T$ est un opérateur hyponormal. ■

Théorème 2.3 *[17] Un opérateur hyponormal sur H, qui a une partie imaginaire compact est un opérateur normal.*

Preuve. Soit T un opérateur hyponormal et soit

$$M = \{x \in H : \|Tx\| = \|T^*x\|\},$$

alors le vecteur $x \in M$ si et seulement si

$$T^*Tx = TT^*x,$$

donc M est un sous-espace fermé.
Soit $T = A + iB$, tel que A est la partie réel auto-adjoint de T, B est le partie imaginaire auto-adjoint de T.
Pour chaque valeur propre λ de B et un vecteur propre correspondant x, on a comme $A + i\lambda$ est normal et λ est reél,

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|(A + i\lambda)x\| = \|(A + i\lambda)^*x\| = \\ \|(A - iB)x\| &= \|(A - iB)^*x\| = \|T^*x\| \end{aligned}$$

Ainsi le sous-espace M contient chaque espaces propre de B.
Et M doit etre l'espace entier et l'opérateur T est normal. ■

Proposition 2.10 *Soient $A \in B(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, si A est hyponormal et $(A - \lambda I)^{-1}$ exists, alors $(A - \lambda I)^{-1}$ est hyponormal.*

Preuve. Pour prouver cette proposition ; il suffit d'appliquer le corollaire.2.1et la proposition 2.3.
■

Théorème 2.4 *[23] Soit $A \in B(H)$*

$$A \text{ est hyponormal} \not\Leftrightarrow A^2 \text{est hyponormal}$$

Théorème 2.5 *[14]Soit $T \in (HN)$, et soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T , alors ;*

1- $N(|T|) = N(T)$
2- $|T^*|^q = U|T|^q U^*$ pour tout nombre positif q.

2.3 Théorie spectrale des opérateurs hyponormaux

La théorie spectrale de l'opérateur hyponormal, qui est le principal sujet étudié dans cette section est inspirée de l'analyse spectrale des opérateurs auto-adjoints, des opérateurs unitaires et des opérateurs normaux, avec des nouveaux développements importants, intéressants et très utile.

Lemme 2.2 *Soient $T \in (HN)$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma_{ap}(T)$, tels que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de vecteurs unitaires de H tels que :*

$$\|(T - \lambda_1 I)x_n\| \to 0 \text{ et } \|(T - \lambda_2 I)y_n\| \to 0$$

alors ;

$$(x_n, y_n) \to 0$$

Preuve. [4 page 170.] ■

Lemme 2.3 *Soit $T \in (HN)$, alors T a une valeur propre approximative μ telle que : $|\mu| = \|T\|$.*

Preuve. Supposons que ; $\|T\| = 1$ sans perte de généralité.
Puisque

$$TT^* \geq 0 \text{ et } \|TT^*\| = 1$$

on sait que 1 est une valeur propre approximative de TT^*.
Puisque la propriété d'hyponormalité est préservée sous un *-isomorphisme, on peut supposer, après un changement d'espace d'Hilbert, que 1 est une valeur propre pour TT^*.
Formons le sous-espace linéaire fermé différent de zéro

$$M = \{TT^*x = x\}$$

M est invariant sous T et la restriction de T à M est un opérateur isométrique U dans l'espace de Hilbert M.

Donc, U a une valeur propre approximative μ de valeur absolue 1.
Soit $\{x_n\}$ une suite de vecteurs unitaires dans M ; telle que $\|Ux_n - \mu x_n\| \to 0$.
Puisque $Ux_n = Tx_n$, il est évident que μ est une valeur propre approximative pour T :

$$|\mu| = 1 = \|T\| \,.$$

■

Théorème 2.6 *[17] Soit $T \in (HN)$. Alors $r(T) = \|T\|$.*

Preuve. Pour $x \in H$; $\|x\| = 1$ on a :

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\| \leq \left\|T^2x\right\|$$

Mais, $\|T\|^2 \leq \|T^2\| \leq \|T\|^2$, ce qui implique

$$\|T\|^2 = \left\|T^2\right\|$$

Maintenant

$$\|T^nx\|^2 = \langle T^nx, T^nx\rangle = \left\langle T^*T^nx, T^{n-1}x\right\rangle \leq \|T^*T^nx\| \,.\, \left\|T^{n-1}x\right\| \leq \left\|T^{n-1}x\right\| \,.\, \left\|T^{n-1}x\right\|$$

Ainsi

$$\|T^n\|^2 \leq \left\|T^{n-1}\right\| \,.\, \left\|T^{n-1}\right\|$$

Et en combinant cela avec l'égalité ci-dessus, donc $\|T^n\| = \|T\|^n$ pour $n = 1, 2, ...$ d'où ;

$$r\left(T\right) = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \|T\| = \|T\|$$

■

Lemme 2.4 *Soit T un opérateur hyponormal tel que $\sigma(T)$ est l'ensemble des nombres réels, Alors T est auto-adjoint.*

Preuve. Si $\left\|(T-\lambda I)^{-1}\right\| \leq |\lambda|^{-1}$ pour tout λ non nul et purement imaginaire ; alors, d'apés [4 ; Théorème 1.], T est auto-adjoint. ■

Lemme 2.5 *Si T est un opérateur hyponormal et $\sigma(T)$ se trouve sur le cercle unité, Alors T est un opérateur unitaire.*

