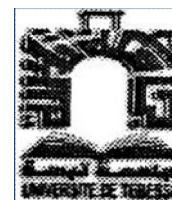




République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de
la Recherche Scientifique



UNIVERSITE LARBI TEBESSI - TEBESSA
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MINIER

Mémoire

*Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister
en Electromécanique Minière*

-Thème-

Calcul des Forces d'Origine Electromagnétique dans les Structures Electriques

Présenté par

Monsieur : SAKER Belkacem

Soutenu le : 29/11/2011

Devant le jury composé de :

Président	:	Laid BOUZENADA	Maître de Conférence A	Université de Tébessa
Rapporteur	:	Kamel SRAIRI	Professeur	Université de Biskra
Examineurs :		Mohamed KARA	Maître de Conférence A	Université de Tébessa
		Messaoud LOUAFI	Maître de Conférence A	Université de Tébessa
		Lotfi ALLOUI	Maître de Conférence A	Université de Biskra

Année Universitaire 2011/2012

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé, conjointement, au Laboratoire de Modélisation des Systèmes Energétiques LMSE de l'Université de Biskra et au département du Génie Minier de l'Université de Tébessa, sous la direction de Monsieur **Kamel SRAIRI**, Professeur à l'Université de Biskra. Qu'il me soit permis de lui exprimer mes meilleurs sentiments de gratitude et mes sincères remerciements pour sa contribution, sa patience et son aide sans fin pour l'élaboration de ce travail.

Tous mes remerciements à Monsieur **Laid BOUZENADA**, Maître de **Messaoud KARA**, Maître de conférences à l'université de Tébessa, conférences à l'Université de Tébessa pour l'honneur d'accepter de présider le jury d'examen.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Messieurs les membres du Jury :

Messaoud KARA, Maître de conférences à l'université de Tébessa,

Messaoud LOUAFI, Maître de conférences à l'université de Tébessa,

Lotfi ALLOUI, Maître de conférences à l'université de Biskra,

pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie du jury de soutenance.

Mes remerciements à Monsieur **BAHRI Mebarek**, Maître de conférences à l'université de Biskra, Directeur du Laboratoire de Modélisation des Systèmes Energétiques LMSE de l'Université de Biskra.

Je tiens à exprimer mes sentiments de gratitude et de reconnaissance à Messieurs **Khaled BEN ALLIA et Mohamed REZIG**, Doctorants au Laboratoire LMSE de l'Université de Biskra, pour l'aide qu'ils m'ont apporté lors de l'élaboration de ce travail.

Enfin, mes remerciements les plus sincères à Madame **BETKA Faiza**, ingénieur responsable au sein du Laboratoire LMSE de Biskra, pour son aide et pour le soutien matériel et logistique.

A mes chers parents.

A mes frères, mes sœurs,

A toute ma famille Saķer.

A tous mes amis

REMERCIEMENTS

Abstract

Abstract:

Electromagnetic forces play an important role in the operation of wide range of electrical system, either, in terms of moving objects, or distortion of forms. In such systems, these forces provide the coupling between electricity, magnetism, mechanics and also thermal effect. Otherwise, these forces are the source of motions, vibrations, noises, disturbances in the electrical equipments and material based on magnetostriction sheets, etc....

In this work, a detailed study of different types of forces generated from electromagnetism is presented. Among these forces, we are interested to analysis forces due to gradients of magnetic permeability's between two different magnetic environments.

Starting from the basic equations, those of **J. C. Maxwell**, mathematical models were developed with the aim to present the mathematical formulation related to the different partial differential equations witch based electromagnetic phenomena. The magnetic vector potential was adopted as the mathematical unknown of problem in order to determine the quantities such as magnetic induction, magnetic field, induced currents, etc, all used in various calculations of the forces.

The Volume Control Method (**VCM**) is adopted as a method to solving partial differential equations, based electromagnetic fields, the VCM package characterized by its ability to handle this type of application and also easy to implement.

For quantitative assessment of these forces generated in these structures, the Maxwell's Tensor Method (**MTM**) was adopted. The set of mathematical models and numerical methods developed have been successfully applied and tested to a typical example of an electrical system: a two-dimensional structure, cylindrical and axisymmetric. The simulation results obtained based Matlab programming language are presented and widely discussed. These results are consistent with physical reality.

Résumé :

Les forces, d'origine électromagnétique, jouent un rôle déterminant dans le fonctionnement de tout système électrique, soit, en terme de déplacement des objets, ou de déformation des formes. Dans de tels systèmes, ces forces assurent le couplage entre l'électricité, le magnétisme, la mécanique et voire la thermique aussi. Ainsi, elles sont à l'origine des mouvements, des vibrations, des bruits, des nuisances dans le matériel électrique et des tôles en magnétostriction, ...etc.

Dans le cadre de ce travail, nous proposons une étude détaillée des différents types de forces dont l'origine est l'électromagnétisme. Il s'agit plus particulièrement, des forces dues aux Gradients de perméabilités magnétiques entre deux milieux magnétiquement différents.

Partant des équations de base, celles de **J. C. Maxwell**, des modèles mathématiques ont été développés dont l'objectif est la formulation mathématique des différentes équations aux dérivées partielles, caractéristiques aux phénomènes électromagnétiques. Le potentiel magnétique vecteur a été adopté comme inconnue mathématique du problème en vue de déterminer, par la suite, les grandeurs telles que l'induction magnétique, le champ magnétiques, les courants induits, ...etc., utilisées dans les différents calculs des forces.

La méthode des Volume Finis **MVF** est adoptée comme méthode de résolution des équations aux dérivées partielles, caractéristiques aux champs électromagnétiques, en vue de sa capacité de traiter le type d'applications et sa facilité de mise en oeuvre et d'implémentation.

La méthode du Tenseur de Maxwell **TM** est adoptée pour l'évaluation quantitative de ces forces développées dans ces structures. L'ensemble des modèles mathématiques et numériques ainsi développés, dans le cadre de ce travail, sont, dans un premier temps, implémentés sous l'environnement de travail : le logiciel Matlab, ensuite, applique, avec succès, sur un système électrique type : une structure bidimensionnelle, cylindrique et axisymétrique. Les résultats de la modélisation ainsi obtenus sont présentés et largement discutés. Ces résultats sont en concordance avec la réalité physique.

SOMMAIRE

Introduction générale	(1)
Chapitre 1 : Formulation Mathématique en Electromagnétisme	
1.1 : Les modèles mathématiques	(3)
1.1.1 : Equations générales de Maxwell.....	(3)
1.1.2 : Interprétation physique des équations électromagnétiques.....	(5)
1.1.2.1 : Equation de couplage électromagnétique.....	(5)
1.1.2.2 : Les équations de conservation.....	(7)
1.1.2.3 : Loi de comportement des matériaux (milieu physique)	(8)
1.2 : Formulation des équations électromagnétiques.....	(9)
1.2.1 : Le modèle magnétostatique.....	(9)
1.2.1.1 : Le modèle magnétostatique scalaire	(10)
1.2.1.2 Le modèle magnétostatique vectoriel	(11)
1.2.2 Le modèle magnétodynamique.....	(11)
1.3 : Formulation des équations magnétodynamiques	(12)
1.4 : Le modèle cylindrique axisymétrique en électromagnétisme.....	(14)
Chapitre 2 : Modèles Numériques	
2.1 : Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles	(18)
2.1.1 : Méthodes analytiques.....	(18)
2.1.2 : Méthodes numériques.....	(19)
2.1.2.1 : Méthode des différences finies (M.D.F)	(19)
2.1.2.2 : Méthode des éléments finis (M.E.F).....	(20)
2.1.2.3 : La méthode des volumes finis	(21)
2.2: Discrétisations de l'équation magnétodynamique en régime harmonique.....	(22)
2.3 : Méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques	(27)
2.3.1 : Méthodes directes	(27)
2.3.2 : Méthodes itératives	(27)
2.3.2.1 : Méthode de Jacobi.....	(27)

2.3.2.2 : Méthode de Gauss Seidel..... (28)

2.3.2.3 : Méthode de Relaxation.....(28)

Chapitre 3 : Forces Magnétiques

3.1 : Introduction(30)

3.2 : Force électromagnétique(30)

3.2.1 : Force électrique..... (30)

3.2.2 : Force magnétique.....(31)

3.2 .3 Force électromagnétique..... (32)

3.2 .3.1 : Force de Laplace (32)

3.2 .3.2 : Force de Lorentz (34)

3.3 : Méthodes de calcul des forces électromagnétiques..... (35)

3.3.1 : Méthode basées sur la Dérivée de l'énergie (35)

3.3.2 : Méthode basée sur les courants équivalents..... (36)

3.3.3 : Méthode du tenseur de Maxwell..... (36)

3.3.3.1 : Calcul des forces locales par tenseur de Maxwell... (40)

3.4 Implémentation sous environnement MATLAB(44)

3.4 .1 Présentation des modules du code de calcul pour la résolution de l'équation électromagnétique (44)

3.4 .1.1 Introduction des données (45)

3.4 .1.2 Procédure de résolution des équations électromagnétique..... (45)

3.4 .1.3 Visualisation des résultats (46)

Chapitre IV: Application

4.1 Introduction(50)

4.2 Description du dispositif.....(50)

4.2.1 grandeur géométrique..... (50)

4.2.2 grandeur physique (51)

4.3 Résultat (52)

4.3.1 Interprétation des résultats.....(55)

SOMMAIRE

4.4 Tests sur les facteurs influents sur les forces magnétiques.....	(55)
4.4.1 effet de la modification des grandeurs physique	(56)
4.4.2 Effet de la modification des grandeurs géométrique.....	(57)
Conclusion générale.....	(62)
<i>Bibliographie.....</i>	(64)

Table des figures

Table des figures :

2.1 Trois nœuds du Maillage à une dimension	19
2.2 Un domaine d'étude discrétisé en éléments finis	20
2.3 Description d'un volume fini	21
3.1 Forces électriques entre deux charges considérées comme ponctuelles	30
3.2 Règle des trois doigts de la main droite	32
3.3 Notations pour la force de Laplace	33
3.4 Règle de trois doigts de la main droite	33
3.5 Forces appliquées à une charge en mouvement dans un milieu électromagnétique	34
3.6 Les forces magnétiques sur la surface de différente perméabilité	41
3.7 Force surfacique F_s	42
3.8 Organisation de code de calcul électromagnétique	44
3.9 Algorithme de calcul des forces magnétiques	48
4.1 Model d'application	50
4.2 Model géométrique du dispositif	51
4.3 Variation radiale du potentiel vecteur magnétique	52
4.4 Répartition du module du potentiel vecteur magnétique dans le plan (r. z)	53
4.5 Lignes équipotentiel de A	53
4.6 Répartition du module du champ magnétique H dans le plan (r. z)	54
4.7 Répartition du module de l'induction magnétique B dans le plan (r. z)	54
4.8 Force magnétique en fonction de la perméabilité relative de la charge	56
4.9 Force magnétique en fonction de la densité de courant	57
4.10 Force magnétique en fonction d'entrefer	58
4.11 Force magnétique en fonction rayon de la charge	59
4.12 Force magnétique en fonction de la hauteur de la charge	59
4.13 Force magnétique en fonction de rayon l'inducteur	60
4.14 Force magnétique en fonction de la hauteur de l'inducteur	61
<u>Tableau:</u>	
4.1 : Résultats de calcul des forces magnétiques de dispositif étudié	52

NOMENCLATURE :

Symboles	Signification	unité
A	Potentiel vecteur magnétique	[T.m]
H	Champ magnétique	[A/m]
B	Induction magnétique	[T]
E	Champ électrique	[V/m]
D	Induction électrique	[C/m ²]
J	Densité du courant électrique	[A/m ²]
J_{ex}	Densité du courant d'excitation (source)	[A/m ²]
J_D	Densité des courants de déplacement	[A/m ²]
ρ	Densité volumique de charges électriques	[C/m ³]
μ	Perméabilité magnétique	[H / m]
μ_0	Perméabilité magnétique absolue du vide	[H / m]
μ_r	Perméabilité relative du milieu	[USI]
ϵ	Permittivité diélectrique	[F/m]
ν	Réductivité magnétique	[m/H]
σ	Conductivité électrique	[S/m]
ϵ_0	Permittivité absolue du vide	[F/m]
ϵ_r	Permittivité relative du milieu	[USI]
g	Vitesse des pièces conductrices	[m/s]
ϵ	Permittivité diélectrique	[F/m]
$Az(x,y)$	Solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles	
M.V.F	Méthode des Volumes Finis	
F_m	Force magnétique	[N]
F_{tot}	Force magnétique totale	[N]
T	Tenseur de Maxwell	

Introduction générale :

Les recherches actuelles demandent un système de surveillance sophistiqué permettant de prendre les décisions correctes au bon moment, en évitant les pannes et donc les arrêts de production non planifiés. C'est pour cette raison que l'industrie a de plus en plus besoin de méthodes et d'outils de plus en plus performants pour diagnostiquer et évaluer l'état de santé des systèmes électromécaniques.

Les forces d'origine magnétique jouent un rôle très important dans le fonctionnement de tout système électromagnétique mécanique en termes de déplacement ou de déformation, les lois de physique de l'électromagnétisme donnent une réponse simple à ce sujet tant que l'on ne considère pas les matériaux ferromagnétiques. Or, grâce à leur propriétés attrayantes, les matériaux ferromagnétiques sont extrêmement présents en électromagnétisme puisque les performants, ces systèmes (machines électriques, actionneurs, contacteurs, le relais, les transformateurs, les plasmas, ...) leur sont directement liés. Il est donc indispensable de savoir exprimer les forces qui exercent au sein de ces matériaux.

La détermination correcte de ces forces est alors essentielle pour que l'analyse Soit la plus fiable possible.

Ce travail est consacré à traiter le calcul des Forces d'origine Electromagnétique dans les Structures Electriques. En effet, les forces en tant grandeurs mécaniques, plus particulièrement, celles dont l'origine est électromagnétique constituent le paramètre fondamental dans le couplage des phénomènes physiques présents dans tout type de matériel Electrique. Ces forces sont à l'origine du mouvement dans les machines électriques tournantes ou linéaires quelques soient leurs types d'alimentations et de fonctionnement. Elles assurent le couplage entre les phénomènes électromagnétiques et mécaniques de déplacement. Elles sont aussi à l'origine des vibrations, des bruits, des nuisances dans le matériel électrique et des

tôles en magnétostriction, ...etc. En chauffage par induction dans plasmas inductifs, les forces, d'origine électromagnétique, assurent le mouvement des particules à chauffer.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

Structure de la thèse :

Le premier chapitre est consacré à la modélisation des phénomènes électromagnétiques dans les structures électriques. En effet, partant des équations de base, celles de J. C. Maxwell, on développe, d'une manière très détaillée, les modèles mathématiques dont l'objectif est la formulation mathématique des différentes équations aux dérivées partielles, caractéristiques aux phénomènes électromagnétiques. Comme inconnue, il a adopté le potentiel magnétique vecteur, en vue de déterminer, par la suite les grandeurs telles que l'induction magnétique, le champ magnétique, les courants induits, ...etc., utilisées dans le calcul des forces.

Dans le deuxième chapitre nous présentons les méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles caractéristiques aux phénomènes électromagnétiques. La méthode des Volume finis MVF est adoptée comme méthode de résolution en vue de sa capacité de traiter le type d'applications et sa facilité de mise en œuvre et de programmation sur notre outil de travail, en l'occurrence le logiciel Matlab.

Le troisième chapitre présente une étude détaillée sur les différents types de forces d'origine électromagnétique. Les forces dues aux gradients de perméabilités magnétiques sont les plus fréquentées et les plus importantes. Les modèles mathématiques associés à ces forces sont présentés et implémentés sous l'environnement de travail.

Une application typique, bidimensionnelle, cylindrique et axisymétrique est présentée et traitée aussi dans un quatrième et dernier chapitre. Les résultats de la modélisation ainsi obtenus sont présentés et largement discutés. Ces résultats sont en concordance avec la réalité physique.

En finissant notre travail par une conclusion générale et une présentation de quelques perspectives futures à ce présent travail.

