



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Republique Algérienne Democratique Et Populaire



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة العربي التبسي - تبسة

Université Larbi tébessi – Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Civil

## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme de Master Académique**

En : (Génie Civil)

Spécialité : (Structures)

Par : ( Moussaoui Maroua)

Sujet :

# ÉTUDE NUMÉRIQUE DU L'EFFET DE LA TEMPÉRATURE SUR LA STABILITE DES PLAQUES COMPOSITES STRATIFIEES.

Présenté et soutenu publiquement, le 23 / 09 / 2020, devant le jury composé de :

Harkati.El Hadi

Professeur

Président

Salhi.m Lamine

Docteur

Rapporteur

Goudjile. Faycel

Docteur

Examineur 1

Promotion : 2019/2020

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Dédicace :

*Je dédie ce modeste travail a :*

- *mes Chers Parents, pour leur Dévouement et leur soutien permanent durant toutes mes années d'études, Leurs sacrifices illimités.*
  
- *A mes frères : Seif Eddine et Rami, Pour leurs encouragements et leur formidable soutien.*

*...Que Dieu les garde...*

Remercîment :

*Mes remerciements à dieu tout puissant pour Pla volonté, la santé et la patience qu'il m'a donnée toujours.*

*Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de recherche ; Monsieur salhi m.Lamine pour m'avoir proposé un sujet fort intéressant et pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'a dirigé tout au long de cette étude. Je le remercie aussi pour sa grande disponibilité, ainsi que pour sa profonde humanité et ses encouragements qui m'ont beaucoup aidé.*

*Mes plus vifs remerciements vont aussi aux membres du jury  
Pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.*

*Je tiens à exprimer mes sincères remerciements ainsi que ma grande gratitude et reconnaissance envers tous mes enseignants du département de « Génie civil ». D'université de Tébessa.*

**La liste de notations et symbole.**

Les symboles	Les Notations
$[\dots]$	Matrice
$\{\}$	Vecteur
$[\dots]^{-1}$	Matrice inverse
$[\dots]^T$	Matrice transposée
$\int$	Intégrale
$\Sigma$	La somme
$\partial$	La dérivée
$\int$	Intégrale
$h$	Épaisseur de la plaque
$[C]$	Matrice de rigidité
$[S]$	Matrice de souplesse
$[Q'_{ij}]$	La matrice de rigidité réduite hors axes principaux
$[T]$	la matrice de changement
$v_c$	Volume de matériau composite
$v_f$	Volume de fibre
$v_m$	Volume de matrice
$V_m$	Fraction volumique de matrice
$V_f$	Fraction volumique de fibre
$\epsilon_f$	Déformation de fibre
$\epsilon_m$	Déformation de matrice
$\epsilon_c$	Déformation de composite
$\sigma_f, \sigma_m, \sigma_c$	Contrainte suivant (fibre, matrice, composite).
$A_m; A_f$	Les Aries des sections droites de la fibre et de la matrice
$E_l$	Module de Young longitudinale
$E_2$	Module de Young transversale
$G_{ij}$	Module de cisaillement longitudinal
$\nu_{ij}$	Coefficient de Poisson longitudinal
$\sigma_{ij}$	Des contraintes
$\epsilon_{ij}$	Des déformations
$\{\sigma\}$	Vecteur des contraintes
$\{\epsilon\}$	Vecteur des déformations
$S_{ijkl}$	Tenseur de souplesse
$C_{ijkl}$	Tenseur d'élasticité
$u, v$	Déplacement suivante x, y
$w$	Déplacement suivante z
$\theta_x; \theta_y$	Rotation autour x et y
$K$	Nom de la couche
$\theta$	Angle d'orientation des fibres
$Q_x$	Force de cisaillement dans la direction x
$Q_y$	Force de cisaillement dans la direction y
$M_x; M_y$	Moments de flexion suivant les directions x et y
$M_{xy}$	Moment de torsion
$N_x; N_y$	Contraintes Normales
$N_{xy}$	Contrainte de cisaillement

$[A_{ij}]$	Matrice de rigidité en membrane
$[B_{ij}]$	Matrice de couplage membrane-flexion-torsion.
$[D_{ij}]$	Matrice de rigidité en flexion
$[H_{ij}]$	Matrice de cisaillement
U	Champs des déplacements
$F_{ij}$	Cisaillement hors plan
$K_{ij}$	Facteur de correction en cisaillement
$\sigma_x ; \sigma_y ; \sigma_z$	Contrainte normales
$\varepsilon_x$	Déformation dans les directions x
$\varepsilon_y$	Déformation dans les directions y
$\varepsilon_z$	Déformation dans les directions z
$\varepsilon^0_x, \varepsilon^0_y, \varepsilon^0_{xy}$	Déformation membranaire
$\sigma_{xz} \sigma_{yz}$	Résultante de cisaillement
$\phi_x ; \phi_y$	Les rotations des sections droites autour des axes x et y
$\gamma^0_{xz}; \gamma^0_{yz}$	La déformation en cisaillement moyenne
$Q'_{ij}$	Coefficient de rigidité
$h_k$	Partie supérieure de l'épaisseur de la plaque stratifiée
$h_{k-1}$	Partie inférieure de l'épaisseur de la plaque stratifiée
$\alpha_1$	Le coefficient de dilatation thermique longitudinal
$\alpha_2$	Le coefficient de dilatation thermique transversal
$\Delta T$	La variation de température
$N^T$	La force thermique
$M^T$	De moment thermique
a	Longueur de la plaque
b	Largeur de la plaque
a/b	Rapport de la longueur sur la largeur de la plaque.
h	L'épaisseur de la plaque
a/h	Rapport de la longueur sur l'épaisseur de la plaque.

**Les abbreviations:**

**CPT:** classical plate theory.

**FSDT:** first –ordre shear deformation plate theory.

**HDST:** High-order Shear Deformation Plate Theory.

**CCCC :** encadrée sur les quatre côtes.

**SSSS :** simplement appuyée sur les quatre côtes.

## La liste des tableaux.

### chapitre V: modélisations des plaques composites stratifiées.

Tableaux V.1 : les conditions aux limites.....	63
Tableau V.2 : les caractéristiques géométriques et mécaniques d'une plaque isotrope carrée simplement appuyées pour le premier type de matériau .....	63
Tableau V.3 : les températures critiques de flambement d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée pour le premier type de matériau. ....	64
Tableau V.4 : les caractéristiques géométriques et mécaniques d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée pour le deuxième type de matériau .....	65
Tableau V.5 : les températures critiques de flambement d'une plaque carrée isotrope simplement appuyées pour le deuxième type de matériau. ....	65
Tableau V.6: les caractéristiques géométriques et mécaniques d'une plaque isotrope carrée encastrée.....	66
Tableau V.7 : les températures critiques de flambement d'une plaque carrée isotrope encastrée .....	67
Tableau V.8 : les caractéristiques géométriques et mécaniques des plaques stratifiées symétrique simplement appuyés.....	68
Tableau V.9 : les températures critiques de flambement des plaques stratifiées symétrique rectangulaire simplement appuyées.....	70
Tableau V.10 : Propriétés des matériaux T300/5208, le AS4/3501-6 et E-glass/Epoxy .....	72
Tableau V. 11 : Les modules d'élasticité de stratifiée graphite/époxy à différentes températures .....	89
Tableau V. 12 : vérification de la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée croise antisymétrique [0/90/0/90] simplement appuyée. ....	89
Tableau V. 13 : vérification de la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée croise antisymétrique [0/90/0/90] encastré. ....	90
Tableau V. 14 : l'effet de la température et le rapport d'épaisseur sur la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée antisymétrique [0/90/0/90] simplement appuyée.....	91
Tableau V. 15 : l'effet de la température et le rapport d'épaisseur sur la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée antisymétrique [0/90/0/90] encastré. ....	92

**La liste des figures.**

Figure 1 : Pièces composites sur des structures d’aéronefs.....1  
 Figure 2 : Pièces composites sur des structures de transports terrestres.....2  
 Figure 3 : Pièces de sports et loisirs en matériaux composites.....2  
 Figure 4 : Application des matériaux composites dans le secteur médical.....2  
 Figure 5 : Répartition des secteurs d’application des matériaux composites.....3

**Chapitre I: Généralité sur les matériaux composites**

Figure I.1. Matériau composite .....5  
 Figure I.2 : les Constituants des matériaux composites. ....7  
 Figure I.3 : différentes familles de matrice.....7  
 Figure I.4 : principaux matériaux de renfort. ....8  
 Figure I.5: Composite sandwich. ....9  
 Figure I.6: Composite monocouche .....9  
 Figure I.7: Les constituants d'un composite stratifié. ....10  
 Figure I.8 : Composite stratifiée. ....10  
 Figure I.9 : Structure d'un composite stratifié .....11  
 Figure I.10 : convention d’un signe pour la désignation d’un stratifié. ....11  
 Figure I.11. Schématisation de l’effet miroir sur la stratification. ....13

**chapitre II: Comportement des plaques composites stratifiées.**

Figure II.1 : les utilisations des plaques.....17  
 Figure II .2: Cellule élémentaire d’un composite unidirectionnel. ....18  
 Figure II .3 : Schéma simplifié d’une traction longitudinale. ....19  
 Figure II .4 : Schéma simplifié d’une traction transversale. ....20  
 Figure II.5 : Schéma simplifié d’un essai de cisaillement longitudinal. ....21  
 Figure II.6 : Représentation schématique d’un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie. ....24  
 Figure II.7 : Matériaux transversalement isotropes .....26  
 Figure II.8: Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée.....28

**chapitre III: les theorie des plaques composite stratifiées.**

Figure III .1 : Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique de stratifiées .....32

Figure III .2 : Schématisation des résultantes en membrane.....34

Figure III .3 : Schématisation des moments de flexion et de torsion.....35

Figure III .4 :Schématisation des déformations dans le cas de Théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT).....40

Figure III .5 : Schématisation des résultantes en membrane.....43

Figure III .6 : Schématisation des moments de flexion et de torsion.....44

Figure III .7 : Schématisation des résultantes en cisaillement. ....45

**chapitre IV: phénomène de flambement thermique.**

Figure IV .1 : Schématisation du flambage.....48

**chapitre V: modélisations des plaques composites stratifiées.**

Figure V .1 : Différents types d'éléments disponibles dans la bibliothèque d ABAQUS .....62

Figure V .2 : Les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque isotrope carrée simplement appuyée pour le premier type de matériau.....64

Figure V .3 : Les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque isotrope carrée simplement appuyée pour le deuxième type de matériau.....66

Figure V .4 : Les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque isotrope carrée encastrée. ....67

Figure V. 5: présentation graphique de stratifié  $[0/90/90/0]_s$ .....69

Figure V.6: présentation graphique de stratifié  $[0/45/-45/90]_s$ .....69

Figure V.7 : Les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque stratifiée symétriques rectangulaire  $[0/90/90/0]_s$  simplement appuyés. ....71

Figure V .8 : Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée croisée simplement appuyée.....73

Figure V. 9: Les modes de flambement d'une plaque stratifiée AS4/3501-6 pour différents rapports d'aspect simplement appuyée. ....74

Figure V. 10: Les modes de flambement d'une plaque stratifiée T300/5208 pour différents rapports d'aspect simplement appuyée. ....74

Figure V. 11 : Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée croisée encastrée.....	75
Figure V. 12 : Les modes de flambement d'une plaque stratifiée T300/5208 pour différents rapports d'aspect (encastrée).....	76
Figure V. 13 : Les modes de flambement d'une plaque stratifiée AS4/3501-6 pour différents rapports d'aspect (encastré) .....	76
Figure V. 14 : Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées AS4/3501-6 simplement appuyée.....	78
Figure V. 15 : Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées T300/5208 simplement appuyée.....	78
Figure V. 16 : Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées E-glass/Epoxy simplement appuyée. ....	79
Figure V. 17 : Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées AS4/3501-6 encastrée. ....	80
Figure V. 18 : Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées T300/5208 encastrée.....	80
Figure V. 19 : Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées E-glass/Epoxy encastrée.....	81.
Figure V. 20 : L'effet du nombre des couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées T300/5208 simplement appuyée. ....	82
Figure V. 21 : L'effet du nombre des couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées E-glass/Epoxy simplement appuyée. ....	83
Figure V. 22: L'effet du nombre des couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées T300/5208 encastrée. ....	83
Figure V. 23 : L'effet du nombre des couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées E-glass/Epoxy encastrée.....	84
Figure V. 24 : L'effet du rapport $E_L/E_T$ sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée. ....	85
Figure V. 25 : L'effet du rapport $E_L/E_T$ sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastrée. ....	86

Figure V. 26 : L'effet du rapport  $\alpha_T/\alpha_L$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastree. ....87

Figure V. 27 : L'effet du rapport  $\alpha_T/\alpha_L$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée. ....87

Figure V. 28 : L'effet de la température et le rapport d'épaisseur (a/h) sur la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée [0 /90/0/90] simplement appuyée. ....91

Figure V. 29 : L'effet de la température et le rapport d'épaisseur (a/h) sur la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée [0 /90/0/90] encastre.....92

## **Résumé:**

Les matériaux composites sont de plus en plus utilisés dans divers domaines tels que le génie civil, aérospatial, le ferroviaire, naval, l'automobile et utiliser aussi dans le domaine aéronautique, travaux publics et bâtiment, médical, Sports et loisirs ... etc.

Du fait de cette intense utilisation dans les divers domaines industriels, les structures en matériaux composites travaillent souvent dans des conditions environnementales très difficiles, tel que les hautes températures, qui peuvent influencer de manière significative le comportement de ces structures.

L'objectif de ce travail est d'étudier numériquement l'effet de la température sur la stabilité des Plaques composites stratifiées en utilisant le logiciel **ABAQUS** basé sur la méthode des éléments finis. De plus, dans ce travail, une vaste étude paramétrique sur le flambement thermique des plaques stratifiées est présentée, tel que, le type du matériau, les conditions aux limites, la stratification, le rapport d'aspect, le rapport d'anisotropie, le rapport d'épaisseur et la dépendance de propriété mécanique. Il a été conclu que la température critique de flambement peut être significativement affectée par les paramètres considérés. Une modélisation du comportement des plaques stratifiées composite est présentée les résultats de modélisations sont en bon accord avec ceux de littératures.

**Mots clés :** plaques stratifiées, flambement thermique, matériaux composite, effet de la température.

## الملخص

يتم استخدام المواد المركبة في مجالات مختلفة مثل الهندسة المدنية، الفضاء، السكك الحديدية والبحرية، السيارات و تستخدم أيضا في مجالات الطيران، الأشغال العمومية و البناء، الطب، الرياضة و الترفيه. . الخ بسبب الاستخدام المكثف في مختلف المجالات الصناعية، غالبا ما تعمل الهياكل المصنوعة من مواد مركبة في ظروف بيئية صعبة للغاية مثل درجات الحرارة المرتفعة، والتي يمكن أن تؤثر بشكل كبير على سلوك هذه الهياكل.

الهدف من هذا العمل هو دراسة العددية لتأثير درجة الحرارة على استقرار الصفائح ذات الطبقات المصنوعة من المواد المركبة باستخدام برنامج ABAQUS معتمد على طريقة العناصر المنتهية. بالإضافة إلى ذلك تم تقديم دراسة بارامترية كبيرة عن الانبعاج الحراري لصفائح ذات الطبقات مثل نوع المادة، الشروط الحدية، التقسيم الطبقي، نسبة الطول على العرض، نسبة تباين الخصائص الميكانيكية، نسبة الطول على السمك وارتباط الخصائص الميكانيكية. و تم استنتاج أن درجة الحرارة الحرجة تتأثر بشكل كبير بمعايير التي تم النظر فيها . و تم كذلك عرض سلوك الصفائح ذات الطبقات المركبة ووجد أن نتائج النمذجة تتوافق بشكل جيد مع نتائج المتاحة في المراجع .

*الكلمات المفتاحية: الصفائح ذات الطبقات ، الانبعاج الحراري ، المواد المركبة ، اثر الحرارة*

## **Abstract:**

Composite materials are increasingly used in various fields such as civil engineering, aerospace, railway, naval, automotive and use also in the aeronautical field, public works and construction, medical, sports and leisure ... etc.

Due to this intense use in the various industrial fields, composite structures often work under very difficult environmental conditions, such as high temperatures, which can significantly influence the behaviour of these structures.

The objective of this work is to study numerically the effect of temperature on the stability of laminated composite plates using the ABAQUS software based on the finite element method. In addition, in this work, an extensive parametric study on thermal buckling of laminated plates is presented, such as, material type, boundary conditions, stratification, aspect ratio, anisotropy ratio and thickness ratio and mechanical property dependence.. It was concluded that the critical buckling temperature can be significantly affected by the parameters considered. A modelling of the behaviour of composite laminated plates is presented; the results of the modelling are in good agreement with those of the literature.

**Keywords:** laminated plates, thermal buckling, composite materials, temperature effect.

## Table des matières

Remercîment.....	I
Liste des Notations et symbole .....	II
Liste des Tableaux.....	IV
Liste des Figures.....	V
Résume.....	IX
ملخص.....	X
Abstract.....	XI
Table des matières .....	XII
Introduction général.....	1

### Chapitre I : Généralité sur les matériaux composites.

I.1) Introduction .....	5
I.2) Définition de matériaux composite .....	5
I.2 .1) Définitions de base .....	5
I.3) Les caractéristiques des matériaux composites .....	6
I.4) Les type des matériaux composites .....	6
a) Grande diffusion .....	6
b) Hautes performances .....	6
I.5) Constituants des matériaux composites .....	7
I.5.1) le matrice .....	7
I.5.2) Le renfort .....	8
I.6) Architecteur des matériaux composites .....	9
I.6.1) Les sandwichs .....	9
I.6.2) Les monocouches .....	9
I.6.3) Les stratifiées .....	10

I.6.3.1) les orientations des fibres de composite stratifiées .....	10
I.6.3.2) les stratifiés a base de fibre unidirectionnelle.....	11
I.6.3.3) Désignation des structures stratifiées .....	11
a)Angles positifs et négatifs .....	12
b) Stratifiés Désignation .....	12
c) Stratifiés symétriques .....	12
d) Pourquoi la symétrie miroir ? .....	12
e) Séquence .....	13
f) Stratifiés hybrides .....	14
I.7) Les avantages et inconvénients de matériaux composite .....	14
I.8) Conclusion .....	15

## **Chapitre II : Comportement des plaques composites stratifiées.**

II .1 : Historique des plaques.....	16
II .2) Introduction .....	16
II .3) Définition des plaques.....	16
II .4) Domaine d'utilisation des plaques.....	16
II .5) Loi de comportement des stratifiées .....	17
II .6) Les caractéristiques mécaniques d'un pli composite (mélange renfort matrice).....	17
II .6.1) Modules de Young longitudinale $E_1$ .....	19
II .6.2) Modules de Young transversal $E_2$ .....	20
II .6.3) Module de cisaillement longitudinal $G_{12}$ .....	21
II .6.4) Coefficient de Poisson longitudinal $\nu_{12}$ .....	21
II .7) La relation contrainte – déformation.....	22
II .7.1 : Différents Types des matériaux .....	23
a)Matériaux anisotropes .....	23
b)Matériaux orthotropes.....	24
c) Matériaux transversalement isotropes (unidirectionnels).....	26

d)Matériaux isotrope .....	27
II .8) Relation contrainte-déformation plane.....	28
II .9) Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres .....	28
II .10) Conclusion .....	30
<b><u>Chapitre III : Les théories des plaques composite stratifiées.</u></b>	
III .1 ) Introductions .....	31
III .2 )Théorie Classique des Stratifiés (CLT) .....	31
III .2.1)les hypothèses de la Théorie de Kirchhoff .....	31
III .3 ) Le champ de déplacements de la théorie CLT .....	32
III .3.1) Expression du champ des déformations.....	32
a) Des déformations en membrane .....	33
b) des déformations en flexion et torsion .....	33
III .3.2 )Le champ de contraint .....	33
III .4 ) Expression des résultantes et des moments .....	34
a) Résultantes en membrane .....	34
b) Moment de flexion et de torsion .....	35
III .5) Équation constitutive .....	36
III .6 ) Influence de l'empilement des couches .....	37
a) Couche isotrope.....	37
b) Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux .....	37
C) Couche orthotrope non rapportée à ses axes .....	37
III .7 : Les type de stratifiée .....	38
✓ Stratifiés symétriques .....	38
✓ Stratifiés croisés .....	38
✓ Stratifiés croisés symétriques .....	38
✓ Stratifiés antisymétriques .....	39

✓ Stratifiés croisés antisymétriques .....	39
III .8 ) Théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT) .....	39
III .8.1 ) Les hypothèses de la Théorie de Mindlin- Reissner .....	39
III .9) Le champ de déplacements de la théorie FSDT .....	40
III .9 .1 )Expression du champ des déformations .....	41
a)des déformations de membrane .....	41
b) des déformations en flexion et torsion .....	42
c) le champ des déformations en cisaillement transverse .....	42
III .9.2 ) Le champ de contraint .....	42
III .10 ) Expression des résultantes et des moments .....	43
a)Résultantes en membrane .....	43
b) Moment de flexion et de torsion .....	44
c) Résultantes en cisaillement .....	45
III .11)Équation constitutive .....	46
III .12 ) Conclusion .....	47

### **Chapitre IV : Phénomène de flambement thermique.**

IV .1) Introduction .....	48
IV .2) définition de flambement .....	48
IV .3) L'effet de la température sur les matériaux composites .....	48
IV .4) L'origines de phénomène de flambement thermique .....	49
IV .5) Flambement thermique des plaques composites : synthèse bibliographique .....	49
IV .5.1 ) Eléments finis basés sur la théorie classique des stratifiée.....	50
IV .5. 2) Eléments finis basés sur la théorie de cisaillement du premier ordre.....	50
IV .5. 3) Eléments finis basés sur la théorie de cisaillement d'ordre supérieur .....	51
IV.6) Relations cinématique .....	52
• Théorie classique des stratifiés .....	52

IV .6.1) le champ de déplacement .....	52
IV .6.2) Le champ des déformations .....	52
IV .6.3) Loi de comportement .....	52
IV .7) Energie potentielle .....	54
IV .8) Relations cinématique .....	55
• Théorie de Déformation en Cisaillement de Première Ordre (FSDT) .....	55
IV .8.1) le champ de déplacement .....	55
IV .8.2) Le champ des déformations .....	56
IV .8.3) Loi de comportement .....	56
IV .9) Energie potentielle .....	59
IV .10) Convergence de la température critique de flambement.....	59
Température critique de flambement avec dépendance à la température : .....	59
IV .11) Conclusion .....	60

### **Chapitre V : Modélisation des plaques composites stratifiées.**

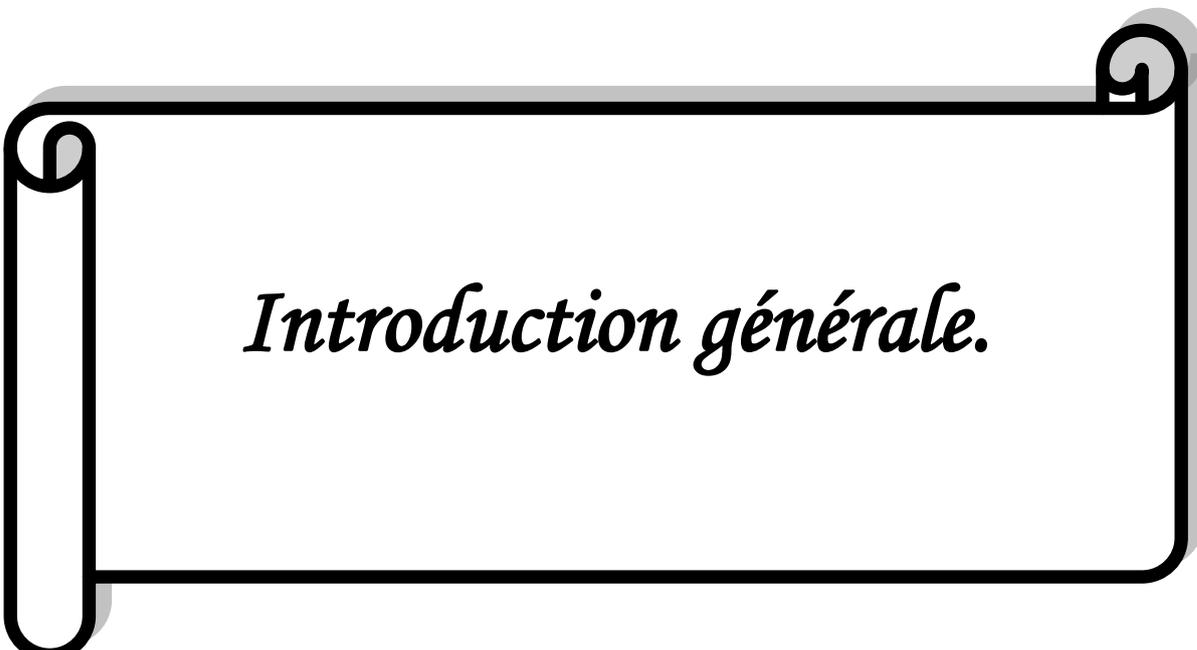
V.1) Introduction .....	61
V.2) Présentations du logiciel ABAQUS.....	62
V.2.1) Bibliothèque des éléments ABAQUS.....	62
V. 3) Étude comparative .....	63
V. 3.1) Plaques isotropes.....	63
a) Plaque isotrope simplement appuyée .....	63
b) Plaque isotrope encastree .....	66
V. 3.2) Plaques stratifiée .....	68
a)Plaques stratifiées rectangulaires simplement appuyées.....	68
V. 4) Etude paramétrique.....	72
V. 4.1) Effet du rapport d'aspect a/b.....	72
V. 4.1.1) Effet du rapport d'aspect (a/b) sur la température critique de flambement des Plaques stratifiées croisées.....	72

V. 4.1.2) Effet du rapport d'aspect (a/b) sur la température critique de flambement des plaques stratifiées équilibrées.....	77
V. 4.2) Effet du nombre de couches.....	82
V. 4.3) L'effet de l'anisotropie.....	85
V. 4.3.1) L'effet du rapport des modules de Young ( $E_L/E_T$ ).....	85
V. 4.3.2) L'effet du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ ).....	86
V. 4.4) L'effet de rapport l'épaisseur (a/h) et la dépendance des propriétés mécaniques a la température sur la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) .....	88
V. 4.4.1) Validation .....	88
a) Plaque stratifiée croisées simplement appuyé et encasté .....	88
V. 4.4.2) Etude paramétrique .....	90
V. 5) Conclusion.....	93
Conclusion générale.....	94
Référence bibliographique.....	96
Annexe .....	101
A.1 : Modélisation sur l'ABAQUS CAE.....	101
A.1.2 : Les principaux Modules d' ABAQUS .....	101
a) Le module « PART » .....	101
b) Le module « PROPERTY ».....	101
c)Le module « ASSEMBLY ».....	101
d) Le module « STEP ».....	101
e)Le module « INTERACTION ».....	102
f) Le module « LOAD » .....	102
j) Le module « JOB » .....	102
h) Le module « MESH ».....	102

i) Le module « VISUALIZATION »..... 102

g) Le module « SKETCH » .....102

A.1.2 : Méthodologie .....102



*Introduction générale.*

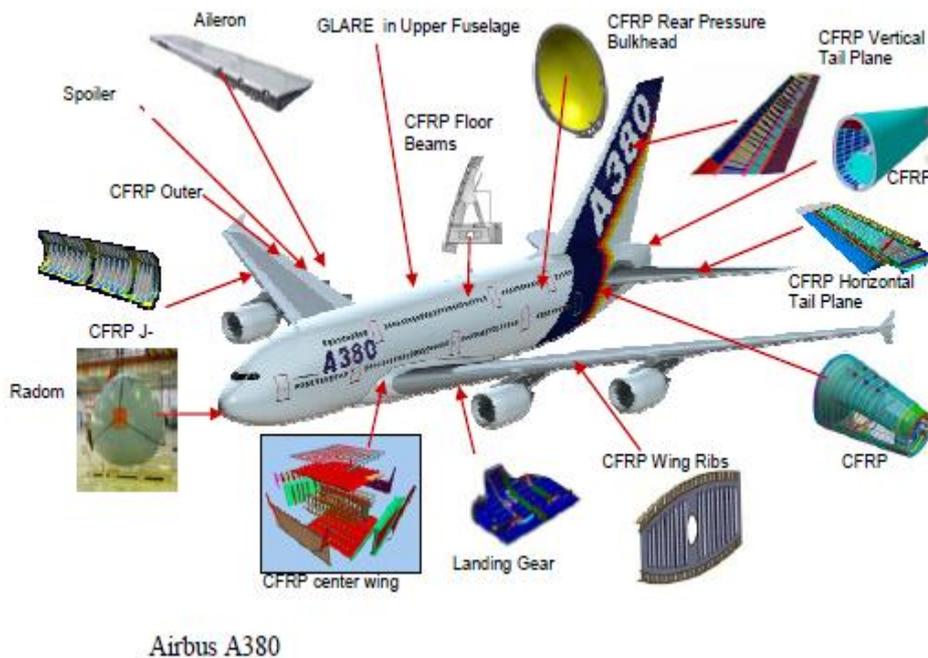
## Introduction générale :

Ces dernières années ; Les chercheurs s'efforcent toujours de développée de nouveau matériaux **plus efficaces, stable, économique** et qui dureront **plus long temps**. C'est le défi requis et nécessaire de nos jours pour les matériaux. En effet, on ne découvre plus de nouveaux matériaux, mais on crée plutôt des nouvelles associations de matériaux. Le but de ces associations est d'obtenir un **matériau composite**.

Les matériaux composés sont très largement utilisés dans divers domaines tels que aérospatial, le ferroviaire, naval, l'automobile et utiliser aussi dans le domaine de travaux publics et bâtiment, médical, Sports et loisirs ... etc.

La nature de ces matériaux les rend très adaptables à chaque région et vous pouvez choisir pour chaque structure le meilleur compromis entre coût / poids / résistance mécanique. Nous avons l'habitude de dire que dans le composé "le matériau ne présente pas dans la structure" et donc chaque conception nécessite également de lier la méthode de fabrication la plus adaptée aux contraintes économiques. [13]

### ✚ Domaine aéronautique :



**Figure 1 :** Pièces composites sur des structures d'aéronefs [62]

**+ Domaine automobile :**



**Figure 2 :** Pièces composites sur des structures de transports terrestres [62].

**+ Domaine Sports et loisirs :**

Les sports et loisirs utilisent des composites hautes performances (HP) avec un taux de renforts de plus de 70%. Les composites permettent d'augmenter sur mesure les performances, la fiabilité des articles de sports. Les applications rencontrées concernent les raquettes de tennis, casques de protection, cannes à pêche, skis, planches à voiles, arcs, flèches ... etc. [14]



**Figure 3 :** Pièces de sports et loisirs en matériaux composites [16].

**+ Domaine Médical :**

Les applications des composites dans le domaine médical et de sécurité sont très récentes et concernent plutôt les composites hautes performances, à matrice époxy et fibres de carbone, ou à matrice thermoplastique et fibres longues de verre ou de carbone d'autre part. [14]



**Figure 4 :** Application des matériaux composites dans le secteur médical [16]

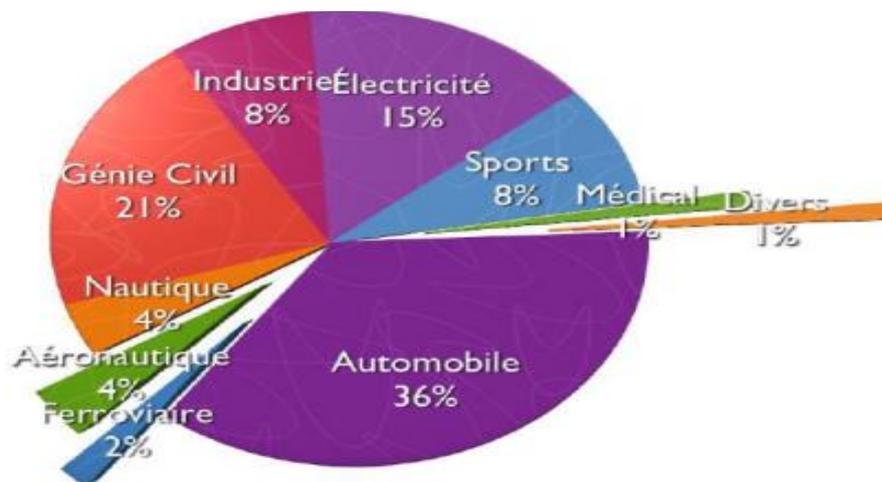
### **+ Domaine ferroviaire**

Le secteur ferroviaire utilise principalement des composites à matrice thermodurcissable et fibres longues, mais il apparaît peu dynamique. Dans le secteur ferroviaire, la facilité de conception et le bon comportement au feu sont les principaux atouts des matériaux composites. Les applications concernent les voitures, wagons, portes, sièges avant de motrices, gaines de ventilation

**+ Domaine Travaux publics et bâtiments** : Piscines, profilés, cloisons, portes, mobilier, sanitaires...etc.

**+ Domaine Spatial** : Corps de propulseurs, Réservoirs, Tuyères, corps de rentrée d'atmosphère,...etc.

**+ Domaine Electricité et électronique** : supports de circuits imprimés, disjoncteurs, Isolant, Coffrets,...etc. [14]



**Figure 5** : Répartition des secteurs d'application des matériaux composites. [16]

Du fait de cette intense utilisation dans les divers domaines, les structures en matériaux composites travaillent souvent dans des conditions environnementales très difficiles, tel que les hautes températures, qui peuvent influencer de manière significative le comportement de ces structures.

Selon Singer et al. [65], Les principaux effets de la haute température sur une structure, peuvent être classifiés comme suit :

- +** Détérioration des propriétés mécaniques des matériaux.
- +** Des contraintes thermiques dues au gradient de températures, qui peuvent causer le flambement thermique.
- +** Modification de la rigidité et des propriétés de vibration des éléments de la structure en raison de la présence de contraintes thermiques.

L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet de la température (distribution uniforme) sur la stabilité des plaques composites stratifiées en utilisant le logiciel **ABAQUS** basé sur la méthode des éléments finis sous différente condition aux limites et différents paramètres.

### **Plan de mémoire :**

Le présent travail est une contribution à l'étude des effets de la température sur la stabilité des plaques composites stratifiées en utilisant une modélisation par logicielle **ABAQUS**, basé sur la méthode des éléments finis. Comme on peut divise notre travail en Cinq grandes chapitres:

Tout d'abord, **Le premier chapitre**, est réservé aux généralités sur les matériaux composites.