Preuve. Par l'hypothèse sur T, T est inversible donc on a : $\|T^{-1}\| = 1$. D'autre part, T vérifie

$$\|T\| = \max\left\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \sigma(T)\right\} = 1$$

donc

$$\|Tx\| = \|x\|$$

pour tout $\in$. Comme T est inversible, d'où T est unitaire. ■

Pour prouver le théorème suivant on doit utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.6 *Pour $A, B \in B(H)$ des opérateurs similaires, alors A et B sont des opérateurs bornés inférieurement. En d'autres termes, si A et B sont similaire, alors :*

$$\sigma_{ap}(A) = \sigma_{ap}(B)$$

Théorème 2.7 *Soit $N \in (HN)$. Pour un opérateur arbitraire A vérifiant ; $0 \notin \overline{W(A)}$, $AN = N^*A$, alors N est auto-adjoint.*

Preuve. Comme $0 \notin \overline{W(A)}$, alors A est inversible. D'où $N = A^{-1}N^*A$ et il résulte du lemme précédent que :

$$\sigma(N) = \sigma(N^*) = \sigma_{ap}(N^*) = \sigma_{ap}(N)$$

Pour compléter la démonstration du théorème, il suffit de prouver que $\sigma(N)$ est réel.

Supposons au contraire qu'il existe un $\lambda \in \sigma(N)$ tel que $\lambda \neq \overline{\lambda}$.

Comme $\lambda \in \sigma(N) = \sigma_{ap}(N)$, il existe une suite $\{x_n\}$ de vecteurs unitaires telle que :

$$\left\|(N^* - \overline{\lambda} I)x_n\right\| \leq \|(N - \lambda I)x_n\| \to 0.$$

Puisque $0 \notin \overline{W(A)}$, la relation ;

$$\left\|(N^* - \overline{\lambda} I)x_n\right\| = \left\|(ANA^{-1} - \overline{\lambda} I)x_n\right\| = \left\|A(N - \overline{\lambda} I)A^{-1}x_n\right\| \to 0$$

ce qui implique que $\left\|(N - \overline{\lambda} I)A^{-1}x_n\right\| \to 0$.

D'où

$$\left\langle x, A^{-l}x_n\right\rangle = \left\langle AA^{-1}x_n, A^{-1}x_n\right\rangle \to 0.$$

Mettons $y_n = \frac{A^{-l}x_n}{\|A^{-1}x_n\|}$, alors $\|y_n\| = 1$ et $\langle Ay_n, y\rangle \to 0$,i.e. $0 \in \overline{W(A)}$, une contradiction.

Ceci complète la démonstration du théorème. ■

Théorème 2.8 *Soit $T \in (HN)$; alors la fermeture de son image numérique coïncide avec l'enveloppe convexe de son spectre i.e.*

$$\overline{W(T)} = conv\sigma\,(T)\,.$$

Preuve. L'inclusion $conv\sigma\left(T\right) \subset \overline{W(T)}$ est valable en général.
Supposons qu'il existe un point $\lambda \in W\left(T\right)$ qui n'est pas dans l'enveloppe convexe du spectre.
Par un changement affine de variables, on peut supposer que $\sigma\left(T\right)$ est contenu dans un disque centré à zéro de rayon r et $|\lambda| \succ r$.
Puisque le rayon spectral de T est égal à sa norme, nous trouvons $\|T\| \leq r$ et d'autre part $\langle Tx, x\rangle = \lambda$; pour un vecteur unitaire x ; d'où $|\lambda| \leq \langle Tx, x\rangle \leq r$; contradiction. ■

Chapitre 3

Classe des opérateurs p-hyponormaux

La classe des opérateurs p-hyponormaux est une généralisation des opérateurs hyponormaux. Il est bien connu qu'un opérateur p-hyponormal est q-hyponormal pour $q \leq p$. Les opérateurs p-hyponormaux ont été étudiés par A. Aluthge dans [3] puis de nombreux auteurs l'ont étudié. L'opérateur semi-hyponormal a été introduit pour la première fois par D. Xia dans [27].

3.1 Opérateurs semi-hyponormaux

La classe des opérateurs semi-hyponormaux a été introduite par D. Xia [27] en 1983, depuis plusieurs auteurs l'ont étudié. Soit H un espace de Hilbert complexe et $B(H)$ l'algébre de tous les opérateurs linéaires bornés sur H.

Définition 3.1 *T est un opérateur semi-hyponormal si*

$$Q_T = (T^*T)^{\frac{1}{2}} - (TT^*)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

Q_T est appelé l'opérateur de difference de T.

On note la classe des opérateurs semi-hyponormaux par (SH).

Exemple 3.1 *Pour* $T= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; *alors* $T^*= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow (T^*T)^{\frac{1}{2}} - (TT^*)^{\frac{1}{2}} \geq 0.$

Exemple 3.2 *Soient C et D des matrices positives 2×2 tel ques :*

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Soit $\{P_n\}$ une suite de matrices positives 2×2 définie :

$P_n = \begin{cases} C; & n \leq 0 \\ D; & n \geq 0 \end{cases}$
Soit T un opérateur de H défini par ; $T = UP$
alors $\left((T^*T)^{\frac{1}{2}} x\right)_n = P_n x_n$ et $\left((TT^*)^{\frac{1}{2}} x\right)_n = P_{n-1} x_n$.
comme $D \geq C$, T est semi-hyponormal.