1.1 Modèles mathématiques :

La modélisation consiste à établir une structure mathématique permettant la description des phénomènes physiques. En électromagnétisme, l'association des équations de Maxwell, qui regroupent le théorème d'Ampère et la loi de Faraday, aux lois de comportement électrique et magnétique des matériaux constitue le modèle mathématique.

1.1.1 Les équations de Maxwell :

Les quatre équations de Maxwell dans leur généralité traduisent les interactions entre les grandeurs magnétiques \vec{B} et \vec{H} ; électriques \vec{E} et \vec{D} . En introduisant les caractéristiques μ et σ du milieu, et en appelant \vec{J} la densité de courant, celles sont exprimées sous la forme suivant :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho \quad (1.4)$$

Avec :

\vec{H} : Vecteur champ magnétique [A/m],

\vec{J} : Vecteur densité du courant électrique [A/m²],

$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: Densité des courants de déplacement négligeable à basse fréquence [A/m²],

\vec{B} : Vecteur induction magnétique [T],

\vec{E} : Vecteur champ électrique [V/m],

\vec{D} : Vecteur induction électrique (vecteur déplacement électrique) [C/m²],

ρ : Densité volumique de charges électriques [C/m³].

- Lois de comportement du milieu:

Les équations de Maxwell sont générales et sont indépendantes des caractéristiques des milieux. Il convient donc d'ajouter à ces équations les lois de comportement, celles-ci permettant de relier les différents champs, électrique et magnétique, entre eux.

Le champ électrique \vec{E} est relié à la densité de courant \vec{J} par la forme locale de la lois d'Ohm :

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (1.5)$$

Avec :

σ : Conductivité électrique [S/m],

$\sigma \cdot \vec{E}$: Densité des courants induits par variation du champ électrique E [A/m²],

En ce qui concerne le comportement magnétique, la relation entre \vec{B} et \vec{H} et de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu(H) \cdot \vec{H} \quad \text{Où} \quad \vec{H} = \nu(B) \vec{B} \\ \vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \end{array} \right. \quad (1.6)$$

$$(1.7)$$

Ces relations, doivent être associées la loi d'OHM généralisée :

$$\vec{J} = \vec{J}_{ex} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma(\mathcal{G} \wedge \vec{B}) \quad (1.8)$$

Avec :

μ : Perméabilité magnétique [H /m],

ϵ : Permittivité diélectrique [F/m],

ν : Réductivité magnétique [m/H],

\vec{v} : Vecteur vitesse des pièces conductrices susceptible de se déplacer [m/s],

σ : Conductivité électrique [S/m],

\vec{J}_{ex} : Densité du courant d'excitation (source) [A/m²],

$\sigma \cdot \vec{E}$: Densité des courants induits par variation du champ électrique E [A/m²],

$\sigma(\vec{v} \wedge \vec{B})$: Densité des courants induits par mouvement [A/m²].

1.1.2 Interprétation physique des équations électromagnétiques :

1.1.2.1 Equation de couplage électromagnétique :

- Loi de FARADAY

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Cette équation exprime le couplage électrique -magnétique en régime dynamique et où la variation temporelle de \vec{B} détermine le $\text{rot } \vec{E}$,

Démonstration :

La force électromotrice induite dans un circuit (c) placé dans un champ magnétique est déterminée par l'intégrale curviligne suivante :

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Où (C) est une boucle fermée (circuit).

De la même manière, une (F.e.m) est aussi induite, si le flux Φ varie dans le temps à travers un circuit fixe, tel que :

$$e = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Où $\Phi = f(x, y, z, t)$,

$$\text{donc } e = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Où (S) est une surface s'appuyant sur le contour (C).

D'après le théorème de STOCKES , nous avons :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

On obtient :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Ainsi, nous aurons :

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

- Théorème d'AMPERE

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Cette équation exprime la dépendance du champ magnétique de la densité du courant total (conduction + déplacement).

Démonstration :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = I$$

(S) : est la surface qui s'appuie sur le contour(C),

\vec{J} : est la densité du courant.

Selon le théorème de STOCKES, nous avons :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S}$$

Donc :

$$\int_C \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{D'où : } \text{rot } \vec{H} = \vec{J}$$

1.1.2.2 Les équations de conservation :

- Divergence de l'induction magnétique

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Cette relation traduit mathématiquement le fait que les seules sources de champ magnétique sont les courants électriques, et il n'existe pas de charge magnétique; c'est pourquoi les lignes du champ sont toujours fermées sur elles-mêmes. Elles forment des boucles. Ces boucles n'ont ni point de départ, ni point d'arrivée, ni point de convergence, d'où la nomination d'induction conservative (champ conservatif).

- Théorème de GAUSS

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

Une charge électrique est source d'un champ électrique; autrement dit, les lignes de champs électriques commencent et se terminent autour des charges électriques [2].

Démonstration

L'énoncé général du théorème de GAUSS indique que la charge totale $Q(V)$ contenue dans un volume V , limité par la surface fermée $S(V)$, est égale au flux du vecteur déplacement électrique \vec{D} sortant de la surface $S(V)$. C'est à dire :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{int}(V) = \int_V \rho \cdot dV$$

D'après le théorème d'OSTROGRADSKI – GREEN, nous avons :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{D} \cdot dV$$

D'où :

$$\int_V \text{div } \vec{D} \cdot dV = \int_V \rho \cdot dV$$

Ainsi

$$\text{div } \vec{D} = \rho$$

1.1.2.3 Loi de comportement des matériaux (Milieux physiques) :

- Induction et champ électriques

Pour tout champ électrique, dans un milieu isotrope, de permittivité ϵ , nous avons :

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E}$$

Avec :

$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$; ϵ_0 : Permittivité absolue du vide [F/m],

ϵ_r : Permittivité relative du milieu [USI].

Cette équation décrit la relation entre le vecteur induction électrique \vec{D} et le vecteur champ électrique \vec{E} . Elle est linéaire si ϵ est constante.

Dans le cas des conducteurs non-polarisés, nous avons :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} \quad ; \quad \epsilon_0 = \frac{1}{36 \cdot \pi \cdot 10^9} \text{ [F/m]}$$

La détermination de \vec{D} de l'équation (I.7) et $\text{rot} \vec{E}$ de l'équation (I.1) détermine complètement \vec{E} .

- Induction et champ magnétiques

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$$

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad ;$$

μ_0 : Perméabilité magnétique absolue du vide,

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]},$$

μ_r : Perméabilité relative du milieu [USI].

L'équation (1.6) détermine la relation entre le champ magnétique et l'induction magnétique. Cette relation donne la courbe d'aimantation $B = f(H)$.

Une variation de \vec{H} conduit à une variation de l'induction \vec{B} , on trouve par la suite le cycle d'hystérésis dont la forme se diffère d'un matériau à un autre; donc d'un dispositif électromécanique à un autre.

1.2 Formulation des équations électromagnétiques :

Les modèles de J.C. Maxwell décrivent globalement tous les phénomènes électromagnétiques, mais, suivant les dispositifs que l'on étudie, certains phénomènes deviennent négligeables [3].

Parmi ces modèles, nous citons : le modèle magnétostatique et magnétodynamique.

Dans le cadre de notre travail, seul le modèle magnétodynamique sera considéré et détaillé.

1.2.1 Le modèle magnétostatique :

Dans ce modèle, le terme $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ de l'équation (1.3) est nul. Ceci s'explique par le fait que le champ magnétique est produit par des sources indépendantes du temps [3].

Dans le cas de ce modèle, deux sortes de formes, peuvent l'exprimer. Il s'agit de :

- Le modèle magnétostatique scalaire
- Le modèle magnétostatique vectoriel

1.2.1.1 Le modèle magnétostatique scalaire :

Dans ce cas, les courants électriques sont nuls, il vient alors que les champs ne dépendent pas du temps. D'après les équations (1.1) et (1.2), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{0} & \text{Courants nuls} \\ \vec{\text{div}} \vec{B} = 0 & \text{Induction conservative} \end{array} \right.$$

Avec la loi du milieu, $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_{re}$

\vec{H} Dérive d'un potentiel scalaire magnétique Φ , d'où la nomination du modèle magnétostatique scalaire, tel que :

$$\vec{H} = - \text{grad } \Phi$$

Le modèle se ramène alors à l'équation :

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \mathbf{D}) = \operatorname{div} \mathbf{B}_{re}$$

1.2.1.2 Le modèle magnétostatique vectoriel :

Dans le modèle magnétostatique vectoriel, les courants électriques ne sont pas nuls. Il vient alors que :

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Avec la loi du milieu : $\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_{re}$

La relation $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, permet de définir une fonction vectoriel \vec{A} appelée potentiel vecteur magnétique [3], tel que :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

D'où le système d'équations :

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \vec{A} \right) = \vec{J} + \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \vec{B}_{re} \right)$$

1.2.2 Le modèle magnétodynamique :

Dans le modèle magnétodynamique les sources du courant sont dépendantes du temps, ainsi, les champs électriques et magnétiques seront alors couplés par la présence des courants induits (ou courants de FOUCAULT).

Le potentiel vecteur \vec{A} joue un rôle primordial, où la connaissance de \vec{A} implique la connaissance de tous les autres grandeurs physiques où :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

En terme d'équations, nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \\ \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{array} \right.$$

A ces équations, nous ajoutons les lois caractéristiques du milieu :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{B} = \mu \vec{H} \\ \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \end{array} \right.$$

C'est à partir de ces équations de base de ce modèle que nous pouvons déterminer l'équation décrivant l'évolution des phénomènes électromagnétiques dans un dispositif électromécanique.

1.3 Formulation des équations magnétodynamiques :

- formulation de potentiel vecteur magnétique :

En se basant sur les équations de J. C. MAXWELL, on peut formuler l'équation qui décrit l'évolution spatiale- temporelle des phénomènes électromagnétiques.

Nous avons :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Avec :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

On obtient:

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = -\vec{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{\text{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est un champs conservatif, il dérive donc d'un potentiel scalaire électrique U,

tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}U \Rightarrow \vec{E} = -\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}U\right) \quad (1.10)$$

A partir de l'équation (1.1) et de l'équation (1.6) nous avons :

$$\vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu}\vec{B}\right) = \vec{J}$$

A partir des équations (1.8), (1.9), et (1.10) nous avons :

$$\Leftrightarrow \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu}\vec{\text{rot}} \vec{A}\right) = \vec{J}_{\text{ex}} + \sigma \cdot \vec{E} + \sigma(\vec{\mathcal{G}} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu}\vec{\text{rot}} \vec{A}\right) = \vec{J}_{\text{ex}} - \sigma\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\text{grad}}U\right) + \sigma(\vec{\mathcal{G}} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A})$$

$$\Leftrightarrow \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu}\vec{\text{rot}} \vec{A}\right) + \sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma\vec{\text{grad}}U - \sigma(\vec{\mathcal{G}} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{J}_{\text{ex}}$$

Le potentiel vecteur \vec{A} ne peut pas être défini par la seule condition $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$;

on doit fixer sa divergence pour assurer l'unicité de la solution de l'équation aux dérivées partielles

(E.D.P).

On ajoute alors la condition $\vec{\text{div}} \vec{A} = 0$; appelée Jauge de COULOMB [3].

Nous obtenons ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\text{rot}}\left(\frac{1}{\mu}\vec{\text{rot}} \vec{A}\right) + \sigma\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma\vec{\text{grad}}U - \sigma(\vec{\mathcal{G}} \wedge \vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{J}_{\text{ex}} \\ \vec{\text{div}} \vec{A} = 0 \end{array} \right. \quad (1.11)$$

Les termes $-\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ et $\sigma(\vec{g} \wedge \text{rot} \vec{A})$ représentent les densités des courants induits.

Ils traduisent le caractère dynamique dans le temps et dans l'espace des phénomènes électromagnétiques, tandis que le terme $(-\sigma \text{grad} U)$ décrit la densité du courant dépendante des conditions électriques imposées aux extrémités des conducteurs.

U peut être considéré comme nul [3]. Nous observons que la relation (1.11) définissant une équation locale devra être systématiquement adaptée à la région à laquelle elle s'applique.

Enfin, la définition complète du problème magnétodynamique doit prendre en compte les conditions aux limites du type :

-DIRICHLET dans son cas général : $A=A_0$

-NEUMANN (homogène) dans son cas particulier : $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$

Dans le cas où la charge est immobile par rapport à l'inducteur et U est considérée uniformément nulle, l'équation (1.11) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\nu \text{rot} \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_{\text{ex}} \quad ; \quad \nu = \frac{1}{\mu} \quad : \text{rélectivité magnétique} \\ \text{div} \vec{A} = 0 \end{array} \right. \quad (1.12)$$

1.4 Le Modèle cylindrique axisymétrique en électromagnétisme :

Rappelons brièvement l'existence des deux types de systèmes bidimensionnels : ceux infiniment longs alimentés suivant une direction (oz), et ceux à symétrie de révolution alimentés selon la direction (oφ).

Dans le premier cas, le champ électrique \vec{E} n'a qu'une composante suivant la direction infiniment longue (oz). Le champ magnétique, \vec{B} quant à lui, présente deux composantes suivant (or) et (oφ) dans le plan perpendiculaire à \vec{J}_{ex} (densité des courants sources), impliquant ainsi une composante pour le potentiel vecteur magnétique \vec{A} suivant la direction (oz).

Dans le deuxième cas, les courants \vec{J}_{ex} , sont dirigés suivant l'angle φ du système de coordonnées cylindriques (r, φ, z), le champ magnétique possède alors deux composantes, l'une suivant la direction (or), et l'autre suivant la direction (oz), imposant ainsi pour le potentiel une seule composante A_ϕ (désignée par la suite A).

Rappelons l'équation magnétodynamique (1.12), dans le cas où la charge serait immobile par rapport à l'inducteur.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}(\text{vrot } \vec{A}) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}_{ex} \\ \text{div } \vec{A} = 0 \end{array} \right.$$

Lorsque le courant est orienté suivant la direction (oφ), il s'agit de la composante azimuthale (A_ϕ) du vecteur \vec{A} . Dans une telle configuration, les courants sont perpendiculaires au plan d'étude, (r, z).

Les différentes grandeurs vectorielles s'écrivent alors de la manière suivante :

$$\vec{J}_{\text{ex}} : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ J_\varphi & \vec{e}_\varphi \\ 0 & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{E} : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ E_\varphi & \vec{e}_\varphi \\ 0 & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{A} : \begin{cases} 0 & \vec{e}_r \\ A_\varphi & \vec{e}_\varphi \\ 0 & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{B} : \begin{cases} B_r & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ B_z & \vec{e}_z \end{cases} \quad \vec{H} : \begin{cases} H_r & \vec{e}_r \\ 0 & \vec{e}_\varphi \\ H_z & \vec{e}_z \end{cases}$$

Comme le vecteur \vec{A} est confondu avec sa composante A_φ , sa divergence est donc naturellement nulle (la jauge de COULOMB $\text{div} \vec{A} = 0$).

Sachant qu'en coordonnées cylindriques axisymétriques; nous avons :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & rA_\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{1}{r} \cdot 0 \right) \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) \vec{e}_z$$

et

$$\vec{\text{rot}}(\vec{v} \vec{\text{rot}} \vec{A}) = \left[-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \right] \vec{e}_\varphi$$

Remplaçant la grandeur $rA_\varphi = rA$ par la grandeur A^* l'équation électromagnétique (1.12), prend la forme :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - \frac{\sigma}{r} \frac{\partial A^*}{\partial t} = -J_{ex} \quad (1.13)$$

$A^* = A^*(r, z, t)$ est le potentiel vecteur magnétique modifié.

C'est une équation aux dérivées partielles, décrivant le comportement d'un dispositif cylindrique axisymétrique. Sous l'hypothèse que les matériaux sont linéaires, et que les sources d'alimentation sont sinusoïdales, les formulations magnétodynamiques peuvent être résolues en utilisant la notation complexe, permettant ainsi la prise en compte du terme dérivé $\frac{\partial A^*}{\partial t}$

et son remplacement par l'expression $i\omega A^*$, d'où l'équation :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - i\omega \frac{\sigma}{r} A^* = -J_{ex} \\ A^* = rA_\varphi \end{cases} \quad (1.14)$$

Conclusion :

Dans ce chapitre, nous introduisons le modèle mathématique des équations de base qui caractérisent les phénomènes électromagnétiques dans les dispositifs électromagnétiques, les modèles magnétostatiques et magnétodynamiques ont été traité, ensuite, Le cas cylindrique axisymétrique considéré comme un cas particulier a été détaillé.