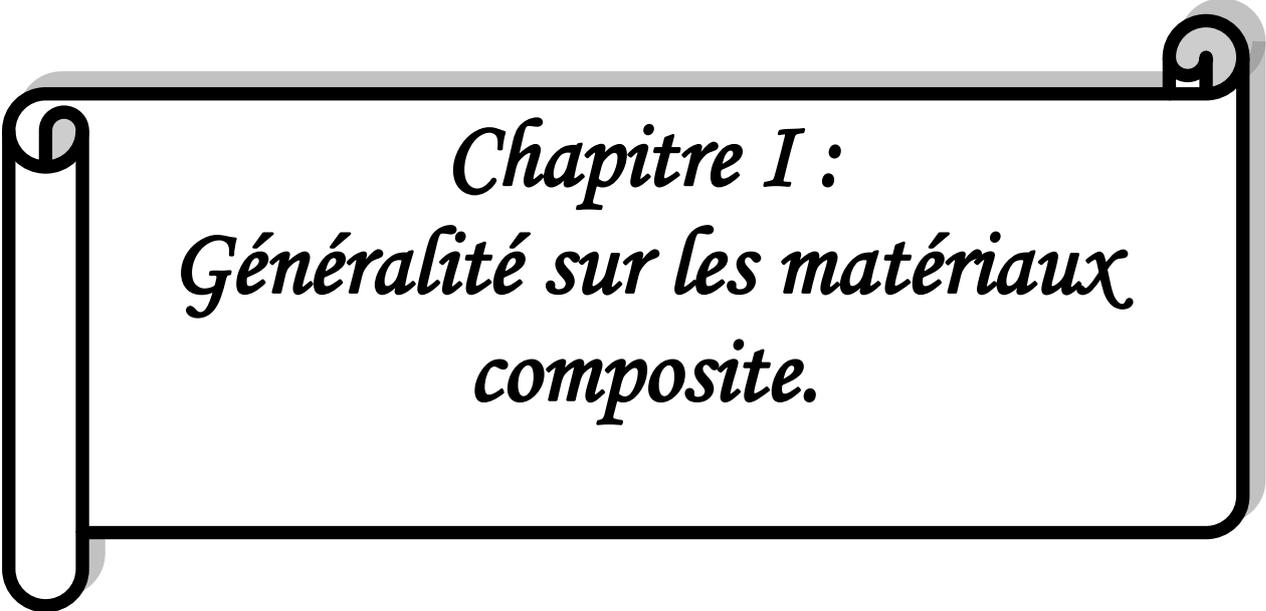
**Le deuxième chapitre**, est consacré a étude le comportement des plaques composite stratifiées, on présente aussi les principaux types des matériaux composites.

Ensuite, **le troisième chapitre**, constitue a la présentation des théories des plaques stratifiées, notamment la théorie classique de stratifiées (CLT), et la théorie de Déformation en Cisaillement de Première Ordre (FSDT) pour décrire le comportement des plaques composites stratifiées.

**Le quatrième chapitre**, est consacré à une synthèse bibliographique sur le phénomène du flambement thermique et les modèles éléments finis utilisés dans les littératures

**Le dernier chapitre**, est destiné à la validation des performances de notre modélisation numérique dans l'étude du flambement thermique des plaques composites stratifiées. Les résultats trouvés par notre modélisation, dans une série de cas test, ont été confortés à des résultats numériques et analytiques issus de la littérature. D'autre part dans ce chapitre, une vaste étude paramétrique est présentée sur des plaques composites faites de trois types de matériaux, à savoir : le T300/5208 Graphite/Epoxy, l'AS4/3501-6 Graphite/Epoxy et l'E-glass/Epoxy. L'étude paramétrique porte sur l'effet de certains paramètres pouvant affecter les températures critiques de flambement des plaques composites stratifiées; comme le rapport d'aspect, l'orientation des fibres, les conditions aux limites et nombre de couches, le rapport d'épaisseur, et la dépendance des propriétés mécaniques a la température. Dans cette étude, nous avons présenté, aussi, l'effet des rapports des modules de Young ainsi que celui des coefficients de dilatation thermique sur les températures critiques de flambement sous différentes combinaisons de condition aux limites.

Enfin, on termine ce travail par une conclusion général



*Chapitre I :*  
*Généralité sur les matériaux*  
*composite.*

## Chapitre I :

### Généralité sur les matériaux composites.

#### I.1) Introduction :

Dans ce chapitre nous présentons une connaissance générale sur les matériaux composite, leur caractéristique, ses différents types. Et les différentes constituantes de composite tell que (matrice et le renfort) et les rôles de chacun. Ensuite on va voir l'architecteur des matériaux composites comme (les sandwiches, les monocouches et les Stratifiées). Finalement dans ce chapitre on va présenter quelque avantage et inconvénient de composite.

#### I.2) Définition de matériaux composite :

« Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux ou plusieurs Matériaux de natures Différentes, leur association complémentaire et permet d'aboutir à un matériau dont les performances recherchées sont supérieur à celui des composants pris séparément. » [15]

Un matériau composite consiste dans le cas le plus général d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. Dans le cas de plusieurs phases discontinues de nature différentes, le composite est dit hybride. La phase discontinue est habituellement plus dure avec des propriétés mécaniques supérieures à celles de la phase continue. La phase continue est appelée **la matrice**. La phase discontinue est appelée le **renfort ou matériau renforçant**. [1]

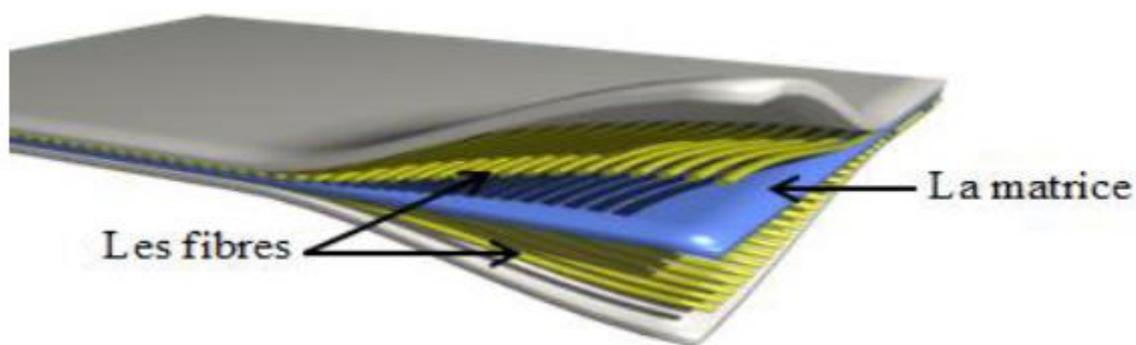


Figure I.1. Matériau composite [46]

#### I.2 .1) Définitions de base : [20]

- **Homogène** : même propriété physique en tout point du matériau.
- **Hétérogène** : en 2 points différents, propriétés physiques différentes.
- **Isotrope** : même propriété mécanique dans toutes les directions.

- **Isotrope transverse** : il existe un axe de symétrie, symétrie par rapport à une droite.
- **Orthotrope** : propriétés mécaniques symétriques par rapport à deux plans orthogonaux.
- **Anisotrope** : les propriétés mécaniques sont différentes selon les différentes directions.

**Donc** : on dit un **matériau composite** est un matériau **hétérogène et anisotrope**.

### **I.3) Les caractéristiques des matériaux composites :**

Les propriétés des matériaux composites dépendent de plusieurs facteurs et sont différentes selon les divers types de matériaux composites.

- ❖ Des propriétés de la nature et de la qualité des matériaux constitutifs.
- ❖ Des constituants, de la géométrie et de la distribution du renfort.
- ❖ De leurs interactions et de la nature de l'interface matrice-renfort.

La fabrication des pièces en matériaux composites constituées des caractéristiques principales sont :

- ❖ Le gain de masse.
- ❖ La bonne tenue en fatigue (durée de vie augmentée).
- ❖ L'absence de corrosion.
- ❖ Le vieillissement sous l'action de l'humidité et de la sensibilité aux certains produits chimique.
- ❖ Tenue aux impacts et aux chocs très moyens.
- ❖ Très forte anisotropie [17]

### **I.4) Les type des matériaux composites :**

#### **a) Grande diffusion:**

Ils ont des propriétés moyennes et orientées vers les coûts. Il représente 95% des matériaux composites utilisés et a un champ d'application très large : boîtier, emballage, décoration. [7]

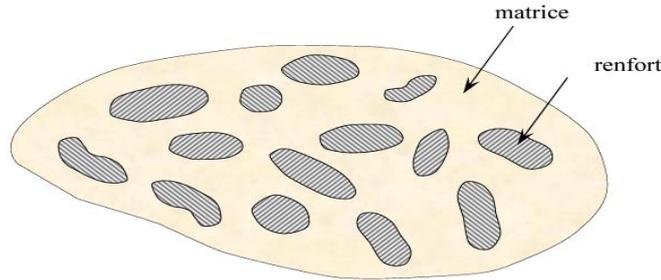
#### **b) Hautes performances :**

Il vise à améliorer les propriétés mécaniques et thermiques tout en réduisant le plus possible le poids. Ses coûts sont très élevés, et il est destiné à des applications avancées telles que la l'aéronautique et l'espace, les armes, le sport de haut niveau. [7]

**I.5) Constituants des matériaux composites :**

Le matériau composite se compose de :

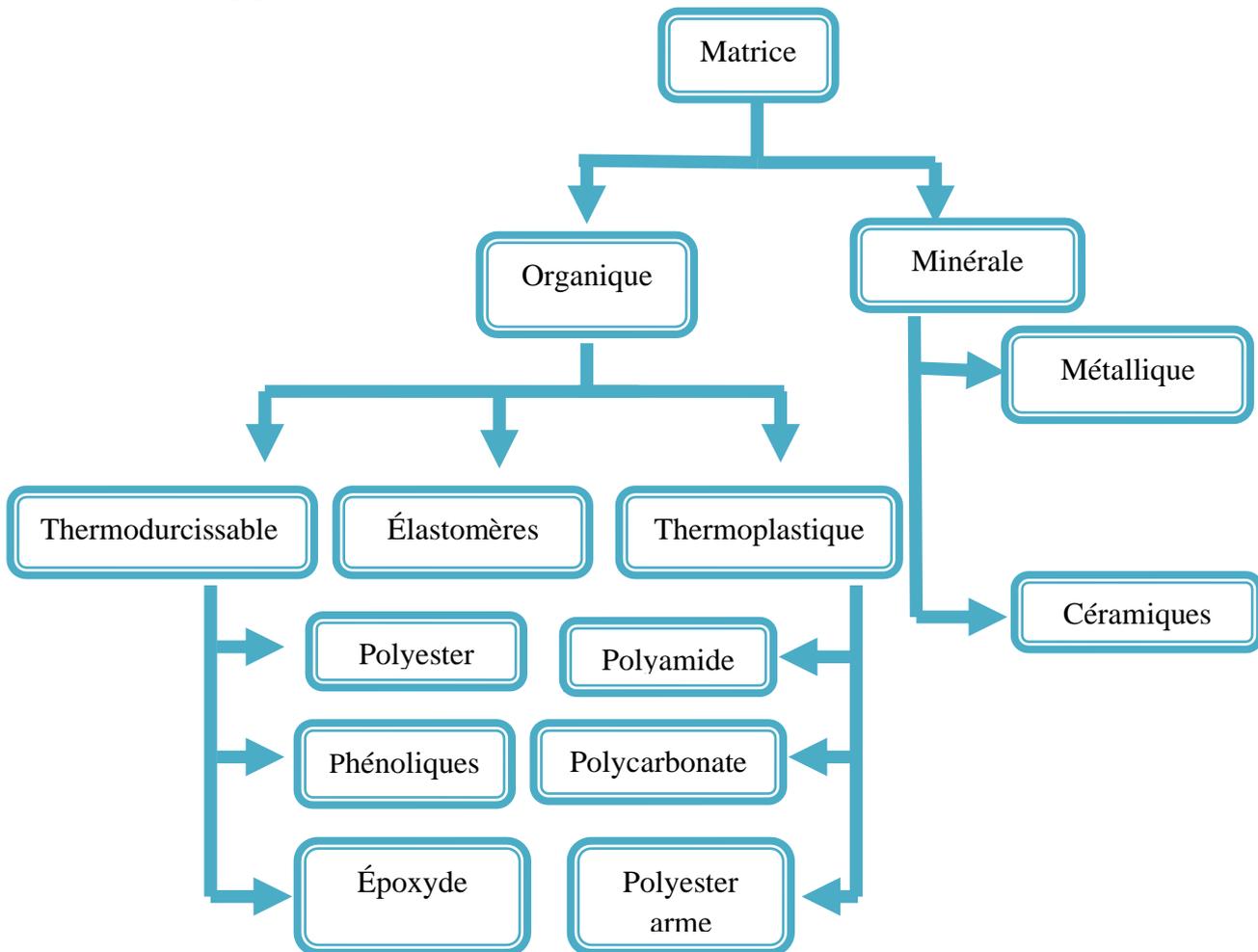
- ❖ la matrice.
- ❖ le renfort.



**Figure I.2 :** les constituants des matériaux composites. [1]

**I.5.1) la matrice :**

La matrice est le composant qui se lie aux fibres et les préserve, distribue les forces (résistance a la compression ou a la flexion) et assure la protection chimique des fibres On distingue différents types de matrice. [3]

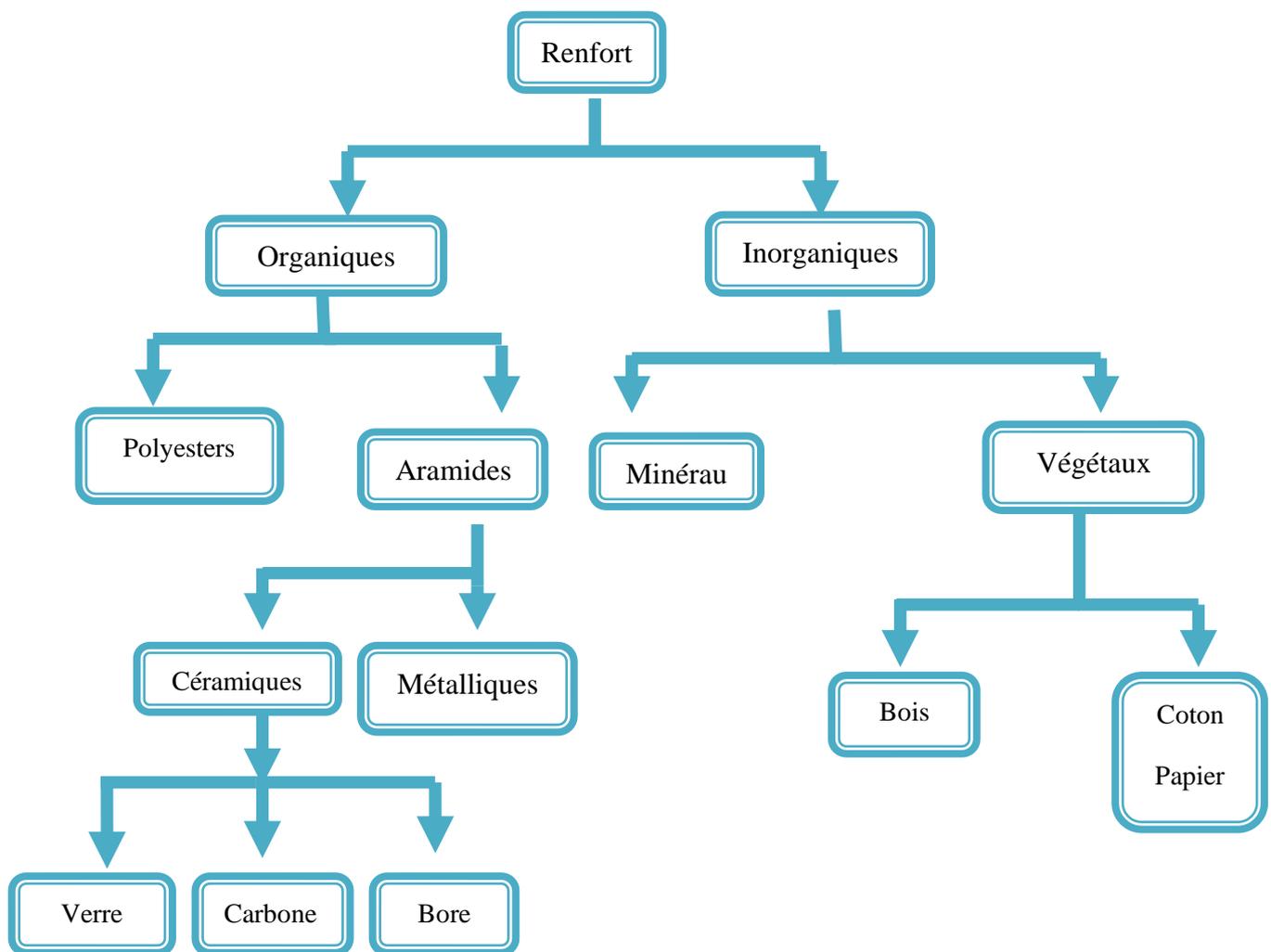


**Figure I.3 :** différente famille de matrice [27]

### I.5.2) Le renfort :

Souvent sous forme de fibres, le but des renforts dans les matériaux composites est essentiellement d'accroître leurs propriétés mécaniques (rigidité, résistance à la rupture, dureté, etc.) et d'améliorer des propriétés physiques, tels les comportements au feu et à l'abrasion, la tenue en température ou les propriétés électriques. Les caractéristiques recherchées dans les renforts sont une masse volumique faible, une compatibilité avec les matrices et une facilité de mise en œuvre. [5]

Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes suivantes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel). [4]



**Figure I.4 :** principaux matériaux de renfort. [19]

## I.6) Architecteur des matériaux composites :

On distingue dans les matériaux composites trois types :

- ✚ Les sandwichs.
- ✚ Les monocouches.
- ✚ Les Stratifiées.

### ➤ I.6.1) Les sandwichs :

Les sandwichs sont des matériaux possédant deux peaux de grande rigidité et de faible épaisseur renfermant un cœur (âme) de forte épaisseur et de faible résistance. L'ensemble forme une structure d'une grande légèreté. Le matériau sandwich possède une bonne résistance à la flexion et est un excellent isolant thermique. [9]

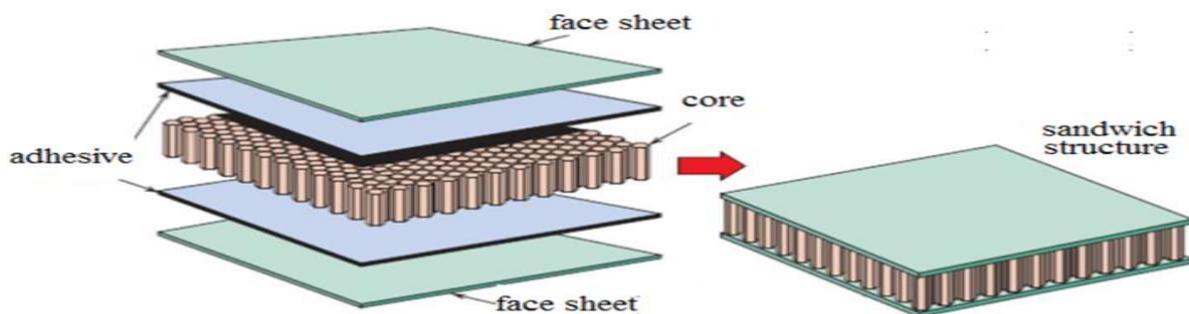


Figure I.5: Composite sandwich [11]

### ➤ I.6.2) Les monocouches :

Les monocouches est un l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : fibres longues, fibres tissées, et fibres courtes. [10]

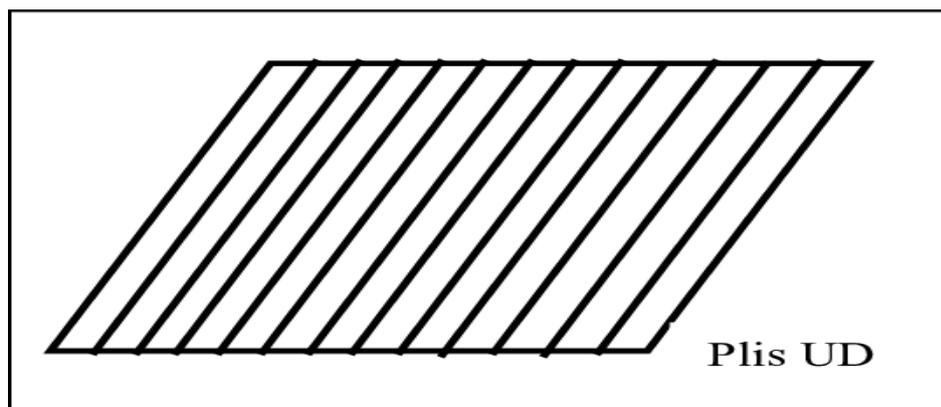
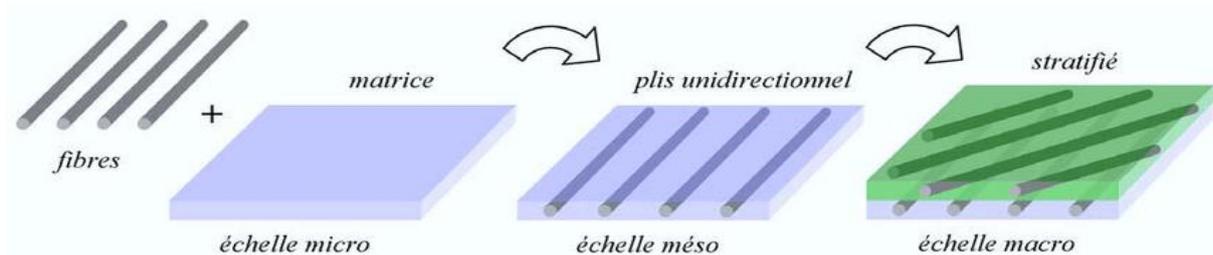


Figure I.6: Composite monocouche [18]

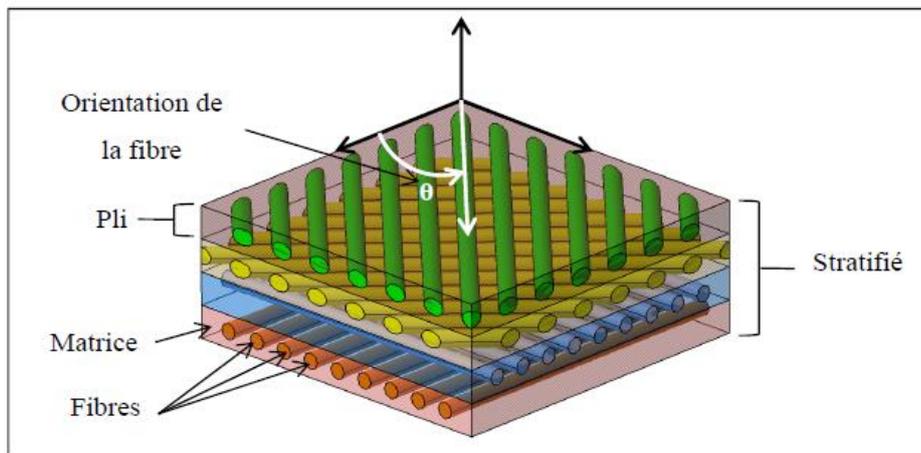
### ➤ I.6.3) Les stratifiées :

Les stratifiées sont constituées de couches successives de renforts (fils, mats...etc.) Imprégnées de résine. [1]



**Figure I.7:** Les constituants d'un composite stratifié. [24]

#### I.6.3.1) les orientations des fibres de composite stratifiées :



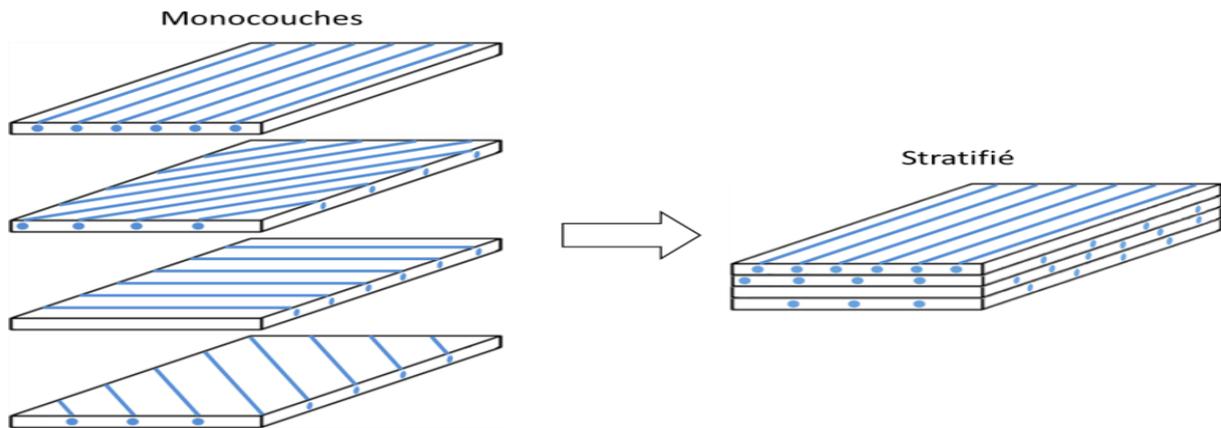
**Figure I.8 :** Composite stratifiée. [21]

On Pourra avoir des stratifiées du type : [8]

- ❖ **Equilibré :** stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction  $+\theta$  que de couches orientées suivant la direction  $-\theta$ .
- ❖ **Symétrique :** stratifié comportant des couches disposées symétriquement par rapport à un plan moyen.
- ❖ **Antisymétrique:** stratifié comportant des couches disposées non symétriquement par rapport à un plan moyen.
- ❖ **Croisé:** stratifié comportant autant de couches alternativement à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .
- ❖ **Hybride:** les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

### **I.6.3.2) Les stratifiés à base des fibres unidirectionnels :**

Les stratifiés à base de fibre unidirectionnels constituent un type de stratifié de base auquel peut se ramener en théorie tout autre type de stratifié. Ces stratifiés sont constitués de couches de fibre unidirectionnels, dont la direction est décalée dans chaque couche. [1]



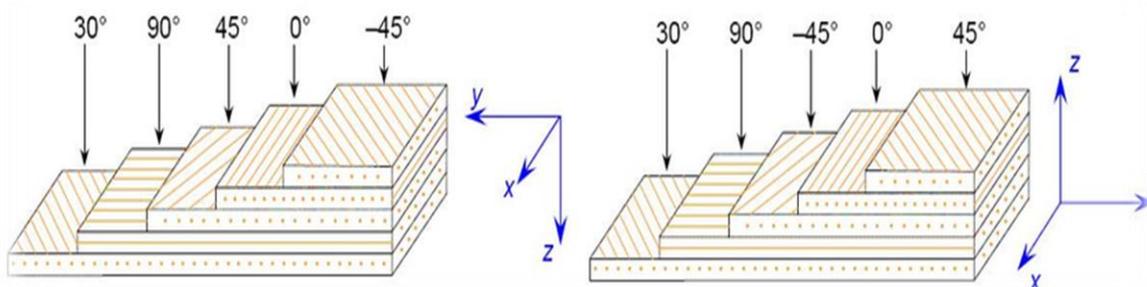
**Figure I.9 :** Structure d'un composite stratifié unidirectionnels [2]

### **I.6.3.3) Désignation des structures stratifiées :**

La désignation de ces stratifiés est généralement effectuée selon le code suivant :

- ❖ Chaque couche est désignée par un nombre indiquant la valeur en degrés de l'angle que fait la direction des fibres avec l'axe x de référence.
- ❖ Les couches successives sont séparées par un ( / ) si leurs angles sont différents.
- ❖ Les couches successives de même orientation sont désignées par un indice numérique.
- ❖ Les couches sont nommées successives en allant d'une face à l'autre. [1].

Un exemple de désignation d'un stratifié :



**Figure I.10:** convention d'un signe pour la désignation d'un stratifié. [1]

**a) Angles positifs et négatifs :**

Lorsque des couches sont orientées à des angles égaux en valeurs absolues, mais de signes opposés, les signes (+) ou (-) sont utilisés. La convention pour les angles positifs ou négatifs, Dépend du système d'axes choisi une inversion peut apparaître suivant le choix [1]

**b) Désignation des stratifiées :**

$$0^\circ \ 30^\circ \ -30^\circ \ -45^\circ \ 45^\circ \quad [\pm 45 / \mp 30 / 0]$$

$$0^\circ \ -45^\circ \ -45^\circ \ 45^\circ \ 45^\circ \quad [45_2 / -45_2 / 0^\circ]$$

**c) Stratifiés symétriques :**

Un stratifié est symétrique si son plan moyen est plan de symétrie. Sa désignation ne nécessite alors que la moitié des couches successives.

Si le stratifié a un nombre pair de couches, la désignation débute sur une face pour finir au Plan de symétrie. Un indice S indique que le stratifié est symétrique. [1]

Par exemple :

$$\begin{array}{c} 90^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \end{array} \quad [90 / 45_2 / 0]_s$$

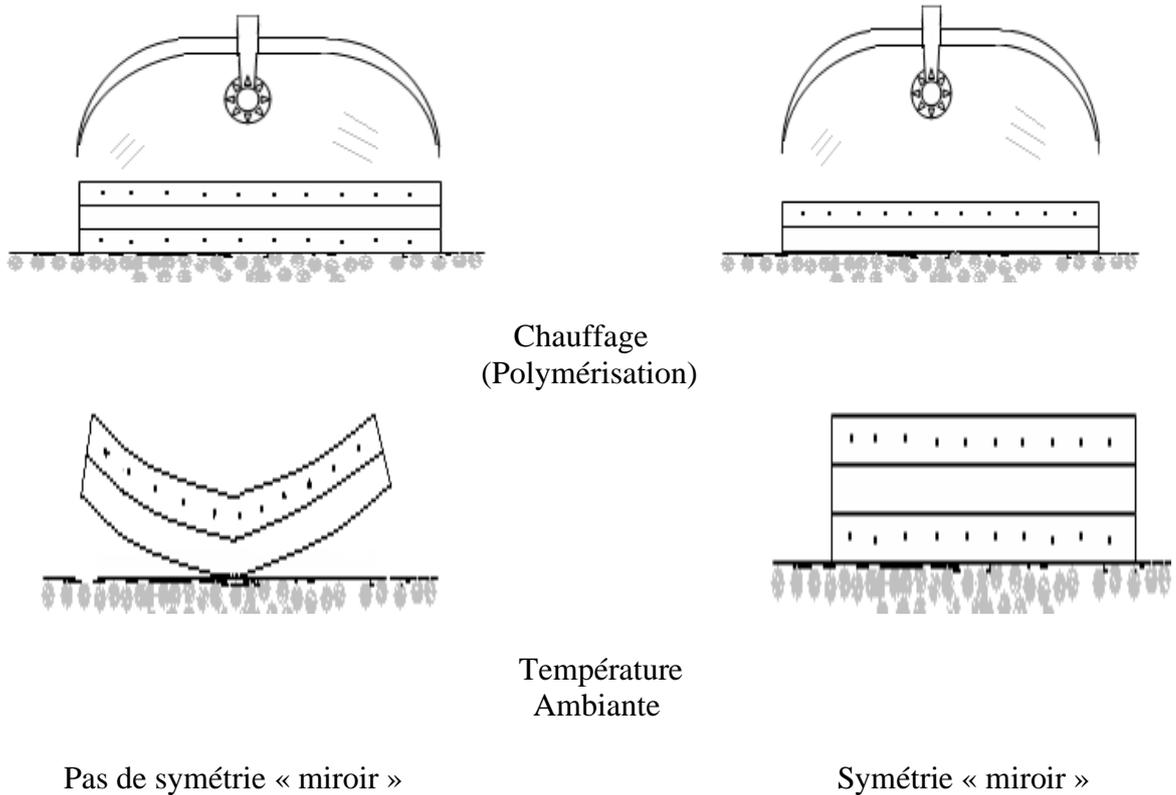
Si le stratifié comporte un nombre impair de couches, la désignation est semblable à la précédente, la couche centrale étant surlignée par exemple : [1]

$$\begin{array}{c} 90^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 45^\circ \\ \hline 0^\circ \\ \hline \overline{45^\circ} \\ \hline 45^\circ \\ \hline 90^\circ \end{array} \quad [90 / 45_2 / \overline{0}]_s$$

**d) Pourquoi la symétrie miroir ?**

D'après Daniel ; les plis successifs imprégnés de résine sont drapés à température ambiante, puis placés dans une étuve pour la polymérisation. Dans le composite ainsi créé à chaud, la dilatation d'ensemble de la pièce, d'origine thermique, s'effectue sans qu'il y ait variation globale de sa forme Par voilement ou gauchissement. Par contre, lors du refroidissement, les plis ont tendance à se contracter différemment suivant le sens des fibres ou suivant le sens travers. De là, l'apparition des

contraintes d'origine thermique. Lorsque la symétrie miroir est réalisée, elle entraîne la symétrie de ces contraintes, et empêche ainsi l'apparition des déformations d'ensemble de la pièce : voilement, gauchissement [12] , Comme l'illustre le schéma de la figure (I.13).