3.1.1 Opérations sur la classe des opérateurs semi-hyponormaux

Proposition 3.1 *[3] Soient $T \in (SH)$ et α un nombre complexe, alors $\alpha T \in (SH)$.*

Preuve. Ceci suit immédiatement de :
$[(\alpha T)^* (\alpha T)]^{\frac{1}{2}} - [(\alpha T)(\alpha T)^*]^{\frac{1}{2}} =$
$[(\overline{\alpha}\alpha) T^*T]^{\frac{1}{2}} - [(\overline{\alpha}\alpha) TT^*]^{\frac{1}{2}} =$
$|\alpha| \left[(T^*T)^{\frac{1}{2}} - (TT^*)^{\frac{1}{2}}\right] \geq 0$
d'où $\alpha T \in (SH)$. ■

Remarque 3.1 *Un opérateur hyponormal doit étre un opérateur semi-hyponormal, de sorte que $N \subset (HN) \subset (SH)$.*

Proposition 3.2 *Si T est semi-hyponormal inversible et $0 \notin \sigma(T)$; alors T^{-1} est également semi-hyponormal.*

3.2 Opérateur p-hyponormal

Définition 3.2 *Soit T un opérateur borné, on dit que T est p-hyponormal si :*

$$(TT^*)^p \leq (T^*T)^p, \forall p \geq 0$$

On note la classe des opérateurs p-hyponormaux par $p(HN)$.

Remarque 3.2 *Si $p = 1$; alors T est hyponormal et si $p = \frac{1}{2}$; T est semi-hyponormal.*

Remarque 3.3 *La définition précédente est équivalente à : T est un opérateur p-hyponormal si : $|T|^{2p} \geq |T^*|^{2p}$, (car*

on a :

$$|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}} et \ |T^*| = (TT^*)^{\frac{1}{2}}$$

Exemple 3.3 *Soit* $H = \bigoplus_{n=-\infty}^{+\infty} H_n$, *tel que* H_n *est un espace d'Hilbert de dimension deux. Soient* E *et* F *des matrices positives tels que :* $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $F = 2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Alors les décompositions polaires de E et F sont $E = VE$ et $F = WF$ respectivement, avec ;
$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $W = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.
Soient $\{U_n\}$ et $\{P_n\}$ tels que :
$U_n = \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ et $P_n = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$.
On défini les opérateurs U et P sur H par :

$$(Ux)_n = U_{n-1}x_{n-1} \text{ et } (Px)_n = P_n x_n$$

avec $x = (...., x_{-1}, x_0, x_1, ...)$; pour $x_n \in H_n$; Alors $T = UP$ est p-hyponormal.

3.2.1 Opérations des opérateurs p-hyponormaux

Proposition 3.3 *Soient* T *un opérateur* p*-hyponormal et* α, β *des nombres complexes ; alors :* $(\alpha T + \beta I)$ *est* p*-hyponormal.*

Preuve. Cela découle immédiatement de

$$\begin{aligned}
& ((\alpha T + \beta I)^* (\alpha T + \beta I))^p - ((\alpha T + \beta I)(\alpha T + \beta I)^*)^p \\
= & \left(\left(\overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} I\right)(\alpha T + \beta I)\right)^p - \left((\alpha T + \beta I)\left(\overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} I\right)\right)^p \\
= & \left((\overline{\alpha}\alpha T^* T) + (\overline{\alpha}\beta T^*) + \left(\overline{\beta}\,\alpha T\right) + \left(\beta\,\overline{\beta}\,I\right)\right)^p \\
& - \left(\alpha\overline{\alpha} TT^* + \overline{\beta}\,\alpha T + \overline{\alpha}\beta T^* + \beta\,\overline{\beta}\,I\right)^p \\
= & |\alpha|^2 \left((T^\star T)^p - (TT^\star)^p\right) \geq 0
\end{aligned}$$

d'où $\alpha T + \beta I$ est p-hyponormal. ■

Théorème 3.1 *Soient* S, T *deux opérateurs* p*-hyponormaux, tels que :* $TS^* = S^*T$ *et* $ST = TS$, *alors* $S + T$ *est un opérateur* p*-hyponormal.*

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
& ((S+T)(S+T)^*)^p \\
= \; & ((S+T)(S^*+T^*))^p = \\
& (SS^*+ST^*+TS^*+TT^*)^p \\
= \; & (SS^*+T^*S+S^*T+TT^*)^p \leq \\
& (S^*S+T^*S+S^*T+TT^*)^p \\
= \; & ((S^*+T^*)(S+T))^p = ((S+T)^*(S+T))^p
\end{aligned}$$

d'où $S+T$ est un opérateur p-hyponormal. ■

Proposition 3.4 *[12] Soit T un opérateur p-hyponormal, pour $p \succ 0$, alors T^n est un opérateur $\min\left\{1, \frac{p}{n}\right\}$ -hyponormal ; pour tout entier positif n.*

Proposition 3.5 *Si $0 \prec q \prec p$, alors $p(HN) \subset q(HN)$.*

i.e. tout opérateur p-hyponormal est q-hyponormal.