Nous proposons dans le prochain Chapitre, les Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles et les techniques de résolution des équations algébriques.

2.1 Différentes techniques de résolution des équations aux dérivées partielles :

Il existe deux grandes catégories de méthodes de résolution des équations aux dérivées partielles mathématiques caractérisant les problèmes physiques, ces méthodes sont :

- Les méthodes analytiques,
- Les méthodes numériques.

2.1.1 Méthodes analytiques :

La solution analytique n'est accessible que dans des cas très simples. Elles sont d'emploi restreint à des géométries simples dans une approche unidimensionnelle, ou quelque fois dans des problèmes bidimensionnels. La méthode analytique la plus puissante et la plus couramment utilisée pour la résolution des équations différentielles aux dérivées partielles est la méthode de séparation des variables. Le principe de cette méthode consiste à mettre l'inconnue sous forme d'un produit des fonctions, dont chacune ne dépend que d'une seule variable [13].

Soit en coordonnées cartésiennes, l'inconnue $Az(x,y)$, qui est écrit comme suit :

$$Az(x,y) = Az(x).Az(y)$$

$Az(x,y)$: Solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles considérée de sorte que

$A(x)$: est une fonction ne dépend que de la variable x ,

$Az(y)$: est une fonction ne dépend que de la variable y .

2.1.2 Méthodes numériques :

L'apparition des ordinateurs, de grandes puissances, a mis en valeur l'intérêt des méthodes dites numériques. Ces méthodes numériques transforment les équations aux dérivées partielles (EDP) à des systèmes d'équations algébriques dont la solution fournit une approximation de l'inconnue dans de différents points situés aux nœuds du réseau géométrique correspondant à la discrétisation. Parmi ces méthodes, nous citons la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis, ...etc.

2.1.2.1 : Méthode des Différences Finies (M.D.F) :

La MDF consiste à transformer par un développement en série de TAYLOR l'opérateur différentiel en un opérateur aux différences [7].

Considérons le cas d'une équation à une dimension dont l'inconnue est A, le maillage étant établi sur la figure (2.1)

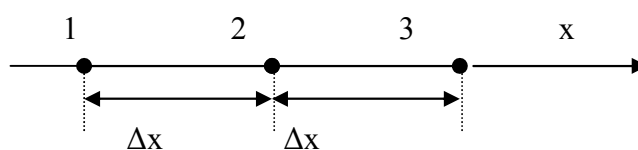


Figure 2.1 Trois nœuds du Maillage à une dimension.

Le développement en série de Taylor au voisinage du nœud n°2 donne :

$$A_1 = A_2 - \Delta x \left(\frac{dA}{dx} \right)_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2A}{dx^2} \right)_2 - \dots + \frac{(-1)^n}{n!} (\Delta x)^n \left(\frac{d^n A}{dx^n} \right)_2$$

$$A_3 = A_2 + \Delta x \left(\frac{dA}{dx} \right)_2 + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \left(\frac{d^2A}{dx^2} \right)_2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} (\Delta x)^n \left(\frac{d^n A}{dx^n} \right)_2$$

En se limitant au troisième terme, on déduit de ces équations :

$$\left(\frac{dA}{dx}\right) = \frac{A_3 - A_1}{2\Delta x} \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2A}{dx^2}\right) = \frac{A_1 - 2A_2 + A_3}{(\Delta x)^2}$$

En substituant ces dérivées dans l'équation différentielle on obtient l'équation aux différences finies au nœud 2. C'est une combinaison linéaire de l'inconnue au point considéré et aux points voisins.

La méthode aux différences finies permet d'obtenir des résultats satisfaisants dans de nombreux problèmes comme elle possède la simplicité de la formulation numérique, mais elle reste limitée aux configurations à géométrie régulière, donc, relativement trop simple.

2.1.2.2 Méthode des Eléments Finis (M.E.F) :

L'utilisation des éléments finis en électrotechnique a débuté dans les années 1970 par la résolution de problèmes magnétostatiques. Cette méthodologie s'est très vite imposée grâce à sa facilité d'emploi et à son aptitude à résoudre les équations de Maxwell dans des domaines de forme complexe.

A la différence avec la MDF, la MEF consiste à utiliser une approximation simple de l'inconnue pour transformer les EDP en équations algébriques. On associe une subdivision du domaine d'étude, en éléments simples, appelés éléments finis, comme il est indiqué sur la figure (2.2), et à approximer la fonction inconnue sur chaque élément par des fonctions d'interpolation. Ces fonctions sont généralement des polynômes de Lagrange de degré un, ou deux.

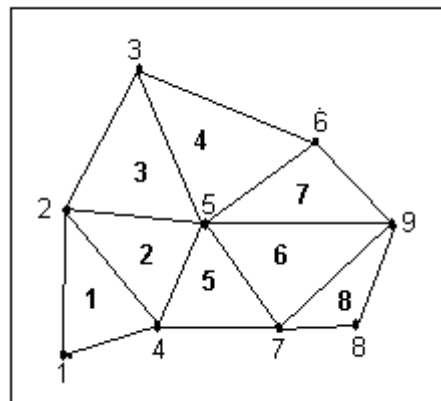


Figure 2.2 Un domaine d'étude discrétisé en éléments finis.

2.1.2.3 Méthode des Volumes Finis (M.V.F) :

La méthode des volumes finis peut être vue comme étant une variante de la méthode de collocation par sous-domaines. Le domaine d'étude (Ω) est divisé en un nombre d'éléments. Chaque élément contient quatre nœuds du maillage. Un volume fini entoure chaque nœud du maillage figure (2.3). L'équation au dérivé partielle (EDP) est intégrée dans chacun des volumes élémentaires. Pour calculer l'intégrale sur ce volume élémentaire, la fonction inconnue est représentée à l'aide d'une fonction d'approximation (linéaire, exponentielle...) entre deux nœuds consécutifs.

Description d'un volume fini :

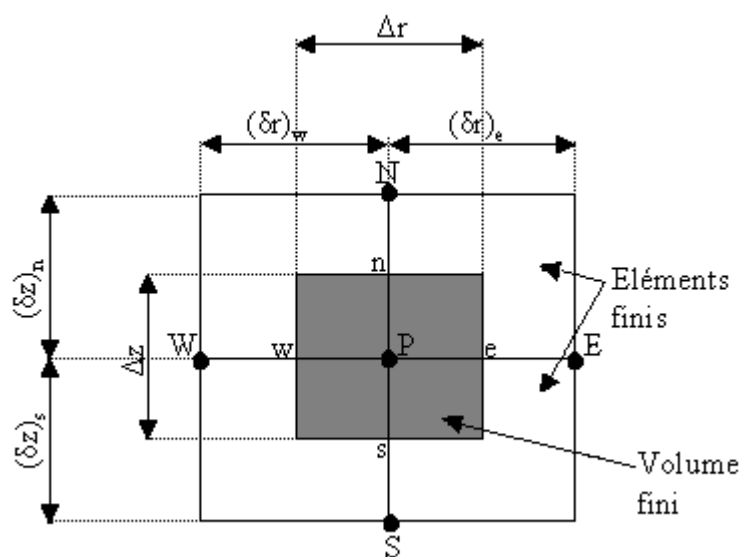


Figure 2.3 Description d'un volume fini.

Chaque nœud principal P est entouré par quatre nœuds voisins : celui du nord N, du sud S, de l'est E et celui de l'ouest W.

Le volume fini est délimité par les points (e : est, w : ouest, n : nord, s : sud) [11].

2.2 Discrétisations de l'équation magnétodynamique en régime harmonique:

Rappelons l'équation magnétodynamique linéaire, en régime harmonique :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) - i \omega \frac{\sigma}{r} A^* = -J_{ex}$$

La projection de cette équation aux dérivées partielles sur une base de fonctions de projection β_i , et son intégration sur le volume fini, correspondant au nœud P, donne :

$$\iint_{zr} \beta_i \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) \right] r dr dz = \iint_{zr} \beta_i \left[i \omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] r dr dz \quad (2.1)$$

β_i : est la fonction de projection choisie égale à $1 / r$

Rappelons que pour la méthode des éléments finis, $\beta_i = \alpha_i / r$, α_i est la fonction d'interpolation dans le cas de la méthode projective de GALERKINE.

Après substitution de l'expression de β_i , L'équation (2.1), prend la forme suivante :

$$\iint_{zr} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) \right] dr dz = \iint_{zr} \left[i \omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] dr dz \quad (2.2)$$

L'intégrale de la partie gauche de l'équation (2.2) sur le volume fini, délimitée par les frontières (e, w, s, n) est :

$$\iint_{sw}^{ne} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right) dr dz + \iint_{sw}^{ne} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right) dr dz \quad (2.3)$$

Après intégration nous aurons :

$$\left[\left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right)_n - \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial z} \right)_s \right] \Delta r + \left[\left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right)_e - \left(\frac{v}{r} \frac{\partial A^*}{\partial r} \right)_w \right] \Delta z$$

Avec :

$$r_e = r_p + \frac{\Delta r}{2}, r_w = r_p - \frac{\Delta r}{2}, \Delta r = r_e - r_w$$

$$z_n = z_p + \frac{\Delta z}{2}, z_s = z_p - \frac{\Delta z}{2}, \Delta z = z_n - z_s.$$

Un profil linéaire à été choisi exprimant la variation de A^* entre les nœuds voisins.

Le résultat obtenu est constitué uniquement de valeurs nodales. Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left[\frac{v_n}{r_n} \frac{(A_N^* - A_P^*)}{(\delta z)_n} - \frac{v_s}{r_s} \frac{(A_P^* - A_S^*)}{(\delta z)_s} \right] \Delta r + \left[\frac{v_e}{r_e} \frac{(A_E^* - A_P^*)}{(\delta r)_e} - \frac{v_w}{r_w} \frac{(A_P^* - A_W^*)}{(\delta r)_w} \right] \Delta z \\ & = \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n} A_N^* + \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s} A_S^* + \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e} A_E^* + \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} A_W^* - \left(\frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n} + \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s} + \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e} + \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w} \right) A_P^* \end{aligned}$$

Posons :

$$b_n = \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n}, b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s}, b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e}, b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w}$$

Ainsi, on obtient :

$$\Rightarrow b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* - (b_e + b_w + b_n + b_s) A_P^* \quad (2.4)$$

L'intégrale de la partie droite de l'équation (2.2) sur le volume fini, délimité par les frontières (e, w, s, n) est :

$$\begin{aligned} & \int_{sw}^{ne} \left[i \omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] dr dz = i \omega \sigma_p (\ln r)_w^e \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\ & = i \omega \sigma_p (\ln r_e - \ln r_w) \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= i\omega \sigma_p \ln\left(\frac{r_e}{r_w}\right) \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\
 &= i\omega \sigma_p \ln\left(\frac{(r_p + \frac{\Delta r}{2})}{(r_p - \frac{\Delta r}{2})}\right) \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\
 &= i\omega \sigma_p \ln\left(\frac{r_p (1 + \frac{\Delta r}{2r_p})}{r_p (1 - \frac{\Delta r}{2r_p})}\right) \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\
 &= i\omega \sigma_p \left[\ln\left(1 + \frac{\Delta r}{2r_p}\right) - \ln\left(1 - \frac{\Delta r}{2r_p}\right) \right] \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z
 \end{aligned}$$

or, le développement de la fonction $\ln(1+x)$ est donné par :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{(n+1)}}{n+1}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \iint_{sw}^{ne} \left[i\omega \frac{\sigma}{r} A^* - J_{ex} \right] dr dz &= i\omega \sigma_p \left[\frac{\Delta r}{2r_p} - \left(-\frac{\Delta r}{2r_p}\right) \right] \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\
 &= i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z A_p^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

La substitution des deux expressions trouvées (2.4), (2.5) dans l'équation (2.2) donne l'équation algébrique suivante :

$$\begin{aligned}
 b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* - (b_e + b_w + b_n + b_s) A_P^* &= i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z A_P^* - J_{ex} \Delta r \Delta z \\
 \Rightarrow \left(b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z \right) A_P^* &= b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* + J_{ex} \Delta r \Delta z
 \end{aligned}$$

Posons :

$$b_n = \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n}, \quad b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s}, \quad b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e}, \quad b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w}$$

$$b_p = b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z, \quad d_p = J_{ex} \Delta r \Delta z$$

Ainsi, l'équation algébrique finale s'écrit alors sous la forme :

$$b_p A_p^* = b_e A_E^* + b_w A_W^* + b_n A_N^* + b_s A_S^* + d_p \quad (2.6)$$

Avec :

$$b_n = \frac{v_n \Delta r}{r_n (\delta z)_n}, \quad b_s = \frac{v_s \Delta r}{r_s (\delta z)_s}, \quad b_e = \frac{v_e \Delta z}{r_e (\delta r)_e}, \quad b_w = \frac{v_w \Delta z}{r_w (\delta r)_w}$$

$$b_p = b_e + b_w + b_n + b_s + i\omega \frac{\sigma_p}{r_p} \Delta r \Delta z, \quad d_p = J_{ex} \Delta r \Delta z$$

Si la discrétisation du domaine comporte N nœuds, on est amené à étudier un système de N équations à N inconnues.

La forme matricielle de ce système d'équation s'écrit sous la forme :

$$[M+iL] \{A^*\} = \{p\}$$

Où :

$[M+iL]$: Matrice coefficients,

$\{A^*\}$: Vecteur inconnu,

$\{p\}$: Vecteur source.

- **Conditions aux limites :**

Dans l'étude précédente, nous avons établi les équations des nœuds internes. Pour les limites du domaine d'étude, il existe deux façons d'introduire les conditions aux limites :

- **Condition de DIRICHLET** : cette condition impose les valeurs de A aux bords du domaine d'étude. Ces valeurs sont prises nulles par la considération de l'infini physique.

- **Condition mixte de DIRICHLET-NEUMANN** : elles sont utilisées dans le cas où le système à étudier présente des plans de symétrie. Le problème mixte de DIRICHLET-NEUMANN impose les valeurs de A nulles aux bords infinis du domaine d'étude (Ω) et celles de $\frac{\partial A}{\partial n} = 0$ au niveau des plans de symétrie (plans de coupes) où n représente la normale au plan de coupe.

2.3 Méthodes de résolution des systèmes d'équations algébriques :

Pour la résolution des systèmes d'équations algébriques linéaires, il existe deux grandes catégories de méthodes [19] :

- Les méthodes directes ;
- Les méthodes itératives.

2.3.1 Méthodes directes :

Ces méthodes conduisent à une solution en un nombre fini d'étapes (éventuellement grand), cependant, comme l'ordinateur représente chaque nombre par un ensemble limité de digits, les méthodes directes sont précises mais demandent beaucoup d'espace mémoire et de temps de calcul.

2.3.2 Méthodes itératives :

Pour les matrices d'ordre élevé, comportant de nombreux éléments nuls (matrice creuse), on utilise les méthodes itératives qui font passer d'un estimé $X^{(k)}$ de la solution à un autre estimé $X^{(k+1)}$ de cette solution, s'il y a convergence, la solution ne pourrait être atteinte qu'après un nombre d'itérations. Parmi ces méthodes, nous citons :

- Méthode de JACOBI
- Méthode de GAUSS SEIDEL
- Méthode de relaxation

2.3.2.1 Méthode de JACOBI :

Elle est basée sur la transformation du système $[A][X]=[B]$ en

$$X_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j^k \right] / a_{ii} \quad ; (i \neq j) , i=1, \dots, n \quad (2.7)$$

On estime une valeur arbitraire initiale X_i^0 pour $(k=0)$, le calcul sera arrêté

si $\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| < \varepsilon$ Dans le cas d'une précision absolue et $\frac{\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right|}{X_i^k} < \varepsilon$ Dans le cas d'une précision relative.