**Figure I.11.** Schématisation de l'effet miroir sur la stratification. [12]

**e) Séquence :**

La répétition de séquences peut être indiquée par un indice indiquant le nombre de fois où une séquence est successivement répétée. [1]

$$\begin{array}{c}
 \hline 0^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 90^\circ \\
 \hline 0^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 90^\circ \\
 \hline 90^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 0^\circ \\
 \hline 90^\circ \\
 \hline 45^\circ \\
 \hline 0^\circ
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 [(0 / 45 / 90)_2]_S \\
 \text{ou } [0 / 45 / 90]_{2S}
 \end{array}$$

**f) Stratifiés hybrides :**

Les stratifiés hybrides sont constitués de couches successives comportant des fibres de natures différentes. Il sera alors nécessaire de les mentionner dans la désignation. [1]

$$\begin{array}{c} \frac{0^\circ \text{V}}{45^\circ \text{C}} \\ \frac{-45^\circ \text{C}}{90^\circ \text{C}} \\ \frac{90^\circ \text{C}}{90^\circ \text{C}} \\ \frac{-45^\circ \text{C}}{45^\circ \text{C}} \\ \frac{45^\circ \text{C}}{0^\circ \text{V}} \end{array} \quad [0_v / \pm 45_c / 90_c]_s$$

$$\begin{array}{c} \frac{0^\circ \text{K}}{0^\circ \text{K}} \\ \frac{45^\circ \text{V}}{90^\circ \text{V}} \\ \frac{45^\circ \text{V}}{0^\circ \text{C}} \\ \frac{0^\circ \text{C}}{0^\circ \text{C}} \end{array} \quad [0_{2c} / (45 / 90)_{sv} / 0_{2K}]$$

**Avec** : **V** : verre, **C** : carbone, **K** : Kevlar

**I.7) Les avantages et inconvénients de matériaux composite :**

Les matériaux composites ils présentent **des avantages** importants par rapport aux matériaux traditionnels il offre de nombreux avantage fonctionnel sont :

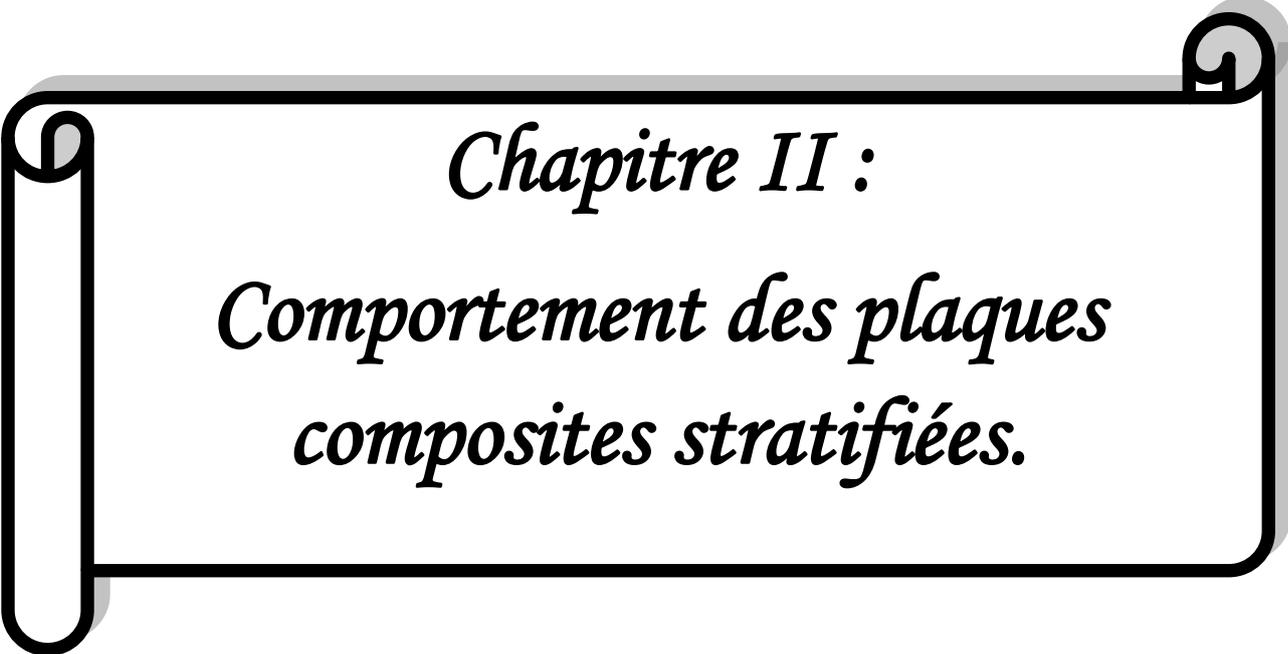
- Importantes rigidité et résistances spécifiques afin de concevoir des structures hautes performances.
- Faible sensibilité à la fatigue.
- Faible Sensibilité à la corrosion.
- Possibilité de réaliser des structures de formes complexes réduisant ainsi les coûts d'assemblages.
- Possibilité de dimensionner les structures avec des propriétés élevées uniquement dans les axes de chargement.

Les matériaux composites sont également limités aux **inconvénients** :

- Coût important du passage matériau métallique a matériau composite, prenant en compte le coût matériau et le coût associé au procédé de fabrication.
- Forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) constituant des maillons faibles au sein de la structure. [6]

**I.8) Conclusion :**

Dans ce chapitre nous nous sommes attachés à présenter une généralité sur les matériaux composites et les différents types de composite notamment les plaques stratifiées ; les différents aspects. Dans le but de donner un aperçu des différents constituants tels que le composite a grand diffusion et hautes performances ; leur caractéristique mécanique. Aussi nous avons présenté la désignation des stratifiées et les avantages et inconvénients des matériaux composites.



*Chapitre II :*

*Comportement des plaques  
composites stratifiées.*

## Chapitre II :

### Comportement des plaques composites stratifiées

#### II .1 ) Historique des plaques :

En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces. La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). [23]

#### II .2) Introduction :

L'analyse du comportement des plaques stratifiées reste toujours un problème de recherche ouvert, en raison de leur comportement complexe. [22] L'étude du comportement mécanique des matériaux composites a pour but de connaître leur réponse à une sollicitation donnée les variables mises en jeu dans ce domaine sont : le tenseur des contraintes ( $\sigma$ ) et le tenseur des déformations ( $\epsilon$ ) [64]

Les champs des déformations et des contraintes dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, caractérisant le comportement mécanique du milieu. L'expérience montre que de nombreux milieux solides déformables ont pour une température donnée et dans un intervalle donné de déformation un comportement **élastique linéaire**. [1]

#### II .3) Définition des plaques :

Une *plaque* est un solide limité par deux plans parallèles, dont la dimension transverse est petite en comparaison des deux autres dimensions (longueur, largeur). Les propriétés d'une plaque dépendent, en grande partie, de son *épaisseur* en fonction de ses autres dimensions .on distingue deux types des plaques :

- Les plaques minces.
- Les plaques épaisses.

On appelle  $h$  l'épaisseur de la plaque ; le plan inférieur est donc le plan  $z = -h/2$  et le plan supérieur est le plan  $z = h/2$ . [33]

#### II .4) Domaine d'utilisation des plaques :

Le domaine de l'utilisation de plaque est très répandu dans tous les domaines, en particulier dans le domaine du génie civil, on utilise dans les constructions simples (habitation) ou les ouvrage d'art Elle existe sous formes différentes, y compris les circulaires et rectangulaire et d'autre formes selon la qualité de l'ouvrage, comme celle –est représenté dans les photos ci –dessous : [34]



Constructions civiles.



Ouvrages d'arts (plaques circulaire).



Ouvrages d'arts ponts.

**Figure II.1** : les utilisations des plaques [34]

## **II .5) Loi de comportement des stratifiées :**

L'étude de comportement des stratifiés contenir deux phases principales :

- L'étude du comportement mécanique de chaque pli.
- L'étude de comportement global du matériau contient de plusieurs monocouche (plis) Et appelé généralement par le comportement du stratifiés [24]

## **II .6) Les caractéristiques mécaniques d'un pli composite (mélange renfort matrice) :**

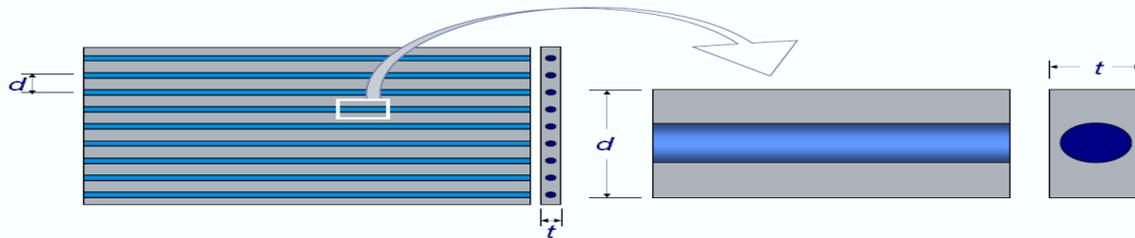
L'objectif de calcul d'un composite est déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau a partir de ses composants on va calculer les paramètres suivante :

- **Module d'Young E (longitudinale et transversal).**
  - **Coefficient de Poisson.**
  - **Module de cisaillement.**

Un des facteurs les plus importants qui déterminent les caractéristiques mécaniques d'un matériau composite est la proportion relative de matrice et de renfort. Cette proportion peut être exprimée par la fraction volumique (ou fraction en volume). [1]

Le cas qui nous intéresse ici est celui d'une couche renforcée par des *fibres unidirectionnelles* Uniformément distribuées dans le corps de la couche [25]. Voir la figure (II .2).

Soit une cellule élémentaire de *fraction volumique*  $V = 1$  constituée de fibres et de matrice avec :



**Figure II .2:** Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel [25]

- La fraction volumique de fibres est :

$$V_f = \frac{V_f}{V_c} \quad (\text{II .1})$$

- La fraction volumique de matrice est :

$$V_m = \frac{V_m}{V_c} \quad (\text{II.2})$$

**Avec :**

$$V_m = 1 - V_f \quad (\text{II .3})$$

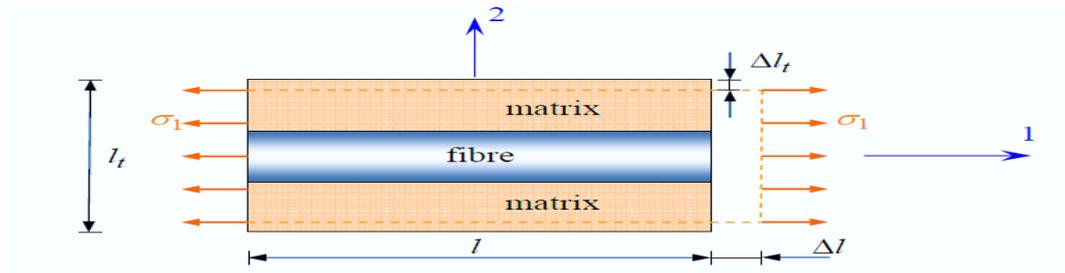
**Puisque :**

$$V_c = V_f + V_m \quad (\text{II .4})$$

$V_c$ ,  $V_f$  et  $V_m$  Sont respectivement le volume de matériau composite, volume de fibre et le volume de matrice. (Les indices  $c$ ,  $f$  et  $m$  seront systématiquement utilisés comme indices respectifs des caractéristiques du matériau composite, des fibres et de la matrice.) [1]

**II .6.1) Modules de Young longitudinale  $E_L$ :**

Le module d'Young longitudinal est déterminé dans un essai de traction longitudinale L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice. [1]



**Figure II .3 :** Schéma simplifié d'une traction longitudinale. [33]

Le lien élastique linéaire implique :

$$\sigma_1^m = E_m \varepsilon_1^m \quad , \quad \sigma_1^f = E_f \varepsilon_1^f \quad , \quad \sigma_1^c = E_1 \varepsilon_1^c \tag{II .5}$$

L'hypothèse d'adhérence parfaite a comme conséquence que la déformation est la même

Partout (en particulier, les sections droites restent planes):  $\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^c$  (II .6)

- Le lien élastique linéaire implique :

$$\sigma_1^c = E_1 \varepsilon_1^c = E_1 \varepsilon_1^f = E_1 \varepsilon_1^m \tag{II .7}$$

- L'équilibre impose la relation :

$$\begin{cases} \sigma_1^c A_c = \sigma_1^f A_f + \sigma_1^m A_m \\ \sigma_1^c A_c = E_1^f \varepsilon_1^f A_f + E_1^m \varepsilon_1^m A_m \\ \sigma_1^c A_c = E_1^f \varepsilon_1^c A_f + E_1^m \varepsilon_1^c A_m \\ \sigma_1^c A_c = \varepsilon_1^c (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \end{cases} \tag{II .8}$$

**Avec :**

$$V_f = \frac{V_f}{V_c} = \frac{A_f}{A_c} \quad \text{et} \quad V_m = 1 - V_f = \frac{A_m}{A_c} \tag{II .9}$$

**Donc :**

$$\begin{cases} E_1 \varepsilon_1^c A_c = \varepsilon_1^c (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \\ E_1 = \frac{E_1^f A_f + E_1^m A_m}{A_c} \end{cases} \quad (II .10)$$

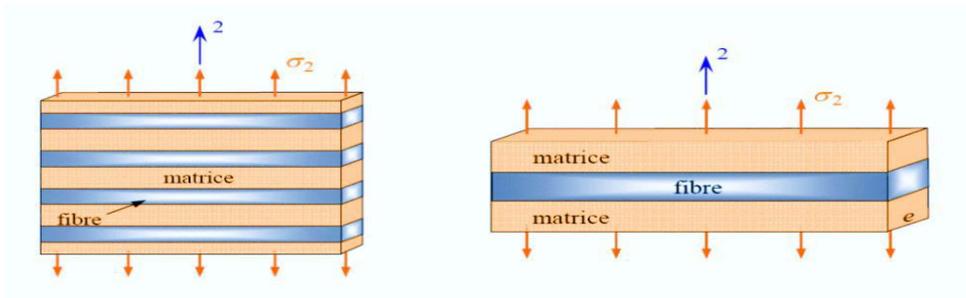
Le module de Young longitudinal peut être exprimé par :

$$E_1^c = E_1^f V_f + (1 - V_f) E_1^m \quad (II .11)$$

Cette expression est appelé la loi des mélanges pour le module d'Young dans la direction des fibres [1]

**II .6.2) Modules de Young transversal  $E_2$ :**

Le module d'Young transverse est déterminé dans un essai de traction transverse où le Composite est chargé suivant la direction normale aux fibres. [1]



**Figure II .4 :** Schéma simplifié d'une traction transversale. [33]

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que la contrainte est constante dans une section droite  $\sigma_2^c = \sigma_2^m = \sigma_2^f$  (II .12)

- La compatibilité de la déformation implique :

$$\begin{cases} V \varepsilon_2^c = \varepsilon_2^f V_f + (1 - V_f) \varepsilon_2^m \\ V \frac{\sigma_2^c}{E_2} = V_f \frac{\sigma_2^f}{E_2^f} + (1 - V_f) \frac{\sigma_2^m}{E_2^m} \end{cases} \quad (II .13)$$

**Donc :**

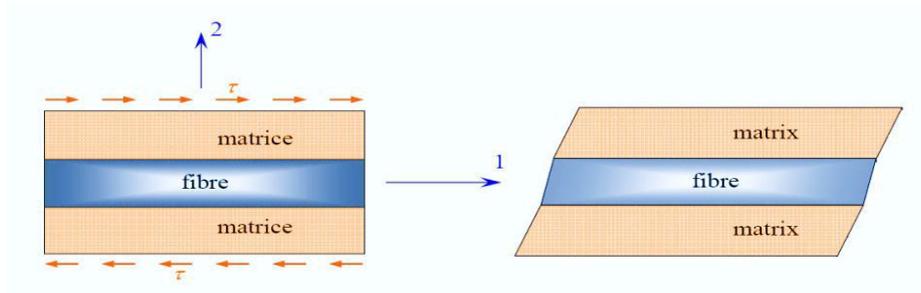
$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_2^f} + \frac{(1 - V_f)}{E_2^m} \quad (II .14)$$

Le module de Young transversal peut être exprimé par :

$$E_2 = \frac{E_2^f E_2^m}{v_f E_2^m + (1 - v_f) E_2^f} \quad (II .15)$$

**II .6.3) Module de cisaillement longitudinal  $G_{12}$ :**

Le module de cisaillement longitudinal  $G_{LT}$  est déterminé dans un essai de cisaillement Longitudinal [1] (vois la figure II.5)



**Figure II.5 :** Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal.[33]

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que ce soit :

$$\tau^c = \tau^m = \tau^f \tag{II .16}$$

- Tandis que par le lien élastique on a :

$$\tau^m = G_m \varepsilon_{12}^m \quad , \quad \tau^f = G_f \varepsilon_{12}^f \quad , \quad \tau^c = G_{12} \varepsilon_{12}^c \tag{II .17}$$

- La compatibilité, en moyenne, de la déformation à cisaillement prescrit que ce soit :

$$V \varepsilon_{12}^c = \varepsilon_{12}^f V_f + (1-V_f) \varepsilon_{12}^m \quad \implies \quad \frac{\tau^c}{G_{12}} = \frac{\tau^f}{G_f} V_f + \frac{\tau^m}{G_m} (1-V_f) \tag{II .18}$$

- Module de cisaillement longitudinal peut être exprimé par :

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{v_f G_m (1-v_f) G_f} \tag{II .19}$$

**II .6.4) Coefficient de Poisson longitudinal  $V_{12}$ :**

Le coefficient de Poisson est déterminé dans un essai de traction longitudinale Comme pour  $E_l$ .

En utilisant l'approche du comportement mécanique du matériau [1].

Par définition :

$$V_f = - \frac{\varepsilon_2^f}{\varepsilon_1^f} \quad V_m = - \frac{\varepsilon_2^m}{\varepsilon_1^m} \quad , \quad V_{12} = - \frac{\varepsilon_2^c}{\varepsilon_1^c} \tag{II .20}$$

- D'ailleurs, l'hypothèse de l'adhérence prescrit encore que :  $\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^c$  (II .21)

Comme  $E_2$  pour la compatibilité, en moyenne, des déformations transversales impose encore

La relation :

$$\begin{cases} V \varepsilon_2^c = \varepsilon_2^f V_f + (1-V_f) \varepsilon_2^m \\ \varepsilon_2^c = v_f \varepsilon_1^f V_f + (1-V_f) v_m \varepsilon_1^m \\ v_{12} \varepsilon^c = v_f \varepsilon_1^f V_f + (1-V_f) v_m \varepsilon_1^m \end{cases} \tag{II .22}$$

Coefficient de Poisson longitudinal peut être exprimé par :

$$\nu_{12} = \nu_f V_f + (1 - V_f) \nu_m \tag{II .23}$$

Enfin Cette expression est la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson longitudinal. [1]

**II .7) La relation contrainte - déformation:**

Les contraintes ( $\sigma_{ij}$ ) et les déformations ( $\epsilon_{kl}$ ) sont associées au tenseur de rigidité ( $C_{ijkl}$ ) en utilisant la loi de Hooke dans le domaine **élastique linéaire**. [26] On peut écrire la relation de la manière suivante :  $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$

**Avec :**

- $\left\{ \begin{array}{l} i, j, k, l \text{ prennent les valeurs } 1, 2, 3 \\ \epsilon_{kl} : \text{Le tenseur de déformations} \\ \sigma_{ij} : \text{Le tenseur de contraintes} \\ C_{ijkl} : \text{Le tenseur d'élasticité} \end{array} \right.$

**Ou bien :**

$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\}$  Cette loi est appelée généralement la **loi de Hooke généralisée**, introduit Les 9 composantes (équation (II .22)) du tenseur des contraintes et des déformations peuvent être réduites à six composantes indépendantes à cause de sa **symétrie**. [26]

**Sous forme matricielle :**

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ & & & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\ & & & & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\ & & & & & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\ & & & & & & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ & & & & & & & C_{1313} & C_{1321} \\ & & & & & & & & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} \tag{II .24}$$

**Où:**

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{32} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{21}\}^T \tag{II .25}$$

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad \epsilon_{33} \quad \epsilon_{23} \quad \epsilon_{31} \quad \epsilon_{12} \quad \epsilon_{32} \quad \epsilon_{13} \quad \epsilon_{21}\}^T$$

Ainsi, la notation tensorielle peut être contractée en utilisant la notation suivante :

Indice du tenseur :      (11)      (22) (33)      (23, 32)      (13,31)      (12, 21)

Indice contracté :      1      2      3      4      5      6

✓ Le Tenseur des contraintes :

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II .26})$$

✓ Le tenseur des déformations :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32} = \gamma_{23} = \gamma_{32} \\ 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31} = \gamma_{13} = \gamma_{31} \\ 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II .27})$$

**II .7.1 : Différents Types des matériaux :**

**a) Matériaux anisotropes :**

La loi de Hooke peut être exprimée par:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & i, j, k, l = 1, 2, 3 \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} & i, j, k, l = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (\text{II .28})$$

**Avec :**

- S<sub>ijkl</sub>: tenseur de souplesse

A cause de la symétrie des tenseurs on a :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (\text{II .29})$$

Le tenseur de rigidité en a 81 coefficients de même pour le tenseur de souplesse, pour raison de la symétrie des contraintes  $\sigma_{ij}$  et de déformation  $\varepsilon_{ij}$ , il y a une réduction des coefficients a 36 parmi ces derniers, 21 sont indépendants. [23]

On peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{II .30}$$

Et la matrice de souplesse :

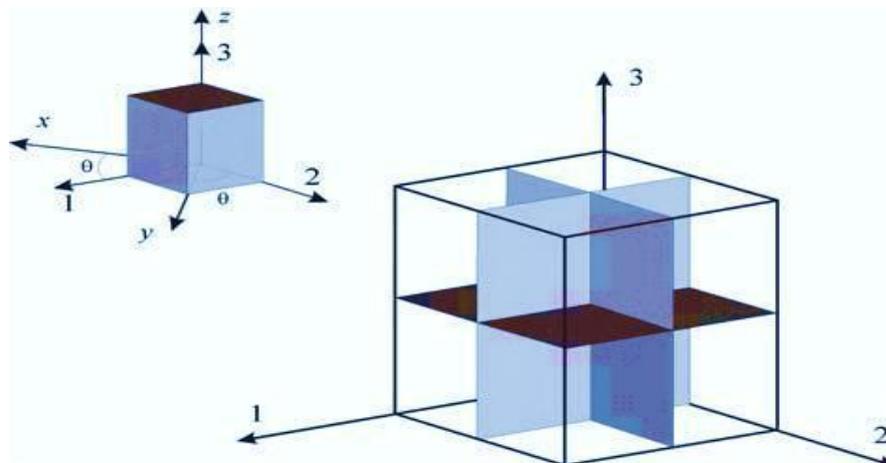
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \tag{II .31}$$

[C] Et [S] c'est respectivement la matrice de rigidité et la matrice de souplesse (**flexibilité**).

**Avec :**

$$[s] = [c]^{-1} \tag{II .32}$$

**b) Matériaux orthotropes :**



**Figure II.6 :** Représentation schématique d'un matériau orthotrope avec trois plans de symétrie. [33]

Dans le matériau orthotrope les coefficients de rigidité est réduit à 9 coefficients [1]

La matrice de rigidité de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II .33})$$

La matrice de souplesse de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II .34})$$

Les 9 modules de rigidité sont :

$E_1, E_2, E_3$  : 3 modules d'élasticité longitudinal.

$G_{12}, G_{23}, G_{31}$  : 3 modules de cisaillement.

$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$  : 3 module de Poisson.

**Les constantes de rigidités sont :**

$$\left\{ \begin{array}{lll} C_{11} = \frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} & C_{22} = \frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{33} = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{12} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} & C_{13} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} & C_{23} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{44} = G_{23} & C_{55} = G_{13} & C_{66} = G_{12} \end{array} \right. \quad (\text{II .35})$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

**Les éléments de souplesse  $S_{ij}$  sont :**

$$\left\{ \begin{array}{lll} S_{11} = \frac{1}{E_1} & S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} & S_{13} = \frac{-\nu_{13}}{E_1} \\ S_{22} = \frac{1}{E_2} & S_{23} = \frac{-\nu_{23}}{E_2} & S_{33} = \frac{1}{E_3} \\ S_{44} = \frac{1}{G_{23}} & S_{55} = \frac{1}{G_{13}} & S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right. \quad (\text{II .36})$$

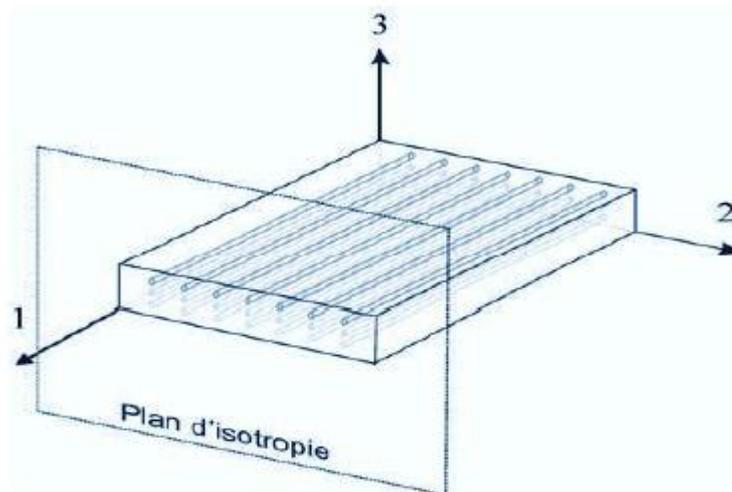
**Avec :**

$$\frac{v_{ij}}{E_i} = \frac{v_{ji}}{E_j} \tag{II .37}$$

La matrice de souplesse de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{21}}{E_{21}} & \frac{-\nu_{31}}{E_{31}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{12}} & \frac{1}{E_{22}} & \frac{-\nu_{32}}{E_{23}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_{13}} & \frac{-\nu_{23}}{E_{23}} & \frac{1}{E_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \tag{II .38}$$

**d) Matériaux transversalement isotropes (unidirectionnels) :**



**Figure II.7 :** Matériaux transversalement isotropes [24]

Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients [1]

La matrice de rigidité comme suit:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{II .39}$$

La matrice de souplesse de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.40})$$

**Avec :**

$$\begin{cases} C_{13}=C_{12} & C_{33}= C_{22} & C_{55}= C_{66} & C_{44}=\frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) \\ S_{13}=S_{12} & S_{33}= S_{22} & S_{55}= S_{66} & S_{44}= 2(S_{22}-S_{23}) \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

### e) Matériaux isotropes:

Les caractéristiques mécaniques sont les même dans toutes les directions donc :

- **Module d'Young :**

$$E_1=E_2=E_3 =E \quad (\text{II.42})$$

- **Coefficient de Poisson :**

$$\nu_{12}=\nu_{13}=\nu_{23}=\nu \quad (\text{II.43})$$

- **Module de cisaillement :**

$$G_{23}=G_{13}= G_{12}= G \quad (\text{II.44})$$

La matrice de souplesse de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.45})$$

**Avec :**

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{II.46})$$

**II .8) Relation contrainte-déformation plane :**

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de *contrainte plane*, La relation contrainte

Déformation peut être donnée par : [1]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 = \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \tag{II.47}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{II.48}$$

Les constantes de rigidité dans un état de contrainte plan sont : [1]

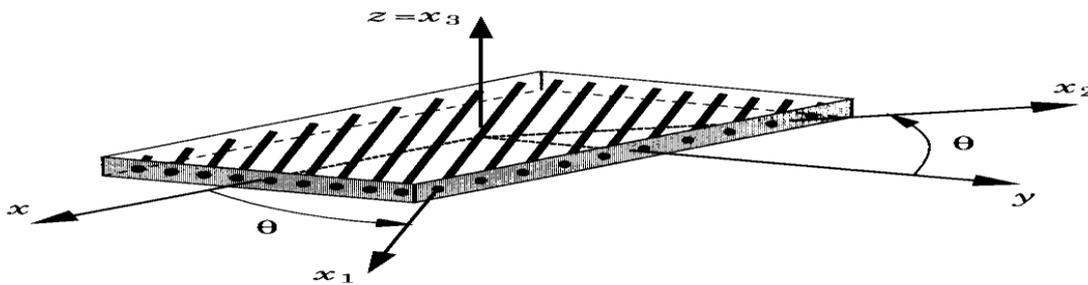
$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & Q_{21} = Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & Q_{66} = G_{21} \\ Q_{44} = G_{23} & Q_{55} = G_{13} \end{cases} \tag{II.49}$$

- **Avec :**

$E_1, E_2$  sont des module d'Young du matériau dans les directions 1et 2,  $G_{12}$  est le module de cisaillement, et  $\nu_{12}$  coefficients de poisson.

**II .9) Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres :**

Les stratifié sont élaborés par l'empilement de couche successible dont la direction des fibres et variable d'une couche a l'autre. Pour faire l'étude du comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre *un système d'axe de référence* pour l'ensemble du stratifiée, et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence. [1]



**Figure II.8:** Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée [28]

Les matrices de rigidité  $C'$  et de souplesse  $S'$ , exprimées dans le système de référence, sont obtenues en appliquant aux matrices de rigidité et de souplesse  $C$  et  $S$  les relations de changement de base [1] en façons suivante:

$$[C'] = [T]^{-1} [C] [T] \tag{II.50}$$

$$[S'] = [T]^{-1}[S][T] \quad (\text{II.51})$$

[T]: C'est la matrice de changement de base.

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs^2 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (\text{II.52})$$

**Aves :**

$$c = \cos \theta \quad s = \sin \theta$$

Les contraintes dans le repère  $(x, y, z)$  sont définies en fonction des déformations par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [Q'] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.53})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{II.54})$$

Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{44}' & Q_{45}' \\ Q_{45}' & Q_{55}' \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{II.55})$$

La matrice de rigidité réduite hors axes est donnée par l'expression suivante :

$$[Q'] = [T]^{-1}[Q][T] \quad (\text{II.56})$$

**Les composantes de la matrice sont :**

$$\left\{ \begin{array}{l} Q'_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ Q'_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ \\ Q'_{44} = Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\ Q'_{55} = Q_{44} \sin^2 \theta + Q_{55} \cos^2 \theta \\ Q'_{45} = (Q_{44} - Q_{55}) \sin \theta \cos \theta \end{array} \right. \quad (\text{II.57})$$

**Avec :**

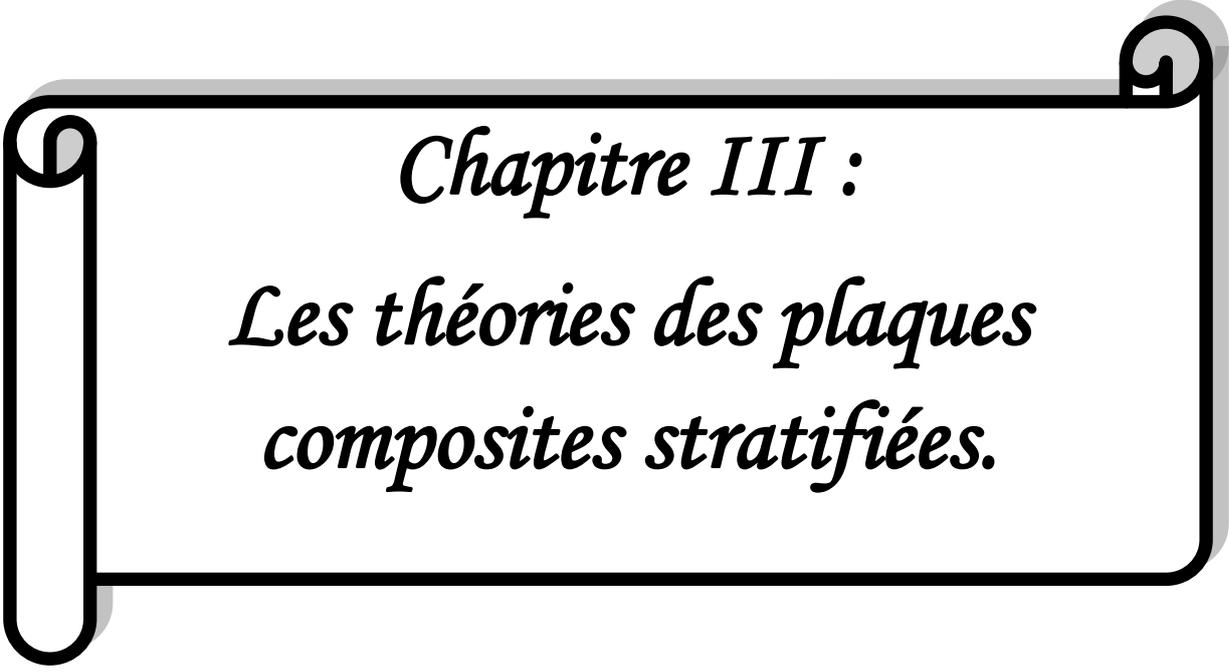
- $Q'_{ij}$  sont les coefficients de la matrice de rigidité d'une couche k donné.
- $\theta$  l'angle d'orientation de la fibre [1]

Il faut toutefois noter que  $Q'_{16}$  et  $Q'_{26}$  ne sont que des combinaisons linéaires des quatre constantes élastiques de base. Ils impliquent un couplage entre les contraintes normales et les déformations en cisaillement, ainsi qu'un couplage entre les contraintes en cisaillement et les déformations normales. [24]

**II .10) Conclusion :**

Dans ce chapitre nous avons mise en évidence les caractéristiques mécaniques des matériaux (module de Young longitudinal et transversal ; coefficient de poisson, module de cisaillement) d'autre part nous avons décrit en détail les différents types des matériaux (anisotropes, orthotropes, transversalement isotropes et Matériaux isotropes).et présente aussi les orientations des fibres dans le repéré local et global.

L'étude de comportement des plaques stratifiées base sur différentes théories, Nous étudier en détail les théories au chapitre suivante.



*Chapitre III :*  
*Les théories des plaques*  
*composites stratifiées.*

## **Chapitre III :**

### **Les théories des plaques composites stratifiées**

#### **III .1) Introductions :**

Ce chapitre est consacré à présenter les différentes théories pour étudier le comportement mécanique des plaques stratifiées parmi ces théories on peut citer :

- ✓ La théorie classique des stratifiés basée sur l'hypothèse de Kirchhoff (CLT).
- ✓ La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre basée sur l'hypothèse de Reissner-Mindlin (FSDT).
- ✓ la théorie de déformation de cisaillement d'ordre supérieur (HSDT)

On base l'étude sur deux théories bien connues, à savoir les théories classiques des stratifiés et la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre.

#### **III .2) Théorie Classique des Stratifiés (CLT) :**

Théorie Classique des Stratifiés (CLT) est basée sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff, employées pour l'étude de structures du type plaque, et coques courbes.

D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure, reste droite et perpendiculaire à la surface de référence, ne changeant pas sa forme dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction. [26]

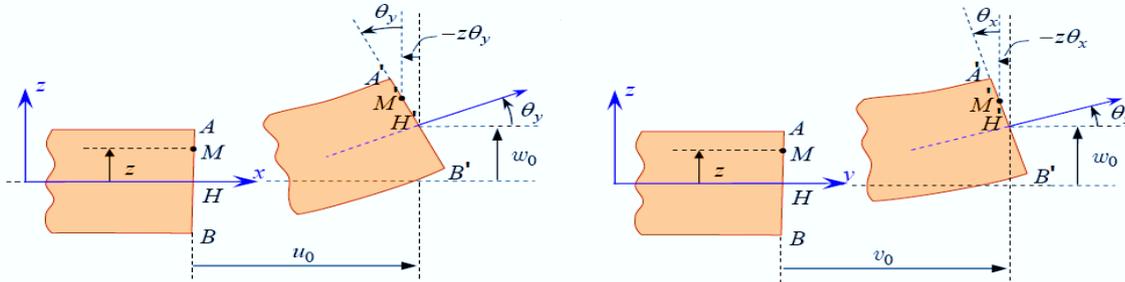
##### **III .2.1) les hypothèses de la Théorie de Kirchhoff :**

Pour utiliser les plaques minces on peut employer la théorie de Kirchhoff les hypothèses de cette théorie sont :

- ❖ les plis sont parfaitement liés les uns aux autres, c'est-à-dire que, entre eux il n'existe pas de glissement, ou décollement.
- ❖ les déplacements selon des plis sont continus.
- ❖ le matériau de chaque pli présente un comportement élastique.
- ❖ le stratifié est considéré mince, c'est-à-dire, que les plis de la structure sont relativement minces par rapport aux dimensions planes (largeur et longueur) de la structure.
- ❖ les déformations, les déplacements et les rotations sont petits. [26]

**III .3) Le champ de déplacements de la théorie CLT :**

La déformée de la normale au plan moyen (O, x, y) est alors un segment de droite normal à la déformée du plan moyen. L'ensemble des notations, utilisées dans le cas du schéma de la théorie classique des stratifiés [1].Est schématisé sur la Figure (III .1).



**Figure III .1 :** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des Stratifiés [1]

Le champ de déplacements de la théorie CLT est donné par l'expression suivante:

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} \tag{III .1}$$

- ✓  $u_0$  et  $v_0$ : sont les déplacements membranaires de la feuille moyenne
- ✓  $w_0$ : est le déplacement hors plan de la feuille moyenne de la plaque.

