

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE CHEKH LAARBI TEBESSI – TEBESSA

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL



**MEMOIRE**  
**EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE**  
**MAGISTERE**  
**EN GENIE CIVIL**  
**OPTION: RÉHABILITATION DES STRUCTURES**

**THEME**  
**ÉTUDE EN VIBRATION ET EN FLAMBEMENT**  
**DES PLAQUES FGM**

Présenté par :  
**Ben Salah CHERIF**

Soutenu le : 28 / 05 /2014 devant le jury :

Président :	Mr. Ali MESSABHIA	MCA	Université de Tébessa.
Rapporteur :	Mr. Mohammed GUENFOUD	Professeur	Université de Guelma.
Examineur :	Mr. El Hadi HARKATI	MCA	Université de Tébessa.
Examineur :	Mr. ABDELAZIZ BENMAR	MCA	Université de Guelma.

---

---

*Je dédie cette thèse : À mon Papa Houssine et maman Salima  
À Seif & Mounia  
À Anisse*

---

# Remerciements



Cette thèse a été réalisée au sein de la faculté de Technologie sous la direction de monsieur le professeur GUENFOUD Mohamed. Je tiens à lui exprimer ma profonde reconnaissance pour ses grandes qualités scientifiques et humaines, sa confiance, sa disponibilité durant ma période de recherche.

Je tiens à remercier les membres du jury, particulièrement monsieur MESSABHIA Ali qui m'a fait l'honneur de présider le jury, et messieurs les docteurs. HARKATI El Hadi, BENMARCE Abdelaziz qui ont accepté d'examiner mon mémoire.

J'exprime ma profonde gratitude aux membres du département de génie civil de l'université de Tebessa pour leur chaleureux accueil et soutien.

J'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis : Seif el dinne, Jamel , Raouf , Chemsse el dine et Adel qui m'ont toujours soutenu et encouragée au cours de la réalisation de cette mémoire.

Enfin, mes remerciements vont aussi à tous mes collègues pour leur soutien moral et leur gentillesse. Comme je remercie toute personne de près ou de loin qui ont aidé à la réalisation de cette mémoire.

## ملخص

من بين اهم ميزات المواد الطبقية ،القدرة على توجيه ألياف كل طبقة لتحسين الخصائص الميكانيكية المطلوبة كالمقاومة و الصلابة. بالرغم من الخصائص الجيدة فإن عملية الترقيق تطرح مشكل انفصال الرقائق. تعتبر المواد المركبة ذات التدرج الوظيفي من بين الحلول الاساسية لمشكل الانفصال و التدرجات الحرارية العالية، « FGM »: 'functionally graded materials' المواد الطبقية، تمثل هذه المواد تدرج طبقي وظيفي من مادة الى أخرى بنمط مرن مستمر ( الانتقال تدريجيا من طور معدني الى آخر خزفي). يساعد التدرج الطبقي المواد الطبقية على التقليل المعتر لتأثير الانفصال و تركز الاجهادات الحرارية مقارنة بالمواد الطبقية المركبة العادية لكن الالم هو الحصول على مزايا جديدة لم تكن معروفة من قبل .

في هذا العمل تم دراسة الحل التحليلي لحالتين: الاهتزازات الحرة و الالتواء الحرج لصفائح المواد الطبقية ذات الشكل المربع، اخذين بعين الاعتبار قصور الدوران. تتبع الخصائص الميكانيكية قانون توزيع أسي بدلالة الكسر الحجمي تبعاً لسمك الصفيحة. تم الحصول على المعادلات التفاضلية الجزئية للحركة لكل حالة ،ثلاث معادلات المتزاوجة، باستعمال مبدأ *Hamilton* حسب نظرية *Kirchhoff*. مكننا ادخال دالتين جديدتين من ازالة التزاوج و الحصول على معادلتين تفاضليتين منفصلتين عاديتين. تم اعطاء حل مباشر بطريقة *Navier* اولاً ، ثم قمنا بتطبيق حل *Levey* من أجل مختلف الشروط الحدية الممكنة لاستخراج الدوال الذاتية لكل حالة.

النتائج المحصل عليها و المقارنة مع مثلها من النتائج المتوفرة في مختلف المراجع بينت دقة الحل كذلك تم معالجة عدة امثلة بخصوص تأثير: هندسة الشكل، نسبة السمك الى الطول، أس التابع الأسي و الشروط الحدية. كذلك تأثير الانتقالات المستوية و مختلف انواع التزاوج على وسيط الذبذبات. برنامج عددي اعد لحساب الذبذبات الخاصة و الاحمال الحرجة الخطية .

**الكلمات مفتاحية:** المواد الطبقية، المواد المركبة ذات التدرج الوظيفي، الاهتزازات الحرة ، الالتواء الحرج ، الدوال الذاتية ،تأثير التزاوج، وسيط الذبذبات

## Résumé

---

L'un des avantages majeurs des stratifiés composites est la capacité d'orienter les fibres de chaque pli afin d'optimiser ses propriétés mécaniques telles que la résistance et la rigidité requise. Malgré les excellentes propriétés, les stratifiés présentent un problème propre aux matériaux réalisés par stratification : la rupture inter-laminaire qui s'appelle le « Délaminage ». Récemment, une nouvelle classe des composites fait l'objet de plusieurs recherches ; les « FGM » matériaux à gradient fonctionnel. Les FGM représentent une transition graduelle bien définie d'une phase à une autre d'une manière souple sans discontinuités. Par exemple : la transition graduelle d'une phase métallique à une autre céramique. Cela permet à ces composites la possibilité de réduire significativement l'effet de délaminage et la concentration des contraintes thermiques rencontrées chez les composites conventionnels, mais le plus important est d'avoir une nouvelle fonctionnalité qui n'était pas existé avant.

Dans ce travail : une solution analytique exacte est présentée pour deux problèmes : (i) les vibrations libres et (ii) l'instabilité pour des plaques minces en « FGM », en tenant compte l'inertie de rotation. La distribution des constituants des deux matériaux selon l'épaisseur et le module d'élasticité varie selon une loi de puissance en termes de la fraction volumique des constituants. Utilisant le principe de *Hamilton* et la théorie classique de *Kirchhoff*. Élaborant les équations de mouvement pour les plaques « FGM » ; ce qui résulte de trois (03) équations fortement couplés. L'introduction de deux nouvelles fonctions permet la reformulation des trois équations ; de dérivées partielles couplées à deux nouvelles équations ordinaires découplées. Une solution directe basée sur l'approche de *Navier* est donnée. Après, on considère la solution de *Levey*. Les fonctions propres des deux problèmes pour les différentes conditions aux limites possibles sont tirées. Puis, l'effet de l'élancement, forme, l'exposant de puissance et conditions aux limites sera discuté en détail. À la fin, on montre l'effet des déplacements planaire et l'effet des différents types de couplage existant sur le paramètre fréquentiel de vibration.

**Mots clés :** des stratifiés composites, FGM, vibrations libres, flambement, fonctions propres, l'effet des déplacements planaire, l'effet de couplage, paramètre fréquentiel.

---

## **Abstract:**

---

One of the major advantages of laminated composites is the capacity of fiber orientation of each lamina to optimize the mechanical properties as strength and stiffness to deal with recommendations. However a delamination failure due to the lamination presents a serious problem. Recently a new range of composite treat this problem perfectly has drawn considerable attention, the "FGM" functionally graded materials. This composite present a gradual transition from phase to another with smooth a continuous change (usually ceramic and metal). Thus, would eliminate to reduce interface problems and mitigating thermal stress observed for the conventional composites, but the most important is to have a new functionality that was not exist before.

In this work: an analytic exact solution is presented for two problems : (i) the free vibrations and (ii) the buckling problem of thin "FGM" rectangular plates, taking in account the rotary inertia. Two-constituent material distribution through the thickness and the modulus of elasticity of the plate is assumed to vary according to a power-law distribution in terms of the volume fractions of the constituents. Using *Hamilton* principle and the classic plate theory *Kirchhof*, we get three high-coupled partial diferential equations of motion, introducing two new function results in transforming the problem to tow decoupled ordinary differential equations.

A direct solution using the *Navier* solution is presented first, after a *Levey* type solution is applied to the possible boundary conditions. The Eigen functions for both cases are derived. Parametric study is conduct to investigate the shape ratio, thicknesses to length ratio, index power ratio and boundary conditions. Finally a detailed analysis to show the in-plan displacements and coupling effect on the frequency parameter.

**Key words:** laminated composites, functionally graded materials, free vibrations, buckling, Eigen functions, in-plan displacements, coupling effect, frequency parameter.

---

## Sommaire

Liste des figures .....	v
Listes des tableaux.....	ix
Listes des symboles .....	xiii
Introduction .....	1
<b>. Chapitre 1 : Revue de littérature .....</b>	<b>1</b>
1.1. Matériaux composites (Introduction):.....	2
1.2. Classification des matériaux composites:.....	2
1.3. Constituants des matériaux composites: .....	4
1.4. Considérations sur l'usage des matériaux composites:.....	6
1.5. Mécanismes de rupture des composites unidirectionnels:.....	9
1.6. Les « FGM » Introduction : .....	12
1.7. Le Gradient :.....	15
1.8. Méthodes de fabrication des MGF :.....	16
1.9. Méthodes de caractérisation : .....	22
1.10. Design et Optimisation des MGF:.....	23
1.11. Conception inverse:.....	23
1.12. Variations des propriétés des MGF :.....	23
1.13. Modélisation du gradient et Relations constitutives : .....	24
1.14. Applications des FGM:.....	24
1.15. Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel : .....	25
<b>. Chapitre 2 : Théorie Classiques des Plaques .....</b>	<b>30</b>
2.1. Définition .....	31
2.2. Modèle classique Love-Kirchhoff (CPT) 1876:.....	31

2.3.	Hypothèses de la théorie du classique des plaques.....	31
2.4.	Équations cinématiques :.....	32
2.5.	Relations déformation–déplacement :.....	32
2.6.	Relations contrainte–déformation :.....	35
2.7.	Énergie de déformation de la plaque: .....	35
<b>. Chapitre 3 : Étude de la stabilité et vibrations libre des plaques</b>		
<b>FGM</b>	.....	<b>44</b>
3.1.	Introduction Flambements des plaques.....	45
3.2.	Stabilité des plaques rectangulaires :.....	47
3.3.	Équations de la stabilité linéaire : .....	48
3.4.	Équations d'équilibre pour analyse de flambement pour les plaques FGM :.....	50
3.5.	Découplage de l'équation de flambement .....	51
3.6.	Conditions aux limites : .....	53
3.7.	Analyse du flambement : .....	53
3.8.	Vibration des plaques FGM:.....	66
3.9.	Vibration des plaques rectangulaires : .....	68
3.10.	Analyse de la solution : .....	73
<b>. Chapitre 4 : Description des techniques de programmation .....77</b>		
4.1.	Introduction :.....	78
4.2.	Méthodes de résolutions : .....	78
4.3.	Programmation de la méthode :.....	81
4.4.	Logiciels et matériel:.....	82
4.5.	Organigramme.....	82
4.6.	Description du programme .....	82

. Chapitre 5 : Résultats et interprétations .....	85
5.1. Introduction : .....	86
5.2. Application numérique (cas de flambement) : .....	86
5.3. Validation des résultats : .....	101
5.4. Explication des résultats : .....	102
5.5. Comparaison des résultats : .....	103
5.6. Application numérique (cas des vibrations) : .....	105
. Bibliographies: .....	119
. Annexes : .....	127

## LISTE DES FIGURES

Figure 1.1: Rupture par flexion de différentes séquences d'empilement: (a) Quasi-isotrope	Figure 1.2: Ruptures par traction de différentes séquences d'empilement: (a) $0^\circ/90^\circ$ .....	9
Figure 1.3: Trois modes de rupture dans un stratifié $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ [SMITH 1993] .....		10
Figure 1.4: Évolution de défauts .....		11
Figure 1.5: Mécanismes d'endommagement accompagnant le délaminage.....		12
Figure 1.6: Représentation des matériaux existants en fonction de leurs densités $\rho$ et de leurs modules de Young $E$ [2].....		13
Figure 1.7: Matériaux à gradient fonctionnel avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [1] .....		13
Figure 1.8: Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel ( $Al_2O_3$ -SUS304).....		14
Figure 1.9:a) une lame à parois minces en rotation dans une turbine [8]; b) dent d'implantation en matériaux à gradient fonctionnel ( $Ti/20HAP$ ) [13] .....		15
Figure 1.10: Changement schématique de la microstructure dans un profilé FGM .....		15
Figure 1.11: Gauche : la génération d'un composite métal-carbide avec un gradient de composition de par revêtement du faisceau laser ; à droite: tube Graduée du $NiCrBSi$ avec 0-80% vol $Cr_3C_2$ .....		17
Figure 1.12: Micrographie optique d'une section transversale de l'assemblage de $Ni / Ni-NiO$ (MGF) / $MgO$ ..		18
Figure 1.13: Diagramme schématique de la procédure de fabrication d'une MGF, $Cr_3C_2 / Ni/Cr_3C_2$ .....		19
Figure 1.14: Schéma de pulvérisation automatisée de poudre et système d'empilage pour fabriquer les MGF par (SHS / HIP) .....		19
Figure 1.15: Principe de la projection plasma [29], [30] .....		21
Figure 1.16: Illustration des de propriétés matérielles de profils. ....		24
Figure 1.17: Modèle d'une Chambre de combustion et les conditions de température d'un propulseur [38].....		25
Figure 1.18:Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel : première approche; b) deuxième approche. ....		26
Figure 1.19: Fraction volumique du métal le long de l'épaisseur. ....		26
Figure 1.20. Squelette Microstructure du matériau MGF. [42] .....		28
Figure 2.1: Plaque de forme géométrique arbitraire. ....		31
Figure 2.2: Géométrie d'un bord de plaque avant et après déformation selon la théorie classique des plaques (Reddy.J.N 2004) .....		32
Figure 2.3: Forces et moments agissant sur un élément de plaque. ....		39
Figure 3.1: chargement d'une palque FGM. ....		54
Figure 3.2: conditions aux limites cas : "SSSS" .....		56
Figure 3.3: conditions aux limites cas : "SCSC" .....		59
Figure 3.4: conditions aux limites cas : "SFSF".....		60
Figure 3.5: conditions aux limites cas : "SSSC".....		63
Figure 3.6: conditions aux limites cas : "SSSF".....		64
Figure 3.7: conditions aux limites cas : "SCSF" .....		65

Figure 4.1: Les racines d'une fonction non-linéaire. ....78

Figure 4.2: Possibilité de localisation des solutions pour la méthode bi section. ....79

Figure 4.3: Organigramme de la solution. ....84

Figure 5.1: Charge critique (Pcr) selon le rapport d'épaisseur,  $(\eta = 0.5)$ ,  $(k_1, k_2) = (-1, 0)$  et pour une plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....88

Figure 5.2: Charge critique (Pcr) selon le rapport d'épaisseur,  $(\eta = 0.5)$ ,  $(k_1, k_2) = (-1, -1)$  et pour une plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....88

Figure 5.3: variation de la charge critique de flambement (Pcr) selon le rapport  $\eta$  pour une plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....89

Figure 5.4: variation de la charge critique de flambement (Pcr) selon le rapport  $\eta$  pour une plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> avec tous les cas de chargement possible. ....89

Figure 5.5: La charge critique (Pcr) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ ,  $(\eta = 0.5)$ ,  $(h/a) = 1/100$  plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....90

Figure 5.6: La charge critique (Pcr) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ ,  $(\eta = 0.5)$ ,  $(h/a) = 1/20$  plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....90

Figure 5.7: La charge critique (Pcr) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ ,  $(\eta = 1)$ ,  $(h/a) = 1/100$  plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....91

Figure 5.8: La charge critique (Pcr) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ ,  $(\eta = 1)$ ,  $(h/a) = 1/20$  plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....91

Figure 5.9: variation de la charge critique de flambement (Pcr) selon le rapport  $\eta$  pour une plaque FGM SCSC Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....93

Figure 5.10: La charge critique (Pcr) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ ,  $(\eta = 0.5)$ ,  $(h/a) = \frac{1}{100}$  plaque FGM SCSC Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....93

Figure 5.11: variation de la charge critique (Pcr) de flambement selon le rapport  $\eta$  pour une plaque FGM SFSF Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....95

Figure 5.12: La charge critique (Pcr) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ ,  $(\eta = 0.5)$ ,  $(h/a) = \frac{1}{100}$  plaque FGM SFSF Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....95

Figure 5.13: La charge critique (Pcr) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ ,  $(\eta = 0.5)$ ,  $(h/a) = \frac{1}{100}$  plaque FGM « SSSC ». Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....97

Figure 5.14: La charge critique (Pcr) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ ,  $(\eta = 0.5)$ ,  $(h/a) = \frac{1}{100}$  plaque FGM SSSF Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....98

Figure 5.15: La charge critique (Pcr) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ ,  $(\eta = 0.5)$ ,  $(h/a) = \frac{1}{100}$  plaque FGM SCSF Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....100

Figure 5.16: Comparaison entre les conditions symétriques dans le cas d'une compression uni-axial d'une plaque FGM  $(h/a = 0.01)$  de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....104

Figure 5.17: Comparaison entre les conditions antisymétriques dans le cas d'une compression uni-axial d'une plaque FGM  $(h/a = 0.01)$  de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....104

Figure 5.18: Comparaison entre les (06) conditions possibles dans le cas d'une compression uni-axial d'une plaque FGM  $(h/a = 0.01)$  de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. ....105

Figure 5.19: Plaque simplement appuyées « SSSS ». ....105

Figure 5.20: variation de paramètre fréquentiel  $\tilde{\beta}_c$  pour différentes valeurs d'épaisseur « $\delta$ », plaque carrée SSSS « $p=1$ » ....106

Figure 5.21:variation de paramètre fréquentiel ( $\bar{\beta}_c = \omega h \sqrt{\rho_c/E_c}$ ) pour différente valeur de l'exposant « p » . .....108

Figure 5.22:variation de paramètre fréquentiel  $\bar{\beta}$  pour différente valeur de l'exposant « p » pour  $\delta=0.15$  .....109

Figure 5.23:variation de paramètre fréquentiel  $\bar{\beta}$  pour différente valeur de l'exposant « p » pour  $\delta=0.05$  et  $0.055$ . .....109

Figure 5.24:Les variations des paramètres fréquentiel en fonction de l'exposant "p" pour deux plaques FGM SSSS céramique : alumina et zircone, métal : aluminium pour  $a/h =0.05$ . .....110

Figure 5.25:Effet de l'exposant sur le paramètre fréquentiel ( $\tilde{\beta}_m = \omega_{m,n} \pi^2 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ ) pour plaque SCSC cas  $h/a=0.01$ . .....110

Figure 5.26:Effet de l'élanement sur le paramètre fréquentiel ( $\tilde{\beta}_m = \omega_{m,n} \pi^2 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ ) pour plaque SCSC cas  $h/a=0.01$ . .....111

Figure 5.27:Effet de l'épaisseur sur le paramètre fréquentiel ( $\tilde{\beta}_m = \omega_{m,n} \pi^2 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ ) pour plaque SCSC cas  $p=1$  et  $b/a=1$ . .....112

Figure 5.28:Effet de l'épaisseur sur le paramètre fréquentiel ( $\tilde{\beta}_m = \omega_{m,n} \pi^2 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ ) pour plaque SCSC cas  $p=1$  et  $p=1$ . .....112

Figure 5.29:Effet des déplacements planaires sur le paramètre fréquentiel  $\tilde{\beta}_c$ , cas SSSS. ....114

Figure 5.30:Effet des déplacements planaires sur le paramètre fréquentiel  $\tilde{\beta}_c$  cas SCSC. ....114

Figure 5.31:Modes propres "Shape mode "d'une plaques rectangulaires pour les deux conditions aux limites "SSSS", "SCSC" et  $h/a=0.05$ , « p=1 »,  $a/b=1$ . .....115

Figure 5.32: Variation du paramètre fréquentiel « $\beta_m$ » en fonction du rapport d'épaisseur  $\delta=h/a$  pour les différente solutions, cas « SSSS ». .....116

Figure 5.33:Variation du paramètre fréquentiel « $\beta_m$ » en fonction du rapport d'épaisseur  $\delta=h/a$  pour les différente solutions, cas « SCSC ». .....117

LISTE DES TABLEAUX

Table 5.1: Matériaux utiliser: mélange de l'aluminium et l'alumina.....86

Table 5.2: La charge critique de flambement adimensionnelles ( $P_{cr}$ ) pour une plaque « SSSS » isotrope ( $p=0$ ) ou FGM.....87

Table 5.3: La charge critique de flambement adimensionnelle ( $P_{cr}$ ) pour une plaque « SCSC » isotrope ( $p=0$ ) ou FGM.....92

Table 5.4: La charge critique de flambement adimensionnelle  $P_{cr}$  pour une plaque « SFSF » isotrope ( $p=0$ ) ou FGM .....94

Table 5.5: La charge critique de flambement adimensionnelle  $P_{cr}$  pour une plaque « SSSC » isotrope ( $p=0$ ) ou FGM.....96

Table 5.6: La charge critique de flambement adimensionnelle  $P_{cr}$  pour une plaque « SSSF » isotrope ( $p=0$ ) ou FGM .....98

Table 5.7: La charge critique de flambement adimensionnelle  $P_{cr}$  pour une plaque « SFSC » isotrope ( $p=0$ ) ou FGM.....99

Table 5.8: Comparaison des charges critiques pour les différentes conditions aux limites et chargements pour  $\eta = 1, (ha) = 1100$  d'une plaque FGM Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.....101

Table 5.9: Comparaison des fréquences  $\omega = \omega a^2 \sqrt{12\rho(1-\nu^2)Eh^3}$ ,  $ab = 1, ha = 0.005$  cas SSSS.....106

Table 5.10: Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale  $\beta_c = \omega a^2 \rho c E$  pour une plaque FGM SSSS Al/ZrO<sub>2</sub> carrée.....107

Table 5.11: Comparaisons des paramètres de fréquence naturelle  $\beta_c = \omega h \rho c E$  pour une plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> carrée ( $\eta=1$ ).....107

Table 5.12: Effet des déplacements planaires sur le paramètre fréquentiel  $\beta_c$ .....113

Table D 1: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SSSS » ( $h/a=0.01$ ) de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.....135

Table D 2: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SSSS » ( $h/a=0.05$ ) de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.....136

Table D 3: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SCSC » ( $h/a=0.01$ ) de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.....137

Table D 4: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SFSF » ( $h/a=0.01$ ) de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.....138

Table D 5: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SSSC » ( $h/a=0.01$ ) de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.....139

Table D 6: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SSSF » ( $h/a=0.01$ ) de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.....139

Table D 7: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SFSC » ( $h/a=0.01$ ) de Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.....140

Table D 8: Variations des 03 premier paramètres fréquentiel  $\beta_c$  de plaque FGM en fonction d'épaisseur, cas "SSSS".....140

Table D 9: Variations de paramètre fréquentiel " $\beta_m$ " du plaque FGM "Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>" en fonction d'exposant et d'épaisseur, cas "SSSS".....141

*Table D 10: Variations de paramètre fréquentiel " $\beta_m$ " du plaque FGM " $Al/Al_2O_3$ " en fonction d'exposant et d'élanement, cas "SCSC".....142*

## LISTE DES SYMBOLES

$x, y$	Coordonnées Cartésiennes.
$a$	Longueur de la plaque
$b$	Largeur de la plaque
$\eta$	Élancement de la plaque.
$h$	Épaisseur de la plaque.
$t$	temps
$u$	Déplacement longitudinal dans la direction x,
$v$	Déplacement longitudinal dans la direction y,
$w_0$	Déplacement transversal dans la direction z,
$u_0$	Déplacement longitudinal dans la direction x pour $z=0$ ,
$v_0$	Déplacement longitudinal dans la direction y pour $z=0$ ,
$N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}$	Efforts normaux par unité de longueur.
$M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}$	Moments de flexion par unité de longueur.
$V_{xx}, V_{yy}$	Efforts tranchants par unité de longueur.
$\{\sigma\}$	Tenseur de contrainte.
$\{\varepsilon\}$	Tenseur de déformation de Cauchy.
$\{E\}$	Tenseur de déformation de Green-Lagrange.
$[C]$	Matrice d'élasticité.
$\bar{P}_{cr}$	Charge critique de flambement adimensionnelle.
$P_{cr}$	Charge critique de flambement.
$\rho$	Densité de masse.
$\rho_m$	Densité du Métal.
$\rho_c$	Densité de Céramique.
$E$	Module de Young.
$E_m$	Module de Young du Métal.
$E_c$	Module de Céramique.
$\hat{D}$	Rigidité à la flexion équivalente
$\nu$	Coefficient de Poisson.

$\alpha_f$	Coefficient de dilatation thermique.
$I_1, I_2, I_3$	Inerties de déplacement et rotation.
$V_m$	Fraction volumique.
$U$	Energie de déformation.
$K$	Energie cinétique.
$\omega$	Pulsation propre.
$\beta_c, \beta_m, \bar{\beta}$	Paramètre de fréquence pour les plaques à gradient fonctionnel.
$\alpha_n, \beta_n$	Paramètre des demi-ondes
$\phi_1, \phi_2$	Fonctions de découplage
$\lambda_1, \lambda_2$	Racines de l'équation caractéristique.

# Introduction

---

## **Motivation et objectif**

Les composites sont de plus en plus un élément essentiel des matériaux d'aujourd'hui, car ils offrent des avantages tels que le faible poids, résistance à la corrosion, résistance à la fatigue, un assemblage plus rapide, etc. L'augmentation spectaculaire de l'utilisation des matériaux composites dans tous les types de structures d'ingénierie (en mécanique, aéronautique, génie civil, marine, nucléaire, biomécanique) et le nombre de revues et de documents de recherche publiés au cours des deux dernières décennies attestent du fait qu'il y a eu un effort important pour développer les systèmes de matériaux composites.

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites appelés matériaux à gradient fonctionnel (MGF) a attiré une attention considérable des chercheurs.

Matériaux à gradient fonctionnel (FGM) sont une forme de composite dont les propriétés changent progressivement avec la position. Le gradient peut être adapté pour répondre aux besoins spécifiques grâce à l'utilisation des pièces. Le changement dans la propriété de la matière est causé par une composition chimique dépendant de la position, la microstructure ou ordre atomique.

Un FGM typique présente un effet élevé de couplage flexion-extension. La capacité à prédire la réponse de plaques de MGF et des coques lorsqu'ils sont soumis à des charges thermiques et mécaniques est d'un intérêt primordial pour l'analyse structurale.

Un des problèmes importants mérite une attention particulière est l'étude de leur réponse au flambement, et vibrations.

L'objectif de cette mémoire est de l'étude du flambement et vibration des plaques FGM rectangulaire et l'élaboration d'une solution analytique des deux problèmes et la programmation de ces solutions. En appliquant la théorie classique des plaques de Kirchhoff la prise en compte de l'effet inertie de rotation et les déplacements planaires.

## Chapitre 1 : Revue de littérature

### *Objectif :*

Vu la naissance récente d'un nouveau matériau composite (matériau à gradient fonctionnel) et son utilisation dans cette mémoire, ce chapitre est dédié à présenter le positionnement du problème. Une présentation générale du matériau composite et du rôle des différentes phases (matrice, renfort, charge, interface,...) y sera faite avec ses avantages et ses inconvénients. Les mécanismes de rupture des composites unidirectionnels seront ensuite abordés en insistant sur le phénomène de délaminage de ce type de matériau. Puis, Un historique détaillé du développement et la mise en œuvre des matériaux à gradient fonctionnelle est donné dans la première partie de ce chapitre. Dans la deuxième partie un état de l'art très riche de l'évolution de la technologie de fabrication des FGM, leur design. Dans la troisième partie de ce chapitre un résumé des travaux sur les méthodes de modélisation des FGM est présenté.

---

### 1.1. Matériaux composites (Introduction):

Les matériaux composites ont une longue histoire. Ils ne sont pas une nouveauté; ils ont été utilisés dès l'antiquité par l'homme; bois et torchis sont des matériaux composites de la vie quotidienne. On utilise aussi des matériaux composites pour optimiser les performances de certaines armes; par exemple: les arcs mongols, dans lesquels les parties comprimées sont en corne, et les parties tendues en bois, soies collées et tendons de bœuf. Les épées damassées ou sabres japonais dont la lame est en acier et fer doux: la partie en acier est stratifiée comme une pâte feuilletée, orientant les retassures et impuretés dans le sens long puis façonnée en U dans lequel on place le fer doux. Le sabre résiste alors à la flexion et aux chocs.

On voit ainsi prendre forme, à cette époque, la dichotomie toujours actuelle des produits composites à grande diffusion et des pièces composites à hautes performances.

Dans un sens large, le mot "composite" signifie "constitué de deux ou plusieurs parties différentes". Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément.

L'appellation "matériau composite" ou "composite" qui sera précisée dans le cadre de cette mémoire est: un matériau composite contient une phase discontinue de renfort plus rigide et plus résistante que la phase continue de la matrice. Par conséquent, ses propriétés mécaniques résultent essentiellement de:

- La nature des constituants et leurs propriétés.
- La géométrie du renfort (forme, élancement), sa distribution (répartition, orientation), ainsi que sa concentration (taux volumique ou massique).

### 1.2. Classification des matériaux composites:

La classification des matériaux composites peut être effectuée selon plusieurs façons. En fonction de la nature de la matrice, les matériaux composites peuvent se classer selon les trois familles suivantes:

- **Composites à matrice polymérique:** Ce type de composites a été développé surtout pour les applications aéronautiques où la réduction de masse est essentielle. Les polymères sont donc caractérisés par une faible densité, une résistance mécanique relativement faible, et une grande déformation à rupture.
- **Composites à matrice métallique:** Dans ces composites, la matrice est métallique comme l'aluminium ou le titane qui sont renforcés par des renforts généralement non-métalliques, souvent des céramiques. Leurs propriétés mécaniques sont donc meilleures ou plus adaptables au chargement que leurs matrices polymériques. Ils sont largement appliqués dans les fabrications des moteurs d'automobile.
- **Composites à matrice céramique:** Les matériaux céramiques telles que le verre et le carbure de silicium (SiC) sont utilisés pour la matrice de ce type de composite. La matrice peut être associée aux renforts comme des métaux, le carbone, et des céramiques. Ce type de composite est développé dans le but d'améliorer les propriétés mécaniques telles que la ténacité, et la résistance au choc thermique.

Une manière plus utilisée consiste à les classer selon les types des renforts. Les composites sont donc divisés en quatre catégories suivantes:

- **Composites à renforts de fibres:** Les renforts de ce type de composites sont sous forme de fibres. La longueur des fibres est bien supérieure aux dimensions de sa section transversale. Selon leurs applications, les fibres utilisées prennent la longueur de la pièce (fibres continues) ou soit coupées en petite longueur (fibres courtes).
- **Composites stratifiés:** Le composite est constitué par au moins deux couches minces de matériau. Les couches peuvent être composées de différents matériaux monolithiques comme dans les métaux plaqués ou de même matériau composite empilé selon différentes orientations comme pour des stratifiés composites à renforts de fibres longues. Ce dernier devient une classe hybride du composite comportant à la fois le composite à renfort de fibres et la technique de stratification.
- **Composites à renforts de particules:** Le renfort est considéré comme une particule si toutes ses dimensions sont approximativement égales et petites devant les autres dimensions du matériau. Les particules dures sont dispersées aléatoirement dans la matrice moins rigide.

- **Composites à renforts de paillettes:** Les paillettes ont une dimension très faible par rapport aux autres dimensions. La dispersion de ces "particules minces" est généralement aléatoire. Cependant, les paillettes peuvent être rangées parallèlement afin d'avoir des propriétés plus uniformes dans le plan.

### 1.3. Constituants des matériaux composites:

Un matériau composite est constitué de différentes phases nommées renforts et matrice. Lorsque le matériau composite est non endommagé, les renforts et la matrice sont parfaitement liés et il ne peut pas y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases. Les renforts se présentent sous forme de fibres continues ou discontinues. Le rôle du renfort est d'assurer la fonction de résistance mécanique aux efforts. La matrice assure quant à elle la cohésion entre les renforts de manière à répartir les sollicitations mécaniques. L'arrangement des fibres, leur orientation permettent de renforcer les propriétés mécaniques de la structure.

Les propriétés mécaniques de l'interface entre fibres et matrice sont très importantes dans la réalisation d'une structure composite. En effet, il ne doit y avoir ni glissement ni séparation entre les différentes phases de la structure pour obtenir de bonnes caractéristiques mécaniques élastiques.

#### 1.3.1. Matrices

Dans un grand nombre de cas, la matrice constituant le matériau composite est une résine polymère. Les résines polymères existent en grand nombre et chacune à un domaine particulier d'utilisation. Dans les applications où une tenue de la structure aux très hautes températures est requise, des matériaux composites à matrice métallique, céramique ou carbone sont utilisés. Dans le cas des matériaux en carbone des températures de 2 200°C peuvent être atteintes. La classification des types de matrices couramment rencontrées est par :

##### 1.3.1.1 Résines thermodurcissables

Ce sont les résines les plus utilisées de toutes les matrices, pour des applications commerciales, industrielles, et de transport. L'adhésion avec les fibres de verre est excellente. Les résines de polyester et de vinylester sont en majeure partie limitées aux applications basses performances à cause d'un problème d'adhésion avec les fibres hautes performances telles qu'en fibres de carbone et aramide.

### 1.3.1.2 Résines thermoplastiques

Lorsqu'une résine thermodurcissable est soumise à une élévation de température, il se crée des relations chimiques au cours desquelles des liaisons covalentes sont formées entre les chaînes des molécules résultant en un réseau tridimensionnel. Le polymère final se présente sous la forme d'un corps solide et infusible. La polymérisation étant irréversible, ce matériau ne peut être mis en forme qu'une seule fois au moment de sa fabrication.

### 1.3.2. Les fibres

La rupture des matériaux à haute résistance ou à haut module est généralement provoquée par la propagation de fissures. Les matériaux en forme de fibre sont intrinsèquement plus résistants à la rupture qu'en forme massive car la taille des défauts est limitée par le diamètre faible. Dans un composite fibreux, la tenue mécanique est assurée principalement par les fibres. Par sa nature filamenteuse, la rupture de quelques fibres a pour résultat la redistribution du chargement sur les autres fibres, ce qui empêche la rupture catastrophique de la structure. Les fibres les plus souvent rencontrées dans les composites sont les suivantes:

- **Fibre de verre:** Ce type de fibre est très répandu dans des applications à basse performance ainsi que des applications haute performance telles que les réservoirs de propulseurs de fusée. Leurs avantages incluent un prix compétitif, une disponibilité, et une résistance élevée. Cependant, à cause de leur rigidité relativement faible, les fibres de verre sont progressivement remplacées par les fibres aramides ou les fibres de carbone dans les applications de haute performance.
- **Fibres de carbone:** Actuellement, les fibres de carbone sont le plus répandues pour les matériaux composites hauts performances. Deux avantages principaux de ces fibres sont leur fabrication plus adaptée à la production à grande échelle que d'autres fibres hautes performances et leurs excellentes propriétés mécaniques plus facilement transférables aux matériaux composites. Leur prix reste toutefois prohibitif pour les produits grand public.
- **Fibres aramides:** Ces fibres appartiennent à la famille des fibres polyamides aromatiques. Elles possèdent une résistance élevée et une rigidité considérablement supérieure à celle des fibres de verre. La tolérance aux dommages est très bonne également. Leurs

désavantages incluent une résistance en compression inférieure à celle des fibres de carbone et une adhésion relativement faible aux matrices.

#### 1.4. Considérations sur l'usage des matériaux composites:

Dans la conception des produits, il est essentiel d'évaluer et comparer les composites avec les matériaux conventionnels pour bien choisir les matériaux. Les avantages et les inconvénients principaux des matériaux composites sont présentés ci-dessous.

##### 1.4.1. Les avantages:

Les avantages les plus cités des matériaux composites incluent:

- **Propriétés mécaniques adaptables:**

Un stratifié est un empilement de plis élémentaires qui se comportent ensemble comme un élément structural. Un pli élémentaire est anisotrope, ou orthotrope dans la plupart des cas, avec la résistance et la rigidité dans la direction des fibres beaucoup plus élevées que dans des autres directions. Il faut alors associer différentes orientations de fibres afin d'obtenir un composite capable de résister à diverses sollicitations.

Un avantage principal du stratifié composite est que les plis élémentaires peuvent être orientés de telle façon que la résistance dans une direction donnée corresponde aux chargements prévus. La part de matériau dans des directions non-sollicitées est donc minimisée.

- **Haute résistance et haut module:**

Les propriétés mécaniques élevées, notamment la résistance et la rigidité des matériaux composites à hautes performances permettent de répondre aux exigences de l'industrie (exemple : aéronautique). D'autres industries en profitent également, par exemple la vitesse d'une balle de tennis est plus élevée avec des raquettes en carbone/époxy.

- **Masse:**

Les matériaux composites hauts performances ont une densité de l'ordre de 1,6 contre 2,7 pour les alliages d'aluminium. Selon Airbus, ils autorisent au gain de 10 à 30% sur les éléments de structure. Ce gain de masse permet d'employer des moteurs moins puissants. Ceux-ci consomment moins et permettent de

réduire la taille des réservoirs de carburant pour le même cahier des charges de l'avion.

- **Production:**

Les matériaux composites permettent de simplifier l'assemblage de la structure, ce qui compense partiellement leur prix élevé. La réduction du nombre de pièces par rapport aux matériaux conventionnels peut être substantielle. Par exemple, un tronçon de fuselage qui réclame typiquement mille pièces et plusieurs milliers de fixations est fabriqué en un seul morceau pour le Boeing 787. Sur la chaîne d'assemblage final, l'avion complet devrait voir le jour en trois contre onze jours pour un Boeing 737.

- **Maintenance:**

Les composites ont besoin de moins d'entretien que les alliages métalliques. D'une part, ils ne sont pas sensibles à la corrosion. D'autre part, la tenue en fatigue est très bonne. Par exemple, l'intervalle entre deux révisions complètes du Boeing 787, qui utilise massivement des matériaux composites, est porté à douze ans au lieu de dix ans sur un Boeing 777.

#### 1.4.2. Les inconvénients:

Bien que les avantages des matériaux composites soient impressionnants, ces matériaux ne sont pas une solution miracle pour toutes les applications. Des inconvénients ou des problèmes existent et peuvent empêcher leur usage. Les inconvénients les plus courants sont les suivants:

- **Coût:**

Les matériaux composites hautes performances ont été développés principalement pour répondre aux besoins de la communauté aérospatiale qui sont très exigeants au niveau de la technologie et de la sécurité. Par conséquent, l'élargissement de la science des composites aux produits plus populaires (de grande consommation) est lent. Le coût des matériaux composites reste élevé.

- **Conception et analyse:**

Les matériaux composites sont souvent à la fois hétérogènes et anisotropes. Ces deux caractéristiques sont différentes des celles de la plupart des matériaux classiques qui ont été largement étudiés. C'est pourquoi, ils nécessitent de nouvelles approches, généralement plus compliquées, pour la conception et l'analyse des structures.

L'hétérogénéité impose l'analyse d'au moins de deux points de vue: la micromécanique et la macro-mécanique. De plus, les matériaux anisotropes nécessitent plus de propriétés mécaniques que les matériaux isotropes pour établir les relations contrainte-déformation.

Pour les stratifiés, la rupture se produit de plusieurs façons différentes. Il est donc difficile d'établir une théorie de résistance qui tienne compte de tous les modes de rupture et de leurs interactions. Par conséquent, la détermination des résistances est plus compliquée et nécessite des vérifications expérimentales. De plus, la résistance d'un stratifié peut être influencée par les contraintes inter-laminaires au voisinage des bords libres.

- **Assemblage:**

Les matériaux composites sont généralement plus fragiles que les matériaux métalliques conventionnels. Par conséquent, l'assemblage des pièces en matériaux composites pose toujours du problème de faible résistance à cause de la concentration des contraintes. Les assemblages sont souvent renforcés par des inserts métalliques ou par l'augmentation de l'épaisseur du stratifié qui entraîne une masse supplémentaire pour la structure.

- **Tolérance aux dommages:**

Un des points faibles les plus importants des matériaux composites est la tolérance aux dommages. Des dommages de diverses natures peuvent se produire dans la vie d'une structure, par exemple l'impact, soit en service ou pendant la maintenance, est inévitable.

En règle générale, plus un matériau est ductile, plus il est capable de tolérer un dommage car la ductilité fournit la capacité d'absorber de l'énergie. Par conséquent, les structures métalliques ont tendance se déformer plutôt que de se fracturer sous l'impact. Le caractère fragile des matériaux composites ne permet pas, par contre, de subir l'impact sans avoir d'endommagement

Les dommages sont souvent des fissurations internes de la matrice, indétectables sur la surface de la structure. Ce type de dommages diminue considérablement la résistance en compression de la pièce endommagée. Les dommages des fibres diminuent la résistance en compression ainsi qu'en traction. Les outils pour évaluer la tolérance aux dommages des structures sont un programme d'inspection, l'analyse de la résistance résiduelle, et l'analyse de la propagation des dommages.

### 1.5. Mécanismes de rupture des composites unidirectionnels:

Le matériau composite à renforts de fibres longues est très répandu dans les applications où la réduction de masse est critique. Plus l'utilisation d'un matériau est élargie, plus la probabilité de rupture éventuelle est augmentée. La capacité à caractériser les ruptures, par exemple en termes d'identification des modes de rupture, des paramètres caractéristiques, ou des valeurs critiques à la rupture, est essentielle pour assurer l'intégrité des pièces en service et pour la conception des futurs produits.

#### 1.5.1. Trois modes de rupture des matériaux composites unidirectionnels:

La rupture des composites stratifiés peut se produire de plusieurs façons très complexes. Les modes de rupture dépendent de la stratification et de la direction du chargement par rapport à l'orientation des fibres. Les [Figure 1.1](#) et [Figure 1.1](#) montrent les allures des ruptures par flexion et par traction respectivement

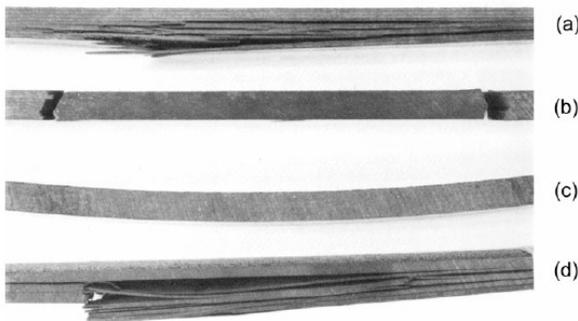


Figure 1.1: Rupture par flexion de différentes séquences d'empilement: (a) Quasi-isotrope

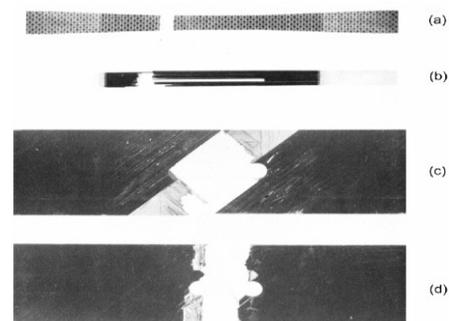


Figure 1.2: Ruptures par traction de différentes séquences d'empilement: (a) 0°/90°

La description de la rupture à l'échelle du pli est relativement efficace pour le classement des mécanismes de rupture. Les stratifiés à renforts de fibres longues présentent trois types de rupture: *rupture intra-laminaire*, *rupture inter-laminaire*, et *rupture trans-laminaire*.

Ces trois modes de rupture présentés à la [Figure 1.3](#), définissent le plan de rupture par rapport aux constituants du matériau. La rupture intra-laminaire se trouve à l'intérieur d'un pli tandis que la rupture inter-laminaire décrit une rupture entre deux plis adjacents. La rupture trans-laminaire est orientée transversalement à l'orientation de fibres dans le pli endommagé.

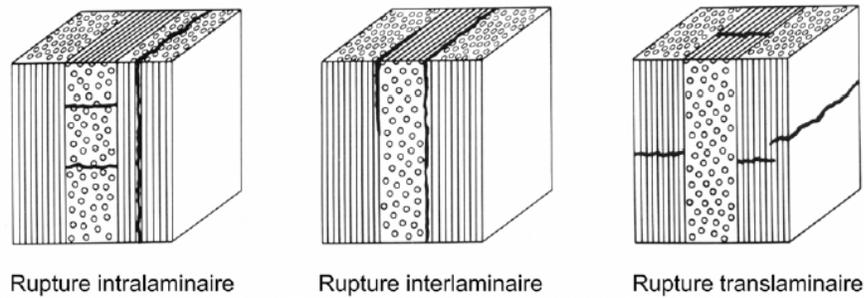


Figure 1.3: Trois modes de rupture dans un stratifié  $0^\circ/90^\circ/0^\circ$  [SMITH 1993].

- **La rupture intra-laminaire** : due principalement à la faible résistance de la matrice et de l'adhérence entre la matrice et les fibres. Elle est provoquée par les contraintes dans le plan du stratifié. Un pli se détériore par la contrainte résultante en traction dans la direction normale aux fibres. Ce type de rupture est donc couramment appelée la "fissure transverse". Normalement, cette fissuration de la matrice se produit bien avant la rupture de fibre.
- **La rupture inter-laminaire** se produit dans l'interface entre deux plis d'un stratifié. La surface de rupture montre, en général, la rupture de la matrice et la décohésion fibre/matrice. Ces mécanismes impliquent peu de rupture de fibres. Comme pour les matériaux métalliques, la rupture peut être en mode I (ouverture), mode II (cisaillement), mode III (cisaillement anti-plan) ou une combinaison des trois modes.
- **La rupture trans-laminaire** : concerne la rupture de fibres. Les surfaces de rupture sont donc généralement marquées par la morphologie rugueuse des bouts de fibres. En effet, la contrainte à rupture des fibres est plus importante que celle de tous les autres constituants d'un composite stratifié. Par conséquent, ce mécanisme de rupture entraîne souvent la rupture totale du stratifié. La rupture trans-laminaire peut être séparée en deux modes selon les chargements: la rupture en traction et le micro-flambage en compression. La rupture peut être provoquée par un mode individuel ou une combinaison des deux modes.

### 1.5.2. Le délaminage: les phénomènes physiques associés :

L'un des avantages majeurs des composites stratifiés à renforts de fibres longues est la capacité d'orienter les fibres de chaque pli afin d'avoir les propriétés, souvent la résistance et la rigidité, adaptées aux chargements dans les directions prévues. Malgré d'excellentes propriétés dans le plan, les stratifiés présentent un problème propre aux matériaux réalisés par stratification: la

rupture inter-laminaire. Ce mécanisme de rupture se caractérise par un décollement ou une décohésion entre les plis du stratifié. Il est couramment appelé le "délaminage".

Un stratifié soumis à un chargement présente différentes étapes de dégradation. Dans le scénario d'évolution des défauts le plus "classique", la matrice et l'interface fibre/matrice sont les premières à se détériorer (Figure 1.4-a). Les premiers défauts sont donc la microfissuration de la matrice et la décohésion fibre/matrice à l'échelle microscopique. Ensuite, ces défauts s'agrandissent de façon stable à l'échelle du pli par coalescence (Figure 1.4-b), les micro-défauts se rejoignent pour former des fissurations transverses. Les fissures transverses peuvent parvenir à l'interface des plis et provoquer le délaminage sous l'effet des contraintes inter-laminaires (Figure 1.4-c). Ces défauts et leur évolution dépendent de l'empilement, du nombre de plis, du chargement, et de la taille de la forme de la structure considérée.

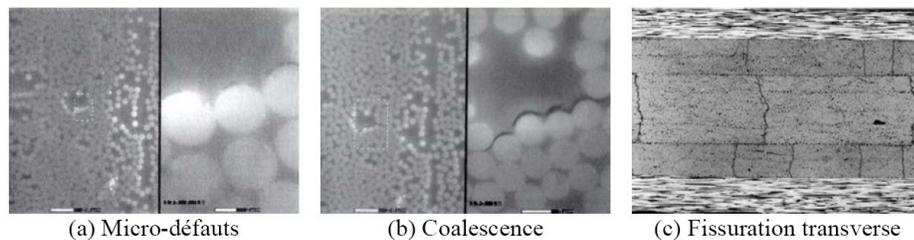


Figure 1.4: Évolution de défauts

Les micro-mécanismes principaux de l'endommagement qui accompagnent un délaminage sont présentés schématiquement dans la Figure 1.5 Ils incluent:

- **Zone endommagée:** la forte concentration de contraintes autour de la pointe de fissure provoque une zone endommagée où se trouvent la déformation plastique et/ou des microfissures de la matrice.
- **Fissure latérale:** Après le passage de la fissure, les microfissures dans la zone endommagée peuvent se transformer en des fissures latérales de la matrice autour du plan de délaminage.
- **Pontage de fibres:** La présence de fissures au-dessus ou en dessous du plan de délaminage facilite la création de ponts de fibres reliant les deux surfaces délaminées. Certains ponts de fibres se rompent pendant l'avancée du délaminage.

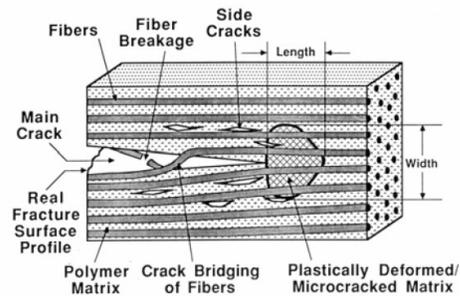


Figure 1.5: Mécanismes d'endommagement accompagnant le délaminage

## 1.6. Les « FGM » Introduction :

Les matériaux composites les plus légers avec des rapports élevés résistance/poids et poids/rigidité ont été utilisés avec succès dans l'industrie aéronautique, navale et autres applications en ingénierie. Figure 1.6 donne une présentation des différents ensembles des matériaux existants en fonction de leurs densités  $\rho$  et de leurs modules de Young  $E$ . Toutefois, le matériau composite traditionnel est incapable d'être employé dans des environnements à haute température. En général, les métaux ont été utilisés dans le domaine industriel pendant de nombreuses années en raison de leur excellente résistance et ténacité. À haute température, la résistance du métal est réduite similairement à un matériau composite traditionnel. Les matériaux céramiques ont d'excellentes caractéristiques de résistance à la chaleur. Toutefois, les applications des céramiques sont généralement limitées en raison de leur faible résistance.