Preuve. Puisque

$$(T^*T)^q = \left(|T|^2\right)^q = \left(\left(|T|^2\right)^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

et

$$(TT^*)^q = \left(|T^*|^2\right)^q = \left(\left(|T^*|^2\right)^p\right)^{\frac{q}{p}}$$

maintenant, par p-hyponormalité, nous avons

$$(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$$

d'où

$$\left(|T|^2\right)^p \geq \left(|T^*|^2\right)^p$$

et on a $\left(\left(|T|^2\right)^p\right)^\alpha \geq \left(\left(|T^*|^2\right)^p\right)^\alpha$ pour tout $\alpha \in [0,1]$, puisque $|T|^2$, $|T^*|^2$ sont positifs.
De plus , nous avons $0 \leq q \leq p$, donc $0 \leq \frac{q}{p} \leq 1$, donc T est q-hyponormal. ■

Proposition 3.6 *[12] Soit T un opérateur p-hyponormal, pour $p \succ 0$, alors T^n est un opérateur $\min\left\{1, \frac{p}{n}\right\}$ -hyponormal ; pour tout entier positif n.*

Corollaire 3.1 *Pour $0 \leq p \leq 1$, soit T un opérateur p-hyponormal, alors T^n est $\frac{p}{n}$-hyponormal.*

Preuve. Si T est p-hyponormal , alors

$$\left(T^{n^*}T^n\right)^{\frac{p}{n}} \geq (TT^*)^p \geq (T^*T)^p \geq \left(T^nT^{n^*}\right)^{\frac{p}{n}}$$

donc

$$\left(T^{n^*}T^n\right)^{\frac{p}{n}} \geq \left(T^nT^{n^*}\right)^{\frac{p}{n}}$$

et T^n est $\frac{p}{n}$-hyponormal. ■

Corollaire 3.2 *Pour $0 \leq p \leq 1$, soit T un opérateur p-hyponormal, si T^n est normal, alors T est normal.*

Preuve. Puisque T est p-hyponormal , alors nous avons :

$$\left(T^{n^*}T^n\right)^{\frac{p}{n}} \geq (TT^*)^p \geq (T^*T)^p \geq \left(T^nT^{n^*}\right)^{\frac{p}{n}}$$

maintenant T^n est normal, alors

$$T^{n^*}T^n = T^nT^{n^*} \Rightarrow \left(T^{n^*}T^n\right)^{\frac{p}{n}} = \left(T^nT^{n^*}\right)^{\frac{p}{n}}$$

donc
$\left(T^{n^*}T^n\right)^{\frac{p}{n}} \geq (TT^*)^p \geq (T^*T)^p \geq \left(T^nT^{n^*}\right)^{\frac{p}{n}}$
par conséquent, $(TT^*)^p = (T^*T)^p$ et
$TT^* - T^*T = ((TT^*)^p)^{\frac{1}{p}} - ((T^*T)^p)^{\frac{1}{p}} = ((TT^*)^p)^{\frac{1}{p}} - ((T^*T)^p)^{\frac{1}{p}} = 0$
ainsi $TT^* = T^*T$ et T est normal. ■

3.3 Propriétés des opérateurs p-hyponormaux

Lemme 3.1 *[?] Soit $T = U|T|$ un opérateur p-hyponormal, $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$, alors l'opérateur $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}} U |T|^{\frac{1}{2}}$est hyponormal si $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$, et $\left(p + \frac{1}{2}\right)$ hyponormal si $0 \leq p \leq \frac{1}{2}$.*

Théorème 3.2 ***Preuve.*** *Puisque tout opérateur p-hyponormal pour $\frac{1}{2} \leq p \leq 1$ et U est semi-hyponormal, nous avons $(T^*T)^{\frac{1}{2}} \geq (TT^*)^{\frac{1}{2}}$ ou de maniaire équivalante*

$$U^*|T|U \geq |T| \geq U|T|U^*$$

Maintenant

$$\left(\widetilde{T^*}\widetilde{T}\right) - \left(\widetilde{T}\widetilde{T^*}\right) = |T|^{\frac{1}{2}}\left(U^*|T|U - U|T|U^*\right) \geq 0$$

et donc T est hyponormal. ■

Théorème 3.3 *[4] Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de l'opérateur T_ε, si T est inversible, alors*

$$|T_\varepsilon| = |T|^{\frac{1}{2}} S^{-1} |T|^{\frac{1}{2}}, \text{ et } U_\varepsilon = |T|^{\varepsilon} U |T|^{\frac{1}{2}} S |T|^{-\frac{1}{2}}$$

, où l'opérateur S est défini par l'équation

$$S\left(|T|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} U^* |T|^{2\varepsilon} U |T|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right) = |T|$$

est inversible.

Preuve. Par la définition de la décomposition polaire :

$$|T_\varepsilon| = (T_\varepsilon^* T_\varepsilon)^{\frac{1}{2}} = \left(|T|^{1-\varepsilon} U^* |T|^{2\varepsilon} U |T|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}-\varepsilon} = \left(|T|^{\frac{1}{2}} |T|^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} U^* |T|^{2\varepsilon} U |T|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} |T|^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $E = |T|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} U^* |T|^{2\varepsilon} U |T|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$ et $F = |T|$. Si $\varepsilon \leq p$, alors il est claire que $E \geq F$ et la condition $\left(E^{\frac{1}{2}} F E^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq E$.
Si $\varepsilon \geq p$, alors on peut montrer en utilisant l'inégalité de Furtura que $E^{\frac{p}{\varepsilon}} \geq F^{\frac{p}{\varepsilon}}$, et donc la condition $\left(E^{\frac{1}{2}} F E^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \leq E$ est à nouveau vérifiée, par conséquent il existe un opérateur positif S tel que $SES = F$, ainsi

$$S\left(|T|^{-\frac{1}{2}-\varepsilon} U^* |T|^{2\varepsilon} U |T|^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right) = |T|$$

où équivalent

$$|T|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} U^* |T|^{2\varepsilon} U |T|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} = S^{-1} |T| S^{-1}$$