**Avec :**

$$\theta_x(x, y) = - \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \theta_y(x, y) = - \frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{III .2}$$

**III .3.1) Expression du champ des déformations:**

Le champ des déformations dans le plan de la plaque s'écrit à partir du champ de déplacement est donné par l'expression suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \tag{III .3}$$

Le champ des déformations est la superposition entre la déformation en membrane et la déformation en flexion et torsion [1]

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_f \tag{III .4}$$

**Avec :**

- $\varepsilon_m$  : la déformation en membrane.
- $\varepsilon_f$  : la déformation en flexion et torsion.

**a) Des déformations en membrane :**

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m(x,y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{III .5}$$

S'exprimant en fonction des déplacements  $(u_0, v_0)$  des points suit dans le plan  $(o,x,y)$ . [1]

**b) des déformations en flexion et torsion :**

$$\varepsilon_f = z k(x,y) = z \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \tag{III .6}$$

La matrice  $K(x, y)$  est appelée *matrice des courbures* de la plaque sollicitée en flexion. [1]

**III .3.2 )Le champ de contraint :**

A partir de l'équation (II.54) Les contraintes dans une couche k, s'expriment suivante :

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x,y,z) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III .7}$$

**Où bien :**

$$\sigma_k(M) = \sigma_k(x, y, z) = Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k K(x, y) \tag{III .8}$$

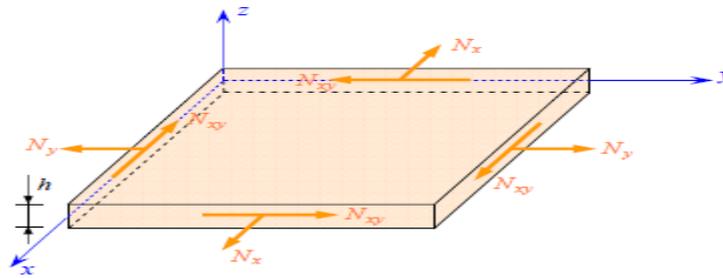
La matrice  $\sigma_k(M)$  représente la matrice de contrainte dans la couche  $k : h_k \leq z \leq h_{k-1}$ , la matrice de rigidité réduite  $Q'_k$  varie d'une couche à l'autre. [1]

**III .4) Expression des résultantes et des moments :[1]**

**a) Résultantes en membrane :**

$$N(x, y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dZ = \sum_{K=1}^N \int_{h_{K-1}}^{h_K} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_K dZ \tag{III .9}$$

$N_x, N_y$  et  $N_{xy}$  sont les résultantes par unité de longueur de plaque, successivement des contraintes Normales et de contrainte de cisaillement dans le plan  $(x, y)$ , elles sont schématisées sur la figure (III .2) :



**Figure III .2 :** Schématisation des résultantes en membrane [1]

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés. L'expression des résultantes en membrane écrire comme suit :

$$N(x ; y) = \sum_{K=1}^N \int_{h_{K-1}}^{h_K} [Q'_K \varepsilon_m(x, y) + z Q'_K k(x, y)] dz \tag{III .10}$$

$$N(x, y) = \sum_{K=1}^N \left[ Q'_K \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{K-1}}^{h_K} dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[ Q'_K k(x, y) \int_{h_{K-1}}^{h_K} zdz \right] \tag{III .11}$$

$$N(x, y) = \left[ \sum_{K=1}^N (h_K - h_{K-1}) Q'_K \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N (h^2_K - h^2_{K-1}) Q'_K \right] K(x, y) \tag{III .12}$$

▪ **Soit, en définitive :**

$$N(x ;y)=A_{ij}\varepsilon_m(x ;y) + B_{ij}K(x ,y) \tag{III .13}$$

▪ **Avec :**

$$A_{ij} = \sum_{K=1}^N (h_K - h_{K-1})(Q'_{ij})_k \tag{III .14}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N (h^2_K - h^2_{K-1})(Q'_{ij})_k \tag{III .15}$$

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

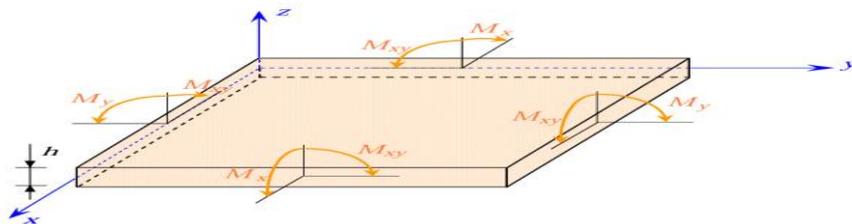
$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III .16}$$

**b) Moment de flexion et de torsion :**

Moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dZ = \sum_{K=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dZ \tag{III .17}$$

$M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$ , et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion, Ces composantes sont schématisées sur la Figure (III .3) :



**Figure III .3 :** Schématisation des moments de flexion et de torsion [1]

$$M(x ; y) = \sum_{K=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Z Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 Q'_k k(x, y)] dz \tag{III .18}$$

$$M(x, y) = \sum_{K=1}^N \left[ Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[ Q'_k K(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \tag{III .19}$$

$$M(x, y) = \left[ \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N (h^2_k - h^2_{k-1}) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{3} \sum_{K=1}^N (h^3_k - h^3_{k-1}) Q'_k \right] K(x, y) \tag{III .20}$$

▪ **Soit, en définitive:**

$$M(x, y) = B_{IJ}\varepsilon_m(x, y) + D_{IJ}K(x, y) \tag{III.21}$$

▪ **Avec :**

$$B_{IJ} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N (h_K^2 - h_{K-1}^2)(Q'_{ij})_k \tag{III.22}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^N (h_K^3 - h_{K-1}^3)(Q'_{ij})_k \tag{III.23}$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \tag{III.24}$$

**III .5) Équation constitutive :** [1]

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les résultantes et moments en fonction des déformations en membrane et des courbures. La forme matricielle est donnée par :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \tag{III.25}$$

Ou sous forme contracte :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_m \\ K \end{Bmatrix} \tag{III.26}$$

**Avec:**

- ✓ La matrice A est la matrice de rigidité en membrane.
- ✓ La matrice D est la matrice de rigidité en flexion.
- ✓ La matrice B est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.

**Donc :**

- ✓ Le couplage membrane-flexion résulte des termes B<sub>11</sub>, B<sub>12</sub> et B<sub>22</sub>.
- ✓ Alors que le couplage membrane-torsion résulte des termes B<sub>16</sub> et B<sub>26</sub>.
- ✓ les termes D<sub>16</sub> et D<sub>26</sub>. correspondent le couplage entre flexion – torsion.
- ✓ les termes A<sub>16</sub> et A<sub>26</sub> correspondent le couplage entre traction – cisaillement.

### III .6) Influence de l'empilement des couches : [1].

#### a) Couche isotrope:

Dans le cas d'une plaque en matériau *homogène isotrope*, le comportement élastique est décrit par le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Les *résultantes en membrane* ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) dépendent uniquement des *déformations en membrane* ( $\epsilon^0_x, \epsilon^0_y, \epsilon^0_{xy}$ ) et les *moments de flexion et torsion* ( $M_x, M_y, M_{xy}$ ) dépendent uniquement des *courbures* du plan moyen ( $k_x, k_y, k_{xy}$ ). Dans le cas d'une plaque isotrope, il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion/torsion.

#### b) Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux :

Dans le cas de Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux, les axes du matériau sont confondus avec les axes de référence de la plaque (axes de référence des contraintes et déformations exercées sur la plaque). L'équation constitutive de la plaque peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^0_{xx} \\ \epsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{III. 27})$$

L'absence de couplage membrane –flexion/torsion dans le cas de couche orthotrope rapportée à ses axes principaux, s'ajoute aussi l'absence de couplage traction-cisaillement et flexion –torsion.

#### C) Couche orthotrope non rapportée à ses axes :

Les axes du matériau de la couche orthotrope *ne coïncident pas* avec les axes de référence des contraintes. L'équation constitutive de la plaque orthotrope présente comme suit :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon^0_{xx} \\ \epsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{III.28})$$

On Observé qu'il n'existe pas de couplage membrane-flexion / torsion dans le cas de couche orthotrope non rapportée à ses axes.

**III .7) Les type de stratifiée : [1].**

✓ **Stratifiés symétriques :**

Dans le cas de stratifiée symétrie le coefficient  $B_{ij}$  de la matrice de rigidité sont **nuls** La forme générale de L'équation constitutive de stratifiés symétriques présente de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (III.29)$$

Dans le cas de stratifiés symétriques on observé qu'il n'existe pas de couplage membrane-flexion. Il en résulte que le comportement des stratifiés symétriques est plus simple à analyser que celui des stratifiés présentant un couplage membrane-flexion/torsion. En plus, les stratifiés symétriques ne présentent pas une tendance au gauchissement due aux déformations (contractions) induites lors du refroidissement consécutif au processus de mise en œuvre des matériaux.

✓ **Stratifiés croisés :**

Dans le cas de stratifié croisé constitué des couches dont les directions principales sont orientées alternativement à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport aux directions de référence du stratifié. L'équation constitutive de stratifiés croisés est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (III.30)$$

✓ **Stratifiés croisés symétriques :**

L'équation constitutive de stratifiés croisés symétrique c'est la combinaison, entre L'équation constitutive de stratifiés symétrique et L'équation constitutive de stratifiés croisés

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (III.31)$$

L'absence de couplage membrane –flexion/torsion des stratifiés symétriques s'ajoute aussi l'absence de couplage traction-cisaillement et flexion –torsion.

✓ **Stratifiés antisymétriques :**

L'équation constitutive de stratifiés antisymétriques s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{III.32})$$

Cette équation montre l'existence d'un couplage membrane –torsion.

✓ **Stratifiés croisés antisymétriques :**

L'équation constitutive de stratifiés croisés antisymétriques s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} \quad (\text{III.33})$$

Cette équation montre l'existence d'un couplage traction - flexion.

### **III .8 : Théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT) :**

Les modèles élaborés selon la Théorie de la Déformation de Cisaillement de Premier Ordre (FSDT), sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de Mindlin-Reissner, selon lesquelles une ligne droite et perpendiculaire au plan moyen d'une couche quelconque, reste droite après la déformation, toutefois, elle ne reste pas nécessairement normale à ce plan de référence après la déformation de la structure. [26]

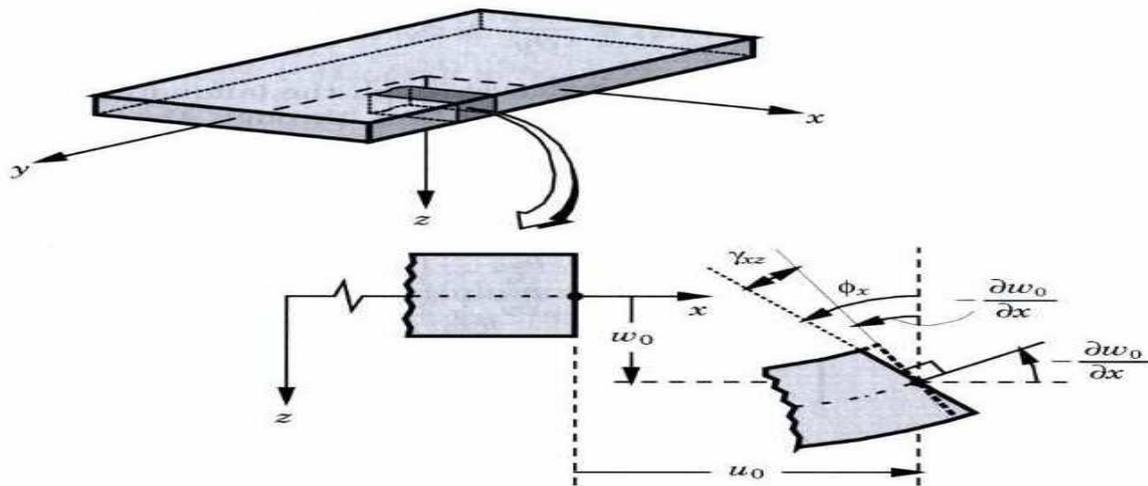
Ces théories tiennent compte des effets du cisaillement transverse et introduisent parmi les déplacements inconnus les rotations des normales [22]

#### **III .8.1 : Les hypothèses de la Théorie de Mindlin- Reissner :**

- ❖ Aucune déformation ne se produit dans le plan moyen de la plaque.
- ❖ La contrainte normale ( $\sigma_z$ ) est négligeable devant les autres composantes.
- ❖ Toute section droite et perpendiculaire à la surface moyenne non-déformée reste droite, mais pas nécessairement perpendiculaire à la surface moyenne déformée.

La dernière hypothèse implique que la déformation de cisaillement transversale est différente de zéro, mais elle dépend également à la contrainte de cisaillement qui est nulle sur les surfaces extérieures puisque la contrainte de cisaillement devient constante suivant toute l'épaisseur de la plaque. Pour compenser cette erreur, Mindlin a proposé un facteur  $K$  de correction de cisaillement à appliquer pour la force de cisaillement. [32]

**III .9) Le champ de déplacements de la théorie FSDT :**



**Figure III .4** Schématisation des déformations dans le cas de Théorie de la Déformation de Cisaillement de Première Ordre (FSDT) [28]

Selon la théorie de Premier Ordre (FSDT) Le champ de déplacements est donné par l'expression suivante :

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u_0(x,y) + z \phi_x(x,y) \\ v(x,y,z) = v_0(x,y) + z \phi_y(x,y) \\ w(x,y,z) = w_0(x,y) \end{cases} \quad (III.34)$$

**Avec :**

- ✓  $u_0, v_0$ : sont les déplacements dans le plan (x,y)
- ✓  $w_0$ : est le déplacement transverse
- ✓  $\phi_x, \phi_y$ : sont les rotations suivant x et y

**III .9 .1) Expression du champ des déformations : [1]**

Le champ des déformations est déduit du champ des déplacements par dérivation comme Indiqué ci –dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} = 2 \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] + z \left[ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right] \\ \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{array} \right. \quad (III.35)$$

Le champ des déformations est la superposition entre la déformation en *membrane* et la déformation en *flexion et torsion* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_f \\ \varepsilon = \varepsilon_m + z k(x,y) \end{array} \right. \quad (III.36)$$

**Avec :**

- $\varepsilon_m$  : la déformation en *membrane*.
- $\varepsilon_f$  : la déformation en *flexion et torsion*.

**a) des déformations de membrane :**

$$\varepsilon_m = \varepsilon_m (M) = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (III.37)$$

En exprimant exclusivement en fonction des déplacements ( $u_0, v_0$ ) dans le plan moyen ( $Oxy$ ) des points de ce plan.

**b) des déformations en flexion et torsion :**

$$k(x,y) = z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} = Z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 38})$$

La matrice  $K(x, y)$  est appelée *matrice des courbures* de la plaque sollicitée en flexion.

**Finalement**, le champ des déformations s'écrit :

$$\varepsilon_m(\mathbf{M}) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

$$\varepsilon_m(\mathbf{M}) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.40})$$

**c) le champ des déformations en cisaillement transverse :**

$$\gamma_c(\mathbf{M}) = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (\text{III. 41})$$

Dans la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, on admet toutefois que le champ est identique dans toutes les couches. La première approche consiste à admettre que les Déformations en cisaillement sont égales aux déformations moyennes  $\gamma_{yz}^0; \gamma_{xz}^0$  du stratifié soit:

$$\gamma_c(\mathbf{M}) = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (\text{III.42})$$

**III .9.2 ) Le champ de contraint :**

A partir de l'équation (II.54) Les contraintes dans une couche  $k$ , s'expriment suivante :

$$\sigma_k(\mathbf{M}) = \sigma_k(x,y,z) = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \right] \quad (\text{III. 43})$$

**Où bien :**

$$\sigma_{\kappa}(M) = \sigma_{\kappa}(x, y, z) = Q'_{\kappa} \varepsilon_m(x, y) + z Q'_{\kappa} K(x, y) \tag{III.44}$$

A partir de l'équation (II.55) Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche  $k$  s'expriment comme suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{44} & Q'_{45} \\ Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma^0_{yz} \\ \gamma^0_{xz} \end{Bmatrix} \tag{III.45}$$

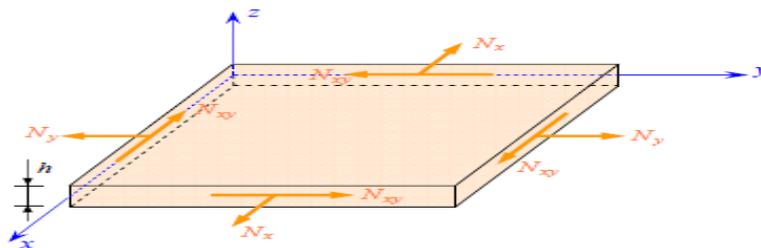
La matrice  $\sigma_{\kappa}(M)$  Représente la matrices de contrainte dans la couche  $k : h_{k-1} \leq z \leq h_k$ , la matrice de Rigidité réduite  $Q'_{\kappa}$  varie d'une couche à l'autre.

**III.10 ) Expression des résultantes et des moments : [1]**

**a) Résultantes en membrane :**

$$N(x, y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dZ = \sum_{K=1}^N \int_{h_{K-1}}^{h_K} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_K dZ \tag{III.46}$$

$N_x, N_y$  et  $N_{xy}$  sont les résultantes par unité de longueur de plaque, successivement des contraintes Normales et de contrainte de cisaillement dans le plan  $(x, y)$ . Elles sont Schématisées sur la figure (III.5) :



**Figure III.5 :** Schématisation des résultantes en membrane [1]

Dans le cadre de la théorie classique des stratifiés. L'expression des résultantes en membrane écrire comme suit :

$$N(x, y) = \sum_{K=1}^N \int_{h_{K-1}}^{h_K} [Q'_K \varepsilon_m(x, y) + z Q'_K K(x, y)] dz \tag{III.47}$$

$$N(x, y) = \sum_{K=1}^N \left[ Q'_K \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{K-1}}^{h_K} dz \right] + \sum_{K=1}^N \left[ Q'_K K(x, y) \int_{h_{K-1}}^{h_K} z dz \right] \tag{III.48}$$

$$N(x, y) = \left[ \sum_{K=1}^N (h_K - h_{K-1}) Q'_K \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N (h^2_K - h^2_{K-1}) Q'_K \right] K(x, y) \tag{III .49}$$

▪ **Soit, en définitive**

$$N(x ;y)=A_{ij} \varepsilon_m(x ;y) +B_{ij} K(x ,y) \tag{III .50}$$

▪ **Avec :**

$$A_{ij} = \sum_{K=1}^N (h_K - h_{K-1})(Q'_{ij})_k \tag{III .51}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N (h^2_K - h^2_{K-1})(Q'_{ij})_k \tag{III .52}$$

L'expression développée des résultantes en membrane s'écrit donc :

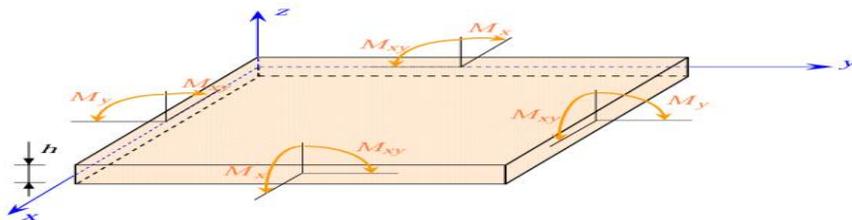
$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_{xx} \\ \varepsilon^0_{yy} \\ \gamma^0_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix} \tag{III .53}$$

**b) Moment de flexion et de torsion :**

Moments de flexion et de torsion sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dZ = \sum_{K=1}^N \int_{h_{K-1}}^{h_K} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dZ \tag{III .54}$$

$M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion suivant les directions  $x$  et  $y$ , et la composante  $M_{xy}$  est le moment de torsion. Ces composantes sont schématisées sur la Figure (III .6)



**Figure III .6 :** Schématisation des moments de flexion et de torsion.[1]

$$M(x ;y) = \sum_{K=1}^N \int_{h_{K-1}}^{h_K} [Z Q'_k \varepsilon_m(x ,y) + z^2 Q'_k k(x ,y)] dz \tag{III .55}$$

$$M(x, y) = \sum_{k=1}^N \left[ Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} Z dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[ Q'_k K(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \tag{III.56}$$

$$M(x, y) = \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] K(x, y) \tag{III.57}$$

▪ **Soit, en définitive:**

$$M(x, y) = B_{IJ} \varepsilon_m(x, y) + D_{IJ} K(x, y) \tag{III.58}$$

▪ **Avec :**

$$B_{IJ} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) (Q'_{ij})_k \tag{III.59}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) (Q'_{ij})_k \tag{III.60}$$

L'expression développée des moments s'écrit sous la forme :

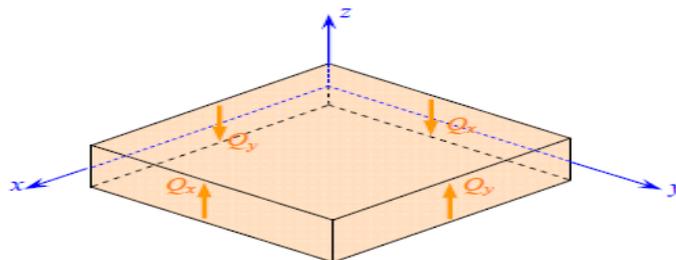
$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{pmatrix} \tag{III.61}$$

**c) Résultantes en cisaillement :**

On définit les résultantes en cisaillement de la même façon par :

$$Q(x, y) = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}_k dZ \tag{III.62}$$

Comme les résultantes en membrane, les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié. Voir la figure (III.7) :



**Figure III.7 :** Schématisation des résultantes en cisaillement [1]

Compte tenu des expressions(II.55) et (III. 62) , l'équation des résultantes en cisaillement s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III.63)$$

▪ **Avec :**

$$F_{ij} = \sum_{K=1}^N (h_k - h_{k-1})(Q'_{ij})_k \quad (III. 64)$$

En modifiée la partie relative aux résultantes en cisaillement transverse et remplaçantes coefficients de rigidité  $F_{ij}$  par de nouveaux coefficients de rigidité en cisaillement  $H_{ij}$  du Stratifié :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44}F_{44} & K_{45}F_{45} \\ K_{54}F_{45} & K_{55}F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III. 65)$$

**Avec :**

$$H_{ij} = K_{ij}F_{ij} \quad (III.66)$$

Les paramètres  $k_{ij}$  sont des facteurs de correction en cisaillement. :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III.67)$$

### III .11) Équation constitutive : [1]

L'équation constitutive des stratifiés avec cisaillement transverse s'écrit en rassemblant les Résultantes et les moments sous la forme :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III.68)$$

Finalement ; L'équation constitutive peut également être écrite sous forme contractée comme indique ci-dessous :

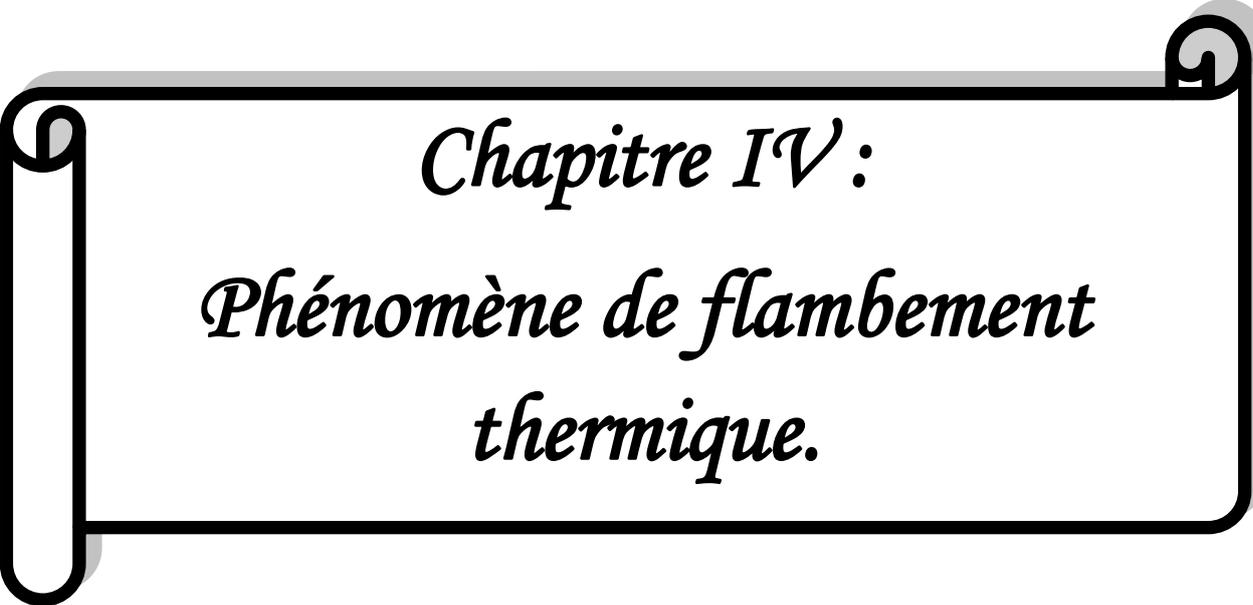
$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ K \\ \gamma_c \end{Bmatrix} \quad (III.69)$$

**Avec :**

- ✓ *La matrice  $A$  est la matrice de rigidité en membrane.*
- ✓ *La matrice  $D$  est la matrice de rigidité en flexion.*
- ✓ *La matrice  $B$  est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion.*
- ✓ *La matrice  $H$  correspond au comportement de cisaillement transverse.*

**III .12 : Conclusion :**

Au cours de ce chapitre, on a présenté les théories du comportement mécanique des plaques stratifiées ; comme on a vu ci-dessus, on a utilisé la théorie classique des stratifiés pour les plaques minces et la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre pour les plaques épaisses. Ces théories sont utilisées dans le quatrième chapitre pour étudier le phénomène de flambement thermique.



*Chapitre IV :*  
*Phénomène de flambement*  
*thermique.*

## Chapitre IV :

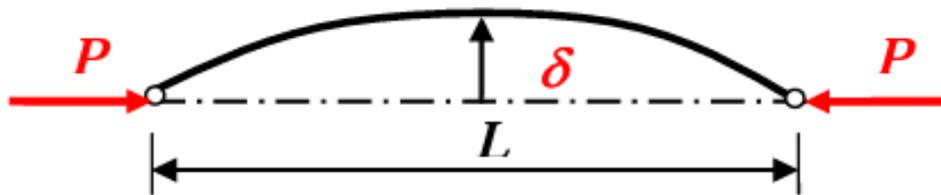
### Phénomène de flambement thermique.

#### IV .1) Introduction :

Des nombreuses études ont été consacrées pour étudier l'effet de la température (distribution uniforme) sur la stabilité des plaques composite stratifiées, et pour mieux comprendre ce phénomène, nous allons présentée dans ce chapitre une synthèse bibliographique sur le flambement thermique des plaques composites stratifiées.

#### IV .2) définition de flambement :

Le flambement ou Le flambage est un phénomène **d'instabilité** d'une structure, qui soumise à un effort normal de compression, a tendance à fléchir et à se déformer dans une direction perpendiculaire à l'axe de compression [30] **vois le figure (IV .1)**



**Figure IV .1 :** Schématisation du flambage. [30]

#### IV .3) L'effet de la température sur les matériaux composites :

La présence de deux composante rend les composites sensibles aux changements de température donc l'effet de la température être importante et complexe pour les matériaux composites et affecter sur les caractéristique mécanique de matériau. Pour ce la les plaques sandwich et Les plaques composites stratifiées subir le phénomène de flambement thermique à cause de changement de la température.

Aussi, pour les vibrations des plaques composites stratifiées soumise à l'effet de la température les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la température. D'autre part, si la température infligée à la plaque coïncide avec la température critique de flambement les fréquences propres tendent vers zéro. [44]

#### **IV .4) L'origines de phénomène de flambement thermique :**

L'effet de la température sur une structure peut se manifester de deux façons. D'une part, les Propriétés élastiques de la structure dépendent de la température, donc la raideur de la structure aussi. En effet, l'augmentation de la température induit, en général, un assouplissement des matériaux et une diminution de la limite élastique. D'autre part, une variation non-uniforme ou rapide de la température, peut donner lieu à des contraintes thermiques, qui peuvent provoquer un flambement thermique.

En plus de la dégradation des propriétés des matériaux, le flambement thermique est probablement le phénomène le plus important issu de l'effet de l'élévation de la température sur les structures à paroi mince. Il a été reconnu, au début des années cinquante, comme étant l'un des problèmes les plus graves lié à l'échauffement aérodynamique [34].

L'une des causes fondamentales du flambement thermique est le blocage de la dilatation thermique. Sous certaine condition aux limites, une structure ne peut se dilater librement sous une élévation uniforme de la température, ce qui crée des contraintes thermiques capables d'agir comme des forces de compression pouvant nuire à la stabilité de la structure

La seconde cause du flambement thermique est la variation non-uniforme de la température. En effet, quand une structure uniforme est soumise à un échauffement thermique non-uniforme, ou le contraire, la température varie d'un point à l'autre de la structure. Cette dernière, donne lieu à des contraintes thermiques internes qui peuvent aussi nuire la stabilité de la structure [44].

#### **IV .5) *Flambement thermique des plaques composites : synthèse bibliographique :***

La connaissance de comportement au flambement thermique des plaques est essentielle. Il existe des nombreuses études pour déterminer ce dernier ; par différentes approches comme indique sur les références ci-dessous :

**Whitney et Ashton**[38], sont le premier qui ont étudié le comportement au flambement thermique des plaque stratifiées croise. Ils ont utilisé une formulation énergétique en conjonction avec la méthode de Ritz [39].

**Flaggs et Vinson** [40] ont étendu le travail de Whitney et Ashton [38]. Il a été conclu que les charges hygrothermiques réduisent de manière significative la température critique de flambement.

**Tauchert** [41], a utilisé la théorie de Reissner-Mindlin, pour étudié le flambement thermique des plaques épaisses avec une stratification croisée antisymétrique

**Zhang et Yang**[42], en 2009 ont publié un article de revue sur les développements récents d'éléments finis pour l'analyse des plaques composites stratifiées. Il en résulte que les travaux de

recherches sur le flambement thermique paraissent minimales par rapport les travaux sur le flambement mécanique. Surtout que la plupart des travaux sur le flambement thermique utilisent des éléments finis basés sur la théorie de cisaillement du premier ordre ou sur la théorie d'ordre supérieur, parce que la théorie classique sont plutôt limités parce que son basées sur les plaques minces.

Dans cette partie nous exposons les différents éléments fini pour l'étude du flambement thermique des plaques composites base sur les trois théories qui sont plus connus à savoir :

#### **IV .5.1 : *Eléments finis basés sur la théorie classique des stratifiée:***

**Chen et Chen** [43] ont développé un élément fini rectangulaire hermitien avec quarante-huit degrés de liberté. Les auteurs rechercher ont publié des d'articles sur le phénomène de flambement thermique. Pour étudier les effets des paramètres suivantes : du rapport d'aspect, angles de stratification, l'anisotropie, conditions aux limites et la distribution de la température.

**Ounis houdayfa** [44] a étudié le flambement thermique des plaques composites stratifiées minces. Un élément fini qui a été, précédemment, développé pour la flexion et le flambement mécanique est étendu vers l'étude du flambement thermique des plaques minces. L'élément qui sont utilisé c'est une combinaison entre élément membranaire iso-paramétrique et d'un élément de type Hermite de haute précision Basé sur la théorie classique des stratifiées, l'élément contient quatre nœuds avec trente-deux degrés de liberté. Plusieurs paramètres ont été pris en considération, tel que, le type du matériau, les conditions aux limites, la stratification, le rapport d'aspect, le rapport d'anisotropie et la présence d'ouverture. Il a été conclu que la température critique de flambement peut être significativement affectée par les paramètres considérés.

#### **IV .5. 2) *Eléments finis basés sur la théorie de cisaillement du premier ordre :***

**Chandrashekhara** [45] a étendu un élément fini iso-paramétrique à neuf nœuds de flexion Pour étudier le comportement des plaques composites stratifiées au flambement thermique.

**Lee et al** [47] utiliser aussi un élément fini iso-paramétrique pour trouver la conception optimale pour les plaques stratifiées symétriques et antisymétriques pour avoir la température critique de flambement maximale.

**Prabhu et Dhanaraj** [48] Ils ont utilisé un élément fini Lagrangien iso-paramétrique à neuf nœuds avec intégration sélective. Pour étudié le flambement thermique des plaques stratifiées symétriques minces et épaisses.

**Les auteurs** [49] développé deux éléments finis, le premier élément basé sur la théorie de cisaillement du premier ordre avec cinq degrés de liberté ; et l'autre élément basé sur la théorie de cisaillement d'ordre supérieur avec neuf degrés de liberté.

**Kabir et al.** [50] ils ont étudié le flambement thermique des plaques stratifiées rectangulaires et biais, en utilisant un élément fini triangulaire à trois nœuds avec intégration complète. L'élément qui est utilisé montré d'excellente performance avec les plaques modérément épaisses et minces.

**Ounis houdayfa**[44] a étudié de l'effet de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées. Deux effets sont considérés simultanément, à savoir: L'effet de la dépendance des propriétés matérielles à la température et l'effet des contraintes thermiques. A cet effet, un élément fini basé sur le modèle DDM (Displacement Discret Mindlin) a été utilisé et modifié pour prendre en compte les effets de la température.

#### **IV .5. 3) *Eléments finis basés sur la théorie de cisaillement d'ordre supérieur :***

**Chang** [51] est le premier qui est utilisé la théorie d'ordre supérieur pour étudier le flambement thermique des plaques composites stratifiées. L'auteur a utilisé un élément fini iso-paramétrique à huit nœuds avec soixante-quatre degrés de liberté.

**Babu et Kant** [52] ont étudié le flambement thermique des plaques stratifiées et des plaques sandwichs. Les auteurs ont présenté des modèles d'éléments finis basés sur deux théories raffinées d'ordre supérieur. La première théorie prend en compte l'effet de la déformation transversale normale avec treize degrés de liberté, par contre l'autre théorie néglige l'effet de la déformation transversale normale avec neuf degrés de liberté.

**Lee**[53] a étudié le flambement des plaques composites stratifiées en utilisant l'approche layerwise. Et il s'avère qu'il y a une grande différence entre les résultats de la layerwise et les résultats de la monocouche équivalente.

**Shariyat** [54] a étudié le flambement thermique des plaques composite rectangulaire avec dépendance des propriétés matérielles à la température. L'auteur à applique l'approche layerwise avec un élément Hermitien de continuité  $C^1$ .

**IV .6) Relations cinématique :**

- **Théorie classique des stratifiés :**

**IV .6.1) le champ de déplacement :**

Premièrement, la théorie utilise c'est la Théorie Classique des Stratifiés (CLT), base sur le modèle classique de Kirchhoff. Le champ de déplacement à partir cette théorie est donnée par l'expression suivante:

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} \tag{IV .1}$$

**Avec :**

- ✓  $u_0$  et  $v_0$ : sont les déplacements membranaires de la feuille moyenne
- ✓  $w_0$ : est le déplacement hors plan de la feuille moyenne de la plaque.

