



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa



Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de *MASTER*
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques

Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

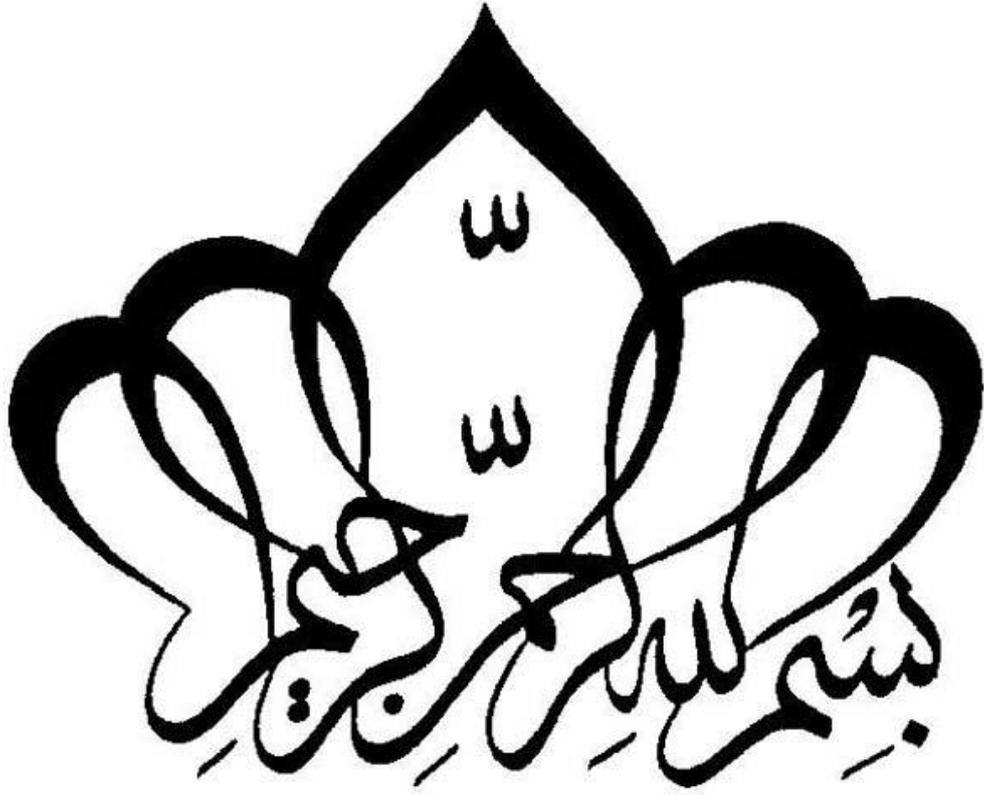
Cycles limites des systèmes différentiels non linéaires dépendant d'un petit paramètre

Présenté Par:
Aounallah Khaireddine
Zerfaoui Abdenour

Devant le jury :

<i>Zarai Abderrahmane</i>	<i>PROF Université Larbi Tébessi</i>	<i>Président</i>
<i>Mesloub Fatiha</i>	<i>MCA Université Larbi Tébessi</i>	<i>Examinatrice</i>
<i>Diab Zouhair</i>	<i>MCB Université Larbi Tébessi</i>	<i>Encadreur</i>

Date de soutenance : 20 Juin 2021



Résumé

Dans ce travail nous fournissons les conditions suffisantes pour l'existence des solutions périodiques émergeant des points d'équilibres du problème lunaire spatial de Hill suivant

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 9x &= \varepsilon F_1\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3y &= \varepsilon F_2\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} + 4z &= \varepsilon F_3\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right),\end{aligned}$$

où ε est un paramètre suffisamment petit et $F_i, i \in \{1, 2, 3\}$ sont des fonctions lisses et périodiques en t qui définissent une perturbation en résonance $p : q$ avec certaines des solutions périodiques du problème lunaire spatial de Hill étant p et q sont des entiers positifs et relativement premiers.

Dans la seconde partie de ce travail on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre pour étudier le nombre maximum de cycles limites de quelques classes des systèmes différentiels polynomiaux en dimension 4.

Mots clés : Solution périodique, cycle limite, problème de Hill, méthode de la moyennisation.

Abstract

In this work, we provide sufficient conditions for the existence of periodic solutions emerging from the equilibrium points of the spatial Hill lunar problem having equations of motion

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 9x &= \varepsilon F_1\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3y &= \varepsilon F_2\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} + 4z &= \varepsilon F_3\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right),\end{aligned}$$

where ε is a small parameter and $F_i, i \in \{1, 2, 3\}$ are smooth periodic functions in t which define a perturbation in resonance $p : q$ with some of the periodic solutions of the spatial Hill Lunar problem being p and q positive relatively prime integers.

In the second part of this work, we use the averaging method first order to study the maximum number of limit cycles of some classes of polynomial differential systems in dimension 4.

Keywords: Periodic solution, limit cycle, Hill problem, averaging method.

ملخص

في هذا العمل، نقدم شروطاً كافية لوجود الحلول الدورية الناشئة من نقاط التوازن لمشكلة هيل القمرية و التي لها معادلات حركة من الشكل:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 9x = \varepsilon F_1\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3y = \varepsilon F_2\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 4z = \varepsilon F_3\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right),$$

حيث ε هو وسيط ذو قيمة صغيرة و $F_i, i \in \{1, 2, 3\}$ هي دوال ناعمة و دورية بالنسبة ل t وهي تمثل اضطراباً يتجاوز q : p مع بعض الحلول الدورية لمشكلة هيل القمرية حيث p و q اوليان فيما بينهما.

في الجزء الثاني من هذا العمل، نستخدم طريقة المتوسطات من الدرجة الأولى لدراسة الحد

الأعظمي لعدد الدورات المنتهية لعدة فئات من أنظمة كثيرات الحدود التفاضلية في البعد 4.

الكلمات المفتاحية: حل دوري، دورة الحد، مشكلة هيل ، طريقة المتوسطات.

Remerciements

*Nous remercions avant tout notre Dieu **ALLAH** de nous avoir donné le courage, ainsi la force pour pouvoir achever ce travail.*

*Nous viendrons à exprimer notre gratitude et notre reconnaissance envers notre encadreur **Mr. Zouhair DIAB**, pour avoir accepté de nous encadrer et d'être patient à nos égards. et de nous diriger pendant la durée de ce travail.*

Nos profonds remerciements vont également à tous les enseignants durant la période universitaire pour leurs efforts durant notre étude universitaire.

Nos remerciements s'adressent également aux membres de jury qui nous ont fait l'honneur de juger notre travail.

Khaireddine AOUNALLAH
Abdenour ZERFAOUI



Dédicace

Je dédie ce travail aux personnes les plus chères au monde ma mère "Zoubida" et mon père "Mohammed" source de courage, qui m'ont donné tout. Les mots ne peuvent pas exprimer mon amour.

A ceux qui m'ont encouragé durant toute la période de mes études, mes frères "Abdelali et Abdelmounam" à mes sœurs "Laila et Ouissal".

A mon binôme "AOUNALLAH Khaireddine", à toute ma famille, je dédie ce travail également à mes très chers amis :

Naceur Eddine, Mohammed, Mostafa, Hani, Rabie, Daoud, Oussama et Houdhaifa pour leur amour et fidélité durant mon parcours scolaire.

Sans oublier toutes mes amis et mes collègues ainsi que ceux qui m'ont toujours aidé et encouragé.

Abdenour





Dédicace

*Je dédie ce travail aux personnes les plus chères au monde
ma mère et mon père "Rabeh" sans oublier ma grand-mère que
j'aime, source de courage, qui m'ont donné tout, les mots ne
peuvent pas exprimer mon amour.*

*A ceux qui m'ont encouragé durant toute la période de mes
études, mes frères "Soufiane, Tahar, Ridha, Rami et Abderrazak".*

*A mon binôme "ZERFAOUI Abdenour" à toute ma famille, je
dédie ce travail également à mes très chers amis :*

*Mondher, Nadjib, Siham, Nassim et Radouane pour leur amour
et fidélité durant mon parcours scolaire.*

*Sans oublier toutes mes amis et mes collègues ainsi que ceux qui
m'ont toujours aidé et encouragé.*

Khaireddine



Table des matières

Introduction générale	2
1 Rappels de notions de base	3
1.1 Système dynamique	3
1.2 Système différentiel d'ordre 1	3
1.3 Système différentiel autonome	4
1.4 Flot	4
1.5 Point critique	4
1.6 Système linéarisé et point critique hyperbolique	4
1.7 Nature des points critiques dans \mathbb{R}^2	5
1.8 Stabilité du point critique	7
1.9 Plan et portrait de phase	7
1.10 Cycle limite	8
1.11 Cycle limite hyperbolique	8
1.12 Solution périodique	8
1.13 Théorème de Bezout	8
2 Méthode de moyennisation	9
2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques	9
2.2 Autre méthode de moyennisation	10
3 Les solutions périodiques du problème lunaire spatial de Hill	12
3.1 Introduction et résultats principaux	12
3.2 Preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2	17
3.3 Preuve des Corollaires 3.1.1 et 3.1.2	21
4 Etude de l'existence de cycles limites pour une classe des systèmes différentiels polynomiaux en dimension 4	23
4.1 Introduction	23
4.2 Preuve du Théorème 4.1.1	26
4.3 Preuve de l'énoncé (a) du théorème 4.1.2	28
4.4 Preuve de l'énoncé (b) du théorème 4.1.2	31
4.5 Preuve de l'énoncé (a) du théorème 4.1.3	32

TABLE DES MATIÈRES

4.6 Preuve de l'énoncé (b) du théorème 4.1.3	34
Conclusion	36
Bibliographie	37

Introduction générale

Une étude complète des systèmes différentiels dans \mathbb{R}^2 nécessite, du point de vue qualitatif, de déterminer le nombre et la nature des points critiques, la structure séparatrice ainsi que le nombre et l'emplacement des trajectoires fermées. La troisième question reste le principal problème ouvert dans la théorie qualitative des systèmes différentiels dans \mathbb{R}^2 .

Dans l'étude de système différentiel de degré n dans \mathbb{R}^2

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

où P et Q sont des polynômes réels en les variables x et y , la détermination du nombre et de la position des cycles limites est connue comme la deuxième partie du seizième problème de Hilbert [13]. Soit \mathcal{H}_n le nombre maximum des cycles limites que peut avoir un système (1). Le nombre \mathcal{H}_n est connu sous le nom de nombre de Hilbert, et c'est toujours un problème ouvert de savoir si \mathcal{H}_n est fini ou non pour chaque $n \geq 2$. Pour connaître \mathcal{H}_n , une stratégie consiste à contrôler ses bornes inférieures en termes de n . Cela peut être fait en étudiant des familles particulières de systèmes différentiels polynomiaux de type (1), voir [10].

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres qui se présentent comme suit :

Dans le chapitre 1, nous donnons quelques notions de base sur les systèmes dynamiques et les systèmes différentiels.

Dans le chapitre 2, nous présentons deux théories importantes pour la méthode de moyennisation dont nous avons besoin dans ce travail.

Dans le chapitre 3, on utilise la méthode de moyennisation pour étudier l'existence des solutions périodiques du système différentiel non linéaire suivant

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 9x = \varepsilon F_1\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3y = \varepsilon F_2\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} + 4z = \varepsilon F_3\left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right), \end{cases}$$

où ε est un petit paramètre et $F_i, i \in \{1, 2, 3\}$ sont des fonctions lisses et périodiques en t qui définissent une perturbation en résonance $p : q$ avec certaines des solutions

périodiques du problème lunaire spatial de Hill étant p et q sont des entiers positifs relativement premiers.

Dans le dernier chapitre on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre pour étudier le nombre maximum de cycles limites pour une classe des systèmes différentiels polynomiaux en dimension 4.

Rappels de notions de base

Ce chapitre est un rappels de notions de base des systèmes dynamiques et systèmes différentiels.

1.1 Système dynamique

Définition 1.1.1 *Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que*

1. $\Psi(., x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
2. $\Psi(t, .) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
3. $\Psi(0, x) = x$,
4. $\Psi(t + s, x) = \Psi(t, \Psi(s, x))$ pour $t, s \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$

1.2 Système différentiel d'ordre 1

Définition 1.2.1 *On appelle système différentiel d'ordre 1 tout système de la forme*

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad (1.1)$$

avec

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, f(t, x(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t, x(t)) \\ \vdots \\ f_n(t, x(t)) \end{pmatrix},$$

où f_i sont des fonctions de la variable t définies et continues sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ à valeurs dans \mathbb{R} .

1.3 Système différentiel autonome

Définition 1.3.1 Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.2)$$

où l'expression $f(x)$ ne dépend pas de t , on dit que le système (1.2) est autonome.