Par conséquent

$$|T_\varepsilon| = \left(|T|^{\frac{1}{2}} S^{-1} |T| S^{-1} |T|^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = |T|^{\frac{1}{2}} S^{-1} |T|^{\frac{1}{2}}$$

Puisque la racine carrée d'un opérateur positif est unique. En remplaçant l'éxpression de $|T_\varepsilon|$ par $T_\varepsilon = U_\varepsilon |T_\varepsilon|$ on trouve

$$U_\varepsilon = |T|^{\varepsilon} U |T|^{\frac{1}{2}} S |T|^{-\frac{1}{2}}$$

■

Proposition 3.7 *Soient S, T deux opérateurs p-hyponormaux, alors $S \oplus T$est un opérateur p-hyponormal.*

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} & ((S\oplus T)(S\oplus T)^*)^p \\ = \; & ((S\oplus T)(S^*\oplus T^*))^p \\ = \; & (SS^*\oplus TT^*)^p \; \leq (S^*S\oplus T^*T)^p \\ = \; & ((S\oplus T)^*(S\oplus T))^p \end{aligned}$$

alors $S \oplus T$ est un opérateur p-hyponormal. ■

Théorème 3.4 *Soient S, T deux opérateurs p-hyponormal, alors $S \otimes T$est un opérateur p-hyponormal.*

Preuve. On a :

$$((S \otimes T)(S \otimes T)^*)^p (x_1 \otimes x_2) = ((S \otimes T)(S^* \otimes T^*))^p (x_1 \otimes x_2)$$

pour $(x_1, x_2) \in H$:

$$\begin{aligned} &= (SS^*)^p x_1 \otimes (TT^*)^p x_2 \leq (S^*S)^p x_1 \otimes (TT^*)^p x_2 \\ &= ((S^* \otimes T^*)(S \otimes T))^p (x_1 \otimes x_2) \quad = ((S \otimes T)^*(S \otimes T))^p (x_1 \otimes x_2) \end{aligned}$$

Donc $S \otimes T$ est un opérateur p-hyponormal. ■

3.4 Etude spéctrale des opérateurs semi-hyponormaux et p-hyponormaux

Du point de vue de la théorie spectrale générale des opérateurs linéaires, La condition d'hyponormalité a plusieurs conséquences importantes et plutôt inattendues. Parmi ceux ci, nous mentionnons la formule de spectre continu, ponctuel, résiduel et nous donnons quelques propriétés spectrales des opérateurs semi-hyponormaux et p-hyponormaux. Soient $\sigma(T)$ le spectre de T, et $r(T)$ et $\|T\|$ sont respectivement le rayon spectral et la norme de l'opérateur T ; on a :

$$\sigma(T) = \{z : \overline{z} \in \sigma_{ap}(T^*)\}, \sigma(|T|) \subset \pi_\rho(\sigma(T))$$

où π_ρ est l'application $\mathbb{C} \to \mathbb{R}^+$ tel que $\pi_\rho(z) = |z|, z \in \mathbb{C}$, et $\sigma(A), \sigma_{ap}(A)$ et $\sigma_p(A)$ sont respectivement le spectre, le spectre ponctuel approximatif et le spectre ponctuel de A.

3.4.1 Théorie spectrale des opérateurs semi-hyponormaux

Pour tout opérateur $T \in (HN)$, il existe une décompoition cartésienne $T = X + iY$ de T, où $X = \frac{1}{2}(T + T^*)$ et $Y = \frac{1}{2i}(T - T^*)$, les opérateurs X et Y sont appelés respectivement les parties réélle et imaginaire de T. Le spectre joint ponctuel $\sigma_{jp}(T)$ de $T = X + iY$ est l'ensemble de tous les nombres complexes $z = x + iy$ (x et y sont des nombres réels) tels qu'il existe un vecteur propre commun $f (\neq 0)$ de X et Y tels que :

$$Xf = xf \text{ et } Yf = yf$$

De plus, $z \in \sigma_{jp}(T)$ si et seulement s'il existe un vecteur non nul f tel que

$$Tf = zf \text{ et } T^*f = \overline{z}f$$

Il est évident que $\sigma_{jp}(T) \subset \sigma_p(T)$, et de plus pour les opérateur normal T, $\sigma_{jp}(T) = \sigma_p(T)$.