Récemment, une nouvelle classe de matériaux composites appelés matériaux à gradient fonctionnel (MGF) a tiré une attention considérable des chercheurs. Un MGF typique, avec un effet élevé de couplage flexion-extension, est un composite inhomogène fabriqué à partir de différentes phases de composants de matériaux (le plus souvent en céramique et métal). Un exemple de ce matériau est illustré dans la Figure 1.7 [1] où les particules sphériques ou presque sphériques sont intégrées au sein d'une matrice isotrope.

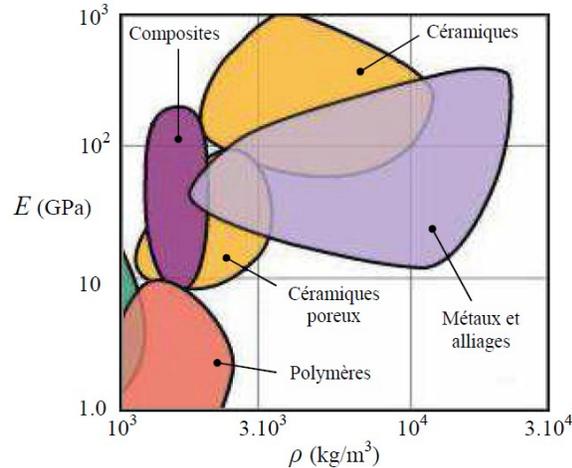


Figure 1.6: Représentation des matériaux existants en fonction de leurs densités  $\rho$  et de leurs modules de Young  $E$  [2]

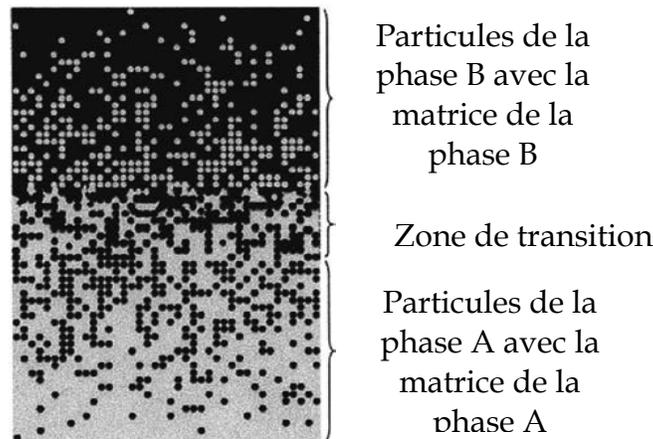


Figure 1.7: Matériaux à gradient fonctionnel avec des fractions volumiques des phases constitutives graduées [1].

La Figure 1.8 montre une micrographie par microscope électronique à balayage de la section transversale

Dans un matériau à gradient fonctionnel, les différentes phases micro-structurales ont des fonctions différentes, et le matériau à gradient fonctionnel global atteint le statut multi structural par graduation de leurs propriétés. En variant progressivement la fraction volumique des constituants du matériau, leurs propriétés matérielles présentent un passage lisse et continu d'une surface à une autre, éliminant ainsi les problèmes d'interface et l'atténuation des concentrations de contraintes thermiques. Cela est dû au fait que le constituant céramique du matériau à gradient fonctionnel est capable de résister à des environnements de haute température en raison de leurs meilleures caractéristiques de résistance thermique, tandis que le constituant métallique

assure une meilleure performance mécanique et réduit la possibilité d'une rupture catastrophique.

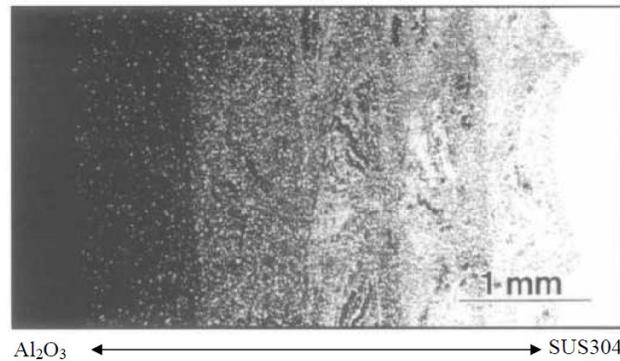


Figure 1.8: Micrographie par microscope électronique à balayage d'une section transversale d'une billette en matériaux à gradient fonctionnel ( $Al_2O_3$ -SUS304).

Donc l'application des plusieurs possibilités du concept FGM; il est anticipé que les matériaux vont être améliorés et de nouvelles fonctions seront créées.

Le matériau à gradient fonctionnel a été introduit pour la première fois au milieu des années 1980 par un groupe de chercheurs japonais [3] [4]. Depuis, un effort a été suivi pour développer des matériaux à haute résistance basés sur les matériaux à gradient fonctionnel. Ces matériaux ont été initialement conçus comme des matériaux de barrière thermique pour les structures aérospatiales et les réacteurs de fusion [5] [6], [7]. Ils sont maintenant développés pour un usage général en tant que composants structuraux dans un environnement de haute température. Un exemple d'une lame en matériau à gradient fonctionnel en rotation à parois minces est illustré par la Figure 1.9-a [8]. Les applications potentielles des matériaux à gradient fonctionnel sont diverses et nombreuses. Des applications des matériaux à gradient fonctionnel ont été récemment rapportées dans la littérature, par exemple, les capteurs de MGF [9] et les vérins [10], blindage de MGF métal/céramique [11], détecteurs photoélectriques de MGF [12], et MGF dentaires [13] Figure 1.9-b. Un certain nombre de revues traitant les divers aspects de MGF ont été publiés au cours des dernières années [14], [15], [16], [17], [18]. Ils montrent que la plupart des études de recherche des MGF au début avaient plus porté sur l'analyse des contraintes thermiques et mécaniques de la rupture. Une recherche complète menée en flexion, flambage, et l'analyse des vibrations des plaques et coques en MGF a été présentée par [19]. Récemment, [20] ont présenté une recherche bibliographique des principales évolutions en MGF qui incluent transfert de chaleur, contrainte,

stabilité et analyses dynamiques, expérimentation, fabrication et conception, applications et rupture.

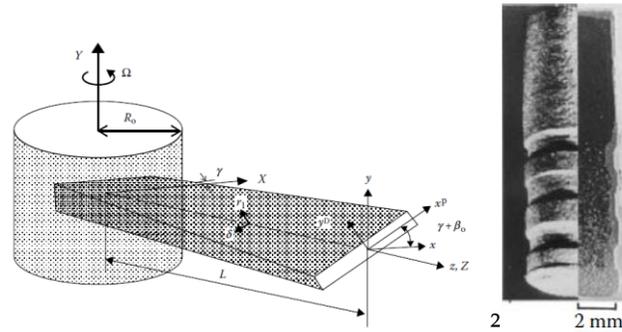


Figure 1.9: a) une lame à parois minces en rotation dans une turbine [8]; b) dent d'implantation en matériaux à gradient fonctionnel (Ti/20HAP) [13].

### 1.7. Le Gradient :

Contrairement aux matériaux homogènes, les propriétés des MGF varient non seulement avec leur composition, mais dépendent également de la connectivité de la structure du réseau interne. Figure 1.10 montre une représentation schématique de la microstructure commune produite dans un matériau à cause de l'augmentation du contenu de la deuxième phase.

À des fractions de faible volume, la seconde phase existe sous forme des particules isolées dispersées dans une matrice (a). Comme le contenu de la deuxième phase augmente, les particules commencent à avoir des contacts et à former des amas agglomérés (b).

Comme il augmente encore, une transition microstructurale critique a lieu, où la deuxième phase n'est plus dispersée, mais devient plutôt reliée entre eux sur de longues distances (c à e). La transition a un effet profond sur les propriétés des matériaux, par exemple, conductivité thermique ou électrique, et un petit changement de composition va donc se traduire par une variation distincte des propriétés [21].

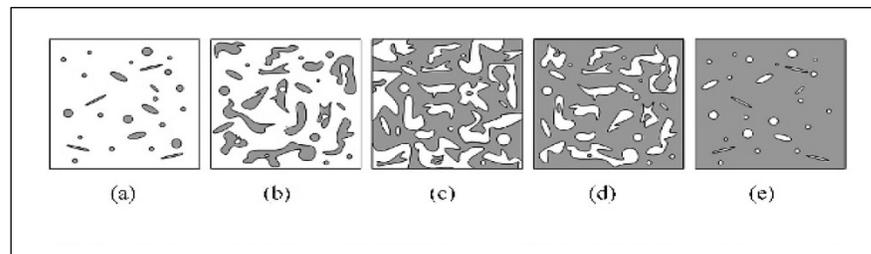


Figure 1.10: Changement schématique de la microstructure dans un profilé FGM

On remarque trois types majeurs de gradients :

### 1.7.1. Gradient de la porosité (la taille des pores) :

Le gradient de porosité peut être créé soit par le dépôt du mélange des poudres avec différentes formes des particules ou autrement par variation des paramètres de dépôt, y compris l'utilisation des détenteurs d'espace. Les gradients « de taille » des Pores en général sont réalisés par la variation de la taille des particules. Les différents comportements au frittage des poudres nécessitent une attention particulière pour gérer les problèmes de distorsion de la pièce, mais peuvent également être utilisés pour produire un gradient de porosité.

### 1.7.2. Gradients de composition chimique des matériaux monophasés:

Le dépôt des poudres avec une variation continue de la composition du mélange au cours du frittage va nous ramener une matière à une seule phase unique avec un changement souple de la répartition.

### 1.7.3. Gradients de la teneur en volume des phases et des gradients de taille de grain en deux ou plusieurs phases de matériaux:

La plupart de la littérature se concentre sur le gradient en volume des contenants des différentes phases. La microstructure résultante est constituée de deux ou plusieurs phases avec des gradients en volume des contenants. La combinaison des phases peut comporter des systèmes : métal-métal, métal-céramique et céramique-céramique.

## 1.8. Méthodes de fabrication des MGF :

Plusieurs méthodes de fabrication utilisées dans un grand nombre de recherches, prototype d'usinage, manufacture, tests d'évaluation des propriétés des matériaux élaborés dans l'académique et l'industriel pour produire des MGF destinés à diverses applications dont on cite les méthodes les plus connues :

### 1.8.1. Alliage par laser et Revêtement:

Les techniques d'alliage des surfaces, de revêtement et d'injection des particules fournissent des voies possibles pour la production de certains types des MGF. Pour produire des gradients *normales* à la surface du substrat, des couches de revêtement alliées successivement se chevauchant entièrement et peuvent être déposées en utilisant une alimentation en poudre des mélanges

avec des proportions croissantes d'un ou de plusieurs composants. La technique produit une série de couches de compositions essentiellement discrètes plutôt qu'un changement de composition graduelle. [22] ont appliqué une technique d'injection avec une charge de poudre d'un mélange de métal-céramique combinant les procédés d'alliage de laser, le revêtement, et l'injection pour produire un MGF.

### 1.8.2. Traitement de la poudre avec coulage glissant et frittage léger (Pressureless-Sintering):

[23] Ont testé un système de  $ZrO_2$ -Ni comme modèle pour fabriquer les MGF par une technique de traitement de poudre à l'aide de coulage glissant et frittage sous-pressé. Ils ont fabriqué une multicouche  $ZrO_2$ Ni avec un gradient progressif de la composition, frittée dans une atmosphère  $Ar^+$ . L'addition d'une pression lors de la coulée augmente le taux de dépôt de matériau et permet la fabrication de plus gros morceaux, ce qui a été trouvé dans une étude réalisée par [24]. Ils ont fabriqué une multicouche  $ZrO_2$ Ni formée d'un gradient de composition 'échelonné' et frittée dans une atmosphère  $Ar^+$ . Une dernière clé à une fabrication réussie était de minimiser les différences de perméabilité et les rayons de pores entre les couches voisines dans le compactage-vert (de frais) de la multicouche et donc d'éviter une fracture au cours du séchage en atmosphère ambiante.

Morinaga et ses collaborateurs [21] ont également réussi à fabriquer un MGF de  $(Al_2O_3/W)$  en utilisant un coulage glissant. Ils ont obtenu un matériau à gradient de composition qui change continuellement en contrôlant la vitesse de décantation des particules fines, qui dépend de la densité et la taille des grains.

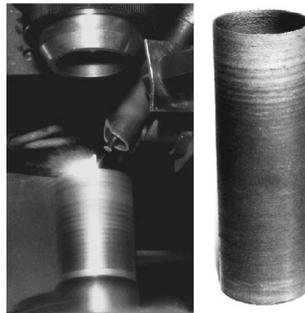


Figure 1.11: Gauche : la génération d'un composite métal-carbide avec un gradient de composition de par revêtement du faisceau laser ; à droite: tube Graduée du NiCrBSi avec 0-80% vol  $Cr_3C_2$ .

### 1.8.3. Coulage en bande :

Sabljić et Wilkinson [25] développent un procédé qui utilise le coulage en bande et le laminage pour former un composite métal / céramique. Il est bien connu que dans le traitement des métaux / céramiques composites, graves problèmes sont souvent associés à des différences significatives dans les coefficients de dilatation thermique ; contraintes qui se développent entre les couches céramiques et métalliques et qui peuvent souvent causer la dégradation par délamination. Des systèmes de MGF ont été élaborés afin de minimiser cet écart à l'interface céramique / métal. Ils ont utilisé une série de couches minces coulée en bande, chacune avec une composition céramique / métal légèrement différente. Ces couches ont été ensuite stratifiées et collées ensemble et après frittage, ils ont formé une transition progressive de la couche de surface "pure" en céramique vers une couche de surface "pure" métallique.

[26] Ont évalué le système MGF de Ni-MgO en utilisant Ni-NiO comme « substance de jointure » par frittage sous pression légère. L'idée d'utiliser des blocs MGF comme métal de jonction ou comme une aide à joindre est utile pour réduire la contrainte thermique résiduelle. (Voir Figure 1.12).

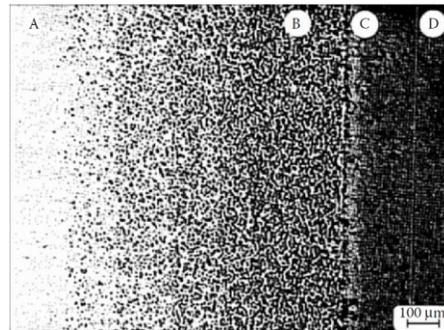


Figure 1.12: Micrographie optique d'une section transversale de l'assemblage de Ni / Ni-NiO (MGF) / MgO.

La Figure 1.12 montre un gradient de composition dans la région de la jointure entre le nickel et la solution solide. Les régions marquées sur la micrographie représentent : A nickel-B: Ni-NiO (MGF)- C: la solution solide et D: MgO.

### 1.8.4. Synthèse par auto propagation à haute température / compression isostatique à chaud (Self-Propagating High-Temperature Synthesis/Hot Isostatic Pressing (SHS/HIP).):

Miyamoto et ses associées [27] à l'Université d'Osaka ont préparé une structure symétrique  $\text{Cr}_3\text{C}_2/\text{Ni}/\text{Cr}_3\text{C}_2$  (MGF) de  $\text{Cr}_3\text{C}_2$  et Ni par la méthode SHS

/ HIP utilisent un carburant de Si (Voir Figure 1.13). Le combustible (Si) brûle dans ( $N_2$ ) à des pressions supérieures à (3 MPa) et forme ( $Si_3N_4$ ). Le carburant de (Si) rend le processus SHS / HIP sûr et plus économique. Les méthodes SHS/HIP utilisant un carburant (Si) peuvent produire instantanément des matériaux denses en raison de la production de chaleur élevée de la nitruration de (Si) dans une atmosphère de  $N_2$  sous pression. Ce nouveau et rapide processus à haute température présente des avantages pour l'économie d'énergie et le potentiel de création de nouveaux matériaux.

L'utilisation de deux techniques spécialement développées, un montage automatisé pour la pulvérisation et l'empilage de la poudre, présentés dans la Figure 1.14, une pression hydrostatique de l'échantillon enflammé à la fois pour la synthèse simultanée et la formation du MGF, une MGF  $TiB_2-Cu$  (30 mm de diamètre et 1 mm d'épaisseur) a été déposée par SHS sur un substrat de Cu, selon [28]. Les étapes du processus demande en premier la création du gradient de la composition désirée par contrôle assisté par ordinateur à la fois : le taux du transport des suspensions de poudres à la surface du substrat et le mouvement X-Y de la table de la zone d'empilage. Les échantillons ont été ensuite empilés puis pressés et refroidis iso-statiquement (CIP) et dégazés avant l'application simultanée de la synthèse par auto propagation à haute température SHS et la consolidation.

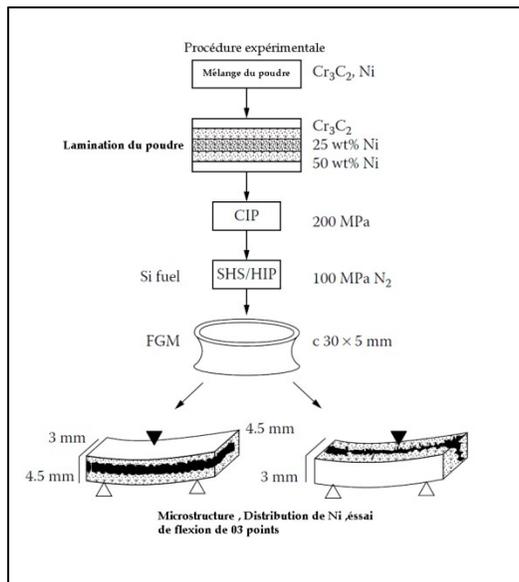


Figure 1.13: Diagramme schématique de la procédure de fabrication d'une MGF,  $Cr_3C_2 / Ni/Cr_3C_2$ .

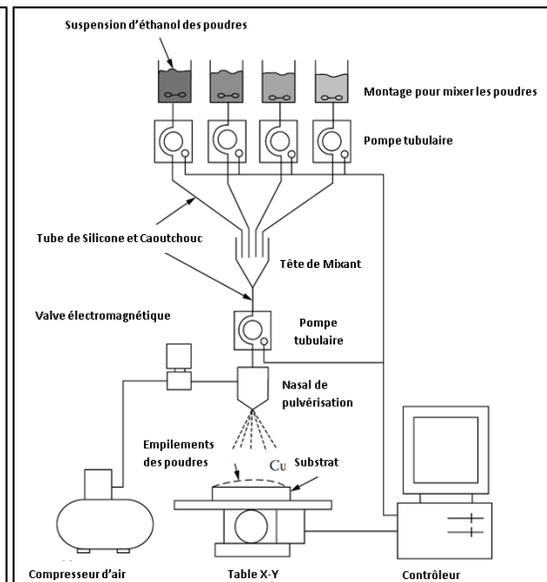


Figure 1.14: Schéma de pulvérisation automatisée de poudre et système d'empilage pour fabriquer les MGF par (SHS / HIP).

### 1.8.5. Frittage par Projection du Plasma (Spark Plasma Sintering (SPS)):

En utilisant le procédé SPS, Sumitomo Mines Co., Ltd. [28] a réussi à synthétiser les MGF en verre et en métal.

Le verre et les métaux sont des substances totalement différentes, donc la production des MGF avec ces matériaux par la méthode conventionnelle a été assez difficile. La société a établi un processus de frittage SPS des poudres de ces matières en appliquant une pression élevée et un courant électrique en même temps. Le matériau pourrait être utilisé pour produire des capteurs pour des applications à haute température, environnements à haute pression et dans le secteur de l'optoélectronique.

Le procédé SPS est un procédé de synthèse unique, dans laquelle l'énergie électrique est introduite entre les espaces des particules résultantes du compactage à frais, la haute énergie de décharge du plasma générée instantanément est appliquée de manière efficace pour permettre le frittage ou collage fritté à une température plus basse et en un temps plus court par rapport aux procédés conventionnels. Il peut être considéré comme l'une des nouvelles générations de procédé de frittage qui utilisent plus efficacement l'auto-échauffement spontané, un effet décollant à l'intérieur des particules de l'échantillon, comme le processus de SHS. Avec la méthode électrique, cependant, les poudres ont été chauffées si rapidement qu'elles ont été frittées dans un ensemble intégré avant que la dilatation thermique ne ruine les choses.

### 1.8.6. La projection plasma (Plasma Spray):

La projection plasma consiste à introduire des particules solides dans un jet de gaz, dont la température atteint couramment 11000 °C et la vitesse 1000-1500 m.s<sup>-1</sup>. Ces particules sont accélérées et fondues avant de s'écraser sur la pièce à revêtir. Le dépôt est ainsi formé par l'empilement des lamelles solidifiées obtenues par l'impact des particules sur le substrat préalablement « préparé » (Figure 1.15). Ce procédé est utilisé en particulier pour déposer des matériaux à haute température de fusion tels que des alliages réfractaires ou des céramiques. Les caractéristiques des dépôts réalisés par projection plasma sont la résistance à l'usure et à la corrosion et l'isolation thermique et électrique.

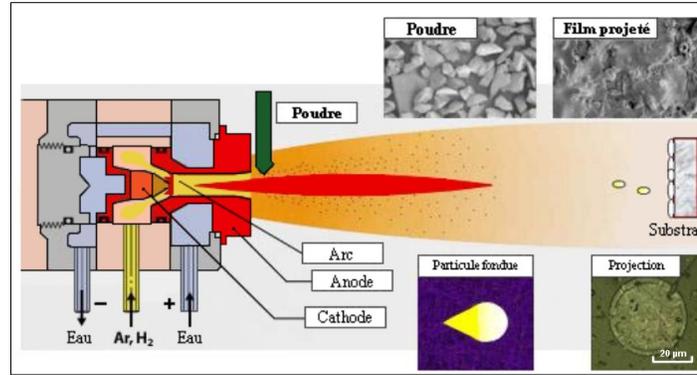


Figure 1.15: Principe de la projection plasma [29], [30]

### 1.8.7. Métallurgie des poudres :

Bishop et al [31] ont enquêté sur un système de production de masse pour fabriquer des MGF. Le système céramique-métallique a des applications potentielles en orthopédie et en dentisterie. Le composant métallique est le Ti, qui est largement utilisé en chirurgie, et de la céramique l'hydroxyapatite (HA). HA est bioactif, c'est qu'il réagit chimiquement avec l'os vivant pour donner un lien fort qui peut résister à des contraintes élevées. Ainsi, un implant fabriqué à partir d'un matériau bioactif est rapidement et solidement fixé, sans avoir besoin de tout moyen mécanique de fixation telles que des vis ou du ciment osseux.

Les travaux de [31] ont démontré qu'un MGF peut être produit par un processus de travail qui implique des températures faibles par rapport à celles qui sont nécessaires pour le frittage, et qui a le potentiel de la fabrication rapide. En outre l'avantage économique, les basses températures réduisent les problèmes qui peuvent survenir en raison de la différence de propriétés.

Les chercheurs [31] ont utilisé des mélanges ci-dessus de Ti sec et poudres HA contenant 10, 20 et 30 HA% pour donner l'arrangement des couches suivant: Ti, Ti-10% HA, Ti-20% HA, Ti-30% HA, Ti. Les couches en poudres étaient compactées à froid à une pression de 500 MPa pendant 1 min pour donner un "billet" d'environ 60 mm de hauteur. Les billets compactés ont été placés dans un four pour le préchauffage à la température de consolidation. Ils étaient maintenus à 500°C pendant 30 à 60 min. Chaque billet a été transféré en une feuille 60-mm diamètre et pressé à chaud à une pression maximale d'environ 1630 MPa.

### 1.8.8. Méthode centrifuge :

Le procédé centrifuge est similaire à la coulée centrifuge, où la force de gravité est utilisée par le spin de moule pour former le matériau en vrac à gradation fonctionnelle [14]. Le matériau à gradient est produit de cette manière en raison de la différence des densités des matériaux et le spin du moule. Il existe d'autres processus similaires à la méthode centrifuge dans la littérature (méthode par gravité, par exemple, etc.) Bien que le gradient en continu puisse être réalisé en utilisant la méthode centrifuge, seulement des formes cylindriques peuvent être formées. Un autre problème de la méthode centrifuge, c'est qu'il y a des limites à ce type de gradient [32], car le gradient est formé par un processus naturel (force centrifuge et de la différence de densité).

### 1.9. Méthodes de caractérisation :

Avec les applications progressivement croissantes du MGF, il existe un besoin pour une méthode fiable pour mesurer les propriétés du matériau MGF d'une manière non destructive. Il est important d'avoir une technique efficace et efficace pour obtenir des données sur les propriétés du matériau pour la conception du MGF et il est surtout important d'avoir une technique pour évaluer les MGF après fabrication et en service. Cela permettra de vérifier si la réelle propriété du matériau correspond à l'exigence de conception pour assurer la sécurité et la qualité. La microstructure d'un produit MGF change spatialement, par conséquent, la ténacité et la résistance d'un MGF ne peuvent être évaluées simplement par la mécanique de rupture conventionnelle et les classiques tests mécaniques.

#### 1.9.1. Module élastique :

Pour déterminer le module de Young de l'ensemble d'un MGF, l'habituelle courbe contrainte-déformation peut être mesurée par la fixation d'une jauge de contrainte à la surface de l'échantillon au cours d'un essai de flexion à quatre points. La dépendance du module de Young de la composition d'un MGF peut être estimée en mesurant les fréquences de résonance de flexion d'une éprouvette de barreau rectangulaire à l'aide d'une technique de résonance forcée.

Cette dernière utilise des champs d'ondes élastiques dans les structures ainsi que les procédures de calcul inverse pourrait être prometteuse pour la caractérisation des MGF car actuellement de bons solveurs sont disponibles pour l'analyse des ondes élastiques qui se propagent dans les plaques MGF. Ces

modèles numériques et solveurs pour les structures MGF assurent la relation entre la propriété du matériau et les réponses dynamiques des déplacements des MGF.

### 1.10. Design et Optimisation des MGF:

### 1.11. Conception inverse:

La conception d'un MGF doit être envisagée et examinée en tenant compte des conditions qu'elle rencontrera dans l'application pratique. Cela implique un effort pour sélectionner une combinaison de matériaux optimale pour alléger la contrainte thermique (par exemple), une distribution optimale inter-matériau de la composition qui convient aux conditions de production.

Habituellement, un concepteur est confronté à la tâche de concevoir un système pour une performance optimale sous certaines conditions et contraintes et au mieux, il a le choix du matériau à utiliser. Dans les fibres composites renforcées par stratifiés, il a la possibilité supplémentaire d'orientation des fibres dans un stratifié en fonction de ses exigences de conception. Avec l'apparition du MGF, il peut aller plus loin et utiliser soi-disant le concept : «conception inverse». Fondamentalement, la composition du matériau et la fraction volumique de gradation sont déterminées à partir d'une analyse basée sur la réduction des contraintes thermiques, les contraintes résiduelles, etc. Le matériau est ensuite fabriqué en utilisant la distribution de profil obtenu à partir de l'analyse.

### 1.12. Variations des propriétés des MGF :

Les variations des propriétés de matériau sur le profil qui ont été mentionnées jusqu'à présent, ont été représentées par des polynômes, des fonctions exponentielles etc. [33] utilisent une variation de profil exponentielle et déterminent certains paramètres liés à la fonction exponentielle. [34] a examiné les effets de la fraction volumique de la poudre et de la force centrifuge sur le profil qui a une fonction polynomiale cubique [35] ont optimisé numériquement l'épaisseur et la distribution de composition du MGF par rapport au transfert de la chaleur dans les systèmes de refroidissement. [36] et [37] examinent les caractéristiques optimales en ce qui concerne la microstructure des contraintes résiduelles.

### 1.13. Modélisation du gradient et Relations constitutives :

De manière générale, il existe deux façons de modéliser la gradation des propriétés de matériau dans les solides: (i) supposons un profil de variation des fractions volumiques - ce qui pourrait être considéré comme une approche «macroscopique» et (ii) une approche micromécanique pour étudier le milieu non homogène.

Pour l'approche «macroscopique», des représentations polynomiales comprennent des variations quadratiques et les variations cubiques.

Au niveau microstructural, le matériau à gradient fonctionnel se caractérise par une transition à partir d'une phase de dispersion à une autre structure alternative ayant une structure en réseau dedans. La micromécanique des milieux aléatoires inhomogènes a fait l'objet d'une étude intensive dans la dernière décennie. Cependant, de telles études, jusqu'à récemment, ont principalement porté sur des inclusions ou l'inhomogénéité de différentes formes du substrat homogène («homogénéité statistique » est supposée).

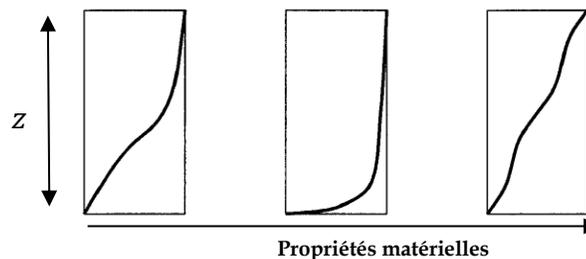


Figure 1.16: Illustration des de propriétés matérielles de profils.

### 1.14. Applications des FGM:

MGF peut être utilement appliqué à de nombreux domaines. Le [Tableau 1.1](#) présente une variété d'applications réelles et potentielles des MGF dans le système de transport, outils coupant, pièces de machines, semi-conducteurs, l'optique et Biosystème. Les applications potentielles couvrent tous les cas dans lesquels une combinaison de fonctions incompatibles est nécessaire.

Aéronautiques Aérospatiale	Composants de véhicules spatiaux, corps d'avion spatial
Ingénierie	Outil coupant, les arbres, rouleau, lame de turbine, Matériaux de Construction
Énergie Nucléaire	Composants de réacteurs nucléaires, première paroi de du réacteur fusion
Matériaux de construction	Blocs en béton résistant au feu, rayonnement, absorbant de l'humidité, milieux agressive.

Biomatériaux	Implant, peau artificielle, le système de délivrance de médicaments
optique	Fibres optiques, lentilles
Usines de produits chimiques	Échangeur de chaleur, cuve de réaction
Électronique	Semi-conducteur de bande graduée, capteur
Conversion d'énergie	Générateur thermoélectrique, pile à combustible, une cellule solaire
Produits de base	Articles de sport, carrosseries, vitres

Tableau 1.1: Applications des FGM.

Par exemple : en général, la température la plus élevée sur la surface d'un véhicule ogive (Figure 1.17) a été estimée à atteindre 1800°C .Par conséquent, les matériaux à la surface doivent être résistants à des températures allant jusqu'à 1800°C et un gradient de température de 1300°C. Donc, le matériau doit avoir adapté des propriétés résistant à la chaleur et à l'oxydation à la couche de surface, la dureté mécanique de la surface froide et une relaxation efficace des contraintes thermique dans le matériau.

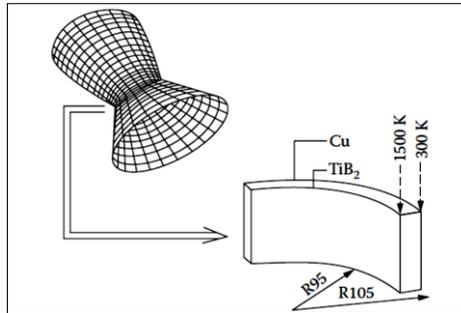


Figure 1.17: Modèle d'une Chambre de combustion et les conditions de température d'un propulseur [38].

### 1.15. Propriétés effectives des matériaux à gradient fonctionnel :

Plusieurs MGF sont fabriqués par deux phases de matériaux avec différentes propriétés. Une description détaillée d'une microstructure graduée réelle est généralement non disponible, sauf peut-être pour des informations sur la distribution de la fraction volumique. Tandis que la fraction volumique de chaque phase graduellement varie dans la direction de gradation, les propriétés effectives du MGF changent le long de cette direction. Par conséquent, nous avons deux approches possibles pour les MGF comme modèles : Pour la première, une variation par morceaux de la fraction volumique du céramique ou du métal est assumée, et le MGF est pris pour être posé avec la même fraction volumique dans chaque région, c.-à-d., couche quasi-homogène de céramique-métal (Figure 1.18-a) .Pour la deuxième, une variation continue de la fraction volumique du céramique ou du métal est assumée (Figure 1.18-b) et la

fraction volumique du métal peut être représentée comme une fonction de coordonnées suivant l'épaisseur ( $z$ ).

$$V_m = \left(\frac{2z+h}{h}\right)^p \quad (1.1)$$

Où  $h$  est l'épaisseur de la plaque et  $p$  ( $0 \leq p \leq \infty$ ) est un exposant de la fraction volumique qui dicte la variation du profil du matériau à travers l'épaisseur de la couche MGF. Comme il est présenté dans la [Figure 1.19](#), la variation de la valeur de  $p$  génère un nombre infini de la distribution de la composition.

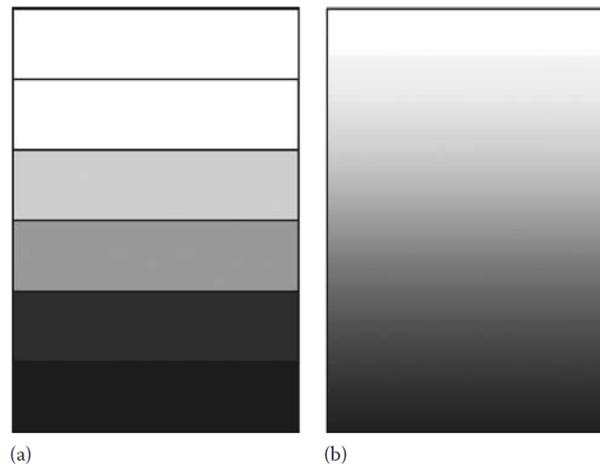


Figure 1.18: Modèle analytique pour une couche de matériau à gradient fonctionnel : première approche; b) deuxième approche.

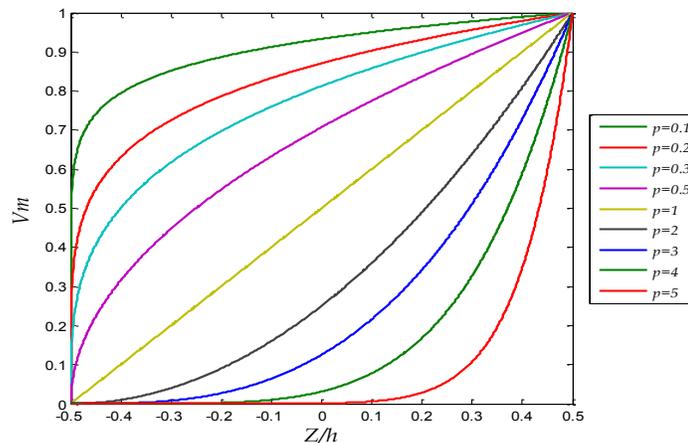


Figure 1.19: Fraction volumique du métal le long de l'épaisseur.

Afin de modéliser avec précision les propriétés matérielles des MGF, les propriétés doivent être dépendantes de la température et de la position. Ce résultat est obtenu en utilisant une simple règle de mélange des matériaux composites [le modèle de

Voigt]. Les propriétés des matériaux effectives  $P_F$  de la couche MGF, comme  $E_f$  module de *Young*, et  $\alpha_f$  coefficient de dilatation thermique, peuvent être exprimées par :

$$P_F = \sum_{i=1} P_i V_{Fi} \quad (1.2)$$

Où  $P_i$  et  $V_{Fi}$  sont respectivement les propriétés du matériau et la fraction volumique du matériau constitutif  $i$ . La somme des fractions volumiques de tous les matériaux constituants donne 1 :

$$\sum_{i=1} V_{Fi} = 1 \quad (1.3)$$

A savoir que les structures MGF sont généralement utilisées dans les environnements à haute température où des changements importants dans les propriétés mécaniques des matériaux constitutifs sont à prévoir [39], il est essentiel de prendre en considération cette dépendance de température pour une prévision précise de la réponse mécanique. Ainsi, le module de *Young*  $E_f$ , le coefficient de Poisson  $\nu_f$ , le coefficient de dilatation thermique  $\alpha_f$ , et la conductivité thermique  $\kappa_f$  qui sont supposés être dépendants de la température.

Matériaux	Propriétés mécaniques		
	$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [Kg/m <sup>3</sup> ]
Aluminium (Al)	70	0.3	2702
Alumina (Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> )	380	0.3	3800
Zircon (ZrO <sub>2</sub> )	200	0.3	5700

Tableau 1.2:Modèle des FGM existantes.

À partir des équations (1.4 1.5 1.6 1.7 1.8), on assume que les propriétés matérielles effectives  $E_f, \nu_f, \alpha_f$  et  $\kappa_f$  de la plaque MGF sont évaluées dans la direction de l'épaisseur selon une loi exponentiel de distribution qui est exprimée comme suit [39] :

$$E_f = [E_m(T) - E_c(T)] \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^p + E_c(T) \quad (1.4)$$

$$\nu_f = [\nu_m(T) - \nu_c(T)] \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^p + \nu_c(T) \quad (1.5)$$

$$\rho_f = [\rho_m(T) - \rho_c(T)] \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^p + \rho_c(T) \quad (1.6)$$

$$\alpha_f = [\alpha_m(T) - \alpha_c(T)] \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^p + \alpha_c(T) \quad (1.7)$$

Il est évident que  $E_f, \rho_f, \alpha_f$  et  $\nu_f$  sont à la fois fonction de la position et la température. Cette méthode est simple et facile à appliquer pour prédire les propriétés des matériaux et les réponses globales, mais, en raison de ces

simplifications supposées la validité est affectée par la microstructure graduée détaillée.

Comme on a mentionné avant, des informations précises sur la taille, la forme et la distribution des particules ne sont pas disponibles et les modules élastiques effectives des microstructures graduées doivent être évalués en fonction de la répartition de la fraction volumique et la forme approximative de la phase dispersée.

Plusieurs modèles micromécaniques ont été également développées au fil des ans pour en déduire les propriétés effectives des MGF. Le schéma de *Mori-Tanaka* (Mori & Tanaka, 1973) [40] pour estimer les modules effectifs est applicable pour les régions de la microstructure à gradient ayant une matrice continue bien définie et une phase discontinue telle que représentée à la [Figure 1.7](#). Il prend en compte l'interaction des champs élastiques entre l'inclusion voisine. Il est supposé que la phase de matrice, notée par l'indice 1, est renforcée par des particules sphériques d'une phase particulière, notées par l'indice 2.

La méthode auto-consistante (self-consistent method) (Hill, 1956) [41] suppose que chaque inclusion de renforcement est noyée dans un matériau continu dont les propriétés effectives sont celles du composite. Cette méthode ne fait pas de distinction entre matrice et les phases de renforcement et les modules globaux sont prévus dans un autre composite dans lequel les rôles des phases sont interchangeables. Cela le rend particulièrement approprié pour déterminer les modules effectifs dans les régions qui ont une microstructure interconnectée du squelette comme le montre la [Figure 1.20](#).



Figure 1.20. Squelette Microstructure du matériau MGF. [42]

Respectivement. Le modèle de *Mori-Tanaka* montre des prévisions précises des propriétés avec une matrice continue bien définie et des inclusions discontinues, tandis que le modèle auto-consistant est le meilleur dans les microstructures

squelette caractérisées par une large zone de transition entre les régions avec une prédominance de l'une des phases constitutives.

## Chapitre 2 : Théorie Classiques des plaques

### **Objectif :**

Ce chapitre est consacré à la présentation de la théorie classique des plaques. Sa formulation est basée sur une approche d'élasticité bidimensionnelle généralisée selon Kirchhoff. Une présentation des hypothèses de la théorie puis une description de champs des déplacements par les équations cinématiques d'un point quelconque dans la plaque en fonction des déplacements généralisés. Le tenseur de déformation de Green-Lagrange dans le cas des petits déplacements est utilisé pour obtenir les relations déformation-déplacement. Le tenseur des contraintes pour les plaques en matériau à gradient fonctionnel est obtenu en introduisant les coefficients du tenseur élastique du FGM dans les formules de champ des déformations issu de la loi de Hooke généralisée. Les fonctionnelles des énergies cinétiques et de déformation sont utilisées pour l'obtention de l'équation du mouvement et les conditions aux limites de la plaque selon le principe d'Hamilton.

---

## 2.1. Définition

D'une manière générale, les plaques sont considérées comme un volume compris entre deux surfaces planes de telle sorte que la distance  $h$  (épaisseur) entre ces deux surfaces soit petite par rapport aux deux autres dimensions. Suite à cette caractéristique géométrique très importante, le modèle tridimensionnel se réduit à un modèle bidimensionnel. La plaque admet aussi un plan de symétrie passant par le milieu de l'épaisseur appelé surface moyenne ou encore feuillet moyen (Figure 2.1) donc on formule :

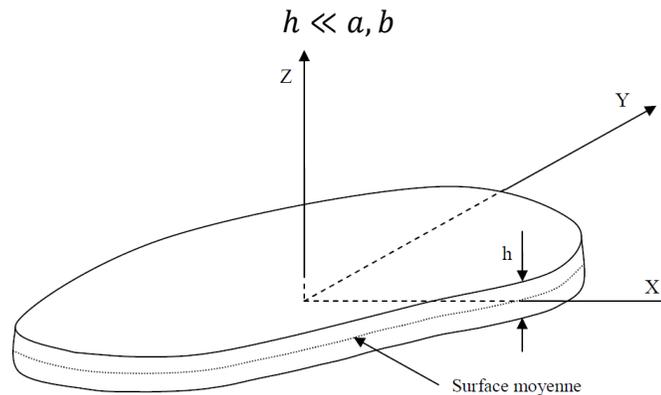


Figure 2.1: Plaque de forme géométrique arbitraire.

## 2.2. Modèle classique Love-Kirchhoff (CPT) 1876:

Le modèle de Kirchhoff-Love est parfois appelé dans la littérature le modèle "Classique" ou "CPT : Classique Plate Theory" de plaque. Ce modèle se base sur l'hypothèse que la section transverse reste plane et perpendiculaire à la section moyenne après avoir été déformé (Figure 2.2). Donc la déformation dite de "cisaillement transverse" est supposée nulle et les effets dus à l'effort tranchant négligé. Il est bien entendu à réserver à des plaques minces et ne présentant pas trop de gradient de propriété dans l'épaisseur.

## 2.3. Hypothèses de la théorie du classique des plaques

Dans la théorie classique des plaques, les hypothèses suivantes ont été établies par (Kirchhoff 1850) :

- Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.
- La contrainte normale «  $\sigma_z$  » est négligeable devant les autres composantes.
- Une normale au plan moyen avant déformation reste normale au plan moyen après déformation;

- L'effet de l'inertie de rotation est négligeable.

Bien que ( $\varepsilon_{zz} = 0$ ) et malgré que la contrainte normale transversale ( $\sigma_{zz}$ ) n'est pas nulle elle ne va pas entrer dans l'expression du travail et donc dans l'équation du mouvement.

On note que pour notre travail l'effet de l'inertie de rotation est compté pour mieux de précision et de réalité du modèle.

#### 2.4. Équations cinématiques :

Dans la théorie classique des plaques, le champ des déplacements (voir :Figure 2.2 ), est exprimé sous la forme [Kirchhoff (1876)]:

$$u(x, y, t) = u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$v(x, y, t) = v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$w(x, y, t) = w_0(x, y, t) \quad (2.3)$$

Les quantités  $u, v$  et  $w$  qui sont des fonctions inconnues, sont appelées déplacements généralisés du système.

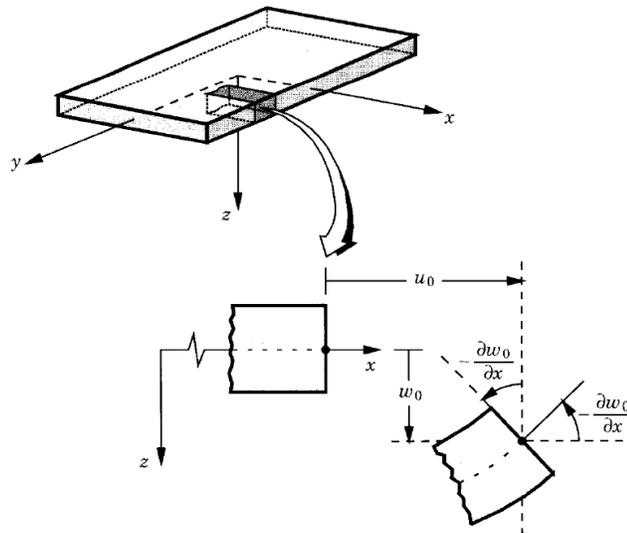


Figure 2.2: Géométrie d'un bord de plaque avant et après déformation selon la théorie classique des plaques (Reddy, J.N 2004)

#### 2.5. Relations déformation-déplacement :

Dans la majorité des problèmes abordés dans la littérature, les déplacements et les déformations de la structure ont été supposés implicitement petits. D'un point de vue pratique, ceci veut dire que la géométrie des éléments reste

quasiment inchangée lorsque ceux-ci sont soumis à des sollicitations ; par conséquent, on peut utiliser au premier ordre les approximations de déformations linéaires infinitésimales.

Les déformations associées au champ des déplacements peuvent être calculées en utilisant les relations non-linéaires suivantes (composants de tenseur de **Green -Lagrange**) entre les déplacements et déformations :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ E_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ E_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} E_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ E_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\ E_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{array} \right. \quad (2.4.a)$$

Pour notre contexte « les plaque mince », les effets de deuxième ordre seront négligés, nous supposons que les carrés des gradients des composantes des déplacements en plan ( $u$  et  $v$ ) peuvent être négligés comparativement avec la première puissance de leurs gradients et le gradient de  $w$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\ \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right.$$

Dans l'analyse de la stabilité et à cause de l'importance du déplacement latéral et ses gradients, c'est-à dire les rotations de la section sont modérée, (dite de 10°-15°), alors que les termes suivantes sont petit mais non-négligeable par rapport à la première puissance de gradient:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 , \quad \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 , \quad \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}$$

Ces termes doivent etre inclus dans les relations déplacements-déformations.

En pratique, de telles hypothèses sont fréquemment mises à défaut, même lorsque les déformations restent petites et que la limite élastique des matériaux ordinaires n'est pas dépassée. Si l'on veut connaître avec précision les déplacements pour certaines structures, il est nécessaire de tenir compte des non-linéarités géométriques.

Le champ de déformations associées au champ de déplacements, équations (2.1 -2.3), est calculé par les relations de déformations linéaires en respectant les hypothèses de la théorie:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial xy} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (2.6)$$

$$\gamma_{xz} = \left( -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.7)$$

$$\gamma_{yz} = \left( -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (2.9)$$

Les trois (03) équations des déformations ont la forme

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} z \quad (2.10)$$

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} + \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon^1\} = z \begin{Bmatrix} \frac{-\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{-\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{-2\partial^2 w_0}{\partial xy} \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

Où :

- $(\varepsilon_{xx}^0, \varepsilon_{yy}^0, \gamma_{xy}^0)$  : Déformations membranaires et rotation de la section de la surface déformée du plan moyen autour des axes  $x$  et  $y$  respectivement.
- $(\varepsilon_{xx}^1, \varepsilon_{yy}^1, \gamma_{xy}^1)$  : Déformations de flexion (Les courbures).

Ces déformation s'appelle déformations de **von Kármán** et la théorie de plaque associée s'appelle théorie des plaques de **von Kármán**.

Une fois les déplacements  $(u, v, w)$  du plan moyen sont connus, les déformations à n'importe quel point  $(x, y, z)$  dans la plaque peut être calculé en utilisant les équations (2.10) et (2.11). On remarque aussi que les composantes de déformations varient linéairement le long de l'épaisseur. Pour une valeur fixée

de  $z$ , les déformations sont en général des fonctions non linéaires de  $x$ ,  $y$  et ils sont fonctions de temps pour les problèmes dynamiques.

### 2.6. Relations contrainte-déformation :

La relation d'élasticité linéaire entre les contraintes et les déformations, appelée loi de Hooke généralisée, peut s'écrire sous la forme condensée :

$$\{\sigma\} = [Q]\{\varepsilon\} \quad (2.12)$$

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

Dans le cas de la théorie des plaques (Classique), l'état de contrainte est un état de contraintes planes et le système d'équations (2.13) sera réduit à un système d'équations moins condensé donné par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

Pour une plaque à gradient fonctionnel, et d'après les équations (1.4) et (1.5), le module de *Young* et le coefficient de *Poisson* ( $E(z)$  et  $\nu(z)$ ) dépendent de la position ( $z$ ). D'où les coefficients de la matrice élastique  $[C]$  donnés par :

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E_f(z)}{1-\nu_f^2(z)} \quad (2.15)$$

$$Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu_f(z)E_f(z)}{1-\nu_f^2(z)} \quad (2.16)$$

$$Q_{66} = \frac{E_f(z)}{2(1+\nu_f(z))} \quad (2.17)$$

### 2.7. Énergie de déformation de la plaque:

Comme en a mentionné précédemment, les déformations transversales ( $\gamma_{xy}$   $\gamma_{xz}$   $\varepsilon_{zz}$ ) sont toutes nulles pour le cas de la CPT. Par conséquent, les contraintes transversales de cisaillement ( $\sigma_{xz}$ ,  $\sigma_{yz}$ ) sont nulle, contrainte

normale ( $\sigma_{zz}$ ) n'est pas nul d'après les relations constitutives à cause de 'l'effet de Poisson'.