ε : précision imposée par l'utilisateur.

2.3.2.2 Méthode de GAUSS SEIDEL :

Cette méthode consiste à transformer le système $[A][X]=[B]$ en :

$$X_i^{(k+1)} = \left[b_i - \sum_{j=1}^{(i-1)} a_{ij} X_j^{(k+1)} - \sum_{j=(i+1)}^n a_{ij} X_j^k \right] / a_{ii} \quad : i=1, \dots, n \quad (2.8)$$

En donnant aux inconnues X_i^k des valeurs arbitraires initiales X_i^0 (pour $k = 0$)

Le processus sera arrêté si :

$\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right| < \varepsilon$ Dans le cas d'une précision absolue et $\frac{\left| X_i^{(k+1)} - X_i^k \right|}{X_i^k} < \varepsilon$ Dans le cas d'une précision relative.

ε : précision imposée par l'utilisateur

2.3.2.3 Méthode de relaxation :

Pour améliorer la rapidité de la convergence, si on est sûr qu'il n'y a pas divergence, dans le cas des méthodes itératives, on utilise un facteur de relaxation α tel que :

$$X_1^{(k+1)} = X_1^k + \alpha (X_1^{(k+1)} - X_1^k) \quad (2.9)$$

Conclusion sur les méthodes itératives :

Les méthodes itératives sont généralement préférées par rapport aux méthodes dites directes, pour les grands systèmes $[A][X]=[B]$ à matrice creuse parce qu'elles ne modifient pas la matrice de rigidité $[A]$ et que dans un grand nombre d'application, cette matrice $[A]$ est creuse et présente une structure particulière (triangulaire) ce qui lui permet de ne pas être mémorisée explicitement et assure pratiquement la convergence.

Dans les méthodes élémentaires, la méthode de GAUSS-SEIDEL est préférée à celle de JAGOBI, parce qu'elle consomme moins de mémoire et converge souvent plus vite.

La méthode de relaxation est généralement beaucoup plus rapide que celle de GAUSS-SEIDEL, même si le facteur optimal α est réglé expérimentalement selon l'aspect physique du problème à traiter.

Conclusion :

La solution analytique n'est accessible que dans des cas très simples on a alors recours à une méthode numérique ;

Les méthodes numériques sont indispensables pour résoudre les problèmes de la physique. En effet, ces problèmes, souvent très complexes, nécessitent des recours aux ordinateurs pour obtenir des solutions rapides et optimales.

En ce qui concerne notre travail, nous utiliserons la méthode numérique dite volume fini que nous appliquons sur un logiciel MATLAB pour calculer les forces magnétiques à l'aide d'une formulation de calcul de ces forces, présentée dans le prochain chapitre.

3.1 Introduction :

Le terme d'interaction physique est quantifié classiquement avec la grandeur "force". Dans la conception des systèmes électromagnétiques, il est important d'étudier et d'évaluer l'ensemble des forces de nature magnétique ou électrique. Il est important aussi de déterminer leurs origines ainsi que leurs manifestations.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour déterminer Les forces de natures magnétiques. Nous présentons ci-dessous un rappel théoriques de quelques méthodes utilisées.

3.2 Force électromagnétique :

3.2.1 Force électrique :

Les charges électriques exercent une force les unes sur les autres. Cette force a été étudiée par Coulomb (1780) balance de torsion figure (3.1) :

Sous forme scalaire :

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (3.1)$$

Sous forme vectoriel :

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.2)$$

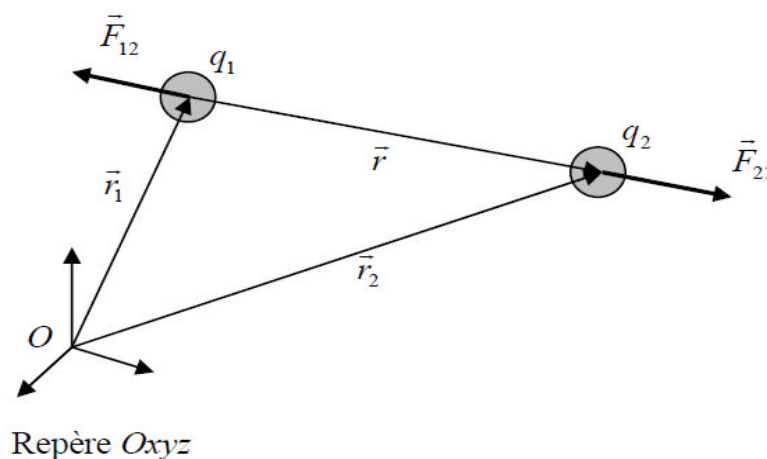


Figure 3.1 : Forces électriques entre deux charges considérées comme ponctuelles.

Avec :

\vec{F}_{12} : Force électrique exercée sur la charge 1 par la charge 2,

\vec{F}_{21} : Force électrique exercée sur la charge 2 par la charge 1,

ε_0 : permittivité absolue (vide) $\varepsilon_0 = 8.85.10^{-12}$,

r_1 : distance entre la charge q1 et le repère

r_2 : distance entre la charge q2 et le repère

r : distance entre la charge q1 et q2.

3.2.2 Force magnétique :

Par définition, le champ magnétique B que subit une particule de charge q animée d'une vitesse v produit une force magnétique :

$$\vec{F}_m = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (3.3)$$

Avec :

q : la charge portée par la particule [C],

v : Vitesse de la particule [m/s],

F_m : Force magnétique [N].

Le sens de force magnétique présentée par la règle des trois doigts de la main droite figure (3.2)

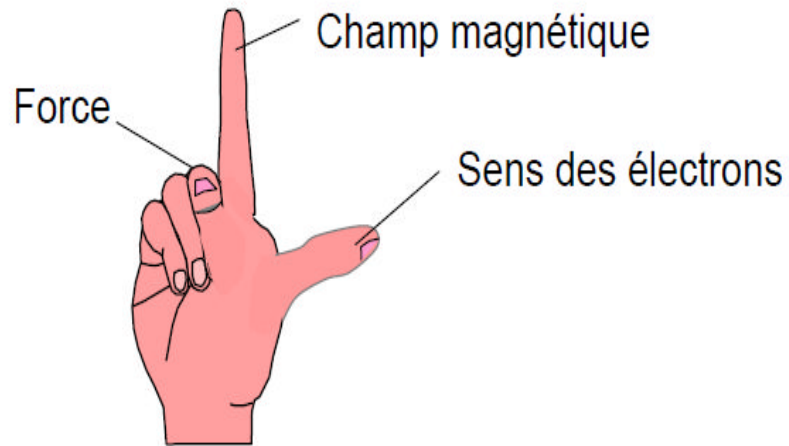


Figure 3.2 Règle des trois doigts de la main droite

3.2 .3 Force électromagnétique :

3.2 .3.1 Force de Laplace :

les particules chargées d'un conducteur filiforme de longueur L , parcouru par un courant I , et soumis à l'action d'un champ d'induction magnétique B , crée une force appelée "force de Laplace" qui s'écrit :

$$\vec{dF} = I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (3.4)$$

Donc La force globale :

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \wedge \vec{B} \quad (3.5)$$

Cette équation peut être exprimée sous forme locale :

$$\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (3.6)$$

Avec :

\vec{L} : Le vecteur qui joint les extrémités de la portion de circuit qui plonge dans le champ magnétique. La conséquence immédiate de cette formule est que si un circuit fermé

plonge complètement dans un champ magnétique, la résultante des forces de Laplace est nulle

car $\vec{L} = 0$.

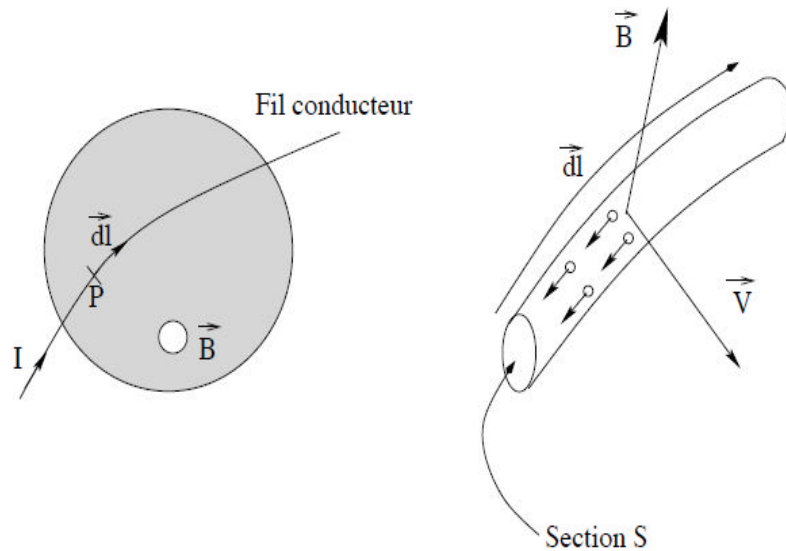


Figure 3.3: Notations pour la force de Laplace.

Le sens de la force de Laplace montrée par la règle des trois doigts de la main droite figure (3.4)

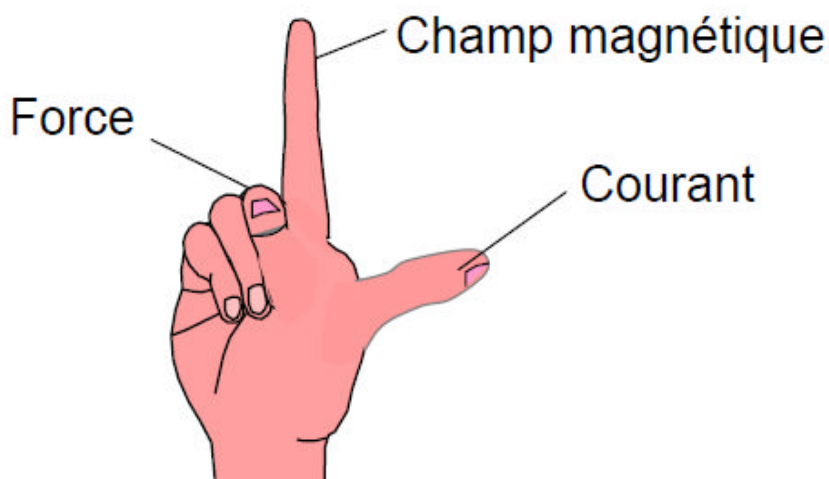


Figure 3.4 : Règle de trois doigts de la main droite

3.2.3.2 Force de Lorentz :

Quand la particule se déplace dans une région où il y a un champ électrique et magnétique, la force totale est la somme de la force électrique $q \cdot \vec{E}$ et de la force magnétique $q(\vec{v} \wedge \vec{B})$ On a donc :

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} + q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (3.7)$$

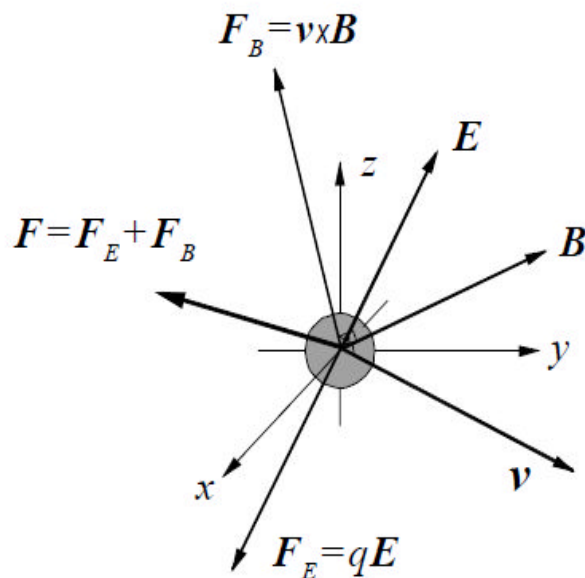


Figure 3.5: Forces appliquées à une charge en mouvement dans un milieu électromagnétique

3.3 Méthodes de calcul des forces électromagnétiques :

Dérivée de l'énergie, tenseur de Maxwell, courant équivalent... que de formulations différentes pour un même phénomène. Celui de la force engendrée sur un matériau présentant des propriétés magnétiques lorsqu'il est plongé dans un champ magnétique. [14]

Ce phénomène physique peut-être analysé sous plusieurs angles de vue différents, et à chaque analyse, une formulation lui est adjointe. On choisit la méthode de tenseur de maxwell pour faire calculer les forces d'origine électromagnétiques.

3.3.1 Méthode basée sur Dérivée de l'énergie:

L'approche énergétique se fonde sur une application du principe des travaux virtuels. Selon ce principe, la force électromagnétique est déduite à partir de la variation de l'énergie $W = W(B)$ ou de la Co-énergie $\bar{W} = \bar{W}(H)$ du système par rapport à un déplacement virtuel. Il s'agit d'un principe de la physique de base [13], [15].

Les expressions suivants de l'énergie représentent l'ensemble des grandeurs mises en jeu, sachant que :

$$\bar{W} = \int \left(\int_0^H \bar{B} \cdot dH \right) d\Omega \quad (3.8)$$

$$W = \int \left(\int_0^B \bar{H} \cdot dB \right) d\Omega \quad (3.9)$$

La dérivation de l'énergie par rapport au déplacement s , introduit sous l'intégrale de volume conduit à l'expression suivante [13]:

$$F_s = \sum_{elements} \left[\int_{Delocal} \frac{\partial}{\partial s} \left(\int_0^H \bar{B} dH \right) \cdot \bar{G} + \left(\int_0^B \bar{H} dB \right) \frac{\partial \bar{G}}{\partial s} \right] d Delocal \quad (3.10)$$

3.3.2 Méthode basée sur les courants équivalents:

Ces méthodes reposent sur le fait que l'on peut remplacer le matériau (ou le champ créé par celui-ci) par des distributions volumiques et surfaciques de sources de champ, Ces distributions définissent un équivalent parfait du système, où les données magnétiques sont équivalentes à celle produites par le matériau. Du point de vue extérieur au matériau, les données (champ et induction magnétique) produites par ces modèles sont parfaitement équivalentes à celles du matériau. Cependant, à l'intérieur du matériau, selon le modèle utilisé, le champ ou l'induction est modifié.

Les sources de champ peuvent être soit des courants, soit des charges magnétiques, soit une combinaison de courants et de charges [13], [15].

3.3.3 Méthode du tenseur de Maxwell :

L'origine de cette formulation théorique est basée sur les équations de Maxwell, elle est nommée de telle manière car sa formulation utilise la divergence du Tenseur de Maxwell. Il est important de noter que le résultat de cette méthode fournit la force exercée par un différentiel de volume sous l'action d'un champ magnétique [1], [13], [14],[15].

$$\vec{F} = \text{div}(\mathbf{T}) \quad (3.11)$$

Pour entrer dans la formulation de cette méthode, il est donc nécessaire de rappeler les équations de Maxwell (chapitre 1). Cet ensemble d'expressions est le suivant :

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.12)$$

$$\vec{\text{div}} B = 0 \quad (3.13)$$

$$\vec{\text{rot}} E = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.14)$$

$$\vec{\text{div}} D = \rho \quad (3.15)$$

Les quatre équations de Maxwell présentées dans le premier chapitre permettent de formaliser les relations qui existent entre les différentes entités. Ces quatre équations sont insuffisantes pour construire le tenseur de Maxwell [1], [14].