1.4 Flot

Définition 1.4.1 Soit le système non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.3)$$

avec la condition initiale $x(0) = x_0, x_0 \in E, E$ est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Soit $\varphi(t, x_0)$ la solution de (1.3). L'ensemble des applications φ_t définies par

$$\varphi_t(x_0) = \varphi(t, x_0),$$

est appelé le flot de système différentiel (1.3).

Remarque 1.1 Le flot est dit autonome si f ne dépend pas explicitement du temps t , sinon il est dit non autonome.

1.5 Point critique

Définition 1.5.1 Le point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est appelé un point critique ou point d'équilibre du système (1.3) s'il vérifie

$$f(x_0) = 0,$$

1.6 Système linéarisé et point critique hyperbolique

Définition 1.6.1 On appelle système linéarisé de (1.3) au voisinage du point critique x_0 , le système

$$\dot{x} = Ax \text{ où } A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (1.4)$$

où $Df(x_0)$ est la jacobienne de f au point x_0 .

Définition 1.6.2 Le point critique x_0 est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de la matrice jacobienne $Df(x_0)$ n'a de partie réelle nulle.

1.7 Nature des points critiques dans \mathbb{R}^2

Soit le système différentiel linéaire (1.4) où A est une matrice 2×2 et soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :

1. Si λ_1 et λ_2 sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique $(0, 0)$ est un point selle, il est toujours instable (voir Fig 1.1)

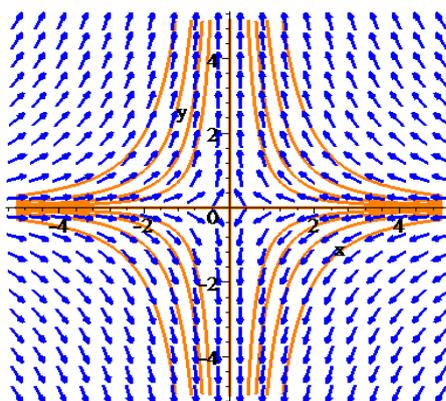


Fig 1.1. Selle

2. Si λ_1 et λ_2 sont réelles de même signe, on a trois cas :
 - (a) Si $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, le point critique $(0, 0)$ est un nœud stable (voir Fig 1.2).
 - (b) Si $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ le point critique $(0, 0)$ est un nœud instable (voir Fig 1.3).

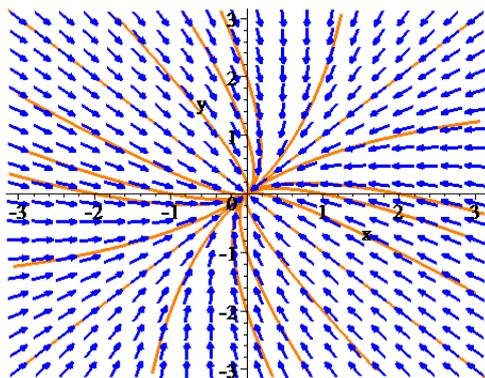


Fig 1.2. Nœud stable

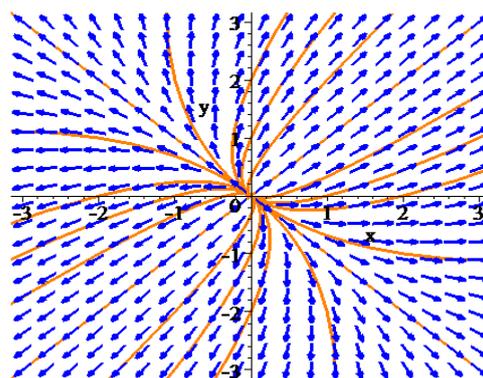


Fig 1.3. Nœud instable

- (c) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$, et A est diagonalisable alors le point critique $(0, 0)$ est un nœud propre, il est stable si $\lambda < 0$ et instable si $\lambda > 0$ (voir Fig 1.4 et 1.5).

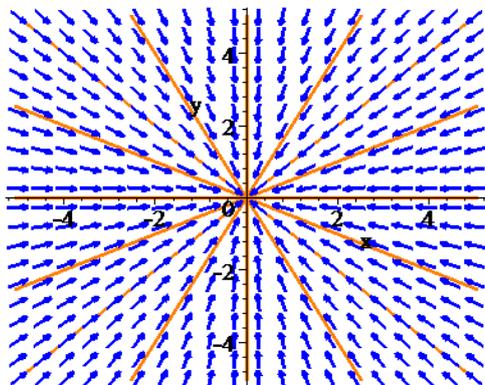


Fig 1.4. Nœud propre stable

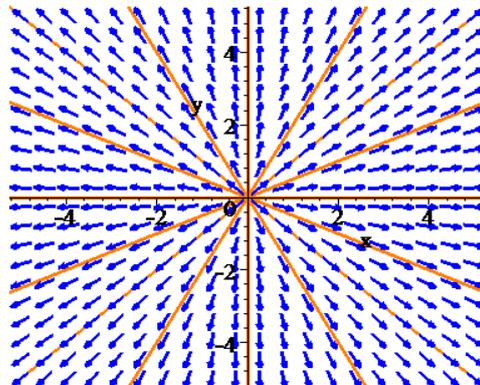


Fig 1.5. Nœud propre instable

3. Si λ_1 et λ_2 sont des complexes conjuguées et $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$, alors le point critique $(0,0)$ est un foyer. Il est stable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$ et instable si $\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$ (voir Fig 1.6 et 1.7).

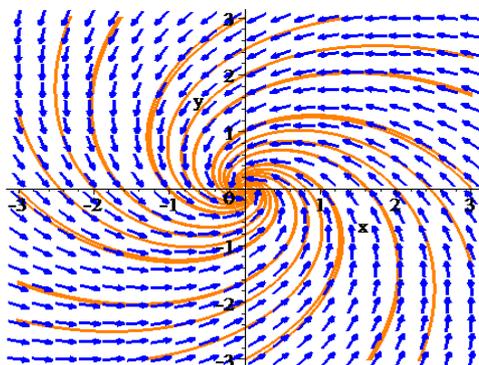


Fig 1.6. Foyer stable

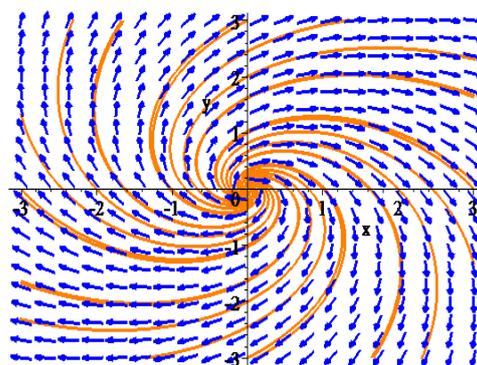


Fig 1.7. Foyer instable

Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires pures, alors le point critique $(0,0)$ est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir Fig 1.8).

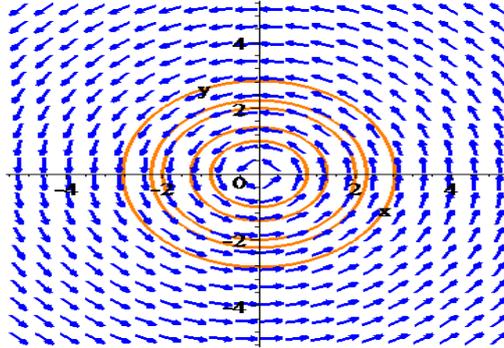


Fig 1.8. Centre

1.8 Stabilité du point critique

L'étude de la stabilité d'un point critique nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

Définition 1.8.1 Soit le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

Supposons que f satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution et soit $\phi(t)$ la solution du système (1.5).

On dit qu'un point critique p est stable si $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que si

$$\|\phi(t_0) - p\| < \delta \implies \|\phi(t) - p\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

Si il existe de plus un voisinage de p tel que pour tout x dans ce voisinage $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p$ alors le point d'équilibre p est dit asymptotiquement stable.

1.9 Plan et portrait de phase

Définition 1.9.1 Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.6)$$

un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.6) représentent dans le plan (xoy) des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (xoy) est le plan de phase.

1.10 Cycle limite

Définition 1.10.1 *Un cycle limite du système (1.6) est une orbite périodique isolée dans l'ensemble de toutes les orbites périodiques de ce système.*

Remarque 1.2 *Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.*

1.11 Cycle limite hyperbolique

Définition 1.11.1 *Supposons que le système (1.6) a une orbite périodique $(x(t), y(t))$ de période T . Soit*

$$\delta = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt.$$

Si $\delta > 0$ (resp. $\delta < 0$) alors l'orbite périodique $(x(t), y(t))$ est un cycle limite instable (respectivement stable). Une orbite périodique $(x(t), y(t))$ ayant $\delta \neq 0$ est un cycle limite hyperbolique.

1.12 Solution périodique

Définition 1.12.1 *On appelle solution périodique du système (1.3) toute solution $\xi(t) = x(t)$ qui n'est pas un point fixe et pour laquelle il existe un réel $T > 0$ tel que $\forall t \in [0, T], \xi(t + T) = \xi(t)$.*

Le plus petit nombre T qui convient s'appelle alors période de cette solution.

On peut définir les notions de stabilité, stabilité asymptotique et instabilité de la solution périodique en généralisant la définition relative à un point d'équilibre.

1.13 Théorème de Bezout

Théorème 1.13.1 [29] *Soient $P_j, j = 1, \dots, n$ des polynômes en ces variables (x_1, x_2, \dots, x_d) de degré $d_j, j = 1, \dots, n$. Considérons le système suivant*

$$\begin{cases} P_1(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ P_2(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ P_n(x_1, x_2, \dots, x_d) = 0, \end{cases}$$

où $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, si le nombre de solutions de ce système est fini, alors il est borné par

$$d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n.$$

Méthode de moyennisation

2.1 Méthode de moyennisation du premier ordre pour les orbites périodiques

Dans ce travail, on présente la méthode de moyennisation du premier ordre [6].

Théorème 2.1.1 *On considère le système différentiel suivant*

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.1)$$

où $F : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions continues, T -périodiques par rapport à la première variable et D est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . On définit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ comme suit

$$f(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F(s, z) ds, \quad (2.2)$$

et on suppose que

- (i) F et R sont localement Lipschitzienne par rapport à x .
- (ii) Pour $a \in D$ avec $f(a) = 0$, il existe un voisinage V de a tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \bar{V} \setminus \{a\}$ et $d_B(f, V, 0) \neq 0$.

Alors, pour $|\varepsilon| > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique isolée $\varphi(\cdot, \varepsilon)$ du système (2.1) tel que $\varphi(\cdot, \varepsilon) \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ici, nous aurons besoin de quelques faits issus de la preuve du Théorème 2.1.1. L'hypothèse (i) assure l'existence et l'unicité de la solution de chaque problème de valeur initiale sur l'intervalle $[0, T]$. Ainsi, pour chaque $z \in D$, on désigne par

2.2. AUTRE MÉTHODE DE MOYENNISATION

$x(\cdot, z, \varepsilon)$ la solution de (2.1) avec la valeur initiale $x(0, z, \varepsilon) = z$. On considère aussi la fonction $\zeta : D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f) \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\zeta(z, \varepsilon) = \int_0^T [\varepsilon F(t, x(t, z, \varepsilon)) + \varepsilon^2 R(t, x(t, z, \varepsilon), \varepsilon)] dt. \quad (2.3)$$

De la preuve du théorème 2.1.1, nous extrayons les remarques suivants.

Remarque 2.1 *Sous les hypothèses du Théorème 2.1.1 pour tout $z \in D$ la relation suivante est vérifiée*

$$x(T, z, \varepsilon) - x(0, z, \varepsilon) = \zeta(z, \varepsilon).$$

De plus, la fonction ζ peut s'écrire sous la forme

$$\zeta(z, \varepsilon) = \varepsilon f(z) + O(\varepsilon^2),$$

où f est donné par (2.2) et le symbole $O(\varepsilon^2)$ désigne une fonction bornée sur tout sous-ensemble compact de $D \times (-\varepsilon_f, \varepsilon_f)$ multiplié par ε^2 . De plus, pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit, $z = \varphi(0, \varepsilon)$ est un zéro isolé de $\zeta(\cdot, \varepsilon)$.