**IV .6.2) Le champ des déformations :**

Le champ des déformations sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \underbrace{\{\varepsilon^0_L + \varepsilon^0_{nL}\}}_{\{\varepsilon\}} + z \{K\} \tag{IV .2}$$

**IV .6.3) Loi de comportement :**

Dans le système de coordonnées locales, les relations contraintes-déformations des fibres d'un stratifié soumis à une variation de température [29], sont définie par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \tag{IV .3}$$

**Avec :**

- 1 et 2 désigne respectivement la direction longitudinale des fibres et la direction transversale normale aux fibres dans le plan de la plaque.
- $\varepsilon_1^T$  et  $\varepsilon_2^T$  sont les déformations d'origine thermique et qui sont exprimé par :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta T \begin{pmatrix} \alpha_1(T) \\ \alpha_2(T) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (IV .4)$$

**Avec :**

- $\alpha_1$  : le coefficient de dilatation thermique longitudinal.
- $\alpha_2$  : le coefficient de dilatation thermique transversal
- $\Delta T$  : la variation de température.

Les composantes de la rigidité  $Q_{ij}$  sont exprime par:

$$\begin{cases} Q_{11}(T) = \frac{E_1(T)}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22}(T) = \frac{E_2(T)}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & Q_{12}(T) = Q_{21}(T) = \frac{\nu_{21}E_1(T)}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2(T)}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66}(T) = G_{21}(T) \end{cases} \quad (IV .5)$$

**Avec :**

- ✓  $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$  sont les caractéristiques mécaniques d'une couche.

Dans le repère global du stratifié, Les relations contraintes-déformations de la couche "k" sont données par:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}_k - \Delta T \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{pmatrix}_k \quad (IV .6)$$

Les efforts et les moments de la plaque sont liés aux déformations et aux courbures données par les expressions suivantes:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^0_{Lx} \\ \varepsilon^0_{Ly} \\ \gamma^0_{Lxy} \\ K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N^T_x \\ N^T_y \\ N^T_{xy} \\ M^T_x \\ M^T_y \\ M^T_{xy} \end{pmatrix} \quad (IV .7)$$

Sous forme contracte :

$$\begin{pmatrix} N \\ M \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon^0_L \\ K \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N^T \\ M^T \end{pmatrix} \quad (IV.8)$$

**Avec :**

- [A] : la matrice de rigidité en membrane.
- [B] : la matrice de couplage membrane –flexion torsion.
- [D] : la matrice de rigidité en flexion.

**On peut définir par :**

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k dz \quad (IV. 9)$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k z dz \quad (IV. 10)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k z^2 dz \quad (IV. 11)$$

- En notant par  $\sigma_{ij}$  les contraintes dans le plan, on peut écrire:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz \quad (IV. 12)$$

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz \quad (IV. 13)$$

- Les résultats de la force thermique sont donnés par :

$$N^T = \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k \{\Delta T \{\alpha\}^T\} dz \quad (IV. 14)$$

- Les résultats de moment thermique sont donnés par :

$$M^T = \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k \{\Delta T \{\alpha\}^T\} z dz \quad (IV. 15)$$

**IV .7) Energie potentielle:**

L'énergie potentielle de déformation d'une plaque est donnée par l'expression suivante :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \epsilon dv \quad (IV. 16)$$

**Avec :**

V : volume de la plaque.

Il est nécessaire de déterminer la distribution des efforts membranaires en résolvant l'équation :

$$\{F\} = [K]\{X\} \quad (\text{IV.17})$$

**Avec :**

- ❖  $[K]$  : La matrice de rigidité globale
- ❖  $\{X\}$  : Le vecteur des déplacements global.
- ❖  $\{F\}$  : Le vecteur de chargement global.

La valeur propre du phénomène de flambement thermique sont exprime par la relation suivante :

$$[K]\{\Delta\} + \lambda [k_g]\{\Delta\} = 0 \quad (\text{IV.18})$$

**Avec :**

- $\lambda$  : la charge non dimensionnelle de flambement.
- $\{\Delta\}$  : représente le vecteur modal.
- $[K]$  : la matrice de rigidité globale.
- $[K_g]$  : la matrice géométrique globale.

**IV .8) Relations cinématique :**

- **Théorie de Déformation en Cisaillement de Première Ordre (FSDT) :**

**IV .8.1) le champ de déplacement :**

Deuxièmement, la théorie utilise c'est la théorie de déformations en cisaillement en première ordre (FSDT), Le champ de déplacements de cette théorie est donné par l'expression suivante :

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) + z \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (\text{IV.19})$$

**Avec :**

- ✓  $u_0$  et  $v_0$ : sont les déplacements dans le plan (x,y)
- ✓  $w_0$ : est le déplacement transverse
- ✓  $\phi_x, \phi_y$ : sont les rotations suivante x et y

**IV .8.2) Le champ des déformations :**

Le champ des déformations sont définis par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} + Z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} = \underbrace{\{\varepsilon^0_L + \varepsilon^0_{nL}\}}_{\{\varepsilon\}} + Z \{K\} \tag{IV. 20}$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{IV. 21}$$

▪ **Avec :**

$\{\varepsilon\}$  ,  $z \{k\}$  ,  $\{\gamma\}$  sont respectivement les vecteurs déformations de membrane, de flexion et de cisaillement transverse.

**IV .8.3) Loi de comportement :**

Dans le système de coordonnées locales, les relations contraintes-déformations des fibres d'un stratifié soumis à une variation de température [28], sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}(T) & Q_{12}(T) & 0 \\ Q_{21}(T) & Q_{22}(T) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{IV.22}$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44}(T) & 0 \\ 0 & Q_{55}(T) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \tag{IV. 23}$$

**Avec :**

- 1 et 2 désigne respectivement la direction longitudinale des fibres et la direction transversale normale aux fibres dans le plan de la plaque.
- $\varepsilon_1^T$  et  $\varepsilon_2^T$  sont les déformations d'origine thermique et qui sont exprime par :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} = \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_1(T) \\ \alpha_2(T) \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{IV. 24}$$

**Avec :**

- $\alpha_1(T)$  : le coefficient de dilatation thermique longitudinal.
- $\alpha_2(T)$ :le coefficient de dilatation thermique transversal ;
- $\Delta T$ : la variation de température.

Les composantes de la rigidité  $Q_{ij}(T)$  sont exprimées par :

$$\begin{cases} Q_{11}(T) = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22}(T) = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & Q_{21}(T) = Q_{12}(T) = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66}(T) = G_{21}(T) & Q_{44}(T) = G_{23}(T) & Q_{55}(T) = G_{13}(T) \end{cases} \quad (IV.25)$$

Dans le repère global du stratifié, Les relations contraintes-déformations de la couche "k" sont données par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k - \Delta T \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k \quad (IV.26)$$

Les résultats en cisaillement sont exprimés comme suit :

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma^0_{xz} \\ \gamma^0_{yz} \end{Bmatrix}_k \quad (IV.27)$$

Les efforts à mi-plan d'une plaque et les moments sont liés aux déformations et aux courbures par les expressions suivantes :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_x \\ \varepsilon^0_y \\ \gamma^0_{xy} \\ K_x \\ K_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T_x \\ N^T_y \\ N^T_{xy} \\ M^T_x \\ M^T_y \\ M^T_{xy} \end{Bmatrix} \quad (IV.28)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma^0_{xz} \\ \gamma^0_{yz} \end{Bmatrix} \quad (IV.29)$$

Sous forme contractée :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0_L \\ K \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \quad (IV.30)$$

$$\{Q\} = [H]\{\gamma\} \quad (IV.31)$$

▪ **Avec :**

- ✓ La matrice A est la matrice de rigidité en membrane
- ✓ La matrice D est la matrice de rigidité en flexion
- ✓ La matrice B est la matrice de couplage membrane-flexion-torsion
- ✓ La matrice H correspond la matrice de cisaillement transverse.

▪ **On peut définir par :**

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k dz \quad (IV.32)$$

$$B_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k z dz \quad (IV.33)$$

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k z^2 dz \quad (IV.34)$$

$$H_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [Q'_{ij}]_k dz \quad (IV.35)$$

En notant par  $\sigma_{ij}$  les contraintes dans le plan, on peut écrire:

$$N_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz \quad (IV.36)$$

$$M_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz \quad (IV.37)$$

$$T_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz \quad (IV.38)$$

Les résultats de la force thermique est :

$$N^T = \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k \{\Delta T\{\alpha\}^T\} dz \quad (IV.39)$$

Les résultats de moment thermique est :

$$M^T = \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k \{\Delta T\{\alpha\}^T\} z dz \quad (IV.40)$$

#### IV .9) Energie potentielle:

L'énergie potentielle de déformation d'une plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon dv \quad (\text{IV. 41})$$

Avec :

V : volume de la plaque

Il est nécessaire déterminer la distribution des efforts membranaires en résolvant l'équation :

$$[K]\{X\} = \{F\} \quad (\text{IV. 42})$$

Avec :

- ❖ [K] : La matrice de rigidité globale
- ❖ {X} : Le vecteur des déplacements globaux.
- ❖ {F} : Le vecteur de chargement global.

La valeur propre du phénomène de flambement thermique sont exprime par la relation suivante :

$$[K]\{\Delta\} + \lambda [K_g]\{\Delta\} = 0 \quad (\text{IV. 43})$$

Avec :

- $\lambda$  : la charge non dimensionnelle de flambement.
- { $\Delta$ } : représente le vecteur modal.
- [K] : la matrice de rigidité globale.
- [ $K_g$ ] : la matrice géométrique globale.

#### IV .10) Convergence de la température critique de flambement:

- **Température critique de flambement avec dépendance à la température :**

Les propriétés matérielles sont exprime en fonction linéaire de la température et sont données par :

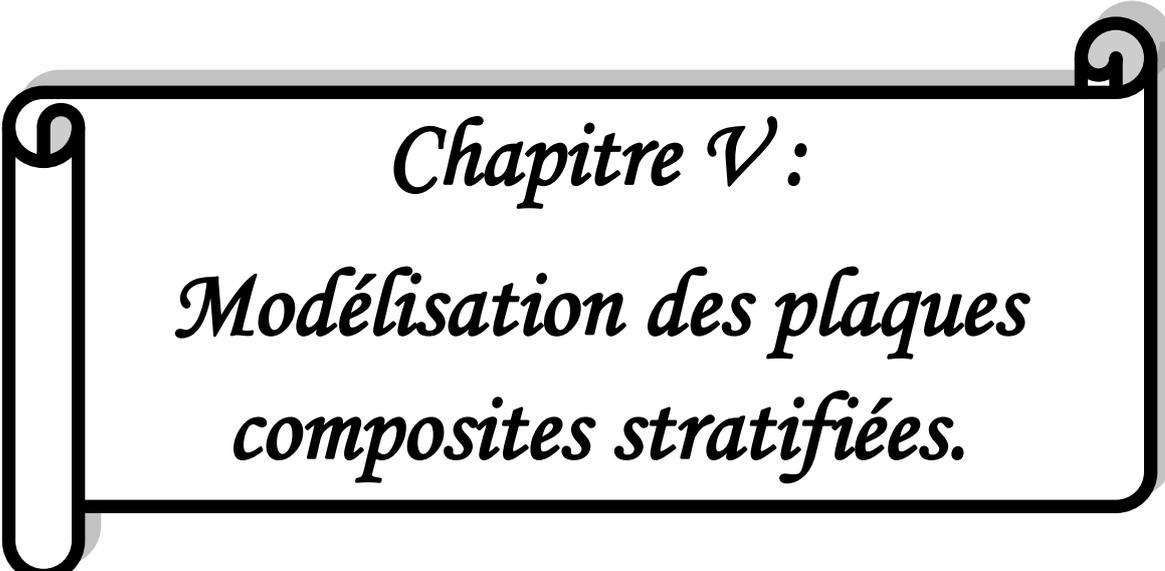
[54]

$$\begin{cases} E_1(T) = E_{10} (1 + \alpha_{11}T) & G_{12}(T) = G_{120} (1 + \alpha_{121}T) & G_{23}(T) = G_{230} (1 + \alpha_{231}T) \\ E_2(T) = E_{20} (1 + \alpha_{21}T) & G_{13}(T) = G_{130} (1 + \alpha_{131}T) & \alpha_1 = \alpha_{10} (1 + \alpha_{11}T) \\ & \alpha_2 = \alpha_{20} (1 + \alpha_{21}T) & \end{cases} \quad (\text{IV. 44})$$

**IV .11) Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons mise en évidence l'effet de la température sur la stabilité des plaques composite stratifiées qui provoque le phénomène de flambement thermique ; nous avons commencé par une synthèse bibliographique sur les origines du flambement thermique ainsi que les différents modèles éléments finis qui sont utilisé par les auteurs pour l'analyse de flambement thermique des plaques composites stratifiées. Ensuite nous avons basé l'étude de ce phénomène sur deux théories premièrement la théorie classique de stratifiées puis la théorie de déformations en cisaillement de premier ordre.

Les chercheurs aujourd'hui développer des techniques de calcul et de modélisation pour traiter ce phénomène, donc la modélisation des plaques composite stratifiées c'est l'objet de chapitre qui suit.



*Chapitre V :*  
*Modélisation des plaques*  
*composites stratifiées.*

## Chapitre V :

### **Modélisation des plaques composites stratifiées.**

#### **V.1) Introduction :**

La connaissance de l'effet de la température sur la stabilité des plaques composites stratifiées est essentielle. Ce chapitre consacré essentiellement à la modélisation des plaques composite stratifiées par un logiciel basé sur la méthode élément fini « **ABAQUS** ».

Le présent chapitre est divisé en deux parties :

Dans la première partie, nous allons présenter une étude comparative pour vérifier et valider les résultats de modélisation des plaques isotrope et des plaques composite stratifiées sous l'effet de la température (la distribution uniforme) avec les résultats existant dans les littératures (analytique et numérique) afin de valider notre travail.

Notre étude est basée sur trois éléments **ABAQUS** à savoir :

- ❖ **STRI65** : élément shell triangulaire à 6 nœuds/5ddl avec intégration réduite
- ❖ **S4R** : élément shell à 4 nœuds avec intégration réduite.
- ❖ **S8R** : élément shell à 8 nœuds avec intégration réduite.

Pour la deuxième partie, nous allons faire une étude paramétrique pour comprendre le comportement de flambement thermique des plaques composites stratifiées. Dans notre étude, nous prenons en considération l'influence de différents paramètres pouvant affecter la température de flambement thermique des plaques stratifiées, A savoir :

- ❖ l'effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ).
- ❖ Les types des matériaux (T300/5208 Graphite/Epoxy ; AS4/3501-6 Graphite/Epoxy, E-glass/Epoxy) Ces matériaux sont très largement utilisés dans l'industrie.
- ❖ l'effet des conditions aux limites.
- ❖ nombre de couche.
- ❖ Stratification (orientation des fibres).
- ❖ Le rapport d'anisotropie.
- ❖ Le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) et la dépendance des propriétés mécaniques.

## V.2) Présentations du logiciel ABAQUS :

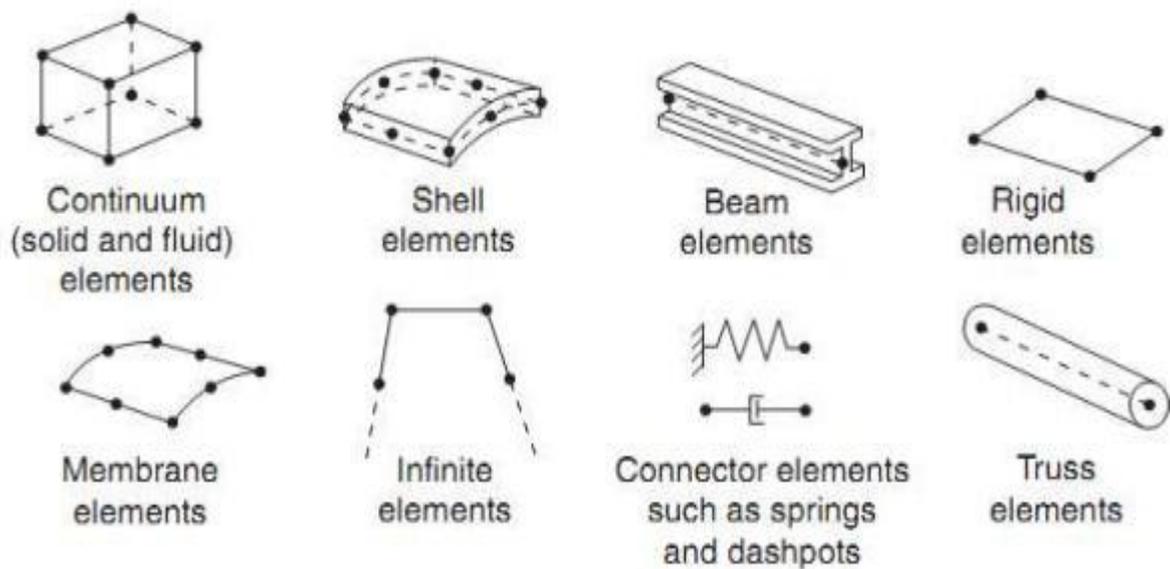
**ABAQUS** est un code de calcul par la méthode des éléments finis créé en 1978. Il est avant tout un logiciel de simulation de problèmes très variés en mécanique. Simuler la réponse physique des structures soumises à des chargements, des températures, des impacts ou autres conditions extérieures, Il est connu et répandu, en particulier pour ses traitements performants de problèmes non-linéaires.[36]

### V.2.1) Bibliothèque des éléments ABAQUS:

Le code de calcul, **ABAQUS** dispose d'une multitude de types d'éléments qui diffèrent par leurs propriétés d'interpolation, de symétrie, et leurs propriétés physiques. Ainsi, le code propose des éléments à 3 dimensions (3D), à 2 dimensions (2D), des éléments linéaires (1D) et les connecteurs.

Le choix entre ces différentes dimensionnalités dépend de la maîtrise du problème à simuler.

Ce qui permet de tenir compte des symétries de géométrie, des chargements, des conditions aux limites et des propriétés des matériaux [37]



**Figure 5.1 :** Différents types d'éléments disponibles dans la bibliothèque d'ABAQUS. [37]

Dans un premier temps ; nous avons présentée les conditions aux limites qui sont utilisées dans cette étude dans le tableau suivante :

**Tableaux V.1** : les conditions aux limites.

Conditions aux limites	Abréviation	Les retenus aux bords
Simplement appuyé	SSSS	x $\Rightarrow$ $v = w = \theta_y = 0$
		y $\Rightarrow$ $u = w = \theta_x = 0$
Encastré	CCCC	$u = v = w = \theta_x = \theta_y = 0$

### La première partie :

#### V. 3) Étude comparative :

##### V. 3.1) Plaques isotropes:

###### a) Plaque isotrope simplement appuyée:

Tout d'abord dans ce test ; on considère une plaque isotrope carrée mince, simplement appuyées avec deux types de matériau (les caractéristiques mécaniques différentes).

Les caractéristiques géométriques et mécaniques pour le premier type de matériau sont présentées dans le tableau (V.2):

**Tableau V.2** : les caractéristiques géométriques et mécaniques d'une plaque isotrope carrée simplement appuyées pour le premier type de matériau [44]

a/b	a/h	E	$\nu$	$\alpha$
1	100	$1 \cdot 10^{-6}$	0.3	$1 \cdot 10^{-6}$

Après la modélisation de plaque isotrope carrée simplement appuyées avec les trois types d'éléments ABAQUS (STR165 ; S8R et S4R) et avec les trois types de maillage (8\*8, 10\*10 et 12\*12), nous avons réuni les résultats dans le tableau (V.3), afin de les comparer avec les résultats suivantes :

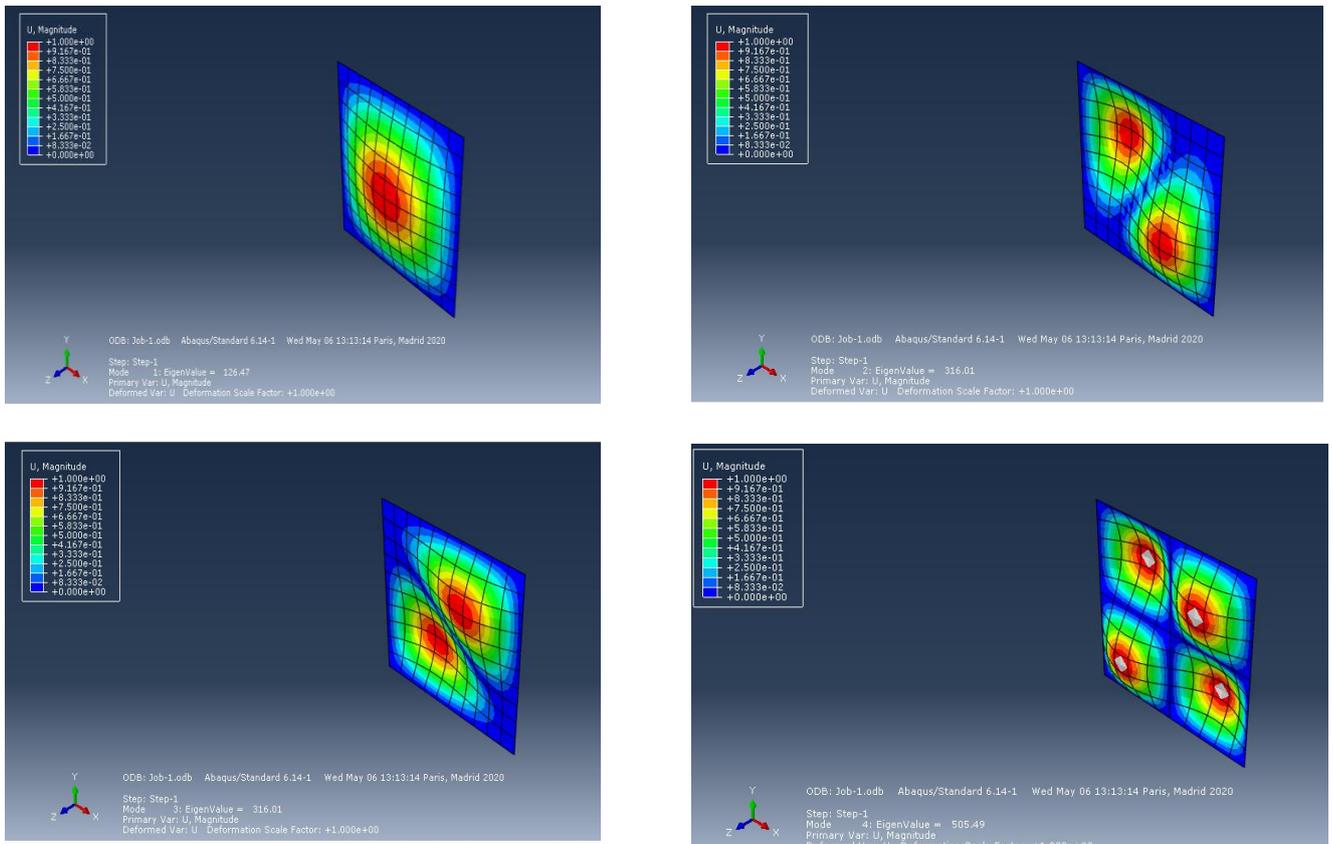
- 1) **Shiau et al** [55] avec un élément fini triangulaire à 6ddl / nœud basé sur la théorie classique des stratifiés.
- 2) **Zhao et al** [56] avec une méthode sans-maillage à 5ddl/nœud.
- 3) **Matsunaga** [57] avec une théorie d'ordre supérieur.
- 4) **Noor et Burton** [58] par une solution tridimensionnelle.
- 5) **Ounis houdayfa**[44] avec un élément fini combiné (élément membranaire iso-paramétrique + élément de type Hermite de haute précision) basé sur la théorie classique des stratifiés.

**Tableau V.3 :** les températures critiques de flambement d'une plaque carrée isotrope simplement appuyée pour le premier type de matériau.

Matsunaga [57]	Noor et Burton [58]	Zhao et al [56]	Shiau et al [55]	Ounis.H [44]	Présent S8R	Présent S4R	Présent STRI65
		0.1284 (16×16)	0.1266 (2×2)	0.1272 (2×2)	<b>0.1264</b> <b>(8×8)</b>	<b>0.1298</b> <b>(8×8)</b>	<b>0.1260</b> <b>(8×8)</b>
0.1264	0.1264	0.1273 (18×18)	0.1265 (4×4)	0.1265 (4×4)	<b>0.1264</b> <b>(10×10)</b>	<b>0.1286</b> <b>(10×10)</b>	<b>0.1261</b> <b>(10×10)</b>
		0.1271 (20×20)	0.1265 (6×6)	0.1265 (6×6)	<b>0.1264</b> <b>(12×12)</b>	<b>0.1279</b> <b>(12×12)</b>	<b>0.1262</b> <b>(12×12)</b>

D'après le tableau V.3, on voit que les résultats obtenus par la présente modélisation sont en très bon accord avec ceux de la littérature.

Nous présentons respectivement les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque isotrope carrée simplement appuyée pour élément S8R avec le maillage (10\*10).



**Figure V .2 :** Les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque isotrope carrée simplement appuyée pour le premier type de matériau.

▪ Ensuite, les caractéristiques géométriques et mécaniques pour le deuxième type de matériau sont présentées dans le tableau (V.4) :

**Tableau V.4 :** les caractéristiques géométriques et mécaniques d'une plaque isotrope carrée simplement appuyée pour le deuxième type de matériau [35]

a/b	a/h	E	V	$\alpha$
1	100	$2 \cdot 10^{-11}$	0.3	$2 \cdot 10^{-6}$

Après la modélisation de plaque isotrope carrée simplement appuyée, avec les trois types d'éléments ABAQUS (STRI65 ; S8R et S4R) et avec les cinq types de maillage (4\*4, 6\*6, 8\*8, 10\*10 et 12\*12), nous avons réuni les résultats dans les tableaux (V.5), afin de les comparer avec les résultats suivante:

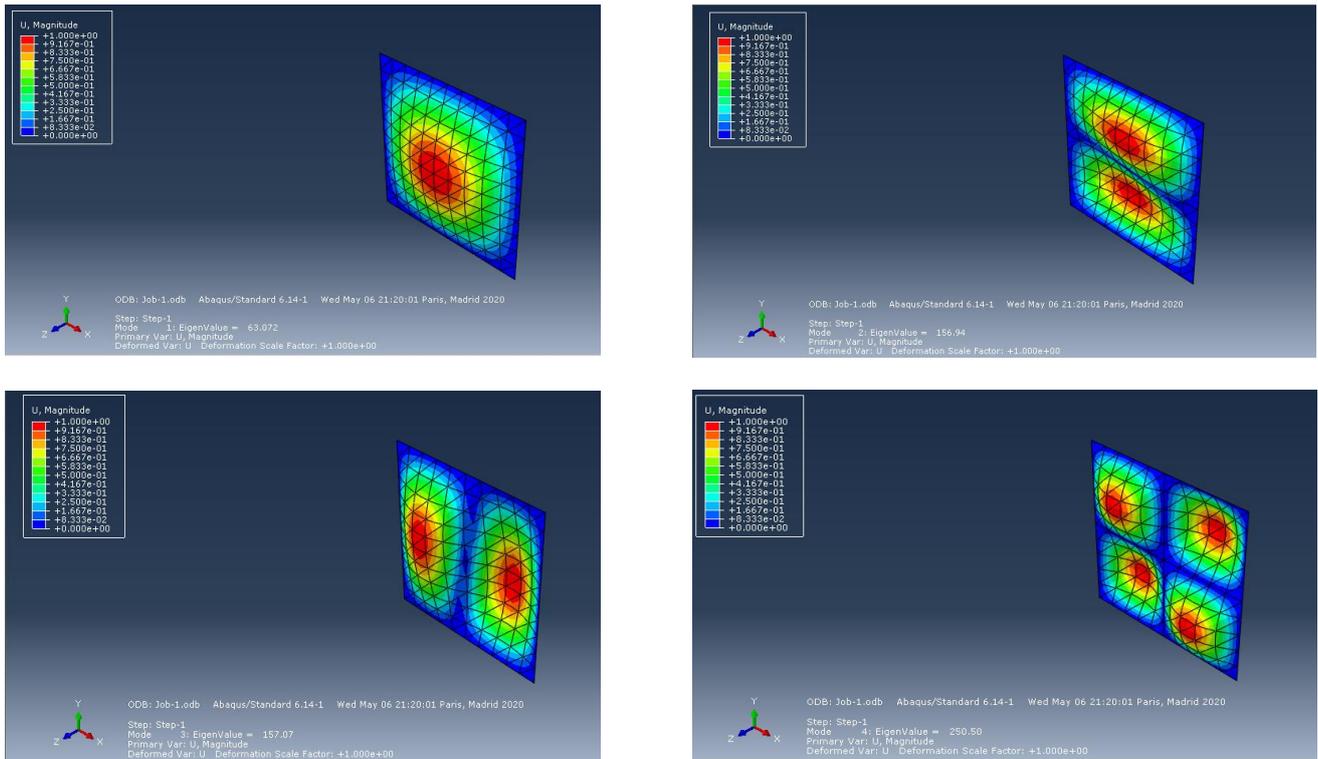
- 1) **Singha et al** [60] avec un élément fini basé sur la théorie du premier ordre
- 2) **Thangaratnam et al** [59] avec la solution analytique
- 3) **Ounis houdayfa** [44] avec un élément fini combine (élément membranaire iso-paramétrique + élément de type Hermite de haute précision) basé sur la théorie classique des stratifiées

**Tableau V.5 :** les températures critiques de flambement d'une plaque carrée isotrope simplement appuyées pour le deuxième type de matériau.

Maillage	analytique [59]	Singha et al [60]	Ounis.H [44]	Présent S8R	Présent S4R	Présent STRI65
4*4		63.198	63.127	<b>64.160</b>	<b>70.535</b>	<b>63.449</b>
6*6		63.247	63.247	<b>63.276</b>	<b>66.310</b>	<b>62.971</b>
8*8	63.27	63.262	63.262	<b>63.238</b>	<b>64.932</b>	<b>63.017</b>
10*10		/	/	<b>63.233</b>	<b>63.311</b>	<b>63.072</b>
12*12		63.266	63.266	<b>63.233</b>	<b>63.977</b>	<b>63.109</b>

D'après le tableau V.5, on voit que les résultats obtenus par la présente modélisation sont en très bon accord avec ceux de la littérature.

Nous présentons respectivement les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque isotrope carrée simplement appuyée pour élément STRI65 avec le maillage (10\*10).



**Figure V .3 :** Les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque isotrope carrée simplement appuyée pour le deuxième type de matériau.

**b) Plaque isotrope encastree :**

Dans ce test ; on considère une plaque isotrope carrée mince, encastree avec les caractéristiques géométriques et mécaniques suivante (vois le tableau **V.6**) :

**Tableau V.6:** les caractéristiques géométriques et mécaniques d’une plaque isotrope carrée encastree [35].

a/b	a/h	E	$\nu$	$\alpha$
1	100	$2 \cdot 10^{-11}$	0.3	$2 \cdot 10^{-6}$

Après la modélisation de plaque isotrope carrée encastree avec les trois types d’éléments **ABAQUS** (STRI65 ; S8R et S4R) et avec les cinq type de maillage (4\*4, 6\*6, 8\*8,10\*10 et 12\*12), nous avons réuni les résultats dans les tableaux (**V.7**), afin de les comparer avec les résultats suivante :

- 1) **Singha et al** [60] avec un élément fini basé sur la théorie du premier ordre.
- 2) **Thangaratnam et al** [59] avec la solution analytique.

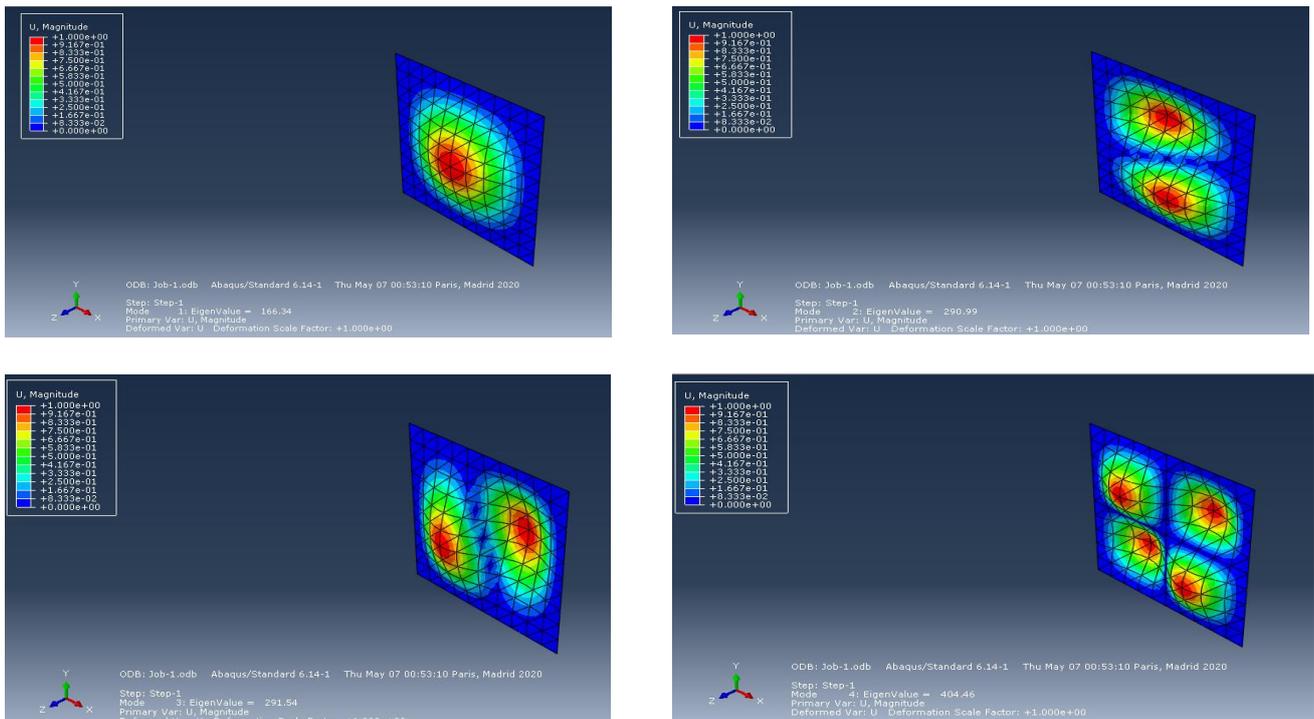
3) **Ounis houdayfa** [44] avec un élément fini combine (élément membranaire iso-paramétrique + élément de type Hermite de haute précision) basé sur la théorie classique des stratifiées.