En effet tous les trois composantes des contraintes ne rentrent pas dans la formulation par ce que l'énergie virtuelle de déformation de ces contraintes égale à zéro du fait que cinématiquement les déformations virtuelles doivent être nulles (voir équation (2.7-2.8-2.9)) :

$$\delta\gamma_{xy} = 0, \delta\gamma_{xz} = 0, \delta\varepsilon_{zz} = 0$$

Malgré que les contraintes transversales ne rentrent pas dans l'expression de l'énergie virtuelle de déformation, mais il faut les prendre en compte pour les conditions aux limites et l'équilibre de forces.

Pour notre travail, les équations de mouvements seront développées en utilisant le principe des déplacements virtuels. La version dynamique du principe de travail virtuel est :

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (2.18)$$

$\delta U$ : Énergie virtuelle de déformation.

$\delta V$ : Travail virtuel due aux forces externe.

$\delta K$ : Énergie cinétique virtuel.

Dans le cas plaques, l'intégration sur le domaine de la plaque est représentée comme le produit d'intégration sur le plan de plaque et l'intégration sur l'épaisseur de plaque, à cause de la nature explicit du champ des déplacements proposés pour les coordonnées d'épaisseur :

$$V^e \equiv \Omega \times \left( -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right)$$

$$\int_{vol} (\cdot) dV = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{\Omega} (\cdot) d\Omega dz$$

L'expression des trois est donnée comme suit :

$$\delta U = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{\Omega} (\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta\varepsilon_{yy} + \sigma_{xy} \delta\gamma_{xy}) dx dy dz \quad (2.19)$$

$$= \int_{\Omega} \left\{ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\sigma_{xx}(\delta\varepsilon_{xx}^0 + z\delta\varepsilon_{xx}^1) + \sigma_{yy}(\delta\varepsilon_{yy}^0 + z\delta\varepsilon_{yy}^1) + \sigma_{xy}(\delta\gamma_{xy}^0 + z\delta\gamma_{xy}^1)] dz \right\} dxdy \quad (2.20)$$

$$\delta V = - \int_{\Omega} [q(x, y)\delta w_0] dxdy - \int_{\Gamma_{\sigma}} \int_{-h/2}^{h/2} [\hat{\sigma}_{nn}\delta u_{0n} + \hat{\sigma}_{ns}\delta u_{0s} - \hat{\sigma}_{nz}\delta w_0] dzds \quad (2.21)$$

$$\delta K = \int_{\Omega} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_0 \left[ \left( \dot{u}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \right) \left( \delta \dot{u}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} \right) + \left( \dot{v}_0 - z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \right) \left( \delta \dot{v}_0 - z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dzdxdy \quad (2.22)$$

Où  $q(x, y)$  est la force distribuée sur les deux faces de plaque ( $z = -h/2, h/2$ ),  $(\hat{\sigma}_{nn}, \hat{\sigma}_{ns}, \hat{\sigma}_{nz})$  ou bien  $(\hat{N}_{nn}, \hat{N}_{ns}, \hat{M}_{nn}, \hat{M}_{ns})$  sont les sollicitations spécifiant sur la partie  $\Gamma_{\sigma}$  du contour  $\Gamma$ .  $(\delta u_{0n}, \delta u_{0s})$  sont les déplacements virtuelle le long de la direction normale et tangentielle du contour  $\Gamma$ ,  $\rho_0$  est la densité de matériaux de la plaque, le point superpose les variables désigne la dérivée dans le temps ( $\dot{u}_0 = \partial u_0 / \partial t$ ). Les deux systèmes  $(u_{0n}, u_{0s}), (\hat{\sigma}_{nn}, \hat{\sigma}_{ns})$  et  $(u_0, u_0), (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$  respectivement sont reliée par le fameux tenseur de rotation.

### 2.7.1. Équations des efforts et des moments :

#### 2.7.1.1 Cas Matériaux homogènes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} dz = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{array} \right\} z dz = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{array} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{array} \right\} = \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ z \\ z^2 \end{array} \right\} \rho_0 dz \end{array} \right. \quad (2.23)$$

$$(A_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z^2) dz \quad (i, j: 1, 2, 6) \quad (2.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \{N\} \\ \{M\} \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} [A] & [0] \\ [0] & [D] \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \end{array} \right\} \quad (2.25)$$

$$\begin{Bmatrix} \widehat{N}_{nn} \\ \widehat{N}_{ns} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \widehat{\sigma}_{nn} \\ \widehat{\sigma}_{ns} \end{Bmatrix} dz \quad \text{et} \quad \begin{Bmatrix} \widehat{M}_{nn} \\ \widehat{M}_{ns} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \widehat{\sigma}_{nn} \\ \widehat{\sigma}_{ns} \end{Bmatrix} z dz \quad (2.26)$$

### 2.7.1.2 Cas Matériaux FGM :

Dans ce cas-là les propriétés mécaniques sont fonction de la coordonné « z » et donc les formules des efforts vas être changé comme suit :

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho(z) dz \end{cases} \quad (2.27)$$

Où :

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}(1, z, z^2) dz \quad (i, j: 1, 2, 6) \quad (2.28)$$

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^0\} \\ \{\varepsilon^1\} \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Les quantités  $(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy})$  s'appellent les efforts normaux résultants dans le plan et  $(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy})$  les moments résultants.  $\widehat{Q}_n$  Pour la force transversale et  $(I_0, I_1, I_2)$  exprime les moments d'inertie massique. Tous les efforts résultants sont mesurés par unité de longueur.

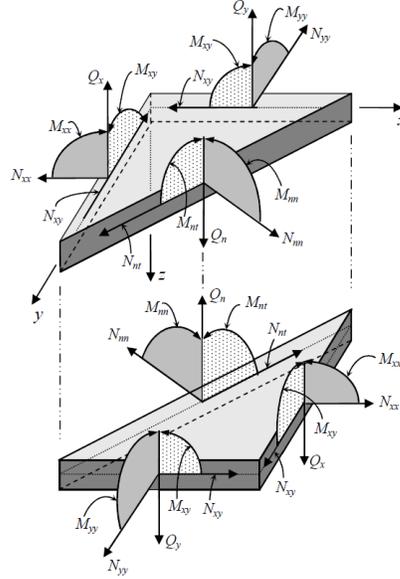


Figure 2.3: Forces et moments agissant sur un élément de plaque.

### 1.1. Equations du mouvement:

Les déformations virtuelles sont connues en fonctions des déplacements virtuelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta \varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \\ \delta \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \\ \delta \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \delta \varepsilon_{xx}^1 = -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \\ \delta \varepsilon_{yy}^1 = -\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \\ \delta \gamma_{xy}^1 = -2 \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial xy} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Par substitutions et intégration par partie (théorème de *Green*) pour affaiblir l'ordre des déplacements virtuels  $(\delta u_0, \delta v_0, \delta w_0)$  dans  $(\Omega)$  de toute différentiation. On utilise donc, le lemme fondamental dans le calcul variations, pour obtenir :

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^T \left\{ \int_{\Omega} \left[ -N_{xx,x} \delta u_0 - \left( N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)_{,x} \delta w_0 - M_{xx,xx} \delta w_0 - N_{yy,y} \delta v_0 - \right. \right. \\ \left. \left( N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)_{,y} \delta w_0 - M_{yy,yy} \delta w_0 - N_{xy,y} \delta u_0 - N_{xy,x} \delta v_0 - \left( N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)_{,x} \delta w_0 - \right. \\ \left. \left( N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)_{,y} \delta w_0 - 2M_{xy,xy} \delta w_0 - q \delta w_0 + I_0 (\ddot{u}_0 \delta u_0 + \ddot{v}_0 \delta v_0 + \ddot{w}_0 \delta w_0) - \right. \\ \left. I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \delta w_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} \delta w_0 - \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \delta u_0 + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \delta w_0 - \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \delta v_0 \right) \right] dx dy + \\ \oint_{\Gamma} \left[ N_{xx} n_x \delta u_0 + \left( N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) n_x \delta w_0 - M_{xx} n_x \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + M_{xx,x} n_x \delta w_0 + N_{yy} n_y \delta v_0 + \right. \\ \left. \left( N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) n_y \delta w_0 - M_{yy} n_y \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + M_{yy,y} n_y \delta w_0 - M_{xy} n_x \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + M_{xy,x} n_y \delta w_0 - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& M_{xy}n_y \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + M_{xy,y}n_x \delta w_0 + N_{xy}n_y \delta u_0 + N_{xy}n_x \delta v_0 + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} n_x \delta w_0 + \\
& N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} n_y \delta w_0 \Big] ds - \int_{\Gamma_\sigma} \left( \hat{N}_{nn} \delta u_{0n} + \hat{N}_{ns} \delta u_{0s} - \hat{M}_{nn} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) ds + \\
& \oint_{\Gamma} \left[ -I_1 (\ddot{u}_0 n_x + \ddot{v}_0 n_y) + I_2 \left( \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} n_x + \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} n_y \right) \right] \delta w_0 ds \Big\} dt \quad (2.31)
\end{aligned}$$

Où la virgule dans les indices signifie la différentiation par rapport à l'indice ; ( $N_{xx,x} = \partial N_{xx} / \partial x$ ), on note aussi que l'intégration par partie (spatial et dans le temps) a été utilisé pour arriver à la dernière expression. Les termes obtenus dans ( $\Omega$ ) et évaluées à  $t = 0$  et  $t = T$  sont met égale à zéro par ce que les déplacements virtuel sont nuls à ces points.

Assembler les coefficients de chaque déplacements virtuels ( $\delta u_0, \delta v_0, \delta w$ ) et on note que les déplacements virtuel sont zéro sur le contour  $\Gamma_u$ .

$$\begin{aligned}
0 = \int_0^T \Big\{ \int_{\Omega_0} \Big[ - \left( N_{xx,x} + N_{xy,y} - I_0 \ddot{u}_0 + I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right) \delta u_0 - \left( N_{xy,x} + N_{yy,y} - I_0 \ddot{v}_0 + \right. \\
I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \Big) \delta v_0 - \left( M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + q + \mathcal{N}(w_0) - I_0 \ddot{w}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} - I_1 \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} + \right. \\
I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \Big) \delta w_0 \Big] dx dy + \int_{\Gamma_\sigma} \Big[ \left( N_{xx} n_x + N_{xy} n_y \right) \delta u_0 + \left( N_{xy} n_x + N_{yy} n_y \right) \delta v_0 + \\
\left( M_{xx,x} n_x + M_{xy,y} n_x + M_{yy,y} n_y + M_{xy,x} n_y + \mathcal{P}(w_0) - I_1 \ddot{u}_0 n_x - I_1 \ddot{v}_0 n_y + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} n_x + \right. \\
I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} n_y \Big) \delta w_0 - \left( M_{xx} n_x + M_{xy} n_y \right) \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} - \left( M_{yy} n_y + M_{xy} n_x \right) \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \Big] ds - \\
\left. \int_{\Gamma_\sigma} \left( \hat{N}_{nn} \delta u_{0n} + \hat{N}_{ns} \delta u_{0ns} - \hat{M}_{nn} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) ds \Big\} dt \quad (2.32)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{N}(w_0) = \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (2.33)$$

$$\mathcal{P}(w_0) = \left( N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) n_x + \left( N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) n_y \quad (2.33)$$

Après l'intégration par partie et l'utilisation du théorème de Divergence on obtient :

Les équations du théorème de *Euler-Lagrange* sont obtenus lors ce que on mette les coefficients de  $\delta u \delta v \delta w$  égale a zéro ;

$$\delta u_0: \quad \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (2.33)$$

$$\delta v_0: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (2.34)$$

$$\delta w_0: \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q + \mathcal{N}(w_0) = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \quad (2.35)$$

Où les termes contenus  $I_2$  appeler « termes de l'inertie de rotation », ils sont couramment négligés dans la plupart des livres de vibrations ; dans note études on va tenir compte de l'effet de la torsion, leur effet apparie bien pour les hautes modes de vibrations.

Le terme  $\mathcal{N}(w_0)$  tient compte des grand déplacements et rotations de *von Kármán* utilisé dans l'analyse de stabilité.

### Conditions aux limites :

Pour déterminer la forme des conditions aux limites, nous considérons les intégrales aux limites dans l'équation. (2.32). Sur un bord parallèle aux coordonnées  $x$  ou  $y$ , l'expression limite en (2.32) implique que :

$$u_0 = v_0 = w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \quad (2.36)$$

Puis on cherche les conditions aux limites d'après l'équation (2.32).

En général, tous les bords d'une plaque ne seront pas parallèles à un axe de coordonnées. Par conséquent, il est utile d'exprimer les conditions aux limites en termes des coordonnées normales et tangentielles  $(\mathbf{n}, \mathbf{s})$  d'un bord (voir la figure 2.3).

On doit exprimer  $(\delta u_0, \delta v_0)$  en termes de  $(\delta u_{0n}, \delta u_{0s})$ . Si le vecteur normal  $\hat{\mathbf{n}}$  de surface est orientée d'un angle " $\theta$ " de l'axe «  $x$  », alors que leur cosinus directeur sont  $n_x = \cos \theta$  et  $n_y = \sin \theta$ . La transformation entre les systèmes de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $(n, s, r)$  se fait par la matrice de rotation.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_{0n} \\ u_{0s} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} w_{0,x} \\ w_{0,y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} n_x & -n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_{0,n} \\ w_{0,s} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.37)$$

Donc en peut écrit les expressions des limites en termes de  $(\delta u_{0n}, \delta u_{0s})$  et  $(w_{0,n}, w_{0,s})$  :

$$\begin{aligned} (N_{xx}n_x + N_{xy}n_y)\delta u_0 + (N_{xy}n_x + N_{yy}n_y)\delta v_0 &= (N_{xx}n_x + N_{xy}n_y)(n_x\delta u_n - \\ &n_y\delta u_{0s}) + (N_{xy}n_x + N_{yy}n_y)(n_y\delta u_n + n_y\delta u_{0s}) = (N_{xx}n_x^2 + 2N_{xy}n_xn_y + \\ &N_{yy}n_y^2)\delta u_{0n} + [(N_{yy} - N_{xx})n_xn_y + N_{xy}(n_x^2 - n_y^2)]\delta u_{0s} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Les coefficients de  $\delta u_{0n}$  et  $\delta u_{0s}$  la gauche de l'équation au-dessus égalent  $N_{nn}$  et  $N_{ns}$ , respectivement. Cela est dû à la corrélation entre les contraintes  $(\sigma_{nn}, \sigma_{ns})$  et  $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$  par la transformation :

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} N_{nn} \\ N_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_xn_y \\ -n_xn_y & n_xn_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_{nn} \\ M_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_xn_y \\ -n_xn_y & n_xn_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (2.39)$$

Donc l'intégrale aux bords peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_\sigma} \left[ (N_{nn} - \hat{N}_{nn})\delta u_{0n} + (N_{ns} - \hat{N}_{ns})\delta u_{0s} + (M_{xx,x}n_x + M_{xy,y}n_x + M_{yy,y}n_y + \right. \\ \left. M_{xy,x}n_y + \mathcal{P}(w_0) - I_1\ddot{u}_0n_x - I_1\ddot{v}_0n_y + I_2\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x}n_x + I_2\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y}n_y - \hat{Q}_n \right) \delta w_0 - (M_{nn} - \\ \hat{M}_{nn})\frac{\partial\delta w_0}{\partial n} - (M_{ns} - \hat{M}_{ns})\frac{\partial\delta w_0}{\partial s} \Big] ds \end{aligned} \quad (2.40)$$

Les conditions naturelle aux limites sur  $\Gamma_\sigma$  sont donné par :

$$\begin{cases} N_{nn} - \hat{N}_{nn} = 0 \\ N_{ns} - \hat{N}_{ns} = 0 \\ Q_n - \hat{Q}_n = 0 \\ M_{nn} - \hat{M}_{nn} = 0 \\ M_{ns} - \hat{M}_{ns} = 0 \end{cases} \quad (2.41)$$

Où :  $Q_n = Q_x + Q_y \equiv V_{xx}n_x + V_{yy}n_y$

$$Q_n \equiv \left( M_{xx,x} + M_{xy,y} - I_1\ddot{u}_0 + I_2\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial x} \right) n_x + \left( M_{yy,y} + M_{xy,x} - I_1\ddot{v}_0 + I_2\frac{\partial\ddot{w}_0}{\partial y} \right) n_y \quad (2.42)$$

Nous notons que l'équation d'équilibre (2.35), exprimée en termes de  $w_0$ , a un ordre total différentiel spatial de quatre. Cela implique qu'il devrait y avoir que quatre (deux géométriques et deux forces) conditions aux limites à un point limite. Cependant, les équations. (2.36 et 2.40) montre cinq conditions aux limites géométriques et cinq forces, donnant un total de dix conditions aux limites. Pour éliminer cet écart, on peut intégrer le terme dérivée tangentielle dans l'équation. (2.40) par parties pour obtenir

$$-\oint_{\Gamma_\sigma} M_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} ds = \oint_{\Gamma_\sigma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \delta w_0 ds - [M_{ns} \delta w_0]_{\Gamma} \quad (2.43)$$

Le terme dans les crochets égale à zéro tant que le contour de plaque présente un contour fermé.

Ce terme va être additionné avec  $Q_n$  (le même coefficient  $\delta w_0$ )

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.44)$$

Cela est balancé par la force appliqué  $\hat{Q}_n$ . Cette condition à la limite,  $V_n = \hat{Q}_n$ , s'appelle la Condition de bord libre de *Kirchhoff*. Donc les conditions aux limites de la théorie classique sont :

$$\begin{cases} u_{0n}, u_{0s}, w_0, \frac{\partial w_0}{\partial n} \\ N_{nn}, N_{ns}, V_n, M_{nn} \end{cases} \quad (2.45)$$

$$V_n = \begin{cases} V_{xx} = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = M_{xy,x} + 2M_{xy,y} - I_1 \ddot{u}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \\ V_{yy} = Q_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = M_{yy,y} + 2M_{xy,x} - I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \end{cases} \quad (2.46)$$

## Chapitre 3 : Étude de la Stabilité et vibrations libre des Plaques FGM

Objectif :

L'objectif de ce chapitre est d'étudier, d'une manière approfondie de la stabilité et les vibrations libres des plaques FGM, afin de formuler les équations adéquates pour ces problèmes. Ce chapitre est divisé en plusieurs parties. Une introduction bibliographique décrit les recherches récentes dans ce domaine. Dans la deuxième partie, l'équation d'équilibre pour les deux problèmes sera établie puis découplée. À la fin une application des conditions aux limites pour les conditions de *Navier* et *Levey* .Puis l'élaboration des fonctions propres de chaque cas et leurs modes propres.

---

### 3.1. Introduction Flambements des plaques

Quand une plaque plane est sous l'action de compression des bords de son plan médian, la plaque est déformée, mais reste bien à plat lorsque les forces de bord sont suffisamment faibles à moins qu'il n'existe une imperfection géométrique initiale. En augmentant la charge, un état est atteint lorsque la plaque fléchit légèrement. La charge de compression dans le plan, ce qui est juste suffisant pour maintenir la plaque dans une forme légèrement courbée « fléchie », est appelée la charge critique ou la charge de flambage. Une fois que la charge de flambement est dépassée, la relation contrainte-déformation présente un caractère stable en raison des forces de membrane qui entrent en jeu.

#### 3.1.1. Le flambement des plaques FGM

[Javaheri et Eslami \[43\]](#) Ont trouvé les charges critiques pour les plaques FGM rectangulaires, simplement appuyées utilisant la théorie classique avec les déformations de *Von karmen* sous chargements simples « compression et traction et leur combinaison » ils ont trouvé que l'exposant de puissance a un grand effet sur les charges de flambement et que le problème peut être ramené à un problème des plaques homogènes avec une rigidité équivalente.

[Zenkour \[44\]](#) a étudié la solution exacte du flambement et des vibrations des plaques sandwich FGM simplement appuyées par la théorie sinusoïdale des déformations. Investiguant l'effet du rapport longueur/largeur, l'effet du cisaillement et la distribution de la fraction volumique, de bons résultats montrent la convergence de la théorie des déformations sinusoïdale avec la théorie du troisième ordre de *Reddy*.

[Samsam Shariat et Eslami \[45\]](#): résolvent le problème de flambement des plaques FGM épaisses (solution exacte) simplement appuyées sous les chargements : mécaniques « les trois cas courants » et thermiques « une distribution uniforme et non-linéaire de la température »; l'analyse se fait selon la théorie du troisième ordre; ils ont montré que la charge critique varie en fonction du rapport longueur/largeur et le type de chargement. Pour les charges thermiques, la plaque flambe toujours dans le premier mode pour tous les rapports d'élanement et que la théorie classique surestime les charges critiques tout en augmentant l'épaisseur de plaque et l'effet apparent du mode de chargement thermique.

(Serge 2008) [46]: a montré que le problème des plaques FGM dans le cas de la théorie classique peut être ramené au cas des plaques homogènes en argumentant par une approche statistique basée sur la régression linéaire et en omettant l'effet de l'inertie de rotation.

Victor et Larry [47] investiguent la stabilité et la vibration des plaques FGM simplement appuyées renforcées par un système parallèle des « raidisseurs ». Ils résolvent un problème d'optimisation pour le choix des « raidisseurs » et leurs espacements pour des fréquences et des charges critiques prédéfinies.

Zhao, Lee et Liew [48] travaillent sur le flambement thermique et mécanique des plaques FGM en utilisant conjointement la théorie du premier ordre et la méthode de l'élément *kp-Ritz* et une variation exponentielle de la fraction volumique, ils ont aussi élaboré les charges critiques pour les plaques percées tenant compte des positions et la géométrie des trous (rectangulaires et circulaires). Ils ont conclu que l'exposant et la taille des trous ont une influence majeure sur la charge de flambement.

(Meisam , Ali et Emad 2010) [49] ont résolu le problème de flambement grâce à une méthode analytique pour obtenir la solution exacte inspirée de la méthode citée par Reddy et A.Noiser afin de découpler les équations de mouvement. En vue d'une solution de type *Levy* (cas des plaques FGM minces selon la théorie classique). Cette méthode sera utilisée dans le présent travail du fait de la simplicité majeure induite de la transformation.

Bodaghi et Saidi [50] ont étudié la solution du problème de flambement selon la solution de *Levy* en se basant sur la théorie d'ordre supérieur. Ils ont découplé les équations de mouvement par l'introduction des fonctions analytiques. La méthode a donné de très bons résultats en comparaison avec la littérature ; ils ont étudié l'effet de l'exposant, le rapport de forme ainsi que l'épaisseur de plaque.

Bodaghi et Saidi [51] ont aussi élaboré les charges critiques pour les plaques FGM rectangulaires où les deux bords opposés sont simplement appuyés. Ces plaques reposent sur une fondation élastique et sollicitée par des distributions non uniformes dans le plan. Bodaghi et Saidi ont également utilisé la notion de la surface neutre et la théorie classique avec les déformations de *Von karmen*. Une résolution numérique de l'ODE à coefficient variable a été trouvée par une méthode semi-analytique, ils ont montré que la convergence n'est atteinte

qu'après quelques termes. Des résultats excellents et très précis sont obtenus leur valant le titre benchmark.

Huu-Tai et Dong-Ho [52] proposent une solution de l'équation de flambement à la solution de *Levy*, ils ont utilisé le concept de l'espace d'état et la théorie de *Reddy*, montrant la précision de la théorie d'ordre supérieur par rapport à la classique : la théorie classique surestime les charges critiques dès qu'on dépasse le seuil  $1/20$  d'épaisseur. Ils ont aussi montré pour des petites valeurs d'exposant qu'il y a une forte variation de la charge de flambement.

Tsung-Lin, Shukla et Jin [53] ont étudié analytiquement le post-flambement (postbuckling) des plaques FGM sous chargement mécanique et thermique, avec le polynôme de *Chebyshev*, la théorie de *Mindlin* « premier ordre », une variation exponentielle de matériau et les déformations de *Von karmen*. Ils ont trouvé que l'effet d'exposant qui est plus que deux '2' sur la charge de flambement et post-flambement est très significatif.

### 3.2. Stabilité des plaques rectangulaires :

Une plaque mince est par définition un élément fléchi à deux dimensions dont l'épaisseur est très petite par rapport aux deux autres dimensions. Un plan passant au milieu de l'épaisseur de la plaque est appelé plan moyen.

Les éléments de plaque mince sont utilisés dans différentes structures : ils peuvent être un élément d'une structure complexe ou peuvent eux-mêmes constituer la partie majeure d'une structure. Des exemples d'éléments de plaque sont les murs de conteneurs, de silos et de planchers réservoirs, les âmes de poutres, les planches plates, les éléments plats des voitures et des avions, les lames d'une turbine et les palplanches. Les éléments de plaques peuvent être homogènes et isotropes ou peuvent être raidis et /ou ont une construction composite et de plus en FGM.

Dépendant du mode d'application, une plaque peut être soumise à de différentes forces aussi bien latérales que dans le plan. Sous certaines conditions, un chargement appliqué dans le plan peut engendrer le flambement ; le flambement des plaques peut être global dans certains cas tels que les plaques laminées composées ou il peut y avoir une nature localisée ; « delamination buckling » des plaques composées est un exemple de flambement local.

Pour les plaques minces, le flambement est un phénomène qui peut influencer sur la capacité portante des éléments de plaque ; ainsi donc, il doit être pris en considération lors de l'étude de plaque.

### 3.3. Équations de la stabilité linéaire :

Les plaques minces sous un chargement en plan peuvent toujours avoir une configuration d'équilibre plane ; dans ce mode de déformation, la plaque subit une déformation en plan sans aucun déplacement latéral. Avec l'augmentation de la magnitude du chargement en plan appliqué, la plaque retient sa configuration d'équilibre plane, mais subit plus de déformation en plan. À un certain chargement, elle peut atteindre un point de bifurcation le long de son chemin d'équilibre.

Au-delà du point de bifurcation, la configuration plane deviendrait instable ; à ce stade la plaque peut présenter une déformation de flexion. La forme fléchie de la plaque, comme comparée avec sa configuration plane critique, est un état d'équilibre stable. La charge causant la transition de l'état plane instable à l'état stable déformé latéralement est la charge de flambement ou la charge de bifurcation de la plaque.

En supposant qu'un point de bifurcation existe, pour l'analyse de la stabilité de plaques initialement plane sous un chargement en plan, nous pouvons utiliser une analyse de stabilité linéaire ; cette approche est basée sur le nommé critère d'équilibre adjacent. Selon ce critère, au point de bifurcation, deux conditions d'équilibre infinitésimalement adjacentes peuvent exister : une configuration plane et une autre légèrement fléchie.

Ces deux états d'équilibre sont gouvernés par les équations (2.32-2.33-2.34). Si  $(u_0, v_0, w_0)$  représentent la configuration plane et si  $(u_1, v_1, w_1)$  représentent la configuration légèrement fléchie (perturbée) dans l'état planaire, le déplacement latéral  $w_0$  et ses dérivées sont nuls; d'où pour un état d'équilibre adjacent arbitraire, c'est-à-dire pour une perturbation au voisinage de l'état d'équilibre plane initial, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} u = u_0 + u_1 \\ v = v_0 + v_1 \\ w = w_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Il est à noter que ce processus de perturbation ne doit pas être appliqué seulement au champ de déplacement, mais aussi aux autres variables

dépendantes telles que les déformations dépendantes des forces appliquées. Le champ des forces relatif à la configuration planaire  $(N_{x_0}, N_{y_0}, N_{xy_0} = N_{yx_0})$  est gouverné par les équations d'équilibre originales (2.32-2.33).

$$\delta u_0: \frac{\partial N_{xx_0}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy_0}}{\partial y} = 0 \quad (3.2)$$

$$\delta v_0: \frac{\partial N_{xy_0}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy_0}}{\partial y} = 0 \quad (3.3)$$

Dans un cas général  $(N_{x_0}, N_{y_0}, N_{xy_0} = N_{yx_0})$  sont fonction des coordonnées variables  $x$  et  $y$ . Les équations (3.2-3.3) peuvent être résolues par plusieurs moyens incluant la méthode des fonctions de contrainte; ainsi le champ de forces en plans internes peut être déterminé indépendamment. Pour l'état légèrement fléchi, nous introduisons la perturbation suivante sur les forces en plan :

$$\begin{cases} N_x = N_{x_0} + N_{x_1} \\ N_y = N_{y_0} + N_{y_1} \\ N_{xy} = N_{xy_0} + N_{xy_1} \end{cases} \quad (3.4)$$

Les équations (3.4) gouvernent également aussi bien le comportement de l'équilibre de la plaque dans son état plan que dans sa configuration légèrement et arbitrairement fléchie.

Ainsi le champ de déplacement  $(u, v, w)$  et le champ de force  $(N_x, N_y, N_{xy} = N_{yx})$  à n'importe quel état déformé sont également gouvernés par ces relations. Si nous substituons les relations (3.4) dans (2.32-2.33-2.34) et si nous soustrayons les relations (3.2 et 3.3) des équations résultantes, nous obtenons les équations suivantes :

$$\delta u_0: \frac{\partial N_{xx_1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy_1}}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

$$\delta v_0: \frac{\partial N_{xy_1}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy_1}}{\partial y} = 0 \quad (3.6)$$

$$\delta w_0: \frac{\partial^2 M_{xx_1}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy_1}}{\partial xy} + \frac{\partial^2 M_{yy_1}}{\partial y^2} + \left( \hat{N}_{xx_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \hat{N}_{yy_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 2\hat{N}_{xy_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial xy} \right) = 0 \quad (3.7)$$

### 3.4. Équations d'équilibre pour analyse de flambement pour les plaques FGM :

En général, les propriétés mécaniques des plaques FGM ne sont pas symétriques au plan médian de la plaque. Par conséquent, les équations d'étirement et de flexion de cette plaque sont couplées. Il a été démontré qu'il n'y a pas de couplage d'étirement et de flexion dans les équations constitutives si la surface de référence est correctement sélectionnée.

De fait de ce couplage on va exprimer les équations d'équilibre en terme des déplacements pour pouvoir les découpler selon la méthode proposée par *Noiser* et *Reddy* [54].

D'après l'équation (2.26): (On utilise :  $Q_{66} = Q_{33}$ ), le développement des formules on obtient:

$$\begin{aligned}
 N_{xx_1} &= A_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v_1}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \\
 N_{yy_1} &= A_{11} \frac{\partial v_1}{\partial y} + A_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - B_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\
 N_{xy_1} &= A_{33} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - 2B_{33} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial xy} \right) \\
 M_{xx_1} &= B_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v_1}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \\
 M_{yy_1} &= B_{11} \frac{\partial v_1}{\partial y} + B_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \\
 M_{xy_1} &= B_{33} \left( \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - 2D_{33} \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial xy} \right)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

On fait la substitution :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} + A_{33} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} \right) - 2B_{33} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} = 0 \tag{3.9}$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + A_{12} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} - B_{12} \frac{\partial^3 w_1}{\partial y \partial x^2} + A_{33} \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) - 2B_{33} \frac{\partial^3 w_1}{\partial y \partial x^2} = 0 \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}
& B_{11} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3} + B_{12} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial y} - D_{11} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} - D_{12} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^3 v_1}{\partial y^3} + B_{12} \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2} - D_{11} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} - \\
& D_{12} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial x^2} + 2B_{33} \left( \frac{\partial^3 u_1}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^2 \partial y} \right) - 4D_{33} \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^2 \partial x^2} + \left( \widehat{N}_{xx_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \widehat{N}_{yy_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \right. \\
& \left. 2\widehat{N}_{xy_0} \frac{\partial^2 w_1}{\partial xy} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.11}$$

On aura donc un système d'équations aux dérivées partielles « PDE » de quatrième ordre des variables  $(u_1, v_1, w_1)$  fortement couplées. Dans l'équation (3.11) les coefficients des dérivées du second ordre sont les forces en plan interne; par la solution de l'équation (3.2-3.3), ces forces sont à priori connues comme des fonctions de  $x$  et  $y$ ; ainsi, elles apparaissent comme des coefficients connus dans l'équation (3.11). Le système des équations gouvernantes (3.9-3.10-3.11) doit être accompagné par les conditions aux limites appropriées; elles sont deux conditions aux limites en chaque point le long de chaque extrémité de la plaque; les conditions aux limites peuvent être sous forme géométrique (conditions sur le déplacement et ses dérivées premières) ou naturelle (conditions sur le moment fléchissant et la force de cisaillement).

Dont la solution peut être faite de l'une des trois méthodes connues :

- Méthodes analytiques exactes (espace d'état, fonctions de découplages, séries entières...).
- Méthode semi analytique (méthode de Galarkine...).
- Méthode numérique (FEM, BEM...).

Pour notre cas, on va choisir une méthode exacte c'est-à-dire : la méthode analytique pour obtenir la solution exacte.

### 3.5. Découplage de l'équation de flambement

La résolution de système (3.9-3.10-3.11) se fait par l'introduction d'une fonction analytique  $(\phi_i(x, y, t); i = 1, 2)$  pour enlever le découplage existant puis, on va proposer des solutions qui vérifieront les équations découplées et les conditions aux limites :

Soit les deux fonctions :

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} \\ \phi_2 = \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \end{cases} \tag{3.12}$$

En utilisant les relations suivantes :

$$\begin{cases} (A_{12} = A_{11} - 2A_{33}) \\ (B_{11} - 2B_{33} = B_{12}) \\ (D_{11} - 2D_{33} = D_{12}) \end{cases} \quad (3.13)$$

Après quelques opérations algébriques le système devient comme suit :

$$A_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + A_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w_1) = 0 \quad (3.14)$$

$$A_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - A_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w_1) = 0 \quad (3.15)$$

$$B_{11} \nabla^2 \phi_1 - D_{11} \nabla^2 \nabla^2 w_1 \hat{N}_{xx} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \hat{N}_{yy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + 2\hat{N}_{xy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial xy} = 0 \quad (3.16)$$

Où  $(\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla)$  est l'opérateur de Laplace.

La différentiation des équations (3.14) et (3.15) par rapport aux  $x$  et  $y$  respectivement puis, leur addition et soustraction, nous permet d'avoir la première et la deuxième équation découplées :

$$\nabla^2 \phi_1 = \left( \frac{B_{11}}{A_{11}} \right) \nabla^4 w_1 \quad (3.17)$$

$$\nabla^2 \phi_2 = 0 \quad (3.18)$$

$$\left( \frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \nabla^4 w_1 + \hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \hat{N}_{yy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \hat{N}_{xy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial xy} = 0 \quad (3.19.a)$$

On pose  $(\hat{D} = D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}})$ , (3.19.a) devient :

$$-\hat{D} \nabla^4 w_1 + \hat{N}_{xx} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \hat{N}_{yy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \hat{N}_{xy} \frac{\partial^2 w_1}{\partial xy} = 0 \quad (3.19.b)$$

L'équation (3.19.b) est l'équation de stabilité pour l'analyse de flambement des plaques mince rectangulaires fonctionnellement graduées, qui est la même que l'équation de la stabilité pour des plaques isotropes où la rigidité flexionnelle a une forme équivalente d'une plaque FGM.

La constante  $\hat{D}$  dans l'équation (3.19. b) est la rigidité de flexion équivalente.

Considérant les équations (3.17-3.18), les expressions suivantes pour les composantes des déplacements dans le plan peuvent être proposées :

$$\begin{cases} u_1 = \left( \frac{B_{11}}{A_{11}} \right) \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ v_1 = \left( \frac{B_{11}}{A_{11}} \right) \frac{\partial w_1}{\partial y} \end{cases} \quad (3.20)$$

Ces formules vérifient l'équation (3.18-3.19) et toutes les conditions aux limites de la plaque.

### 3.6. Conditions aux limites :

On suppose que la plaque soit simplement appuyée sur deux bords opposés, par conséquent, la méthode *Levy* est considérée comme la solution de l'analyse. Par conséquent, les conditions aux limites suivantes peuvent être utilisées le long des autres bords dans la direction  $y$  :

Simplement appuyées (S):

$$w_0 = M_y = 0 \quad (3.21)$$

Encastrée (C):

$$w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \quad (3.22)$$

Libre (F) :

$$M_y = V_{yy} + N_y \frac{\partial w_1}{\partial y} = 0 \quad (3.23)$$

Dans lequel le moment résultant  $M_y$  et l'effort tranchant effective  $V_y$  sont définis comme :

$$\begin{cases} M_y = -\hat{D} \left( \frac{\partial w_1}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right) \\ V_{yy} = -\hat{D} \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y} \right) \end{cases} \quad (3.24)$$

Où  $\hat{D}$  est la rigidité flexionnelle et  $\nu$  est le coefficient de *Poisson*.

Désormais les lettres :

(S) : indique que le bord est un appui simple.

(C) : signifie que le bord est encastré.

(F) : montre le bord libre.

### 3.7. Analyse du flambement :

Dans cette analyse on va considérer une plaque rectangulaire avec longueur «  $a$  » et largeur «  $b$  » sollicitée par le chargement indiqué sur la figure en dessous

(Figure 3.1). Par conséquent, les forces pré-flambements peuvent être obtenues en utilisant les conditions d'équilibre suivantes :

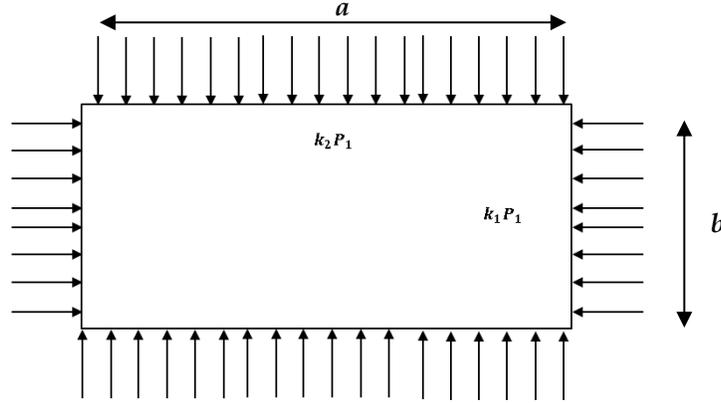


Figure 3.1: chargement d'une plaque FGM.

$$\begin{cases} \widehat{N}_{xx} = k_1 P_1 \\ \widehat{N}_{yy} = k_2 P_1 \\ \widehat{N}_{xy} = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

Où  $P_1$  est la force par unité de longueur,  $k_1$  et  $k_2$  sont les paramètres de charge qui indiquent les états de charge. Les valeurs négatives pour  $k_1$  et  $k_2$  indiquent que la plaque est soumise à des charges de compression biaxiale alors que les valeurs positives sont utilisées pour des efforts de traction. En outre, la valeur zéro pour  $k_1$  ou  $k_2$  montre un chargement uni-axial dans les directions  $x$  ou  $y$ , respectivement. En substituant les relations (3.25) dans l'équation. (3.19.b) on aura :

$$-\widehat{D}\nabla^4 w_1 + k_1 P_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + k_2 P_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0 \quad (3.26)$$

### 3.7.1. Solution de Navier :

Navier propose une solution de la forme d'une série trigonométrique double cette solution n'existe que dans le cas des plaques **SSSS**.

On note que la solution de Navier n'existe pas pour un chargement de cisaillement (il n'y a pas solution pour le chargement  $\widehat{N}_{xy}$  donc  $\widehat{N}_{xy} = 0$ ).

Soit la forme qui vérifie les conditions aux limites :

$$w_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\alpha_n x) \sin(\beta_m y) \quad (3.27)$$

On introduit cette forme dans l'équation obtenue du découplage et on obtient la charge critique pour les plaques FGM « SSSS »:

$$P_1 = \frac{-\widehat{D}(\alpha_n^2 + \beta_m^2)^2}{(\alpha_n^2 k_1 + \beta_m^2 k_2)} \quad (3.28)$$

$$\text{Où : } \begin{cases} \alpha_n = n \pi / a \\ \beta_m = m \pi / b \end{cases}$$

Donc on aura la charge critique adimensionnelle en fonction de  $(n, \eta, k_1, k_2)$  :

$$\frac{P_1 a^2}{\widehat{D}} = \frac{-\pi^2 (n^2 + m^2 \eta^2)^2}{(n^2 k_1 + m^2 \eta^2 k_2)} \quad (3.29)$$

$$\text{Où : } \eta = \frac{\alpha_n}{\beta_m} = \frac{b}{a}$$

La charge critique est obtenue pour des valeurs des demi-ondes «  $m$  » et «  $n$  » qui rendent l'expression précédente (3.29) minimale.

On note que la présence d'un chargement positif dans l'une des deux côtés a un effet stabilisateur (qui sera confirmé d'après les calculs).

### 3.7.2. Solution de Levy :

Cette solution vient pour le cas des plaques qui ont les deux (02) côtés opposés simplement appuyés alors que les autres côtés ont une condition arbitraire.

La forme de la solution proposée par *Levy* est une série trigonométrique et une fonction inconnue de la variable «  $y$  » à définir par l'introduction de l'expression dans l'équation aux dérivées partielles pour la rendre ordinaire, tout en tenant compte des conditions aux limites. La solution de *Levy* est plus générale que la solution de *Navier*, mais sa forme reste toujours sans caractère entièrement général pour le problème des plaques.

Soit la forme de *Levy* :

$$w_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(y) \sin(\alpha_m x) \quad (3.30)$$

L'introduction de la forme (3.30) dans (3.26) nous donne :

$$\widehat{D} \frac{d^4 W_m}{dy^4} - (2\widehat{D}\alpha_m^2 + k_2 P_1) \frac{d^2 W_m}{dy^2} + (\widehat{D}\alpha_m^4 + \alpha_m^2 k_1 P_1) W_m = 0 \quad (3.31)$$

C'est une équation différentielle ordinaire du quatrième ordre (04) « ODE », le déterminant de l'équation caractéristique est comme suit :

$$\Delta = 4\widehat{D}\alpha_m^2 (k_2 - k_1) P_1 + k_2^2 P_1^2$$

On obtient quatre solutions et par réduction on ne trouve que deux (02), on utilise la forme de la solution suivante :

$$W_m = C_1 \sinh(\lambda_1 y) + C_2 \cosh(\lambda_1 y) + C_3 \sinh(\lambda_2 y) + C_4 \cosh(\lambda_2 y) \quad (3.32)$$

Où :

$$\begin{cases} \lambda_1^2 = \left( 2\hat{D}\alpha_m^2 + k_2 P_1 - \sqrt{4\hat{D}\alpha_m^2(k_2 - k_1)P_1 + k_2^2 P_1^2} \right) / 2\hat{D} \\ \lambda_2^2 = \left( 2\hat{D}\alpha_m^2 + k_2 P_1 + \sqrt{4\hat{D}\alpha_m^2(k_2 - k_1)P_1 + k_2^2 P_1^2} \right) / 2\hat{D} \end{cases} \quad (3.33)$$

En imposant aux limites ( $y = 0$  et  $y = b$ ) les conditions arbitraires, on aura un système d'équations homogènes algébriques. Pour des solutions non triviales on met le déterminant égal à zéro et on résout (l'équation transcendante) on aura la charge critique de flambement (la plus petite solution), on normalise les constantes  $C_i$ , donc l'une des ( $C_i$  où  $i = 1,2,3$ ) égal à un « 1 » et on établit les autres pour obtenir les modes propres.

### 3.7.3. Plaques Simplement Appuyées « SSSS »:



Figure 3.2: conditions aux limites cas : "SSSS"

#### 3.7.3.1 Cas générale

$$\begin{cases} M_{yy}(x, 0) = M_{yy}(x, b) = 0 \\ w_1(x, 0) = w_1(x, b) = 0 \rightarrow W_m(0) = W_m(b) = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

L'expression du moment se simplifie a :

$$\begin{aligned} M_{yy} &= B_{11}(\partial v_1 / \partial y) + B_{12}(\partial u_1 / \partial x) - D_{11}(\partial^2 w_1 / \partial y^2) - D_{12}(\partial^2 w_1 / \partial x^2) = 0 \\ (3.34) \Leftrightarrow M_{yy} &= \left( B_{12} \frac{B_{11}}{A_{11}} - D_{12} \right) (\partial^2 w_1 / \partial x^2) + \left( B_{11} \frac{B_{11}}{A_{11}} - D_{11} \right) (\partial^2 w_1 / \partial x^2) = 0 \end{aligned}$$

En utilisant les relations entre les constantes du matériau pour la simplification :

$$\begin{cases} B_{12} = \nu B_{11} \\ D_{12} = \nu D_{11} \end{cases}$$

$$(3.34.) \Leftrightarrow -\widehat{D}(-\beta_m^2 \nu W_m[y] + \partial^2 W_m[y]/\partial y^2) \beta_m = 0$$

On évalue les équations (3.34.) aux limites ( $y = 0, b$ ) on obtient le système algébrique nul suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) & 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \\ \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2)\text{Sinh}[b\lambda_1] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2)\text{Cosh}[b\lambda_1] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2)\text{Sinh}[b\lambda_2] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2)\text{Cosh}[b\lambda_2] \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{Sinh}[b\lambda_1] & \text{Cosh}[b\lambda_1] & \text{Sinh}[b\lambda_2] & \text{Cosh}[b\lambda_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.35)$$

Pour des solutions non triviales le déterminant doit être nul ; l'évaluation du déterminant nous ramène à une équation transcendante :

$$\widehat{D}^2(\text{Sinh}[b\lambda_1]\text{Sinh}[b\lambda_2]\lambda_1^4 - 2\text{Sinh}[b\lambda_1]\text{Sinh}[b\lambda_2]\lambda_1^2\lambda_2^2 + \text{Sinh}[b\lambda_1]\text{Sinh}[b\lambda_2]\lambda_2^4) = 0 \quad (3.36)$$

Après simplification on aura :

$$\widehat{D}^2\text{Sinh}[b\lambda_1]\text{Sinh}[b\lambda_2](\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 = 0 \quad (3.37)$$

À cause de la symétrie géométrique qui existe sur l'axe ( $y = b/2$ ) (c.-à-d. «  $y$  est un axe de symétrie ») les modes SSSS, SCSC, SFSF de flambement vont être simplifiés et séparés en modes symétriques et modes asymétriques :

### 3.7.3.2 Modes symétriques :

L'évaluation des équations sera pour  $y = \pm b/2$

La solution devient :

$$W_m[y] = (\text{Cosh}[\lambda_1 y] \quad \text{Cosh}[\lambda_2 y]) \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Le système des équations se simplifie à :

$$\begin{pmatrix} \text{Cosh}\left[\frac{b}{2}\lambda_1\right] & \text{Cosh}\left[\frac{b}{2}\lambda_2\right] \\ \text{Cosh}\left[\frac{b}{2}\lambda_1\right]\widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) & \text{Cosh}\left[\frac{b}{2}\lambda_2\right]\widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.39)$$

Et le déterminant pour une solution non nulle :

$$Det = Cosh \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] Cosh \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \widehat{D}\lambda_1^2 - Cosh \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] Cosh \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \widehat{D}\lambda_2^2 = 0 \quad (3.40)$$

Et on obtient l'équation caractéristique d'une plaque « SSSS » :

$$Cosh \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] Cosh \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \widehat{D}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0 \quad (3.41)$$

### 3.7.3.3 Modes asymétriques :

La solution devient :

$$W_m[y] = (Sinh[\lambda_1 y] \quad Sinh[\lambda_2 y]) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Le système des équations se simplifie à :

$$\begin{pmatrix} Sinh \left[ \frac{b}{2} \lambda_1 \right] & Sinh \left[ \frac{b}{2} \lambda_2 \right] \\ Sinh \left[ \frac{b}{2} \lambda_1 \right] \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) & Sinh \left[ \frac{b}{2} \lambda_2 \right] \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.43)$$

$$Det = \widehat{D}Sinh \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] Sinh \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \lambda_1^2 - \widehat{D}Sinh \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] Sinh \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \lambda_2^2 = 0 \quad (5.11)$$

Équation caractéristique :

$$\widehat{D}Sinh \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] Sinh \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0 \quad (3.44)$$

### 3.7.3.4 Étude de cas asymétrique :

$$\widehat{D}Sinh[b\lambda_1]Sinh[b\lambda_2](\lambda_1^2 - \lambda_2^2)^2 = 0 \quad (3.45)$$

Pour des valeurs minimales de  $(P_{cr})$  :

$$\begin{cases} Sinh[b\lambda_1] = 0 \\ Sinh[b\lambda_2] = 0 \end{cases} \Rightarrow b \sqrt{(2\widehat{D})^{-1} \left( \sqrt{4\widehat{D}\beta_n^2(k_2 - k_1)P_1 + k_2^2 P_1^2 + 2\widehat{D}\beta_n^2 + k_2 P_1} \right)} = im\pi$$

$$\Rightarrow \frac{P_1 a^2}{\widehat{D}} = \frac{-\pi^2(n^2 + m^2 \eta^2)^2}{(n^2 k_1 + m^2 \eta^2 k_2)} \quad (3.46)$$

On remarque que cette solution est celle exactement obtenue par la solution de Navier ; ce qui confirme le résultat obtenu.

### 3.7.4. Plaque à deux côtés encastrés « CSCS » :

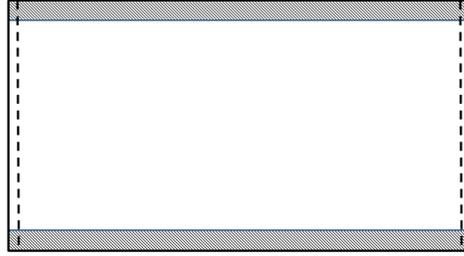


Figure 3.3: conditions aux limites cas : "SCSC"

#### 3.7.4.1 Cas général :

Les conditions aux limites « SCSC »:

$$\begin{cases} w_1(x, 0) = 0 \rightarrow W_m(0) = 0 \\ w_1(x, b) = 0 \rightarrow W_m(b) = 0 \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial y}(x, 0) = 0 \rightarrow \frac{\partial W_m}{\partial y}(0) = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial y}(x, b) = 0 \rightarrow \frac{\partial W_m}{\partial y}(b) = 0 \end{cases}$$

Solution générale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1 \text{Cosh}[b\lambda_1] & 0 & \lambda_2 \text{Cosh}[b\lambda_2] & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{Sinh}[b\lambda_1] & \text{Cosh}[b\lambda_1] & \text{Sinh}[b\lambda_2] & \text{Cosh}[b\lambda_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.48)$$

Pour des solutions non triviales :

$$-(\text{Cosh}[b\lambda_1] - \text{Cosh}[b\lambda_2])^2 \lambda_1 \lambda_2 = 0 \quad (3.49)$$

Où:  $\lambda_1 \lambda_2 = 4\widehat{D}\beta_m^2(k_1 P_1 + \widehat{D}\beta_m^2)$  donc  $(P_1 = \frac{\widehat{D}\beta_m^2}{k_1})$  est une solution, mais n'est pas une charge critique du fait qu'elle n'est pas minimale comme on va voir dans les résultats du reste de l'expression.