Remarque 2.2 *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 , avec $f(a) = 0$, où D est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $a \in D$. Chaque fois que a est un simple zéro de f (c'est-à-dire le jacobien de f en a n'est pas nul), alors il existe un voisinage V de a tel que $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \overline{V} \setminus \{a\}$. Alors $d_B(f; V, 0) \in \{-1, 1\}$.*

2.2 Autre méthode de moyennisation

On considère le problème de la bifurcation des solutions T -périodiques d'un système différentiel de la forme

$$\dot{x}(t) = G_0(t, x) + \varepsilon G_1(t, x) + \varepsilon^2 G_2(t, x, \varepsilon), \quad (2.4)$$

avec $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Les fonctions $G_0, G_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $G_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe C^2 et T -périodiques par rapport à la première variable, et Ω est un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . L'hypothèse principale est que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = G_0(t, x) \quad (2.5)$$

a une sous variété de solutions périodiques. Une solution de ce problème est donnée en utilisant la méthode de moyennisation.

Malkin (voir [5] et ses références) a étudié la bifurcation des solutions T -périodiques pour le système

$$\dot{x} = G_0(t, x) + \varepsilon G_1(t, x, \varepsilon),$$

dont le système non perturbé a une famille de solutions T -périodiques avec des conditions initiales données par une fonction lisse $\beta : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, et prouvé que si la fonction de bifurcation

$$\mathcal{G}(\alpha) = \int_0^T \begin{pmatrix} \langle u_1(t, \alpha), g(t, x(t, \beta(\alpha)), 0) \rangle \\ \dots \\ \langle u_k(t, \alpha), g(t, x(t, \beta(\alpha)), 0) \rangle \end{pmatrix} dt,$$

où $u_i, i = 1, \dots, k$, sont k solutions T -périodiques linéairement indépendantes du système différentiel linéarisé adjoint, a un simple zéro α_0 tel que $\det(\mathcal{G})|_{\alpha=\alpha_0} \neq 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le système

$$\dot{x} = G_0(t, x) + \varepsilon G_1(t, x, \varepsilon)$$

a une solution T -périodique unique x_ε telle que $x_\varepsilon(0) \rightarrow \beta(\alpha_0)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ceci peut être reformulé comme suit : Soit $x(t, z, \varepsilon)$ la solution du système non perturbé (2.5) telle que $x(0, z, \varepsilon) = z$. Nous écrivons la linéarisation du système non perturbé le long de la solution périodique $x(t, z, 0)$ comme suit

$$\dot{y} = D_x G_0(t, x(t, z, 0)) y. \quad (2.6)$$

Dans ce qui suit, nous désignons par $M_{\mathbf{z}}(t)$ une matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.6), et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées; c'est-à-dire $\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$.

Ensuite, une réponse au problème de la bifurcation des solutions périodiques pour le système (2.4) est donnée par les résultats suivants.

Théorème 2.2.1 *Soit V un sous-ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^k et soit $\beta : Cl(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 .*

On suppose que

(i) $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in Cl(V)\} \subset \Omega$ et pour tout $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ la solution $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)$ de (2.5) est T -périodique.

(ii) Pour tout $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ il y a une matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ de (2.6) telle que la matrice $M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(0) - M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le bloc supérieur droit matrice $k \times (n - k)$ nulle et dans le bloc inférieur droit la matrice $\Delta_\alpha(n - k) \times (n - k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$.

On considère la fonction $\mathcal{G} : Cl(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{G}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t) G_1(t, x(t, z_\alpha, 0)) dt \right). \quad (2.7)$$

S'il existe $a \in V$ avec $\mathcal{G}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{G}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $x(t, \varepsilon)$ du système (2.4) telle que $x(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour une preuve du théorème 2.2.1 voir Malkin [21] et Roseau [28], ou [4] pour une preuve alternative.

Les solutions périodiques du problème lunaire spatial de Hill

3.1 Introduction et résultats principaux

Nous allons travailler dans un cas particulier du problème à trois corps restreints. Le problème restreint est modifié en cinq versions :

1. Le problème circulaire planaire à trois corps restreints, lorsque les primaires tournent en orbite circulaire autour de leur centre de masse commun et que le troisième corps se déplace dans le même plan.
2. Si le mouvement des primaires n'est pas circulaire et ont une section conique, le cas important est celui où les primaires se déplacent sur des orbites elliptiques autour du centre de leurs masses. Dans ce cas, il est appelé problème elliptique ou pseudo restreint.
3. Lorsque le troisième corps sort du plan des primaires, le problème est appelé problème à trois dimensions. Ce problème est applicable dans l'étude des orbites Pour certaines planètes mineures avec une forte inclinaison vers l'écliptique.
4. Si les masses des primaires ou du troisième corps varient avec le temps. Il est appelé problème restreint à masse variable et a des applications importantes dans la dynamique stellaire et la cosmologie.
5. Si le rapport de masse du plus petit primaire à la somme des masses des primaires est très petit et peut avoir tendance à zéro, le problème est appelé problème de Hill. Dans ce cas, les problèmes avec un très petit rapport de masse apparaissent comme des problèmes perturbés pour le problème à deux corps.

CHAPITRE 3. LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU PROBLÈME LUNAIRE SPATIAL DE HILL

Nous concentrerons notre attention sur le cas du problème lunaire spatial perturbé de Hill. Ce problème est très important du point de vue astrophysique, voir par exemple [1, 16, 17, 26, 27, 22, 23, 30].

Les équations de mouvement du problème lunaire spatial de Hill sont données comme suit

$$\begin{cases} \frac{d^2 q_1}{dt^2} - 2 \frac{dq_2}{dt} - 3q_1 + \frac{q_1}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{3/2}} = 0, \\ \frac{d^2 q_2}{dt^2} + 2 \frac{dq_1}{dt} + \frac{q_2}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{3/2}} = 0, \\ \frac{d^2 q_3}{dt^2} + q_3 + \frac{q_3}{(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{3/2}} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

(voir [24]). Les solutions d'équilibre des équations différentielles précédentes sont données par $\mathcal{L}_1 = (q_1, q_2, q_3) = (3^{-1/3}, 0, 0)$ et $\mathcal{L}_2 = (\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{q}_3) = (-3^{-1/3}, 0, 0)$. Dans ce travail, nous fournissons des conditions suffisantes pour l'existence de solutions périodiques émergeant de l'équilibre \mathcal{L}_1 . Les mêmes sont valables pour \mathcal{L}_2 .

Le problème de l'étude de l'existence de solutions périodiques qui proviennent de solutions d'équilibre de systèmes d'équations différentielles est un problème classique dans la littérature, voir pour plus d'informations [24].

Il est bien connu l'existence d'orbites périodiques émergeant des points eulériens dans le problème des trois corps restreints et dans le problème de Hill aussi. Pour les preuves de ces résultats, le principal outil utilisé est le théorème du centre de Lyapunov ou certaines de ses variantes, voir pour plus de détails [24] et [3].

Mais dans certains cas où les forces perturbatives impliquées ne sont pas conservatrices, les théorèmes de type Lyapunov ne fonctionnent pas. C'est exactement le cas que nous allons traiter dans le présent travail.

En utilisant le changement de variable $(x, y, z) = (q_1 - 3^{-1/3}, q_2, q_3)$, et la linéarisation des équations différentielles (3.1), on obtient

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - 9x = 0, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 3y = 0, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + 4z = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans ce travail nous utilisons la méthode de moyennisation pour étudier l'existence des solutions périodiques du système différentiel non linéaire

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \frac{dy}{dt} - 9x = \varepsilon F_1 \left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right), \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 3y = \varepsilon F_2 \left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right), \\ \frac{d^2 z}{dt^2} + 4z = \varepsilon F_3 \left(t, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right), \end{cases} \quad (3.3)$$

3.1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

où ε est un petit paramètre et les fonctions lisses F_1, F_2 et F_3 définissent la perturbation. Ces fonctions sont périodiques en t et en résonance $p : q$ avec certaines des solutions périodiques de (3.2), avec p et q sont des entiers positifs relativement premiers.

Le système non perturbé (3.2) a un point singulier unique à l'origine avec des valeurs propres

$$\pm\lambda, \pm\omega_1 i, \pm\omega_2 i$$

avec $\lambda = \sqrt{2\sqrt{7} + 1}$, $\omega_1 = \sqrt{2\sqrt{7} - 1}$ et $\omega_2 = 2$. Ce système dans l'espace des phases $\left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}, z, \frac{dz}{dt}\right)$ a deux plans de solutions périodiques à l'exception de l'origine. Ces solutions périodiques ont des périodes comme suit

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{or} \quad T_2 = \pi,$$

selon qu'ils appartiennent au plan associé aux vecteurs propres avec des valeurs propres $\pm\omega_1 i$ ou $\pm\omega_2 i$, respectivement. Nous étudierons laquelle de ces solutions périodiques persiste pour le système perturbé (3.3) lorsque le paramètre ε est suffisamment petit et que les fonctions perturbées F_i pour $i \in \{1, 2, 3\}$ ont une période pT_1/q , ou pT_2/q , où p et q sont des entiers positifs relativement premiers.

Soit $Z^0 = (Z_1^0, Z_2^0)$, et on considère la fonction $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)$ telle que

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(Z^0) &= \frac{1}{pT_2} \int_0^{pT_2} \langle (\cos(\omega_2 t), -\sin(\omega_2 t)), (F_5^*(t), F_6^*(t)) \rangle dt \\ &= \frac{1}{pT_2} \int_0^{pT_2} \cos(\omega_2 t) F_5^*(t) dt, \\ \mathcal{G}_2(Z^0) &= \frac{1}{pT_2} \int_0^{pT_2} \langle (\sin(\omega_2 t), \cos(\omega_2 t)), (F_5^*(t), F_6^*(t)) \rangle dt \\ &= \frac{1}{pT_2} \int_0^{pT_2} \sin(\omega_2 t) F_5^*(t) dt, \end{aligned} \tag{3.4}$$

où \langle, \rangle est le produit scalaire et

$$F_5^*(t) = \frac{1}{2} F_3,$$

avec $F_3 = F_3(\sigma_1^2(t), \dots, \sigma_6^2(t))$, et $\sigma_j^2(t) = 0, j = 1, \dots, 4$,

$$\begin{aligned} \sigma_5^2(t) &= -Z_2^0 \cos(\omega_2 t) - Z_1^0 \sin(\omega_2 t), \\ \sigma_6^2(t) &= 2(Z_1^0 \cos(\omega_2 t) + Z_2^0 \sin(\omega_2 t)) \end{aligned}$$

et $F_6^*(t) = 0$. Un zéro $Z^{0*} = (Z_1^{0*}, Z_2^{0*})$ du système non linéaire $\mathcal{G}(Z^0) = 0$ tel que

$$\det \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Z^0} \Big|_{Z^0=Z^{0*}} \right) \neq 0,$$

s'il existe un zéro simple Z^{0*} de la fonction \mathcal{G} , alors de la solution T_2 -périodique du système non perturbé avec une valeur initiale Z^{0*} émane une branche de solutions T_2 -périodiques du système perturbé, voir [5].

Théorème 3.1.1 *Soit p et q des entiers positifs relativement premiers et supposons que les fonctions lisses F_1, F_2 et F_3 des équations de mouvement de (3.3) sont périodiques en t et de période pT_2/q . Alors, pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour tout zéro simple $Z^{0*} \neq 0$ du système non linéaire $\mathcal{G}(Z^0) = 0$, le système perturbé (3.3) a une solution périodique $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ tendant vers la solution périodique $(x(t), y(t), z(t)) = (\sigma_1^2(t), \sigma_3^2(t), \sigma_5^2(t))|_{Z^0=Z^{0*}}$ du système non perturbé (3.2) a parcouru p fois.*

Le théorème 3.1.1 est prouvé dans la section 3.2. Sa démonstration est basée sur la méthode de moyennisation pour le calcul des solutions périodiques (voir [5, 8, 12, 15] et [14] où différents problèmes sont traités avec cet outil ou des outils similaires).

Une application du théorème 3.1.1 est présentée dans le corollaire suivant, qui sera prouvé dans la section 3.3.

Corollaire 3.1.1 *On suppose que $F_1(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = f(t)$, $F_2(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = g(t)$, $F_3(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = z^3 + \sin(\omega_2 t)(z^2 - \dot{z}^2)$ où $f(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions lisses arbitraires. Alors, le système (3.3), pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, a deux solutions périodiques $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ tendant vers la solution périodique $(x(t), y(t), z(t)) = (\sigma_1^2(t), \sigma_3^2(t), \sigma_5^2(t))|_{Z^0=Z^{0*}}$ de (3.2) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, donné par $Z^{0*} = (\frac{1}{3}, 0)$.*

Soit $Y^0 = (Y_1^0, Y_2^0)$, et considérons la fonction $\bar{\mathcal{G}} = (\mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4)$ pour le système (3.3) donné par : (voir [5]).