**Tableau V.7 :** les températures critiques de flambement d'une plaque carrée isotrope encastree

Maillage	analytique [59]	Singha et al.[60]	Ounis.H [44]	Présent S8R	Présent S4R	Présent STRI65
4*4		166.517	169.466	<b>294.17</b>	<b>246.87</b>	<b>179.73</b>
6*6		167.579	168.137	<b>176.69</b>	<b>195.34</b>	<b>167.43</b>
8*8	168.71	167.675	167.892	<b>168.82</b>	<b>182.08</b>	<b>166.26</b>
12*12		167.856	167.796	<b>167.58</b>	<b>173.67</b>	<b>166.53</b>
10*10		/	/	<b>167.80</b>	<b>176.54</b>	<b>166.34</b>

D'après le tableau V.7, on voit que les résultats obtenus par la présente modélisation sont en très bon accord avec ceux de la littérature.

Nous présentons respectivement les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque isotrope encastree pour élément STRI65 avec le maillage (10\*10).



**Figure V.4 :** Les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque isotrope carrée encastree.

On remarque que les résultats de notre modélisation avec les trois types d'éléments **ABAQUS** (STRI65 ; S8R ; S4R) pour les plaques isotropes simplement appuyée et encadrée en bon accord avec les résultats de littérature.

### V. 3.2) Plaques stratifiées:

#### a) *Plaques stratifiées rectangulaires simplement appuyées:*

Dans ce test nous allons modéliser ; des plaques stratifiées symétriques rectangulaire simplement appuyés avec 8 couche, et deux types de stratifications  $[0/90/90/0]_s$  et  $[0/45/-45/90]_s$  les propriétés géométriques et mécaniques des plaques sont présentes dans le tableau (V. 8):

**Tableau V.8** : les caractéristiques géométriques et mécaniques des plaques stratifiées symétrique simplement appuyés [61].

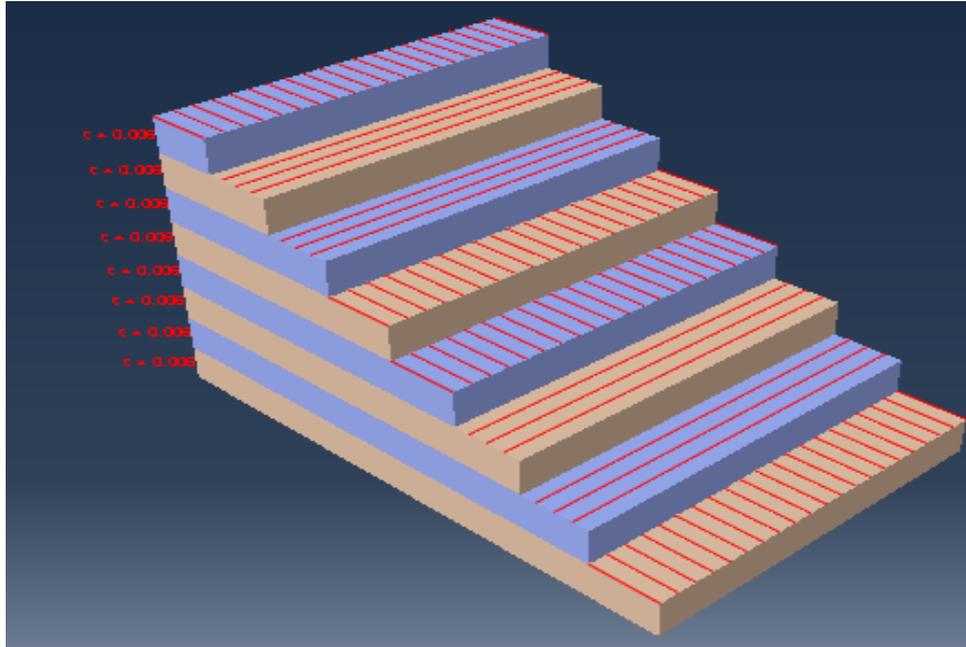
a (in)	b	h	$E_1$ (psi)	$E_2$	$G_{12}$	$\alpha_1(1/F^\circ)$	$\alpha_2$	$V_{12}$
15	12	0.048	$22.5 \times 10^6$	$1.17 \times 10^6$	$0.66 \times 10^6$	$-0.04 \times 10^{-6}$	$16.7 \times 10^{-6}$	0.22

Après la modélisation des plaques stratifiées symétrique rectangulaire simplement appuyées avec les trois types d'éléments **ABAQUS** (S8R, S4R et STRI65) et avec les quatre types de maillage (4\*4 ,8\*8,10\*10 et 12\*12).

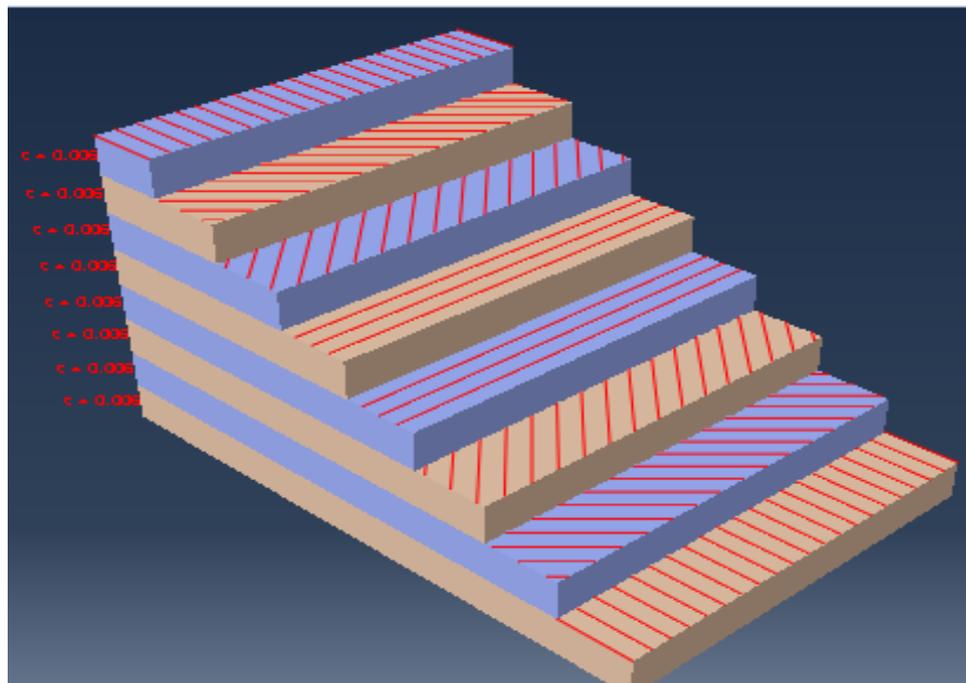
Nous avons réuni les résultats dans le tableau (V.9), Afin de les comparer avec les résultats suivants :

- 1) **Yucheng Shi, Shiau et al** [61,55] avec un élément finis basé sur la théorie classique des stratifiée
- 2) **Ounis houdayfa** [44] avec un élément fini combine (élément membranaire iso-paramétrique + élément de type Hermite de haute précision) basé sur la théorie classique des stratifiées.

- La présentation graphique des stratifiés étudiés comme suit :



**Figure V. 5:**présentation graphique de stratifié  $[0/90/90/0]_s$



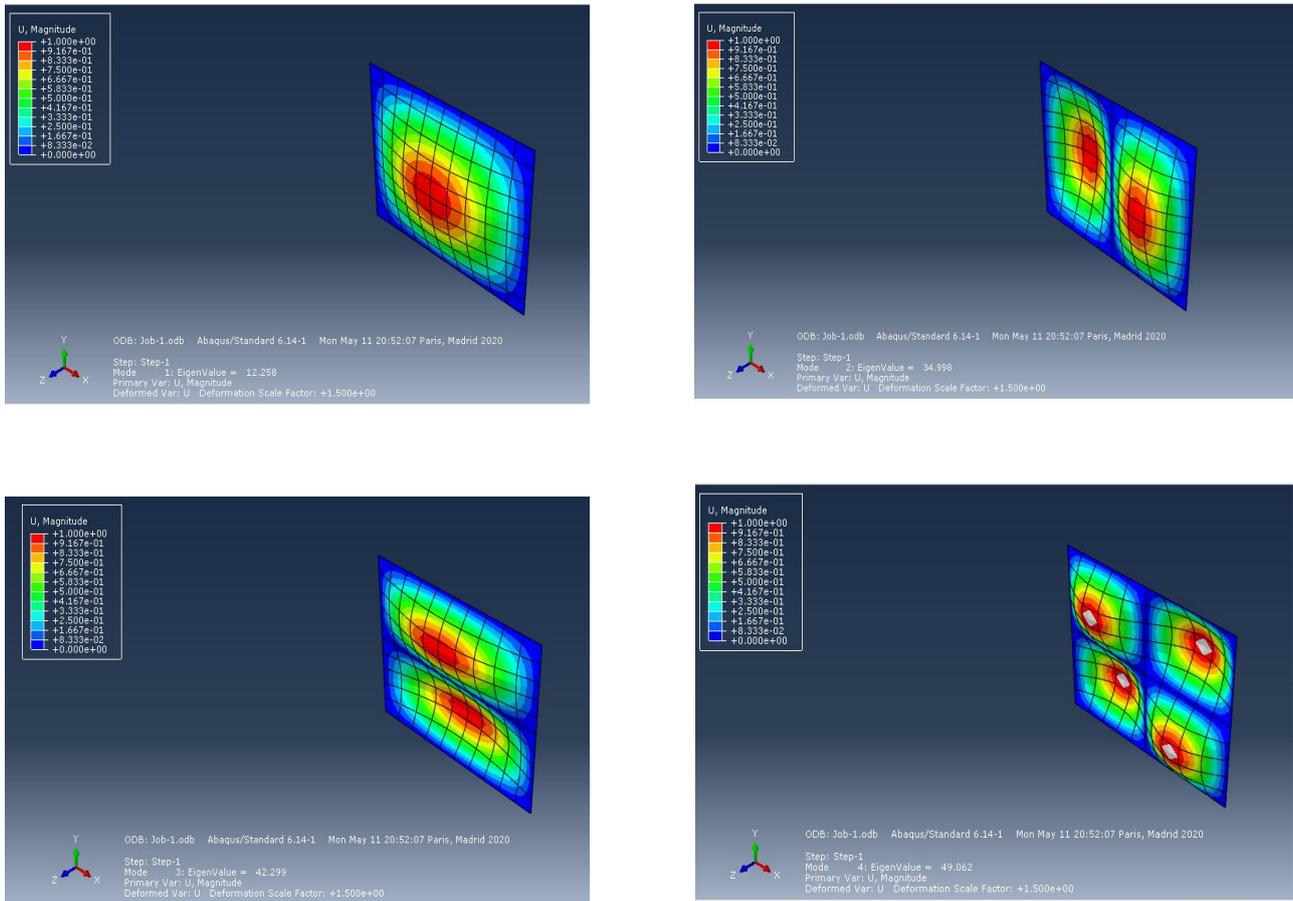
**Figure V.6:**présentation graphique de stratifié  $[0/45/-45/90]_s$

**Tableau V.9 :** les températures critiques de flambement des plaques stratifiées symétrique rectangulaire simplement appuyées.

Stratifications	Yucheng Shi [61]	Shiau et al. [55]	Ounis.H [44]	Présent S8R	Présent S4R	Présent STRI65
<b>[0/90/90/0] s</b>	/	12.2616 (4×4)	12.2716 (4×4)	<b>12.597</b> <b>(4×4)</b>	<b>13.647</b> <b>(4×4)</b>	<b>12.435</b> <b>(4×4)</b>
	/	12.2610 (8×8)	12.2617 (8×8)	<b>12.259</b> <b>(8×8)</b>	<b>12.582</b> <b>(8×8)</b>	<b>12.225</b> <b>(8×8)</b>
	/	/	/	<b>12.258</b> <b>(10×10)</b>	<b>12.463</b> <b>(10×10)</b>	<b>12.232</b> <b>(10×10)</b>
	12.26 (12×12)	12.2610 (12×12)	12.2612 (12×12)	<b>12.258</b> <b>(12×12)</b>	<b>12.400</b> <b>(12×12)</b>	<b>12.238</b> <b>(12×12)</b>
<b>[0/45/-45/90]s</b>	/	13.7744 (4×4)	13.7388 (4×4)	<b>14.389</b> <b>(4×4)</b>	<b>15.348</b> <b>(4×4)</b>	<b>13.758</b> <b>(4×4)</b>
	/	13.7582 (8×8)	13.7354 (8×8)	<b>13.764</b> <b>(8×8)</b>	<b>14.107</b> <b>(8×8)</b>	<b>13.699</b> <b>(8×8)</b>
	/	/	/	<b>13.746</b> <b>(10×10)</b>	<b>13.970</b> <b>(10×10)</b>	<b>13.708</b> <b>(10×10)</b>
	13.71 (12×12)	13.7519 (12×12)	13.7357 (12×12)	<b>13.740</b> <b>(12×12)</b>	<b>14.178</b> <b>(12×12)</b>	<b>13.714</b> <b>(12×12)</b>

On observe que les résultats de notre modélisation avec les trois types d'éléments **ABAQUS** (STRI65 ; S8R et S4R) pour les plaques stratifiées simplement appuyée [0/90/90/0]s et [0/45/-45/90] s en bon accord avec les résultats de littérature.

Nous présentons respectivement les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque stratifiée symétrique rectangulaire **[0/90/90/0]s** simplement appuyés pour élément S8R avec le maillage (10\*10).



**Figure V.7 :** Les quatre premiers modes de flambement thermique de plaque stratifiée symétriques rectangulaire [0/90/90/0]s simplement appuyés.

Après avoir vérifié la validation des éléments (S8R, STRI65 et S4R) et assuré son fonctionnement on note que :

- ✓ Les résultats de l'élément Shell à 4 nœuds éloignés par rapport les résultats des éléments (S8R et STRI65) a cause de faible conception ; et demander beaucoup raffinement pour atteindre des bons résultats.
- ✓ les résultats des éléments (S8R et STRI65) très proche par rapport les résultats analytiques et numériques donc dans la suite de ce chapitre nous allons basée sur les éléments :

- STRI65 : pour les plaques minces.
- S8R : pour les plaques épaisses.

Maintenant, nous allons passer à l'étude paramétrique pour savoir et détermine l'effet de différentes paramètres ; le but de cette manipulation est de découvrir et déterminer l'impact de chaque paramètres sur le comportement de flambement thermiques des plaques composites stratifiées.

## Deuxième partie :

### V. 4) Etude paramétrique :

#### V. 4.1) : Effet du rapport d'aspect a/b:

##### V. 4.1.1) *Effet du rapport d'aspect (a/b) sur la température critique de flambement des Plaques stratifiées croisées :*

Dans cette étude nous nous sommes intéressés à étudier l'effet de la géométrie de la plaque stratifiée croisée sur les températures critiques de flambement; on a considérés plusieurs rapports d'aspect ( $a/b=1\dots4$ ), avec  $a/h = 100$  ( plaque mince), 8 couches, maillage  $10*10$ , deux types de stratifications  $[90_2/0_2]_s$ ,  $[0_2/90_2]_s$ , deux types de conditions aux limites (simplement appuyé et encasté) et trois types de matériaux :

\*Graphite/Epoxy (AS4/3501-6).      \*Graphite/Epoxy (T300/5208).      \*E-glass/Epoxy.

Avec les propriétés mécaniques suivantes (**vois le tableau V.10**)

**Tableau V.10 :** Propriétés des matériaux T300/5208, le AS4/3501-6 et E-glass/Epoxy [44]

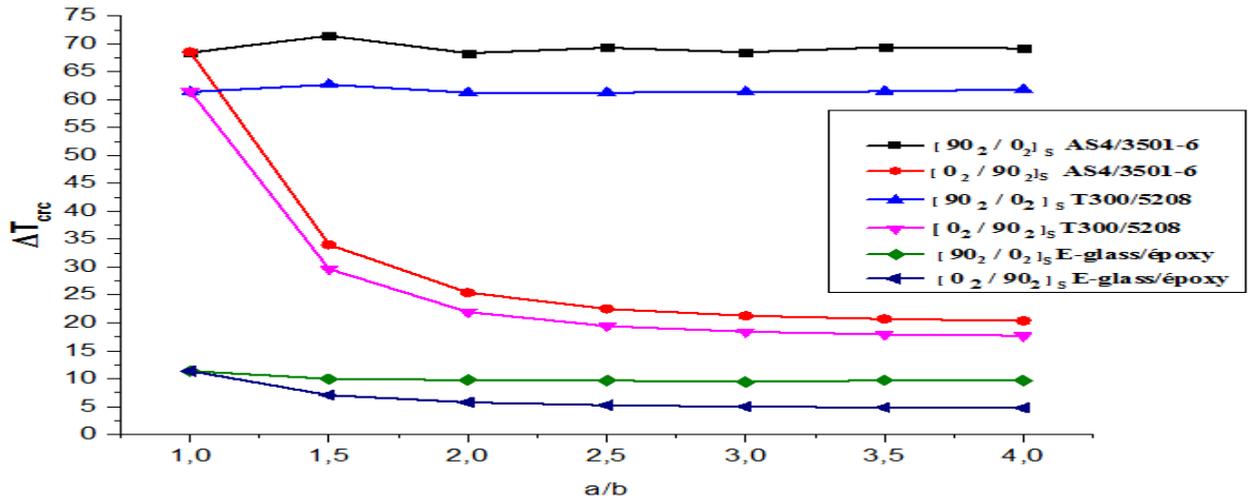
types de matériaux	$E_1$ (Gpa)	$E_2$	$G_{12}$	$\nu_{12}$	$\alpha_1(10^{-6}/C^\circ)$	$\alpha_2(10^{-6}/C^\circ)$
T300/5208	181	10.3	7.17	0.28	0.02	22.5
AS4/3501-6	142	10.3	7.2	0.27	-0.9	27
E-glass/Epoxy	53.4	17.9	8.6	0.25	6.3	20.5

Selon le tableau (V.10) on note que :

- ❖ le matériau **T300/5208** contient des propriétés mécaniques élevées.
- ❖ le matériau **AS4/3501-6** présente des propriétés mécaniques proches de celles du **T300/5208**, mais contient un coefficient de dilatation thermique longitudinal négatif
- ❖ le matériau **E-glass/Epoxy** contient des propriétés mécaniques faibles par rapport les deux autres matériaux.

Après la modélisation des plaques stratifiées croisées simplement appuyée avec (les différents rapports d'aspect, les deux types de stratifications, et les trois matériaux choisis).

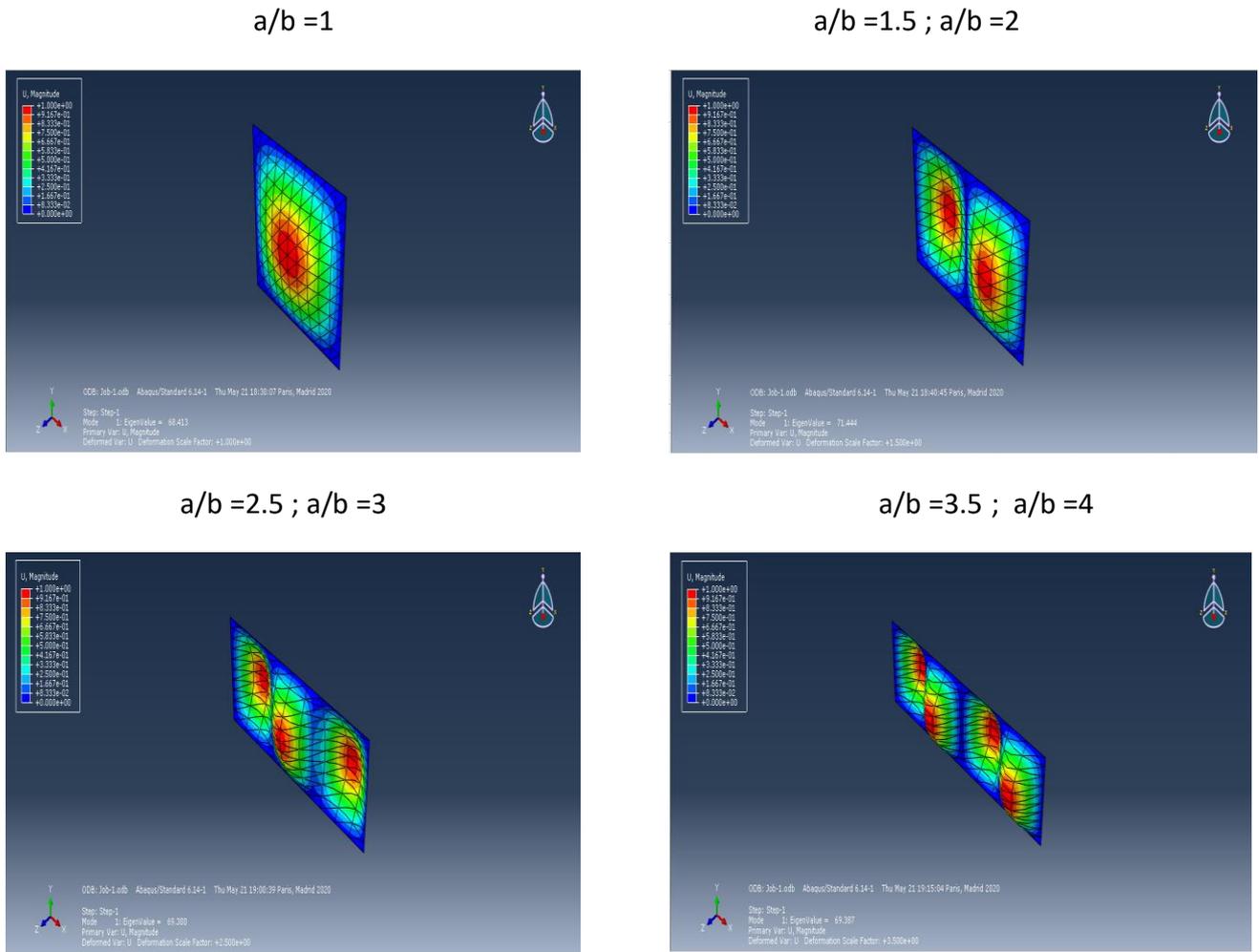
Les résultats obtenus par notre modélisation sont présentés dans la courbe suivante :



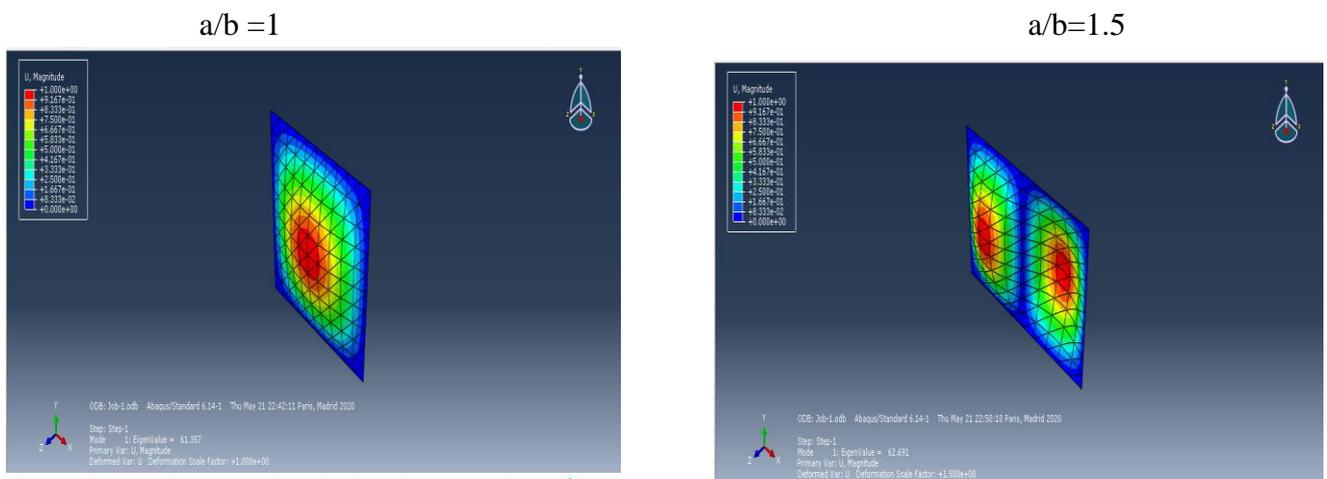
**Figure V.8** : Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée croisée simplement appuyée.

La figure (V.8) représente l'effet du rapport d'aspect (a/b) sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée croisée (simplement appuyé) d'après ce type de conditions aux limites on constate que :

- ❖ pour les deux types de stratification  $[0_2/90_2]_s$  ;  $[90_2/0_2]_s$  la température critique de flambement diminue avec l'augmentation de rapport d'aspect (a/b) pour les trois types de matériaux
- ❖ Pour le stratifiée  $[90_2/0_2]_s$ , la température critique de flambement est fortement affectée par l'augmentation du rapport d'aspect, par le fait qu'avec le plan moyen de stratifiés on obtient des couches orientées dans la direction ( $0^\circ$ ), cette direction est parallèle par rapport le sens de dilation (a) de la plaque.
- ❖ d'autre part, on remarque que la géométrie et les conditions aux limites sont affecté sur la température critique de flambement plus que l'effet des propriétés mécaniques de matériau (E, G,  $\nu$ ).
- ❖ dans le cas de stratifiées  $[90_2/0_2]_s$  pour le matériau **AS4/3501-6** on observe des piques dans le courbes avec les rapports d'aspect suivante ( $a/b= 1.5$   $a/b= 2.5$   $a/b=3.5$ ) Cela peut être dû au changement de modes de flambement comme le montre dans les figures (V.9)
- ❖ Aussi dans le cas de stratifiée  $[90_2/0_2]_s$  pour le matériau **T300/5208** on remarque un pique dans le courbe avec le rapport d'aspect ( $a/b= 1.5$ ) a cause de changement dans les modes de flambement. Vois les figures (V.10).



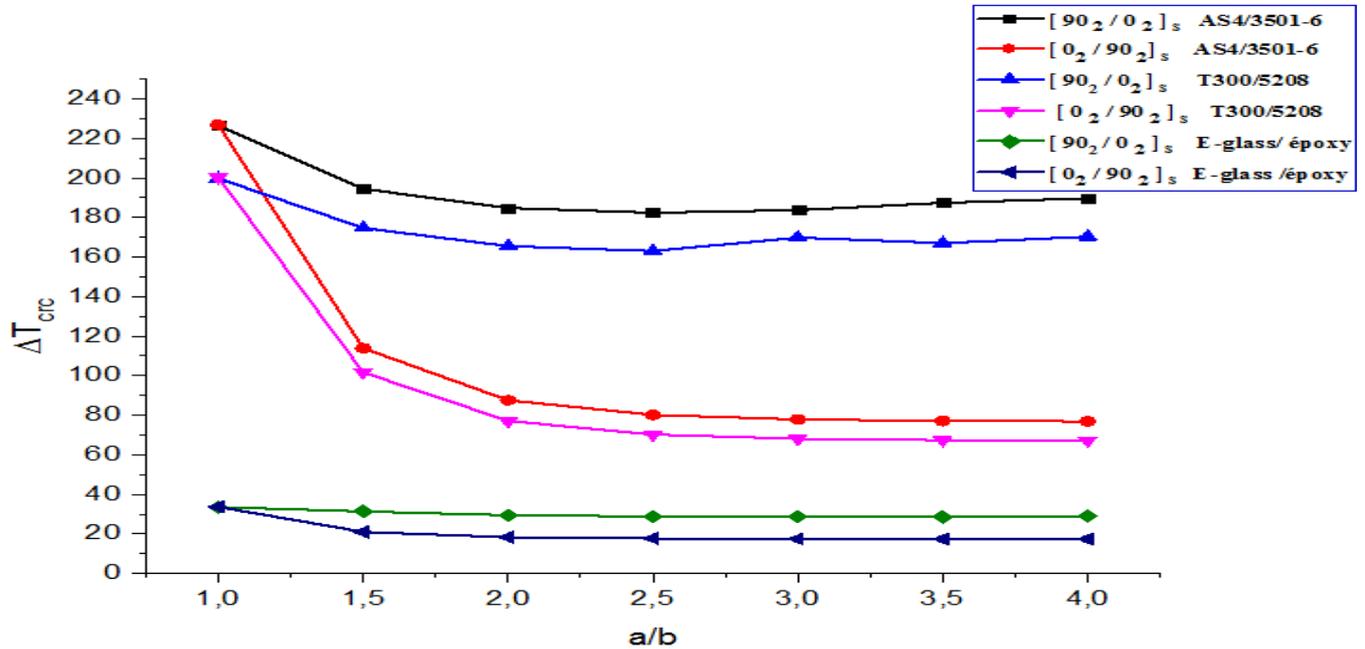
**Figure V. 9:** Les modes de flambement d'une plaque stratifiée AS4/3501-6 pour différents rapports d'aspect simplement appuyée.



**Figure V. 10:** Les modes de flambement d'une plaque stratifiée T300/5208 pour différents rapports d'aspect simplement appuyée.

Après la modélisation des plaques stratifiées croisées encastres (les différents rapports d'aspect, les deux types de stratifications, et les trois matériaux choisis).

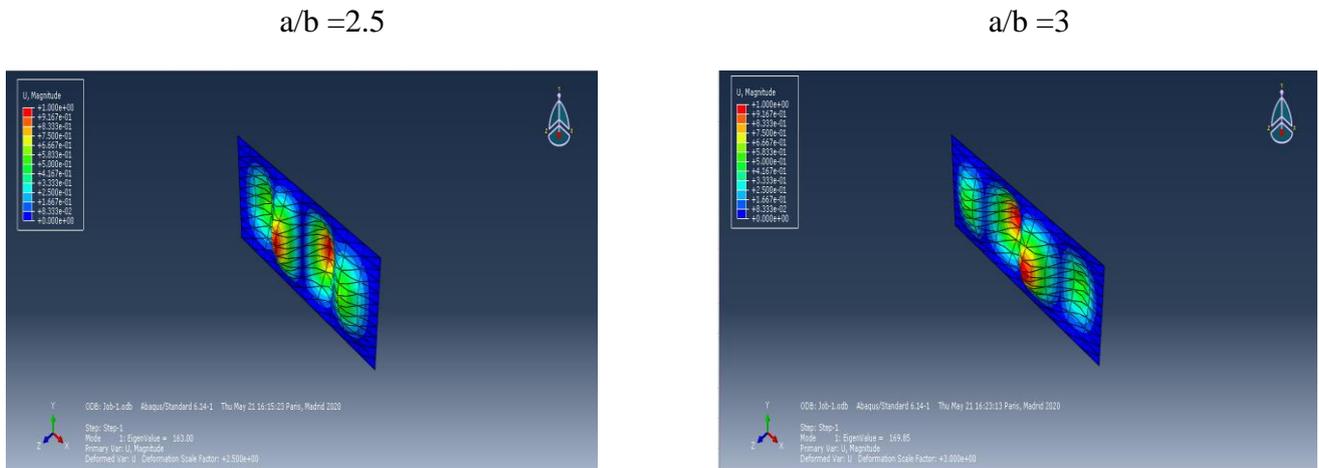
Les résultats obtenus par notre modélisation sont présentés dans la courbe suivante :



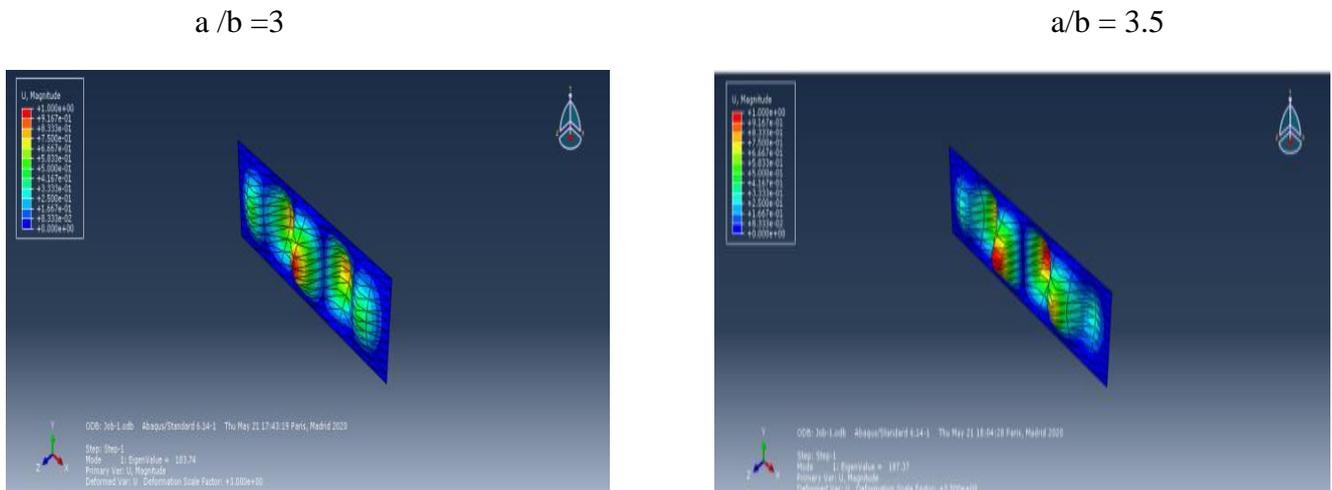
**Figure V. 11 :** Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée croisée encastree

Le figure (V. 11) représente l'effet du rapport d'aspect (a/b) sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée croise (encastree) Pour ce cas de condition aux limites on remarque :

- ❖ pour les deux types de stratification [0<sub>2</sub>/90<sub>2</sub>]<sub>s</sub> et [90<sub>2</sub>/0<sub>2</sub>]<sub>s</sub> le température critique de flambement diminue avec l'augmentations de rapport d'aspect (a/b)
- ❖ pour le stratifiée [90<sub>2</sub>/0<sub>2</sub>]<sub>s</sub> dans le cas de matériau **T300/5208** la température critique de flambement diminue avec l'augmentation de rapport d'aspect (a/b) jusqu'à 2.5. Par contre on observe un pique dans le cas de rapport d'aspect **a/b = 3** à cause de changement dans les modes de flambement (vois les figures V. 12).
- ❖ pour le stratifiée [90<sub>2</sub>/0<sub>2</sub>]<sub>s</sub> dans le cas de matériau **AS4/3501-6** la température critique de flambement diminue avec l'augmentation de rapport d'aspect (a/b) jusqu'à 2.5 par contre on remarque une légère augmentation de température dans les rapports d'aspect suivante (**a/b = 3 ; a/b = 3.5**) à cause de changement dans les modes de flambement (vois les figures V. 13)



**Figure V. 12 :** Les modes de flambement d'une plaque stratifiée **T300/5208** pour différents rapports d'aspect (encastree)



**Figure V. 13 :** Les modes de flambement d'une plaque stratifiée **AS4/3501-6** pour différents rapports d'aspect (encastree)

- ❖ On note également que dans le cas de l'encastrement les résultats de températures critiques plus élevées par rapport les résultats de simplement appuyée, Ceci peut être expliqué par le fait que l'encastrement bloquer tous les degrés de liberté.
- ❖ pour les deux types des stratifications et deux types de conditions aux limites et les trois matériaux choisis. si le rapport d'aspect ( $a/b=1$  la plaque carrée) on prendre la même valeur de température critique à cause de la symétrie dans la géométrie et les conditions aux limites.