#### 3.7.4.2 Modes symétriques :

Pour  $y = \pm b/2$

$$W_m[y] = (\text{Cosh}[\lambda_1 y] \quad \text{Cosh}[\lambda_2 y]) \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

$$\begin{pmatrix} \text{Cosh} \left[ \lambda_1 \frac{b}{2} \right] & \text{Cosh} \left[ \lambda_2 \frac{b}{2} \right] \\ \text{Sinh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_1 \right] \lambda_1 & \text{Sinh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_2 \right] \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.51)$$

Déterminant :

$$-\text{Cosh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \text{Sinh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] \lambda_1 + \text{Cosh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] \text{Sinh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \lambda_2 = 0 \quad (3.52)$$

Après simplification de l'équation caractéristique :

$$-\lambda_1 \text{Tanh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] + \lambda_2 \text{Tanh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] = 0 \quad (3.53)$$

### 3.7.4.3 Modes non symétriques :

$$W_m[y] = (\text{Sinh}[\lambda_1 y] \quad \text{Sinh}[\lambda_2 y]) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

$$\begin{pmatrix} \text{Sinh} \left[ \lambda_1 \frac{b}{2} \right] & \text{Sinh} \left[ \lambda_2 \frac{b}{2} \right] \\ \text{Cosh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_1 \right] \lambda_1 & \text{Cosh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_2 \right] \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.55)$$

Solution non triviale :

$$-\text{Cosh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] \text{Sinh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \lambda_1 + \text{Cosh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \text{Sinh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] \lambda_2 = 0 \quad (3.56)$$

On aura :

$$\lambda_2 \text{Tanh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] - \lambda_1 \text{Tanh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] = 0 \quad (3.57)$$

### 3.7.5. Plaque à deux côtés libres « SFSF » :



Figure 3.4: conditions aux limites cas : "SFSF".

#### 3.7.5.1 Cas général :

$$\begin{cases} M_{yy}(x, 0) = M_{yy}(x, b) = 0 \\ V_{yy}(x, 0) + N_y \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, 0) = V_y(x, b) + N_y \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, b) = 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_{yy} = -\widehat{D}(\partial^2 w_0 / \partial y^2 + \nu \partial^2 w_0 / \partial x^2) = 0 \\ -\widehat{D}(f(y)'''' - (2 - \nu)\beta_m^2 f(y)') + N_y^0 f(y)' = 0 \end{cases}$$

Où :

$$V_{yy} = -\widehat{D} \left( \frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2 \partial y} \right)$$

Ce cas (5.26.1) est déjà élaboré dans le cas « SSSS » dont l'équation aux limites est :

$$\begin{pmatrix} 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) & 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \\ \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2)\text{Sinh}[b\lambda_1] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2)\text{Cosh}[b\lambda_1] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2)\text{Sinh}[b\lambda_2] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2)\text{Cosh}[b\lambda_2] \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \quad (3.59)$$

Donc (3.58.2) devient :

$$\begin{aligned} (3.58.2) \Leftrightarrow & \text{Cosh}[y\lambda_1]\lambda_1 \left( N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2) \right) C_1 \\ & + \text{Sinh}[y\lambda_1]\lambda_1 \left( N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2) \right) C_2 \\ & + \text{Cosh}[y\lambda_2]\lambda_2 \left( N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2) \right) C_3 \\ & + \text{Sinh}[y\lambda_2]\lambda_2 \left( N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2) \right) C_4 \end{aligned}$$

On assemble (3.58.1) et (3.58.2) dans le système suivant<sup>2</sup> :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1(N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2)) & 0 & \lambda_2(N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2)) & 0 \\ \text{Cosh}[b\lambda_1]\lambda_1(N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2)) & \text{Sinh}[b\lambda_1]\lambda_1(N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2)) & \text{Cosh}[b\lambda_2]\lambda_2(N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2)) & \text{Sinh}[b\lambda_2]\lambda_2(N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2)) \\ 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) & 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \\ \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2)\text{Sinh}[b\lambda_1] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2)\text{Cosh}[b\lambda_1] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2)\text{Sinh}[b\lambda_2] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2)\text{Cosh}[b\lambda_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

Pour des solutions non triviales le déterminant doit être non nul donc :

$$\begin{aligned} & \left( -\lambda_1 \left( N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2) \right) (\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \left( \text{Sinh}[b\lambda_1]\text{Sinh}[b\lambda_2]\lambda_1 \left( -N_y^0 + \right. \right. \right. \\ & \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2) \left. \left. \left. (-\nu\beta_m^2 + \lambda_2^2) + \text{Cosh}[b\lambda_1]\text{Cosh}[b\lambda_2](\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2)\lambda_2 \left( -N_y^0 + \right. \right. \right. \right. \\ & \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2) \left. \left. \left. \right) + (-\nu\beta_m^2 + \lambda_1^2)\lambda_2 \left( -N_y^0 + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2) \right) \right) - \\ & (\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2)\lambda_2 \left( N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2) \right) \left( \text{Cosh}[b\lambda_1]\text{Cosh}[b\lambda_2]\lambda_1 \left( -N_y^0 + \right. \right. \\ & \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2) \left. \left. \left. \right) (\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) + \lambda_1 \left( -N_y^0 + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2) \right) \left( -\nu\beta_m^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \lambda_2^2) + \text{Sinh}[b\lambda_1]\text{Sinh}[b\lambda_2](-\nu\beta_m^2 + \lambda_1^2)\lambda_2 \left( -N_y^0 + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2) \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (3.60)$$

## 3.7.5.2 Modes Symétriques :

Pour  $y = \pm b/2$

$$W_m[y] = (\text{Cosh}[\lambda_1 y] \quad \text{Cosh}[\lambda_2 y]) \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

$$\begin{pmatrix} \text{Sinh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_1 \right] \lambda_1 (N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2)) & \text{Sinh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_2 \right] \lambda_2 (N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2)) \\ \text{Cosh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_1 \right] \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) & \text{Cosh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_2 \right] \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_4 \end{pmatrix} = \quad (3.62)$$

Pour des solutions non triviales le déterminant de ce système doit être nul :

$$\text{Det} = \left( \widehat{D} \left( \text{Cosh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \text{Sinh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] \lambda_1 (-N_y^0 + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2)) (-\nu\beta_m^2 + \lambda_2^2) + \right. \right. \\ \left. \left. \text{Cosh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] \text{Sinh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] (\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) \lambda_2 (-N_y^0 + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2)) \right) \right) = 0 \quad (3.63)$$

Après simplification on aura :

$$\Rightarrow \lambda_1 (-N_y^0 + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2)) (-\nu\beta_m^2 + \lambda_2^2) \text{Tanh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] + (\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) \lambda_2 (-N_y^0 + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2)) \text{Tanh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] = 0 \quad (3.64)$$

## 3.7.5.3 Modes non symétriques :

$$W_m[y] = (\text{Sinh}[\lambda_1 y] \quad \text{Sinh}[\lambda_2 y]) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

$$\begin{pmatrix} \text{Cosh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_1 \right] \lambda_1 (N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2)) & \text{Cosh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_2 \right] \lambda_2 (N_y^0 - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2)) \\ \text{Sinh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_1 \right] \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) & \text{Sinh} \left[ \frac{b}{2} \lambda_2 \right] \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_3 \end{pmatrix} = \quad (3.66)$$

$$\Rightarrow \text{Det} = \left( \widehat{D} \left( \text{Cosh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] \text{Sinh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \lambda_1 (-N_y^0 + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2)) (-\nu\beta_m^2 + \lambda_2^2) + \right. \right. \\ \left. \left. \text{Cosh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \text{Sinh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] (\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) \lambda_2 (-N_y^0 + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2)) \right) \right) = 0 \quad (3.67)$$

Après simplification on aura :

$$\Rightarrow \text{Tanh} \left[ \frac{b\lambda_2}{2} \right] \lambda_1 (-N_y^0 + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2)) (-\nu\beta_m^2 + \lambda_2^2) + \text{Tanh} \left[ \frac{b\lambda_1}{2} \right] (\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) \lambda_2 (-N_y^0 + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2)) = 0 \quad (3.68)$$

### 3.7.6. Plaque à seul côté encastré « SSSC » :



Figure 3.5: conditions aux limites cas : "SSSC".

#### 3.7.6.1 Cas général :

$$\begin{cases} M_{yy}(x, 0) = w_0(x, 0) = 0 \rightarrow W_m(0) = 0 \\ w_0(x, b) = (\partial w_0 / \partial y)(x, b) = 0 \rightarrow W_m(b) = (\partial W_m / \partial y)(x, b) = 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

$$(4.37.1) \Leftrightarrow M_{yy} = -\widehat{D}(\partial^2 w_0 / \partial y^2 + \nu \partial^2 w_0 / \partial x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow -\widehat{D}(-\beta_m^2 \nu W_m[y] + \partial^2 W_m[y] / \partial y^2) = 0$$

On évalue les équations (3.69.1) et (3.69.2) aux limites ( $y = 0, b$ ) on obtient le système algébrique suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) & 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \text{Sinh}[b\lambda_1] & \text{Cosh}[b\lambda_1] & \text{Sinh}[b\lambda_2] & \text{Cosh}[b\lambda_2] \\ \lambda_1 \text{Cosh}[b\lambda_1] & \lambda_1 \text{Sinh}[b\lambda_1] & \lambda_2 \text{Cosh}[b\lambda_2] & \lambda_2 \text{Sinh}[b\lambda_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

Pour des solutions non triviales le déterminant doit être nul ; l'évaluation du déterminant nous ramène à une équation transcendante :

$$-\widehat{D}(\text{Cosh}[b\lambda_1] \text{Sinh}[b\lambda_2] \lambda_1 - \text{Cosh}[b\lambda_2] \text{Sinh}[b\lambda_1] \lambda_2) (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0 \quad (3.71)$$

Après simplifications on aura :

$$-\widehat{D}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) (-\lambda_2 \text{Tanh}[b\lambda_1] + \lambda_1 \text{Tanh}[b\lambda_2]) = 0 \quad (3.72)$$

On remarque que la partie droite de cette équation est similaire au mode symétrique de SCSC (juste cette équation pour ( $y = b$ )).

D'après ces résultats on peut remarquer que l'équation du cas asymétrique « SCSC » et l'équation trouvée au-dessus sont les mêmes, à l'exception de  $\lambda_1, \lambda_2$  qui sont remplacées par  $\lambda_1/2, \lambda_2/2$ . La signification physique de cette similitude

est que les modes de flambement (et les charges critiques correspondantes) selon l'axe  $y$  d'une plaque « SCSC » ont le même rapport  $\eta$  d'une plaque « SSSC » d'un rapport  $2\eta$ . Cela est dû aux conditions aux limites le long de l'axe d'asymétrie « SCSC » qui est équivalentes à un support simplement appuyé. La même correspondance existe pour le cas « SFSF » et « SSSF ».

**3.7.7. Plaque à un seul côté libre « SSSF » :**

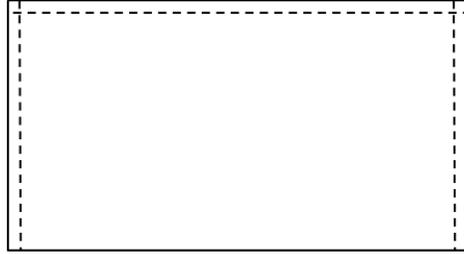


Figure 3.6:conditions aux limites cas : "SSSF".

**3.7.7.1 Cas général :**

$$\begin{cases} M_{yy}(x, 0) = w_0(x, 0) = 0 \rightarrow W_m(0) = W_m(b) = 0 \\ V_y(x, 0) + N_y \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad 3 \quad (3.73)$$

Dont l'équation aux limites est :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 (N - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2)) & 0 & \lambda_2 (N - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2)) & 0 \\ 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) & 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \\ \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) \text{Sinh}[b\lambda_1] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) \text{Cosh}[b\lambda_1] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \text{Sinh}[b\lambda_2] & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \text{Cosh}[b\lambda_2] \\ \text{Sinh}[b\lambda_1] & \text{Cosh}[b\lambda_1] & \text{Sinh}[b\lambda_2] & \text{Cosh}[b\lambda_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.74)$$

Pour des solutions non triviales :

$$\widehat{D}^2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \left( \text{Cosh}[b\lambda_1] \text{Sinh}[b\lambda_2] \lambda_1 \left( -N + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2) \right) (\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) + \text{Cosh}[b\lambda_2] \text{Sinh}[b\lambda_1] (-\nu\beta_m^2 + \lambda_1^2) \lambda_2 \left( -N + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2) \right) \right) = 0 \quad (3.75)$$

Après simplifications :

$$\lambda_2 (-\nu\beta_m^2 + \lambda_1^2) \left( -N + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2) \right) \text{Tanh}[b\lambda_1] + \lambda_1 (\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \left( -N + \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2) \right) \text{Tanh}[b\lambda_2] = 0 \quad (3.76)$$

Après simplifications :

$$\lambda_2(-\nu(m\pi)^2 + \lambda_1^2) \left( -k_2 P_{cr} + ((-2 + \nu)(m\pi)^2 + \lambda_2^2) \right) \text{Tanh}[\eta\lambda_1] + \lambda_1(\nu(m\pi)^2 - \lambda_2^2) \left( -k_2 P_{cr} + ((-2 + \nu)(m\pi)^2 + \lambda_1^2) \right) \text{Tanh}[\eta\lambda_2] = 0 \quad (3.77)$$

### 3.7.8. Plaque à côté encasté et à côté libre « SCSF » :

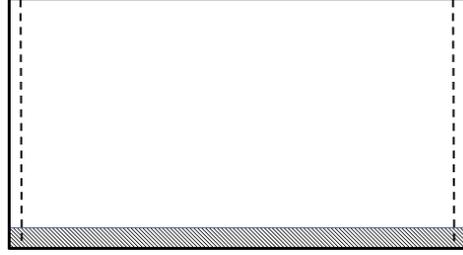


Figure 3.7: conditions aux limites cas : "SCSF".

#### 3.7.8.1 Cas général :

$$\begin{cases} M_{yy}(x, 0) = 0 & (1) \\ V_y(x, 0) + N_y \frac{\partial w_0}{\partial y}(x, 0) = 0 & (2) \\ w_0(x, b) = (\partial w_0 / \partial y)(x, b) = 0 \rightarrow W_m(b) = (\partial W_m / \partial y)(x, b) = 0 & (3) \end{cases} \quad (3.78)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 (N_y - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_1^2)) & 0 & \lambda_2 (N_y - \widehat{D}((-2 + \nu)\beta_m^2 + \lambda_2^2)) & 0 \\ 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_1^2) & 0 & \widehat{D}(\nu\beta_m^2 - \lambda_2^2) \\ \text{Sinh}[b\lambda_1] & \text{Cosh}[b\lambda_1] & \text{Sinh}[b\lambda_2] & \text{Cosh}[b\lambda_2] \\ \lambda_1 \text{Cosh}[b\lambda_1] & \lambda_1 \text{Sinh}[b\lambda_1] & \lambda_2 \text{Cosh}[b\lambda_2] & \lambda_2 \text{Sinh}[b\lambda_2] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

Le déterminant sera :

$$\begin{aligned} & \widehat{D} \left( \text{Cosh}[b\lambda_1] \text{Cosh}[b\lambda_2] \lambda_1 \lambda_2 \left( -2(-2 + \nu) \nu \widehat{D} \beta_m^4 - N \lambda_2^2 - \lambda_1^2 (N - 2 \widehat{D} \lambda_2^2) + 2 \beta_m^2 (N \nu - \widehat{D} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)) \right) \right) \\ & + \lambda_1 \lambda_2 \left( 2(-2 + \nu) \nu \widehat{D} \beta_m^4 + N \lambda_1^2 - \widehat{D} \lambda_1^4 + N \lambda_2^2 - \widehat{D} \lambda_2^4 + 2 \beta_m^2 (-N \nu + \widehat{D} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)) \right) \\ & + \text{Sinh}[b\lambda_1] \text{Sinh}[b\lambda_2] \left( (-2 + \nu) \nu \widehat{D} \beta_m^4 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \lambda_1^2 \lambda_2^2 (-2N + \widehat{D} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)) + \beta_m^2 (\nu \widehat{D} \lambda_1^4 - N \nu \lambda_2^2 + \nu \widehat{D} \lambda_2^4 - \lambda_1^2 (N \nu + 2(-2 + \nu) \widehat{D} \lambda_2^2)) \right) \end{aligned} = 0 \quad (3.80)$$

On fait quelques opérations algébriques de simplification :

$$\begin{aligned}
& \widehat{D} \left( \text{Cosh}[b\lambda_1] \text{Cosh}[b\lambda_2] \lambda_1 \lambda_2 \left( -2(-2 + \nu) \nu \beta_m^4 - \frac{N\lambda_2^2}{\widehat{D}} - \lambda_1^2 \widehat{D} \left( \frac{N}{\widehat{D}} - 2\lambda_2^2 \right) + 2\beta_m^2 \widehat{D} \left( \frac{N\nu}{\widehat{D}} - \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \right) \right) + \lambda_1 \lambda_2 \left( 2(-2 + \nu) \nu \beta_m^4 + \frac{N}{\widehat{D}} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - (\lambda_1^4 + \lambda_2^4) + 2\beta_m^2 \left( -\frac{N\nu}{\widehat{D}} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \right) \right) + \text{Sinh}[b\lambda_1] \text{Sinh}[b\lambda_2] \left( (-2 + \nu) \nu \beta_m^4 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \lambda_1^2 \lambda_2^2 \left( -2\frac{N}{\widehat{D}} + \right. \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left. (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \right) + \beta_m^2 \left( -\frac{N}{\widehat{D}} \nu (\lambda_2^2 + \lambda_1^2) + \nu (\lambda_1^4 + \lambda_2^4) + 2(-2 + \nu) \lambda_1^2 \lambda_2^2 \right) \right) \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.81}$$

### 3.8. Vibration des plaques FGM:

#### 3.8.1. Introduction Bibliographique:

Plusieurs recherches sont élaborées pour comprendre le comportement vibratoire des plaques FGM et surtout le couplage thermomécanique. La majorité de ces travaux est presque basée sur trois types des plaques selon l'épaisseur : mince, faiblement épaisse et plaques épaisses.

Pour des petites épaisseurs inférieurs ou égales à 1/100 la théorie classique de *Kirchhoff* est fiable, (A Hasani, et al., 2010) [55] ont proposé une méthode de découplage inspirée des travaux de (Noseir & Reddy, (1992)) [54] pour résoudre le problème des vibrations libres pour les six cas des plaques qui ont deux côtés opposés simplement appuyés, ils utilisent la théorie classique et une loi exponentielle pour le matériau FGM pour établir les fréquences, les paramètres fréquentiels, l'effet d'élanement, l'épaisseur et l'exposant de FGM. Des bons résultats ont été trouvés pour des petites épaisseurs, ils ont aussi confirmé les limites de la théorie classique pour les plaques épaisses : la CPT « surestime les fréquences », l'effet de l'inertie de rotation ainsi que l'effet de couplage pour les modes en plan.

(Serge, 2008) [46] a étudié les problèmes des vibrations libres, flambement et flexion statique des plaques FGM minces qui ont une distribution exponentielle de matériau à travers l'épaisseur, sa recherche est basée sur la théorie de *Kirchhof* et la surface de référence pour le découplage. Il a montré que les fréquences, les charges critiques et les déformations d'une plaque FGM sont toujours proportionnelles à celle d'une plaque homogène et qu'on peut aisément prédire le coefficient de proportionnalité.

(Zhao, et al., 2009) [56] ont trouvé les fréquences et les modes propres aux différentes conditions aux limites en utilisant la méthode de l'élément « *Kp-Rtiz* » par l'application de la méthode de *Ritz* sur le fonctionnel d'énergie du système.

(Reddy, 2000) [57] a présenté une formulation théorique et un modèle d'éléments finis pour les plaques FGM basée sur la théorie du troisième ordre TSDT avec le couplage thermique et la non linéarité géométrique de *Von Karman*.

Des solutions d'élasticité tridimensionnelle des plaques FGM rectangulaires simplement appuyées considérées comme référence pour les autres approches (Vel & Batra, 2004) [58] ont présenté une solution analytique exacte par l'approche de l'élasticité tridimensionnelle. Les schémas de *Mori-tanaka* et l'auto-consistance sont utilisés pour la distribution des propriétés effectives de matériau. Ils ont tenu compte de l'effet de la contrainte normale et le cisaillement transversal par l'intégration des équations d'élasticité tridimensionnelle. Un excellent accord entre les théories du troisième, premier ordre et la solution exacte d'élasticité, une différence apparente observée avec la théorie classique pour les grandes épaisseurs, (Matsunaga, 2008) [59] a élaboré les fréquences propres et les charges critiques de flambement pour des plaques simplement appuyées par l'utilisation de la théorie d'ordre supérieur 2D.

(Hosseini-Hashemi, et al., 2010 ) [60] ont étudié les vibrations libres des plaques FGM en se basant sur la théorie de cisaillement de premier ordre FSDT. Ils ont négligé l'effet des déplacements dans le plan pour les plaques simplement appuyées.

(Hosseini-Hashemi , et al., 2011) [61]<sup>1</sup> , (Hosseini-Hashemi, et al., 2011)<sup>2</sup> [62]<sup>2</sup> ont présenté une solution exacte pour les plaques faiblement épaisses (aussi épaisses) pour les six conditions de *Levey*, ils ont découplé les équations par l'introduction de nouvelles fonctions afin de rendre le système PDE un système ODE, ils ont introduit pour la première fois la notion du paramètre fréquentiel absolu, de très bons résultats ont été obtenus montrant l'effet de l'exposant, l'élançement et la puissance de la théorie d'ordre trois TSDT.

### 3.9. Vibration des plaques rectangulaires :

#### 3.9.1. Équations d'équilibre :

Après l'utilisation du principe d'*Hamilton* qui nous permet d'avoir les équations de mouvement (équations : 2.33-2.34-2.35) de la plaque FGM rectangulaire :

Pour exprimer les équations de mouvement en termes de déplacements on va substituer les forces par leurs expressions à partir d'équation (2.27) pour un matériau FGM, on aura après simplification:

$$A_{11} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{33} \left( \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{11} \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right) = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \quad (3.82)$$

$$A_{11} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{33} \left( \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) - B_{11} \left( \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right) = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \quad (3.83)$$

$$B_{11} \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \right) - D_{11} \left( \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^2 \partial x^2} \right) = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \left( \frac{\partial \ddot{u}_0}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}_0}{\partial y} \right) - I_2 \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \right) \quad (3.84)$$

Le système au-dessus est un système des équations aux dérivées partielles « PDE » d'ordre quatre couplées dans le temps et l'espace avec des coefficients constants.

La résolution de ce système peut se faire selon une de ces méthodes exposées dans le paragraphe (3.4), en note que parmi les simplifications que la « CPT » nous offre est l'omission de l'inertie de rotation, malgré cette simplification, on ne va pas la négliger dans le présent travail en raison de la fiabilité de l'approche utilisée.

#### 3.9.2. Découplage de l'équation de Vibration :

On va découpler le système des « PDE » avec la même méthode utilisée précédemment pour le problème de flambement « approche de *Noiser* et *Reddy* » ; où on va introduire deux fonctions ( $\phi_1$  et  $\phi_2$ ) pour découpler le système. Après l'introduction des deux fonctions le système (3.82-3.83-3.84) devient :

$$A_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + A_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w_0) = I_0 \ddot{u}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \quad (3.85)$$

$$A_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - A_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w_0) = I_0 \ddot{v}_0 - I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \quad (3.86)$$

$$B_{11} \nabla^2 \phi_1 - D_{11} \nabla^2 \nabla^2 w_0 = I_0 \ddot{w}_0 + I_1 \ddot{\phi}_1 - I_2 \nabla^2 \ddot{w}_0 \quad (3.87)$$

Où  $\nabla^2$  est l'opérateur de *Laplace*

La différentiation des équations (3.85) et (3.86) par rapport aux  $x$  et  $y$  respectivement puis l'addition et la soustraction nous permettent d'avoir la première et la deuxième équation découplées respectivement :

$$A_{11} \nabla^2 \phi_1 - B_{11} \nabla^4 w_0 = I_0 \ddot{\phi}_1 + I_1 \nabla^2 \ddot{w}_0 \quad (3.88)$$

$$A_{33} \nabla^2 \phi_2 - I_0 \ddot{\phi}_2 = 0 \quad (3.89)$$

De l'équation (3.88) et (3.89) et par quelques opérations algébriques on peut avoir :

$$\ddot{\phi}_1 = \frac{1}{(I_1 - (B_{11}/A_{11})I_0)} \left[ \left( \frac{B_{11}^2}{A_{11}} - D_{11} \right) \nabla^4 w_0 + \left( I_2 - \frac{B_{11}I_1}{A_{11}} \right) \nabla^2 \ddot{w}_0 - I_0 \ddot{w}_0 \right] \quad (3.90)$$

Par substitution de l'équation (3.90) dans (3.88), il est facile de montrer que :

$$\widehat{D} \nabla^6 w_0 + \left( \frac{B_{11}}{A_{11}} J_1 - \frac{\widehat{D} I_0}{A_{11}} - J_2 \right) \nabla^4 \ddot{w}_0 + \left( \frac{I_0 J_2}{A_{11}} - \frac{I_1 J_1}{A_{11}} \right) \nabla^2 \ddot{w}_0 + I_0 \nabla^2 \ddot{w}_0 - \frac{I_0^2}{A_{11}} \ddot{w}_0 = 0 \quad (3.91)$$

Où les paramètres  $\widehat{D}$ ,  $J_1$  et  $J_2$  sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \widehat{D} = D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \\ J_1 = I_1 - \frac{B_{11}I_0}{A_{11}} \\ J_2 = I_2 - \frac{B_{11}I_1}{A_{11}} \end{cases}$$

Donc, par l'utilisation de la méthode analytique les équations de mouvement sont converties en deux équations découplées (3.88) et (3.89). D'après les équations (3.85) et (3.86) les relations suivante on peut facilement obtenir les équations qui expriment les déplacements en plan «  $u$  » et «  $v$  » :

$$\ddot{u}_0 = \frac{1}{I_0} \left( A_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + A_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 w_0) + I_1 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right) \quad (3.92)$$

$$\ddot{v}_0 = \frac{1}{I_0} \left( A_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} - A_{33} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - B_{11} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 w_0) + I_1 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \right) \quad (3.93)$$

### 3.9.3. Solution des équations découplées:

#### 3.9.3.1 Solution de NAVIER:

La solution de *Navier* existe seulement pour les plaques simplement appuyées « SSSS ». Selon *Navier* le déplacement transversal  $w_0$  et la fonction  $\phi_2$  peuvent être exprimés à partir des double séries trigonométriques comme suit:

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) e^{i\omega_{mn} t} \quad (3.94)$$

$$\phi_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{mn} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) e^{i\omega_{mn} t} \quad (3.95)$$

Où :  $\alpha_m$  et  $\beta_n$  sont  $m\pi/b$  et  $n\pi/a$  respectivement,  $\omega_{mn}$  est la fréquence propre du mode  $(m, n)$ .

La substitution des doubles séries des deux variables dans les équations (3.89) et (3.91) ; les fréquences naturelles peuvent facilement être obtenues en résolvant l'équation :

$$\chi_1 \omega^4 + \chi_2 \omega^2 + \chi_3 = 0 \quad (3.96)$$

La fréquence fondamentale de vibration est la plus petite des solutions obtenues, les coefficients  $\chi_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sont donnés par :

$$\begin{cases} \chi_1 = (I_1^2 - I_0 I_2)(\alpha_m^2 - \beta_n^2) - I_0^2 \\ \chi_2 = (I_0 D_{11} + I_2 A_{11} - 2I_1 B_{11})(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^2 + I_0 A_{11}(\alpha_m^2 + \beta_n^2) \\ \chi_3 = (B_{11}^2 - A_{11} D_{11})(\alpha_m^2 + \beta_n^2)^3 \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\omega = \text{Min} \left( \frac{\sqrt{\frac{\chi_2 - \sqrt{\chi_2^2 - 4\chi_1\chi_3}}{\chi_1}}}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{\frac{\chi_2 + \sqrt{\chi_2^2 - 4\chi_1\chi_3}}{\chi_1}}}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.98)$$

#### 3.9.3.2 Solution de Levy :

La solution de *Levy* est très utile, elle est appliquée aux conditions aux limites supposées simplement appuyées sur les côtés pour  $x = 0$  et  $x = a$  et les autres côtés prennent n'importe quelle condition, la forme de la solution est considérée comme :

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(y) \sin(\beta_m y) e^{i\omega_m t} \quad (3.99)$$

$$\phi_2(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(y) \cos(\beta_m y) e^{i\omega_m t} \quad (3.100)$$

La substitution de ces deux équations dans le système des équations de mouvement (3.89) et (3.91) donne deux équations différentielles ordinaires « ODE » de sixième et quatrième ordre respectivement :

$$\mu_1 \frac{d^6 W_m}{dy^6} + (\mu_2 - 3\mu_1 \beta_m^2) \frac{d^4 W_m}{dy^4} + (3\mu_1 \beta_m^4 - 2\mu_2 \beta_m^2 + \mu_3) \frac{d^2 W_m}{dy^2} + (\mu_2 \beta_m^4 - \mu_1 \beta_m^6 - \mu_3 \beta_m^2 + \mu_4) \frac{dW_m}{dy} = 0 \quad (3.101.a)$$

$$A_{33} \frac{d^2 \Phi_m}{dy^2} + (\omega_m^2 I_0 - A_{33} \beta_m^2) \Phi_m = 0 \quad (3.101.b)$$

Les paramètres  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sont donnés par :

$$\mu_1 = \widehat{D}$$

$$\mu_2 = \omega_m^2 \left( \frac{B_{11}}{A_{11}} J_1 - \frac{DI_0}{A_{11}} - J_2 \right)$$

$$\mu_3 = \left( \frac{I_0 J_2 \omega_m^4}{A_{11}} - \frac{I_1 J_1 \omega_m^4}{A_{11}} - I_0 \omega_m^2 \right)$$

$$\mu_4 = -\frac{I_0^2 \omega_m^4}{A_{11}}$$

Les polynômes caractéristiques sont :

$$\mu_1 \lambda^3 + (\mu_2 - 3\mu_1 \beta_m^2) \lambda^2 + (3\mu_1 \beta_m^4 - 2\mu_2 \beta_m^2 + \mu_3) \lambda + (\mu_2 \beta_m^4 - \mu_1 \beta_m^6 - \mu_3 \beta_m^2 + \mu_4) = 0 \quad (3.102)$$

$$A_{33} \lambda + (\omega_m^2 I_0 - A_{33} \beta_m^2) = 0 \quad (3.103)$$

La solution peut se mettre de la forme :

$$W_m = c_1 \sinh(\lambda_1 y) + c_2 \cosh(\lambda_1 y) + c_3 \sinh(\lambda_2 y) + c_4 \cosh(\lambda_2 y) + c_5 \sinh(\lambda_3 y) + c_6 \cosh(\lambda_3 y) \quad (3.104)$$

$$\Phi_m = c_7 \sinh(\lambda_4 y) + c_8 \cosh(\lambda_4 y) \quad (3.105)$$

Où :  $c_i$  ( $i = 1..8$ ) sont les huit constantes d'intégration.

Les racines  $\lambda_i$  ( $i = 1:4$ ) du polynôme caractéristique sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \eta \sqrt{-\frac{-3\beta^2\mu_1 + \mu_2}{3\mu_1} - \frac{2(-\mu_2^2 + 3\mu_1\mu_3)}{3\mu_1\theta} + \frac{\theta}{6\mu_1}} \\ \lambda_2 = \eta \sqrt{-\frac{-3\beta^2\mu_1 + \mu_2}{3\mu_1} + \frac{(1+i\sqrt{3})(-\mu_2^2 + 3\mu_1\mu_3)}{3\mu_1\theta} - \frac{(1-i\sqrt{3})\theta}{12\mu_1}} \\ \lambda_3 = \eta \sqrt{-\frac{-3\beta^2\mu_1 + \mu_2}{3\mu_1} + \frac{(1-i\sqrt{3})(-\mu_2^2 + 3\mu_1\mu_3)}{3\mu_1\theta} - \frac{(1+i\sqrt{3})\theta}{12\mu_1}} \\ \lambda_4 = \eta \sqrt{\frac{A_{33}\beta_m^2 + I_0\omega_m^2}{A_{33}}} \end{array} \right. \quad (3.106)$$

Le facteur «  $\Theta$  » est donné par :

$$\begin{aligned} \Theta = & \\ & \left( -2\mu_2^3 + 9\mu_1\mu_2\mu_3 - 27\mu_1^2\mu_4 + \right. \\ & \left. \sqrt{(4(-\mu_2^2 + 3\mu_1\mu_3)^3 + (-2\mu_2^3 + 9\mu_1\mu_2\mu_3 - 27\mu_1^2\mu_4)^2)} \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (3.107)$$

La solution générale n'est valide que pour les racines réelles. Dans le cas des racines imaginaires, les termes '*Cosh*' et '*Sinh*' doivent être convertis en '*Cos*' et '*Sin*'

### 3.9.3.3 Conditions aux limites :

Dans le cas de la solution de *Levy* il existe 06 six différentes conditions aux limites possibles, qui sont une combinaison de « simplement appuyées S », « encastées C » et « libres F ». Les conditions aux limites suivantes sont considérées sur les côtés où  $y = 0, b$  :

Simply supported (S):

$$\left\{ \begin{array}{l} u = w = N_{xy} = 0 \\ M_{yy} = B_{11} \partial v_0 / \partial y + B_{12} \partial u_0 / \partial x - D_{11} \partial^2 w_0 / \partial y^2 - D_{12} \partial^2 w_0 / \partial x^2 = 0 \\ N_{yy} = A_{11} \partial v_0 / \partial y + A_{12} \partial u_0 / \partial x - B_{11} \partial^2 w_0 / \partial y^2 - B_{12} \partial^2 w_0 / \partial x^2 = 0 \end{array} \right. \quad (3.108)$$

Encastées (C):

$$u = v = w = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.109)$$

Libres (F) :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{yy} = N_{yy} = N_{xy} = V_{yy} + I_1 \omega_m^2 v - I_2 \omega_m^2 \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ V_{yy} = 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.110)$$

### 3.10. Analyse de la solution :

#### 3.10.1. Plaques Simplement Appuyées « SSSS » :

Après la simplification de l'équation on a trouvé que la solution donnée par la formule proposée par *Levey* conduit exactement à celle proposée par *Navier*.

#### 3.10.2. Plaque à deux cotés encastres « CSCS » :

##### 3.10.2.1 Modes symétriques :

Pour  $y = \pm b/2$

$w[x, y] =$

$$(\text{Cosh}[\lambda_1 y] \quad \text{Sinh}[\lambda_1 y] \quad \text{Cosh}[\lambda_2 y] \quad \text{Sinh}[\lambda_2 y] \quad \text{Cosh}[\lambda_3 y] \quad \text{Sinh}[\lambda_3 y] \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \text{Sin}[\beta x] \quad (3.111)$$

$$\Phi_2[x, y] = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \text{Cosh}[\lambda_4 y] \quad \text{Sinh}[\lambda_4 y]) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \text{Cos}[\beta x] \quad (3.112)$$

On va introduire quelques paramètres à titre de simplification :

$$\begin{cases} \zeta_1 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} \left( -\widehat{D} A_{11} (\beta^2 - \lambda_1^2)^2 + \omega^2 \left( \omega^2 J_1 I_1 + B_{11} J_1 (-\beta^2 + \lambda_1^2) + A_{11} (I_0 + J_2 (\beta^2 - \lambda_1^2)) \right) \right) \\ \zeta_2 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} \left( -\widehat{D} A_{11} (\beta^2 - \lambda_2^2)^2 + \omega^2 \left( \omega^2 J_1 I_1 + B_{11} J_1 (-\beta^2 + \lambda_2^2) + A_{11} (I_0 + J_2 (\beta^2 - \lambda_2^2)) \right) \right) \\ \zeta_3 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} \left( -\widehat{D} A_{11} (\beta^2 - \lambda_3^2)^2 + \omega^2 \left( \omega^2 J_1 I_1 + B_{11} J_1 (-\beta^2 + \lambda_3^2) + A_{11} (I_0 + J_2 (\beta^2 - \lambda_3^2)) \right) \right) \end{cases} \quad (3.113)$$

Appliquant les conditions aux limites à chaque bord, nous permet d'avoir le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \beta \text{Cos}[x\beta] \text{Cosh}[y\lambda_1] \zeta_1 & \beta \text{Cos}[x\beta] \text{Cosh}[y\lambda_2] \zeta_2 & \beta \text{Cos}[x\beta] \text{Cosh}[y\lambda_3] \zeta_3 & -\frac{\text{Cos}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_4] A_{33} \lambda_4}{\omega^2 I_0} \\ \text{Sin}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_1] \zeta_1 \lambda_1 & \text{Sin}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_2] \zeta_2 \lambda_2 & \text{Sin}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_3] \zeta_3 \lambda_3 & -\frac{\beta \text{Cosh}[y\lambda_4] \text{Sin}[x\beta] A_{33}}{\omega^2 I_0} \\ \text{Cosh}[y\lambda_1] \text{Sin}[x\beta] & \text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sin}[x\beta] & \text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sin}[x\beta] & 0 \\ \text{Sin}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_1] \lambda_1 & \text{Sin}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_2] \lambda_2 & \text{Sin}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_3] \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \quad (3.114)$$

Le déterminant de ce système nous donne la fonction propre fréquentielle :

$$\begin{aligned}
 Det = \frac{1}{\omega^2 t_0} \cos[x\beta] \sin[x\beta]^3 A_{33} (\beta^2 \cosh[y\lambda_4] (\cosh[y\lambda_3] (\cosh[y\lambda_2] \sinh[y\lambda_1] (-\zeta_2 + \zeta_3) \lambda_1 + \\
 \cosh[y\lambda_1] \sinh[y\lambda_2] (\zeta_1 - \zeta_3) \lambda_2) + \cosh[y\lambda_1] \cosh[y\lambda_2] \sinh[y\lambda_3] (-\zeta_1 + \zeta_2) \lambda_3) + \\
 \sinh[y\lambda_4] (\cosh[y\lambda_3] \sinh[y\lambda_1] \sinh[y\lambda_2] (-\zeta_1 + \zeta_2) \lambda_1 \lambda_2 + \\
 \sinh[y\lambda_3] (\cosh[y\lambda_2] \sinh[y\lambda_1] (\zeta_1 - \zeta_3) \lambda_1 + \cosh[y\lambda_1] \sinh[y\lambda_2] (-\zeta_2 + \zeta_3) \lambda_2) \lambda_3) \lambda_4) = 0
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

### 3.10.2.2 Les Modes propres :

On fait une normalisation des modes, on pose  $C_1 = 1$  puis on fait ressortir les autres coefficients ( $C_2, C_3, C_4$ )

$$\begin{pmatrix} \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_2] \zeta_2 \lambda_2 & \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_3] \zeta_3 \lambda_3 & -\frac{\beta \cosh[y\lambda_4] \sin[x\beta] A_{33}}{\omega^2 L_0} \\ \cosh[y\lambda_2] \sin[x\beta] & \cosh[y\lambda_3] \sin[x\beta] & 0 \\ \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_2] \lambda_2 & \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_3] \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \tag{3.116}$$

La résolution de système algébrique nous donne (Modes propres)

Donc la solution finale aura la forme suivante :

$$W = \left( \begin{array}{c} \cosh[0.5y] + \frac{\cosh[0.5y\lambda_2] (\cosh[0.5\lambda_3] \sinh[0.5\lambda_1] \lambda_1 - \cosh[0.5\lambda_1] \sinh[0.5\lambda_3] \lambda_3)}{\cosh[0.5\lambda_3] \sinh[0.5\lambda_2] \lambda_2 - \cosh[0.5\lambda_2] \sinh[0.5\lambda_3] \lambda_3} + \\ \frac{\cosh[0.5y\lambda_3] (\cosh[0.5\lambda_2] \sinh[0.5\lambda_1] \lambda_1 - \cosh[0.5\lambda_1] \sinh[0.5\lambda_2] \lambda_2)}{\cosh[0.5\lambda_2] \sinh[0.5\lambda_3] \lambda_3 - \cosh[0.5\lambda_3] \sinh[0.5\lambda_2] \lambda_2} \end{array} \right) \sin[x\beta] \tag{3.117}$$

### 3.10.3. Plaque à seul côté encasté « SSSC » :

Conditions aux limites :

$$\begin{cases} M_{yy}(x, 0) = N_{yy}(x, 0) = w_0(x, 0) = u_0(x, 0) = 0 \\ u_0(x, b) = v_0(x, b) = w_0(x, b) = (\partial w_0 / \partial y)(x, b) = 0 \end{cases} \tag{3.118}$$

$w[x, y] =$

$$(\cosh[\lambda_1 y] \quad \sinh[\lambda_1 y] \quad \cosh[\lambda_2 y] \quad \sinh[\lambda_2 y] \quad \cosh[\lambda_3 y] \quad \sinh[\lambda_3 y] \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \sin[\beta x] \tag{3.119}$$

$$\Phi_2[x, y] = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \text{Cosh}[\lambda_4 y] \ \text{Sinh}[\lambda_4 y]) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} \text{Cos}[\beta x] \quad (3.120)$$

On va introduire quelques paramètres à titre de simplification (voir Annexe A) :

$$\zeta_i, \gamma_i, \nu_i, \theta_i \quad i: 1:4$$

Pour  $y = b$

$$\begin{aligned} Det = & (\zeta_4(\gamma_3(\nu_1 - \nu_2) + \gamma_1(\nu_2 - \nu_3) + \gamma_2(-\nu_1 + \nu_3)) + \gamma_4(\zeta_3(-\nu_1 + \nu_2) + \zeta_2(\nu_1 - \nu_3) + \\ & \zeta_1(-\nu_2 + \nu_3)) + \\ & (\gamma_3(-\zeta_1 + \zeta_2) + \gamma_2(\zeta_1 - \zeta_3) + \\ & \gamma_1(-\zeta_2 + \zeta_3))\nu_4) \left( \text{Cosh}[y\lambda_1]\text{Cosh}[y\lambda_2]\text{Cosh}[y\lambda_3]\theta_4 \left( \text{Tanh}[y\lambda_1]\text{Tanh}[y\lambda_3]\lambda_2(\nu_1 - \nu_3) + \right. \right. \\ & \left. \left. \text{Tanh}[y\lambda_2](\text{Tanh}[y\lambda_1]\lambda_3(-\nu_1 + \nu_2) + \text{Tanh}[y\lambda_3]\lambda_1(-\nu_2 + \nu_3)) \right) + \right. \\ & \left. \text{Tanh}[y\lambda_4]\nu_4(\theta_3(-\text{Tanh}[y\lambda_2]\lambda_1 + \text{Tanh}[y\lambda_1]\lambda_2) + \theta_2(\text{Tanh}[y\lambda_3]\lambda_1 - \text{Tanh}[y\lambda_1]\lambda_3) + \right. \\ & \left. \theta_1(-\text{Tanh}[y\lambda_3]\lambda_2 + \text{Tanh}[y\lambda_2]\lambda_3)) \right) = 0 \quad (3.121) \end{aligned}$$

#### 3.10.4. Plaque à deux côtés libres « SFSF » :

Conditions aux limites cas

$$\begin{cases} M_{yy}(x, 0) = N_{yy}(x, b/2) = N_{xy}(x, b/2) = \left( V_{yy} - I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \right) (x, b/2) = 0 \\ M_{yy}(x, b/2) = N_{yy}(x, b/2) = N_{xy}(x, b/2) = \left( V_{yy} - I_1 \ddot{v}_0 + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \right) (x, b/2) = 0 \end{cases} \quad (3.122)$$

On va introduire quelques paramètres à titre de simplification (voir Annexe B) :

$$\zeta_i, \gamma_i, \nu_i, \theta_i \quad i: 1:4$$

##### 3.10.4.1 Modes Symétriques :

Pour  $y = \pm b/2$

$$\begin{aligned} Det = & (\text{Cosh}[y\lambda_1]\text{Cosh}[y\lambda_2]\text{Cosh}[y\lambda_3]\text{Cosh}[y\lambda_4]) \left( (\text{Tanh}[y\lambda_3]\text{Tanh}[y\lambda_4]\zeta_4\theta_3 - \right. \\ & \left. \zeta_3\theta_4)(\text{Tanh}[y\lambda_1]\gamma_2\nu_1 - \text{Tanh}[y\lambda_2]\gamma_1\nu_2) + \gamma_3(\theta_4(\text{Tanh}[y\lambda_1]\zeta_2\nu_1 - \text{Tanh}[y\lambda_2]\zeta_1\nu_2) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Tanh}[y\lambda_1]\text{Tanh}[y\lambda_2]\text{Tanh}[y\lambda_4]\zeta_4(-\theta_2v_1 + \theta_1v_2)) + \\
& \text{Tanh}[y\lambda_3](\text{Tanh}[y\lambda_4]\zeta_4(-\text{Tanh}[y\lambda_1]\gamma_2\theta_1 + \text{Tanh}[y\lambda_2]\gamma_1\theta_2) + (\gamma_2\zeta_1 - \gamma_1\zeta_2)\theta_4)v_3 + \\
& \text{Tanh}[y\lambda_4]\gamma_4 \left( \text{Tanh}[y\lambda_1]\text{Tanh}[y\lambda_2]\zeta_3(\theta_2v_1 - \theta_1v_2) + \text{Tanh}[y\lambda_3](\text{Tanh}[y\lambda_1]\zeta_2(-\theta_3v_1 + \right. \\
& \left. \theta_1v_3) + \text{Tanh}[y\lambda_2]\zeta_1(\theta_3v_2 - \theta_2v_3)) \right) = 0 \tag{3.123}
\end{aligned}$$

### 3.10.4.2 Modes Antisymétriques :

Pour  $y = \pm b/2$

$$\begin{aligned}
& \text{Det} = \\
& \text{Cosh}[y\lambda_1]\text{Cosh}[y\lambda_2]\text{Cosh}[y\lambda_3]\text{Cosh}[y\lambda_4](\zeta_4\theta_3 - \\
& \text{Tanh}[y\lambda_3]\text{Tanh}[y\lambda_4]\zeta_3\theta_4)(\text{Tanh}[y\lambda_2]\gamma_2v_1 - \text{Tanh}[y\lambda_1]\gamma_1v_2) + \\
& \text{Tanh}[y\lambda_3]\gamma_3(\text{Tanh}[y\lambda_4]\theta_4(\text{Tanh}[y\lambda_2]\zeta_2v_1 - \text{Tanh}[y\lambda_1]\zeta_1v_2) + \zeta_4(-\theta_2v_1 + \theta_1v_2)) + \\
& (\zeta_4(-\text{Tanh}[y\lambda_2]\gamma_2\theta_1 + \text{Tanh}[y\lambda_1]\gamma_1\theta_2) + \text{Tanh}[y\lambda_1]\text{Tanh}[y\lambda_2]\text{Tanh}[y\lambda_4](\gamma_2\zeta_1 - \\
& \gamma_1\zeta_2)\theta_4)v_3 + \gamma_4(\text{Tanh}[y\lambda_3]\zeta_3(\theta_2v_1 - \theta_1v_2) + (\text{Tanh}[y\lambda_2]\zeta_2(-\theta_3v_1 + \theta_1v_3 \\
& \tag{3.124}
\end{aligned}$$

### Remarque :

On note que la solution des équations transcendantes jusqu'à nos jours reste très difficile à définir. Même les très bons manipulateurs algébriques commerciaux tels que *Mathematica*, *Maple* et même *Matlab* restent incapable à définir toutes les solutions de manière exacte (ils ne nous donnent qu'une seule solution parfois).

Dans notre cas, et à ce moment on peut utiliser la solution graphique, qui est une solution peu fiable, mais a titre de validation des équations transcendantes obtenues, on va introduire cette procédure à un manipulateur algébrique.

## Chapitre 4 : Description des techniques de programmation

### **Objectif :**

L'objectif principal des deux chapitres précédents été le découplage et la résolution des équations de mouvements afin d'élaborer les fonctions propres des deux problèmes. Ce chapitre présente l'implémentation des formules mathématiques obtenues précédemment dans un code de calcul écrit en MATLAB. Basé sur la théorie des plaques à gradient fonctionnel de la théorie de *Kirchhoff*. Ce code permettra de déterminer les fréquences et charges critiques linéaires de quelques conditions aux limites. Une description des logiciels et matériel utilisé (software et hardware), organigramme, dictionnaire des paramètres, sous-programmes.

---

#### 4.1. Introduction :

En mathématiques, une fonction ou une série formelle est dite transcendante si elle n'est pas algébrique, c'est-à-dire si elle n'est pas solution d'une équation polynomiale à coefficients polynomiaux par rapport à ses arguments.

Ce chapitre explique la recherche des solutions pour les équations transcendantes de la forme :

$$f(x) = 0 \quad (4.1)$$

Où on va le résoudre pour l'inconnu  $x$ . Une équation algébrique est une équation construite en utilisant les opérations : (+ - × ÷) et des fois des racines. Les fonctions rationnelles et polynomiales sont des exemples des fonctions algébriques. Par contre les équations transcendantes ils ne sont pas algébriques. Cela par ce qu'ils contiennent des fonctions non algébriques, des fonctions trigonométriques inverses, fonctions exponentielles et logarithmiques sont des exemples des fonctions non algébriques qui s'appellent «des fonctions transcendantes».