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3(Y^0) &= \frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} \langle (\cos(\omega_1 t), -\sin(\omega_1 t)), (F_3^*(t), F_4^*(t)) \rangle dt \\ &= \frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} (\cos(\omega_1 t) F_3^*(t) - \sin(\omega_1 t) F_4^*(t)) dt, \\ \mathcal{G}_4(Y^0) &= \frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} \langle (\sin(\omega_1 t), \cos(\omega_1 t)), (F_3^*(t), F_4^*(t)) \rangle dt \\ &= \frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} (\cos(\omega_1 t) F_4^*(t) + \sin(\omega_1 t) F_3^*(t)) dt, \end{aligned}$$

3.1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

où

$$F_3^*(t) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{7}} \right) F_2, F_4^*(t) = -\frac{1}{4} \sqrt{-\frac{1}{7} + \frac{2}{\sqrt{7}}} F_1,$$

avec $F_i = F_i(\sigma_1^1(t), \dots, \sigma_6^1(t))$, $i = 3, 4$, et

$$\sigma_1^1(t) = \frac{2}{9} \left(\sqrt{7} - 4 \right) (Y_1 \cos(\omega_1 t) + Y_2 \sin(\omega_1 t)),$$

$$\sigma_2^1(t) = -\frac{(4 - 2\sqrt{7})(Y_2 \cos(\omega_1 t) - Y_1 \sin(\omega_1 t))}{\omega_1},$$

$$\sigma_3^1(t) = -\frac{2(Y_2 \cos(\omega_1 t) - Y_1 \sin(\omega_1 t))}{\omega_1},$$

$$\sigma_4^1(t) = 2(Y_1 \cos(\omega_1 t) + Y_2 \sin(\omega_1 t)),$$

$$\sigma_5^1(t) = \sigma_6^1(t) = 0.$$

Comme nous l'avons dit, s'il existe un zéro simple Y^{0*} de la fonction $\bar{\mathcal{G}}$, alors de la solution T_1 -périodique du système non perturbé de valeur initiale Y^{0*} émane une branche de T_1 -solutions périodiques du système perturbé, voir [5].

L'énoncé de notre résultat principal sur les solutions périodiques du système différentiel (3.3) qui bifurquent des solutions périodiques de période T_1 du système non perturbé parcouru p fois est le suivant.

Théorème 3.1.2 *Soit p et q des entiers positifs relativement premiers et supposons que les fonctions lisses F_1, F_2 et F_3 des équations de mouvement de (3.3) sont périodiques en t et de période pT_1/q . Alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour tout zéro simple $Y^{0*} \neq 0$ du système non linéaire $\bar{\mathcal{G}}(Y^0) = 0$, le système perturbé (3.3) a une solution périodique $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ tendant vers la solution périodique $(x(t), y(t), z(t)) = (\sigma_1^1(t), \sigma_3^1(t), \sigma_5^1(t))|_{Y^0=Y^{0*}}$ du système non perturbé (3.2) a parcouru p fois.*

Dans le corollaire suivant, nous proposons une application du théorème 3.1.2.

Corollaire 3.1.2 *On suppose que $F_1(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = \sin(\omega_1 t) - x^2 - xy + y^2 + f_1(z) + g_1(\dot{z})$, $F_2(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = \cos(\omega_1 t)y - \dot{y}^2 + x + f_2(z) + g_2(\dot{z})$, $F_3(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = h(t)$ où $f_1(z)$, $f_2(z)$, $g_1(\dot{z})$, $g_2(\dot{z})$ et $h(t)$ sont des fonctions arbitraires. Alors le système (3.3) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit a une solution périodique $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$ tendant aux solutions périodiques $(x(t), y(t), z(t)) = (\sigma_1^1(t), \sigma_3^1(t), \sigma_5^1(t))|_{Y^0=Y^{0*}}$ de (3.2) lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, donné par $Y^{0*} = (\frac{1}{2}\omega_1, 0)$.*

Remarque 3.1 *On note que le rapport des fréquences ω_2/ω_1 ne résonne pas avec π . En effet, pour prouver nos résultats, nous aurons besoin d'un certain déterminant soit non nul et cela se produira si seulement $\sin^2(\pi\omega_2/\omega_1) \neq 0$. Cependant, si le déterminant était nul, nous aurions $\pi\omega_2/\omega_1 = k\pi$, k entier. Mais cela impliquerait que $\sqrt{7}$ serait un nombre rationnel, ce qui n'est pas le cas. Ainsi, la condition non résonnante sur le rapport ω_2/ω_1 est automatiquement satisfaite et n'a pas besoin d'être mentionnée dans les énoncés des résultats.*

3.2 Preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2

Si $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = \left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}, z, \frac{dz}{dt}\right)$ le système différentiel (3.3) peut être écrit sous la forme

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 9x_1 + 2y_2 + \varepsilon F_1(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2), \\ \frac{dy_1}{dt} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = -2x_2 - 3y_1 + \varepsilon F_2(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2), \\ \frac{dz_1}{dt} = z_2, \\ \frac{dz_2}{dt} = -4z_1 + \varepsilon F_3(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2), \end{cases} \quad (3.5)$$

Notons que le système différentiel (3.5) lorsque $\varepsilon = 0$ est équivalent au système différentiel (3.2), appelé le système non perturbé. Si $\varepsilon \neq 0$ appelé le système perturbé. Le changement des variables $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) \rightarrow (x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)$ donné par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} & -\frac{2}{9}\Phi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{2\Phi_1}{\omega_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}\Phi_1 & \frac{1}{3}\Phi_1 & 0 & -\frac{\omega_1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\Phi_2}{\lambda} & \frac{\Phi_2}{\lambda} & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

où $\Phi_1 = 2 - \sqrt{7}$ et $\Phi_2 = 4 - \sqrt{7}$.

On écrit la partie linéaire du système différentiel (3.5) sous sa forme normale réelle de Jordan, et ce système dans les nouvelles variables $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ devient

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \lambda \bar{x}_1 + \varepsilon F_1^*, \\ \dot{\bar{x}}_2 = -\lambda \bar{x}_2 + \varepsilon F_2^*, \\ \dot{\bar{y}}_1 = \omega_1 \bar{y}_2 + \varepsilon F_3^*, \\ \dot{\bar{y}}_2 = -\omega_1 \bar{y}_1 + \varepsilon F_4^*, \\ \dot{\bar{z}}_1 = \omega_2 \bar{z}_2 + \varepsilon F_5^*, \\ \dot{\bar{z}}_2 = -\omega_2 \bar{z}_1 + \varepsilon F_6^*, \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2. PREUVE DES THÉORÈMES 3.1.1 ET 3.1.2

où

$$\begin{aligned}
 F_1^* &= \frac{1}{28} \left((7 + 2\sqrt{7}) F_1 + \sqrt{7 + 14\sqrt{7}} F_2 \right), \\
 F_2^* &= \frac{1}{28} \left((7 + 2\sqrt{7}) F_1 - \sqrt{7 + 14\sqrt{7}} F_2 \right), \\
 F_3^* &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{7}} \right) F_2, \\
 F_4^* &= -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{7}} - \frac{1}{7}} F_1, \\
 F_5^* &= \frac{F_3}{2}, \\
 F_6^* &= 0,
 \end{aligned}$$

avec $F_i = F_i(\sigma_1, \dots, \sigma_6)$ et

$$\begin{aligned}
 \sigma_1 &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{1 + 2\sqrt{7}}} + \frac{2}{9} (\sqrt{7} - 4) y_1, \\
 \sigma_2 &= x_1 + x_2 - 2\sqrt{\frac{1}{3}} (2\sqrt{7} - 5) y_2, \\
 \sigma_3 &= \frac{1}{9} \left(-3(\sqrt{7} - 2) x_1 - 3(\sqrt{7} - 2) x_2 - 2\sqrt{3 + 6\sqrt{7}} y_2 \right), \\
 \sigma_4 &= \frac{(\sqrt{7} - 4) x_1 - (\sqrt{7} - 4) x_2 + 2\sqrt{1 + 2\sqrt{7}} y_1}{\sqrt{1 + 2\sqrt{7}}}, \\
 \sigma_5 &= -z_2, \\
 \sigma_6 &= 2z_1.
 \end{aligned}$$

Lemme 3.2.1 *Les solutions périodiques $(\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t))$ du système différentiel (3.7) avec $\varepsilon = 0$ sont*

$$(0, 0, Y_1^0 \cos(\omega_1 t) + Y_2^0 \sin(\omega_1 t), Y_2^0 \cos(\omega_1 t) - Y_1^0 \sin(\omega_1 t), 0, 0), \quad (3.8)$$

de la période T_1 , et

$$(0, 0, 0, 0, Z_1^0 \cos(\omega_2 t) + Z_2^0 \sin(\omega_2 t), Z_2^0 \cos(\omega_2 t) - Z_1^0 \sin(\omega_2 t)), \quad (3.9)$$

de la période T_2 .

Preuve du Théorème 3.1.1. On suppose que les fonctions F_1, F_2 et F_3 de (3.3) sont périodiques en t de la période pT_2/q avec p et q des entiers positifs relativement premiers. Alors, on peut considérer que le système différentiel (3.7) et les solutions périodiques (3.9) ont la même période pT_2 .

Nous allons appliquer le théorème 2.2.1 du chapitre 2 au système différentiel (3.7), et nous utilisons la notation qui y est introduite. Notez que le système (3.7) peut être écrit sous la forme d'un système (2.4) prenant

$$x = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}, G_0(t, x) = \begin{pmatrix} \lambda \bar{x}_1 \\ -\lambda \bar{x}_2 \\ \omega_1 \bar{y}_2 \\ -\omega_1 \bar{y}_1 \\ \omega_2 \bar{z}_2 \\ -\omega_2 \bar{z}_1 \end{pmatrix}, G_1(t, x) = \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ F_3^* \\ F_4^* \\ F_5^* \\ F_6^* \end{pmatrix}, G_2(t, x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous allons maintenant étudier quelles solutions périodiques du système non perturbé (3.7) avec $\varepsilon = 0$ de type (3.9) persistent comme solutions périodiques pour le perturbé pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit.

Nous commençons par la description des différents éléments qui apparaissent dans l'énoncé du théorème 2.2.1 pour le cas particulier du système différentiel (3.7). Ainsi, nous avons $\Omega = \mathbb{R}^6$, $k = 2$ et $n = 6$. Maintenant, soit $r_1 > 0$ arbitrairement petit et soit $r_2 > 0$ arbitrairement grand. Soit V un sous ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^2 de la forme $V = \left\{ (0, 0, 0, 0, Z_1^0, Z_2^0) \in \mathbb{R}^6 : r_1 < \sqrt{(Z_1^0)^2 + (Z_2^0)^2} < r_2 \right\}$. Comme d'habitude, $Cl(V)$ désigne la fermeture de V . Si $\alpha = (Z_1^0, Z_2^0)$, alors on identifie V avec l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{R}^2 : r_1 < \|\alpha\| < r_2\}$, ici $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 . La fonction $\beta : Cl(V) \rightarrow \mathbb{R}^4$ est $\beta(\alpha) = (0, 0, 0, 0)$. Par conséquent, pour notre système, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \{z_\alpha = (\beta(\alpha), \alpha), \alpha \in Cl(V)\}, \\ &= \left\{ (0, 0, 0, 0, Z_1^0, Z_2^0) \in \mathbb{R}^6 : r_1 \leq \sqrt{(Z_1^0)^2 + (Z_2^0)^2} \leq r_2 \right\}. \end{aligned}$$

On considère pour chaque $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ la solution périodique

$$\mathbf{x}(t, z_\alpha) = (0, 0, 0, 0, Z_1(t), Z_2(t)),$$

donnée par (3.9) de période pT_2 .

La matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(t)$ du système linéaire (3.7) avec $\varepsilon = 0$ associé à la solution pT_2 -périodique $z_\alpha = (0, 0, 0, 0, Z_1^0, Z_2^0)$ telle que $M_{z_\alpha}(0) = I$ est

$$M_{z_\alpha}(t) = M(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\lambda t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\omega_2 t) & \sin(\omega_2 t) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\omega_2 t) & \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}.$$

3.2. PREUVE DES THÉORÈMES 3.1.1 ET 3.1.2

On remarque que la matrice $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ ne dépend pas de la solution périodique particulière $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha, 0)$.

$$\text{La matrice } M^{-1}(0) - M^{-1}(pT_2) = \begin{pmatrix} \frac{2\pi\lambda p}{1 - e^{-\frac{2\pi\lambda p}{\omega_2}}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi\lambda p}{\omega_2}} - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \sin^2\left(\frac{\pi p \omega_1}{\omega_2}\right) & \sin\left(\frac{2\pi p \omega_1}{\omega_2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\left(\frac{2\pi p \omega_1}{\omega_2}\right) & 2 \sin^2\left(\frac{\pi p \omega_1}{\omega_2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \sin^2(\pi p) & \sin(2\pi p) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(2\pi p) & 2 \sin^2(\pi p) \end{pmatrix},$$

satisfait aux hypothèses de l'énoncé (ii) du théorème 2.2.1 car le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{2\pi\lambda p}{1 - e^{-\frac{2\pi\lambda p}{\omega_2}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi\lambda p}{\omega_2}} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \sin^2\left(\frac{\pi p \omega_1}{\omega_2}\right) & \sin\left(\frac{2\pi p \omega_1}{\omega_2}\right) \\ 0 & 0 & -\sin\left(\frac{2\pi p \omega_1}{\omega_2}\right) & 2 \sin^2\left(\frac{\pi p \omega_1}{\omega_2}\right) \end{vmatrix} \\ = 16 \sinh^2\left(\frac{\pi\lambda p}{\omega_2}\right) \sin^2\left(\frac{\pi p \omega_1}{\omega_2}\right) \neq 0,$$

car le rapport des fréquences est non résonnant avec π , voir la remarque 3.1.1. En bref, toutes les hypothèses du théorème 2.2.1 sont satisfaites par le système (3.7).