A travers les résultats obtenus dans la modélisation des plaques stratifiées croise on remarque que :

Le matériau **AS4/3501-6** donné des températures critiques de flambement plus hautes par rapport le matériau **T300/5208** malgré le module de Young longitudinal ( $E_1$ ) élevé de ce dernier. Cela est du au coefficient longitudinal négatif de dilatation thermique de AS4 / 3501-6.

Selon **Shiau et al** [55] Quand le AS4/3501-6 est soumis à une élévation de température, son coefficient longitudinal génère des forces de traction, de ce fait, la capacité de chargement de la plaque s'épuise relativement lentement. Par conséquent, les températures critiques de flambement de l'AS4/3501-6 sont les plus hautes.

D'autre part ; Le matériau **L'E-glass/Epoxy** donne de température critique de flambement plus bas à cause de sa faible propriété mécanique.

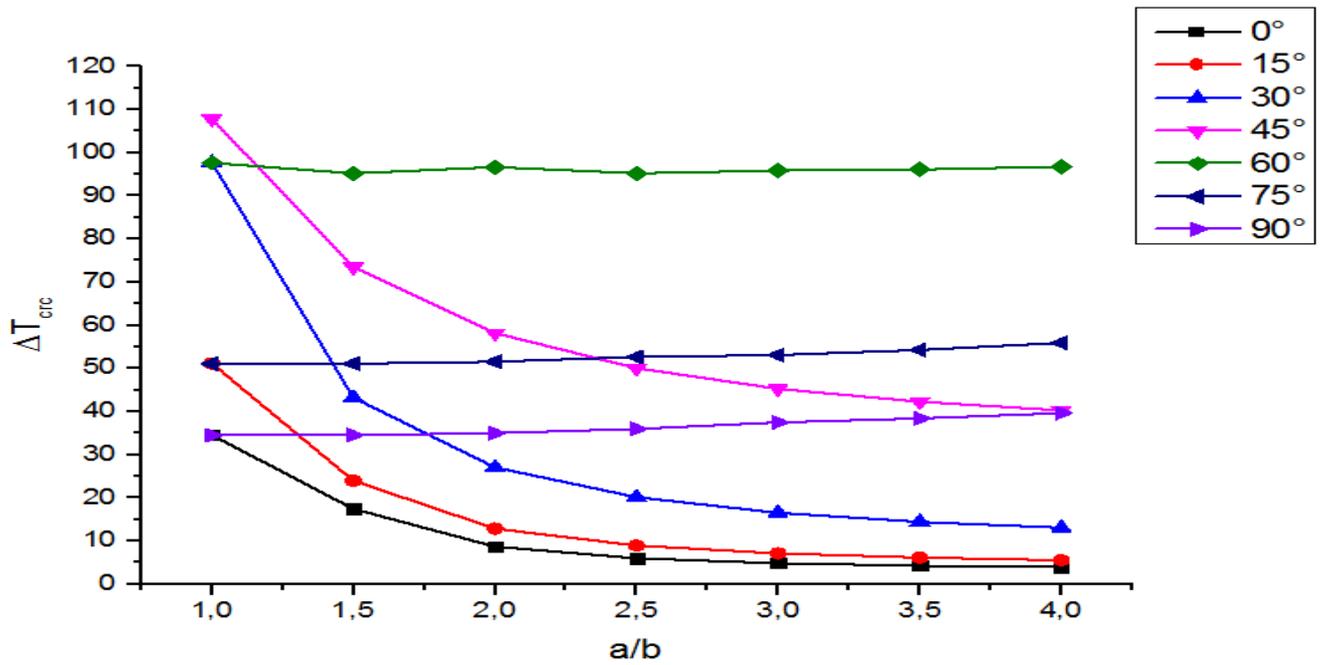
#### **V. 4.1.2) Effet du rapport d'aspect (a/b) sur la température critique de flambement des plaques stratifiées équilibrées :**

Dans cette section aussi ; on va étudier l'effet de la géométrie des plaques stratifiées équilibrées  $[\pm\theta]_{ns}$  sur la température critique de flambement, pour différentes conditions aux limites (simplement appuyée et encadrée) avec plusieurs angles d'orientations ( $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  et  $90^\circ$ ), différents rapports d'aspects ( $a/b=1\dots 4$ ),  $a/h = 100$  ( plaque mince ), 8 couches et maillage  $10*10$ , ainsi que ont été pris en considération les trois types de matériaux à savoir:

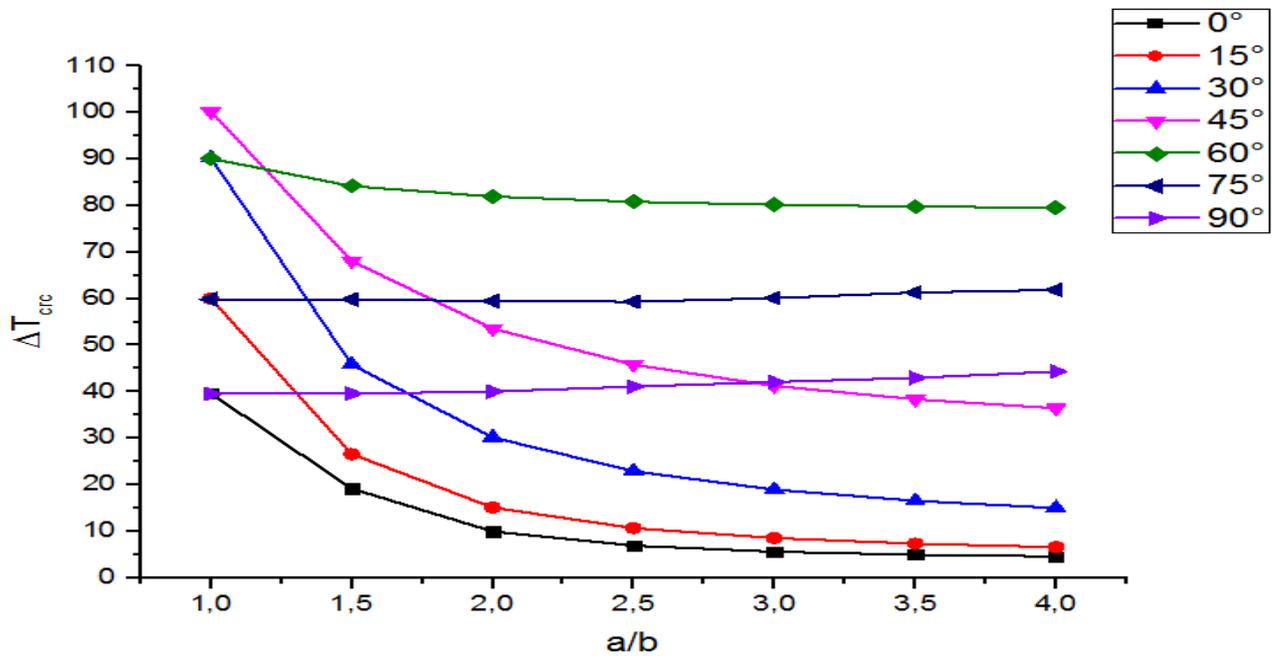
\*Graphite/Epoxy (AS4/3501-6).      \*Graphite/Epoxy (T300/5208).      \*E-glass/Epoxy.

Après la modélisation des plaques stratifiées équilibrées simplement appuyée avec (les différents rapports d'aspect, tous les angles d'orientations ( $0^\circ\dots 90^\circ$ ), et les trois types de matériaux choisis).

Les résultats obtenus de chaque matériau par les différents tests sont présentes dans les courbes suivantes :



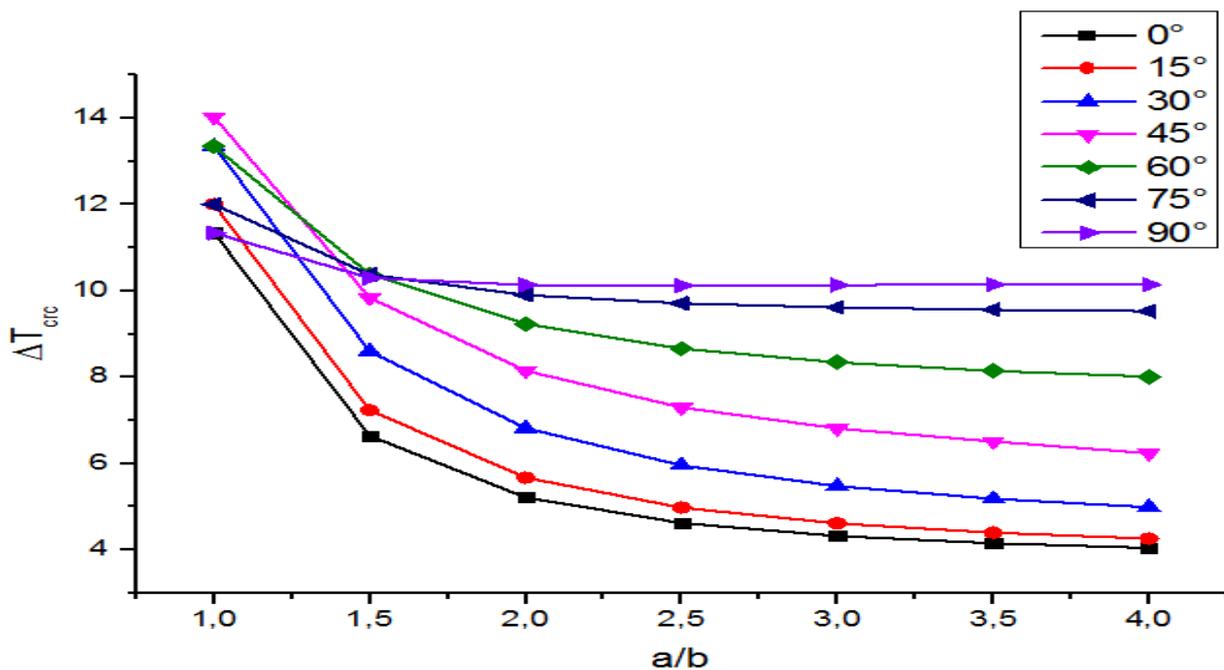
**Figure V. 14 :** Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées AS4/3501-6 simplement appuyée.



**Figure V. 15 :** Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées T300/5208 simplement appuyée.

Les figures (V. 14 et V. 15) montrent l'effet du rapport d'aspect (a/b) sur la température critique de flambement des plaques stratifiées équilibrées simplement appuyée pour les deux types de matériaux AS4/3501-6 et T300/5208 respectivement pour ce type de conditions aux limites on remarque que :

- ❖ les températures critiques de flambement diminuent avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ).
- ❖ on constate aussi, si la plaque carrée ( $a/b = 1$ ) l'angle  $45^\circ$  donne la plus haute température critique de flambement d'autre part, l'angle  $0^\circ$  donne la plus basse température critique de flambement.
- ❖ Pour les autres rapports d'aspect (forme rectangulaire) l'angle  $60^\circ$  donne la plus haute température critique de flambement alors que la plus basse température critique celles de l'angle  $0^\circ$ .
- ❖ pour les orientations ( $60^\circ$ ,  $75^\circ$  et  $90^\circ$ ). la température critique de flambement augmente légèrement avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ).



**Figure V. 16 :** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée **E-glass/Epoxy** simplement appuyée.

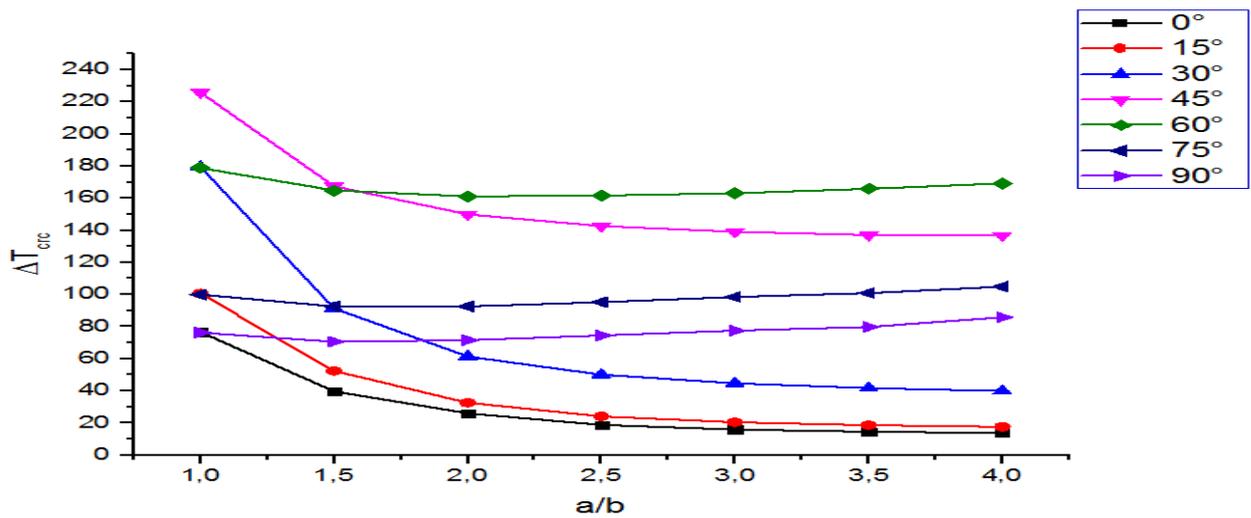
La figure (V. 16) représente l'effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée simplement appuyée pour le matériau **E-glass/Epoxy**, pour ce type de conditions aux limites on remarque que :

- ❖ les températures critiques de flambement diminuent avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ).
- ❖ on note aussi, si la plaque carrée ( $a/b = 1$ ) l'angle  $45^\circ$  donne la plus haute température critique de flambement d'autre part, l'angle  $0^\circ$  donne la plus basse température critique de flambement.

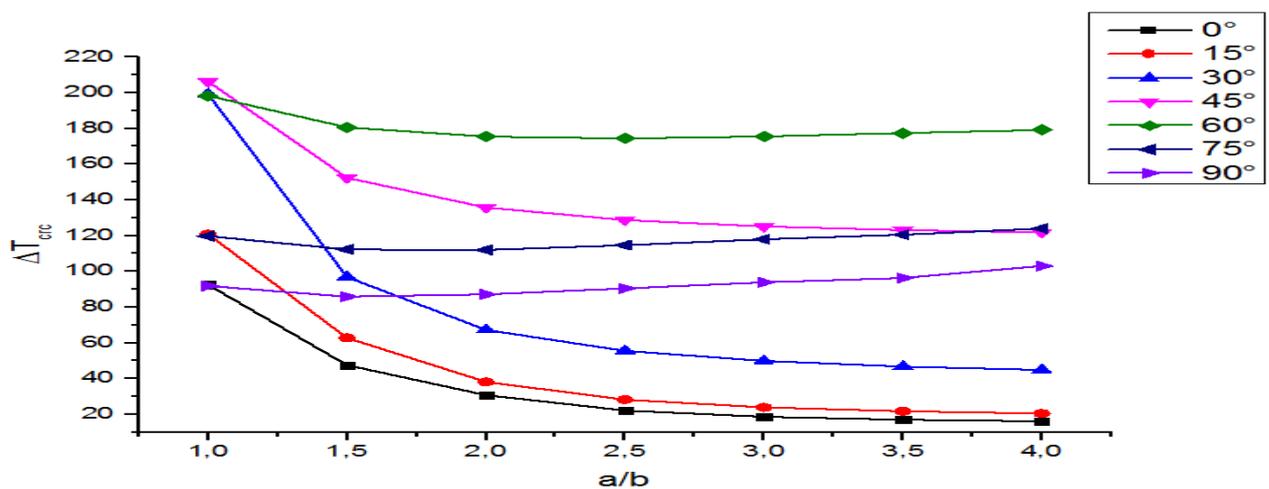
- ❖ Pour les autres rapports d'aspect (forme rectangulaire) l'angle 90° donne la plus haute température critique de flambement alors que la plus basse température critique celles de l'angle 0°.
- ❖ pour les orientations (60°, 75° et 90°). la température critique de flambement augmente légèrement avec l'augmentation du rapport d'aspect (a/b).

Après la modélisation des plaques stratifiées équilibrées encastree avec (les différents rapports d'aspect, tous les angles d'orientations (0°... 90°), et les trois types de matériaux choisis).

Les résultats obtenus de chaque matériau par les différents tests sont présentes dans les courbes suivantes :



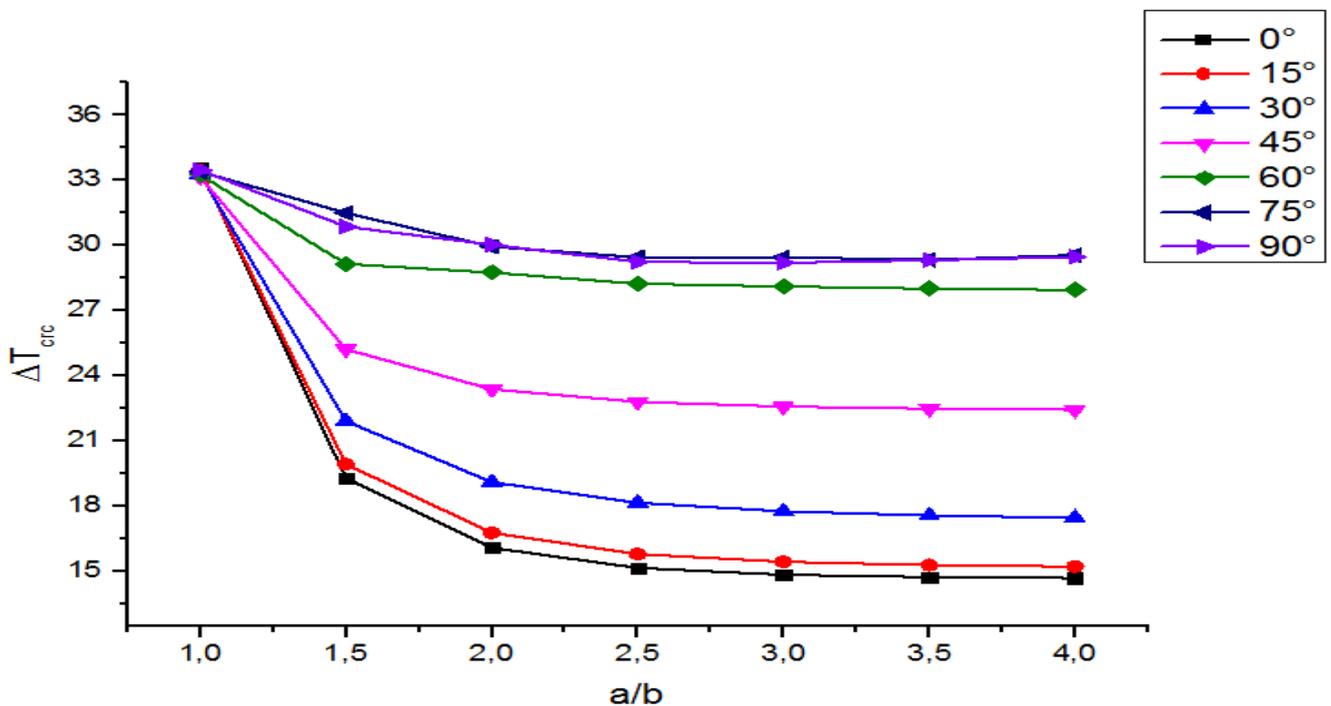
**Figure V. 17 :** Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées **AS4/3501-6** encastree.



**Figure V. 18 :** Effet du rapport d'aspect a/b sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées **T300/5208** encastree.

Les figures (V. 17 et V. 18) représente l'effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur la température critique de flambement des plaques stratifiées équilibrées encastéré pour les deux types de matériaux **AS4/35016** et **T300/5208** respectivement pour ce cas de condition aux limites on observe que :

- ❖ les températures critiques de flambement diminuent avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ).
- ❖ on note aussi, si la plaque carrée ( $a/b = 1$ ) l'angle  $45^\circ$  donne la plus haute température critique de flambement d'autre part, l'angle  $0^\circ$  donne la plus basse température critique de flambement.
- ❖ Pour les autres rapports d'aspect (forme rectangulaire) l'angle  $60^\circ$  donne la plus haute température critique de flambement alors que la plus basse température critique celles de l'angle  $0^\circ$ .
- ❖ pour les orientations ( $60^\circ$ ,  $75^\circ$  et  $90^\circ$ ). la température critique de flambement augmente légèrement avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ).



**Figure V. 19 :** Effet du rapport d'aspect  $a/b$  sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées **E-glass/Epoxy** encastérée.

La figure (V. 19) représente l'effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur la température critique de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée encastérée pour le matériau **E-glass/Epoxy**, pour ce type de conditions aux limites on note que :

- ❖ Les températures critiques de flambement diminuent avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ).
- ❖ Dans le cas de plaque carrée  $a/b = 1$  (forme carrée) l'angle  $0^\circ$  donne la plus haute température critique de flambement.
- ❖ On constate aussi, pour les autres rapports d'aspect (forme rectangulaire) l'angle  $75^\circ$  donne la plus haute température critique de flambement.
- ❖ On note aussi, qu'avec le rapport d'aspect ( $a/b=1$ ) les angles d'orientation n'ont pas d'effet significatif sur les températures critiques de flambement de la plaque stratifiée.

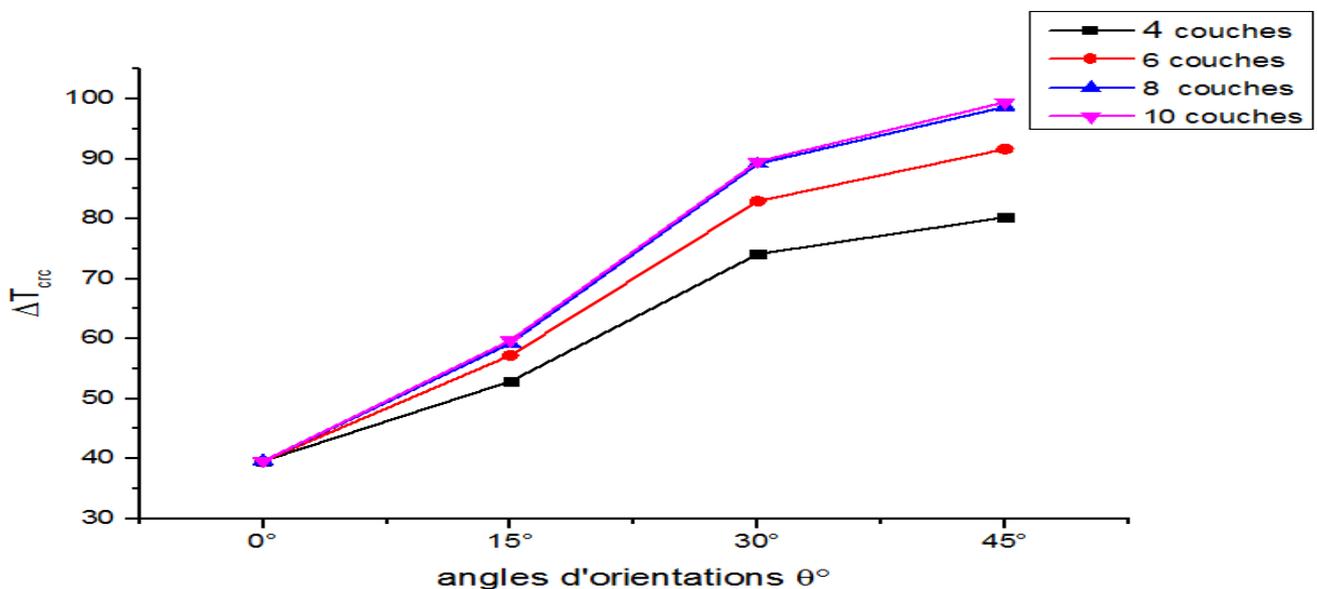
#### V. 4.2) Effet du nombre de couche:

L'effet de nombre des couches sur la température critique de flambement des plaques stratifiées équilibrées symétriques  $[+\theta/-\theta]_s$  ; est étudiée pour plusieurs angles d'orientations des fibres ( $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  et  $90^\circ$ ), différent empilement de 4,6,8 et 10 couches, Pour se faire on considère une plaque mince de forme carrée avec ( $a/h=100, a/b=1$ , maillage  $10*10$ ), deux différents types des conditions aux limites (simplement appuyée et encadrée), et deux types de matériaux à savoir : **Graphite/Epoxy (T300/5208),E-glass/Epoxy(voir le tableau V.10).**

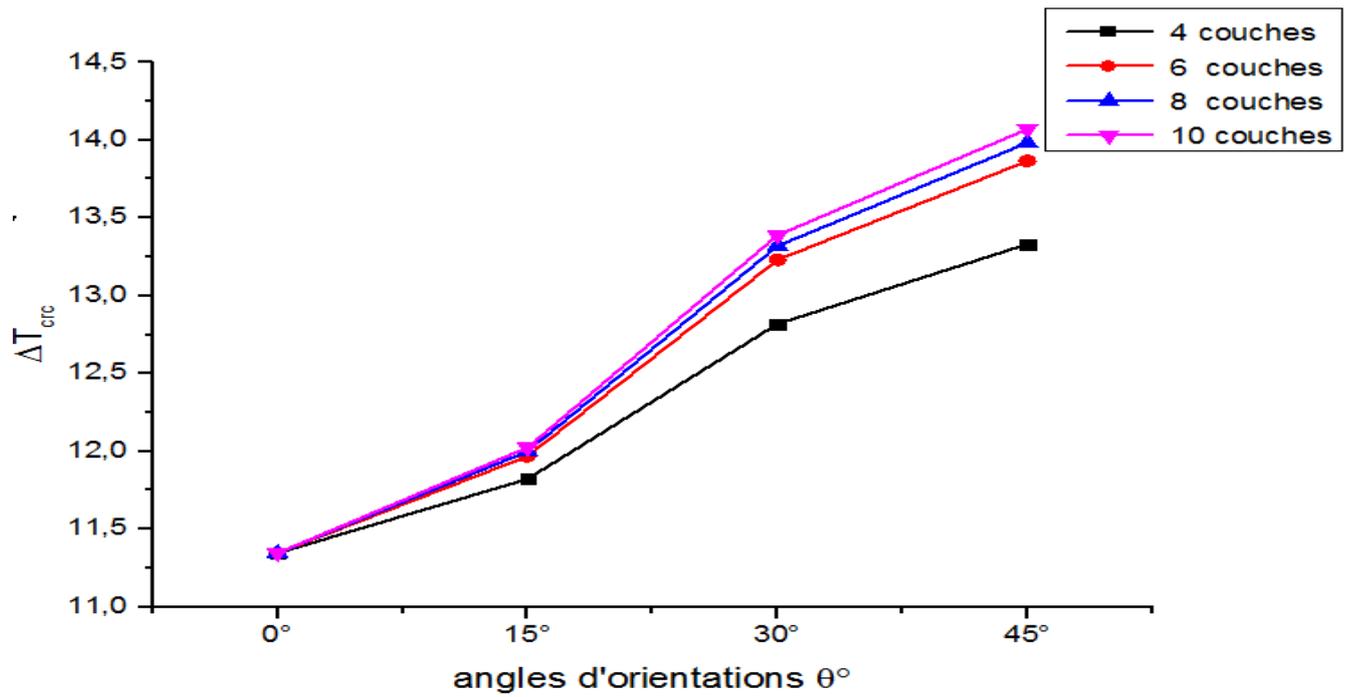
- ❖ à cause de la symétrie dans la géométrie et les conditions aux limites seulement quatre angles d'orientations ont été considérés.

Après la modélisation des plaques stratifiées équilibrées simplement appuyée et encadrée

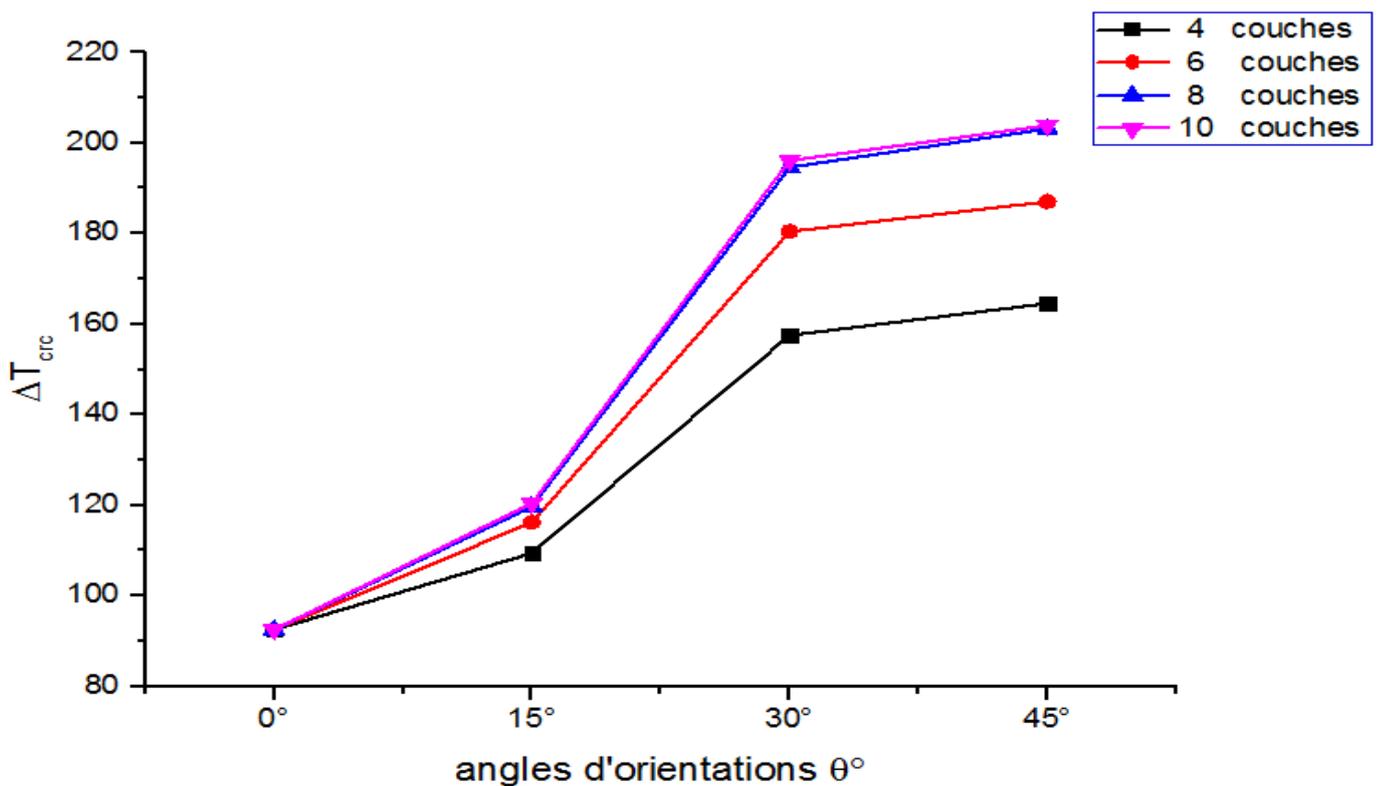
Les résultats obtenus de chaque matériau (**T300/5208** et **E-glass/Epoxy**) par les différents tests sont présentés dans les courbes suivantes :



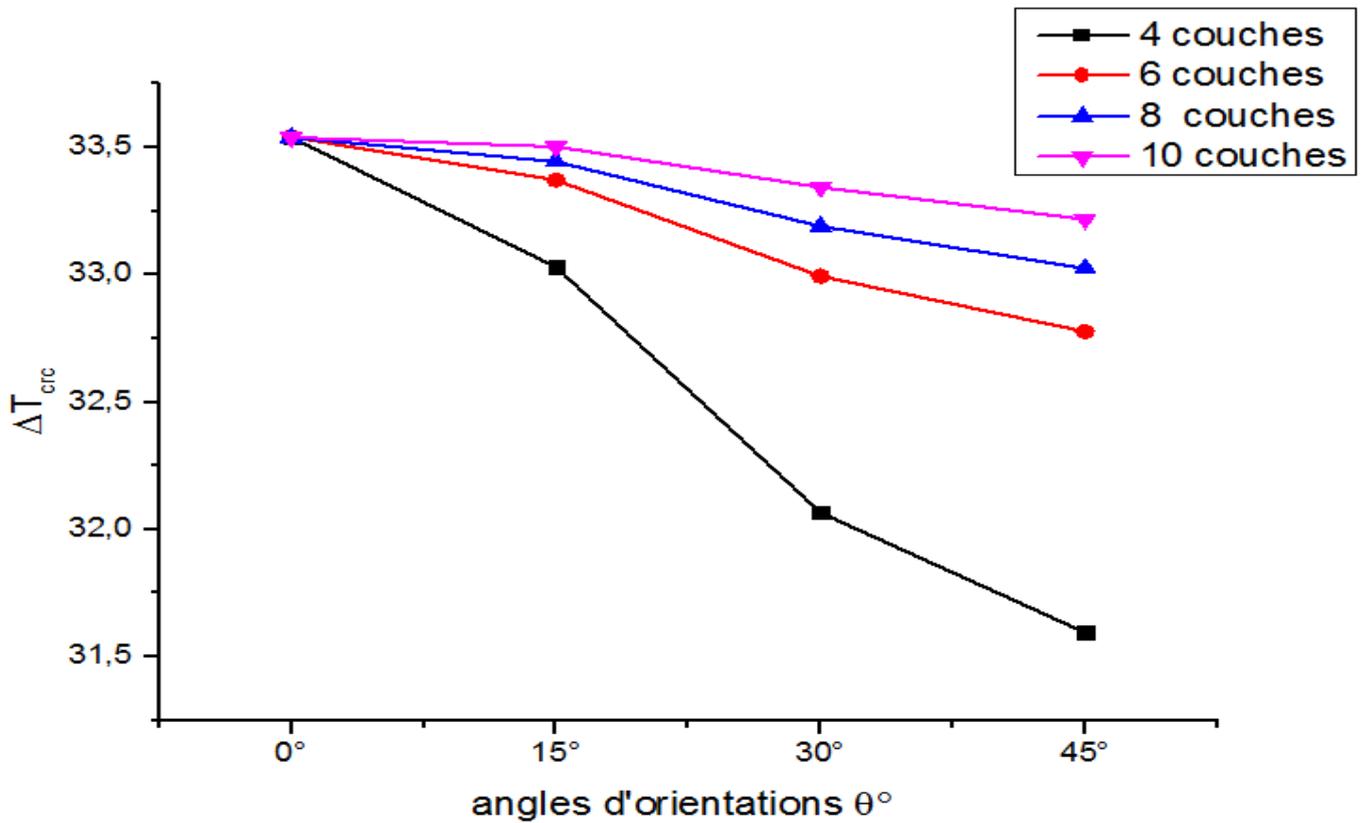
**Figure V. 20 :** L'effet du nombre des couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée **T300/5208** simplement appuyée.



**Figure V. 21 :** L'effet du nombre des couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées **E-glass/Epoxy** simplement appuyée.



**Figure V. 22:** L'effet du nombre des couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrées **T300/5208** encastree.



**Figure V. 23 :** L'effet du nombre des couches sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée équilibrée **E-glass/Epoxy** encadrée.