Il faut introduire une cinquième équation qui permet de prendre en compte les effets d'un champ électromagnétique. Cette équation découle de la force qui s'exerce sur une charge électrique en mouvement plongée dans un champ magnétique, c'est la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (3.16)$$

Par une densité de courant on peut écrire la force de Laplace :

$$\vec{F} = \vec{J} \wedge \vec{B} \quad (3.17)$$

$$F = (F_x, F_y, F_z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ j_x & j_y & j_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

Pour rendre le développement plus agile, il est possible de se concentrer sur un seul élément, par exemple (x):

$$\vec{F}_x = J_y B_z - J_z B_y \quad (3.19)$$

Le fait d'admettre cette hypothèse, physiquement, c'est admettre que la force qui apparaît sur un courant est due au champ magnétique engendré par ce même courant, généralisant ainsi le traitement initial de la loi de Lorentz qui exprime la force sur un élément de courant placé dans un champ magnétique extérieure. En développant l'équation [1], [14]:

$$\vec{J} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \quad (3.20)$$

En utilisant les équations (3.12), (3.19), (3.20) en l'absence de champ électrique pour on obtient :

$$\vec{F}_x = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \cdot \mu H_z - \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \cdot \mu H_y \quad (3.21)$$

Rien n'interdit d'ajouter à F_x la quantité nulle suivante :

$$H_x \cdot \text{div}(\vec{B}) = \mu H_x \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \right) \quad (3.22)$$

Nullité induite par (3.13)

Alors, une autre expression pour F_x apparaît :

$$\begin{aligned}
 F_x &= \mu \left(H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} - H_y \frac{\partial H_y}{\partial x} - H_z \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \\
 &+ \mu \left(H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_x \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) \\
 &+ \mu \left(H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} + H_x \frac{\partial H_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Cette écriture peut être employée pour toutes les composantes F_x , F_y , F_z et une identification donne chaque composante du tenseur de Maxwell :

$$T_{nm} = \mu \left[H_n H_m - \frac{\delta_{nm}}{2} H^2 \right] \tag{3.24}$$

n et m peuvent prendre comme valeur x, y, z et $\delta_{nm} = 1$ si $n=m$ sinon $\delta_{nm} = 0$

En conclusion le tenseur de maxwell comme l'équation suivant (3.25) :

$$T = \left\{ \begin{array}{ccc}
 \mu \left[H_x H_x - \frac{H^2}{2} \right] & \mu [H_x H_y] & \mu [H_x H_z] \\
 \mu [H_y H_x] & \mu \left[H_y H_y - \frac{H^2}{2} \right] & \mu [H_y H_z] \\
 \mu [H_z H_x] & \mu [H_z H_y] & \mu \left[H_z H_z - \frac{H^2}{2} \right]
 \end{array} \right\}$$

Il est très aisé de mettre en forme la divergence de ce tenseur (3.25), pour exprimer chaque composante de la force d'origine magnétique selon les axes x , y et z suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = \frac{\partial \Gamma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{xz}}{\partial z} \\ F_y = \frac{\partial \Gamma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{yz}}{\partial z} \\ F_z = \frac{\partial \Gamma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_{zz}}{\partial z} \end{array} \right. \quad (3.26)$$

L'obtention de tenseur (3.25) permet naturellement d'établir le théorème de Maxwell. En effet, l'intégration de ce tenseur sur n'importe quelle surface entourant un corps particulier doit fournir la force totale exercée sur ce corps, [1].

3.3.3.1 Calcul des Forces locales par Tenseur de Maxwell :

Si le système à modéliser est accompagné d'une déformation de la structure, la connaissance de la distribution locale de force est indispensable. Dans un conducteur amagnétique la densité de forces est donnée par la formule de Lorentz. [17], [14]

Si le matériau est ferromagnétique, linéaire, sans courant, les forces magnétique apparaissent seulement à l'interface (x_1 , x_2) de deux matériaux de perméabilité différente figure (3.6).

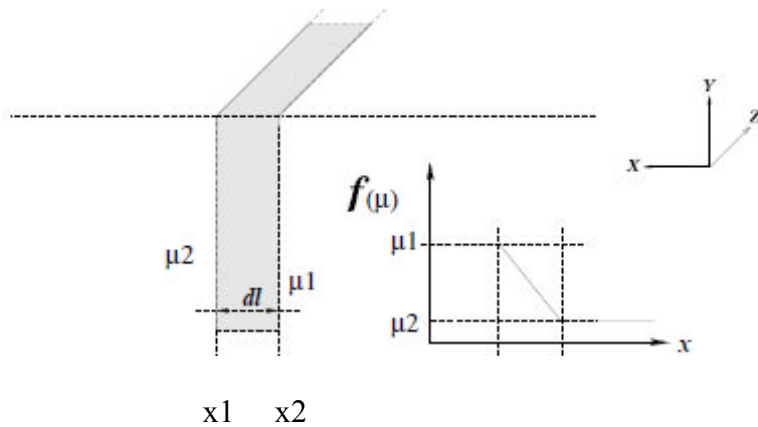


Figure 3.6 : Forces magnétiques sur la surface de différente perméabilité

En absence de courant sur l'interface, la densité surfacique de force selon le tenseur de maxwell est donnée par [17] :

$$F_s = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) B_n^2 - \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_2) H_t^2 \quad (3.27)$$

Démonstration de la formule (3.27) :

La surface de séparation est assimilée à un volume d'épaisseur négligeable dl , dont la perméabilité évolue de manière continue entre la perméabilité à l'intérieur et la perméabilité à l'extérieur du volume figure (3.7) ,[14] :

Et la forme mathématique de cette interprétation géométrique se traduit par

L'équation suivante :

$$F_s = \int_{x1}^{x2} F_v \cdot dx \quad (3.28)$$

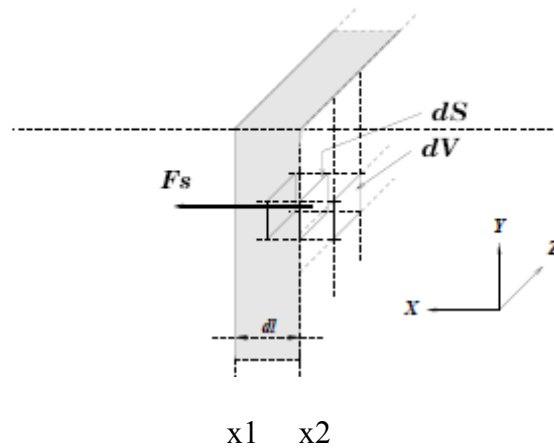


Figure 3.7 : Force surfacique F_s

La force volumique F_v , présentée dans cette écriture, est donnée par la divergence du tenseur de Maxwell. Comme seule la composante normale est recherchée, le calcul se limitera à la composante selon l'axe x [14].

$$F_v = \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{xz}}{\partial z} \quad (3.29)$$

On suppose comme hypothèse $\frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial T_{xz}}{\partial z} = 0$ dans le volume élémentaire, car

elle implique que H_y et H_z sont invariants dans le domaine d'intégration et pas seulement suivant l'axe x,

$$F_s = [T_{1;1} - T_{2;2}] \quad (3.30)$$

On a:

$$T_{1;1} = \mu_1 \left[H_{1,x}^2 - \frac{1}{2} \left(H_{1,x}^2 + H_{1,y}^2 + H_{1,z}^2 \right) \right] \quad (3.31)$$

$$T_{2;2} = \mu_2 \left[H_{2,x}^2 - \frac{1}{2} \left(H_{2,x}^2 + H_{2,y}^2 + H_{2,z}^2 \right) \right] \quad (3.32)$$

Comme une composante tangentielle de champ ne peut pas modifier $H_{1,y} = H_{2,y}$ et $H_{2,z} = H_{1,z}$ il est possible de dire que H_y, H_z représentent la composante tangentielle de champ magnétique H_t avec les relations de comportement de milieu on trouve l'équation suivante :

$$T_{1;1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} \right) B_n^2 - \frac{1}{2} \mu_1 H_t^2 \quad (3.33)$$

$$T_{2;2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_2} \right) B_n^2 - \frac{1}{2} \mu_2 H_t^2 \quad (3.34)$$

Donc on peut écrire la force magnétique surfacique dans un matériau ferromagnétique par la formule suivante :

$$F_s = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \right) B_n^2 - \frac{1}{2} (\mu_1 - \mu_2) H_t^2 \quad (3.35)$$

3.4 Implémentation sous l'environnement de logiciel MATLAB:

Les programmes de calcul des forces magnétiques nécessitent de la résolution des équations électromagnétique sous l'environnement MATLAB. Cet environnement présente de nombreux avantages tels que le calcul matriciel, l'interface graphique, la technique des matrices creuses qui permet la réduction de l'espace mémoire occupé par les éléments matriciels, donc une réduction du temps de calcul, et celui de l'utilisateur.

3.4.1 Présentation des modules du code de calcul pour la résolution de l'équation électromagnétique :

La figure (3.8) présente l'organisation du code de calcul utilisée pour la résolution de l'équation magnétodynamique [16].

Ce code de calcul est constitué des sous programmes suivants :

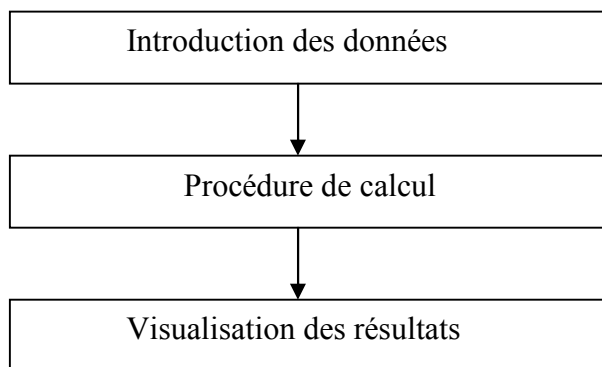


Figure 3.8 : Organisation de code de calcul électromagnétique

3.4.1.1 Introduction des données :

Dans ce sous programme, nous décrivons la géométrie du domaine, en introduisant les dimensions de la charge, de l'inducteur et des frontières du domaine représentant l'infini physique, aussi les propriétés physiques des matériaux ainsi la densité du courant d'alimentation.

La fonction suivante est la discrétisation en volumes finis.

3.4.1.2 Procédure de résolution des équations électromagnétiques :

Le modèle algébrique de l'équation magnétique, présenté au chapitre précédant sous une forme matricielle est donné par :

$[M + iL]$:matrices coefficients

$\{ A^* \}$: vecteur inconnu

$\{ p \}$: vecteur source.

En calculant les coordonnées des nœuds ainsi que les coefficients de la matrice du système $[M+iL] \{A^*\} = \{p\}$ à partir du maillage en volumes finis et les propriétés physiques en chaque nœud.

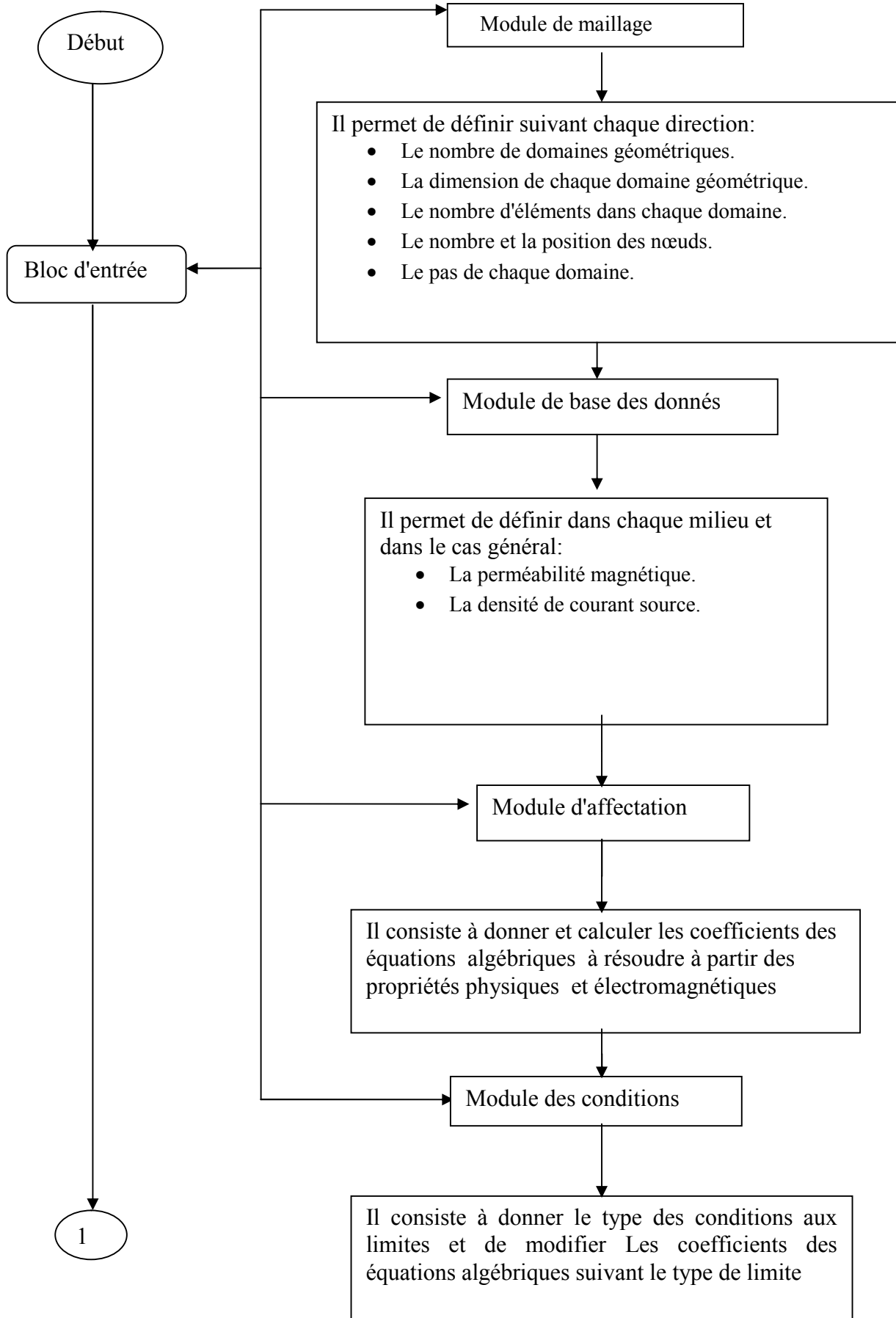
Le modèle algébrique obtenu sera résolu par une méthode itérative, on suppose connu à priori une valeur de A^* quelconque (fournie par les conditions initiales).

3.4.1.3 Visualisation des résultats :

Nous présentons les résultats suivants:

- Champ magnétique \vec{H}
- L'induction magnétique \vec{B}
- Le potentiel vecteur magnétique \vec{A}
- La force magnétique \vec{F}_m .

La figure (3.9) illustre les différentes étapes de la résolution des l'équations électromagnétiques et de calcul des forces magnétiques.