Pour notre système, la fonction $\xi : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a la forme $\xi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = (\bar{z}_1, \bar{z}_2)$.

Calculons maintenant la fonction

$$\mathcal{G}(Z_1^0, Z_2^0) = \mathcal{G}(\alpha) = \xi\left(\frac{1}{pT_2} \int_0^{pT_2} M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t) G_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha, 0)) dt\right),$$

où $\mathcal{G}(Z^0) = (\mathcal{G}_1(Z^0), \mathcal{G}_2(Z^0))$. Alors, par le théorème 2.2.1 nous avons pour tout zéro simple $Z^{0*} \in V$ du système de fonctions non linéaires $(\mathcal{G}_1(Z^0), \mathcal{G}_2(Z^0)) = (0, 0)$, nous avons une solution périodique $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)(t, \varepsilon)$ du système (3.7) tel que

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)(0, \varepsilon) \rightarrow (0, 0, 0, 0, Z_1^{0*}, Z_2^{0*}) \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

En revenant sur le changement de coordonnées (3.6), nous obtenons une solution périodique $(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2)(t, \varepsilon)$ du système (3.7) telle que

$$\begin{pmatrix} x_1(t, \varepsilon) \\ x_2(t, \varepsilon) \\ y_1(t, \varepsilon) \\ y_2(t, \varepsilon) \\ z_1(t, \varepsilon) \\ z_2(t, \varepsilon) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Z_2^{0*} \cos(\omega_2 t) + Z_1^{0*} \sin(\omega_2 t) \\ \omega_2 (Z_1^{0*} \cos(\omega_2 t) + Z_2^{0*} \sin(\omega_2 t)) \end{pmatrix} \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On obtient donc une solution périodique $(x, y, z)(t, \varepsilon)$ du système (3.3) telle que

$$(x, y, z)(t, \varepsilon) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Z_2^{0*} \cos(\omega_2 t) + Z_1^{0*} \sin(\omega_2 t) \end{pmatrix} \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Ceci complète la preuve du théorème 3.1.1. ■

Preuve du Théorème 3.1.2.. La preuve est analogue à la preuve du théorème 3.1.1. En changeant les rôles de T_2 pour T_1 , et on obtient la solution périodique

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{9} (\sqrt{7} - 4) (Y_1 \cos(\omega_1 t) + Y_2 \sin(\omega_1 t)) \\ ((4 - 2\sqrt{7}) (Y_2 \cos(\omega_1 t) - Y_1 \sin(\omega_1 t))) / \omega_1 \\ - (2 (Y_2 \cos(\omega_1 t) - Y_1 \sin(\omega_1 t))) / \omega_1 \\ 2 (Y_1 \cos(\omega_1 t) + Y_2 \sin(\omega_1 t)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

On obtient donc une solution périodique $(x, y, z)(t, \varepsilon)$ du système (3.3) telle que

$$(x, y, z)(t, \varepsilon) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{9} (\sqrt{7} - 4) (Y_1 \cos(\omega_1 t) + Y_2 \sin(\omega_1 t)) \\ - (2 (Y_2 \cos(\omega_1 t) - Y_1 \sin(\omega_1 t))) / \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ lorsque } \varepsilon \rightarrow 0.$$

■

3.3 Preuve des Corollaires 3.1.1 et 3.1.2

Preuve du Corollaire 3.1.1.. Sous les hypothèses du corollaire 3.1.1, le système non linéaire (3.4) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(Z_1^0, Z_2^0) &= \frac{-1}{16} Z_2^0 \left(2Z_1^0 + 3(Z_1^0)^2 + 3(Z_2^0)^2 \right) = 0, \\ \mathcal{G}_2(Z_1^0, Z_2^0) &= \frac{1}{16} \left(- (Z_1^0)^2 + 3(Z_1^0)^3 - 11(Z_2^0)^2 + 3Z_1^0 (Z_2^0)^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

3.3. PREUVE DES COROLLAIRES 3.1.1 ET 3.1.2

Ce système a la solution suivante

$$Z^{0*} = \left(\frac{1}{3}, 0 \right).$$

De plus, depuis

$$\det \left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial Z^0} \right) \Big|_{Z^{0*} = (\frac{1}{3}, 0)} = \frac{1}{768} \neq 0,$$

cette solution est simple. Enfin, d'après le théorème 3.1.2, nous n'avons qu'une seule solution périodique pour ce système. ■

Preuve du Corollaire 3.1.2. Sous les hypothèses du corollaire 3.1.2, le système non linéaire $\bar{\mathcal{G}}(Y^0) = 0$ devient

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3(Y_1^0, Y_2^0) &= -\frac{\sqrt{7}}{28}Y_1^0 + \frac{\sqrt{-7 + 14\sqrt{7}}}{56} = 0, \\ \mathcal{G}_4(Y_1^0, Y_2^0) &= -\frac{\sqrt{7}}{28}Y_2^0 = 0. \end{aligned}$$

Ce système a la solution suivante

$$Y^{0*} = \left(\frac{1}{2}\omega_1, 0 \right).$$

De plus, depuis

$$\det \left(\frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial Y^0} \right) \Big|_{Y^{0*} = (\frac{1}{2}\omega_1, 0)} = \frac{1}{112} \neq 0$$

cette solution est simple. Enfin, d'après le théorème 3.1.2, nous n'avons qu'une seule solution périodique pour ce système et la preuve est terminée. ■

Etude de l'existence de cycles limites pour une classe des systèmes différentiels polynomiaux en dimension 4

4.1 Introduction

L'objectif de ce travail est d'étudier la bifurcation de Hopf en un point critique p des systèmes différentiels de classes \mathcal{C}^3 et \mathcal{C}^4 dans \mathbb{R}^4 avec une partie linéaire donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

avec $\beta/\alpha = 1/2$, et un système différentiel de classe \mathcal{C}^5 dans \mathbb{R}^4 ayant une partie linéaire donnée par (4.1) et $\beta/\alpha = 3/2$. Plus précisément nous montrerons qu'il existe des systèmes différentiels de classe \mathcal{C}^3 ayant 0 ou 1 famille d'orbites périodiques à un paramètre bifurquant du point critique p qu'il existe des systèmes différentiels de classe \mathcal{C}^4 ayant 0, 1, 2, 3, ou 4 familles à un paramètre d'orbites périodiques bifurquant à partir du point critique p , et qu'il existe des systèmes différentiels de classe \mathcal{C}^5 ayant 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 familles à un paramètre d'orbites périodiques bifurquantes à partir du point critique p .

Nous n'évoquons que brièvement quelques-unes des principales étapes de l'histoire de l'étude de la bifurcation de Hopf en ce genre de points critiques. En 1895 Liapunov (voir [2] p 498) a prouvé que si la partie linéaire en un point critique d'un champ de vecteurs hamiltonien analytique a des valeurs propres $\pm\alpha_k i$ pour $k = 1, \dots, n$ qui sont linéairement indépendantes des nombres entiers (c'est-à-dire

4.1. INTRODUCTION

non résonnante), alors n familles à un paramètre d'orbites périodiques bifurquent à partir de ce point critique. En 1973 Weinstein [31] a amélioré le résultat de Liapunov en incluant les hamiltoniens résonnants, mais avec l'hypothèse supplémentaire que le Hessienne est défini positivement. En 1976 Moser [25] a généralisé le résultat de Weinstein à des systèmes ayant une première intégrale avec Hessienne définie positivement, pas nécessairement hamiltonienne. En 1976 Devaney [11] a donné une version du théorème de Lyapunov pour les systèmes qui sont purement réversibles (pas nécessairement hamiltoniens), en supposant que les valeurs propres sont simples. A notre connaissance, la *bifurcation de Hopf* en un point critique p d'un système différentiel de classe \mathcal{C}^3 ou \mathcal{C}^4 (respectivement \mathcal{C}^5) dans \mathbb{R}^4 ayant une partie linéaire (4.1) dans la résonance $1/2$ (respectivement $3/2$) n'a pas été étudiée. Bien sûr, en faisant une translation des coordonnées on peut supposer que le point critique p est à l'origine des coordonnées, et en faisant un redimensionnement de la variable de temps sans perte de généralité on peut supposer que $\alpha = 1$ et $\beta = 1/2$ (respectivement $\alpha = 1$ et $\beta = 3/2$).

Nous ne caractérisons pas toutes les *bifurcations de Hopf* possibles pour ce type de systèmes différentiels de classe \mathcal{C}^k , $k = 3, 4, 5$. Nous prouvons seulement qu'il existe des classes de systèmes différentiels de classe \mathcal{C}^3 ayant 0 ou 1 famille de paramètres d'orbites périodiques bifurquant à partir de l'origine, qu'il existe des classes de systèmes différentiels de classe \mathcal{C}^4 ayant 0, 1, 2, 3 ou 4 familles de paramètres périodiques orbites bifurquantes depuis l'origine, et qu'il existe des systèmes différentiels de classe \mathcal{C}^5 ayant 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 familles à un paramètre d'orbites périodiques bifurquant depuis l'origine. Puisque pour prouver de tels résultats, nous utiliserons la méthode de moyennisation du premier ordre, nous devons choisir soigneusement la classe de systèmes différentiels à étudier. Ainsi, nous traitons le système différentiel de classe \mathcal{C}^3

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon A_1 + A_2 + \bar{A}_3, \\ \dot{y} = x + \varepsilon B_1 + B_2 + \bar{B}_3, \\ \dot{z} = -\frac{1}{2}w + \varepsilon C_1 + C_2 + \bar{C}_3, \\ \dot{w} = \frac{1}{2}z + \varepsilon D_1 + D_2 + \bar{D}_3, \end{cases} \quad (4.2)$$

le système différentiel de classe \mathcal{C}^4

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon^2 A_1 + \varepsilon A_2 + A_3 + \bar{A}_4, \\ \dot{y} = x + \varepsilon^2 B_1 + \varepsilon B_2 + B_3 + \bar{B}_4, \\ \dot{z} = -\frac{1}{2}w + \varepsilon^2 C_1 + \varepsilon C_2 + C_3 + \bar{C}_4, \\ \dot{w} = \frac{1}{2}z + \varepsilon^2 D_1 + \varepsilon D_2 + D_3 + \bar{D}_4, \end{cases} \quad (4.3)$$

et le système différentiel de classe \mathcal{C}^5

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \varepsilon^3 A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \varepsilon A_3 + A_4 + \bar{A}_5, \\ \dot{y} = x + \varepsilon^3 B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \varepsilon B_3 + B_4 + \bar{B}_5, \\ \dot{z} = -\frac{3}{2}w + \varepsilon^3 C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon C_3 + C_4 + \bar{C}_5, \\ \dot{w} = \frac{3}{2}z + \varepsilon^3 D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \varepsilon D_3 + C_4 + \bar{D}_5, \end{cases} \quad (4.4)$$

où

$$\begin{aligned} A_r &= \sum_{i+j+k+l=r} a_{ijkl} x^i y^j z^k w^l, \\ B_r &= \sum_{i+j+k+l=r} b_{ijkl} x^i y^j z^k w^l, \\ C_r &= \sum_{i+j+k+l=r} c_{ijkl} x^i y^j z^k w^l, \\ D_r &= \sum_{i+j+k+l=r} d_{ijkl} x^i y^j z^k w^l, \end{aligned}$$

pour $r = 1, 2, 3, 4$. Les fonctions $\bar{A}_k, \bar{B}_k, \bar{C}_k$ et \bar{D}_k , $k = 3, 4, 5$ désignent l'erreur de *Lagrange* dans les termes de troisième, quatrième et cinquième ordre, du développement en série de *Taylor* de ces systèmes différentiels de classe $\mathcal{C}^3, \mathcal{C}^4$ et \mathcal{C}^5 , respectivement. voir [9].