Théorème 3.5 *Soit T un opérateur semi-hyponormal, alors*

$$\sigma(T) = \sigma_a(T^*)^*$$

Preuve. Pour tous $T \in (SH)$

$$\sigma(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_p(T^*)^*$$

En fait, il est évident que

$$\sigma_a(T) \cup \sigma_p(T^*)^* \subset \sigma(T)$$

Inversement, si $z \in \sigma(T) \diagdown \sigma_a(T)$, alors ilexiste un $a \geq 0$ tel que :

$$\|(T - zI) f\| \geq a \|f\|, f \in H$$

Donc, $(T - zI) H$ il est fermé, depuis $z \in \sigma(T)$, il est impossible que $(T - zI) H$ est égal à H, ainsi l'éspace nul de $T^* - \overline{z}I$ n'est pas $\{0\}$, i,e $\overline{z} \in \sigma_p(T^*)$,
donc

$$\sigma_a(T) = \sigma_{ja}(T) \subset \sigma_a(T^*)^*$$

Aussi, puisque

$$\sigma_p(T^*) \subset \sigma_a(T^*)$$

Nous devons avoir

$$\sigma(T) \subset \sigma_a(T^*)^*$$

■

Définition 3.3 *Un opérateur T est pur s'il n'a pas un sous espace réduisant sur lequel il est normal.*

Proposition 3.8 *[**?**] Si T est un opérateur semi-hyponormal pur, alors $\sigma_p(T) = \emptyset$.*

Preuve. Supposons qu'il existe un $\lambda \in \sigma_p(T)$. puisque $\sigma_{jp}(T) = \sigma_p(T)$, donc il existe un vecteur $f \neq 0$ tel que $Tf = \lambda f$ et $T^* f = \lambda f$ et $T^* f = \overline{\lambda} f$, ainsi l'espace vectoriel unidimensionnel

$$W = \{\mu f : \mu \in \mathbb{C}\}$$

réduit T et $TT^*(f) = T(\overline{\lambda} f) = \overline{\lambda} T(f) = |\lambda|^2 f$ et $TT^*(f) = T^*(\lambda f) = \lambda T^*(f) = |\lambda|^2 f$, par conséquent, la restriction de T à W est normal, ce qui contredit l'hypothése que T est pur, par conséquent $\sigma_p(T) = \emptyset$. ■

Proposition 3.9 *Si T est un opérateur semi-hyponormal pur, alors $\sigma_{ap}(T) = \emptyset$.*

Preuve. Supposons que T est un opérateur semi-hyponormal pur. Alors par la Proposition 1.6, $\phi(T)$ est un opérateur semi-hyponormal pur. Ainsi $\sigma_p(\phi(T)) = \emptyset$. Par conséquent $\sigma_{ap}(T) = \sigma_p(\phi(T)), \sigma_{ap}(T) = \emptyset$. ■

3.4.2 Théorie spectrale des opérateurs p-hyponormaux

Le spectre d'un opérateur est une généralisation de l'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée.

La notion du spectre commence à partir du inversibilité d'un opérateur, et continuent dans l'espace des opérateurs linéaires bornés.

Lemme 3.2 *[?] Soit T un opérateur p-hyponormal, si $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$.*

Preuve. Supposons que $\lambda = 0 \in \sigma_p(T)$, alors il existe un vecteur non nul tel que $Tx = 0$. Puisque ;

$$|T|^2 x = T^*Tx = 0$$

et $|T| \geq 0$, on a :

$$(T^*T)^{\frac{1}{2k}} x = 0, (k = 1, 2, ...)$$

pour $m \in \mathbb{N}$ tel que : $\frac{1}{m} \leq p$, on a :

$$(T^*T)^{\frac{1}{2m}} x = 0$$

Il s'ensuit que

$$(T^*T)^p x = 0$$

comme T est p-hyponormal, il s'ensuit que

$$(TT^*)^p x = 0$$

donc

$$T^*x = 0$$

Supposons ensuite que $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\lambda \in \sigma_p(T)$, alors il existe un vecteur non nul y tel que $Ty = \lambda y$.
Soit $T = U|T|$ la décomposition polaire de T avec U un opérateur unitaire. Comme $U|T|y = \lambda y$, il s'ensuit que :

$$|T|^{\frac{1}{2}} U |T|^{\frac{1}{2}} |T|^{\frac{1}{2}} y = \lambda |T|^{\frac{1}{2}} y$$

on a l'opérateur

$$\overline{T} = |T|^{\frac{1}{2}} U |T|^{\frac{1}{2}}$$

est semi-hyponormal, et on a

$$\overline{T}^* \left(|T|^{\frac{1}{2}} y \right) = |T|^{\frac{1}{2}} U^* |T| y = \overline{\lambda}. |T|^{\frac{1}{2}} y$$

donc

$$\overline{T}^* (|T| y) = \overline{\lambda}. |T| y$$

donc $|T| y \neq 0$, d'ou $\overline{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. ∎

Théorème 3.6 *Le spectre σ est continu sur l'ensemble de tous les opérateurs p-hyponormaux.*

Preuve. Si $\{T_n\}$ est une suite d'élément dans une algébre de Banach unitaire $\mathcal{A}$, alors

$$\liminf_n \sigma(T_n)$$

est l'ensemble de tous les points limites de séquences convergentes de la forme $\{\lambda_n\}$, où

$$\lambda_n \in \sigma(T_n)$$

pour chaque n, puisque l'ensemble des éléments inversibles dans $\mathcal{A}$ est ouvert, nous concluons que :

$$\liminf_n \sigma(T_n) \subset \sigma(T)$$

chaque fois la suite des éléments T_n converge vers T en $\mathcal{A}$. ∎

Lemme 3.3 *[?]Soit $T = UP \in B(H)$, U unitaire, $P \geq 0$ et $T^*T = P^2$, soit $r \geq 0$, $\left|e^{i\theta}\right| = 1$, alors $r.e^{i\theta} \in \sigma_{np}(T)$ si et seulement s'il existe une suite $\{x_k\}$ de vecteurs unitaires dans X telle que :*

$$\lim_{k \to \infty} \|(P - r) x_k\| = 0 \textit{ et } \lim_{k \to \infty} \left\| \left(U - e^{i\theta}\right) x_k \right\| = 0$$