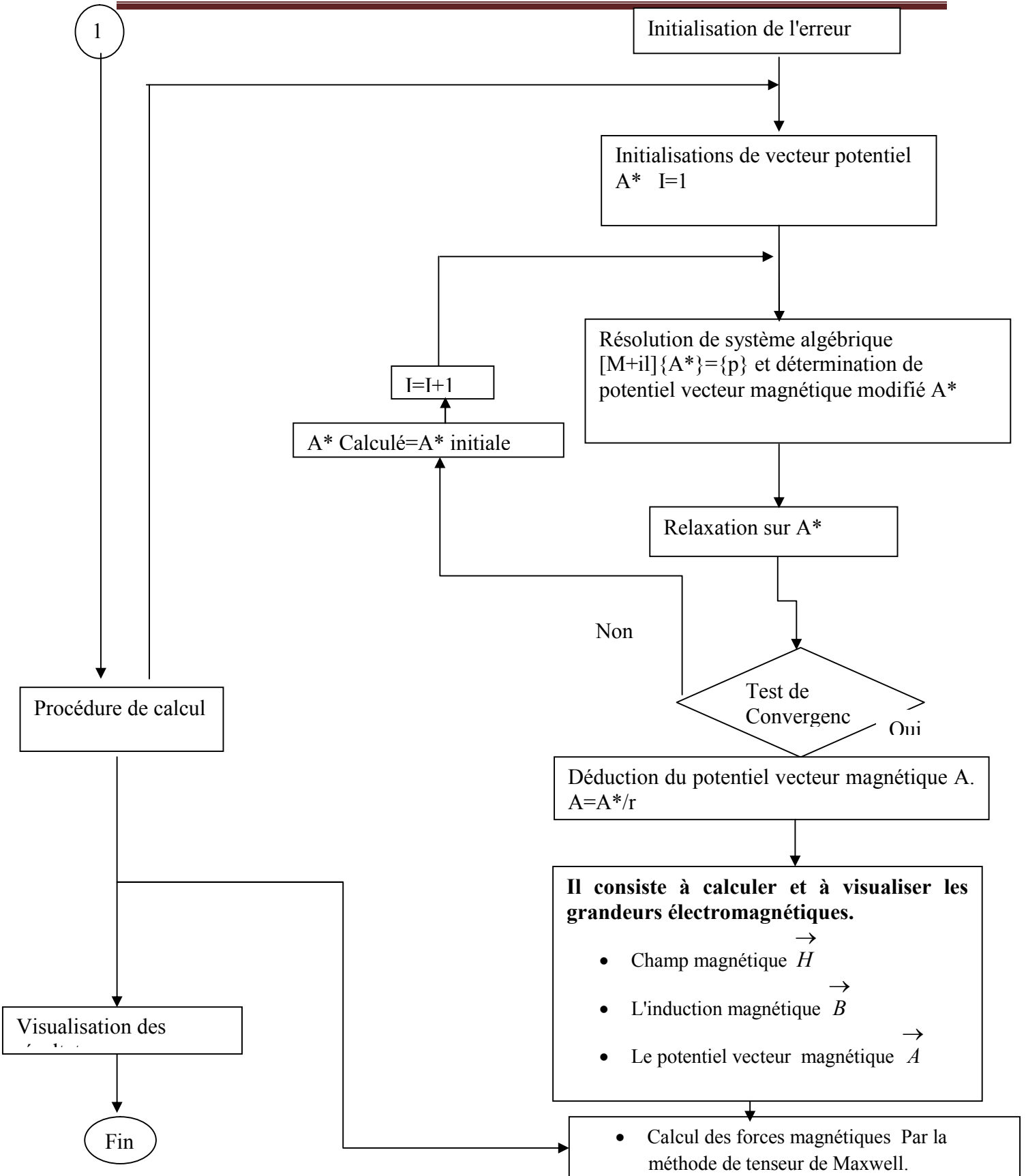


Figure 3.9 : Algorithme de calcul des forces magnétiques

Conclusion :

Le problème de formulation est toujours un problème d'actualité et les discussions récentes montrent que toutes les formulations sont encore utilisées. Quelque soit la méthode utilisée les résultats théoriquement sont les mêmes nous avons dans ce chapitre fait un rappel sur les forces d'origine électromagnétique et les différentes méthodes utilisées pour le calcul, la méthode dite tenseur de Maxwell représente notre méthode de choix.

Le prochain chapitre est consacré à l'interprétation des résultats de calcul des forces magnétiques obtenues pour des différents testes appliques sur un dispositif cylindrique axisymétrique choisi.

4.1 Introduction :

Nous présentons dans tous ce qui suit des résultats de calcul des forces magnétiques données par la formule de tenseur de Maxwell et les effets des grandeurs physiques et géométriques sur ces forces.

4.2 Description du dispositif :

Notre dispositif est constitué d'une charge cylindrique pleine plongée à l'intérieur d'un inducteur.

Cette charge est un circuit magnétique de rayon égal à 32 mm et d'une hauteur égale à 160 mm par contre l'inducteur est en cuivre de rayon intérieur égal à 33 mm et de rayon extérieur égal à 48 mm et d'une hauteur égale à 60mm.

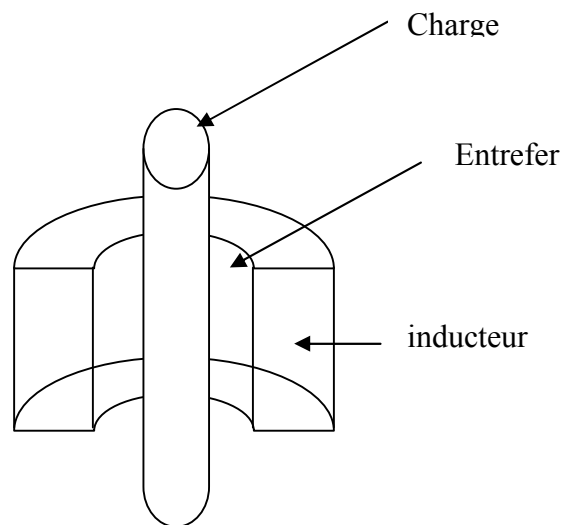


Figure 4.1: Model d'application

4.2.1 grandeur géométrique :

En raison de la symétrie axiale du dispositif, seule une représentation bidimensionnelle du système sera considérée, ainsi le modèle adopté comprend trois régions nécessaires :

- Noyau charge) ;
- La source (inducteur en cuivre) ;
- l'air environnant (entrefer).

Le système ci-dessous présente le dispositif en coupe dans le plan (r,z) figure(4.2):

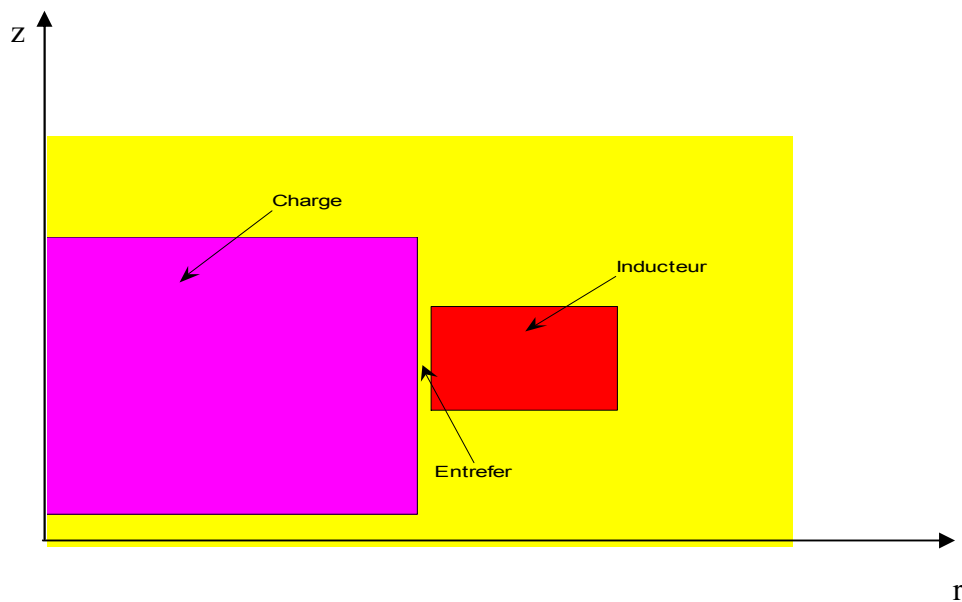


Figure 4.2: Model géométrique du dispositif

4.2.2 grandeur physique :

La densité de courant d'excitation : $j = 10^6$ A/m²

Perméabilité magnétique de l'inducteur $\mu_{ind} = 1$

Perméabilité magnétique de la charge $\mu_{ch} = 1500$

Perméabilité magnétique de l'entrefer $\mu_{entrefer} = 1$

4.3 Résultat :

Nous présentons dans ce chapitre les résultats obtenus après la résolution d'équation magnétodynamique :

- répartition dans le plan (r,z) de potentiel vecteur magnétique A ;
- répartition dans le plan (r,z) de l'induction magnétique B ;
- répartition dans le plan (r,z) champ magnétique H ;
- les valeurs de force magnétique calculée du dispositif étudié et présentées dans le tableau suivant :

Force magnétique (N)	F dessous (N)	F dessus (N)	F totale (N)
	537	1554	1017

Tableau 4.1: résultats de calcul des forces magnétiques de dispositif étudié.

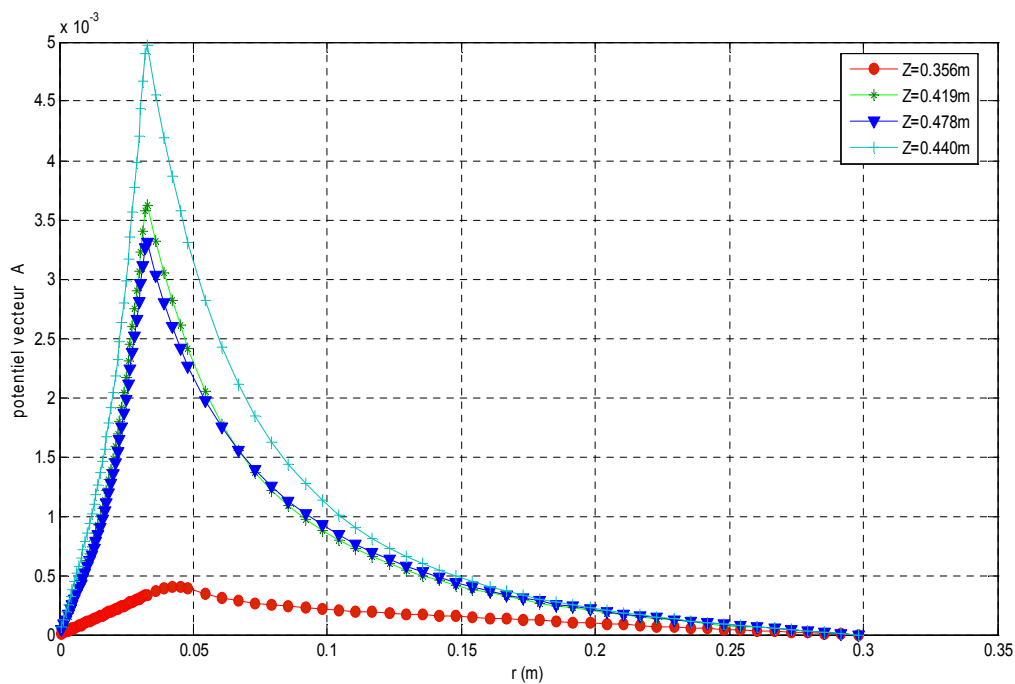


Figure 4.3 : Variation radiale du potentiel vecteur magnétique

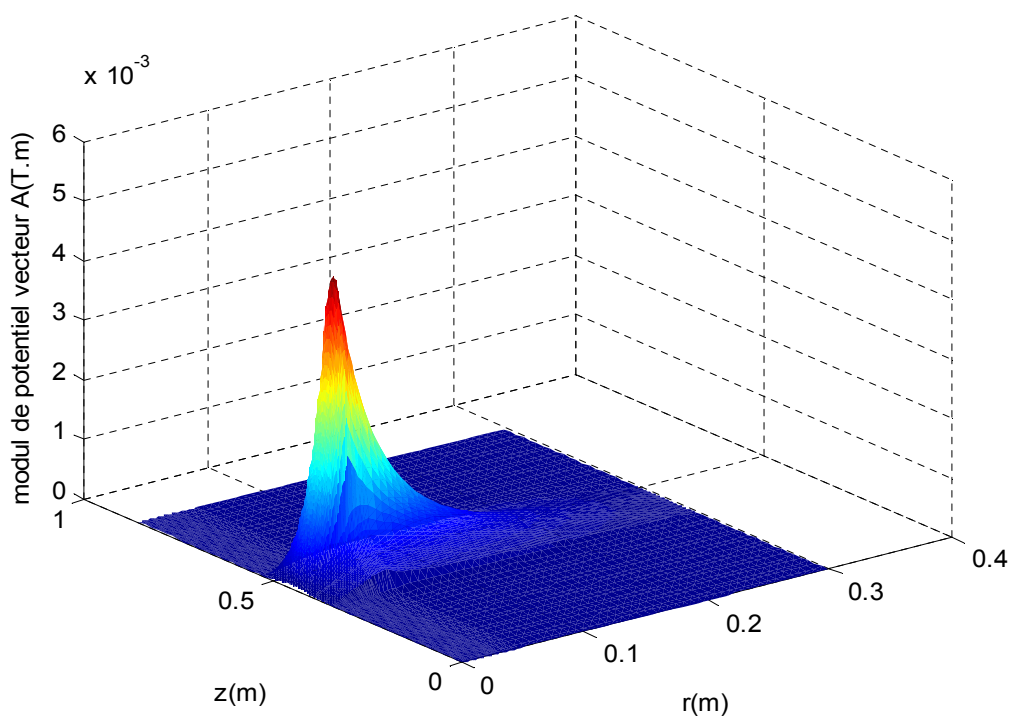


Figure 4.4: Répartition du module du potentiel vecteur magnétique dans le plan (r, z)

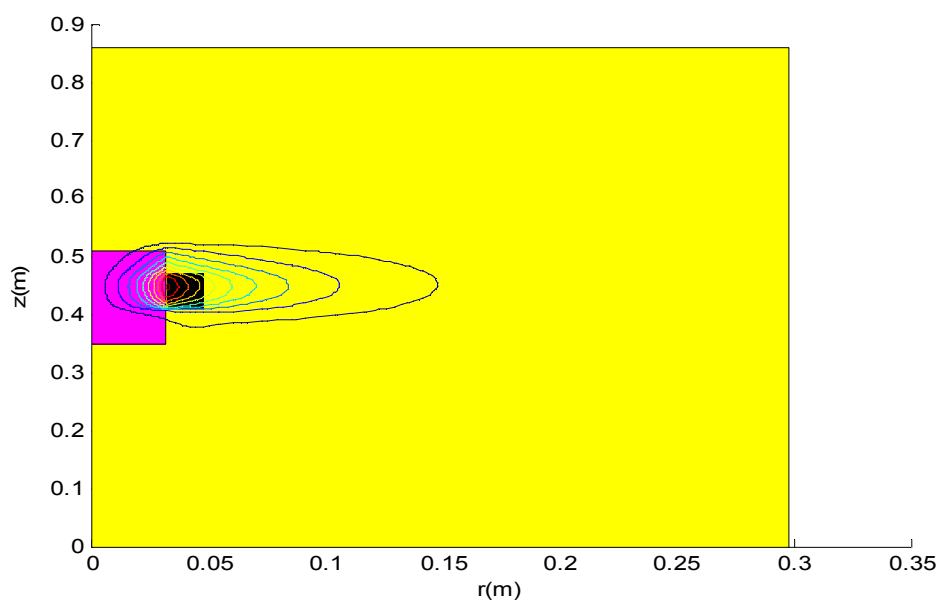


Figure 4.5 : lignes équipotentielle de A

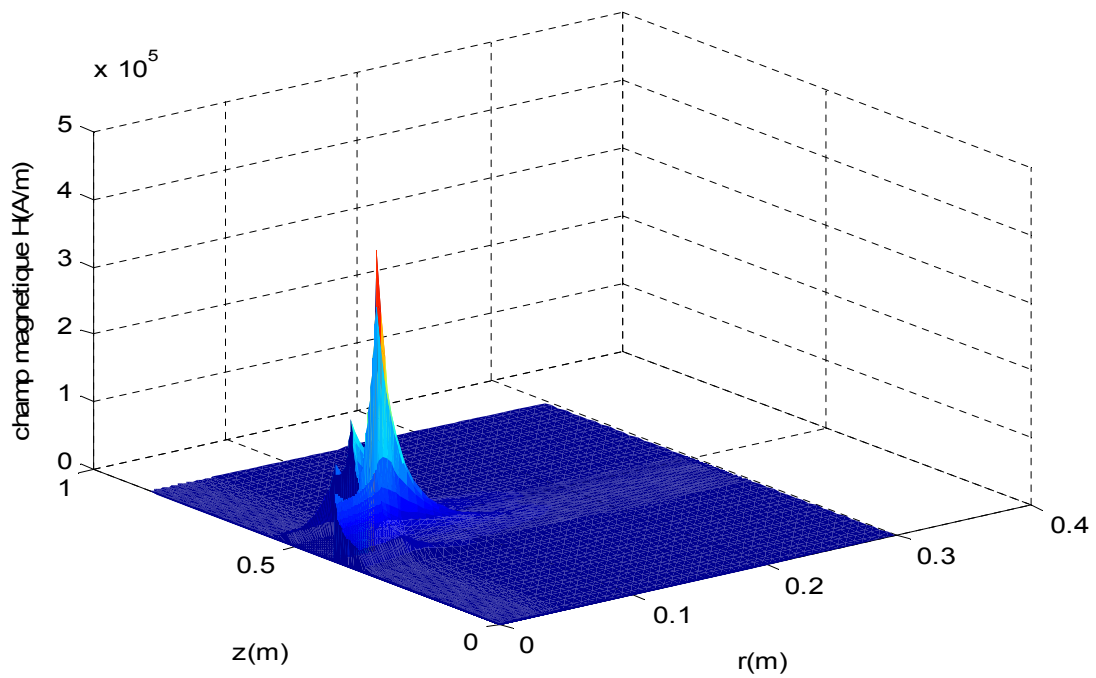


Figure 4.6: Répartition du module du champ magnétique H dans le plan (r, z)