Théorème 4.1.1 *Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, les affirmations suivantes sont valables.*

- (a) *Le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (4.2) bifurquant à partir de l'origine est au plus 1 si la fonction de déplacement à l'ordre ε n'est pas identiquement nulle.*
- (b) *Il existe des exemples du système (4.2) ayant 0 ou 1 cycle limite bifurquant de l'origine.*

Théorème 4.1.2 *Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, les affirmations suivantes sont valables.*

- (a) *Le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (4.3) bifurquant à partir de l'origine est au plus 4 si la fonction de déplacement à l'ordre ε n'est pas identiquement nulle.*
- (b) *Il existe des exemples du système (4.3) ayant 0, 1, 2, 3 ou 4 cycles limites bifurquant de l'origine.*

Théorème 4.1.3 *Pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit, les affirmations suivantes sont valables.*

- (a) *Le nombre maximum de cycles limites du système différentiel (4.4) bifurquant à partir de l'origine est au plus 6 si la fonction de déplacement à l'ordre ε n'est pas identiquement nulle.*
- (b) *Il existe des exemples du système (4.4) ayant 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 cycles limites bifurquant de l'origine.*

L'outil pour prouver ces théorèmes est la méthode de moyennisation du premier ordre, voir chapitre 2. La méthode de moyennisation utilisée pour l'étude des cycles limites a été appliquée à d'autres problèmes, voir par exemple [19] et leurs références.

4.2 Preuve du Théorème 4.1.1

Afin d'étudier la bifurcation de Hopf du système différentiel (4.2) à l'origine des coordonnées, nous écrirons ce système sous la forme standard (2.1) pour pouvoir appliquer la méthode moyennisation du premier ordre. Ainsi, suivant les idées de [7] nous faisons le changement de variables

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = R \cos \left(\frac{\theta + s}{2} \right), \quad w = R \sin \left(\frac{\theta + s}{2} \right). \quad (4.5)$$

On remarque que ce changement de variables n'est pas un difféomorphisme quand $r = 0$ ou $R = 0$. Il faut donc restreindre notre étude des cycles limites du système (4.2) à la région de l'espace où $r > 0$ et $R > 0$.

On note que r, R et s sont trois premières intégrales indépendantes de la partie linéaire du système (4.2) à l'origine, et que ce changement restreint au plan (x, y) est un changement de coordonnées polaires. Alors le système (4.2) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r_1 + r_2 + r_3, \\ \dot{\theta} = 1 + \frac{1}{r} (\varepsilon \theta_1 + \theta_2 + \theta_3), \\ \dot{R} = \varepsilon R_1 + R_2 + R_3, \\ \dot{s} = \frac{1}{R} (\varepsilon s_1 + s_2 + s_3), \end{cases} \quad (4.6)$$

où $r_k = r_k(r; \theta, R, s)$, $\theta_k = \theta_k(r; \theta, R, s)$, $R_k = R_k(r; \theta, R, s)$ et $s_k = s_k(r; \theta, R, s)$ pour $k = 1, 2$ sont des polynômes homogènes de degré k en les variables r et R avec des fonctions de coefficients en θ et s , et $r_3 = r_3(r; \theta, R, s)$,

$\theta_3 = \theta_3(r; \theta, R, s)$, $R_3 = R_3(r; \theta, R, s)$ et $s_3 = s_3(r; \theta, R, s)$ sont des polynômes homogènes de degré 3 en les variables r et R avec des fonctions bornées de coefficients dans les variables (r, θ, R, s) dans un voisinage de l'origine.

Considérons maintenant θ comme une nouvelle variable indépendante et en faisant la mise à l'échelle

$$(r, R) \rightarrow (\bar{r} = \varepsilon r, \bar{R} = \varepsilon R), \quad (4.7)$$

Le système (4.6) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon F_1(\theta, r, R, s) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{dR}{d\theta} = -\varepsilon F_2(\theta, r, R, s) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{ds}{d\theta} = -\varepsilon F_3(\theta, r, R, s) + O(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (4.8)$$

Ce système est déjà sous la forme normale (2.1) pour appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre avec $x = (r; R, s)$ et $t = \theta$. les fonctions $F_k(\theta, r, R, s)$ pour $k = 1, 2, 3$ sont 4π -périodiques en θ puisqu'elles dépendent de θ passant par $\cos \theta$, $\sin \theta$, $\cos((\theta + s)/2)$ et $\sin((\theta + s)/2)$. De plus les fonctions $F_k(\theta, r, R, s)$ sont par

CHAPITRE 4. ETUDE DE L'EXISTENCE DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX EN DIMENSION 4

construction de classe \mathcal{C}^1 . Les fonctions qui apparaissent en $O(\varepsilon^2)$ peuvent ne pas être périodiques en θ mais elles sont continues du fait qu'elles proviennent des termes de l'erreur de Lagrange dans le développement de la série de Taylor, mais dans un voisinage borné de l'origine elles sont aussi proches que nous le souhaitons d'un périodique et les arguments utilisés dans la preuve du théorème 2.1.1 s'appliquent également. En bref, nous notons que le système (4.8) satisfait les hypothèses du théorème 2.1.1 dans une boule D centrée à l'origine.

Si nous désignons par

$$(f_1, f_2, f_3)(r, R, s) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} (F_1, F_2, F_3)(\theta, r, R, s) d\theta,$$

alors

$$\begin{cases} f_1 = \frac{1}{4}(a_0 r + a_1 R^2 \cos s + a_2 R^2 \sin s), \\ f_2 = \frac{1}{4}R(c_0 + c_1 r \cos s + c_2 r \sin s), \\ f_3 = \frac{1}{2}(d_1 - c_2 r \cos s + c_1 r \sin s), \end{cases} \quad (4.9)$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= 2(a_{1000} + b_{0100}), \\ a_1 &= -a_{0002} + a_{0020} + b_{0011}, \\ a_2 &= a_{0011} + b_{0002} - b_{0020}, \\ c_0 &= 2(c_{0010} + d_{0001}), \\ c_1 &= c_{0101} + c_{1010} + d_{0110} - d_{1001}, \\ c_2 &= -c_{0110} + c_{1001} + d_{0101} + d_{1010}, \\ d_1 &= 2(c_{0001} - d_{0010}), \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que tous les coefficients $a_0, b_0, b_1, c_0, c_1, c_2$ et d_1 sont indépendants, c'est-à-dire qu'ils peuvent être choisis arbitrairement en jouant avec les coefficients $a_{ijkl}, b_{ijkl}, c_{ijkl}$ et d_{ijkl} du système initial (4.2). Par le théorème 2.1.1 les zéros (r_0, R_0, s_0) de

$$(f_1, f_2, f_3)(r, R, s) = (0, 0, 0), \quad (4.10)$$

tel que

$$\det \begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial r & \partial f_1 / \partial R & \partial f_1 / \partial s \\ \partial f_2 / \partial r & \partial f_2 / \partial R & \partial f_2 / \partial s \\ \partial f_3 / \partial r & \partial f_3 / \partial R & \partial f_3 / \partial s \end{pmatrix} (r_0, R_0, s_0) \neq 0, \quad (4.11)$$

fournir des orbites périodiques du système (4.8) pour tout ε suffisamment petit. En raison du changement de variables (4.7) ces orbites périodiques sont des orbites périodiques du système (4.2) tendant vers l'origine quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Ils fournissent donc des familles d'orbites périodiques du système (4.2) bifurquant depuis l'origine. C'est-à-dire que ces familles d'orbites périodiques deviennent à partir de la bifurcation de Hopf à l'origine du système (4.2).

4.3. PREUVE DE L'ÉNONCÉ (A) DU THÉORÈME 4.1.2

Proposition 4.2.1 [18] *Le système (4.10) avec les fonctions $f_i, i = 1, 2, 3$ donnée par (4.11) a au plus 1 solution isolée (r_0, R_0, s_0) satisfaisant (4.11).*

Preuve. la recherche des solutions du système (4.10) avec $r > 0, R > 0$ et $s \in [0, 2\pi)$ équivaut à rechercher les solutions $r > 0, R > 0, u = \cos s$ et $v = \sin s$ du système

$$\begin{aligned} g_1 &= a_0 r + (a_1 u + a_2 v) R^2 = 0, \\ g_2 &= c_0 + (c_1 u + c_2 v) r = 0, \\ g_3 &= d_1 + (-c_2 u + c_1 v) r = 0, \\ g_4 &= u^2 + v^2 - 1 = 0. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Supposons que $a_0(c_1^2 + c_2^2) \neq 0$. Puis résolvons les trois premières équations par rapport à (r, u, v) nous obtenons une solution unique avec $r > 0$ donnée par

$$r_0 = \sqrt{\frac{a_1 c_0 c_1 + a_2 c_0 c_2 + a_2 c_1 d_1 - a_1 c_2 d_1}{a_0 (c_1^2 + c_2^2)}} R, u_0 = \frac{c_2 d_1 - c_0 c_1}{(c_1^2 + c_2^2) r_0}, v_0 = -\frac{c_1 d_1 + c_0 c_2}{(c_1^2 + c_2^2) r_0},$$

si $a_0 (a_1 c_0 c_1 + a_2 c_0 c_2 + a_2 c_1 d_1 - a_1 c_2 d_1) > 0$. En substituant $u = u_0$ et $v = v_0$ dans $g_4 = 0$ on obtient une solution unique pour $R > 0$ si en plus $c_0^2 + d_1^2 \neq 0$, à savoir

$$R_0 = \sqrt{\frac{a_0 (c_0^2 + d_1^2)}{a_1 c_0 c_1 + a_2 c_0 c_2 + a_2 c_1 d_1 - a_1 c_2 d_1}}.$$

Le jacobien de cette solution est $4\sqrt{a_0 (c_0^2 + d_1^2) (a_1 c_0 c_1 + a_2 c_0 c_2 + a_2 c_1 d_1 - a_1 c_2 d_1)} \neq 0$. Si $a_0 = 0$ ou $c_1^2 + c_2^2 = 0$, alors le système (4.12) n'a pas de solutions ou un continuum de solutions. Ainsi, le jacobien de ce continuum est toujours nul, et la méthode de moyennisation du premier ordre ne fournit pas d'information dans ce cas. ■

Par la proposition 4.2.1 on obtient que la méthode de moyennisation du premier ordre dans le chapitre 2, appliquée comme nous l'avons fait, peut fournir au plus 1 cycle limite bifurquant de l'origine.

4.3 Preuve de l'énoncé (a) du théorème 4.1.2

En refaisant le changement de variables (4.5), le système (4.3) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon^2 r_1 + \varepsilon r_2 + r_3 + r_4, \\ \dot{\theta} = 1 + \frac{1}{r} (\varepsilon^2 \theta_1 + \varepsilon \theta_2 + \theta_3 + \theta_4), \\ \dot{R} = \varepsilon^2 R_1 + \varepsilon R_2 + R_3 + R_4, \\ \dot{s} = \frac{1}{R} (\varepsilon^2 s_1 + \varepsilon s_2 + s_3 + s_4), \end{cases} \tag{4.13}$$

où $r_k = r_k(r, \theta, R, s)$, $\theta_k = \theta_k(r, \theta, R, s)$, $R_k = R_k(r, \theta, R, s)$ et $s_k = s_k(r, \theta, R, s)$ pour $k = 1, 2, 3$ sont des polynômes homogènes de degré k en les variables r et R avec des

CHAPITRE 4. ETUDE DE L'EXISTENCE DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX EN DIMENSION 4

fonctions de coefficients en les variables θ et s , et $r_4 = r_4(r, \theta, R, s)$, $\theta_4 = \theta_4(r, \theta, R, s)$, $R_4 = R_4(r; \theta, R, s)$ et $s_4 = s_4(r; \theta, R, s)$ sont des polynômes homogènes de degré 4 en les variables r et R avec des fonctions bornées de coefficients dans les variables (r, θ, R, s) dans un voisinage de l'origine.