#### 4.2. Méthodes de résolutions :

Certaines méthodes de la recherche de solutions à une équation transcendante utilisent des méthodes graphiques ou numériques.

##### 4.2.1. Méthode graphiques :

Conformément à l'équation de la forme au-dessus et l'aide calculatrice graphique ou ordinateur qui peuvent faire des graphes. On trace le graph de  $f(x)$  sur un intervalle des " $x$ " jusqu'à on trouve ou l'intersection de la courbe par l'axe des " $x$ " ses point sont les racines de cette équation.

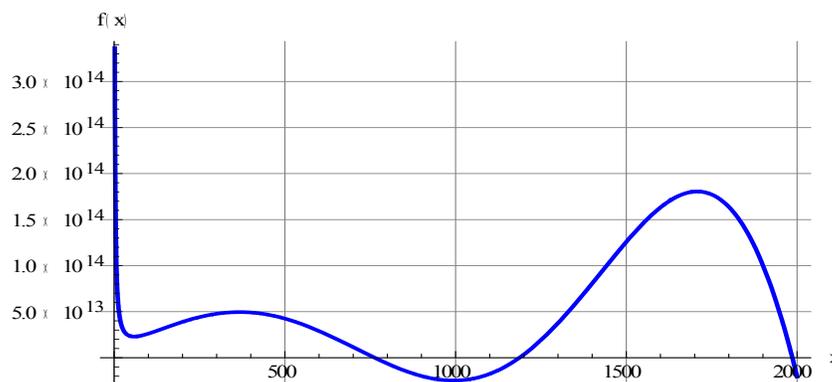


Figure 4.1: Les racines d'une fonction non-linéaire.

### 4.2.2. La méthode bi section :

La méthode bi section connu aussi comme la méthode de réduction en moitié de l'intervalle. La méthode suppose la continuité de la fonction  $f(x)$ . La méthode suppose aussi que si qu'on peut tracer le graph de  $f(x)$ , alors que il est possible de sélectionner un intervalle  $(a, b)$  pour lequel  $f(a)$  et  $f(b)$  ont des signes opposés et donc  $f(a) f(b) < 0$ . Démarrer avec ces suppositions le théorème des valeurs moyennes assure l'existence au moins une racine pour l'équation considéré dans l'intervalle  $(a, b)$ . La méthode bi section est une méthode pour la détermination de solution avec un certain degré de précision. Deux cas de situation de démarrage illustré ci-dessous :

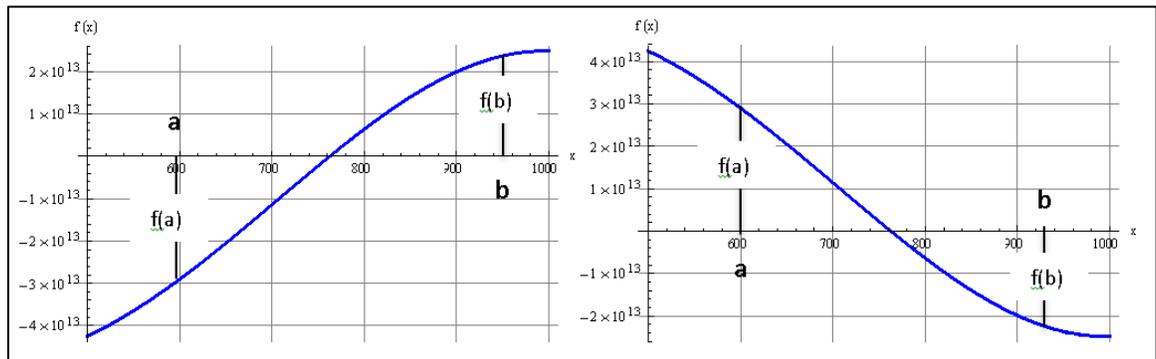


Figure 4.2: Possibilité de localisation des solutions pour la méthode bi section.

La méthode bi-section génère une séquence d'intervalles :  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$  qui seront demi-diviser chaque fois. Chaque intervalle  $(a_n, b_n)$  est déterminé pour que la racine «  $r$  » vérifie :

$$(a_n < r < b_n) \quad (4.2)$$

La méthode départ après la sélection de  $a_1 = a$  et  $b_1 = b$  avec  $f(a)f(b) < 0$ .

Le point médian  $m_1$  du premier intervalle  $(a_1, b_1)$  est calculé par:

$$m_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \quad (4.3)$$

La hauteur de courbe  $f(m_1)$  est calculé. Si  $f(m_1) = 0$  donc  $r = m_1$  est la racine cherché. Si  $f(m_1) \neq 0$  alors qu'une des cas existent :

Soit :  $f(m_1) f(b_1) < 0$  alors qu'il y a un changement de signe dans l'intervalle  $(m_1, b_1)$  ou  $f(m_1) f(a_1) < 0$  pour laquelle il y a un changement de signe dans l'intervalle  $(a_1, m_1)$ . Le nouveau intervalle  $(a_2, b_2)$  est déterminé d'après l'une des deux conditions :

$$\begin{cases} \text{Si } f(m_1) f(b_1) < 0 \text{ alors on choisi } a_2 = m_1 \text{ et } b_2 = b_1 \\ \text{Si } f(m_1) f(a_1) < 0 \text{ alors on choisi } a_2 = a_1 \text{ et } b_2 = m_1 \end{cases} \quad (4.4)$$

Quel que soit le cas retenu, la racine va situer dans le nouveau l'intervalle  $(a_2, b_2)$  qui est de demi-longueur de l'intervalle précédente. La figure 4.3 illustre quelque scénario possible qui peut être apparue lors de l'application de la méthode pour trouver la racine de l'équation.

Le processus au-dessus est répété plusieurs fois pour générer des nouveaux intervalles  $(a_n, m_n)$  pour  $n = 3, 4, 5, \dots$ . On peut définir l'erreur d'approximation après la nième bi section comme :

$$\text{Erreur} = |r - m_n| \quad (4.5)$$

Le terme d'erreur associé avec la nième pas d'itération vas être toujours inferieur de l'intervalle initiale «  $b - a$  » divisé par  $2^n$ . Si on veut que l'erreur soit inferieur d'une certaine valeur petit  $\epsilon$ , puis en peut mettre  $n$  sélectionner pour que :

$$\text{Erreur} = |r - m_n| < \frac{b-a}{2^n} < \epsilon \quad (4.1)$$

La méthode bi section génère une séquence des valeurs pour des points médians  $\{m_1, m_2, \dots, m_n, \dots\}$  utilisés pour l'approximation de la racine  $r$ . La nombre de divisions des intervalles pour une fonction  $f(x)$  dépend de la précision choisie pour la solution. Au-dessous, une liste pour quelques conditions de stop associé avec la méthode de bi section :

- On peut choisi  $n$  comme le plus petit intègre qui satisfaire :

$$n > \frac{\ln|b - a| - \ln\epsilon}{\ln 2}$$

- Pour une erreur  $\epsilon$  donnée on continue jusqu'à  $|m_n - m_{n-1}| < \epsilon$  cela implique que les points des demi-intervalles seront presque une seul pour une erreur donné.
- Le pourcentage d'erreur soit moins d'une certaine petite valeur  $\epsilon$  :

$$\frac{|m_n - m_{n-1}|}{|m_n|} < \epsilon$$

- La hauteur de la courbe  $f(x)$  est au voisinage de zéros :

$$|f(m_n)| < \epsilon$$

### 4.3. Programmation de la méthode :

L'utilisation de la méthode de bi section nécessite la définition de l'intervalle de solutions au départ, due à la nature des fonctions propres (fréquence et charges critiques) on est face à deux possibilités :

- Fonctions continues sur tous les intervalles : pour lesquels ont choisi les deux bornes pour la racine désirer.
- Fonctions contiens des singularités : dans la plupart des cas la solution existe entre les singularités, donc la définition de ces derniers nous permet d'avoir l'intervalle chercher pour la méthode bi section.

On a élaboré deux programmes : le premier pour le flambement et la deuxième pour la vibration libre des plaques à gradient fonctionnel selon la solution de *Levey* et *Navier*. Ils permettent de définir les charges critiques et les fréquences propres. Les principaux sous-programmes utilisés dans le programme principal sont présentés ci-dessous :

#### 4.3.1. Calcul des propriétés des matériaux:

Dans la formulation du matériau à gradient fonctionnel, les constantes d'élasticité données dans les équations (2.26 et 2.27) sont en fonction des propriétés matérielles effectives (équation 1.4-1.5-1.6). Ces constantes sont calculées à l'aide d'un sous-programme qui intègre d'une façon exacte les constantes demander (on suppose que le coefficient de poisson est presque le même pour le métal et la céramique, sinon on doit fait appel à l'intégration numérique ou le calcul des résidus pour la solution exacte).

#### 4.3.2. Choix des fonctions appropriées aux conditions aux limites

Un petit programme est écrit pour permet le choix automatique de cas souhaité, puis le programme vas charger que les fonctions appropriées pour le calcul des solutions de l'équation.

#### 4.3.3. Définitions des singularités et intervalle de solutions

Pour les cas simples le programme va chercher automatiquement les singularités ( $S_1, S_2$ ) s'ils existent puis essaye de définir un intervalle qui assure la continuité de la fonction, sinon on est obligé d'introduire l'intervalle avec les inputs de programme si le calcul de ce dernier est très délicat (le traçage des

courbes à l'aide de *Mathematica* donne une idée claire sur la localisation de la solution).

#### 4.3.4. La résolution d'équation par la méthode bi section

Après la localisation de la solution un autre programme pour la bi section calcule la solution pour une tolérance donnée d'une manière itérative (tout en tenir compte de la condition aux limites choisies comme on a dit précédemment).

#### 4.3.5. Choisir la solution minimale

La solution obtenue doit être le minimum pour tous les nombres de demi-ondes  $(n, m)$  choisi, donc un autre petite programme (une boucle va assurer que la solution obtenue est la plus petit ; fréquence fondamentale.

### 4.4. Logiciels et matériel:

Pour l'élaboration des fonctions propres par le calcule symbolique et les intervalles de solutions, Mathematica V.8, Scientifique Workplace V.5 sont utilisées pour le développement des équations différentielles aux dérivées partielles, pour la résolution des équations transcendantes Matlab R2011b utilisée pour la programmation avec aussi Mathematica pour confirmer les résultats, Excel 2010 utilisé pour le traçage des courbes. Le matériel utilisé pour la programmation est un Micro-ordinateur avec un processeur Intel(R) Core (TM) i3 CPU (2.4 GHz) et 4 Go de Ram.

### 4.5. Organigramme

La figure 4.3 montre les différentes étapes du programme élaboré.

### 4.6. Description du programme

#### 4.6.1. Fichier de données

Le fichier de données contient toutes les données nécessaires pour le programme tel que les conditions aux imites (SSSS, SCSC, SCSF..., symétrie ou non), physiques (modules de Young, coefficients de Poisson, exposant FGM, densité,...) et géométriques (dimensions et forme de la plaque).

#### 4.6.2. Conditions aux limites:

Les 06 six conditions aux limites sont données par l'abréviation mentionnée précédemment, pour simplifier la programmation :

**SSSS:** totalement simplement appuyées.

**SCSC**: deux cotées opposée simplement appuyés et les autres encastrées.

**SFSF**: deux cotées opposée simplement appuyés et les autres libres.

**SSSF**: trois cotées simplement appuyées et le reste libre.

**SSSC**: trois cotées simplement appuyées et le reste encastré.

**SCSF**: deux cotés opposé simplement appuyées, un coté libres et l'autre encastré.

#### 4.6.3. Paramètres physiques:

**$E_c$**  : Module de Young de la céramique.

**$E_m$**  : Module de Young du métal.

**$R_c$**  : Densité du métal.

**$R_m$**  : Densité de la céramique.

**$\mu$**  : Coefficient de Poisson de la céramique

**$p$** : Exposant de la fraction volumique

#### 4.6.4. Paramètres géométriques:

**$\eta$** : Élancement de la plaque.

**$\delta$**  : Facteur épaisseur/largeur de la plaque.

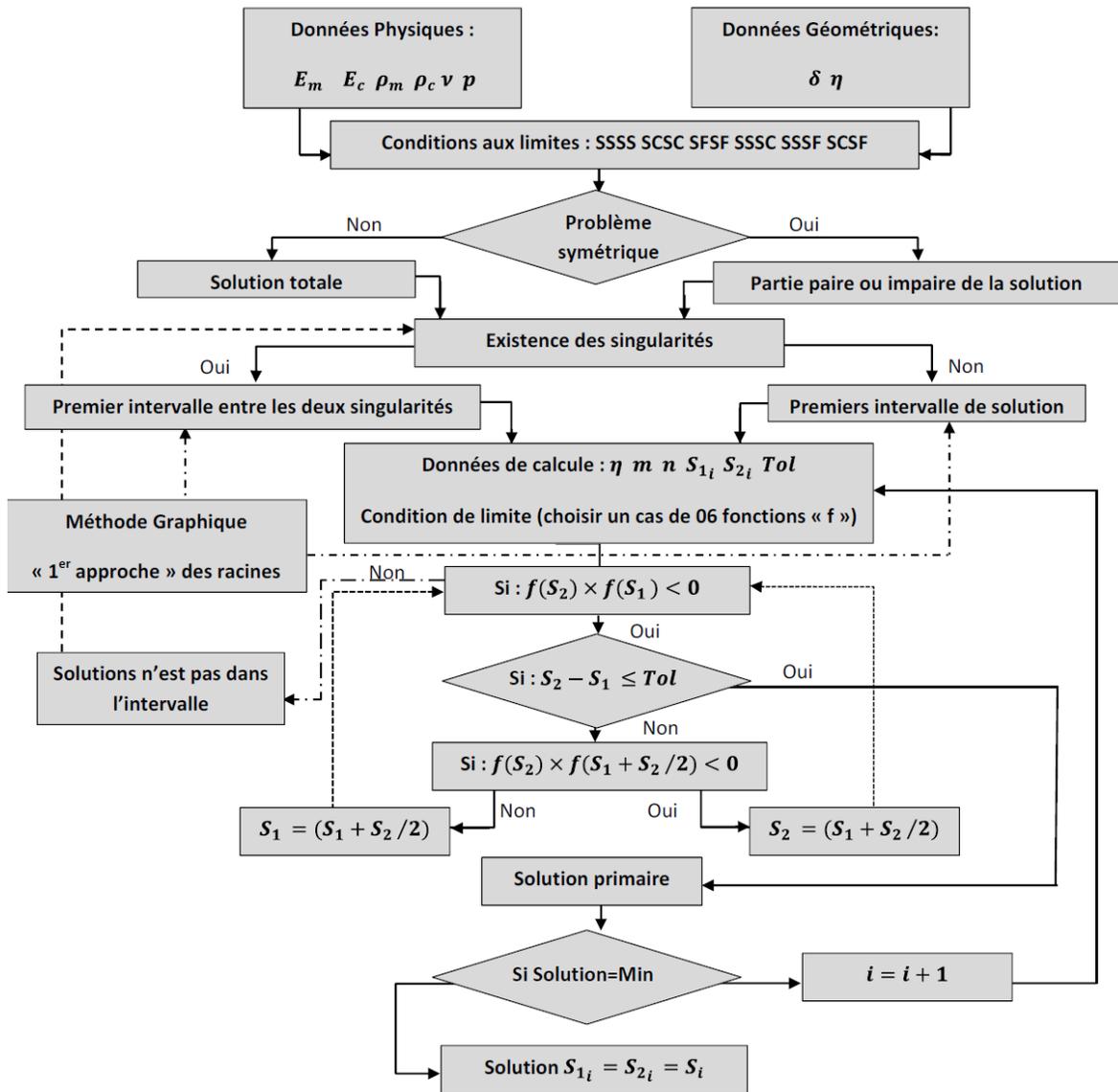


Figure 4.3: Organigramme de la solution.

## Chapitre 5 : Résultats et interprétations

### **Objectif :**

Ce chapitre présente les résultats obtenus de la résolution des équations propres des deux problèmes pour quelques conditions aux limites en premier lieu. Pour prouver la validité de cette solution, une comparaison avec littérature montre l'excellent accord de ce dernier.

Les fonctions propres des deux problèmes pour les différentes conditions aux limites possibles sont tirées. Puis, l'effet de l'élanement, rapport épaisseur/longueur, l'exposant de puissance et conditions aux limites seront discutés en détail. À la fin, on montre l'effet des déplacements planaire et l'effet des différents types de couplage existant sur le paramètre fréquentiel.

---

### 5.1. Introduction :

Dans le but de vérifier la validité des solutions analytiques obtenues. Une analyse numérique sera établie pour confirmer et interpréter le comportement des plaques FGM pour les problèmes d'instabilité et vibrations libres.

### 5.2. Application numérique (cas de flambement) :

Des applications numériques et des résultats paramétriques vont être élaborés pour les (06) six conditions aux limites actuelles (SSSS SCSC SFSF SCSF SSSC SSSF).

Pour étudier l'analyse de flambement de la plaque, on va considérer dans tout ce qui suit que la plaque FGM est construite d'un mélange d'aluminium et d'alumine ( $Al/Al_2O_3$ ) qui a les propriétés suivantes illustrées dans le [Table 5.1](#). La charge critique de flambement est donnée dans les tables en premier en valeurs adimensionnelles  $\left(\frac{P_1 a^2}{D}\right)$  puis en [MN/m], les figures sont aussi en [MN/m].

Matériaux	Propriétés		
	$E$ (Gpa)	$\nu$	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
Aluminium (Al)	70	0.3	2702
Alumina ( $Al_2O_3$ )	380	0.3	3800

Table 5.1: Matériaux utilisés: mélange de l'aluminium et l'alumina

#### 5.2.1. Plaques Simplement Appuyées « SSSS » :

##### 5.2.1.1 Application numérique (cas SSSS) :

L'évaluation de (3.53) nous permet d'avoir les résultats suivants :

Le [Table 5.2](#) montre les charges critiques adimensionnelles pour une compression bi-axiale, uni-axiale, traction et compression et les rapports de forme ( $\eta$  de 0.5 au 10). On note que l'index sur les charges exprime les nombres des demi-ondes ( $n, m$ ) de chaque mode. Les tableaux : [Table D.1](#) et [Table D.2](#) (voir Annexe D) montrent les charges critiques après avoir entré les caractéristiques mécaniques du matériau FGM, ces charges sont exprimées en [MN/m] pour deux facteurs d'épaisseur ( $\delta = h/a = 0.01, 0.05$ ).

$\eta = a/b$	$(k_1, k_2)$			
	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$
0,5	15,4213	39,4784 <sup>(1,2)</sup>	12,3370	20,5617
1	39,4784	39,4784	19,7392	82,2467 <sup>(2,1)</sup>
1,5	96,3829 <sup>(2,1)</sup>	46,3323	32,0762	185,0551 <sup>(3,1)</sup>
2	157,9137 <sup>(2,1)</sup>	61,6850	49,3480	328,9868 <sup>(4,1)</sup>
2,5	255,0333 <sup>(3,1)</sup>	83,0034	71,5546	501,1355 <sup>(4,1)</sup>
3	355,3058 <sup>(3,1)</sup>	109,6623	98,6960	713,0789 <sup>(5,1)</sup>
3,5	492,2851 <sup>(4,1)</sup>	141,4475	130,7723	967,4550 <sup>(6,1)</sup>
4	631,6547 <sup>(4,1)</sup>	178,2697	167,7833	1263,6084 <sup>(7,1)</sup>
4,5	808,3453 <sup>(5,1)</sup>	220,0861	209,7291	1601,2587 <sup>(8,1)</sup>
5	986,9604 <sup>(5,1)</sup>	266,8741	256,6097	1980,2656 <sup>(9,1)</sup>
5,5	1203,2864 <sup>(6,1)</sup>	318,6210	308,4251	2400,5513 <sup>(10,1)</sup>
6	1421,2230 <sup>(6,1)</sup>	375,3191	365,1754	2852,3157 <sup>(10,1)</sup>
6,5	1677,1404 <sup>(7,1)</sup>	436,9636	426,8604	3340,0700 <sup>(11,1)</sup>
7	1934,4425 <sup>(7,1)</sup>	503,5512	493,4802	3869,8199 <sup>(12,1)</sup>
7,5	2229,9234 <sup>(8,1)</sup>	575,0799	565,0349	4441,3275 <sup>(13,1)</sup>
8	2526,6187 <sup>(8,1)</sup>	651,5481	641,5243	5054,4338 <sup>(14,1)</sup>
8,5	2861,6446 <sup>(9,1)</sup>	732,9547	722,9485	5709,0291 <sup>(15,1)</sup>
9	3197,7518 <sup>(9,1)</sup>	819,2990	809,3076	6405,0349 <sup>(16,1)</sup>
9,5	3572,3095 <sup>(10,1)</sup>	910,5804	900,6014	7138,8092 <sup>(16,1)</sup>
10	3947,8418 <sup>(10,1)</sup>	1006,7983	996,8300	7902,0022 <sup>(17,1)</sup>

Table 5.2: La charge critique de flambement adimensionnelles ( $\bar{P}_{cr}$ ) pour une plaque « SSSS » isotrope ( $p=0$ ) ou FGM.

Les figures [Figure 5.1](#) et [Figure 5.2](#) montrent les charges critiques en fonction de facteur d'épaisseur " $\delta$ " pour les différents exposants de gradient " $p$ " du matériau FGM pour une plaque en compression uni-axiale et bi-axiale, ce dernier qui est le cas le plus défavorable pour le chargement et qui nous donne la charge la plus petite. Pour un rapport de forme ( $\eta = 0.5$ ).

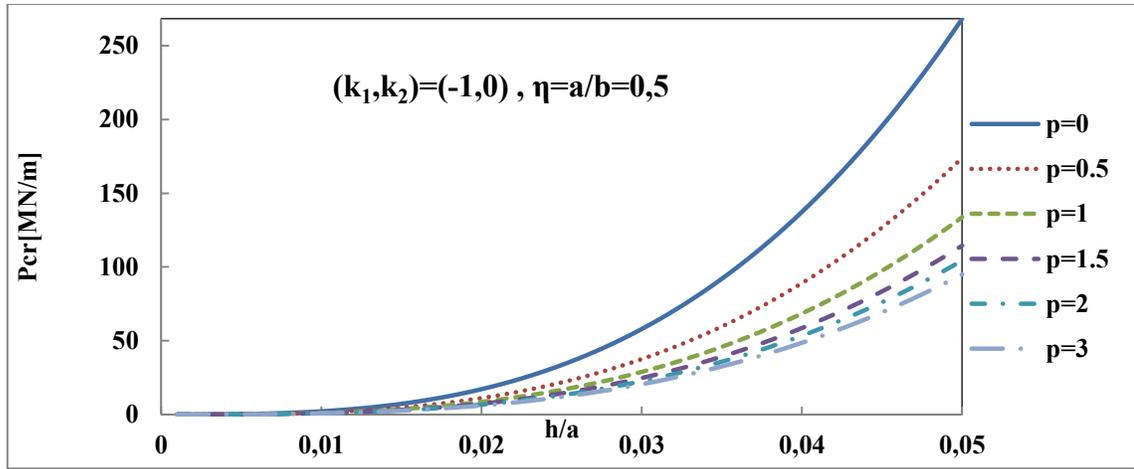


Figure 5.1: Charge critique ( $P_{cr}$ ) selon le rapport d'épaisseur, ( $\eta = 0.5$ ),  $(k_1, k_2) = (-1, 0)$  et pour une plaque FGM SSSS  $Al/Al_2O_3$ .

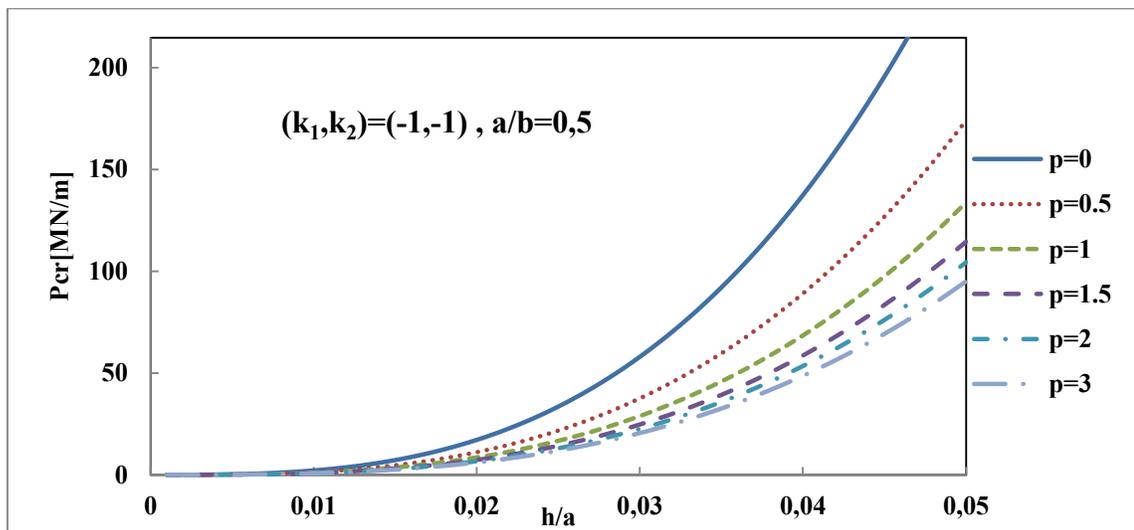


Figure 5.2: Charge critique ( $P_{cr}$ ) selon le rapport d'épaisseur, ( $\eta = 0.5$ ),  $(k_1, k_2) = (-1, -1)$  et pour une plaque FGM SSSS  $Al/Al_2O_3$ .

La Figure 5.3 exprime la charge critique en fonction du rapport de forme " $\eta$ " sous une compression uni-axiale et pour plusieurs exposants de gradient, avec un rapport d'épaisseur  $\delta = (h/a = 0.01)$ .

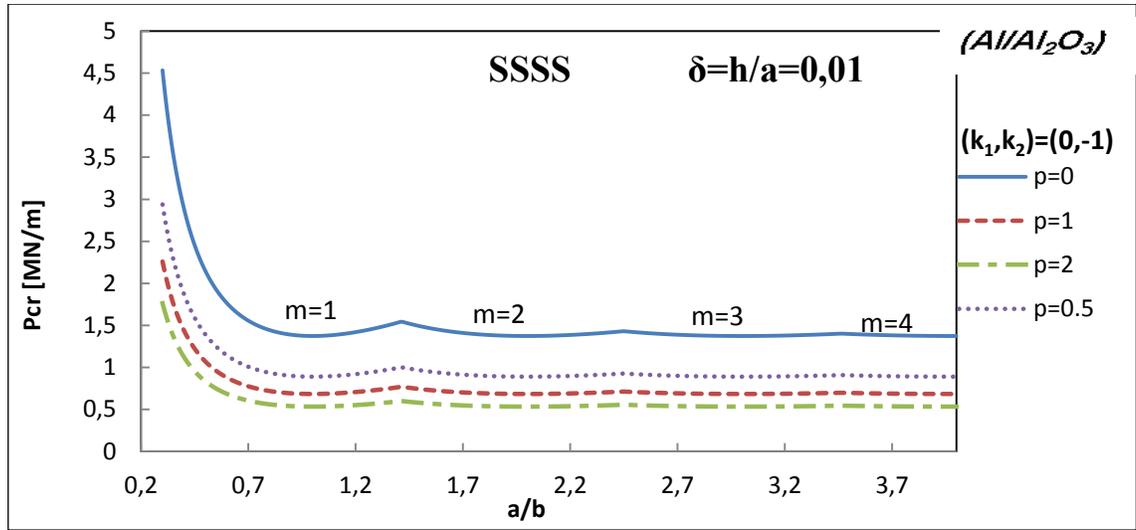


Figure 5.3: variation de la charge critique de flambement ( $P_{cr}$ ) selon le rapport  $\eta$  pour une plaque FGM SSSS  $Al/Al_2O_3$ .

La Figure 5.4 représente la charge critique en fonction du facteur de forme pour tous les cas de chargement possibles où on a choisi un rapport épaisseur-longueur ( $h/a = 0.01$ ). On note aussi que sur les figures (5.3) et (5.4) «  $m$  » indique les nombres des demi-ondes dans la direction «  $x$  » qui change avec le changement du rapport de forme.

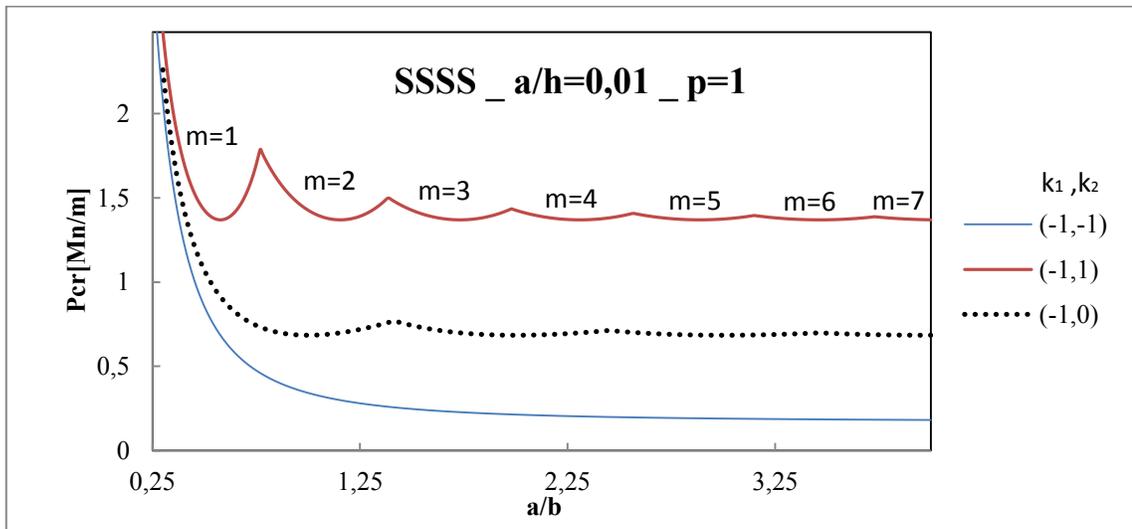


Figure 5.4: variation de la charge critique de flambement ( $P_{cr}$ ) selon le rapport  $\eta$  pour une plaque FGM SSSS  $Al/Al_2O_3$  avec tous les cas de chargement possible.

Les Figure 5.5 et Figure 5.6 montrent les charges critiques d’une plaque FGM ayant : ( $\eta = 0.5$ ),  $\delta = (h/a = 0.01, 0.05)$  en fonction de l’exposant, pour les (04) quatre cas possibles de chargement de la plaque « SSSS », les Figure 5.7 et

Figure 5.8 expliquent la même chose que les figures (5.5) et (5.7) mais là on a changé le rapport de forme pour une plaque carrée ( $\eta = 1$ ).

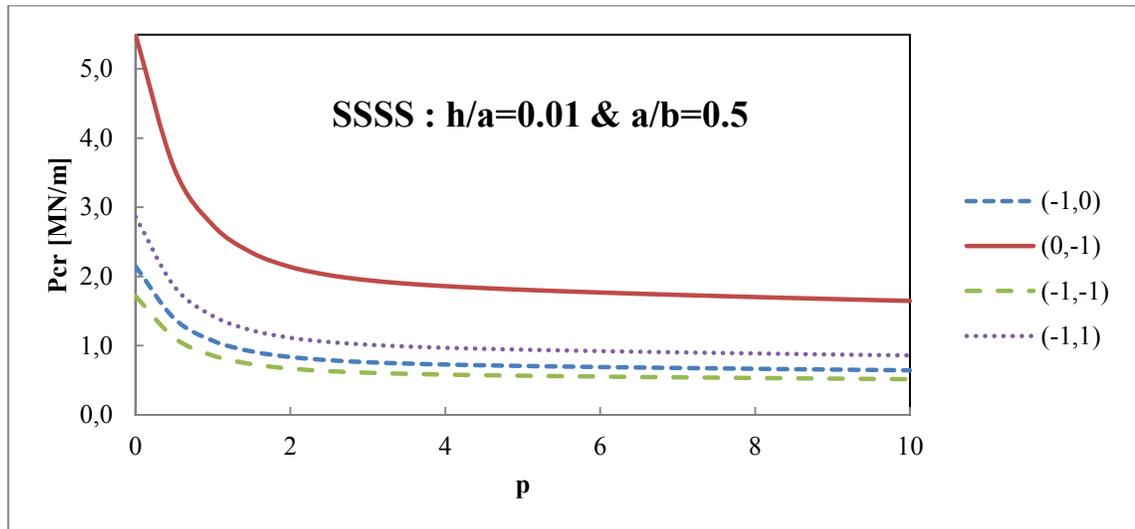


Figure 5.5: La charge critique ( $P_{cr}$ ) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ , ( $\eta = 0.5$ ),  $(h/a) = 1/100$  plaque FGM SSSS  $Al_2O_3$ .

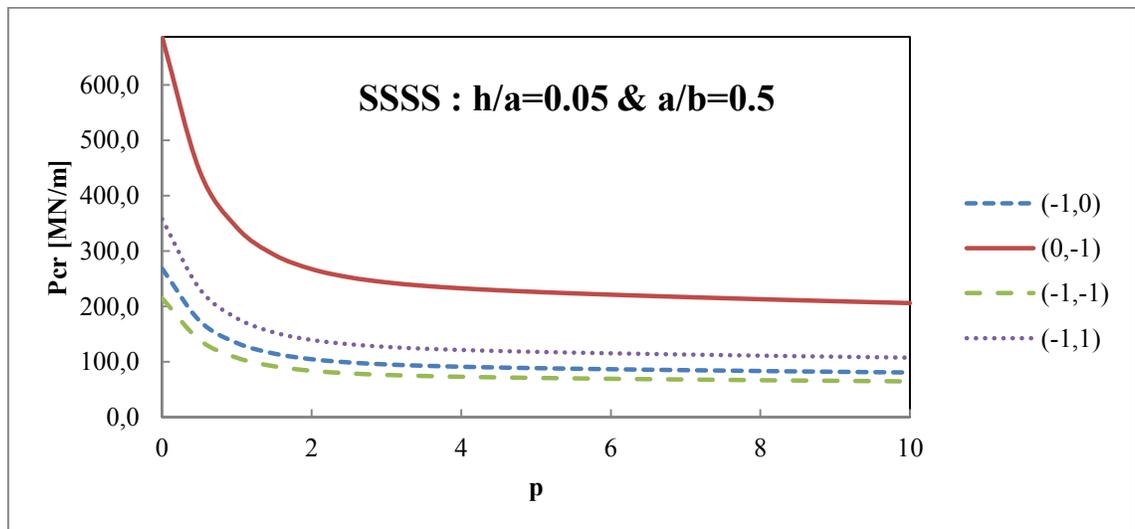


Figure 5.6: La charge critique ( $P_{cr}$ ) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ , ( $\eta = 0.5$ ),  $(h/a) = 1/20$  plaque FGM SSSS  $Al/Al_2O_3$ .

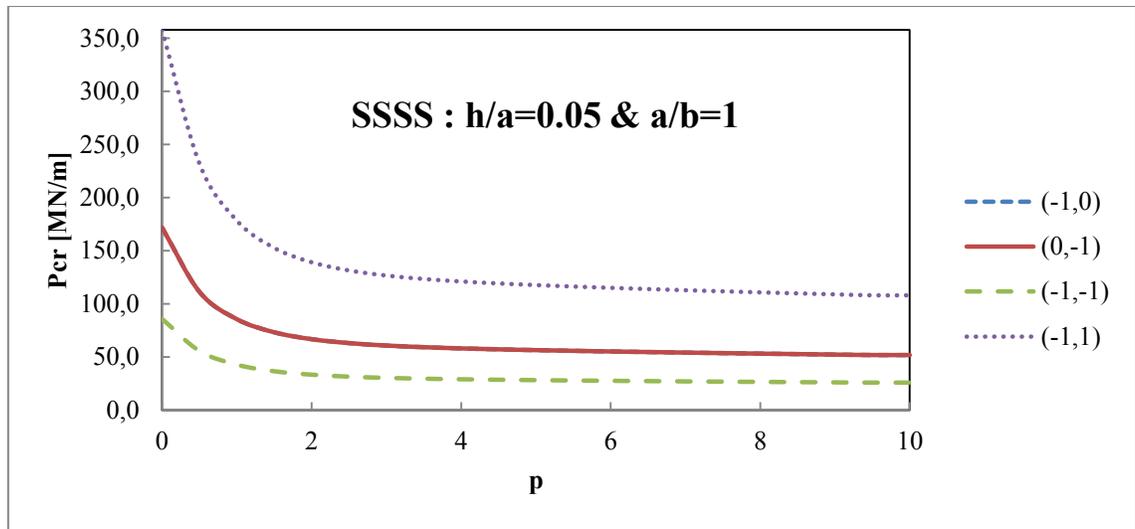


Figure 5.7: La charge critique ( $P_{cr}$ ) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ ,  $(\eta = 1)$ ,  $(h/a) = 1/100$  plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

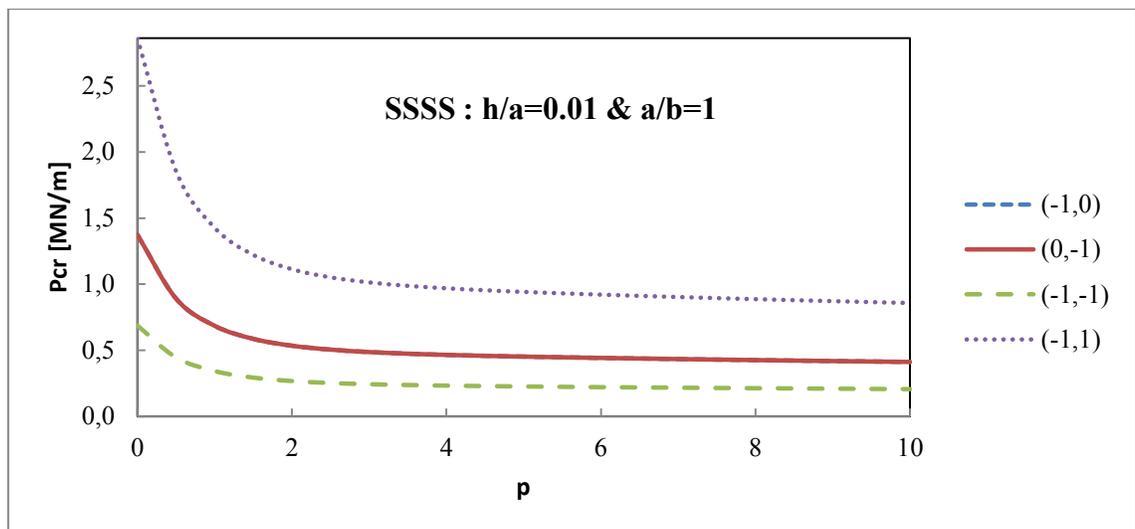


Figure 5.8: La charge critique ( $P_{cr}$ ) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ ,  $(\eta = 1)$ ,  $(h/a) = 1/20$  plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

## 5.2.2. Plaque à deux côtés encastres « CSCS » :

### 5.2.2.1 Application Numérique :

Table 5.3 montre les charges critiques adimensionnelles pour une compression bi-axiale, uni-axiale, traction et compression et les rapports de forme ( $\eta$  de 0.5 au 10). L'index sur les charges exprime les modes supérieurs pour les nombres des demi-ondes ( $m$ ) dans la direction "x". Le Table D.3 (Annexe D) montre les charges critiques réelles du FGM exprimé en [MN/m] pour un facteur d'épaisseur ( $\delta = \frac{h}{a} = 1/100$ ).

$\eta = a/b$	$(k_1, k_2)$			
	(-1, 0)	(0, -1)	(-1, -1)	(-1, 1)
0,5	18,9775	52,6470	14,6174	26,6183
1	75,9099 <sup>a</sup>	66,5529	37,7996	106,4725 <sup>a</sup>
1,5	158,0206 <sup>a</sup>	111,8498	83,6652	239,5634 <sup>a</sup>
2	275,2278 <sup>a</sup>	179,5024	150,9919	425,8900 <sup>a</sup>
2,5	431,7293 <sup>a</sup>	267,6634	231,8527	665,4537 <sup>a</sup>
3	626,6896 <sup>a</sup>	375,8674	334,6607	958,2531 <sup>a</sup>
3,5	846,4161 <sup>a</sup>	503,9540	455,5462	1304,2889 <sup>a</sup>
4	1100,9113 <sup>a</sup>	651,8565	593,3274	1703,5610 <sup>a</sup>
4,5	1394,5703 <sup>a</sup>	819,5427	752,9867	2156,0693 <sup>a</sup>
5	1726,9172 <sup>a</sup>	1006,9957	927,4107	2661,8142 <sup>a</sup>
5,5	2085,4151 <sup>a</sup>	1214,2061	1122,1537	3220,7952 <sup>a</sup>
6	2477,0504 <sup>a</sup>	1441,1679	1337,0172	3833,0120 <sup>a</sup>
6,5	2907,8281 <sup>a</sup>	1687,8776	1566,6776	4498,4660 <sup>a</sup>
7	3385,6645 <sup>a</sup>	1954,3327	1818,3186	5217,1550 <sup>a</sup>
7,5	3950,5170 <sup>a</sup>	2240,5318	2086,6741	5989,0819 <sup>a</sup>
8	4613,4000 <sup>a</sup>	2546,4736	2373,3096	6812,8057 <sup>a</sup>
8,5	5386,0920 <sup>a</sup>	2872,1574	2681,8178	7687,9090 <sup>a</sup>
9	6281,1348 <sup>a</sup>	3217,5824	3003,7306	8616,2152 <sup>a</sup>
9,5	7311,8326 <sup>a</sup>	3582,7484	3347,2912	9597,7292 <sup>a</sup>
10	8492,2526 <sup>a</sup>	3967,6550	3709,6428	10632,4550 <sup>a</sup>

Table 5.3: La charge critique de flambement adimensionnelle ( $\bar{P}_{cr}$ ) pour une plaque « SCSC » isotrope ( $\nu=0$ ) ou FGM.

La Figure 5.9 exprime la charge critique en fonction du rapport de forme " $\eta$ " sous une compression uni-axiale et pour plusieurs exposants de FGM, avec un rapport d'épaisseur  $\delta = (h/a = 0.01)$ . On note aussi sur cette figure les nombres des demi-ondes «  $m$  » dans la direction «  $x$  » qui changent au changement du rapport de forme.

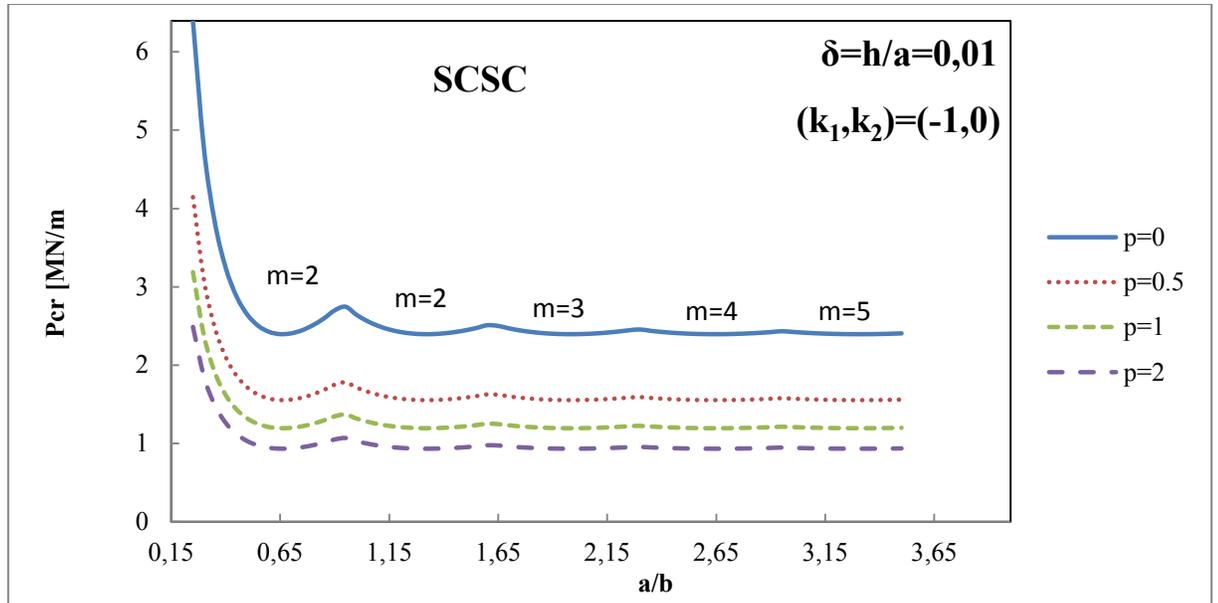


Figure 5.9: variation de la charge critique de flambement ( $P_{cr}$ ) selon le rapport  $\eta$  pour une plaque FGM SCSC  $Al/Al_2O_3$ .

La Figure 5.10 montre les charges critiques d’une plaque FGM « SCSC » a un ( $\eta = 0.5$ ),  $\delta = (h/a = 1/100)$  en fonction de l’exposant de matériau et pour les (04) quatre cas possibles de chargements.

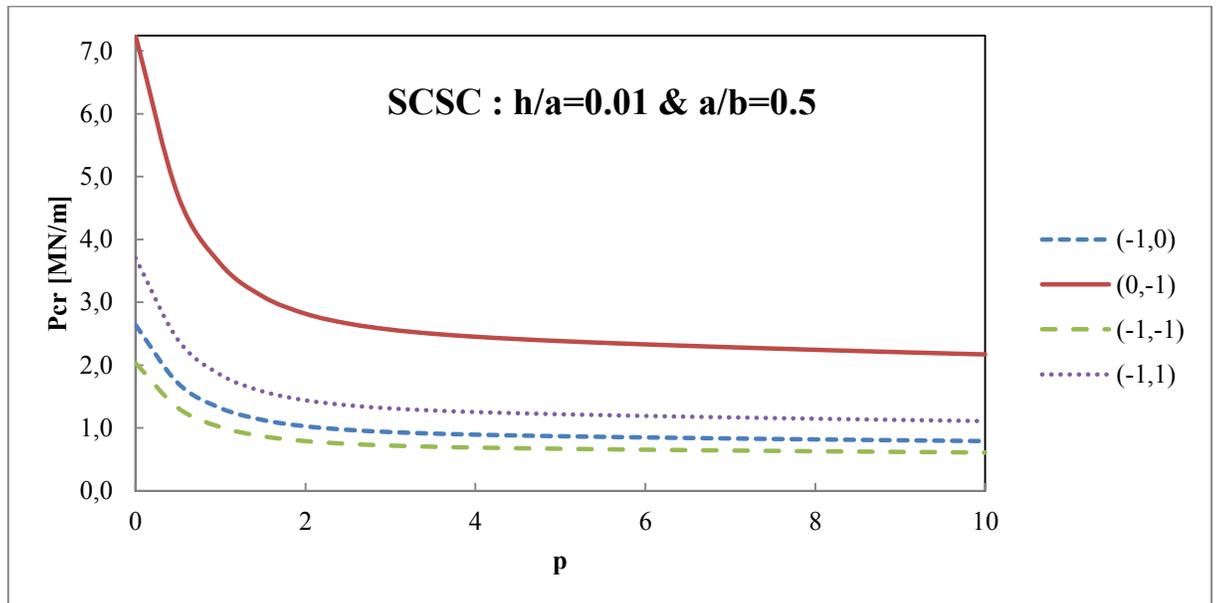


Figure 5.10: La charge critique ( $P_{cr}$ ) selon le mode de chargement ( $k_1, k_2$ ), ( $\eta = 0.5$ ),  $(h/a) = \frac{1}{100}$  plaque FGM SCSC  $Al/Al_2O_3$ .

### 5.2.3. Plaque à deux côtés Libres « SFSF » :

#### 5.2.3.1 Application numérique :

La résolution de (3.64) permet d'avoir : le [Table 5.4](#) montre les charges critiques adimensionnelles pour une compression bi-axiale, uni-axiale, traction et compression d'une plaque « SFSF » et les rapports de forme ( $\eta$  de 0.5 au 10). Le [Table D.4 \(Annexe D\)](#) montre les charges critiques réelles du FGM exprimé en [MN/m] pour un facteur d'épaisseur ( $\delta = \frac{h}{a} = 1/100$ ).

$\eta = a/b$	$(k_1, k_2)$			
	(-1, 0)	(0, -1)	(-1, -1)	(-1, 1)
0,5	9,6047	22,3121	9,4007	9,6715
1	9,3989	20,1630	9,2005	9,4952
1,5	9,2566	16,9309	9,1050	9,3518
2	9,1682	15,6142	9,0583	9,2488
2,5	9,1137	14,9795	9,0332	9,1785
3	9,0790	14,6288	9,0184	9,1306
3,5	9,0558	14,4154	9,0091	9,0973
4	9,0399	14,2762	9,0028	9,0735
4,5	9,0284	14,1804	8,9985	9,0562
5	9,0200	14,1117	8,9953	9,0431
5,5	9,0136	14,0608	8,9929	9,0332
6	9,0086	14,0221	8,9911	9,0254
6,5	9,0047	13,9919	8,9897	9,0192
7	9,0016	13,9679	8,9886	9,0142
7,5	8,9991	13,9485	8,9876	9,0102
8	8,9970	13,9327	8,9869	9,0068
8,5	8,9952	13,9195	8,9863	9,0040
9	8,9937	13,9085	8,9857	9,0016
9,5	8,9925	13,8992	8,9853	8,9996
10	8,9914	13,8912	8,9849	8,9978

Table 5.4: La charge critique de flambement adimensionnelle ( $\bar{P}_{cr}$ ) pour une plaque « SFSF » isotrope ( $p=0$ ) ou FGM.