Preuve. Si $\lambda \in \sigma_{np}(T)$, alors il existe une suite $\{x_k\}$ de vecteurs unitaires dans H telle que :

$$\left(T - r.e^{i\theta}\right) x_k \to 0 \ et \ \left(T - r.e^{i\theta}\right)^* x_k \to 0$$

Comme $k \to \infty$, depuis

$$T^*T = P^2, \left(P^2 - r^2\right) x_k \to 0$$

et

$$(P - r)\, x_k \to 0\, (k \to \infty)$$

Il s'ensuit donc que $\left(U - e^{i\theta}\right) x_k \to 0$ puisque $r \neq 0$. Inversement, supposons que

$$\lim_{k\to\infty} \|(P - r)\, x_k\| = 0 \text{ et} \lim_{k\to\infty} \left\|\left(U - e^{i\,\theta}\right) x_k\right\| = 0$$

Soient vraies. Puisque U est unitaire, nous avons $\left(U^* - e^{-i\,\theta}\right) x_k \to 0\,; \,(k \to \infty)$ d'où ;

$$r.e^{i\,\theta} \in \sigma_{np}(T)$$

■

Théorème 3.7 *[?] Soit $T = U\,|T|$ un opérateur p-hyponormal, si $r \in \sigma(T^*T)$, alors il existent r et θ tels que $r \le r'$ et $\sqrt{r'}.e^{i\,\theta} \in \sigma(T)$.*

Preuve. Pour $P = \frac{1}{2^n}$, si $r = 0$, alors il est clair que $0 \in \sigma(T)$, donc soit $r \neq 0$, alors $r \in \sigma(T^*T)$ et $r^p \in \sigma\left((T^*T)^p\right)$, on pose $S = U\,|T|^p$, puisque ;

$$S^*S = |T|^{2p} = (T^*T)^p$$

et

$$SS^* = U\,(TT^*)^p\, U^* = S^*S = (TT^*)^p$$

S est un opérateur hyponormal. puisque $S = U\,|T|\,P$ est une décomposition polaire de S et $r^p \in \sigma(S^*S)$, on a donc ; $\sqrt{r^p}.e^{i\theta} \in \sigma(S)$. Il existe donc r_0 tel que :

$$\sqrt{r^p} \le r_0$$

et

$$r_0.e^{i\,\theta} \in \partial\sigma(S) \subset \sigma_{ap}(S) \subset \sigma_{np}(S)$$

Ou $\partial\sigma(S)$ est la frontiére de $\sigma(S)$, il s'ensuit qu'il existe une suite $\{x_k\}$ de vecteurs unitaires dans H tel que :

$$\left(\left(|T|^p\right) - r_0\right) x_k \to 0 \ et \ \left(U - e^{ii\theta}\right) x_k \to 0, \ k \to \infty$$

Puisque $p = \frac{1}{2^n}$ nous avons $\left(|T| - r_0^{2n}\right) x_k \to 0$ quand $k \to \infty$, soit $r' = r_0^{2n+1}$, alors $r'.e^{ii\theta}$ est le nombre souhaité, donc la preuve est compléte. ■

Théorème 3.8 *[21]Soit H un espace de Hilbert complexe . pour $0 \leq p \leq 1$, soit l'opérateur T est p-hyponormal, si $r \in \sigma(T^*T)$,alors il existe $z \in \sigma(T)$ tel que $|z|^2 = r$.*

Remarque 3.4 *Avec la méme hypothése que dans le théoréme précédent, on a si $r \in \sigma(TT^*)$, alors il existe $\lambda \in \sigma(T)$ tel que $|\lambda|^2 = r$.*

Corollaire 3.3 *Soit T un opérateur p-hyponormal, alors $r(T) = \|T\|$.*

Preuve. Puisque $r(T^*T) = \|T\|^2$, le résultat découle du théoréme précédent. ■

Théorème 3.9 *[Th 2.3 p 10 [3]] Soit $T = U|T|$ un opérateur p-hyponormal, alors $\widetilde{T} = |T|^{\frac{1}{2}}.U.|T|^{\frac{1}{2}}$est $\left(p + \frac{1}{2}\right)$-hyponormal, donc T est semi-hyponoral*

Théorème 3.10 *[?] Soit T un opérateur p-hyponormal, alors*

$$\sigma(T) = \{z : \overline{z} \in \sigma_{ap}(T^*)\}$$

Preuve. On a

$$\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \{z : \overline{z} \in \sigma_{ap}(T^*)\}$$

on va prouver que

$$\sigma_{ap}(T) \subset \{z : \overline{z} \in \sigma_{ap}(T^*)\}$$

Supposons que $z \in \sigma_{ap}(T)$, et on a $z \in \pi_p(\tau(T))$, donc $\tau(T)$ est un opérateur p-hyponormal, et ona $\overline{z} \in \sigma_p(\tau(T^*))$. Alors par le théoréme précédent

$$\sigma_p(\tau(T^*)) = \sigma_{ap}(T^*)$$

il s'ensuit que

$$\overline{z} \in \sigma_{ap}(T^*)$$

■

3.5 Conclusion

Ce mémoire de fin d'étude de Master s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs. Les opérateurs qui nous ont particuliérement intéressé sont les opérateurs p-hyponormaux.
D'aprés notre étude à cette classe d'opérateur on a remarqué des relations d'inclusion propres entre ces opérateurs et que les opérateurs hyponormaux constituent une classe plus large que les opérateurs normaux et plus étroite que les opérateurs p-hyponormaux ; et on a :
normal $\subset$ hyponormal $\subset$ p-hyponormal $\subset$ q-hyponormal , tel que $0 \prec q \prec p$.