Si on prend θ comme une nouvelle variable indépendante et en faisant la mise à l'échelle (4.7), le système (4.13) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon^2 F_1(\theta, r, R, s) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{dR}{d\theta} = -\varepsilon^2 F_2(\theta, r, R, s) + O(\varepsilon^3), \\ \frac{ds}{d\theta} = -\varepsilon^2 F_3(\theta, r, R, s) + O(\varepsilon^3), \end{cases} \quad (4.14)$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 4.1.1 nous voyons que le système (4.14) satisfait les hypothèses du théorème 2.1.1 dans une boule D centrée à l'origine. Si nous désignons par

$$(f_1, f_2, f_3)(r, R, s) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} (F_1, F_2, F_3)(r, R, s) d\theta,$$

alors

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{8} \left((a_0 + a_1 r^2 + a_2 R^2) r + (a_3 \cos s + a_4 \sin s) R^2 \right), \\ f_2 &= \frac{1}{8} R (b_0 + b_1 r^2 + b_2 R^2 + (b_3 \cos s + b_4 \sin s) r), \\ f_3 &= -\frac{1}{4} (c_0 + c_1 r^2 + c_2 R^2 + (-b_4 \cos s + b_3 \sin s) r), \end{aligned} \quad (4.15)$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= 4(a_{1000} + b_{0100}), \\ a_1 &= a_{1200} + 3a_{3000} + 3b_{0300} + b_{2100}, \\ a_2 &= 2(a_{1002} + a_{1020} + b_{0102} + b_{0120}), \\ a_3 &= 2(a_{0020} - a_{0002} + b_{0011}), \\ a_4 &= 2(a_{0011} + b_{0002} - b_{0020}), \end{aligned}$$

4.3. PREUVE DE L'ÉNONCÉ (A) DU THÉORÈME 4.1.2

$$\begin{aligned}
b_0 &= 4(c_{0010} + d_{0001}), \\
b_1 &= 2(c_{0210} + c_{2010} + d_{0201} + d_{2001}), \\
b_2 &= c_{0012} + 3c_{0030} + 3d_{0003} + d_{0021}, \\
b_3 &= 2(c_{0101} + c_{1010} + d_{0110} - d_{1001}), \\
b_4 &= 2(-c_{0110} + c_{1001} + d_{0101} + d_{1010}), \\
c_0 &= 4(c_{0001} - d_{0010}), \\
c_1 &= 2(c_{0201} + c_{2001} - d_{0210} - d_{2010}), \\
c_2 &= 3c_{0003} + c_{0021} - d_{0012} - 3d_{0030},
\end{aligned}$$

Proposition 4.3.1 *Le système (4.10) avec les fonctions f_i , $i = 1, 2, 3$ données par (4.15) peut avoir 0, 1, 2, 3 ou 4 solutions isolées (r_0, R_0, s_0) satisfaisant (4.11).*

Preuve. *la recherche des solutions du système (4.10) avec $r > 0$, $R > 0$ et $s \in [0, 2\pi)$ est équivalent à rechercher les solutions $A = r/R > 0$, $B = r > 0$, $u = \cos s$ et $v = \sin s$ du système*

$$\begin{aligned}
g_1 &= A(a_0 + a_1 A^2 B^2 + a_2 B^2) + (a_3 u + a_4 v) B = 0, \\
g_2 &= b_0 + b_1 A^2 B^2 + b_2 B^2 + (b_3 u + b_4 v) AB = 0, \\
g_3 &= c_0 + c_1 A^2 B^2 + c_2 B^2 + (b_3 v - b_4 u) AB = 0, \\
g_4 &= u^2 + v^2 - 1 = 0.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

On résout les trois premières équations par rapport à (B, u, v) nous obtenons une solution unique donnée par

$$B = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}, \quad u = \frac{u_1}{A\sqrt{B_1 B_2}}, \quad v = \frac{v_1}{A\sqrt{B_1 B_2}}, \tag{4.17}$$

où

$$\begin{aligned}
B_1 &= -A^2 a_0 (b_3^2 + b_4^2) + a_4 (b_0 b_4 + b_3 c_0) + a_3 (b_0 b_3 - b_4 c_0), \\
B_2 &= A^4 a_1 (b_3^2 + b_4^2) + A^2 (a_2 (b_3^2 + b_4^2) - a_4 (b_1 b_4 + b_3 c_1) + a_3 (-b_1 b_3 + b_4 c_1)) - \\
&\quad b_2 (a_3 b_3 + a_4 b_4) - (a_4 b_3 - a_3 b_4) c_2, \\
u_1 &= A^4 (a_0 (b_1 b_3 + b_4 c_1) - a_1 (b_0 b_3 - b_4 c_0)) - \\
&\quad A^2 (a_2 (b_0 b_3 - b_4 c_0) + a_4 (b_1 c_0 - b_0 c_1) - a_0 (b_2 b_3 - b_4 c_2)) + a_4 (b_0 c_2 - b_2 c_0), \\
v_1 &= A^4 (a_0 (b_1 b_4 + b_3 c_1) - a_1 (b_0 b_4 + b_3 c_0)) + \\
&\quad A^2 (a_0 (b_2 b_4 + b_3 c_2) - a_2 (b_0 b_4 + b_3 c_0) + a_3 (b_1 c_0 - b_0 c_1)) + a_3 (b_2 c_0 - b_0 c_2).
\end{aligned}$$

Clairement, la solution (4.17) est bien définie si et seulement si $B_1 B_2 > 0$. Si $B_1 B_2 > 0$ alors en remplaçant (4.17) dans la quatrième équation de (4.16), on obtient un polynôme de la forme

$$d_8 A^8 + d_6 A^6 + d_4 A^4 + d_2 A^2 + d_0. \tag{4.18}$$

Puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 4 en la variable A^2 , ce polynôme peut avoir au plus 4 racines positives. Chacune de ces racines détermine au plus une solution unique (B, u, v) using (4.17). Peuvent être choisis arbitrairement en jouant avec les coefficients initiaux du système (4.3), il s'ensuit que le système (4.16) peut avoir 0, 1, 2, 3 ou 4 solutions si $B_1 B_2 > 0$, et la proposition est prouvé sous cette hypothèse.

■

4.4 Preuve de l'énoncé (b) du théorème 4.1.2

Nous fournissons un exemple explicite de système (4.3) dont 4 cycles limites bifurquent depuis l'origine. De la même manière, nous pouvons fournir des exemples de systèmes (4.3) avec 0, 1, 2 et 3 cycles limites bifurquant à partir de l'origine.

On prend un système différentiel polynomial (4.3) de degré 3 ayant tous les coefficients a_{ijkl} , b_{ijkl} , c_{ijkl} et d_{ijkl} , pour $i + j + k + l \in \{1, 2, 3\}$ égal à zéro à l'exception de ceux qui apparaissent dans la liste suivant

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 4a_{1000} = \frac{5}{132} \left(42 + \sqrt{1379} \right), \\
 a_1 &= a_{1200} = -\frac{19411 + 508\sqrt{1379}}{9317}, \\
 a_2 &= 2a_{1002} = -1, \\
 a_3 &= 0, \\
 a_4 &= 2a_{0011} = -1, \\
 b_0 &= 0, \\
 b_1 &= 2c_{0210} = -1, \\
 b_2 &= c_{0012} = 1, \\
 b_3 &= 0, \\
 b_4 &= -2c_{0110} = 1, \\
 c_0 &= 4c_{0001} = 1, \\
 c_1 &= 2c_{0201} = \frac{31554 + 2027\sqrt{1379}}{21175}, \\
 c_2 &= 3c_{0003} = \frac{1}{5} \left(-42 + \sqrt{1379} \right).
 \end{aligned}$$

Ensuite, le système (4.16) a les quatre solutions suivantes

$$\left(A_k, B_k = \sqrt{\frac{B_{k1}}{B_{k2}}}, u_k = \frac{u_{k1}}{A_k \sqrt{B_{k1} B_{k2}}}, v_k = \frac{v_{k1}}{A_k \sqrt{B_{k1} B_{k2}}} \right)$$

4.5. PREUVE DE L'ÉNONCÉ (A) DU THÉORÈME 4.1.3

pour $k = 1, 2, 3, 4$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sqrt{2}, \\
 A_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
 A_3 &= \sqrt{3}, \\
 A_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
 B_{k1} &= -\frac{5}{132} \left(42 + \sqrt{1379} \right) A_k^2, \\
 B_{k2} &= -\frac{(19411 + 508\sqrt{1379}) A_k^4}{9317} - 1, \\
 u_{k1} &= -\frac{(793 + 60\sqrt{1379}) A_k^4}{1452} - \frac{35A_k^2}{12} + 1, \\
 v_{k2} &= \frac{5}{132} \left(42 + \sqrt{1379} \right) A_k^2 (A_k^2 - 1).
 \end{aligned}$$

clair $B_{k1}B_{k2} > 0$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.

4.5 Preuve de l'énoncé (a) du théorème 4.1.3

Nous faisons le changement de variables

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = R \cos \left(\frac{3(\theta + s)}{2} \right), \quad w = R \sin \left(\frac{3(\theta + s)}{2} \right), \quad (4.19)$$

et le système (4.4) devient

$$\begin{cases}
 \dot{r} = \varepsilon^3 r_1 + \varepsilon^2 r_2 + \varepsilon r_3 + r_4 + r_5, \\
 \dot{\theta} = 1 + \frac{1}{r} (\varepsilon^3 \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \varepsilon \theta_3 + \theta_4 + \theta_5), \\
 \dot{R} = \varepsilon^3 R_1 + \varepsilon^2 R_2 + \varepsilon R_3 + R_4 + R_5, \\
 \dot{s} = \frac{1}{R} (\varepsilon^3 s_1 + \varepsilon^2 s_2 + \varepsilon s_3 + s_4 + s_5),
 \end{cases} \quad (4.20)$$

où $r_k = r_k(r, \theta, R, s)$, $\theta_k = \theta_k(r, \theta, R, s)$, $R_k = R_k(r, \theta, R, s)$ et $s_k = s_k(r, \theta, R, s)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$ sont des polynômes homogènes de degré k en les variables r et R avec des fonctions de coefficients en les variables θ et s , et $r_5 = r_5(r, \theta, R, s)$, $\theta_5 = \theta_5(r, \theta, R, s)$, $R_5 = R_5(r, \theta, R, s)$ et $s_5 = s_5(r, \theta, R, s)$ sont des polynômes homogènes de degré 5 en les variables r et R avec des fonctions bornées de coefficients dans les variables (r, θ, R, s) dans un voisinage de l'origine.

Si on prend θ comme une nouvelle variable indépendante et en faisant la mise à

CHAPITRE 4. ETUDE DE L'EXISTENCE DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX EN DIMENSION 4

l'échelle (4.7) le système (4.20) devient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = -\varepsilon^3 F_1(\theta, r, R, s) + O(\varepsilon^4), \\ \frac{dR}{d\theta} = -\varepsilon^3 F_2(\theta, r, R, s) + O(\varepsilon^4), \\ \frac{ds}{d\theta} = -\varepsilon^3 F_3(\theta, r, R, s) + O(\varepsilon^4), \end{cases} \quad (4.21)$$

En utilisant les mêmes arguments que dans la preuve du théorème 4.1.1 nous voyons que le système (4.21) satisfait les hypothèses du théorème 2.1.1 dans une boule D centrée à l'origine. Si nous désignons par

$$(f_1, f_2, f_3)(r, R, s) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} (F_1, F_2, F_3)(\theta, r, R, s) d\theta,$$

alors

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{16} r ((a_0 + a_1 r^2 + a_2 R^2) + (a_3 \cos 3s + a_4 \sin 3s) r R^2), \\ f_2 &= \frac{1}{16} R (b_0 + b_1 r^2 + b_2 R^2 + (b_3 \cos 3s + b_4 \sin 3s) r^3), \\ f_3 &= -\frac{1}{24} (c_0 + c_1 r^2 + c_2 R^2 + (-b_4 \cos 3s + b_3 \sin 3s) r^3), \end{aligned} \quad (4.22)$$

où

$$\begin{aligned} a_0 &= 8(a_{1000} + b_{0100}), \\ a_1 &= 2(a_{1200} + 3a_{3000} + 3b_{0300} + b_{2100}), \\ a_2 &= 4(a_{1002} + a_{1020} + b_{0102} + b_{0120}), \\ a_3 &= a_{0202} - a_{0220} + a_{1111} - a_{2002} + a_{2020} - b_{0211} + b_{1102} - b_{1120} + b_{2011}, \\ a_4 &= -a_{0211} + a_{1102} - a_{1120} + a_{2011} - b_{0202} + b_{0220} - b_{1111} + b_{2002} - b_{2020}, \\ b_0 &= 8(c_{0010} + d_{0001}), \\ b_1 &= 4(c_{0210} + c_{2010} + d_{0201} + d_{2001}), \\ b_2 &= 2(c_{0012} + 3c_{0030} + 3d_{0003} + d_{0021}), \\ b_3 &= -c_{0301} - c_{1210} + c_{2101} + c_{3010} - d_{0310} + d_{1201} + d_{2110} - d_{3001}, \\ b_4 &= c_{0310} - c_{1201} - c_{2110} + c_{3001} - d_{0301} - d_{1210} + d_{2101} + d_{3010}, \\ c_0 &= 8(c_{0001} - d_{0010}), \\ c_1 &= 4(c_{0201} + c_{2001} - d_{0210} - d_{2010}), \\ c_2 &= 2(3c_{0003} + c_{0021} - d_{0012} - 3d_{0030}), \end{aligned}$$