La [Figure 5.11](#) exprime la charge critique en fonction du rapport de forme " $\eta$ " sous une compression uni-axiale et pour plusieurs exposants ' $p$ ' du matériau FGM, avec un rapport d'épaisseur  $\delta = \left(\frac{h}{a} = 0.01\right)$ .

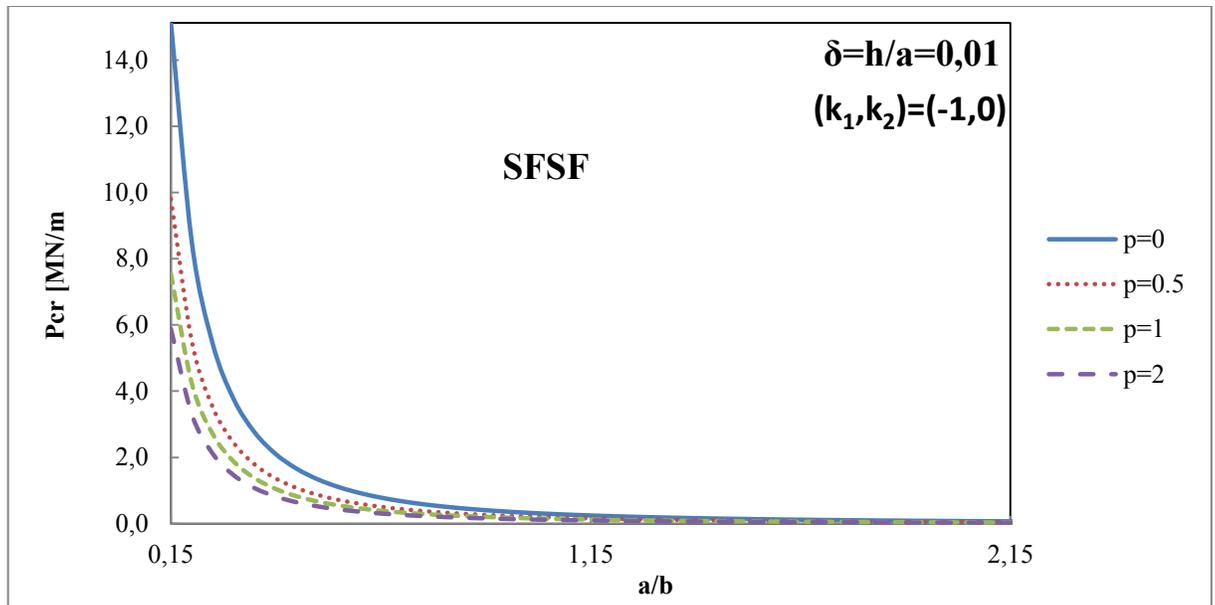


Figure 5.11: variation de la charge critique ( $P_{cr}$ ) de flambement selon le rapport  $\eta$  pour une plaque FGM SFSF  $Al/Al_2O_3$ .

La Figure 5.12 montre les charges critiques d’une plaque FGM « SFSF » a un ( $\eta = 0.5$ ),  $\delta = (h/a = 1/100)$  en fonction de l’exposant et pour les (04) quartes cas possibles de chargements.

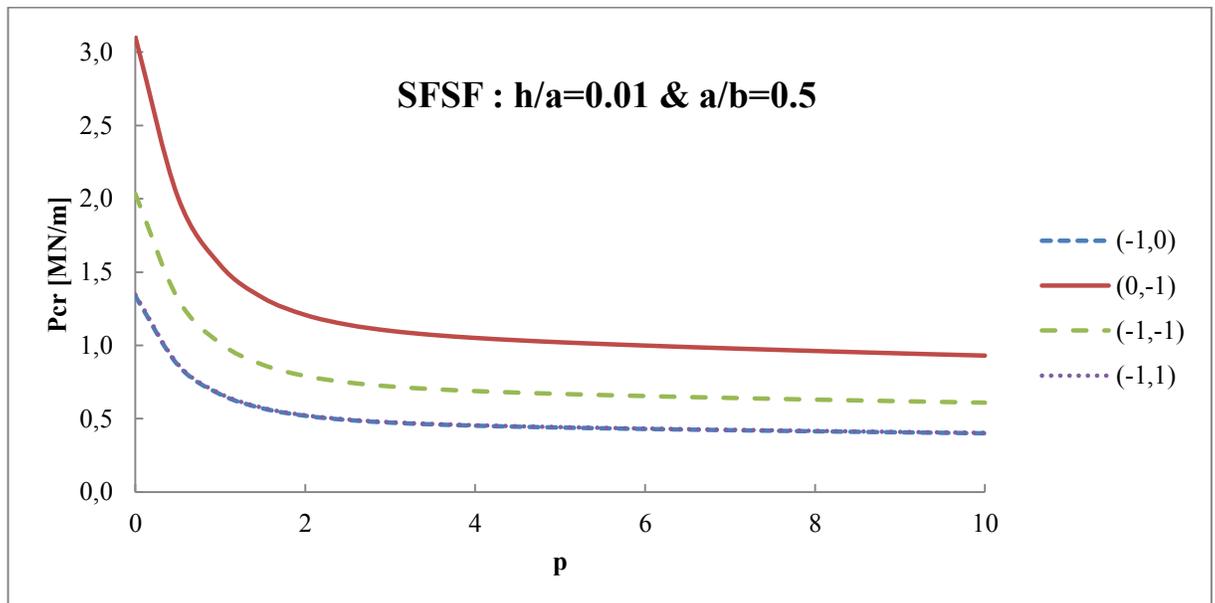


Figure 5.12: La charge critique ( $P_{cr}$ ) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ , ( $\eta = 0.5$ ),  $(h/a) = \frac{1}{100}$  plaque FGM SFSF  $Al/Al_2O_3$ .

## 5.2.4. Plaque à un seul côté encastré « SSSC » :

### 5.2.4.1 Application numérique :

La résolution de (3.72) pour des valeurs adimensionnelles de la charge critique nous donne : Le [Table 5.5](#) montre les charges critiques adimensionnelles pour une compression bi-axiale, uni-axiale, traction et compression d'une plaque « SSSC » et les rapports de forme ( $\eta$  de 0.5 au 4). L'index sur les charges exprime les modes supérieurs pour les nombres des demi-ondes ( $m$ ) dans la direction "x". Le [Table D.5 \(Annexe D\)](#) montre les charges critiques réelles du FGM exprimé en [MN/m] pour un facteur d'épaisseur ( $\delta = \frac{h}{a} = 1/100$ ).

$\eta = a/b$	$(k_1, k_2)$			
	(-1, 0)	(0, -1)	(-1, -1)	(-1, 1)
0,5	16,9095	41,8145	13,2373	23,1705
1	56,6536	47,8395	26,2797	92,6821 <sup>a</sup>
1,5	120,6084 <sup>a</sup>	68,7314	50,3493	208,5346 <sup>a</sup>
2	221,3002 <sup>a</sup>	102,5104	85,0810	370,7282 <sup>a</sup>
2,5	334,5288 <sup>a</sup>	147,2173	130,1789	579,2628 <sup>a</sup>
3	482,4338 <sup>a</sup>	202,3491	185,5065	834,1384 <sup>a</sup>
3,5	660,8902	267,7320	251,0011	1 135,3550 <sup>a</sup>
4	854,2984	343,2934	326,6323	1 482,9126 <sup>a</sup>

Table 5.5: La charge critique de flambement adimensionnelle ( $\bar{P}_{cr}$ ) pour une plaque « SSSC » isotrope ( $p=0$ ) ou FGM.

La [Figure 5.13](#) exprime la charge critique en fonction du rapport de forme " $\eta$ " sous une compression uni-axiale et pour plusieurs exposants de FGM, avec un rapport d'épaisseur  $\delta = \left(\frac{h}{a} = 0.01\right)$ .

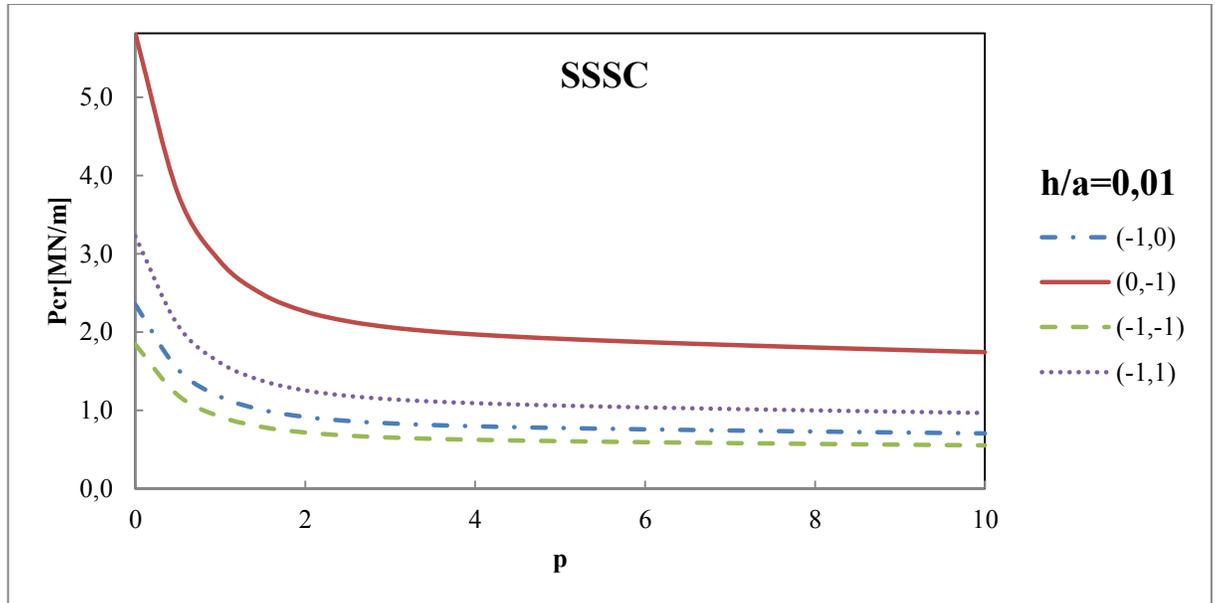


Figure 5.13: La charge critique ( $P_{cr}$ ) selon le mode de chargement ( $k_1, k_2$ ), ( $\eta = 0.5$ ), ( $h/a = \frac{1}{100}$ ) plaque FGM « SSSC »  $Al/Al_2O_3$ .

## 5.2.5. Plaque à un seul côté Libre « SSSF » :

### 5.2.5.1 Application Numérique :

La résolution de l'équation (3.77) pour des charges critiques adimensionnelles nous permet d'avoir : Le [Table 5.6](#) montre les charges critiques adimensionnelles pour une compression bi-axiale, uni-axiale, traction et compression d'une plaque « SSSF » et les rapports de forme ( $\eta$  de 0.5 au 4). L'index sur les charges exprime les modes supérieurs pour les nombres des demi-ondes ( $m$ ) dans la direction "x". Le [Table D.6 \(Annexe D\)](#) montre les charges critiques réelles de la plaque FGM exprimé en [MN/m] pour un facteur d'épaisseur ( $\delta = \frac{h}{a} = 1/100$ ) et un rapport de forme égal a ( $\eta = 0.5$ ).

$\eta = a/b$	$(k_1, k_2)$			
	(-1, 0)	(0, -1)	(-1, -1)	(-1, 1)
0,5	10,7474	22,7999	9,7954	11,5854
1	13,8332	23,3496	10,4138	19,1325
1,5	19,0478	22,8980	11,1299	48,6773
2	26,3771	20,1630	11,7434	76,5299 <sup>a</sup>
2,5	35,8145	18,1680	12,2142	113,2412 <sup>a</sup>
3	47,3565	16,9310	12,5623	172,1922 <sup>a</sup>
3,5	61,0012	16,1418	12,8185	220,7118 <sup>a</sup>
4	76,7475	15,6142	13,0089	298,8572 <sup>a</sup>

Table 5.6: La charge critique de flambement adimensionnelle ( $\bar{P}_{cr}$ ) pour une plaque « SSSF » isotrope ( $p=0$ ) ou FGM.

La Figure 5.14 montre les charges critiques d’une plaque FGM « SSSF » a un ( $\eta = 0.5$ ),  $\delta = \left(\frac{h}{a} = 1/100\right)$  en fonction de l’exposant et pour les (04) quartes cas possible de chargements.

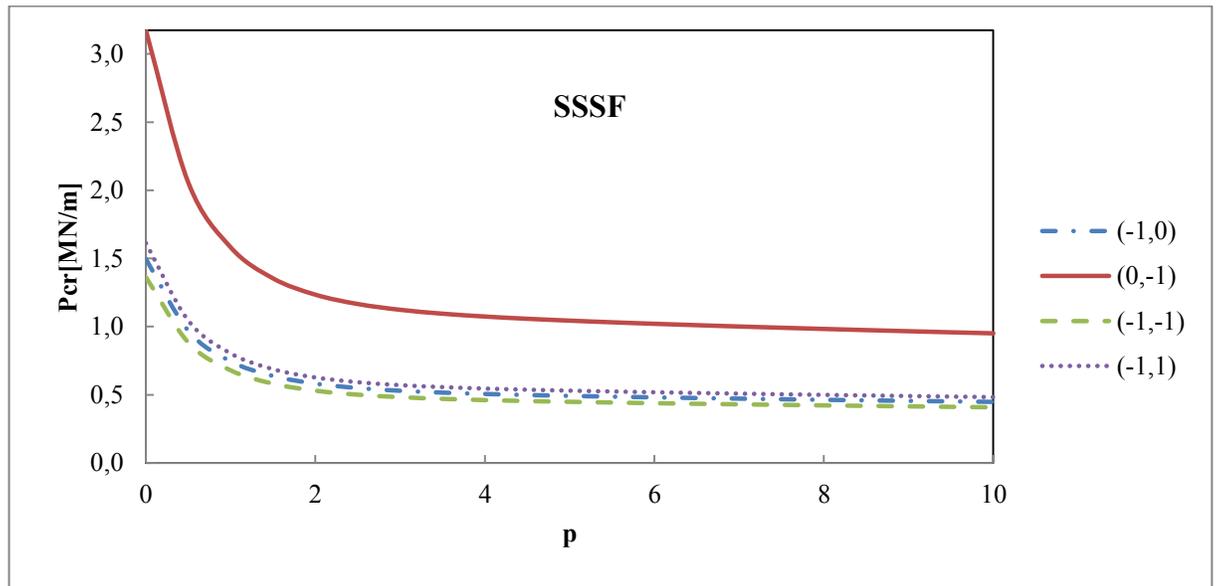


Figure 5.14: La charge critique ( $P_{cr}$ ) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ , ( $\eta = 0.5$ ),  $(\frac{h}{a}) = \frac{1}{100}$  plaque FGM SSSF Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

## 5.2.6. Plaque à côté encastré et l'autre libre « SCSF » :

### 5.2.6.1 Application numérique:

La résolution de (3.81) pour des rapports de forme  $\eta$  de 0.5 à 4 : Le [Table 5.7](#) montre les charges critiques adimensionnelles pour une compression bi-axiale, uni-axiale, traction et compression d'une plaque « SCSF » et les rapports de forme ( $\eta$  de 0.5 au 4). L'index sur les charges exprime les modes supérieurs pour les nombres des demi-ondes ( $m$ ) dans la direction «x». Le [Table D.7 \(Annexe D\)](#) montre les charges critiques réelles du FGM exprimé en [MN/m] pour un facteur d'épaisseur ( $\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{100}$ ) et un rapport de forme égal a ( $\eta = 0.5$ ).

$\eta = a/b$	$(k_1, k_2)$			
	(-1, 0)	(0, -1)	(-1, -1)	(-1, 1)
0,5	11,01266	22,80250	9,86960	11,98075
1	16,30960	23,60950	11,28649	24,51410
1,5	28,67344	23,86700	14,01922	63,77575 <sup>a</sup>
2	52,74227	25,92000	18,10640	98,05640 <sup>a</sup>
2,5	85,44765	30,18300	23,51149	162,86357 <sup>a</sup>
3	114,69378	36,21750	30,20186	220,62690 <sup>a</sup>
3,5	155,52564	43,76763	38,15718	310,36145 <sup>a</sup>
4	210,96902	52,71125	47,36560	392,22560 <sup>a</sup>

Table 5.7: La charge critique de flambement adimensionnelle ( $\bar{P}_{cr}$ ) pour une plaque « SFSC » isotrope ( $p=0$ ) ou FGM.

La [Figure 5.15](#) montre les charges critiques d'une plaque FGM « SCSF » a un ( $\eta = 0.5$ ),  $\delta = \left(\frac{h}{a} = 1/100\right)$  en fonction de l'exposant et pour les (04) quartes cas possible de chargements.

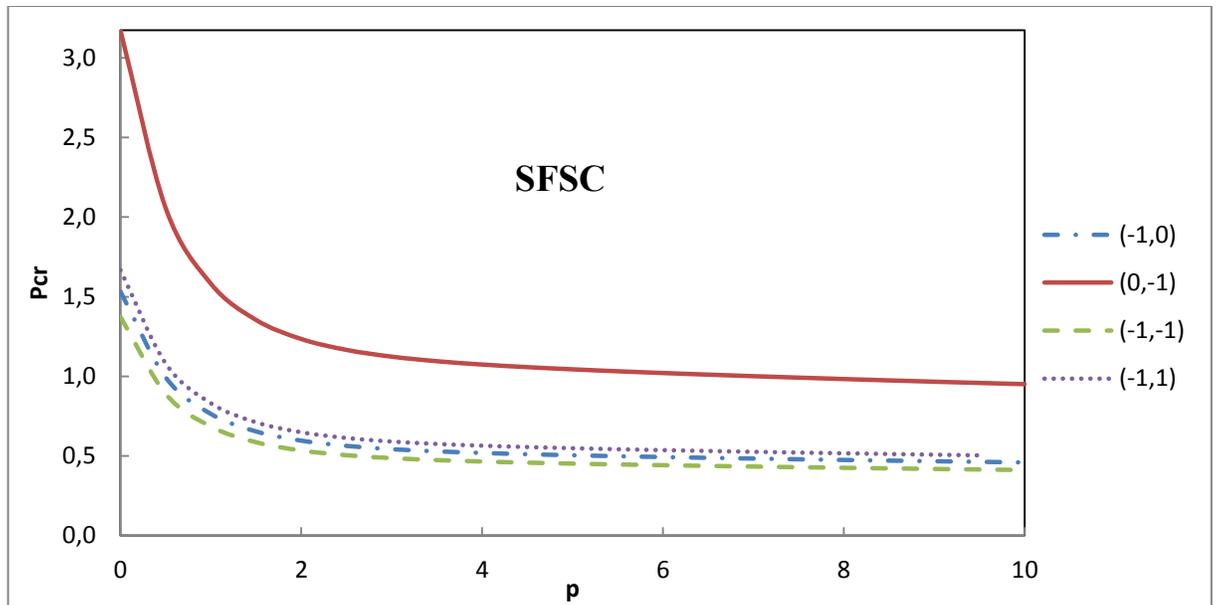


Figure 5.15: La charge critique ( $P_{cr}$ ) selon le mode de chargement  $(k_1, k_2)$ , ( $\eta = 0.5$ ),  $(h/a) = \frac{1}{100}$  plaque FGM SCSE Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

5.3. Validation des résultats :

On a trouvé une excellente similitude entre les résultats basés sur la théorie classique pour la référence [43] et cela confirme les résultats trouvés, aussi un

(k1, k2)	p	Références	SSSS	SCSC	SFSF	SSSF	SSSC	SCSF
(-1,0)	0	HSDT [50]	1,373016	2,635830	0,323790	0,480587	1,969460	0,5660820
		Réf [43]	1,373790	2,641550	0,327070	0,481370	1,971460	0,5675500
		Présent	1,373791	2,641554	0,327068	0,481376	1,971461	0,5675502
	1	HSDT [50]	0,684428	1,314254	0,162901	0,239282	0,981818	0,2822195
		Réf [43]	0,684750	1,316660	0,163020	0,239940	0,982660	0,2228900
		Présent	0,684753	1,316658	0,163024	0,239937	0,982656	0,2828900
	2	HSDT [50]	0,534053	1,025398	0,127210	0,186948	0,766082	0,2202950
		Réf [43]	0,534320	1,027410	0,127110	0,187230	0,766780	0,2207440
		Présent	0,534325	1,027412	0,127211	0,187227	0,766785	0,2207443
(-1,-1)	0	HSDT [50]	0,686508	1,313561	0,319712	0,361248	0,913696	0,3911070
		Réf [43]	0,686890	1,315370	0,320160	0,362380	0,914500	0,3927500
		Présent	0,686896	1,315372	0,320164	0,362386	0,914496	0,3927533
	1	HSDT [50]	0,342214	0,654874	0,169379	0,180112	0,455486	0,1950170
		Réf [43]	0,342380	0,655630	0,171190	0,180630	0,455820	0,1957600
		Présent	0,342377	0,655635	0,159583	0,180628	0,455822	0,1957642
	2	HSDT [50]	0,267026	0,510966	0,123360	0,140528	0,355405	0,1521520
		Réf [43]	0,267160	0,511603	0,124520	0,140950	0,355690	0,1527600
		Présent	0,267163	0,511604	0,124525	0,140947	0,355686	0,1527584
(-1,1)	0	HSDT [50]	2,860035	3,695187	0,330109	0,665116	3,218978	0,8519580
		Réf [43]	2,862060	3,705090	0,330420	0,665780	3,225200	0,8530500
		Présent	2,862065	3,705086	0,330420	0,665783	3,225200	0,8530548
	1	HSDT [50]	1,424877	1,842606	0,164202	0,331275	1,604957	0,4233360
		Réf [43]	1,426570	1,846770	0,164690	0,331850	1,607570	0,5200000
		Présent	1,426569	1,846765	0,164695	0,331853	1,607571	0,4251971
	2	HSDT [50]	1,111760	1,437580	0,128338	0,258332	1,252220	0,3302190
		Réf [43]	1,113180	1,441060	0,128510	0,258950	1,254420	0,3317900
		Présent	1,113178	1,441065	0,128514	0,258951	1,254417	0,3317891

Table 5.8: Comparaison des charges critiques pour les différentes conditions aux limites et chargements pour  $(\eta = 1), (h/a) = \frac{1}{100}$  d'une plaque FGM Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>.

Bon accord pour la « HSDT » [50] pour des faibles rapports d'épaisseur.

On remarque aussi que la « CPT » surestime les charges critiques du fait de de l'omission de l'effet de cisaillement pour des moyennes jusqu'aux grandes épaisseurs.

#### 5.4. Explication des résultats :

Les résultats obtenus pour les six (06) conditions aux limites (SS, CC, FF, SF, SC, CF) pour les figures (5.5-5.6-5.7-5.8 pour SSSS),(5.10 pour SCSC),(5.12 pour FSFS) (5.14 pour SSSF),(5.13 pour SSSC) et (5.15 pour SCSF) nous permettent de voir dans un premier lieu que les charges critiques de flambement diminuent dès que l'exposant du matériau FGM augmente, on remarque aussi que pour des petites valeurs de l'exposant :la variation des valeurs des charges critiques est plus apparente (une baisse significative) , pour toutes les conditions aux limites : un très haut exposant se traduit en réalité par une haute portion de volume des fractions métalliques (beaucoup plus métallique) par rapport à la céramique et là on note que les charges critiques d'une plaque totalement céramique sont considérablement grandes par rapport à celle d'une plaque en FGM ( $p > 0$ ) ou métallique. Donc les valeurs des charges critiques sont incluses entre celle qui est totalement métallique et celle qui est totalement céramique.

Aussi pour toutes les figures mentionnées en haut la charge critique pour le cas uni-axiale de compression est plus grande que le cas bi-axial de compression et moins de la combinaison de la traction et la compression. Ce classement des charges est rationnel et logique tant que la compression bi-axiale est la plus défavorable, après il y a la compression axiale puis la combinaison des deux et là la traction joue un rôle stabilisateur c'est pour ça les charges critiques de ce mode de chargement sont les plus élevées.

Dans les figures (cas : 5.3-5.4 « SSSS » et 5.9 « SCSC ») la charge critique contre le rapport de forme  $\eta$  est établie pour les plaques (SSSS et SCSC) sollicitées d'une compression uni-axiale le long d'axe «  $x$  ».D'après ces résultats généralement on dit que la charge critique décroît quand le rapport de forme (d'élancement) augmente. La [Figure 5.4](#) montre bien la disposition rationnelle des trois cas de chargements pour lesquels :(la compression bi-axiale est la petite puis la compression axiale et enfin la compression et la traction simultanée).

Ces figures montrent que le nombre des demi-ondes  $m$  dans la direction «  $x$  » du mode de flambement change dès que le de facteur de forme change .Tous les modes critiques ont juste une demi-onde dans la direction «  $x$  ».On peut conclure que pour les différents modes de chargements l'effet de la variation du rapport de forme sur la charge critique des plaques « SSSS et SCSC » est inversement proportionnel.

De plus, on observe que le nombre des demi-ondes «  $m$  » dans la direction «  $x$  » pour le cas de charge de compression bi-axiale varie très lentement avec l'augmentation du rapport de forme. La plaque flambe généralement dans le premier mode pour les cas  $(k_1, k_2) = (0, -1)$  et  $(k_1, k_2) = (-1, -1)$

Le graphe de la [Figure 5.1](#) exprime la charge critique pour le rapport épaisseur-largeur d'une plaque SSSS comprimée uni et bi-axiale pour plusieurs valeurs d'exposant FGM, on a trouvé que l'augmentation de l'épaisseur de la plaque FGM augmente fortement la valeur de la charge critique, l'interprétation de ce comportement est justifiée par l'effet de cisaillement transversal dans la plaque. On remarque aussi que pour un rapport épaisseur/longueur donné, la charge critique du FGM se trouve entre celles du totalement céramique et totalement métallique.

### 5.5. Comparaison des résultats :

La [Figure 5.16](#) montre la variation de la charge critique contre la variation de l'exposant FGM sous une compression uni-axial pour les trois conditions aux limites symétriques (SSSS, SCSC, SFSF), on remarque que le cas encastree (CC) a la plus haute valeur des charges puis le simplement appuyées et en bas la condition libre (FF) , ces résultats est due au la rigidité de la plaque le cas encastree est le plus raide donc sont charge sera plus grand est donc la condition libre est la plus flexible c'est pour ça qu'il a la plus petite charge critique.

La [Figure 5.17](#) monte lui aussi la même chose que la [Figure 5.17](#) mais pour les conditions antisymétriques (SC SF CF) les mêmes observations pour l'ordre des charges selon les conditions aux limites, on note juste que les cas (CF) et (SF) ont des charges très proches.

La [Figure 5.18](#) exprime les charges critiques pour l'exposante FGM une compression uni-axial pour tous les six (06) cas possible, en remarque bien que les charges pour un exposant de FGM donné, le cas le plus petit est le cas « bords libres » (FF) et le plus grand est le cas « bords encastree » (CC) et les autres cas sont inclus entre ces deux valeurs extrêmes et ordonnées selon leur raideur (conditions aux limites).

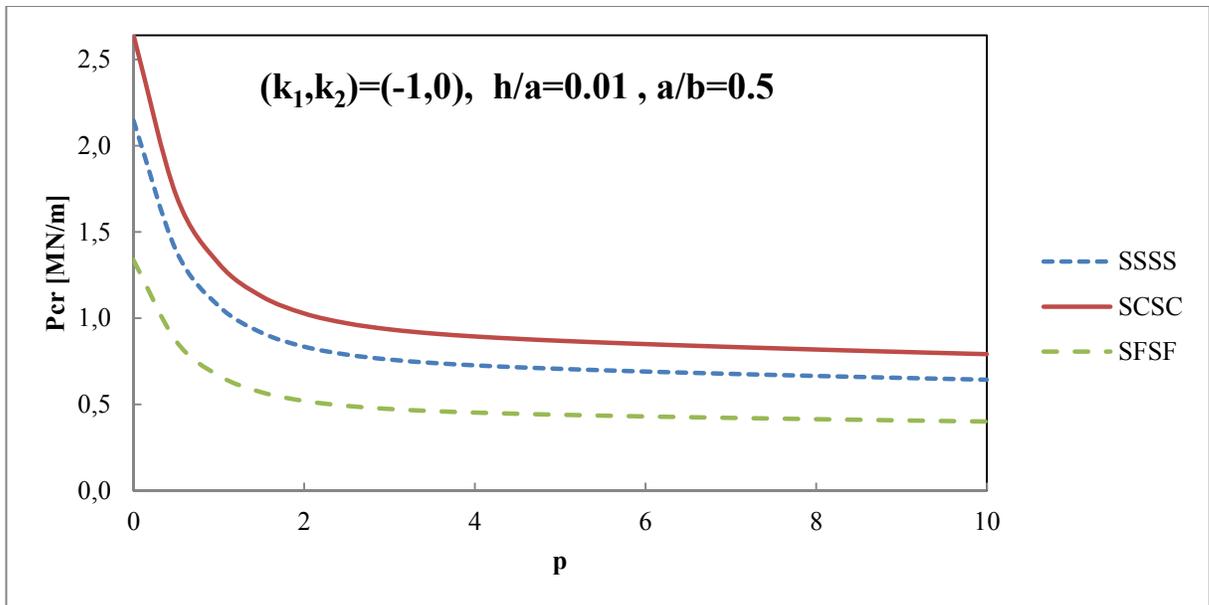


Figure 5.16: Comparaison entre les conditions symétriques dans le cas d'une compression uni-axiale d'une plaque FGM ( $h/a = 0.01$ ) de  $Al/Al_2O_3$ .

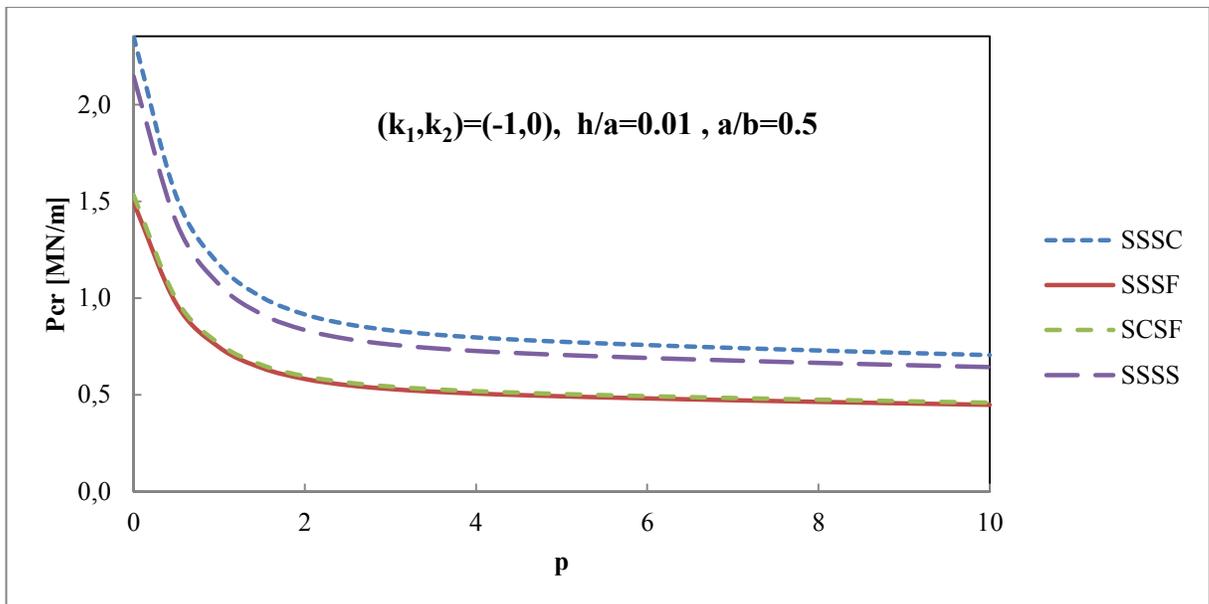


Figure 5.17: Comparaison entre les conditions antisymétriques dans le cas d'une compression uni-axiale d'une plaque FGM ( $h/a = 0.01$ ) de  $Al/Al_2O_3$ .

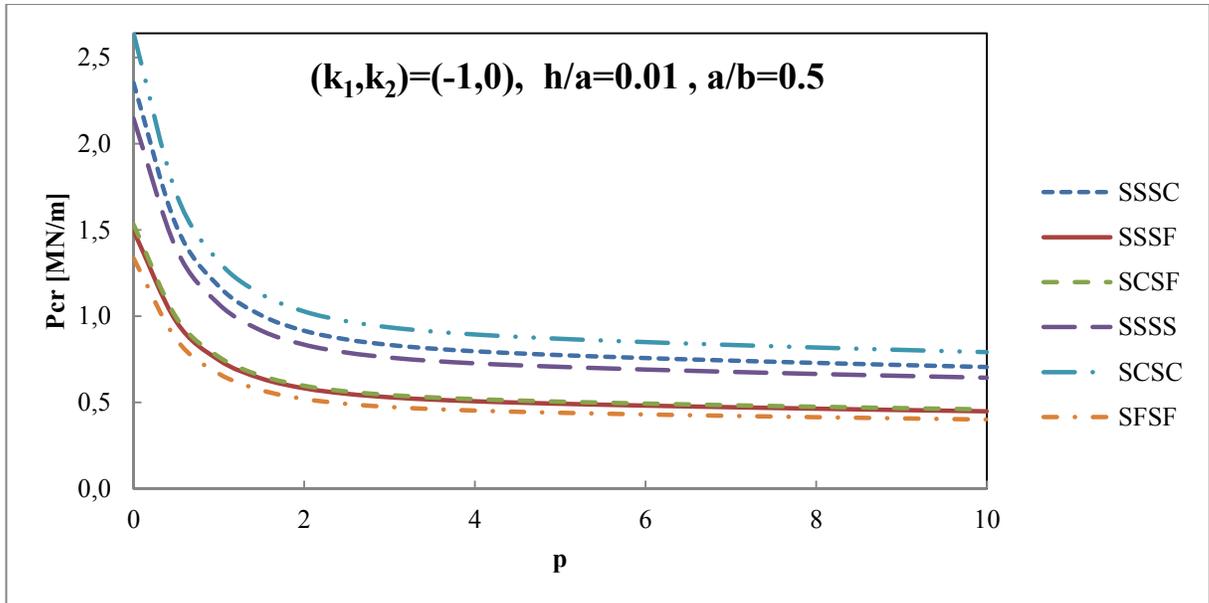


Figure 5.18: Comparaison entre les (06) conditions possibles dans le cas d'une compression uni-axiale d'une plaque FGM ( $h/a=0.01$ ) de  $Al/Al_2O_3$ .

## 5.6. Application numérique (Cas des vibrations) :

### 5.6.1. Plaques simplement appuyées : (Solution de Navier) :

Dans cette section des résultats numériques sont présentés pour les plaques FGM rectangulaire SSSS, les propriétés des matériaux sont listées dans le [Tableau 1.2](#): Modèle des FGM existantes.

Le paramètre de fréquence (adimensionnelle)  $\left(\tilde{\beta}_{c(m,n)} = \omega_{m,n} \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_c}{E_c}}\right)$  sera calculé dans cet exemple :

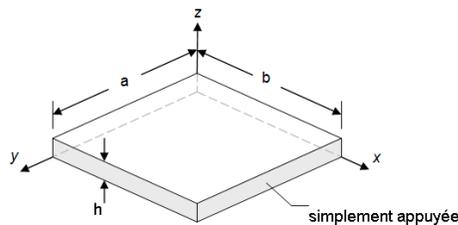


Figure 5.19: Plaque simplement appuyées « SSSS ».

### 5.6.2. Vérification de la formulation :

Pour vérifier la validité de la formulation, une comparaison des résultats avec celle de la littérature. Dans le [Table 5.9](#), pour le cas «  $p = 0$  », les fréquences sont comparées avec les résultats rapportés par [63] et [55] pour des plaques

isotropes, un bon accord a été trouvé. D’après les équations (1.4)-(1.6), quand l’exposant «  $p$  » rapproche au zéro ou l’infini, la plaque deviennent totalement isotrope composé du céramique ou métal, respectivement.

		SSSS
$\omega_{11}$	Présent	19,739
	[55]	19,730
	[63]	19,740
$\omega_{12}$	Présent	49,346
	[55]	49,370
	[63]	49,350
$\omega_{13}$	Présent	98,686
	[55]	98,740
	[63]	98,700

Table 5.9: Comparaison des fréquences  $\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{12\rho(1-\nu^2)}/Eh^3$ ,  $a/b = 1$ ,  $h/a = 0.005$  cas SSSS.

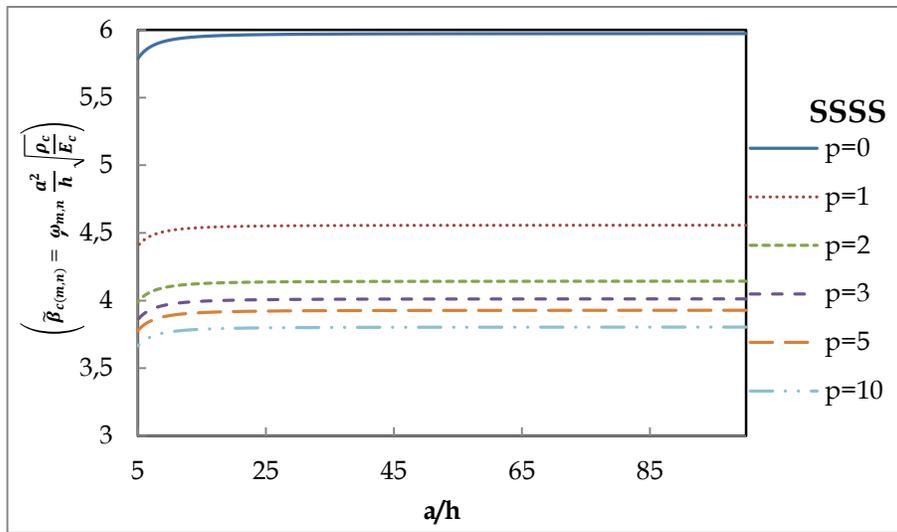


Figure 5.20: variation de paramètre fréquentiel  $\tilde{\beta}_c$  pour différentes valeur d’épaisseur «  $\delta$  », plaque carré SSSS «  $p=1$  ».

La Figure 5.20 montre la variation des paramètres fréquentsiels «  $\tilde{\beta}_c$  » en fonction du rapport (longueur/épaisseur) pour des différents exposants «  $p$  » ; le cas d’une plaque purement céramique à les paramètres  $\tilde{\beta}_c$  les plus grands puis le FGM jusqu’à le cas totalement céramique, l’augmentation d’épaisseur cause une forte augmentation des paramètres fréquentsiels.

5.6.2.1 Comparaison des résultats :

Dans le but d’investiguer la validité de la présente solution exacte Table 5.10 et Table 5.11 représentent les paramètres fréquentiels «  $\tilde{\beta}_c$  » pour un FGM de (Al/ZrO<sub>2</sub>) et (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>) est comparé avec autres résultats pour les différentes exposant «  $p$  » et rapport d’épaisseur  $\delta$ .

Les résultats sont comparée aux calculs obtenus par d’autres auteurs dans les Références [56], [59], [60], [61], [62].

Méthode	$p = 0$		$p = 1$			$\delta = 0.2$		
	$\delta = 1/\sqrt{10}$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.05$	$\delta = 0.1$	$\delta = 0.2$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 5$
present	0.6442	0.06895	0.0159	0.0633	0.24698	0.2461	0.2484	0.2421
TSDT [62]	0.4623	0.0577	0.0158	0.0619	0.2276	0.2256	0.2263	0.2272
HSDT [59]	0.4658	0.0577	0.0158	0.0619	0.2285	0.2264	0.2270	0.2281

Table 5.10: Comparaison du paramètre de fréquence fondamentale  $\tilde{\beta}_c = \omega a^2 \sqrt{\rho_c/E_c}$  pour une plaque FGM SSSS Al/ZrO<sub>2</sub> carrée.

$\delta = h/a$	$(m, n)$	Méthode	Exposant ( $p$ )				
			0	0,5	1	4	10
0,05	(1,1)	Présent	0,01490	0,01262	0,01137	0,00988	0,00950
		FSDT [61]	0,01480	0,01250	0,01130	0,00980	0,00940
		FSDT [56]	0,01460	0,01240	0,01120	0,00970	0,00930
		FSDT [60]	0,01480	0,01280	0,01150	0,01010	0,00960
0,1	(1,1)	Présent	0,05925	0,05016	0,04518	0,03920	0,03768
		FSDT [61]	0,05770	0,04900	0,04420	0,03820	0,03660
		FSDT [56]	0,05770	0,04920	0,04300	0,03810	0,03640
		FSDT [60]	0,05770	0,04920	0,04450	0,03830	0,03630
	(1,2)	Présent	0,14635	0,12391	0,11153	0,09662	0,09297
		FSDT [61]	0,13760	0,11730	0,10590	0,09110	0,08670
		FSDT [56]	0,13810	0,11800	0,10630	0,09040	0,08590
		FSDT [60]	0,13540	0,11540	0,10420	-	0,12890
(2,2)	Présent	0,23144	0,19591	0,17619	0,15235	0,14672	
	FSDT [61]	0,21120	0,18050	0,16310	0,13970	0,13240	
	FSDT [56]	0,21210	0,18190	0,16400	0,13830	0,13060	
	FSDT [60]	0,20630	0,17640	0,15940	--	0,12890	

Table 5.11: Comparaisons des paramètres de fréquence naturelle ( $\tilde{\beta}_c = \omega h \sqrt{\rho_c/E_c}$ ) pour une plaque FGM SSSS Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> carrée ( $\eta=1$ ).

La Table 5.11 représente une comparaison des paramètres fréquentielle  $\tilde{\beta}_c$  pour une plaque SSSS (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), mince et faiblement épaisse ( $\delta = 0.05, 0.1$ ) avec des résultats obtenus dans les Références ([56], [59], [60], [61], [62])

respectivement. On note que les modes propres correspondantes  $m$  et  $n$  dénote, le nombre des demi-ondes dans la direction «  $x$  » et «  $y$  ».

On vérifie bien que lorsque le rapport d'épaisseur devine supérieur a «  $1/20$  » la théorie classique se diverge de plus en plus et il nous donne une surestimation des fréquences due à la négligence de l'effort tranchant et l'inertie de torsion malgré qu'on a tenir compte de ce dernier lors de cette analyse.

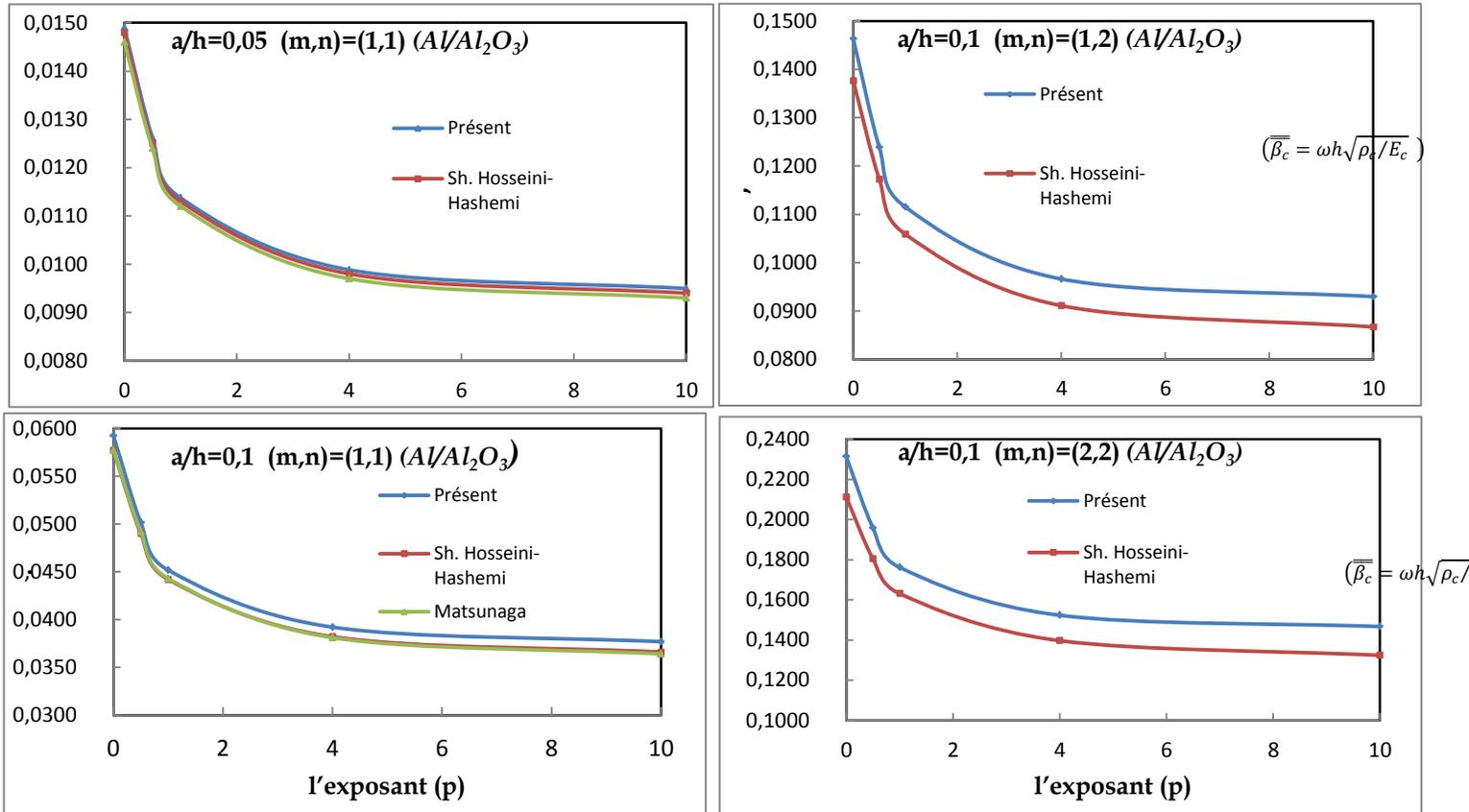


Figure 5.21: variation de paramètre fréquentiel ( $\bar{\beta}_c = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ ) pour différente valeur de l'exposant «  $p$  ».

### 5.6.2.2 Effet du l'index d'exposant « $p$ » sur le paramètre fréquentiel $\bar{\beta}$ :

Tous les fréquences propres des plaques FGM rectangulaire sont considérais adimensionnelles comme  $\bar{\beta} = \omega h \sqrt{\bar{\rho} / \bar{E}}$  (s'appelle le paramètre fréquentiel) pour lequel le  $\bar{E}$  et  $\bar{\rho}$  son module de Young et la masse volumique du plaque dans le plan moyenne ( $z=0$ ), respectivement. ;  $\bar{\beta} = (E_c - E_m)$  et  $\bar{\rho} = (\rho_c - \rho_m)$ .

Les fréquences augmentent avec l'augmentation de l'épaisseur de la plaque. Ce phénomène est dû à l'augmentation de la rigidité de la plaque. Les

Figure 5.22 , Figure 5.22 montrent la variation du paramètre fréquentiel  $\bar{\beta}$  en fonction de l'exposant de distribution 'p' pour une plaque carrée FGM.

variation of the eigenfrequency parameter  $\bar{\beta}$  versus the power law index p for a FG square plates with SSSS boundary cor when  $s = 0.15$ .

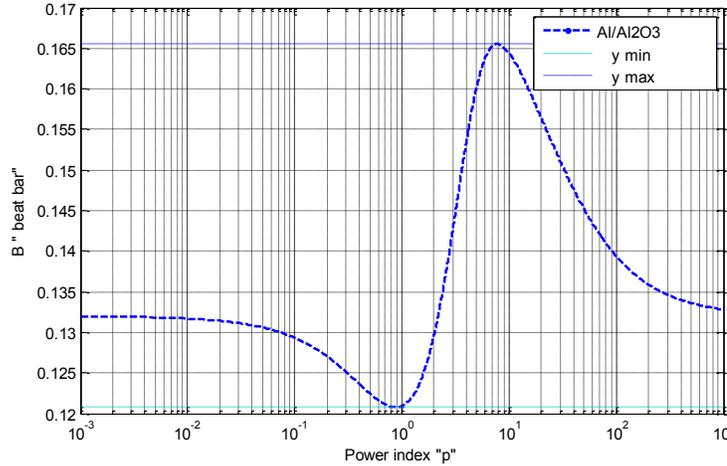


Figure 5.22:variation de paramètre fréquentiel  $\bar{\beta}$  pour différente valeur de l'exposant « p » pour  $\delta=0.15$

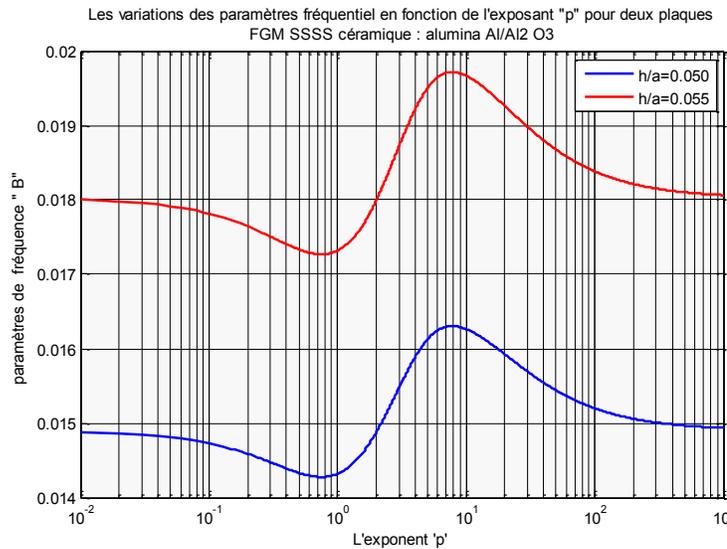


Figure 5.23:variation de paramètre fréquentiel  $\bar{\beta}$  pour différente valeur de l'exposant « p » pour  $\delta=0.05$  et  $0.055$ .