normal $\subset$ hyponormal $\subset$ semi-hyponormal.
On a apris quelques opérations et propriétés des opérateurs hyponormaux, semi-hyponormaux et p-hyponormaux qui ressemblent à ceux des opérateurs normaux. Mais qui sont plus important que cela.
La théorie spéctrale des opérateurs hyponormaux, semi-hyponormaux et p-hyponormaux est inspirée de l'analyse spectrale des opérateurs auto-adjoints, des opérateurs unitaires et des opérateurs normaux, avec de nouveaux développements importants, intéressants et très utile. De nouvelles méthodes ont été présentées, diverses difficultés surmontées et de nouvelles applications obtenues.
Bien entendu, les domaines d'application de ces opérateurs sont encore limités. Ils doivent encore être développés ; nouvelles théories sont attendus aussi.

De plus, l'étude de ces trois classes d'opérateurs est liée à certains concepts importants de la mécanique quantique, comme les relations de la commutation Heisenberg, opérateur de vague, matrice de diffusion et perturbations.

Bibliographie

[1] Akkouchi. M , *Remarks on the spectrum of bounded and normal operators on Hilbert space*, An. St. Univ. Ovidius Constanta. 16/2 (2008), 7-14.

[2] Aiena.P , *On the spectral properties of some classes of operators*, Univ. DiPalermo, MAY 2010.

[3] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for $0 < p < l$*, Journal of Integral Equations and Operator Theory, 13(1990), 307-315.

[4] Aluthge.A , *Some generalized theorem on p-hyponormal operators*, integr Equat oper Th,vol 20 (1996).

[5] Andrew A.D. and W.L.Green, Spectral theory of operators on Hilbert spaces,School of Mathematics., Georgia Institute of Technology., Atlanta., G.A., (2002).

[6] Ando.T ,*On hyponormal operator*, Proc.Amer.Math.Soc.14(1963),290-291.

[7] Barraa. M, M. Boumazgoun, *Norm of derivation and hyponormal operators*. Extracta Math.12(2001),225-233.

[8] Berberian. A.S, *A note on hyponormal operator*, Pacific J. Math. 12 (1962), 1171-1175.

[9] Berberian.S.K, *Introduction to Hilbert space*, Oxford Univ. Press, New York, 1961.

[10] Brezis.H, *Analyse fonctionnelle,Théorie et application*,Masson,Paris,1992.

[11] Chellali..C, *Commutativité à un facteur près*, thèse de doctorat, Universitéd'Oran1. 2015.

[12] Daoxing Xia, *Spectral properties of p-hyponormal operators*, Glasgow Mathematical Journal, Vol. 36(1994), 117-122.

[13] Dragan.S, *Characterization of normal, hyponormal and EP operators*,329(2007)1181-1190.

[14] Furuta.T, Invitation to linear operators, Taylor and Francis.

[15] Guemari.D, N. Boulifa, *Théorie spéctrale des quelques classes d'opérateurs*, Memoire de master académique, Université d'El Oued, 2014.

[16] Halmos.P.R, Normal dilations and extensions of operators. Summa Brasil. Math. 2, 125–134 (1950)

[17] Halmos.P.R, *A Hilbert Space Problem Book* (D. Van Nostrand, Princeton, NJ, Toronto, Ontorio, London, 1967).

[18] Istratescu.V, *On some hyponormal operators*, Pacific J. Math. 22(1967) 413-417.

[19] M. Ito, *Generalizations of the results on powers of p -hyponormal operators*, to appear in J.Inequal. Appl.

[20] Muneo Cho, *Spectral propertie of p-hyponormal operator*, Glasgow. jour.Math.V 36.1(1994) 117-122.

[21] M. Cho and M.Itoh, Putnam's inequality for p-hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 123 (1995), 2435-2440.

[22] Putnam.C.R, *The spectra of subnormal operators*. Amer.Math. Soc. 2(1971), 473-477.

[23] Stampfi.J.A , *Local Spectral Theory for operators,* Trans.Amer.Math. Soc. 217(1976), 285-296.

[24] Stampfli.J.A, *Hyponormal operators and spectral density*,Trans.Amer.Math.Soc. 117(1965),469-476.MR33 :4686.

[25] Stampfli.J.A, *Hyponormal operators*, Pacific J.Math,12 (1962),1453-1458.

[26] Taylor.J.L, *A joint spectrum for several commuting operators*, J. Functional Analysis 6 (1970), 172-191.

[27] Tadashi.H, *A note on p-hyponormal operators*, Proc. Amer. Math. Soc, 125(1997), 221-230.

[28] Whitly.R, *A note on hyponormal operator*, Proc. Amer. Math. Soc. 49 (1975), 399-400.

[29] Xia.D, *On the nonnormal operators-semihyponormal operators*, Sci Sinica 23 (1983), 700-713.

[30] Xia.D, *Spectral Theory of hyponormal operators*, Springer Basel AG 1983, Basel.

[31] Yoshino.T, *On a problem of bonsall*,Tohoku Math.J.20(1968), 5-7.