Proposition 4.5.1 *Le système (4.10) avec les fonctions f_i , $i = 1, 2, 3$ données par (4.22) peut avoir 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 solutions isolées (r_0, R_0, s_0) satisfaisant (4.11).*

4.6. PREUVE DE L'ÉNONCÉ (B) DU THÉORÈME 4.1.3

Preuve. La recherche des solutions du système (4.10) avec $r > 0, R > 0$ et $s \in [0, 2\pi)$ est équivalent à rechercher les solutions $A = r/R > 0, B = R > 0, u = \cos(3s)$ et $v = \sin(3s)$ du système

$$\begin{aligned} g_1 &= a_0 + a_1 A^2 B^2 + a_2 B^2 + (a_3 u + a_4 v) A B^3 = 0, \\ g_2 &= b_0 + b_1 A^2 B^2 + b_2 B^2 + (b_3 u + b_4 v) A^3 B^3 = 0, \\ g_3 &= c_0 + c_1 A^2 B^2 + c_2 B^2 + (b_3 v - b_4 u) A^3 B^3 = 0, \\ g_4 &= u^2 + v^2 - 1 = 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

On résout les trois premières équations par rapport à (B, u, v) nous obtenons une solution unique donnée par

$$B = \sqrt{\frac{B_1}{B_2}}, \quad u = \frac{\sqrt{B_2 u_1}}{A^3 B_1^{3/2}}, \quad v = \frac{\sqrt{B_2 v_1}}{A^3 B_1^{3/2}}, \quad (4.24)$$

où

$$\begin{aligned} B_1 &= -A^2 a_0 (b_3^2 + b_4^2) + a_4 (b_0 b_4 + b_3 c_0) + a_3 (b_0 b_3 - b_4 c_0), \\ B_2 &= A^4 a_1 (b_3^2 + b_4^2) + A^2 (a_2 (b_3^2 + b_4^2) - a_4 (b_1 b_4 + b_3 c_1) + a_3 (-b_1 b_3 + b_4 c_1)) - \\ &\quad b_2 (a_3 b_3 + a_4 b_4) - (a_4 b_3 - a_3 b_4) c_2, \\ u_1 &= A^4 (a_0 (b_1 b_3 - b_4 c_1) - a_1 (b_0 b_3 - b_4 c_0)) - \\ &\quad A^2 (a_2 (b_0 b_3 - b_4 c_0) + a_4 (b_1 c_0 - b_0 c_1) - a_0 (b_2 b_3 - b_4 c_2)) + a_4 (b_0 c_2 - b_2 c_0), \\ v_1 &= A^4 (a_0 (b_1 b_4 + b_3 c_1) - a_1 (b_0 b_4 + b_3 c_0)) + \\ &\quad A^2 (a_0 (b_2 b_4 + b_3 c_2) - a_2 (b_0 b_4 + b_3 c_0) + a_3 (b_1 c_0 - b_0 c_1)) + a_3 (b_2 c_0 - b_0 c_2), \end{aligned}$$

clairement la solution (4.24) est bien définie si et seulement si $B_1 B_2 > 0$. Si $B_1 B_2 > 0$ alors en remplaçant (4.24) dans la quatrième équation de (4.23), on obtient un polynôme de la forme

$$d_{12} A^{12} + d_{10} A^{10} + d_8 A^8 + d_6 A^6 + d_4 A^4 + d_2 A^2 + d_0. \quad (4.25)$$

Puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré 6 en la variable A^2 , ce polynôme peut avoir au plus 6 racines positives. Chacune de ces racines détermine au plus une solution unique (B, u, v) en utilisant (4.24). Puisque les coefficients du polynôme (4.25) peuvent être choisis arbitrairement en jouant avec les coefficients initiaux du système (4.4), il s'ensuit que le système (4.23) peut avoir 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 solutions si $B_1 B_2 > 0$, et la proposition est prouvée sous cette hypothèse. ■

4.6 Preuve de l'énoncé (b) du théorème 4.1.3

Nous fournissons un exemple explicite de système (4.4) dont 6 cycles limites bifurquent depuis l'origine. De la même manière, nous pouvons fournir des exemples

CHAPITRE 4. ETUDE DE L'EXISTENCE DE CYCLES LIMITES POUR UNE CLASSE DES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS POLYNOMIAUX EN DIMENSION 4

de systèmes (4.4) avec 0, 1, 2, 3, 4 et 5 cycles limites bifurquant à partir de l'origine. On prend un système différentiel polynomial (4.4) de degré 4 ayant tous les coefficients a_{ijkl} , b_{ijkl} , c_{ijkl} et d_{ijkl} , pour $i + j + k + l \in \{1, 2, 3, 4\}$ égal à zéro à l'exception de ceux qui apparaissent dans la liste suivante

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 8a_{1000} = 2.766824394, \\
 a_1 &= 2a_{1200} = -0.8646619532, \\
 a_2 &= 4a_{1002} = -1, \\
 a_3 &= 0, \\
 a_4 &= -a_{0211} = -1, \\
 b_0 &= 0, \\
 b_1 &= 4c_{2010} = -1.770714554, \\
 b_2 &= 2c_{0012} = 0.2500932705, \\
 b_3 &= 0, \\
 b_4 &= c_{0310} = -1, \\
 c_0 &= 8c_{0001} = -7.995525103, \\
 c_1 &= 4c_{0201} = 2.962944552, \\
 c_2 &= 6c_{0003} = 0.3028929340.
 \end{aligned}$$

Ensuite, le système (4.23) a les six solutions suivantes

$$\left(A_k, B_k = \sqrt{\frac{B_{k1}}{B_{k2}}}, u_k = \frac{\sqrt{B_{k2}}u_{k1}}{B_{k1}^{3/2}A^3}, v_k = \frac{\sqrt{B_{k2}}v_{k1}}{B_{k1}^{3/2}A^3} \right)$$

pour $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sqrt{2}, \\
 A_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
 A_3 &= \sqrt{3}, \\
 A_4 &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\
 A_5 &= 2, \\
 A_6 &= \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{k1} &= -2.76682A_k^2, \\
 B_{k2} &= -0.250093 + 0.770715A_k^2 - 0.864662A_k^4, \\
 u_{k1} &= -1.99963 + 7.00032A_k^2 + 1.28452A_k^4, \\
 v_{k2} &= -0.691964A_k^2 + 4.89926A_k^4.
 \end{aligned}$$

clair $B_{k1}B_{k2} > 0$ pour $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Conclusion

La Méthode de moyennisation est l'une des méthodes de perturbations les plus importantes utilisées pour étudier le nombre et la stabilité de cycles limites des systèmes différentiels perturbés. L'application de cette méthode aux systèmes différentiels continus perturbés dans \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^6 nous a permis d'étudier le nombre maximum de cycles limites ainsi que leur stabilité.

Dans nos travaux futurs, nous proposons d'étudier le nombre maximum de cycles limites de systèmes différentiels discontinus perturbés.

Bibliographie

- [1] E. I. Abouelmagd and J. L. G. Guirao, *On the perturbed restricted three-body problem*, Applied Mathematics and Nonlinear Sciences **1(1)** (2016), 123 – 144.
- [2] R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2nd edn, Benjamin-Cummings, 1978.
- [3] D. Bokaletti and G. Pucacco, *Theory of Orbits*, Volume **1** and **2**, (1996), Springer New York.
- [4] A. Buică, J. P. Francoise and J. Llibre, *Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter*, Communications on Pure and Applied Analysis **6** (2007), 103 – 111.
- [5] A. Buică and I. García. *Periodic solutions of some perturbed symmetric Euler top*, Topol. Meth. Nonlin. Anal. **36** (2010), 91 – 100.
- [6] A. Buică and J. Llibre, *Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree*, Bull. Sci. Math. **128** (2004), 7 – 22.
- [7] A. Buică and J. Llibre, *Bifurcations of limit cycles from a 4-dimensional center in control systems*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. **15** (2004), 2653–2662.
- [8] M. T. de Bustos, J. L. G. Guirao, J. A. Vera and J. Vigo-Aguiar, *Periodic orbits and C^1 -integrability in the planar Stark–Zeeman problem*, Journal of Mathematical Physics **53(082701)** (2012), 1 – 9.
- [9] M. T. de Bustos, J. L. G. Guirao and J. A. Vera, *The spatial Hill lunar problem : periodic solutions emerging from equilibria*, Dynamical Systems **32(3)** (2017), 340 – 353.
- [10] B. Coll, A. Gasull, and R. Prohens, *Bifurcation of limit cycles from two families of centers*. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. Ser. A Math. Anal **12(2)** (2005), 275 – 287.
- [11] R. L. Devaney, *Reversible diffeomorphisms and flows*, Trans. Amer. Math. Soc. **218** (1976), 89 – 113.
- [12] J. L. G. Guirao, J. Llibre and J. A. Vera, *The generalized van der Waals Hamiltonian : periodic orbits and C^1 -non integrability*, Physical Review E **85(036603)** (2012), 1 – 5.

BIBLIOGRAPHIE

- [13] D. Hilbert *Mathematische Probleme*, Göttinger Nachrichten is Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen (1900), 253 – 297.
- [14] L. Jiménez–Lara and J. Llibre, *Periodic orbits and non integrability of generalized classical Yang–Mills Hamiltonian system*, J. Math. Phys., **52**(2011), 032901 – 9pp.
- [15] L. Jiménez–Lara and J. Llibre, *Periodic orbits and non-integrability of Henon–Heiles system*, J. Physics A : Maths. Gen. **44** (2011), 205103 – 14pp.
- [16] S. S. Kanavos, V. V. Markellos, E. A. Perdios, C. N. Douskos, *The Photogravitational Hill Problem Numerical Exploration*, Earth, Moon and Planets, **91** (2002) 223 – 241.
- [17] A. L. Kunitsyn and E. N. Polyakhova, *The restricted photogravitational three-body problem : A modern state*, Astronomical and Astrophysical Transactions, **6**(4) (1995) 283 – 293.
- [18] J. Llibre and A. C. Mereu, *Hopf Bifurcation for Vector Fields in \mathbb{R}^4 with Pure Imaginary Eigenvalues in Resonance 1 : 2 and 3 : 2*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, 2008.
- [19] J. Llibre, M. A. Teixeira and J. Torregrosa, *Limit cycles bifurcating from a k-dimensional isochronous center contained in \mathbb{R}^n with $K \leq n$* , Math. Phys. Anal. Geom. **10** (2007), 237 – 249.
- [20] N. G. Lloyd, *Degree Theory*, Cambridge University Press, 1978.
- [21] I. G. Malkin, *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*, (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.–Teor. Lit., Moscow, 1956.
- [22] V. V. Markellos et al., *A Photogravitational Hill Problem and radiation Effects on Hill Stability of Orbits*, Astrophysics and Space Science, **271** (2000) 293 – 301.
- [23] V. V. Markellos et al., *The photogravitational Hill problem with oblateness : equilibrium points and Lyapunov families*, Astrophysics and Space Science, **315** (2008) 297 – 306.
- [24] K. R. Meyer, G. R. Hall and D. Offin, *Introduction to Hamiltonian dynamical systems and the N–body problem*, Applied Mathematical Sciences **90** (2009), Springer New York.
- [25] J. Moser, *Periodic orbits near equilibria and theorem by Alan Weinstein*, Commun. Pure Appl. Math. **29** (1996), 727 – 747.
- [26] K. E. Papadakis, *The planar Hill problem with oblate primary*, Astrophysics and Space Science, **293**(3), 271 – 287, 2004.
- [27] E. Pérez-Chavela and Claudia Tamayo, *Relative Equilibria in the 4–Vortex Problem Bifurcating from an Equilateral Triangle Configuration*, Applied Mathematics and Nonlinear Sciences **1**(1) (2016), 301 – 310.

BIBLIOGRAPHIE

- [28] M. Roseau, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Vol.8 Springer–Verlag, Berlin–New York, 1966.
- [29] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*. Springer, Berlin, Germany (1974).
- [30] J. F. L. Simmons et al., *The restricted 3–body problem with radiation pressure*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **35** (1985) 145 – 187.
- [31] A. Weinstein, *Normal modes for nonlinear Hamiltonian systems*, *Invent. Math.* **20** (1973), 47 – 57.

Appendice

Dans cet appendice on utilise le logiciel de Maple pour simplifier les expressions mathématiques, calculer les intégrales et les racines d'équations et des systèmes, tracer les courbes etc...