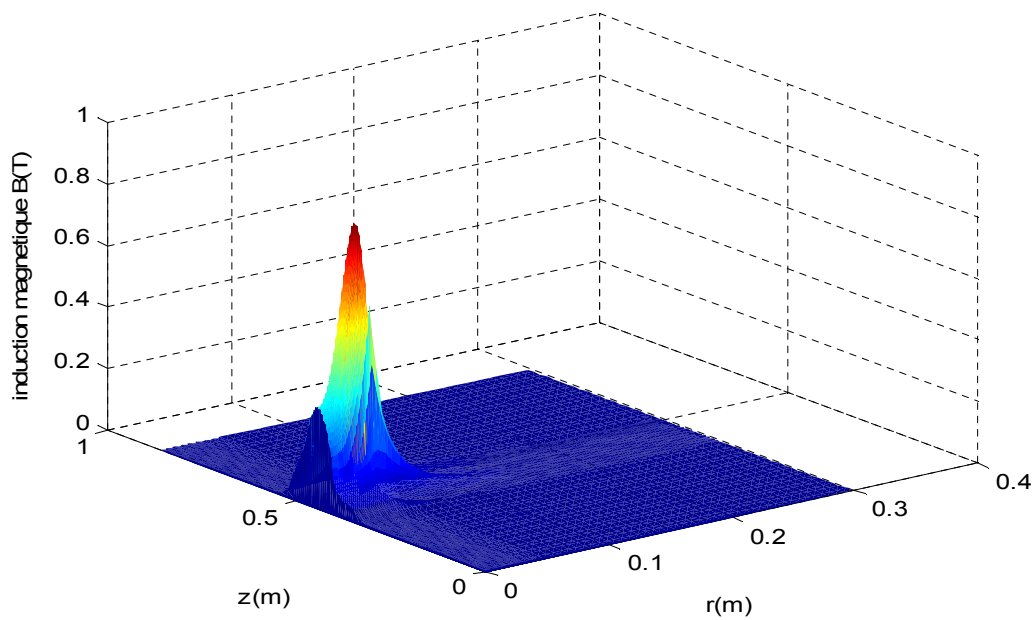


Figure 4.7 : Répartition du module de l'induction magnétique B dans le plan (r, z)

4.3.1 Interprétation des résultats :

Figure (4.3): Présente la variation radiale de potentiel vecteur magnétique pour des différentes positions.

Nous remarquons que le champ ait une valeur maximale au centre de l'inducteur diminuant progressivement jusqu'à avoir la valeur nulle à la limite du domaine d'étude

Figure (4.4) : Illustre la répartition du module potentiel vecteur dans le plan (r , z)

Nous constatons qu'il y a une bonne distribution de ce vecteur

Figure (4.5) : Représente les lignes équipotentiels de A et nous remarquons que ces lignes pénètrent bien à l'intérieur de la charge (zone actif) et prennent la valeur presque nulle à la limite du domaine d'étude.

Figure (4.6) : Illustre la répartition du champ H dans le plan (r , z) . Ce champ ait une valeur maximale de $H_{\max} = 2 \cdot 10^5$ A/m

Figure(4.7): Illustre la répartition de l'induction B dans le plan (r , z) . Cette induction a une valeur maximale est : $B_{\max} = 0,6$ Tesla.

4.4 Tests sur les facteurs influents sur les forces magnétiques :

Dans le but d'étudier les différents facteurs qui influent sur les forces magnétiques, on fait des tests comportant des modifications dans les grandeurs physiques et géométriques, les résultats obtenus après la résolution sont :

4.4.1 Effets de la modification des grandeurs physiques :

Examen des effets de la variation de la perméabilité relative de la charge μ_r :

La figure (4.8) représente les valeurs des forces magnétiques calculées pour de différents perméabilités relative de la charge (100,200,...,1500):

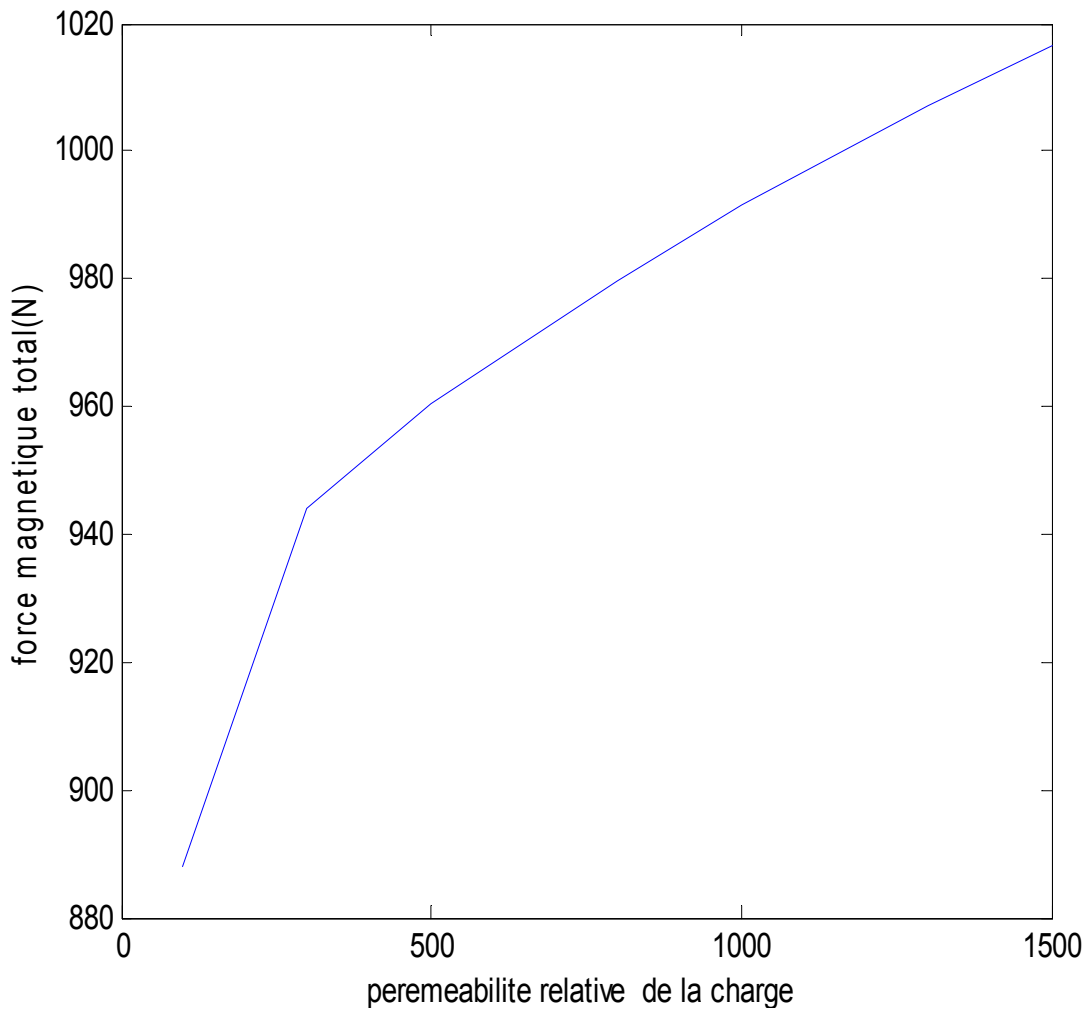


Figure 4.8 : Force magnétique en fonction de la perméabilité relative de la charge

On constate facilement qu'avec l'augmentation de la perméabilité relative de la charge la force produite augmente, on prend en considération que la valeur maximale admissible de perméabilité relative supportée égale $\mu_{ch} = 1500$.

Examen des effets de la variation densité de courant j :

Pour voir l'effet de la densité de courant on va appliquer un test pour les différentes valeurs de J ($1 \cdot 10^3$; $1 \cdot 10^4$; $1 \cdot 10^5$; $1 \cdot 10^6$; $2 \cdot 10^6$; $3 \cdot 10^6$; $4 \cdot 10^6$; $5 \cdot 10^6$) les résultats obtenu sont présentés sur la figure suivante :

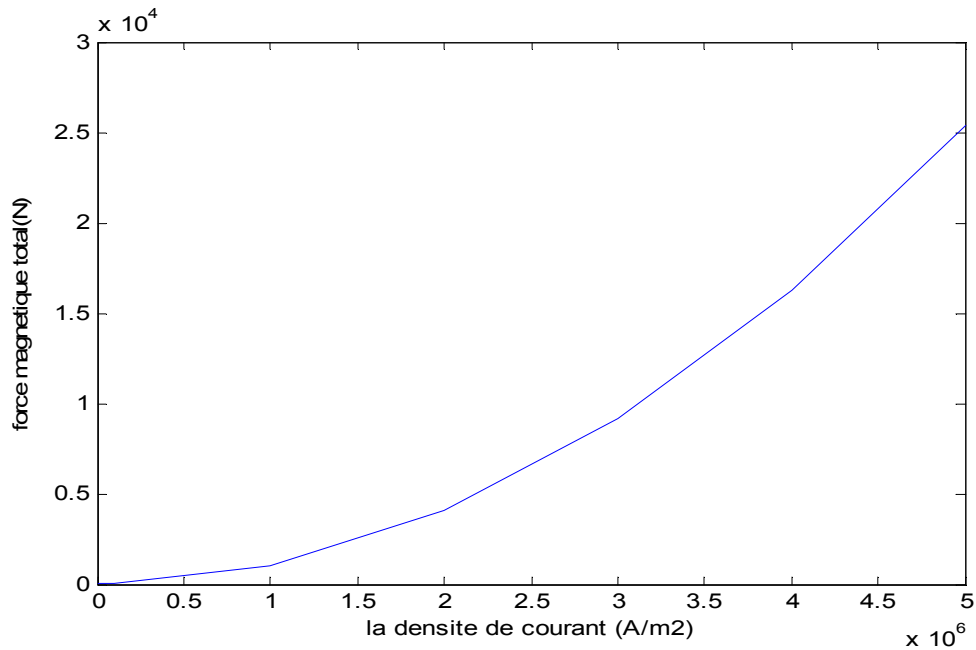


Figure 4.9 : Force magnétique en fonction de la densité de courant

D'après les résultats présentés sur la figure (4.9), nous remarquons qu'avec l'augmentation de densité de courant d'excitation la force produite augmente, on prend en considération que la charge est un matériau ferromagnétique,

4.4.2 Effet de la modification des grandeurs géométriques :

Examen des effets de la variation d'épaisseur (entrefer):

La figure (4.10) représentent les forces magnétiques pour des différentes épaisseurs de l'entrefer, on choisit quatre valeurs de l'entrefer (mm) (0.1 ; 0.5 ; 1 ; 1.5 ; 2)

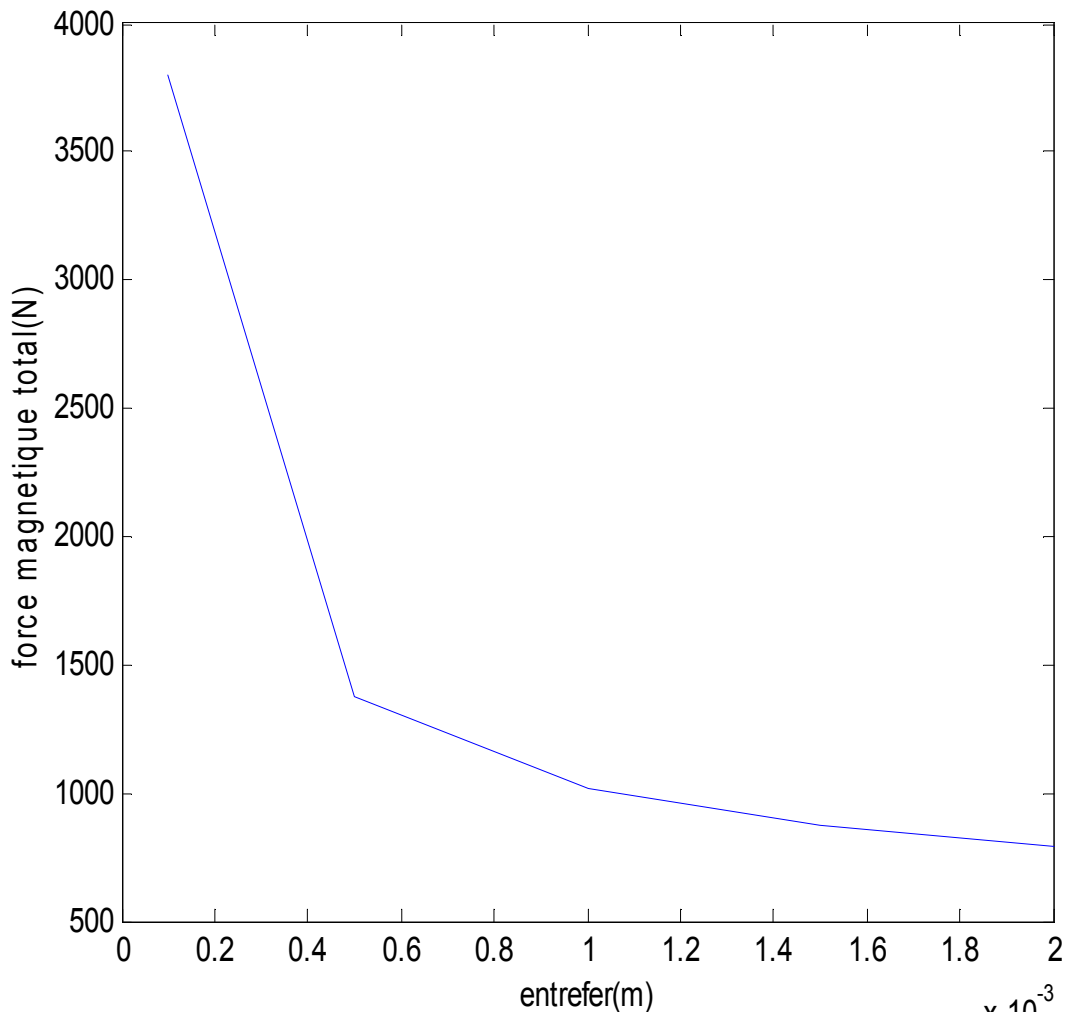


Figure 4.10 : Force magnétique en fonction d'entrefer

La diminution de l'entrefer donne une augmentation de la valeur de la force magnétique, ceci explique la zone active plus grande la force sera maximale ;

Examen des effets de la variation de la géométrie de la charge :

Les variations de la géométrie de la charge sont réalisées par modification du rayon ou avec modification de la hauteur.