Selon les résultats obtenus on voit que l'exposant a une influence majeure sur le paramètre fréquentiel  $\bar{\beta}$ . Une autre observation, est que quel que soit les matériaux, le paramètre fréquentiel propre  $\bar{\beta}$  a un minimum et un maximum autour des points  $p = 1$  et  $p = 8$ , respectivement. La Figure 5.22 montre que le changement de l'indice d'exposant de 0.001 au 1000, FGM (Al/Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), a un grand effet sur le paramètre fréquentiel si on le compare avec celle de FGM Al/ZrO<sub>2</sub>. Cette différence est due à la grande dépendance du paramètre

fréquentiel  $\bar{\beta}$  au terme  $(E_c - E_m)$  et la Zircona a un module de Young petite que l'Alumina.

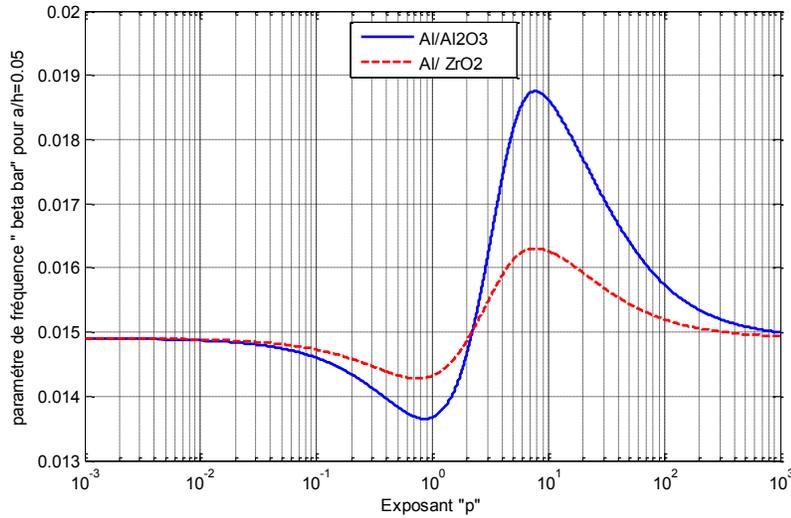


Figure 5.24: Les variations des paramètres fréquentiel en fonction de l'exposant "p" pour deux plaques FGM SSSS céramique : alumina et zircona, métal : aluminium pour  $a/h = 0.05$ .

### 5.6.3. Explications des résultats (cas SCSC) :

Les résultats numériques sont présentés pour les plaques FGM rectangulaires SCSC. Le paramètre de fréquence (adimensionnelle)  $\left(\tilde{\beta}_{m(n)} = \omega_{m,n} \pi^2 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}\right)$  sera calculé :

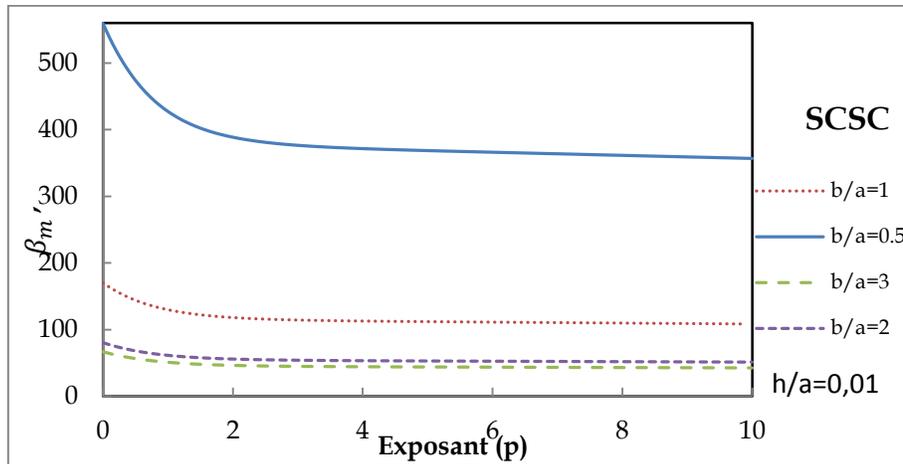


Figure 5.25: Effet de l'exposant sur le paramètre fréquentiel  $\left(\tilde{\beta}_m = \omega_{m,n} \pi^2 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}\right)$  pour plaque SCSC cas  $h/a=0.01$ .

De la Figure 5.25 on voit clairement que les paramètres fréquentiels démunis avec certaines augmentations d'exposant de FGM puis tend à être constante. Cela exprimer par le fait que le gradient du FGM varie pour les différentes valeurs de «  $p$  » ; varie de cas totalement céramique « plus rigide » vers le cas « totalement métallique » le moins rigide .On remarque aussi que pour des élancements  $\eta \geq 1$  les paramètres fréquentiels sont rapprochés.

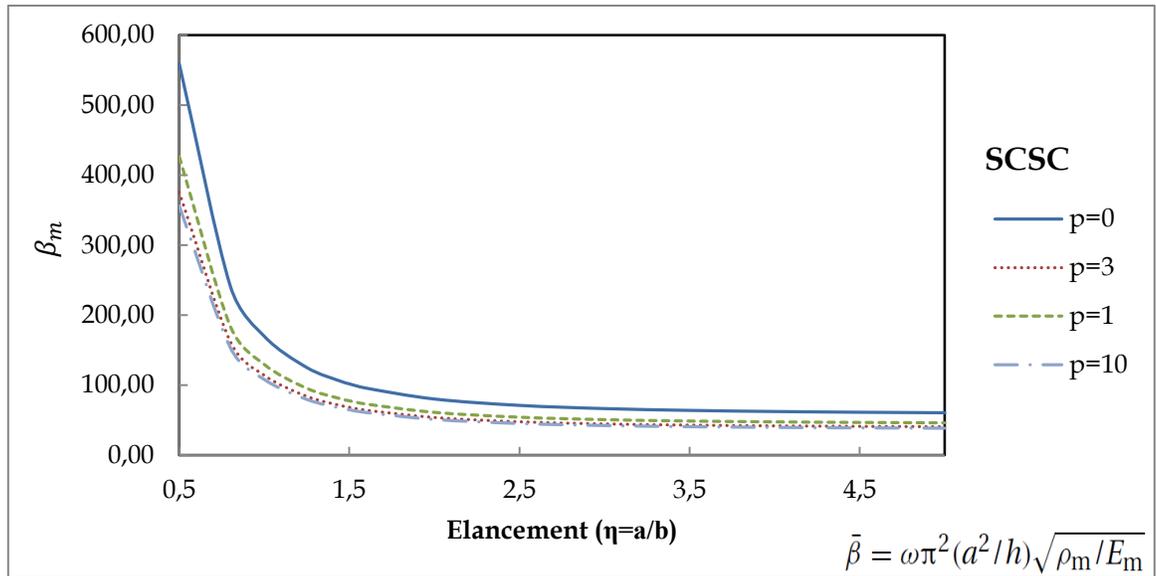


Figure 5.26: Effet de l'élancement sur le paramètre fréquentiel ( $\bar{\beta}_m = \omega_{m,n} \pi^2 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ ) pour plaque SCSC cas  $h/a=0.01$ .

La Figure 5.26 montre que le paramètre fréquentiel démunis avec l'augmentation de l'élancement (rapport de forme) de la plaque, une forte variation est remarquée pour des valeurs de  $\eta$  compris entre 0.5 et 1.5.

Les Figure 5.27 , Figure 5.28 illustrent l'effet de l'exposant «  $p$  » contre le facteur d'épaisseur sur le paramètre fréquentiel «  $B$  » (fréquence fondamentale, le paramètre «  $B$  » augmente avec l'augmentation d'épaisseur, une augmentation forte du paramètre jusqu'à «  $a/h=20$  » après cette valeur aucun changement significatif remarquer.

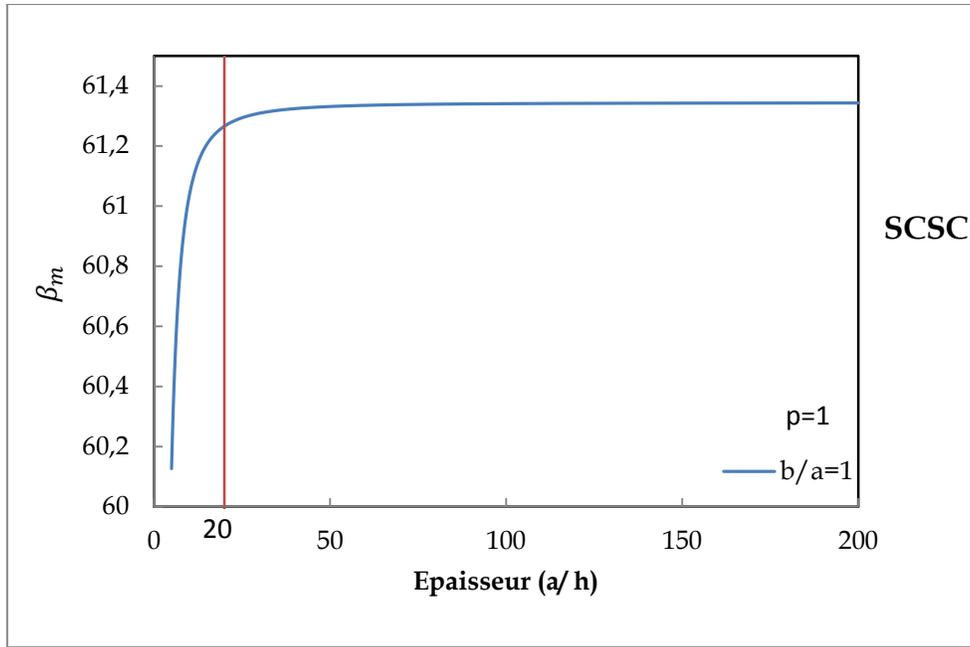


Figure 5.27: Effet de l'épaisseur sur le paramètre fréquentiel ( $\tilde{\beta}_m = \omega_{m,n} \pi^2 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ ) pour plaque SCSC cas  $p=1$  et  $b/a=1$ .

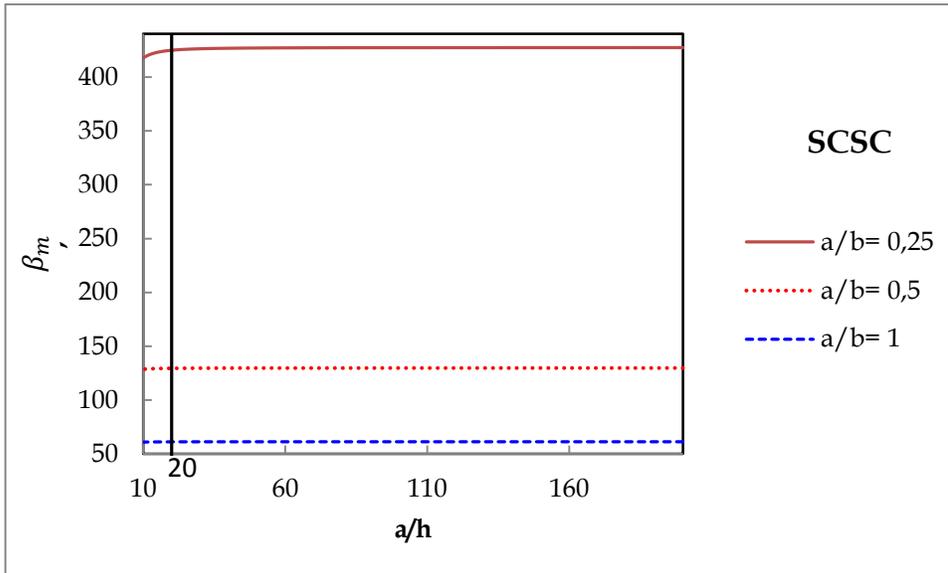


Figure 5.28: Effet de l'épaisseur sur le paramètre fréquentiel ( $\tilde{\beta}_m = \omega_{m,n} \pi^2 \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho_m}{E_m}}$ ) pour plaque SCSC cas  $p=1$ .

#### 5.6.4. Effet des déplacements de planaires « U » et « V »:

En peut classer les modes de vibrations des plaques FGM dans deux catégories : les modes hors plan « out-of-plane modes » et les modes dans le plan « in-plane modes ». Pour « in-plane » modes, la magnitude des déplacements est très petite par rapport aux déplacements de plan "w".

Il y a une différence apparente entre les modes d'une plaque isotrope et celui d'un FGM. Lorsqu'une plaque isotrope à des « in-plane » modes ; elle n'a pas des déplacements transversaux et la plaque peut se déplace juste dans les directions de plan, mais dans les plaques FGM et à cause de l'existence du couplage entre les vibrations « in-plane » et « out-of-plane », les deux déplacements existent.

Pour étudier l'effet des déplacements planaire sur les fréquences (paramètre  $\tilde{\beta}_c$ ) des plaques FGM, une comparaison a été établie avec les résultats obtenus par [60]. Ils ont utilisé la théorie du premier ordre de *Mindlin* et ignorant l'effet des déplacements planaires. Les Figure 5.29, Figure 5.30 montre une différence majeure est observé. Cet écart est dû à deux causes : le premier à cause de la différence entre la théorie classique et de premier ordre, la deuxième et due aux déplacements planaire. Pour le cas «  $p = 0$  », la plaque est isotrope homogène et donc les déplacements  $u$  et  $v$  sont ineffective sur les paramètres fréquentiels de la plaque. Pour ce cas-là, la différence est due à la première cause, qui a un petit effet sur les fréquences de la plaque mince. On peut voir aussi que pour des plaques isotropes, la différence est positive, cela est dû à la surestimation des fréquences de la théorie classique.

p	SSSS			SCSC		
	Present	Reference [55]	Difference (%)	Present	Reference [55]	Difference (%)
0	0,0241861	0,02392	1,100%	0,042464905	0,04076	4,015%
0,25	0,0220668	0,02269	-2,824%	0,038744	0,03664	5,430%
1	0,0184489	0,02156	-16,863%	0,032390	0,0325	-0,338%
5	0,015895	0,0218	-37,147%	0,027904	0,03239	-16,075%

Table 5.12: Effet des déplacements planaires sur le paramètre fréquentiel  $\tilde{\beta}_c$ .

D'après le Table 5.12, pour des plaques FGM ( $p > 0$ ), la différence est négative et ça magnitude augmente significativement avec l'augmentation de l'exposant « p ». Les fréquences mentionnées dans la référence [60], basé sur la théorie du premier ordre sont plus grandes que notre résultat à cause la négligence des déplacements

planaires dans la référence [60]. Donc on conclut l'effet significatif des déplacements planaires.

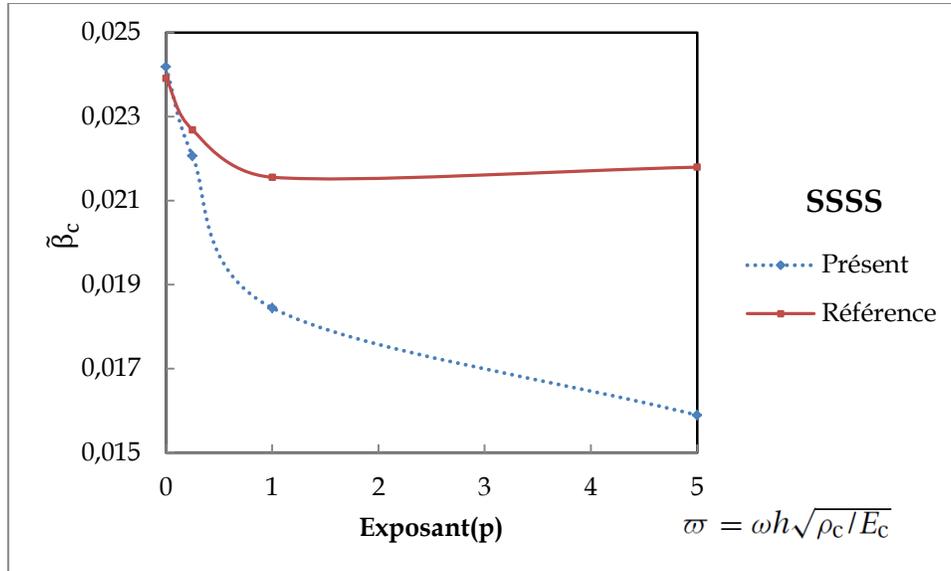


Figure 5.29: Effet des déplacements planaires sur le paramètre fréquentiel  $\tilde{\beta}_c$ , cas SSSS.

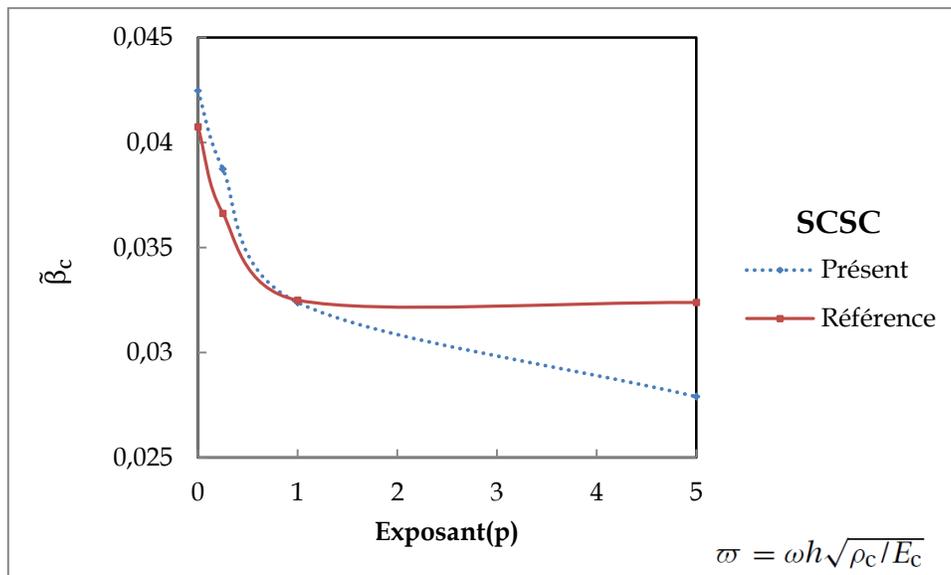


Figure 5.30: Effet des déplacements planaires sur le paramètre fréquentiel  $\tilde{\beta}_c$  cas SCSC.

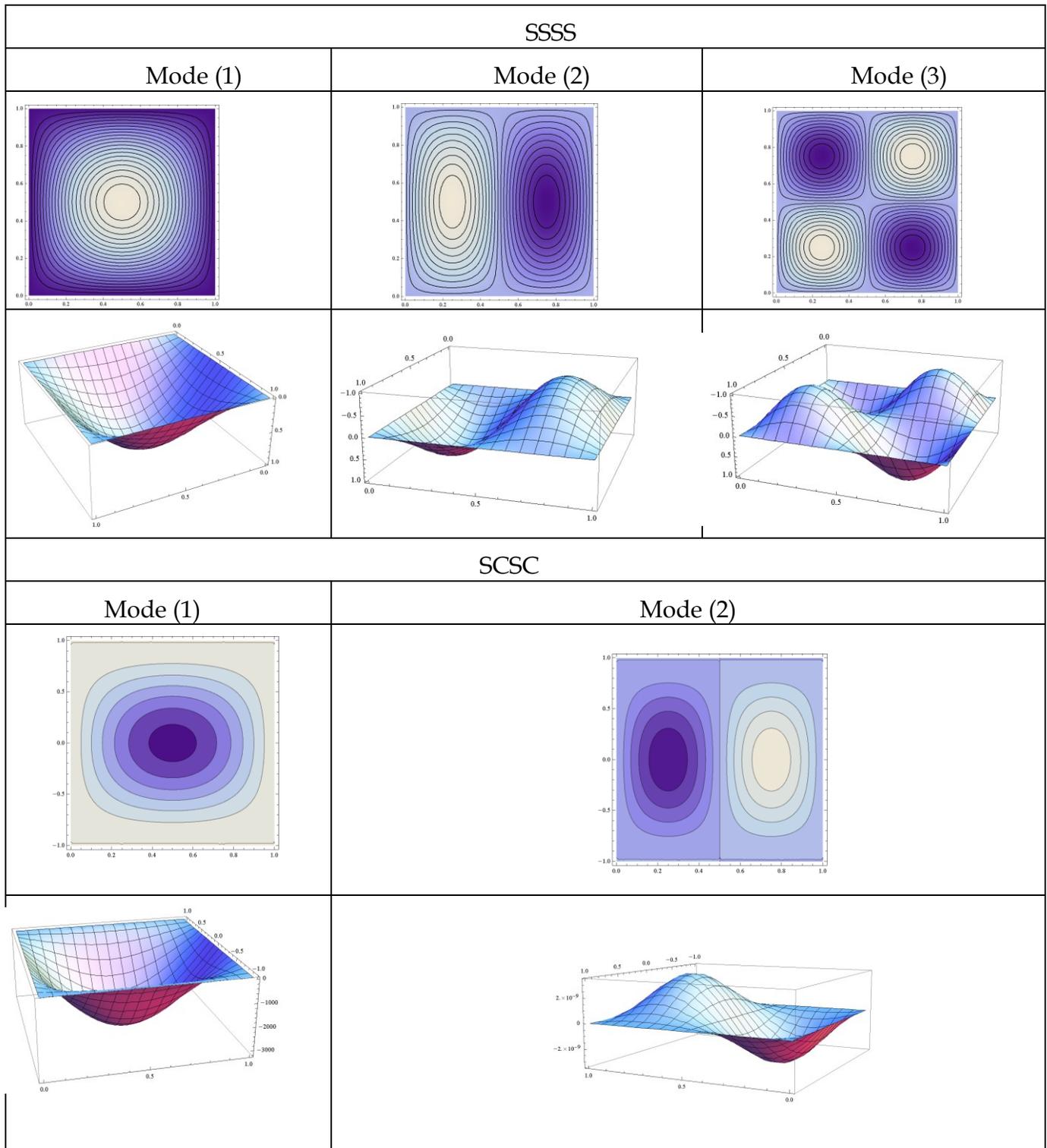


Figure 5.31: Modes propres "Shape mode" d'une plaques rectangulaires pour les deux conditions aux limites "SSSS", "SCSC" et  $h/a=0.05$ , «  $p=1$  »,  $a/b=1$ .

### 5.6.5. Effet du couplage :

Les équations (2.32-2.33-2.34) expriment aussi le couplage existant entre les modes dans -le plan et hors-plan qui est potentiel (existence des termes  $B$ ) cinématique (termes  $I_2$ ), pour étudier l'effet de couplage sur la solution de l'équation on pose :

MD : Modèle découplée (les termes  $B_i$  et  $I_1$  sont égale à zéro).

MPD : Modèle potentiellement découplé (le terme  $B_i$  égal à zéro).

MCD : Modèle cinématiquement découplé (le terme  $I_1$  sont égale à zéro).

MC : Modèle couplé (tenir compte des termes  $B_i$  et  $I_1$  ).

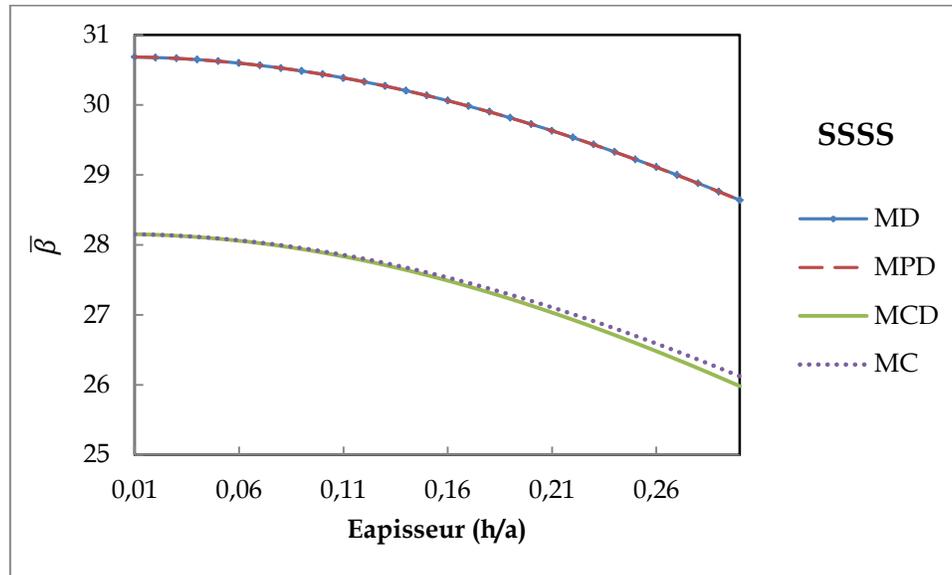


Figure 5.32: Variation du paramètre fréquentiel «  $\beta_m$  » en fonction du rapport d'épaisseur  $\delta=h/a$  pour les différentes solutions, cas « SSSS ».

Les figure 5.32-5.33 montrent les variations de paramètre fréquentiel «  $B$  » de Al/O3 d'une plaque carrée (net=1) SSSS et SCSC pour une exposante «  $p=1$  », une comparaison entre les 04 modèles pour les deux plaques montre que les résultats du modèle « MCD » sont très proches à présent étude (modèle MC), cela indique que le couplage cinématique a un petit effet sur la variation de paramètre fréquentiel. Par contre, si on considère les modèles (MD et MPD) on voit clairement que le paramètre «  $\beta_m$  » influencé par le couplage potentiel (même si la plaque devienne épaisse). D'autre part d'après les équations « 2.3-2.4 » on conclut que la magnitude de couplage cinématique et potentiel dépend fortement à  $(E_c - E_m)$  et  $(\rho_c - \rho_m)$  respectivement, alors que la différence entre

les modules de *Young* de céramique et métal à un grand effet sur « B » par rapport à la différence entre les densités.

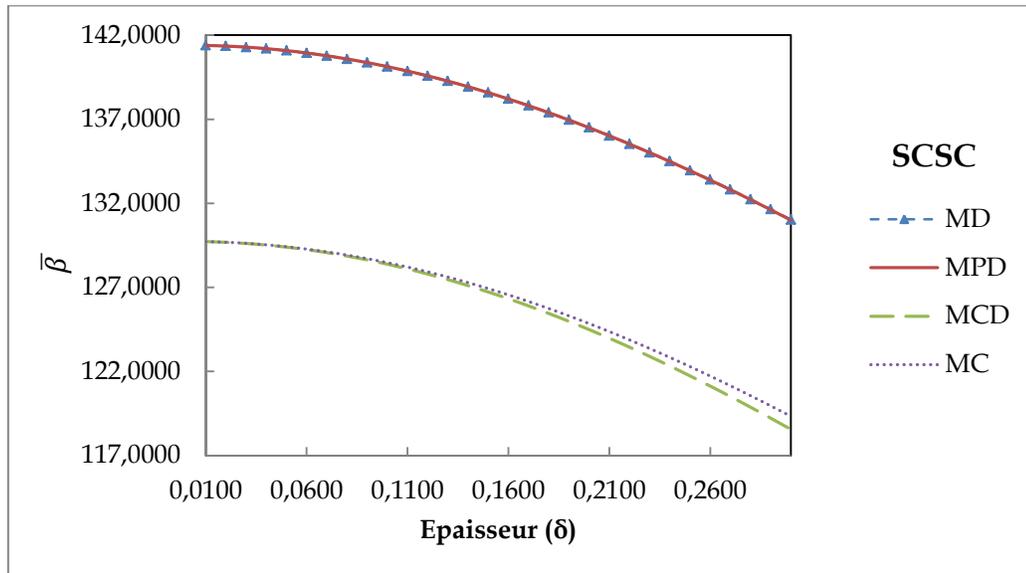


Figure 5.33: Variation du paramètre fréquentiel «  $\beta_m$  » en fonction du rapport d'épaisseur  $\delta=h/a$  pour les différentes solutions, cas « SCSC ».

### Conclusion :

L'objectif de ce mémoire est divisé sur trois buts, une solution analytique exacte est présentée pour le problème des vibrations libre et l'instabilité des plaques en FGM, pour lesquelles la fraction volumique des constituants varie selon une loi exponentielle à la direction de l'épaisseur. Un champ des déplacements basé sur la théorie classique de « *Kirchhoff* ». Puis, la programmation de la solution des deux cas d'étude:

Les équations couplées de la stabilité et vibrations sont découplées à l'aide de nouvelles fonctions. Par l'utilisation de la méthode de « *Navier* » une solution directe était présentée. L'approche de « *Levey* » utilisé afin de trouver les fréquences propres, charges critiques pour les différentes conditions aux limites possibles (six cas possibles).

L'application des conditions aux limites aux solutions des deux problèmes résulte des fonctions propres, la résolution de ces derniers nécessite des méthodes numériques, la programmation de la résolution des équations transcendantes était élaborée sous MATLAB et Mathematica.

La solution est vérifiée (les paramètres fréquentiels et charges critiques) par rapport à la littérature existante, pour la validation. Ces résultats sont présentés sur des tableaux et graphes pour différentes conditions aux limites, l'exposant de puissance de l'FGM, l'élanement et l'épaisseur. Une étude sur l'effet des déplacements de plan et l'effet, type de couplage sur les paramètres fréquentiel. Ce travail nous a permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

- Le paramètre fréquentiel et charge critique décroît à la croissance d'élanement, excluant les plaques FGM avec bords libres.
- Pour un élanement donné, le paramètre fréquentiel et charge critiques démunie (pour tous les modes) quand l'exposant de l'FGM augmente.
- Pour des petites exposantes, la variation du paramètre fréquentiel et charge critique est très forte
- Le mode de flambement critique change avec le changement des conditions aux limites ou l'élanement, malgré ça pour des plaques en compression bi-axiale ou uni-axiale dans la direction « y », le mode critique de flambement est le premier mode.
- On peut voir clairement que pour des grands élanements, l'effet des conditions aux limites est plus apparente.
- Quand l'épaisseur de la plaque augmente, l'effet du gradient devient significatif.
- La théorie classique « CPT » surestime les paramètres fréquentiels et charges critiques.
- La théorie classique fiable pour des rapports épaisseur/longueur inférieurs à 1/20.
- Les déplacements planaires ont un effet très significatif sur les paramètres fréquentiels.
- Le couplage potentiel a un effet majeur par rapport à l'effet de couplage cinématique.

## Bibliographies:

- [1] H. Yin , . L. Sun and G. Paulino , "Micromechanics-based elastic model for functionally graded materials with particle interactions," *Acta Materialia*, vol. 52, p. 3535–3543, 2004.
- [2] M. Ashby, *Materials selection in Mechanical Design*, Butterworth and Heinemann., 2005.
- [3] M. Yamanoushi , . M. Koizumi, T. Hirai and . I. Shiota, "Proceedings of the First International Symposium on Functionally Gradient Materials," *Japan*, 1990.
- [4] M. Koizumi, "The concept of FGM," *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, vol. 34, pp. 3-10, 1993.
- [5] T. Hirai and L. chen , "Recent and prospective development of functionally graded materials in Japan," *Materials Science Forum*, vol. 308–311 , p. 509–514, 1999.
- [6] S. Chan , "Performance and emissions characteristics of a partially insulated gasoline engine," *International Journal of Thermal Science*, vol. 40, p. 255–261, 2001.
- [7] S. Uemura , "The activities of FGM on new applications," *Materials Science Forum*, Vols. 423-425, pp. 1-10, 2003.
- [8] L. Librescu and S.-Y. Song , "Thin-walled beams made of functionally graded materials and operating in a high temperature environment: vibration and stability," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 28, p. 649–712, 2005.

- [9] E. Müller , C. Drašar, J. Schilz and W. Kaysser , "Functionally graded materials for sensor and energy applications," *Materials Science and Engineering*, vol. A362, pp. 17-39, 2003.
- [10] . J. Qiu, J. Tani , T. Ueno , T. Morita and H. Takahashi, "Fabrication and high durability of functionally graded piezoelectric bending actuators," *Smart Materials and Structures*, vol. 12, p. 115–121, 2003.
- [11] . L.-S. Liu, Q.-J. Zhang and P.-C. Zhai , "The optimization design of metal/ceramic FGM armor with neural net and conjugate gradient method," *Materials Science Forum*, vol. 423–425, p. 791–796, 2003.
- [12] . B. Paszkiewicz, R. Paszkiewicz , M. Wosko , D. Radziwi, B. Sciana, A. Szyszka , W. Macherzynski and M. Tlaczala , "Functionally graded semiconductor layers for devices application," *Vacuum*, vol. 82, p. 389–394, 2008.
- [13] F. Watari , A. Yokoyama , . M. Omori, T. Hirai , H. Kondo , M. Uo and T. Kawasaki , "Biocompatibility of materials and development to functionally graded implant for bio-medical application," *Composites Science and Technology*, vol. 64, p. 893–908, 2004.
- [14] T. Fuchiyama and N. Noda , "Analysis of thermal stress in a plate of functionally gradient material," *JSAE Review*, vol. 16, p. 263–268, 1995.
- [15] A. Markworth , K. Ramesh and W. Parks , "Review: modeling studies applied to functionally graded materials," *Journal of Material Sciences*, vol. 30, p. 2183–2193, 1995.
- [16] Y. Tanigawa, "Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 48, p. 287–300, 1995.
- [17] N. Noda, "Thermal stresses in functionally graded material," *Journal of*

*Thermal Stresses*, vol. 22, p. 477–512, 1999.

- [18] G. Paulino , Z. Jin Z.H. and J. R. Dodds , "Failure of functionally graded Materials, in *Comprehensive Structural Integrity*," *Elsevier Science*, vol. Vol. 2 (eds. B. Karihallo and W.G. Knauss), p. 607–644, 2003.
- [19] H.-S. Shen , "Bending, buckling and vibration of functionally graded plates and shells," *Advances in Mechanics*, vol. 34, p. 53–60, 2004.
- [20] V. Birman and L. Byrd , "Modeling and analysis of functionally graded materials and structures," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 60, p. 195–216, 2007.
- [21] . K. Morinaga and K. U. Toto, "Fabricate Thick Alumina-Tungsten FGM Using Slip Cast Method," *Sci. Technol*, p. 4, December 1993.
- [22] K. M. Jasim, R. D. Rawlings and D. R. F. West, "Metal-Ceramic Functionally Gradient Material Produced by Laser Processing," *J. Mater. Sci.*, vol. 28, p. 2820–2826, 1993.
- [23] H. Takebe and K. Morinaga, "Fabrication of Zirconia-Nickel Functionally Gradient Materials by Slip Casting and Pressureless Sintering," *Mater. Manufact.Proc.*, vol. 9(4), p. 721–33, 1994..
- [24] H. H. Grazzini and D. S. Wilkinson, "Slip Casting Under Pressure," *Proc. 16th Ann. Conf. on Composites & Advanced Ceram. Mater.*, M. Mendelson, *Am. Ceram. Soc.*, pp. 408–418, , 7-10 January 1992.
- [25] R. E. Mistler, "Tape Casting: An Enabling Fabrication Technology," *Ceram Ind*, pp. 27-30, 2000.
- [26] K. Atarashiya, K. Kurokawa and T. Nagai, "Functionally Gradient Material of the System Ni-MgO, Ni-NiO, Ni-Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub> or Al-AlN by Pressureless Sintering," *Proc. 16th Ann. Conf. on Composites & Advanced Ceram. Mater*, p. 400–407, January 7–10 1992.

- [27] Y. Miyamoto, "Economic Process for Rapid Densification of Ceramics, Metals, and Functionally Gradient Materials, Processing Research Center for High Performance Materials," *Institute of Scientific and Industrial Research*, vol. 8, pp. 5-6.
- [28] JETRO, "Functionally Gradient Material Made of Glass and Metal," *JETRO, New Tech*, p. 21(2), Mai 1993.
- [29] S. Bauvais, "Etude de l'influence de la porosité sur les propriétés électriques de dépôts réalisés par projection plasma," *Thèse de doctorat*, 2003.
- [30] C. Baudry, "Contribution à la modélisation instationnaire et tridimensionnelle du comportement dynamique de l'arc dans une torche de projection plasma," *Thèse de doctorat*, 2003.
- [31] A. Bishop, C.-Y. Lin and M. Navaratnam, "A Functionally Gradient Material Produced by a Powder Metallurgical Process," *J. Mater. Sci. Lett.*, vol. 12(19), p. 1516-1518, 1993.
- [32] N. Shimoda, S. Kitaguchi, T. Saito and H. Takigawa, "Production of Functionally Gradient Materials by Applying Low-Pressure Plasma Spray," *Proc. First Intl. Symp., FGM*, p. 151-156, 1990.
- [33] Z. Jin and N. Noda, "Minimization of Thermal Stress Intensity Factors for a Crack in Metal-Ceramic Mixture," vol. Vol. 34, pp. 47-54, 1993.
- [34] Y. Fakui, "Fundamental Investigation of Functionally Gradient Material Manufacturing System Using Centrifugal Force," *JSME Int. Journal, Series III*, vol. Vol. 34, pp. 144-148, 1991.
- [35] Y. Matsuzaki and et al., "Analysis-Assisted Fabrication of TiAl-Based Thermal Barrier FGM and Its Performance in a Supersonic Hot Gas Flow," *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, pp. 323-330, 1993.

- [36] R. Williamson, B. Rabin and J. Drake, "Finite Element Analysis of Thermal residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part I. Model Description and Geometric Effects", *J. Appl. Phys.*, vol. Vol. 74, pp. 1310-1320, 1993.
- [37] J. Drake, R. Williamson and B. Rabin, "Finite Element Analysis of Thermal Residual Stresses at Graded Ceramic-Metal Interfaces, Part II. Interface Optimization for residual Stress reduction", *J. Appl. Phys.*, vol. Vol. 74, pp. 1321-1326, 1993.
- [38] N. Sata, N. Sanada, T. Hirano and M. Niino, "Fabrication of a Functionally Gradient Material by Using a Self-Propagating Reaction Process," *First Intl. Symp. on Combustion and Plasma Synthesis of High-Temperature Materials*, p. 195–203, 1990.
- [39] J. Reddy and C. Chin, "Thermoelastical analysis of functionally graded cylinders and plates," *Journal of Thermal Stresses*, vol. 21, p. 593–626, 1998.
- [40] T. Mori and K. Tanaka, "Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions," *Acta Metallurgica*, vol. 2, p. 1571–574, 1973.
- [41] R. Hill, "A self-consistent mechanics of composite materials," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, p. 213–222, 1956.
- [42] S. Vel and R. Batra, "Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates," *AIAA Journal*, vol. 40, p. 1421–1433, 2002.
- [43] R. Javaheri and M. R. Eslami, "Buckling of Functionally Graded Plates under In-plane Compressive Loadin," *Math. Mech.*, vol. 82, pp. 4, 277-283, 2002.
- [44] A. Zenkour, "A comprehensive analysis of functionally graded sandwich plates: Part 2 – Buckling and free vibration," *International*

*Journal of Solids and Structures*, vol. 42, p. 5243–5258, 2005.

- [45] B. Samsam Shariat and M. Eslami, "Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads," *Composite Structures*, vol. 78, p. 433–439, 2007.
- [46] . A. Serge, "Functionally graded plates behave like homogeneous plates," *Composites*, vol. B 39, p. 151–158, 2008.
- [47] B. Victor and W. B. Larry, "Stability and natural frequencies of functionally graded stringer-reinforced panels," *Composites*, vol. Part B 39, p. 816–825, 2008.
- [48] X. Zhao, Y. Lee and K. Liew, "Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates," *Composite Structures*, vol. 90, p. 161–171, 2009.
- [49] M. Meisam, R. S. Ali and J. Emad, "Levy Solution for Buckling Analysis of Functionally Graded Rectangular Plates," *Appl Compos Mater*, vol. 17, p. 81–93, 2010.
- [50] M. Bodaghi and A. Saidi, "Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, p. 3659–3673, 2010.
- [51] M. Bodaghi and A. R. Saidi, "Stability analysis of functionally graded rectangular Stability analysis of functionally graded rectangular resting on elastic foundation," *Arch Appl Mech*, vol. 81, p. 765–780, 2011.
- [52] T. Huu-Tai and C. Dong-Ho, "An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, p. 1008–1022, 2012.
- [53] W. Tsung-Lin, K. Shukla and H. H. Jin, "Post-buckling analysis of

- functionally graded rectangular plates," *Composite Structures* , vol. 81, pp. 1-10, 2007.
- [54] A. Noseir and J. Reddy, "On vibration and buckling of symmetric laminated plates according to shear deformation theories," *Acta Mech*, vol. 94, p. 145–169, (1992).
- [55] B. A Hasani , S. A R and J. E , "An exact solution for free vibration of thin functionally graded rectangular plates," *J. Mechanical Engineering Science*, vol. C, no. 225, pp. 526-536, 2010.
- [56] X. Zhao, L. Y.Y and K. Liew, "Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 319, p. 918–939, 2009.
- [57] J. N. Reddy, "Analysis of functionally graded plates," *Int J Numer Methods Eng*, vol. 47, pp. 663-84, 2000.
- [58] S. Vel and . R. C. Batra, "Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates," *J. Sound Vibr*, vol. 272, p. 703–730, 2004.
- [59] H. Matsunaga, "Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory," *Compos. Struct*, vol. 82, pp. 499-512, 2008.
- [60] S. Hosseini-Hashemi, H. Rokni Damavandi Taher, H. Akhavan and M. Omid, "Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 34, p. 1276–1291, 2010 .
- [61] S. Hosseini-Hashemi , M.Fadaee and S. Atashipour, "A new exact analytical approach for free vibration of Reissner–Mindlin," *International Journal of Mechanical Sciences* 53 (2011)11–22, vol. 2011, pp. 11-22, 2011.

- [62] S. Hosseini-Hashemi, M. Fadaee and S. Atashipour, "Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure," *Composite Structures*, vol. 93, pp. 722-735, 2011.
- [63] A. W. Leissa, "Vibration of plates," *NASA report*, p. 160, 1969.
- [64] S. Nakashima, H. Arikawa, M. Chigasaki and al, "ZrO<sub>2</sub> and Cu Functionally Gradient Materials Prepared by a Dynamic Ion Mixing Process," *Surface and Coatings Technol*, vol. 66(1-3), p. 30-333, 1994.
- [65] Y. Fukui and Y. Watanabe, "Analysis of Thermal Residual Stress in a Thick- Walled Ring of Duralcan-Base Al-SiC Functionally Graded Material," *Metall. Mater. Trans. A – Phys. Metall. Mater. Sci.*, vol. 27(12), p. 4145-4151, 1996.
- [66] N. Sata and Y. Miyamoto, "FGMs Via Self-Propagating High-Temperature Synthesis, Mater. Proc. Report," March/ April 1992.
- [67] T. Fukushima, S. Kuroda and S. Kitahara, "Gradient Coatings Formed by Plasma Twin Torches and Those Properties," *Proc. First Intl. Sym.*, p. 145-150, 1990.
- [68] R. Watanabe, "FGMs Via Powder Spray Forming," *Mater. Proc. Report*, p. 3-4, March/ April 1992.
- [69] . H. Shen, *Functionally Graded Materials Nonlinear Analysis of Plates and Shells*, C. Press, Ed., Taylor & Francis Group, 2009.
- [70] J. Reddy, "mechanics of laminated composite plate and shells Theory and Analysis," 2004.
- [71] . W. L. Arthur and S. Q. Mohamad , *Vibrations of Continuous Systems*, McGraw-Hill, 2011.

Annexes :

---

## Annexe A

Paramètres de simplification cas : « SSSC »

$$\zeta_i, \gamma_i, \nu_i, \theta_i \quad i: 1:4$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_1^2)^2(\beta^2 B_{12} - B_{11}\lambda_1^2) + \omega^2(B_{11}^2 J_1 \lambda_1^2(-\beta^2 + \lambda_1^2) \\ & + \omega^2 J_1(\beta^2(D_{12}I_0 - B_{12}I_1) - D_{11}I_0\lambda_1^2) - \beta^2 A_{11}B_{12}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_1^2)) \\ & + B_{11}(\beta^2 B_{12}J_1(\beta^2 - \lambda_1^2) + \lambda_1^2(\omega^2 J_1 I_1 + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_1^2)))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_2^2)^2(\beta^2 B_{12} - B_{11}\lambda_2^2) + \omega^2(B_{11}^2 J_1 \lambda_2^2(-\beta^2 + \lambda_2^2) \\ & + \omega^2 J_1(\beta^2(D_{12}I_0 - B_{12}I_1) - D_{11}I_0\lambda_2^2) - \beta^2 A_{11}B_{12}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_2^2)) \\ & + B_{11}(\beta^2 B_{12}J_1(\beta^2 - \lambda_2^2) + \lambda_2^2(\omega^2 J_1 I_1 + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_2^2)))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_3 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_3^2)^2(\beta^2 B_{12} - B_{11}\lambda_3^2) + \omega^2(B_{11}^2 J_1 \lambda_3^2(-\beta^2 + \lambda_3^2) \\ & + \omega^2 J_1(\beta^2(D_{12}I_0 - B_{12}I_1) - D_{11}I_0\lambda_3^2) - \beta^2 A_{11}B_{12}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_3^2)) \\ & + B_{11}(\beta^2 B_{12}J_1(\beta^2 - \lambda_3^2) + \lambda_3^2(\omega^2 J_1 I_1 + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_3^2)))))) \end{aligned}$$

$$\zeta_4 = \frac{\beta A_{33}(-B_{11} + B_{12})\lambda_4}{\omega^2 I_0}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_1^2)^2(\beta^2 A_{12} - A_{11}\lambda_1^2) + \omega^2(\beta^2 \omega^2 B_{12} J_1 I_0 \\ & + \beta^2 A_{12}(-\omega^2 J_1 I_1 + B_{11}J_1(\beta^2 - \lambda_1^2) - A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_1^2))) \\ & + \lambda_1^2(-\omega^2 B_{11}J_1 I_0 + A_{11}^2(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_1^2)) + A_{11}J_1(\omega^2 I_1 + B_{11}(-\beta^2 \\ & + \lambda_1^2)))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_2^2)^2(\beta^2 A_{12} - A_{11}\lambda_2^2) + \omega^2(\beta^2 \omega^2 B_{12} J_1 I_0 \\ & + \beta^2 A_{12}(-\omega^2 J_1 I_1 + B_{11}J_1(\beta^2 - \lambda_2^2) - A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_2^2))) \\ & + \lambda_2^2(-\omega^2 B_{11}J_1 I_0 + A_{11}^2(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_2^2)) + A_{11}J_1(\omega^2 I_1 + B_{11}(-\beta^2 \\ & + \lambda_2^2)))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_3^2)^2(\beta^2 A_{12} - A_{11}\lambda_3^2) + \omega^2(\beta^2 \omega^2 B_{12} J_1 I_0 \\ & + \beta^2 A_{12}(-\omega^2 J_1 I_1 + B_{11}J_1(\beta^2 - \lambda_3^2) - A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_3^2))) \\ & + \lambda_3^2(-\omega^2 B_{11}J_1 I_0 + A_{11}^2(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_3^2)) + A_{11}J_1(\omega^2 I_1 + B_{11}(-\beta^2 \\ & + \lambda_3^2)))))) \end{aligned}$$

$$\gamma_4 = \frac{\beta(-A_{11} + A_{12})A_{33}\lambda_4}{\omega^2 I_0}$$

$$v_1 = \frac{\beta(-\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_1^2)^2 + \omega^2(\omega^2 J_1 I_1 + B_{11} J_1(-\beta^2 + \lambda_1^2) + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_1^2))))}{\omega^4 J_1 I_0}$$

$$v_2 = \frac{\beta(-\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_2^2)^2 + \omega^2(\omega^2 J_1 I_1 + B_{11} J_1(-\beta^2 + \lambda_2^2) + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_2^2))))}{\omega^4 J_1 I_0}$$

$$v_3 = \frac{\beta(-\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_3^2)^2 + \omega^2(\omega^2 J_1 I_1 + B_{11} J_1(-\beta^2 + \lambda_3^2) + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_3^2))))}{\omega^4 J_1 I_0}$$

$$v_4 = -\frac{A_{33}\lambda_4}{\omega^2 I_0}$$

$$\theta_1 = \frac{\lambda_1(-\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_1^2)^2 + \omega^2(\omega^2 J_1 I_1 + B_{11} J_1(-\beta^2 + \lambda_1^2) + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_1^2))))}{\omega^4 J_1 I_0}$$

$$\theta_2 = \frac{\lambda_2(-\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_2^2)^2 + \omega^2(\omega^2 J_1 I_1 + B_{11} J_1(-\beta^2 + \lambda_2^2) + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_2^2))))}{\omega^4 J_1 I_0}$$

$$\theta_3 = \frac{\lambda_3(-\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_3^2)^2 + \omega^2(\omega^2 J_1 I_1 + B_{11} J_1(-\beta^2 + \lambda_3^2) + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_3^2))))}{\omega^4 J_1 I_0}$$

$$\theta_4 = -\frac{\beta A_{33}}{\omega^2 I_0}$$

Matrice de la fonction propre :

$$\begin{pmatrix} 0 & \zeta_1 \sin[x\beta] & 0 & \zeta_2 \sin[x\beta] & 0 & \zeta_3 \sin[x\beta] & \zeta_4 \sin[x\beta] & 0 \\ 0 & \gamma_1 \sin[x\beta] & 0 & \gamma_2 \sin[x\beta] & 0 & \gamma_3 \sin[x\beta] & \gamma_4 \sin[x\beta] & 0 \\ 0 & v_1 \cos[x\beta] & 0 & v_2 \cos[x\beta] & 0 & v_3 \cos[x\beta] & v_4 \cos[x\beta] & 0 \\ 0 & \sin[x\beta] & 0 & \sin[x\beta] & 0 & \sin[x\beta] & 0 & 0 \\ \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_1] & \cosh[y\lambda_1] \sin[x\beta] & \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_2] & \cosh[y\lambda_2] \sin[x\beta] & \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_3] & \cosh[y\lambda_3] \sin[x\beta] & 0 & 0 \\ \cosh[y\lambda_1] \sin[x\beta] \lambda_1 & \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_1] \lambda_1 & \cosh[y\lambda_2] \sin[x\beta] \lambda_2 & \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_2] \lambda_2 & \cosh[y\lambda_3] \sin[x\beta] \lambda_3 & \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_3] \lambda_3 & 0 & 0 \\ v_1 \cos[x\beta] \sinh[y\lambda_1] & v_1 \cosh[y\lambda_1] \cos[x\beta] & v_2 \cos[x\beta] \sinh[y\lambda_2] & v_2 \cosh[y\lambda_2] \cos[x\beta] & v_3 \cos[x\beta] \sinh[y\lambda_3] & v_3 \cosh[y\lambda_3] \cos[x\beta] & v_4 \cosh[y\lambda_4] \cos[x\beta] & v_4 \cos[x\beta] \sinh[y\lambda_4] \\ \theta_1 \cosh[y\lambda_1] \sin[x\beta] & \theta_1 \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_1] & \theta_2 \cosh[y\lambda_2] \sin[x\beta] & \theta_2 \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_2] & \theta_3 \cosh[y\lambda_3] \sin[x\beta] & \theta_3 \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_3] & \theta_4 \sin[x\beta] \sinh[y\lambda_4] & \theta_4 \cosh[y\lambda_4] \sin[x\beta] \end{pmatrix}$$

Modes propre :

$$C_1 = 1$$

$$C_2 = 0$$

$$C_3 = \frac{\text{Cosh}[y\lambda_1]\text{Sinh}[y\lambda_3]\lambda_1 - \text{Cosh}[y\lambda_3]\text{Sinh}[y\lambda_1]\lambda_3}{\text{Cosh}[y\lambda_2]\text{Sinh}[y\lambda_3]\lambda_2 - \text{Cosh}[y\lambda_3]\text{Sinh}[y\lambda_2]\lambda_3}$$

$$C_4 = 01$$

$$C_5 = \frac{\text{Cosh}[y\lambda_1]\text{Sinh}[y\lambda_2]\lambda_1 - \text{Cosh}[y\lambda_2]\text{Sinh}[y\lambda_1]\lambda_2}{-\text{Cosh}[y\lambda_2]\text{Sinh}[y\lambda_3]\lambda_2 + \text{Cosh}[y\lambda_3]\text{Sinh}[y\lambda_2]\lambda_3}$$

$$C_6 =$$

$$C_7 =$$

$$C_8 = 1/((\text{Cosh}[y\lambda_2]\text{Sinh}[y\lambda_3]\lambda_2 - \text{Cosh}[y\lambda_3]\text{Sinh}[y\lambda_2]\lambda_3)v_8) (\text{Csch}[y\lambda_2]\text{Csch}[y\lambda_4]\text{Sec}[x\beta](\text{Cos}[x\beta]\text{Cosh}[y\lambda_2]\text{Sinh}[y\lambda_1]\text{Sinh}[y\lambda_3]\lambda_1 v_8 - \text{Cos}[x\beta]\text{Cosh}[y\lambda_3]\text{Sinh}[y\lambda_1]\text{Sinh}[y\lambda_2]^2\lambda_3 v_1 - \text{Cos}[x\beta]\text{Cosh}[y\lambda_1]\text{Sinh}[y\lambda_2]^2\text{Sinh}[y\lambda_3]\lambda_1 v_3 + \text{Cos}[x\beta]\text{Cosh}[y\lambda_3]\text{Sinh}[y\lambda_1]\text{Sinh}[y\lambda_2]^2\lambda_3 v_3 + \text{Cos}[x\beta]\text{Cosh}[y\lambda_1]\text{Sinh}[y\lambda_2]^2\text{Sinh}[y\lambda_3]\lambda_1 v_5 - \text{Cos}[x\beta]\text{Cosh}[y\lambda_2]\text{Sinh}[y\lambda_1]\text{Sinh}[y\lambda_2]\text{Sinh}[y\lambda_3]\lambda_2 v_5))$$

## Annexe B

Paramètres de simplification, cas « SFSF » :

$$\zeta_i, \gamma_i, \nu_i, \theta_i \quad i: 1:4$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_1^2)^2(\beta^2 B_{12} - B_{11}\lambda_1^2) + \omega^2(B_{11}^2 J_1 \lambda_1^2(-\beta^2 + \lambda_1^2) \\ & + \omega^2 J_1(\beta^2(D_{12}I_0 - B_{12}I_1) - D_{11}I_0 \lambda_1^2) - \beta^2 A_{11} B_{12}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_1^2)) \\ & + B_{11}(\beta^2 B_{12} J_1(\beta^2 - \lambda_1^2) + \lambda_1^2(\omega^2 J_1 I_1 + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_1^2)))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_2 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_2^2)^2(\beta^2 B_{12} - B_{11}\lambda_2^2) + \omega^2(B_{11}^2 J_1 \lambda_2^2(-\beta^2 + \lambda_2^2) \\ & + \omega^2 J_1(\beta^2(D_{12}I_0 - B_{12}I_1) - D_{11}I_0 \lambda_2^2) - \beta^2 A_{11} B_{12}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_2^2)) \\ & + B_{11}(\beta^2 B_{12} J_1(\beta^2 - \lambda_2^2) + \lambda_2^2(\omega^2 J_1 I_1 + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_2^2)))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_3 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_3^2)^2(\beta^2 B_{12} - B_{11}\lambda_3^2) + \omega^2(B_{11}^2 J_1 \lambda_3^2(-\beta^2 + \lambda_3^2) \\ & + \omega^2 J_1(\beta^2(D_{12}I_0 - B_{12}I_1) - D_{11}I_0 \lambda_3^2) - \beta^2 A_{11} B_{12}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_3^2)) \\ & + B_{11}(\beta^2 B_{12} J_1(\beta^2 - \lambda_3^2) + \lambda_3^2(\omega^2 J_1 I_1 + A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_3^2)))))) \end{aligned}$$

$$\zeta_4 = \frac{\beta A_{33}(-B_{11} + B_{12})\lambda_4}{\omega^2 I_0}$$

$$\begin{aligned} \gamma_1 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_1^2)^2(\beta^2 A_{12} - A_{11}\lambda_1^2) + \omega^2(\beta^2 \omega^2 B_{12} J_1 I_0 + \beta^2 A_{12}(-\omega^2 J_1 I_1 \\ & + B_{11} J_1(\beta^2 - \lambda_1^2) - A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_1^2))) + \lambda_1^2(-\omega^2 B_{11} J_1 I_0 + A_{11}^2(I_0 \\ & + J_2(\beta^2 - \lambda_1^2)) + A_{11} J_1(\omega^2 I_1 + B_{11}(-\beta^2 + \lambda_1^2)))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_2 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_2^2)^2(\beta^2 A_{12} - A_{11}\lambda_2^2) + \omega^2(\beta^2 \omega^2 B_{12} J_1 I_0 + \beta^2 A_{12}(-\omega^2 J_1 I_1 \\ & + B_{11} J_1(\beta^2 - \lambda_2^2) - A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_2^2))) + \lambda_2^2(-\omega^2 B_{11} J_1 I_0 + A_{11}^2(I_0 \\ & + J_2(\beta^2 - \lambda_2^2)) + A_{11} J_1(\omega^2 I_1 + B_{11}(-\beta^2 + \lambda_2^2)))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 = \frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} & (\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_3^2)^2(\beta^2 A_{12} - A_{11}\lambda_3^2) + \omega^2(\beta^2 \omega^2 B_{12} J_1 I_0 + \beta^2 A_{12}(-\omega^2 J_1 I_1 \\ & + B_{11} J_1(\beta^2 - \lambda_3^2) - A_{11}(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_3^2))) + \lambda_3^2(-\omega^2 B_{11} J_1 I_0 + A_{11}^2(I_0 \\ & + J_2(\beta^2 - \lambda_3^2)) + A_{11} J_1(\omega^2 I_1 + B_{11}(-\beta^2 + \lambda_3^2)))))) \end{aligned}$$

$$\gamma_4 = \frac{\beta(-A_{11} + A_{12})A_{33}\lambda_4}{\omega^2 I_0}$$

$$v_1 = -2\beta B_{33}\lambda_1$$

$$v_2 = -2\beta B_{33}\lambda_2$$

$$v_3 = -2\beta B_{33}\lambda_3$$

$$v_4 = \frac{\beta(-A_{11} + A_{12})A_{33}\lambda_4}{\omega^2 I_0}$$

$$\begin{aligned} \theta_1 = & -\frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} \lambda_1 (-\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_1^2)^2(\beta^2 B_{12} - \omega^2 I_1 - B_{11}\lambda_1^2) + \omega^2(B_{11}^2 J_1 \lambda_1^2(\beta^2 - \lambda_1^2) \\ & + \omega^2 J_1(-\beta^2 D_{12} I_0 - 4\beta^2 D_{33} I_0 + \beta^2 B_{12} I_1 - \omega^2 L_1^2 + \omega^2 I_0 I_2 + D_{11} I_0 \lambda_1^2) \\ & + A_{11}(\beta^2 B_{12} - \omega^2 I_1)(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_1^2)) + B_{11}(\omega^2 J_1 I_1(\beta^2 - 2\lambda_1^2) \\ & + \beta^2 B_{12} J_1(-\beta^2 + \lambda_1^2) + A_{11}\lambda_1^2(-I_0 + J_2(-\beta^2 + \lambda_1^2)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = & -\frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} \lambda_2 (-\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_2^2)^2(\beta^2 B_{12} - \omega^2 I_1 - B_{11}\lambda_2^2) + \omega^2(B_{11}^2 J_1 \lambda_2^2(\beta^2 - \lambda_2^2) \\ & + \omega^2 J_1(-\beta^2 D_{12} I_0 - 4\beta^2 D_{33} I_0 + \beta^2 B_{12} I_1 - \omega^2 L_1^2 + \omega^2 I_0 I_2 + D_{11} I_0 \lambda_2^2) \\ & + A_{11}(\beta^2 B_{12} - \omega^2 I_1)(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_2^2)) + B_{11}(\omega^2 J_1 I_1(\beta^2 - 2\lambda_2^2) \\ & + \beta^2 B_{12} J_1(-\beta^2 + \lambda_2^2) + A_{11}\lambda_2^2(-I_0 + J_2(-\beta^2 + \lambda_2^2)))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_3 = & -\frac{1}{\omega^4 J_1 I_0} \lambda_3 (-\widehat{D}A_{11}(\beta^2 - \lambda_3^2)^2(\beta^2 B_{12} - \omega^2 I_1 - B_{11}\lambda_3^2) + \omega^2(B_{11}^2 J_1 \lambda_3^2(\beta^2 - \lambda_3^2) \\ & + \omega^2 J_1(-\beta^2 D_{12} I_0 - 4\beta^2 D_{33} I_0 + \beta^2 B_{12} I_1 - \omega^2 L_1^2 + \omega^2 I_0 I_2 + D_{11} I_0 \lambda_3^2) \\ & + A_{11}(\beta^2 B_{12} - \omega^2 I_1)(I_0 + J_2(\beta^2 - \lambda_3^2)) + B_{11}(\omega^2 J_1 I_1(\beta^2 - 2\lambda_3^2) \\ & + \beta^2 B_{12} J_1(-\beta^2 + \lambda_3^2) + A_{11}\lambda_3^2(-I_0 + J_2(-\beta^2 + \lambda_3^2)))) \end{aligned}$$

$$\theta_4 = -\frac{\beta A_{33}(\omega^2 I_1 + (B_{11} - B_{12})\lambda_4^2)}{\omega^2 I_0}$$

Matrice de la fonction propre (Modes Symétriques) :

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \text{Cosh}[y\lambda_1] \text{Sin}[x\beta] & \zeta_2 \text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sin}[x\beta] & \zeta_3 \text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sin}[x\beta] & \zeta_4 \text{Sin}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_4] \\ \gamma_1 \text{Cosh}[y\lambda_1] \text{Sin}[x\beta] & \gamma_2 \text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sin}[x\beta] & \gamma_3 \text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sin}[x\beta] & \gamma_4 \text{Sin}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_4] \\ \nu_1 \text{Cos}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_1] & \nu_2 \text{Cos}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_2] & \nu_3 \text{Cos}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_3] & 0 \\ \theta_1 \text{Sin}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_1] & \theta_2 \text{Sin}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_2] & \theta_3 \text{Sin}[x\beta] \text{Sinh}[y\lambda_3] & \theta_4 \text{Cosh}[y\lambda_4] \text{Sin}[x\beta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

Matrice de la fonction propre (Modes Antisymétriques) :

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \text{Sinh}[y\lambda_1] \text{Sin}[x\beta] & \zeta_2 \text{Sinh}[y\lambda_2] \text{Sin}[x\beta] & \zeta_3 \text{Sinh}[y\lambda_3] \text{Sin}[x\beta] & \zeta_4 \text{Sin}[x\beta] \text{Cosh}[y\lambda_4] \\ \gamma_1 \text{Sinh}[y\lambda_1] \text{Sin}[x\beta] & \gamma_2 \text{Sinh}[y\lambda_2] \text{Sin}[x\beta] & \gamma_3 \text{Sinh}[y\lambda_3] \text{Sin}[x\beta] & \gamma_4 \text{Sin}[x\beta] \text{Cosh}[y\lambda_4] \\ \nu_1 \text{Cos}[x\beta] \text{Cosh}[y\lambda_1] & \nu_2 \text{Cos}[x\beta] \text{Cosh}[y\lambda_2] & \nu_3 \text{Cos}[x\beta] \text{Cosh}[y\lambda_3] & 0 \\ \theta_1 \text{Sin}[x\beta] \text{Cosh}[y\lambda_1] & \theta_2 \text{Sin}[x\beta] \text{Cosh}[y\lambda_2] & \theta_3 \text{Sin}[x\beta] \text{Cosh}[y\lambda_3] & \theta_4 \text{Sinh}[y\lambda_4] \text{Sin}[x\beta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix}$$

Modes Propres Symétriques :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sinh}[y\lambda_1] (-\gamma_4 \zeta_3 + \gamma_3 \zeta_4) \nu_1 + \text{Cosh}[y\lambda_1] \text{Sinh}[y\lambda_3] (\gamma_4 \zeta_1 - \gamma_1 \zeta_4) \nu_3}{\text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sinh}[y\lambda_2] (-\gamma_4 \zeta_3 + \gamma_3 \zeta_4) \nu_2 + \text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sinh}[y\lambda_3] (\gamma_4 \zeta_2 - \gamma_2 \zeta_4) \nu_3} \\ \frac{\text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sinh}[y\lambda_1] (-\gamma_4 \zeta_2 + \gamma_2 \zeta_4) \nu_1 + \text{Cosh}[y\lambda_1] \text{Sinh}[y\lambda_2] (\gamma_4 \zeta_1 - \gamma_1 \zeta_4) \nu_2}{\text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sinh}[y\lambda_2] (\gamma_4 \zeta_3 - \gamma_3 \zeta_4) \nu_2 + \text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sinh}[y\lambda_3] (-\gamma_4 \zeta_2 + \gamma_2 \zeta_4) \nu_3} \\ \frac{\text{Csch}[y\lambda_4] (\text{Cosh}[y\lambda_3] (\text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sinh}[y\lambda_1] (-\gamma_3 \zeta_2 + \gamma_2 \zeta_3) \nu_1 + \text{Cosh}[y\lambda_1] \text{Sinh}[y\lambda_2] (\gamma_3 \zeta_1 - \gamma_1 \zeta_3) \nu_2) + \text{Cosh}[y\lambda_1] \text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sinh}[y\lambda_3] (-\gamma_2 \zeta_1 + \gamma_1 \zeta_2) \nu_3)}{\text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sinh}[y\lambda_2] (-\gamma_4 \zeta_3 + \gamma_3 \zeta_4) \nu_2 + \text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sinh}[y\lambda_3] (\gamma_4 \zeta_2 - \gamma_2 \zeta_4) \nu_3} \end{pmatrix}$$

Modes Propres Antisymétriques :

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\text{Cosh}[y\lambda_1] \text{Sinh}[y\lambda_3] (-\gamma_4 \zeta_3 + \gamma_3 \zeta_4) \nu_1 + \text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sinh}[y\lambda_1] (\gamma_4 \zeta_1 - \gamma_1 \zeta_4) \nu_3}{\text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sinh}[y\lambda_3] (-\gamma_4 \zeta_3 + \gamma_3 \zeta_4) \nu_2 + \text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sinh}[y\lambda_2] (\gamma_4 \zeta_2 - \gamma_2 \zeta_4) \nu_3} \\ \frac{\text{Cosh}[y\lambda_1] \text{Sinh}[y\lambda_2] (-\gamma_4 \zeta_2 + \gamma_2 \zeta_4) \nu_1 + \text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sinh}[y\lambda_1] (\gamma_4 \zeta_1 - \gamma_1 \zeta_4) \nu_2}{\text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sinh}[y\lambda_3] (\gamma_4 \zeta_3 - \gamma_3 \zeta_4) \nu_2 + \text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sinh}[y\lambda_2] (-\gamma_4 \zeta_2 + \gamma_2 \zeta_4) \nu_3} \\ \frac{\text{Sech}[y\lambda_4] (\text{Sinh}[y\lambda_3] (\text{Cosh}[y\lambda_1] \text{Sinh}[y\lambda_2] (-\gamma_3 \zeta_2 + \gamma_2 \zeta_3) \nu_1 + \text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sinh}[y\lambda_1] (\gamma_3 \zeta_1 - \gamma_1 \zeta_3) \nu_2) + \text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sinh}[y\lambda_1] \text{Sinh}[y\lambda_2] (-\gamma_2 \zeta_1 + \gamma_1 \zeta_2) \nu_3)}{\text{Cosh}[y\lambda_2] \text{Sinh}[y\lambda_3] (-\gamma_4 \zeta_3 + \gamma_3 \zeta_4) \nu_2 + \text{Cosh}[y\lambda_3] \text{Sinh}[y\lambda_2] (\gamma_4 \zeta_2 - \gamma_2 \zeta_4) \nu_3} \end{pmatrix}$$

## Annexe C

### Modes Propres Symétriques : cas « SCSC » :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = \frac{\text{Cosh}[0.5\lambda_3]\text{Sinh}[0.5\lambda_1]\lambda_1 - \text{Cosh}[0.5\lambda_1]\text{Sinh}[0.5\lambda_3]\lambda_3}{\text{Cosh}[0.5\lambda_3]\text{Sinh}[0.5\lambda_2]\lambda_2 - \text{Cosh}[0.5\lambda_2]\text{Sinh}[0.5\lambda_3]\lambda_3} \\ C_3 = \frac{\text{Cosh}[0.5]\text{Sinh}[0.5\lambda_1]\lambda_1 - \text{Cosh}[0.5\lambda_1]\text{Sinh}[0.5\lambda_2]\lambda_2}{-\text{Cosh}[0.5\lambda_3]\text{Sinh}[0.5\lambda_2]\lambda_2 + \text{Cosh}[0.5\lambda_2]\text{Sinh}[0.5\lambda_3]\lambda_3} \\ C_4 = \frac{\omega^2 \text{Sech}[0.5\lambda_4]L_0(\text{Cosh}[0.5\lambda_3]\text{Sinh}[y\lambda_1]\text{Sinh}[0.5\lambda_2](-\zeta_1 + \zeta_2)\lambda_1\lambda_2 + \text{Sinh}[0.5\lambda_3](\text{Cosh}[0.5\lambda_2]\text{Sinh}[0.5\lambda_1](\zeta_1 - \zeta_3)\lambda_1 + \text{Cosh}[0.5\lambda_1]\text{Sinh}[0.5\lambda_2](-\zeta_2 + \zeta_3)\lambda_2)\lambda_3)}{\beta A_{33}(\text{Cosh}[0.5\lambda_3]\text{Sinh}[0.5\lambda_2]\lambda_2 - \text{Cosh}[0.5\lambda_2]\text{Sinh}[0.5\lambda_3]\lambda_3)} \end{array} \right.$$

## Annexe D

Les tableaux. D1-7 donnent la variation des charges critiques de flambement pour les six différentes conditions aux limites d'une plaque FGM en  $Al/Al_2O_3$  pour quatre modes de chargements, l'élancement, le gradient de matériaux et la forme de la plaque.

Les tableaux. D8-10 montrent la variation des paramètres fréquentiel  $\beta_c$  et  $\beta_m$  des plaques FGM « SSSS » et « SCSC » de  $Al/Al_2O_3$  en fonction de l'élancement, l'exposant de gradient et la forme de la plaque.

Table D 1: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SSSS » ( $h/a=0.01$ ) de  $Al/Al_2O_3$ .

$p$	0				1				2			
	$(k_1, k_2)$				$(k_1, k_2)$				$(k_1, k_2)$			
$a/b$	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)
0,5	2,14655	5,49516	1,71724	2,86206	1,06993	2,73901	0,85594	1,42657	0,83488	2,13730	0,66791	1,11318
1	1,37379	1,37379	0,68690	2,86206	0,68475	0,68475	0,34238	1,42657	0,53433	0,53433	0,26716	1,11318
1,5	1,49066	0,71658	0,49609	2,86206	0,74300	0,35717	0,24727	1,42657	0,57978	0,27871	0,19295	1,11318
2	1,37379	0,53664	0,42931	2,86206	0,68475	0,26748	0,21399	1,42657	0,53433	0,20872	0,16698	1,11318
2,5	1,41997	0,46214	0,39840	2,79020	0,70777	0,23035	0,19858	1,39075	0,55228	0,17975	0,15495	1,08523
3	1,37379	0,42401	0,38161	2,75712	0,68475	0,21134	0,19021	1,37426	0,53433	0,16492	0,14842	1,07236
3,5	1,39843	0,40181	0,37148	2,74825	0,69704	0,20028	0,18516	1,36984	0,54391	0,15628	0,14449	1,06891
4	1,37379	0,38772	0,36491	2,74823	0,68475	0,19326	0,18189	1,36983	0,53433	0,15080	0,14193	1,06890
4,5	1,38910	0,37821	0,36041	2,75168	0,69238	0,18851	0,17964	1,37155	0,54028	0,14710	0,14018	1,07024
5	1,37379	0,37147	0,35719	2,75641	0,68475	0,18516	0,17804	1,37391	0,53433	0,14448	0,13892	1,07209
5,5	1,38422	0,36653	0,35480	2,76151	0,68995	0,18269	0,17685	1,37645	0,53838	0,14256	0,13800	1,07407
6	1,37379	0,36279	0,35299	2,75712	0,68475	0,18083	0,17594	1,37426	0,53433	0,14111	0,13729	1,07236
6,5	1,38135	0,35990	0,35158	2,75100	0,68852	0,17939	0,17524	1,37121	0,53727	0,13998	0,13674	1,06998
7	1,37379	0,35761	0,35046	2,74825	0,68475	0,17825	0,17468	1,36984	0,53433	0,13909	0,13631	1,06891
7,5	1,37952	0,35577	0,34955	2,74759	0,68761	0,17733	0,17423	1,36951	0,53655	0,13837	0,13596	1,06865
8	1,37379	0,35426	0,34881	2,74823	0,68475	0,17658	0,17386	1,36983	0,53433	0,13779	0,13567	1,06890
8,5	1,37828	0,35302	0,34820	2,74970	0,68699	0,17596	0,17356	1,37056	0,53607	0,13730	0,13543	1,06947
9	1,37379	0,35198	0,34769	2,75168	0,68475	0,17544	0,17330	1,37155	0,53433	0,13690	0,13523	1,07024
9,5	1,37741	0,35110	0,34725	2,75258	0,68656	0,17500	0,17309	1,37200	0,53573	0,13656	0,13506	1,07059
10	1,37379	0,35035	0,34688	2,74978	0,68475	0,17463	0,17290	1,37060	0,53433	0,13627	0,13492	1,06951

Table D 2: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SSSS » ( $h/a=0.05$ ) de  $Al/Al_2O_3$ .

$p$	0				1				2					
	$a/b$	$(k_1, k_2)$				$a/b$	$(k_1, k_2)$				$a/b$	$(k_1, k_2)$		
	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)		
0,5	268,3186	686,8955	214,6549	357,7581	133,7409	342,3766	106,9927	178,3211	104,3604	267,1627	83,4884	139,1473		
1	171,7239	171,7239	85,8619	357,7581	85,5941	85,5941	42,7971	178,3211	66,7907	66,7907	33,3953	139,1473		
1,5	186,3323	89,5720	62,0114	357,7581	92,8756	44,6463	30,9090	178,3211	72,4725	34,8384	24,1189	139,1473		
2	171,7239	67,0796	53,6637	357,7581	85,5941	33,4352	26,7482	178,3211	66,7907	26,0901	20,8721	139,1473		
2,5	177,4957	57,7679	49,7999	348,7756	88,4711	28,7939	24,8223	173,8439	69,0356	22,4684	19,3693	135,6536		
3	171,7239	53,0012	47,7011	344,6403	85,5941	26,4179	23,7762	171,7827	66,7907	20,6144	18,5530	134,0452		
3,5	174,8041	50,2262	46,4355	343,5308	87,1294	25,0348	23,1454	171,2297	67,9887	19,5351	18,0607	133,6137		
4	171,7239	48,4650	45,6142	343,5291	85,5941	24,1569	22,7359	171,2288	66,7907	18,8501	17,7413	133,6130		
4,5	173,6372	47,2758	45,0510	343,9596	86,5478	23,5642	22,4553	171,4434	67,5349	18,3875	17,5222	133,7804		
5	171,7239	46,4341	44,6482	344,5517	85,5941	23,1447	22,2545	171,7385	66,7907	18,0602	17,3656	134,0107		
5,5	173,0273	45,8163	44,3502	345,1887	86,2438	22,8367	22,1059	172,0561	67,2976	17,8199	17,2497	134,2585		
6	171,7239	45,3492	44,1235	344,6403	85,5941	22,6039	21,9929	171,7827	66,7907	17,6382	17,1615	134,0452		
6,5	172,6687	44,9873	43,9471	343,8744	86,0651	22,4235	21,9050	171,4009	67,1582	17,4974	17,0929	133,7473		
7	171,7239	44,7011	43,8071	343,5308	85,5941	22,2809	21,8352	171,2297	66,7907	17,3862	17,0384	133,6137		
7,5	172,4401	44,4710	43,6942	343,4482	85,9512	22,1661	21,7790	171,1885	67,0693	17,2966	16,9945	133,5815		
8	171,7239	44,2830	43,6018	343,5291	85,5941	22,0725	21,7329	171,2288	66,7907	17,2235	16,9586	133,6130		
8,5	172,2855	44,1276	43,5252	343,7125	85,8741	21,9950	21,6947	171,3203	67,0091	17,1631	16,9288	133,6843		
9	171,7239	43,9975	43,4610	343,9596	85,5941	21,9302	21,6627	171,4434	66,7907	17,1125	16,9038	133,7804		
9,5	172,1761	43,8876	43,4067	344,0722	85,8195	21,8754	21,6356	171,4995	66,9666	17,0698	16,8827	133,8242		
10	171,7239	43,7939	43,3603	343,7226	85,5941	21,8286	21,6125	171,3253	66,7907	17,0333	16,8646	133,6883		

Table D 3: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SCSC » ( $h/a=0.01$ ) de  $Al/Al_2O_3$ 

$p$	0				1				2			
	$(k_1, k_2)$											
$a/b$	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)
0,5	2,64155	7,24678	2,03466	3,70512	1,31666	3,61209	1,01416	1,84678	1,02741	2,81858	0,79137	1,44108
1	2,64155 <sup>a</sup>	2,31592	1,31537	3,70509 <sup>a</sup>	1,31666 <sup>a</sup>	1,15435	0,65563	1,84677 <sup>a</sup>	1,02741 <sup>a</sup>	0,90076	0,51160	1,44106 <sup>a</sup>
1,5	2,44395 <sup>a</sup>	1,72987	1,29397	3,70509 <sup>a</sup>	1,21816 <sup>a</sup>	0,86224	0,64497	1,84677 <sup>a</sup>	0,95056 <sup>a</sup>	0,67282	0,50328	1,44107 <sup>a</sup>
2	2,39438 <sup>a</sup>	1,56160	1,31357	3,70509 <sup>a</sup>	1,19346 <sup>a</sup>	0,77837	0,65474	1,84677 <sup>a</sup>	0,93128 <sup>a</sup>	0,60737	0,51090	1,44106 <sup>a</sup>
2,5	2,40377 <sup>a</sup>	1,49029	1,29090	3,70509 <sup>a</sup>	1,19814 <sup>a</sup>	0,74282	0,64344	1,84677 <sup>a</sup>	0,93493 <sup>a</sup>	0,57964	0,50209	1,44107 <sup>a</sup>
3	2,42310 <sup>a</sup>	1,45329	1,29397	3,70509 <sup>a</sup>	1,20777 <sup>a</sup>	0,72438	0,64497	1,84677 <sup>a</sup>	0,94245 <sup>a</sup>	0,56525	0,50328	1,44107 <sup>a</sup>
3,5	2,40441 <sup>a</sup>	1,43158	1,29407	3,70509 <sup>a</sup>	1,19846 <sup>a</sup>	0,71356	0,64502	1,84677 <sup>a</sup>	0,93518 <sup>a</sup>	0,55680	0,50332	1,44107 <sup>a</sup>
4	2,39438 <sup>a</sup>	1,41773	1,29043	3,70509 <sup>a</sup>	1,19346 <sup>a</sup>	0,70665	0,64320	1,84677 <sup>a</sup>	0,93128 <sup>a</sup>	0,55141	0,50190	1,44107 <sup>a</sup>
4,5	2,39649 <sup>a</sup>	1,40834	1,29397	3,70509 <sup>a</sup>	1,19451 <sup>a</sup>	0,70197	0,64497	1,84677 <sup>a</sup>	0,93210 <sup>a</sup>	0,54776	0,50328	1,44107 <sup>a</sup>
5	2,40377 <sup>a</sup>	1,40168	1,29090	3,70509 <sup>a</sup>	1,19814 <sup>a</sup>	0,69865	0,64344	1,84677 <sup>a</sup>	0,93493 <sup>a</sup>	0,54517	0,50209	1,44107 <sup>a</sup>
5,5	2,39899 <sup>a</sup>	1,39678	1,29089	3,70509 <sup>a</sup>	1,19575 <sup>a</sup>	0,69621	0,64343	1,84677 <sup>a</sup>	0,93307 <sup>a</sup>	0,54327	0,50208	1,44107 <sup>a</sup>
6	2,39438 <sup>a</sup>	1,39307	1,29240	3,70509 <sup>a</sup>	1,19346 <sup>a</sup>	0,69436	0,64418	1,84677 <sup>a</sup>	0,93128 <sup>a</sup>	0,54182	0,50267	1,44107 <sup>a</sup>
6,5	2,39499 <sup>a</sup>	1,39019	1,29037	3,70509 <sup>a</sup>	1,19376 <sup>a</sup>	0,69293	0,64317	1,84677 <sup>a</sup>	0,93151 <sup>a</sup>	0,54070	0,50188	1,44107 <sup>a</sup>
7	2,39855 <sup>a</sup>	1,38792	1,29132	3,70509 <sup>a</sup>	1,19553 <sup>a</sup>	0,69179	0,64365	1,84677 <sup>a</sup>	0,93290 <sup>a</sup>	0,53982	0,50225	1,44107 <sup>a</sup>
7,5	2,39717 <sup>a</sup>	1,38608	1,29090	3,70509 <sup>a</sup>	1,19485 <sup>a</sup>	0,69088	0,64344	1,84677 <sup>a</sup>	0,93236 <sup>a</sup>	0,53911	0,50209	1,44107 <sup>a</sup>
8	2,39438 <sup>a</sup>	1,38459	1,29043	3,70431 <sup>a</sup>	1,19346 <sup>a</sup>	0,69013	0,64320	1,84638 <sup>a</sup>	0,93128 <sup>a</sup>	0,53852	0,50190	1,44076 <sup>a</sup>
8,5	2,39449 <sup>a</sup>	1,38335	1,29167	3,70281 <sup>a</sup>	1,19351 <sup>a</sup>	0,68952	0,64382	1,84563 <sup>a</sup>	0,93132 <sup>a</sup>	0,53804	0,50239	1,44018 <sup>a</sup>
9	2,39649 <sup>a</sup>	1,38231	1,29044	3,70163 <sup>a</sup>	1,19451 <sup>a</sup>	0,68900	0,64321	1,84504 <sup>a</sup>	0,93210 <sup>a</sup>	0,53764	0,50191	1,43972 <sup>a</sup>
9,5	2,39631 <sup>a</sup>	1,38143	1,29065	3,70069 <sup>a</sup>	1,19442 <sup>a</sup>	0,68856	0,64331	1,84457 <sup>a</sup>	0,93203 <sup>a</sup>	0,53730	0,50199	1,43935 <sup>a</sup>
10	2,39438 <sup>a</sup>	1,38069	1,29090	3,69994 <sup>a</sup>	1,19346 <sup>a</sup>	0,68819	0,64344	1,84420 <sup>a</sup>	0,93128 <sup>a</sup>	0,53701	0,50209	1,43906 <sup>a</sup>

Table D 4: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SF/SF » ( $h/a=0.01$ ) de  $Al/Al_2O_3$ 

$p$	0				1				2			
	$(k_1, k_2)$				$(k_1, k_2)$				$(k_1, k_2)$			
$a/b$	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)
0,5	1,33692	3,10571	1,30852	1,34622	0,66637	1,54801	0,65222	0,67101	0,51998	1,20794	0,50894	0,52360
1	0,32707	0,70164	0,32016	0,33042	0,16302	0,34973	0,15958	0,16469	0,12721	0,27290	0,12453	0,12851
1,5	0,14316	0,26185	0,14082	0,14463	0,07136	0,13052	0,07019	0,07209	0,05568	0,10185	0,05477	0,05625
2	0,07976	0,13584	0,07880	0,08046	0,03976	0,06771	0,03928	0,04010	0,03102	0,05283	0,03065	0,03129
2,5	0,05074	0,08340	0,05029	0,05110	0,02529	0,04157	0,02507	0,02547	0,01974	0,03244	0,01956	0,01988
3	0,03510	0,05656	0,03487	0,03530	0,01750	0,02819	0,01738	0,01760	0,01365	0,02200	0,01356	0,01373
3,5	0,02572	0,04095	0,02559	0,02584	0,01282	0,02041	0,01276	0,01288	0,01001	0,01593	0,00995	0,01005
4	0,01966	0,03105	0,01958	0,01973	0,00980	0,01548	0,00976	0,00984	0,00765	0,01208	0,00762	0,00768
4,5	0,01551	0,02437	0,01546	0,01556	0,00773	0,01215	0,00771	0,00776	0,00603	0,00948	0,00601	0,00605
5	0,01256	0,01964	0,01252	0,01259	0,00626	0,00979	0,00624	0,00627	0,00488	0,00764	0,00487	0,00490
5,5	0,01037	0,01618	0,01035	0,01039	0,00517	0,00806	0,00516	0,00518	0,00403	0,00629	0,00402	0,00404
6	0,00871	0,01355	0,00869	0,00872	0,00434	0,00676	0,00433	0,00435	0,00339	0,00527	0,00338	0,00339
6,5	0,00742	0,01152	0,00740	0,00743	0,00370	0,00574	0,00369	0,00370	0,00288	0,00448	0,00288	0,00289
7	0,00639	0,00992	0,00638	0,00640	0,00319	0,00494	0,00318	0,00319	0,00249	0,00386	0,00248	0,00249
7,5	0,00557	0,00863	0,00556	0,00557	0,00277	0,00430	0,00277	0,00278	0,00217	0,00336	0,00216	0,00217
8	0,00489	0,00758	0,00489	0,00490	0,00244	0,00378	0,00244	0,00244	0,00190	0,00295	0,00190	0,00190
8,5	0,00433	0,00670	0,00433	0,00434	0,00216	0,00334	0,00216	0,00216	0,00169	0,00261	0,00168	0,00169
9	0,00386	0,00598	0,00386	0,00387	0,00193	0,00298	0,00192	0,00193	0,00150	0,00232	0,00150	0,00150
9,5	0,00347	0,00536	0,00346	0,00347	0,00173	0,00267	0,00173	0,00173	0,00135	0,00208	0,00135	0,00135
10	0,00313	0,00483	0,00313	0,00313	0,00156	0,00241	0,00156	0,00156	0,00122	0,00188	0,00122	0,00122

Table D 5: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SSSC » ( $h/a=0.01$ ) de  $Al/Al_2O_3$ .

$p$	0				1				2			
	$(k_1, k_2)$											
$a/b$	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)
0,5	2,35370	5,82033	1,84256	3,22520	1,17318	2,90109	0,91841	1,60757	0,91545	2,26377	0,71665	1,25442
1	1,97146	1,66474	0,91450	3,22520 <sup>a</sup>	0,98266	0,82978	0,45582	1,60757 <sup>a</sup>	0,76678	0,64749	0,35569	1,25442 <sup>a</sup>
1,5	1,86533 <sup>a</sup>	1,06300	0,77870	3,22520 <sup>a</sup>	0,92976 <sup>a</sup>	0,52984	0,38814	1,60757 <sup>a</sup>	0,72551 <sup>a</sup>	0,41345	0,30287	1,25442 <sup>a</sup>
2	1,92523 <sup>a</sup>	0,89180	0,74017	3,22520 <sup>a</sup>	0,95961 <sup>a</sup>	0,44451	0,36893	1,60757 <sup>a</sup>	0,74880 <sup>a</sup>	0,34686	0,28788	1,25442 <sup>a</sup>
2,5	1,86258 <sup>a</sup>	0,81967	0,72481	3,22520 <sup>a</sup>	0,92838 <sup>a</sup>	0,40856	0,36127	1,60757 <sup>a</sup>	0,72444 <sup>a</sup>	0,31880	0,28191	1,25442 <sup>a</sup>
3	1,86533 <sup>a</sup>	0,78238	0,71726	3,22520 <sup>a</sup>	0,92976 <sup>a</sup>	0,38997	0,35751	1,60757 <sup>a</sup>	0,72551 <sup>a</sup>	0,30430	0,27897	1,25442 <sup>a</sup>
3,5	1,87739	0,76055	0,71302	3,22520 <sup>a</sup>	0,93577 <sup>a</sup>	0,37909	0,35540	1,60757 <sup>a</sup>	0,73020 <sup>a</sup>	0,29581	0,27732	1,25442 <sup>a</sup>
4	1,85802	0,74663	0,71040	3,22520 <sup>a</sup>	0,92611 <sup>a</sup>	0,37215	0,35409	1,60757 <sup>a</sup>	0,72266 <sup>a</sup>	0,29040	0,27630	1,25442 <sup>a</sup>

Table D 6: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SSSF » ( $h/a=0.01$ ) de  $Al/Al_2O_3$ .

$p$	0				1				2			
	$(k_1, k_2)$											
$a/b$	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)	(-1,0)	(0,-1)	(-1,-1)	(-1,1)
0,5	1,49598	3,17361	1,36347	1,61262	0,74566	1,58186	0,67961	0,80379	0,58185	1,23435	0,53031	0,62721
1	0,48138	0,81253	0,36239	0,66578	0,23994	0,40500	0,18063	0,33185	0,18723	0,31603	0,14095	0,25895
1,5	0,29459	0,35414	0,17213	0,75284	0,14684	0,17652	0,08580	0,37525	0,11458	0,13774	0,06695	0,29281
2	0,22947	0,17541	0,10216	0,66578 <sup>a</sup>	0,11438	0,08743	0,05092	0,33185 <sup>a</sup>	0,08925	0,06822	0,03974	0,25895 <sup>a</sup>
2,5	0,19941	0,10115	0,06801	0,63050 <sup>a</sup>	0,09939	0,05042	0,03390	0,31427 <sup>a</sup>	0,07756	0,03934	0,02645	0,24523 <sup>a</sup>
3	0,18310	0,06546	0,04857	0,66578 <sup>a</sup>	0,09127	0,03263	0,02421	0,33185 <sup>a</sup>	0,07122	0,02546	0,01889	0,25895 <sup>a</sup>
3,5	0,17329	0,04585	0,03641	0,62698 <sup>a</sup>	0,08637	0,02286	0,01815	0,31251 <sup>a</sup>	0,06740	0,01783	0,01416	0,24386 <sup>a</sup>
4	0,16692	0,03396	0,02829	0,64999 <sup>a</sup>	0,08320	0,01693	0,01410	0,32398 <sup>a</sup>	0,06492	0,01321	0,01100	0,25281 <sup>a</sup>

Table D 7: Charges critiques de flambement en [MN/m] pour une plaque FGM « SFSC » ( $h/a=0.01$ ) de  $Al/Al_2O_3$ .

$p$	0				1				2			
	$(k_1, k_2)$											
$a/b$	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(-1,0)$	$(0,-1)$	$(-1,-1)$	$(-1,1)$
0,5	1,53290	3,17397	1,37379	1,66765	0,76406	1,58204	0,68475	0,83122	0,59621	1,23449	0,53433	0,64862
1	0,56755	0,82158	0,39275	0,85305	0,28289	0,40951	0,19576	0,42520	0,22074	0,31955	0,15276	0,33179
1,5	0,44346	0,36913	0,21682	0,98636 <sup>a</sup>	0,22104	0,18399	0,10807 <sup>a</sup>	0,49164 <sup>a</sup>	0,17248	0,14357	0,08433	0,38364 <sup>a</sup>
2	0,45884	0,22549	0,15752	0,85305 <sup>a</sup>	0,22870	0,11240	0,07851 <sup>a</sup>	0,42520 <sup>a</sup>	0,17846	0,08770	0,06127	0,33179 <sup>a</sup>
2,5	0,47575	0,16805	0,13091	0,90679 <sup>a</sup>	0,23713	0,08376	0,06525 <sup>a</sup>	0,45198 <sup>a</sup>	0,18504	0,06536	0,05092	0,35269 <sup>a</sup>
3	0,44346	0,14004	0,11678	0,85305 <sup>a</sup>	0,22104	0,06980	0,05821 <sup>a</sup>	0,42520 <sup>a</sup>	0,17248	0,05447	0,04542	0,33179 <sup>a</sup>
3,5	0,44180	0,12433	0,10839	0,88164 <sup>a</sup>	0,22021	0,06197	0,05403 <sup>a</sup>	0,43945 <sup>a</sup>	0,17184	0,04836	0,04216	0,34291 <sup>a</sup>
4	0,45884	0,11464	0,10302	0,85305 <sup>a</sup>	0,22870	0,05714	0,05135 <sup>a</sup>	0,42520 <sup>a</sup>	0,17846	0,04459	0,04007	0,33179 <sup>a</sup>

Table D 8: Variations des 03 premier paramètres fréquentiel  $\beta_c$  de plaque FGM  $Al/Al_2O_3$  en fonction d'épaisseur, cas "SSSS".

SSSS				
$\delta$	$p$	Mode 1	Mode 2	Mode 3
0,01	0	0,00059729	0,0014930	0,00238856
	0,1	0,0005746	0,0014363	0,00229785
	0,5	0,00050575	0,0012642	0,0020225
	1	0,00045573	0,0011392	0,00182241
	3	0,00040128	0,0010030	0,00160462
	5	0,00039285	0,0009820	0,00157091
	10	0,00038042	0,0009509	0,00152125
0,05	0	0,01490278	0,037143034	0,05924825
	0,1	0,01433701	0,035733577	0,05700099
	0,5	0,01261848	0,031448092	0,05016138
	1	0,01136889	0,028328248	0,04517619
	3	0,01000764	0,024924945	0,03973067
	5	0,00979723	0,024400253	0,03889327
	10	0,00948864	0,023636686	0,03768408

Table D 9: Variations de paramètre fréquentiel " $\beta_m$ " du plaque FGM " $Al/Al_2O_3$ " en fonction d'exposant et d'épaisseur, cas "SSSS".

a/b=1	SSSS										
a/h	p=0	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6	p=7	p=8	p=9	p=10
100,00	5,9729	4,5573	4,1433	4,0128	3,9599	3,9285	3,9025	3,8777	3,8530	3,8284	3,8042
50,00	5,9714	4,5560	4,1421	4,0116	3,9587	3,9273	3,9013	3,8765	3,8519	3,8273	3,8031
33,33	5,9689	4,5540	4,1401	4,0095	3,9567	3,9253	3,8994	3,8746	3,8500	3,8255	3,8013
25,00	5,9655	4,5512	4,1373	4,0067	3,9539	3,9225	3,8966	3,8719	3,8473	3,8229	3,7987
20,00	5,9611	4,5476	4,1337	4,0031	3,9502	3,9189	3,8931	3,8684	3,8439	3,8195	3,7955
16,67	5,9557	4,5431	4,1292	3,9986	3,9458	3,9145	3,8888	3,8642	3,8398	3,8155	3,7915
14,29	5,9494	4,5379	4,1241	3,9934	3,9406	3,9094	3,8837	3,8592	3,8349	3,8107	3,7867
12,50	5,9422	4,5319	4,1181	3,9874	3,9346	3,9034	3,8779	3,8535	3,8293	3,8051	3,7813
11,11	5,9340	4,5252	4,1113	3,9806	3,9279	3,8968	3,8713	3,8471	3,8229	3,7989	3,7752
10,00	5,9248	4,5176	4,1039	3,9731	3,9203	3,8893	3,8640	3,8399	3,8159	3,7920	3,7684
9,09	5,9148	4,5093	4,0956	3,9648	3,9121	3,8811	3,8559	3,8320	3,8081	3,7844	3,7609
8,33	5,9038	4,5003	4,0866	3,9557	3,9031	3,8722	3,8472	3,8233	3,7997	3,7761	3,7528
7,69	5,8920	4,4905	4,0769	3,9460	3,8933	3,8626	3,8377	3,8140	3,7905	3,7671	3,7440
7,14	5,8793	4,4801	4,0665	3,9355	3,8829	3,8523	3,8275	3,8040	3,7807	3,7575	3,7345
6,67	5,8658	4,4689	4,0554	3,9243	3,8717	3,8413	3,8167	3,7934	3,7702	3,7472	3,7244
6,25	5,8514	4,4570	4,0436	3,9125	3,8599	3,8296	3,8052	3,7821	3,7591	3,7363	3,7137
5,88	5,8362	4,4445	4,0312	3,8999	3,8474	3,8172	3,7930	3,7701	3,7474	3,7248	3,7024
5,56	5,8203	4,4313	4,0181	3,8868	3,8343	3,8042	3,7802	3,7575	3,7351	3,7127	3,6905
5,26	5,8035	4,4175	4,0043	3,8729	3,8205	3,7906	3,7668	3,7444	3,7221	3,6999	3,6780
5,00	5,7860	4,4031	3,9900	3,8585	3,8061	3,7764	3,7528	3,7306	3,7086	3,6867	3,6649

Table D 10: Variations de paramètre fréquentiel " $\beta_m$ " du plaque FGM " $Al/Al_2O_3$ " en fonction d'exposant et d'élanement, cas "SCSC".

h/a=0.01	b/a									
	0.5	0.8	1	1,25	1,45	1,5	1,6	2	2,5	3
0	559,3700	241,8616	170,0220	125,3177	105,6679	102,0307	95,8414	80,3766	71,2673	66,7023
0,1	538,1282	232,6768	163,5654	120,5587	101,6551	98,1560	92,2017	77,3242	68,5608	64,1692
0,2	519,0873	224,4439	157,7779	116,2929	98,0582	94,6829	88,9393	74,5882	66,1349	61,8987
0,3	502,1068	217,1020	152,6167	112,4888	94,8506	91,5857	86,0300	72,1483	63,9716	59,8739
0,4	487,0179	210,5780	148,0306	109,1085	92,0003	88,8336	83,4448	69,9803	62,0492	58,0747
0,5	473,6441	204,7957	143,9658	106,1125	89,4741	86,3943	81,1535	68,0588	60,3455	56,4800
0,6	461,8118	199,6799	140,3696	103,4619	87,2391	84,2363	79,1264	66,3587	58,8381	55,0692
0,7	451,3562	195,1594	137,1918	101,1197	85,2642	82,3293	77,3351	64,8565	57,5061	53,8226
0,8	442,1248	191,1682	134,3862	99,0517	83,5205	80,6457	75,7536	63,5301	56,3301	52,7219
0,9	433,9779	187,6459	131,9101	97,2268	81,9817	79,1598	74,3579	62,3597	55,2923	51,7505
1	426,7894	184,5380	129,7254	95,6165	80,6239	77,8488	73,1264	61,3269	54,3765	50,8935
1,1	420,4462	181,7956	127,7976	94,1956	79,4258	76,6919	72,0397	60,4155	53,5685	50,1372
1,2	414,8473	179,3749	126,0960	92,9414	78,3683	75,6708	71,0805	59,6112	52,8553	49,4697
1,3	409,9031	177,2374	124,5934	91,8339	77,4345	74,7691	70,2335	58,9008	52,2255	48,8802
1,4	405,5342	175,3486	123,2657	90,8553	76,6093	73,9724	69,4851	58,2732	51,6689	48,3593
1,5	401,6706	173,6783	122,0915	89,9899	75,8796	73,2678	68,8233	57,7181	51,1768	47,8987
1,6	398,2507	172,1997	121,0522	89,2238	75,2337	72,6441	68,2374	57,2268	50,7412	47,4910
1,7	395,2201	170,8895	120,1312	88,5450	74,6613	72,0914	67,7183	56,7914	50,3551	47,1297
1,8	392,5313	169,7271	119,3141	87,9428	74,1535	71,6011	67,2577	56,4052	50,0126	46,8091
1,9	390,1424	168,6943	118,5881	87,4077	73,7023	71,1654	66,8484	56,0620	49,7083	46,5243
2	388,0167	167,7754	117,9421	86,9315	73,3008	70,7778	66,4843	55,7566	49,4376	46,2709

## **Annexe E**

**Programme de flambement et vibration « cas plaque : SCSC »**