- *Augmentation de rayon de la charge :*

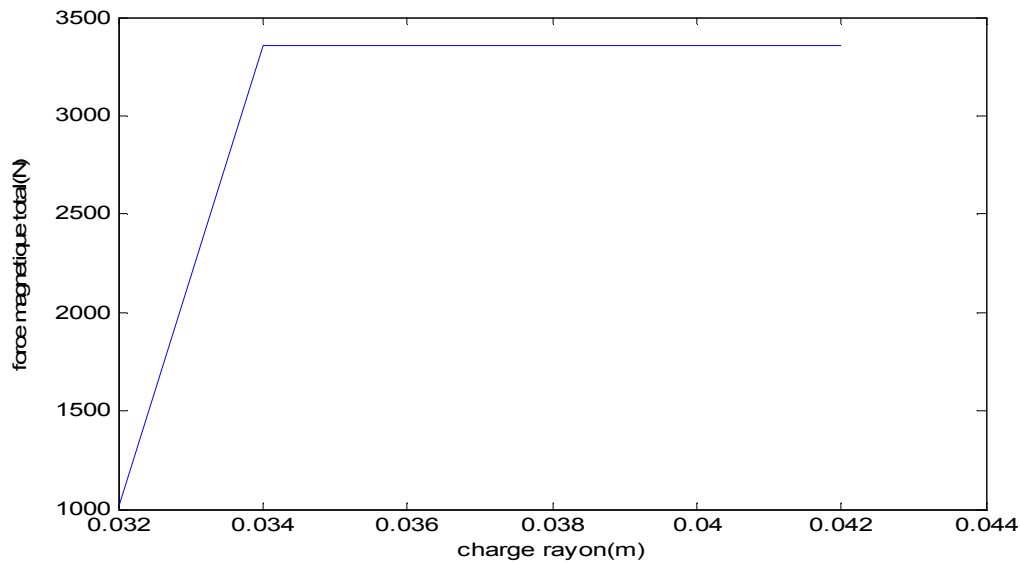


Figure 4.11 : Force magnétique en fonction du rayon de la charge

- *Augmentation de la hauteur de la charge :*

Pour voir l'influence de la hauteur de la charge par rapport à la forces magnétique nous faisons un test sur quatre valeurs de hauteur en **m** (0.095 ; 0.1 ; 0.105 ; 0.11)

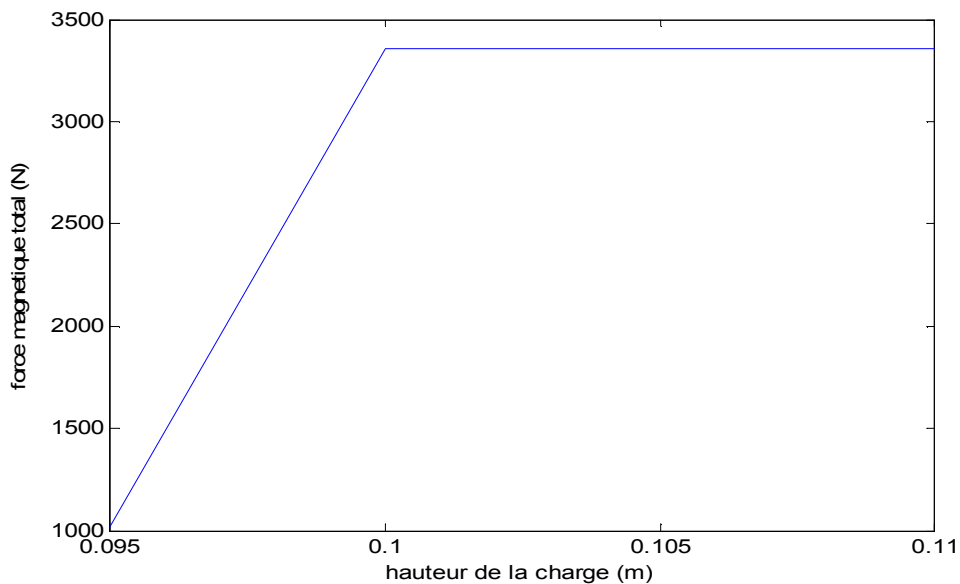


Figure 4.12 : Force magnétique en fonction de la hauteur de la charge

Nous remarquons que l'augmentation du rayon ou de la hauteur de la charge donne une augmentation jusqu'à un point où la force reste constante ($h = 0.1$ m) ceci est expliqué par la zone active ou les lignes qui pénètrent la charge.

Examen des effets de la variation de géométrie l'inducteur :

Les variations de la géométrie de l'inducteur effectuées avec une modification du rayon ou avec une modification de la hauteur de l'inducteur.

- *Modification du rayon de l'inducteur :*

Tests pour des valeurs différentes du rayon de l'inducteur en m (0.48 ; 0.50 ; 0.52 ; 0.54 ; 0.58) les résultats obtenus sont représentés par la figure (4.13).

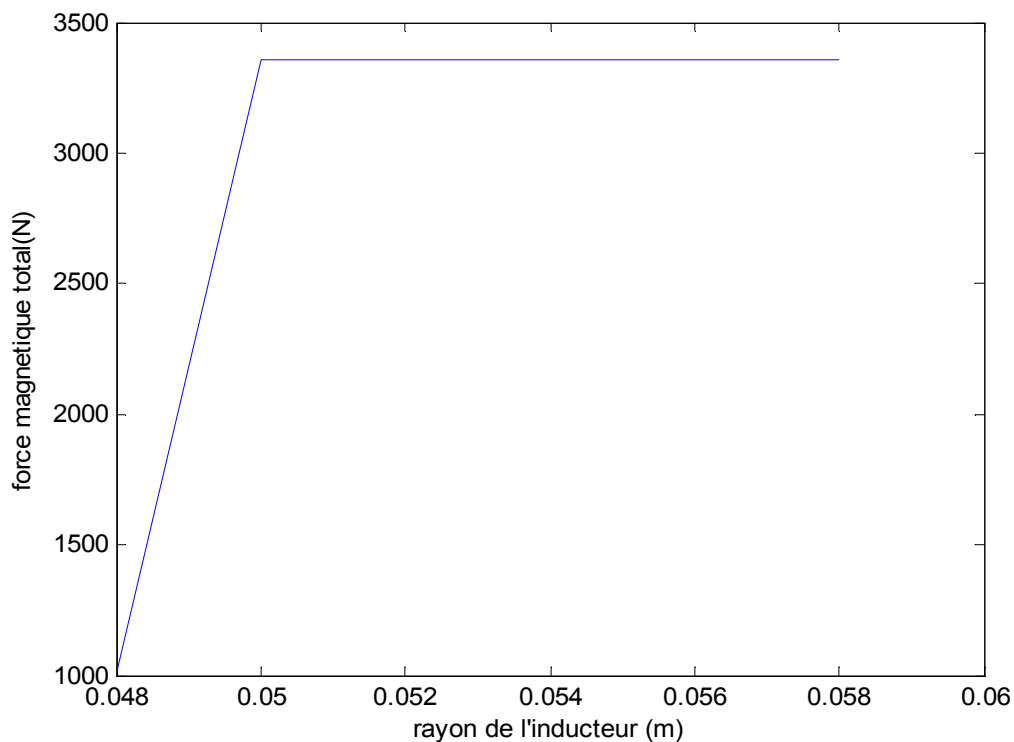


Figure 4.13 : Force magnétique en fonction rayon l'inducteur

- *Modification de la hauteur de l'inducteur :*

Ce test comporte un changement sur les valeurs hauteur de le du l'inducteur en **m** (0.12 ;0.122 ;0.124 ;0.126 ;0.128) ;0.13) sont représentés par la figure (4.14).

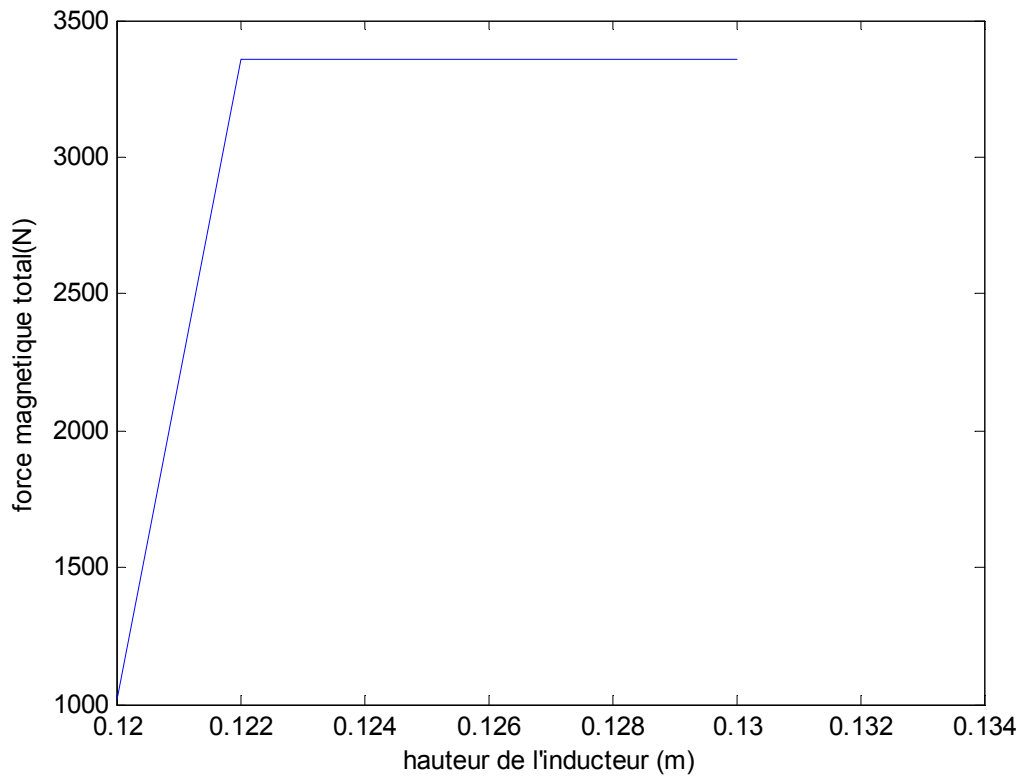


Figure 4.14 : Force magnétique en fonction hauteur de l'inducteur

Conclusion :

Ce chapitre est consacré au calcul des forces d'origine magnétique dans le dispositif cylindrique axisymétrique plein, et étudie l'effet des différents facteurs influant sur la valeur de cette force ;

Les lignes équipotentielles de A pénètrent bien à l'intérieur de la charge (zone active)

L'augmentation de la grandeur physique donne une augmentation des forces qui dépendent de la propriété des matériaux utilisés (acier $\mu_{ch} = 1500$)

La diminution de l'entrefer donne une augmentation des forces magnétiques.

CONCLUSION GENERALE

Dans le cadre de ce travail de Magister, le calcul des forces d'origine électromagnétique a été notre objectif principal dont la modélisation des phénomènes électriques et magnétiques couplés et présents dans ces structures est une étape primordiale à l'évaluation de ces forces.

En effet, partant des équations de base, celles de J. C. Maxwell, nous avons pu développer, d'une manière très détaillée, les modèles mathématiques dont l'objectif est la formulation mathématique des différentes équations aux dérivées partielles, caractéristiques aux phénomènes électromagnétiques. Le potentiel magnétique vecteur a été adopté comme inconnue mathématique du problème en vue de déterminer, par la suite, les grandeurs telles que l'induction magnétique, le champ magnétique, les courants induits, ...etc., utilisées dans les différents calculs des forces.

La méthode des Volumes Finis MVF est adoptée comme méthode de résolution des équations aux dérivées partielles, caractéristiques aux champs électromagnétiques, en vue de sa capacité de traiter le type d'applications et sa facilité de mise en oeuvre et d'implémentation sur le logiciel Matlab.

Une étude détaillée sur les différents types de forces d'origine électromagnétique a été proposée. Nous sommes intéressés plus particulièrement et d'avantage aux forces dues aux gradients de perméabilités magnétiques.

La méthode basée sur le Tenseur de Maxwell TM est adoptée pour l'évaluation quantitative de ces forces développées dans les structures électriques ayant une perméabilité magnétique remarquable. Les modèles mathématiques associés à ces forces ont été implémentés sous l'environnement de travail.

L'ensemble des modèles mathématiques et numériques ainsi développés ont été appliqués avec succès sur un exemple typique d'un système électrique : une structure bidimensionnelle, cylindrique et axisymétrique. Les résultats de la modélisation ainsi obtenus sont présentés et largement discutés. Ces résultats sont en concordance avec la réalité physique.

En perspective, nous proposons, à long terme, l'étude des effets, directs ou indirects, des forces d'origine **électromagnétique**, sur le comportement des systèmes électriques : à savoir, les vibrations, le bruit **et** nuisances, la magnétostriction, **etc...**Ceci constituera, sans aucun doute, la continuité naturelle et logique de notre travail élaboré dans le cadre de ce mémoire de Magister.

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] **Vicente AUCEJO – GALINDO**, “Méthode tensorielle générale pour une modélisation multi physique de dispositifs magnéto mécaniques rapides” Thèse de Doctorat Université de Paul Verlaine de Metz, 2010.
- [2] **ANDRE VANDER VORST**, “ Electromagnétisme (Champ, Forces et Circuits) ”, Université Catholique de Louvain, Laboratoire de Télécommunications et d’Hyperfréquences CABAY, Librairie- Editeur , Louvain-La-Neuve, 1985.
- [3] **J. C. SABONNADIÈRE, J. L. COULOMB**, “ Calcul des Champs électromagnétiques” Technique de l’ingénieur D.3020.pp.I-20
- [4] **ABDELLAH CHENTOUF**, “ Contribution à la Modélisation Electrique, Magnétique et Thermique d’un Applicateur de Plasma Inductif Haute Fréquence ”, Thèse de Doctorat, Université de NANTES, 1994.
- [5] **N. O. MATHEW SADIKU**, “Numerical Techniques in Electromagnetics”, CRC, London, 1992.
- [6] **N. PISKOUNOV**, “ Calcul Différentiel et Intégral ”, Tome 1, Edition MIR, Moscou, 1980.
- [7] **DANIEL EUVRARD**, “ Résolution Numérique des Equations aux Dérivées Partielles Différences Finies Elément Finis ”, Masson, Paris, France, 1987.
- [8] **MOHAMED RACHID MEKIDECHE**, “ Contribution à la Modélisation Numérique de Torches à Plasma d’Induction ” Thèse de Doctorat, Université de NANTES, 1993.
- [9] **G. D. G.TOUZOT**, “ Une Présentation de la Méthode des Eléments Finies ”, Maloine S.A. Editeur Paris, France,1984.
- [10] **M.COEVOET**, “ La Place de l’Induction dans l’Industrie ”, Congrès International, “ L’Induction dans les Procédés Industriels ”, Paris, France, Mai 1997
- [11] **SUHAS V. PATANKAR**, “Numerical Heat Transfer and Fluid Flow”, Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences.
- [12] **M. BOUMAH RAT, A. GOURDIN**, “ Méthode Numériques Appliquées ”, (O.P.U).
- [13] **R. DELIMI**, “Méthodes comparées pour le calcul des forces d'origine électromagnétique Application aux paliers magnétiques” Thèse de magister, Université de CONSTANTINE,2008.
- [14] **O. BARRE** , “Contribution à l’étude des formulations de calcul de la force magnétique en magnétostatique, approche numérique et validation expérimentale ” Thèse de Doctorat École Central de Lille et Université des Sciences et Technologies de Lille.2003.

- [15] **Luiz Henrique Alves DE MEDEIROS**, “Méthodes de calcul des forces électromagnétiques, Application au calcul des distributions de forces sur les aimants permanents” , Thèse de Doctorat de l'institut national polytechnique de Grenoble, 28 septembre 1998.
- [16] **BECHA HABIBA**, “Modélisation des phénomènes électromagnétique et thermiques couplés par la méthode des volumes finis et de la paramétrisation par induction”, Thèse magister ,2001 ,Université de Biskra.
- [17] **LOTFI ALLOUI**, “Modélisation tridimensionnelles par la méthode des volumes finis des phénomènes électromagnétiques et thermiques couplés dans les dispositifs de chauffage par induction”, Thèse de magister 2002-2003 , Université de Biskra.
- [18] **Hicham Allag, Mohamed El Hadi Latreche, Mohamed Rachid Mekideche, Abd El Ghani Kimouche**, “ New Technique of Numerical Derivative of Magnetic Energy for Determination of Local Force Densities from Finites Element Field Solutions” Monaco 26,29/03/2009.
- [19] **M.ZAOUIA, B. MEDDANE, R. BEN RAMDANE** “Etude d'un Moteur Linéaire Tubulaire par la Méthode des Eléments Finis” 4th International Conference on Computer Integrated Manufacturing CIP2007 UMM Tizi-Ouzou.
- [20] **Ali Rezik** , “étude comparative des différents modèles éléments finis pour le calcul des forces d'origine magnétique” mémoire de magistère 'université de Jijel ,2002.
- [21] **Kamel Srairi**, “ Modélisation d'actionneurs électromagnétiques alimentés en régime transitoire ”, Thèse de doctorat 1996 Université de NANTES.