Les figures (V.20, V.21, V.22 et V.23) présente l'effet du nombre des couches sur les températures critiques de flambement des plaques stratifiées équilibrées simplement appuyée et encadrée pour les matériaux **T300/5208** et **E-glass/Epoxy** respectivement, pour ces types de conditions aux limites on observé que:

- ❖ pour les deux types de matériaux ainsi que pour les deux types de conditions aux limites (simplement appuyée et encadrée) les températures critiques de flambement augmentent avec l'augmentation du nombre des couches.
- ❖ On note aussi que, pour les deux types de matériaux **T300/5208** et **E-glass/Epoxy** (les figures (V.20 et V.21) dans le cas de la plaque simplement appuyée l'angle 45° donne la température critique plus élevées, et l'angle 0° donne la plus basse température critique de flambement pour tout les nombre des couches.
- ❖ D'autre part ; dans le cas de plaque encadrée pour le matériau **T300/5208** (la figure V.22) l'angle 45° donne la plus haute température critique de flambement ; alors que pour le matériau l'**E-glass/Epoxy** (la figure V.23) l'angle 0° donne la plus haute température critique de flambement .

**V. 4.3) L'effet de l'anisotropie:**

Dans la présente section on va étudier, sous différentes combinaisons de conditions aux limites et angles d'orientation, l'effet du rapport des modules de Young ( $E_L/E_T$ ) ainsi que du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ ) sur la température critique de flambement des plaques composites stratifiées.

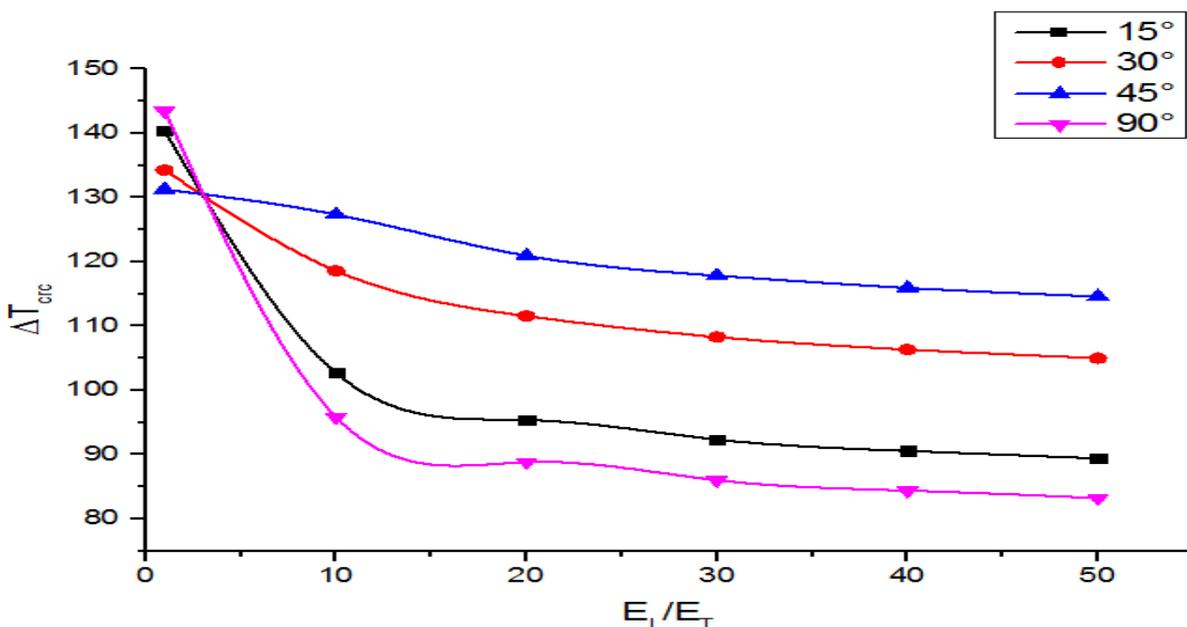
**V. 4.3.1) L'effet du rapport des modules de Young ( $E_L/E_T$ ) :**

Pour la réalisation de cette étude, nous nous sommes intéressés à étudier l'effet de rapport des modules de Young ( $E_L/E_T$ ) sur la température critique de flambement des plaques composite stratifiées ; on considère une plaque carrée mince avec ( $a/b=1$ ,  $a/h=100$ , maillage  $10*10$ ), quatre couches avec stratification symétrique  $[+\theta/-\theta]_s$  et différents angles d'orientations ( $0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$  et  $90^\circ$ ), ainsi que deux types des conditions aux limites (simplement appuyée et encadrée). Les propriétés matérielles des plaques sont [43] :

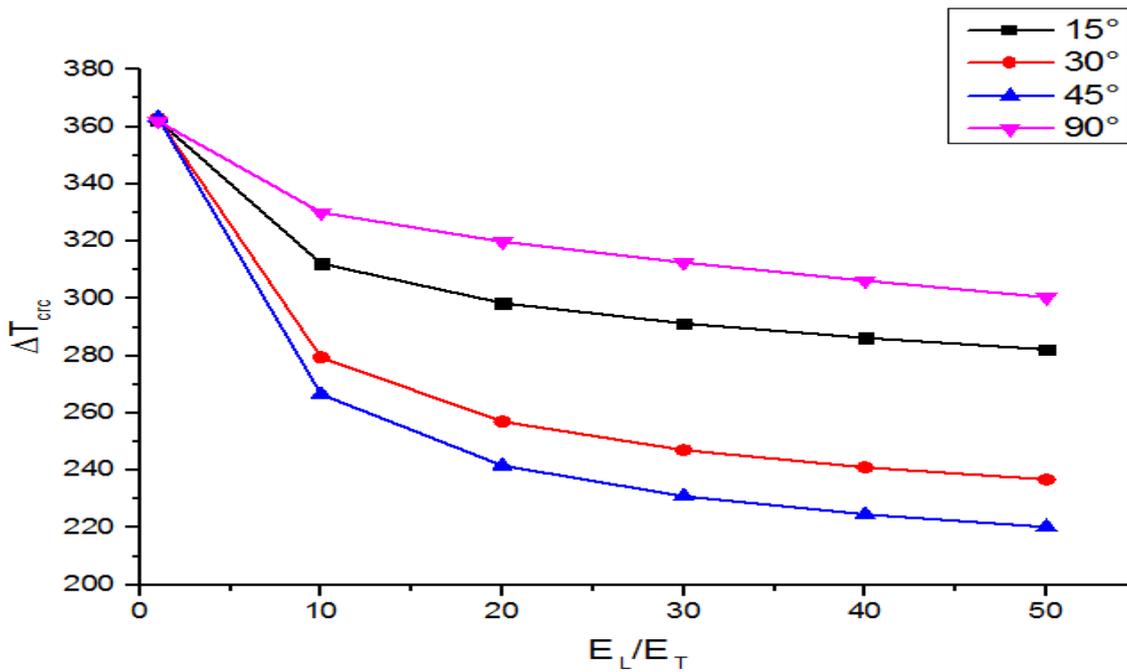
$$G_{LT}/E_T = 0.5 \quad \nu = 0.25 \quad \alpha_T = \alpha_L = 1 * 10^{-6}$$

- ❖ à cause de la symétrie dans la géométrie et les conditions aux limites seulement quatre angles d'orientations sont pris en considération.

Après la modélisation des plaques stratifiées simplement appuyée et encadrée avec les différents rapport de modules de Young ( $E_L/E_T$ ). Les résultats obtenus par notre modélisation sont présentes dans les courbes suivantes :



**Figure V. 24 :** L'effet du rapport  $E_L/E_T$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée.



**Figure V. 25 :** L'effet du rapport  $E_L/E_T$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastree.

Les figures (V. 24 et V. 25) montrer l'effet du rapport ( $E_L/E_T$ ) sur les températures critiques de flambement des plaques stratifiées simplement appuyée et encastree respectivement pour ces types de conditions aux limites on constante que :

- ❖ Pour les deux types des conditions aux limites (simplement appuyée et encastree), et pour tous les angles d'orientations On remarque que les températures critiques de flambement décroissent avec l'augmentation du rapport d'anisotropie ( $E_L/E_T$ ).
- ❖ Dans le cas de l'encastrement, les angles d'orientation n'ont pas un effet significatif sur les températures critiques de flambement avec le rapport ( $E_L/E_T = 1$ ) où ce dernier est proche du cas isotrope.
- ❖ On note aussi que pour la condition aux limites encastree, l'angle  $90^\circ$  donne les températures critiques de flambement les plus élevée, alors que le  $45^\circ$  donnent les plus basses. à la différence du cas de la plaque encastree, l'angle d'orientation  $45^\circ$  avec la plaque simplement appuyée donne les températures critiques les plus hautes.

**V. 4.3.2) L'effet du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ )**

Pour connaitre l'effet du rapport des coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ ) sur la température critique de flambement des plaques composite stratifiées on considère une plaque mince de forme carrée avec ( $a/b=1$ ,  $a/h=100$ , maillage  $10*10$ ), quatre couches avec stratification

Symétrique  $[+\theta/-\theta]_s$  et différents angles d'orientations ainsi que deux types des conditions aux limites (simplement appuyée et encastree), Les propriétés matérielles des plaques sont [31] :

$$E_L/E_T = 40 \qquad G_{LT}/E_T = 0.5 \qquad \nu = 0.25$$

- ❖ En raison de la symétrie sur les conditions de bord et la géométrie seulement, quatre angles d'orientation sont pris en considération.

Après la modélisation des plaques stratifiées simplement appuyée et encastree avec les différents coefficients de dilatation thermique ( $\alpha_T/\alpha_L$ ). Les résultats obtenus par notre modélisation sont présentes dans les courbes suivantes :

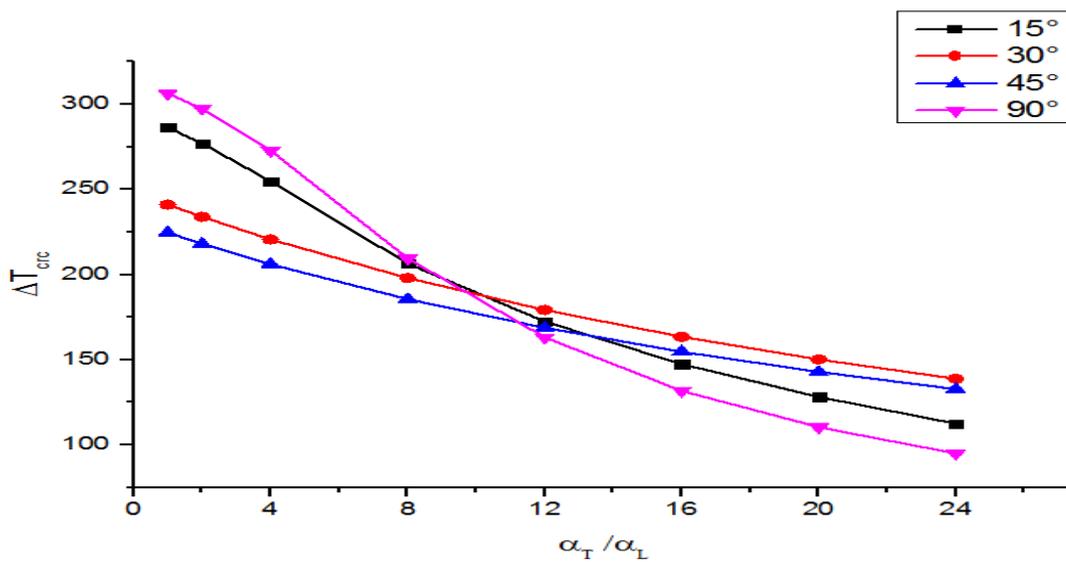


Figure V. 26 : L'effet du rapport  $\alpha_T/\alpha_L$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée encastree

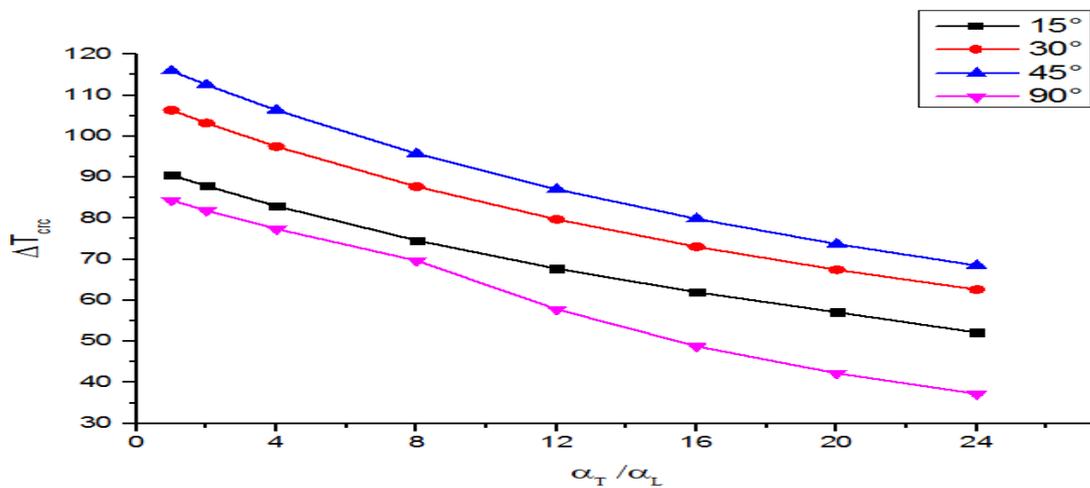


Figure V. 27 : L'effet du rapport  $\alpha_T/\alpha_L$  sur les températures critiques de flambement d'une plaque stratifiée simplement appuyée.

Les figures (V. 26 et V. 27) présente l'effet du rapport ( $\alpha_T/\alpha_L$ ) sur les températures critiques de flambement des plaques stratifiées encastree et simplement appuyée respectivement pour ces types de conditions aux limites on remarque que :

- ❖ pour les deux types de conditions aux limites les températures critiques de flambement diminuent avec l'augmentation du rapport ( $\alpha_T/\alpha_L$ ).
- ❖ Dans le cas de la plaque encastree, et pour le rapport ( $\alpha_T/\alpha_L = 1$ ) ; les angles d'orientation  $90^\circ$  et  $15^\circ$  donnent les températures citriques les plus élevées, mais à mesure qu'on augmente le rapport ( $\alpha_T/\alpha_L$ ) , les températures citriques de flambement avec le  $90^\circ$  et le  $15^\circ$  diminuent significativement et à être les plus basses pour  $\alpha_T/\alpha_L=24$ .
- ❖ D'autre part, Dans le cas de la plaque simplement appuyée, l'angle  $45^\circ$  donne la plus haute température critique de flambement, alors que la plus basse température critique celles de l'angle  $90^\circ$ .

Finalement ; pour tous les paramètres il été conclue que les résultats de notre modélisation sont très proche aux résultats de littérateurs. [44]

#### V. 4.4) L'effet de rapport l'épaisseur (a/h) et la dépendance des propriétés mécaniques a la température sur la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) :

Il est nécessaire, avant d'entamer toute étude numérique, de vérifier et valider la précision des résultats numérique. Pour ce faire, plusieurs cas d'études existant dans la littérature abordant le phénomène du flambement thermique des plaques composite stratifiées ont été pris en considération. Dans la deuxième partie de notre travail, une étude paramétrique est présentée afin de mieux comprendre l'effet de rapport d'épaisseur (a/h) et la dépendance des propriétés mécaniques à la température sur le comportement de flambement thermique des plaques composites stratifiées.

##### V. 4.4.1) Validation :

###### a) Plaque stratifiée croisées simplement appuyé et encastree :

Dans cette étudie ; on considère une plaque rectangulaire avec ( $a/b = 0.5$ ,  $a/h=10$ , maillage  $4*4$ ), et quatre couches de **graphite/époxy** avec stratifications croisées antisymétrique  $[0/90/0/90]$  .ainsi que

Deux types de conditions aux limites (simplement appuyé et encastree). Les propriétés matérielles de la plaque sont prises comme suit : [63]

$$G_{13}=G_{12} \quad G_{23}=0.5 G_{12} \quad \nu_{12}= 0.3 \quad \alpha_1= 0.3*10^{-6} /k \quad \alpha_2= 28.1*10^{-6}/k$$

**Tableau V. 11** : Les modules d'élasticité de stratifiée **graphite/époxy** à différentes températures [63].

Les modules élastiques (Gpa)	Température (k)					
	300	325	350	375	400	425
<b>E<sub>1</sub></b>	<b>130</b>	<b>130</b>	<b>130</b>	<b>130</b>	<b>130</b>	<b>130</b>
<b>E<sub>2</sub></b>	<b>9.5</b>	<b>8.5</b>	<b>8</b>	<b>7.5</b>	<b>7</b>	<b>6.75</b>
<b>G<sub>12</sub></b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>5.5</b>	<b>5</b>	<b>4.75</b>	<b>4.5</b>

Selon le tableau (V.11) on note que :

- ❖ Les propriétés mécaniques de matériau **graphite/époxy** diminue avec l'augmentation de la température.

Après la modélisation des plaques stratifiées croisée antisymétrique [0/90/0/90] simplement appuyée et encastré avec les différentes températures. Nous avons réuni les résultats dans les tableaux (V.12 et V.13), afin de le comparer avec le résultat de **Sairam et al** [63], ils ont utilisé un élément fini iso-paramétrique quadratique Q8 basé sur la théorie de la déformation en cisaillement de première ordre, a fin d'étudié le flambement thermique des plaques composites stratifiées croisés symétriques et antisymétriques.

Les résultats de la charge critique de flambement( $\lambda$ ), ou  $\lambda = N_{crcT=300} / N_{crc}$  sont donnés dans les tableaux suivants (V. 12 ; V. 1 3 ; V. 1 4 et V. 1 5).

**Tableau V. 12** : vérification de la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée croisée antisymétrique [0/90/0/90] simplement appuyée.

	Température (k)					
	300	325	350	375	400	425
$\lambda$ (Présent)	1	0.912	0.886	0.861	0.825	0.812
$\lambda$ (sairam et al)[63].	1	0.983	0.955	0.926	0.907	0.889

**Tableau. 13** : vérification de la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée croise antisymétrique [0/90/0/90] encastéré.

	Température					
	(k)					
	300	325	350	375	400	425
$\lambda$ (Présent)	1	0.914	0.906	0.900	0.873	0.872
$\lambda$ (sairam et al)[63].	1	0.988	0.951	0.911	0.888	0.865

On remarque que les résultats de notre modélisation sont en bon accord avec les résultats de littérature [63]

#### V. 4.4.2) Etude paramétrique :

Afin d'étudier l'effet de rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) et la dépendance des propriétés mécaniques à la température sur la charge critique de flambement ( $\lambda$ ). On considère une plaque carrée avec ( $a/b=1$ ) ; et plusieurs rapports d'épaisseur ( $a/h = 100$  ;  $a/h = 20$  ;  $a/h = 10$ ) ; un maillage  $10*10$  ; et quatre couches de **graphite/époxy** avec stratifications croisées antisymétrique [0/90/0/90] .ainsi que deux types de conditions aux limites (simplement appuyé et encastéré). Ont été pris en considération les modules d'élasticité de plaque **graphite/époxy** comme indiqué dans le tableau (V. 11). Les propriétés matérielles de la plaque sont : [63]

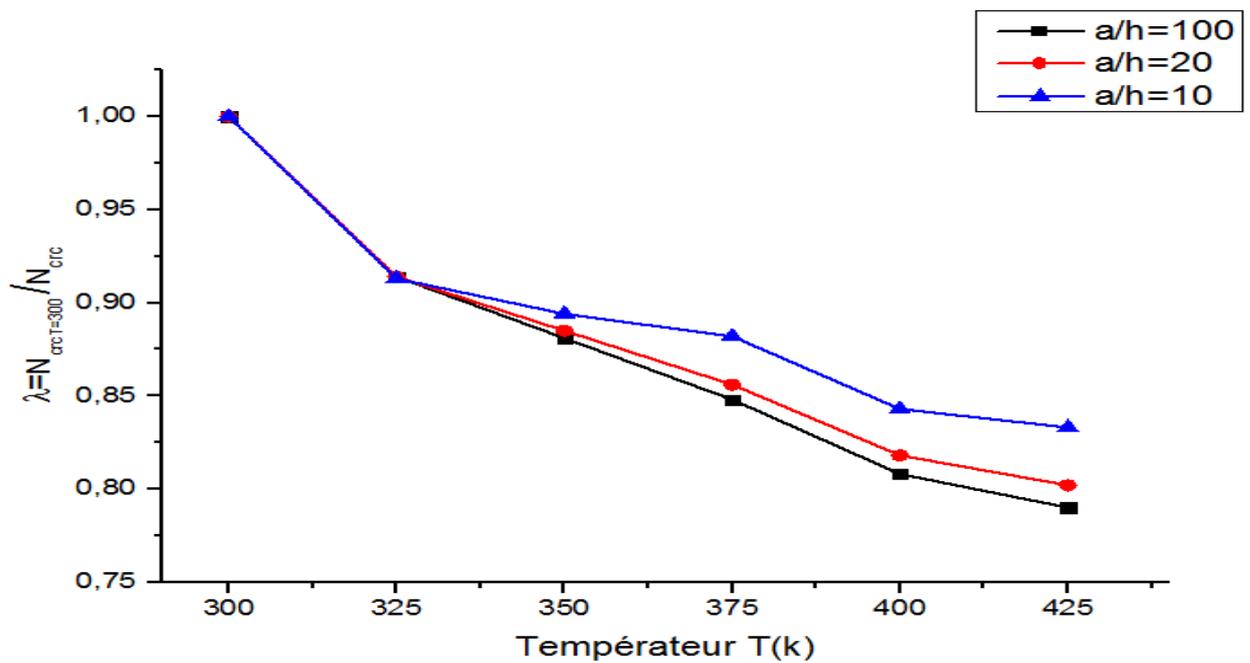
$$G_{13}=G_{12} \quad G_{23}=0.5 G_{12} \quad \nu_{12}= 0.3 \quad \alpha_1= 0.3*10^{-6} /k \quad \alpha_2= 28.1*10^{-6}/k$$

Après la modélisation de la plaque stratifiée croisée antisymétrique [0/90/0/90] simplement appuyée et encastéré, et avec les différents rapports d'épaisseur et les différentes températures.

Les résultats obtenus par notre modélisation sont présentés dans les tableaux et les figures suivantes :

**Tableau. 14** :l'effet de la température et le rapport d'épaisseur sur la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée antisymétrique [0/90/0/90] simplement appuyée.

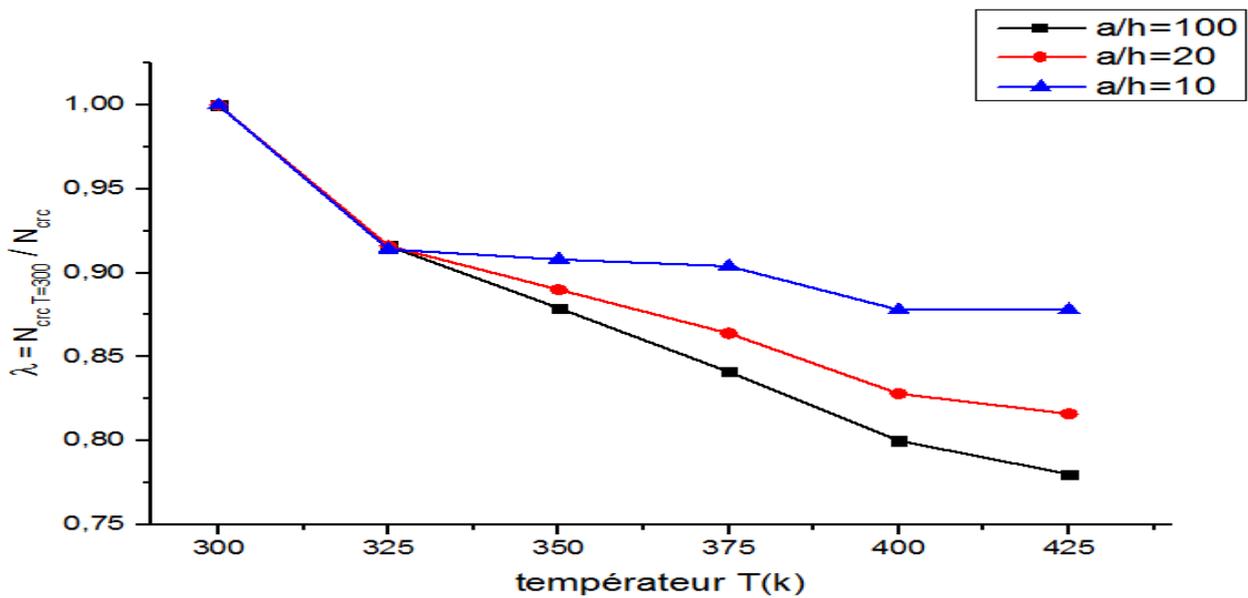
		Température (k)					
		300	325	350	375	400	425
a/h	$\lambda$	1	0.914	0.881	0.848	0.808	0.790
100	$\lambda$	1	0.914	0.885	0.856	0.818	0.802
20	$\lambda$	1	0.913	0.894	0.882	0.843	0.833
10	$\lambda$	1					



**Figure V. 28** :L'effet de la température et le rapport d'épaisseur (a/h) sur la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée [0 /90/0/90] simplement appuyée.

**Tableau. 15 :** l'effet de la température et le rapport d'épaisseur sur la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée antisymétrique [0/90/0/90] encastéré.

		Température (k)					
		300	325	350	375	400	425
a/h	$\lambda$	1	0.916	0.879	0.841	0.800	0.780
100	$\lambda$	1	0.916	0.890	0.864	0.828	0.816
20	$\lambda$	1	0.914	0.908	0.904	0.878	0.878
10	$\lambda$	1	0.914	0.908	0.904	0.878	0.878



**Figure V. 29 :** L'effet de la température et le rapport d'épaisseur (a/h) sur la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) pour une plaque stratifiée [0 /90/0/90] encastre.

D'après les résultats illustrés précédemment ainsi qu'à travers la littérature, on a constaté que la température critique de flambement des plaques stratifiées dépend considérablement des propriétés mécaniques du matériau et de L'effet de rapport d'épaisseur (a/h). Les résultats de notre modélisation montrent que :

- ❖ La charge critique de flambement thermique ( $\lambda$ ) diminue avec l'augmentation de la température et la diminution des propriétés mécaniques pour les deux types de conditions aux limites.
- ❖ une augmentation de la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) avec la diminution de rapport d'épaisseur (a/h), c.à.d. avec l'augmentation de l'épaisseur des plaques stratifiées, pour les deux types de conditions aux limites (simplement appuyée et encastre).

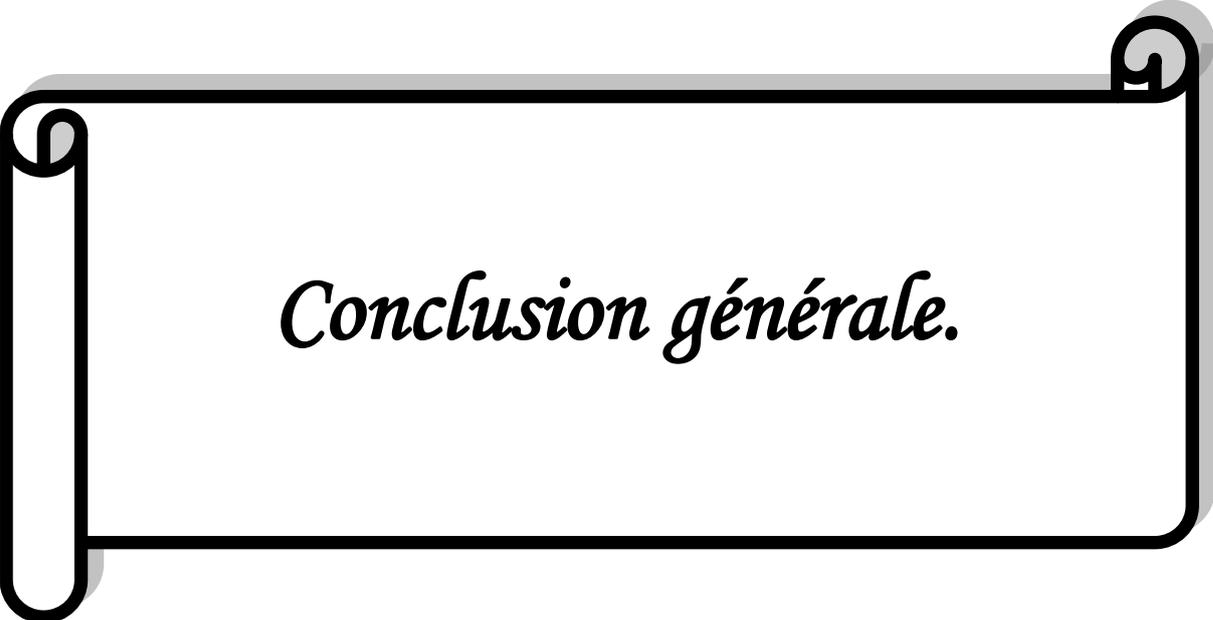
### V. 5) Conclusion :

Le présent chapitre avait pour but d'étudier l'effet des plusieurs paramètres telle que l'effet de rapport d'aspect, d'anisotropie ; nombre des couches, l'orientation des fibres, dépendance des propriétés matérielles à la température ainsi que l'effet de rapport d'épaisseur ( $a/h$ ) sur le flambement thermique des plaques composites stratifiées. Pour ce faire une modélisation numérique avec le logiciel ABAQUS a été présentée, trois éléments d'abaque (**S4R**, **S8R** et **STR165**) sont utilisés. La première partie de ce chapitre a été consacré à la validation de la précision de notre modélisation par le biais de plusieurs tests disponibles dans la littérature. A travers les résultats trouvés, on a vu que notre modélisation présente une bonne précision ainsi qu'une bonne rapidité de convergence.

La deuxième partie de ce chapitre portait sur l'étude paramétrique de comportement de flambement thermique des plaques composites stratifiées minces et épaisses. L'étude consiste des différents paramètres et des différents matériaux telle que : (T300/5208 Graphite/Epoxy ; AS4/3501-6 Graphite/Epoxy, E-glass/Epoxy), et des différentes conditions aux limites.

Les résultats de notre modélisation montrent que :

- ❖ Pour les plaques stratifiée croise et avec les deux types de stratification  $[0_2/90_2]_s$  et  $[90_2/0_2]_s$  la température critique de flambement diminue avec l'augmentations de rapport d'aspect ( $a/b$ )
- ❖ Aussi, dans le cas des stratifiées équilibrés les températures critiques de flambement diminuent avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ).
- ❖ Les températures critiques de flambement augmentent avec l'augmentation du nombre de couches.
- ❖ D'autre part, les températures critiques de flambement diminuent avec l'augmentation des rapports d'anisotropes ( $E_L/E_T$ ) et ( $\alpha_T/\alpha_L$ ).
- ❖ On montre aussi que, La charge critique de flambement ( $\lambda$ ) diminue avec l'augmentation de température.
- ❖ Et que la charge critique de flambement ( $\lambda$ ) augmente avec la diminution de rapport d'épaisseur ( $a/h$ ).c.à.d. avec l'augmentation de l'épaisseur.



*Conclusion générale.*

## Conclusion générale.

Notre travail avait pour but d'étudier numériquement l'effet de la température sur la stabilité des plaques composites stratifiées minces et épaisses en utilisant le logiciel « **ABAQUS** » basé sur la méthode des éléments finis. Pour mettre en place cette étude nous avons présenté dans un premier temps une généralité sur les matériaux composite tels que les caractéristiques de composite, les différents types. Les différentes constituantes (matrice et renfort), et l'architecture des matériaux composites (les sandwichs, les monocouches et les Stratifiées) pour donner une vision large sur les matériaux composite. Ensuite dans le deuxième chapitre nous avons éclairci le comportement élastique des plaques composite stratifiées, et de présentés aussi les caractéristiques mécanique d'un pli composite tels que le module de Young longitudinale et transversal ; le coefficient de Poisson et le module de cisaillement. D'autre part, et pour mieux comprendre le comportement mécanique des plaques composites stratifiées nous avons présentés deux théories à savoir la théorie classique de stratifiées basé sur les hypothèses de Kirchhoff (CLT) pour les plaques minces et la théorie de déformations en cisaillement en premier ordre basé sur les hypothèses de Reissner –Mindlin (FSDT) pour les plaques épaisses, cette dernière théorie tient en compte l'effet de cisaillement transverse.

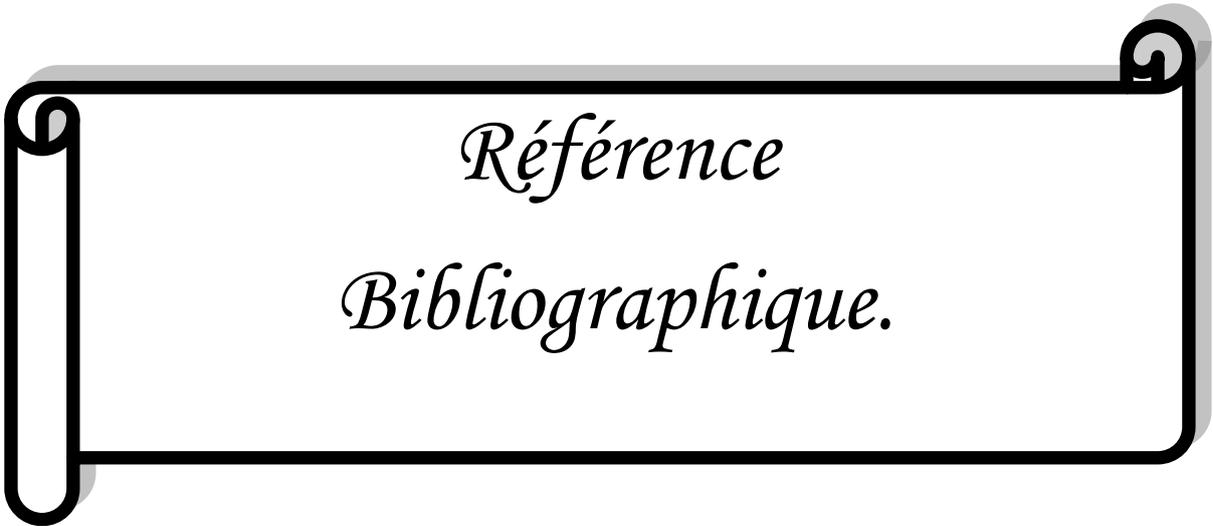
Pour mieux comprendre l'effet de la température sur la stabilité des plaques composite stratifiées qui provoque le Phénomène de flambement thermique, nous avons commencé par une synthèse bibliographique sur les origines du flambement thermique ainsi que sur les modèles éléments finis utilisés par les différents auteurs dans l'analyse du flambement thermique des plaques composites stratifiées. Nous avons remarqué que la plupart des travaux étaient basés sur la théorie de cisaillement de premier ordre. Cela est sûrement dû au fait que cette théorie ne néglige pas les effets des déformations de cisaillement transverse contrairement à la théorie classique des stratifiées et qu'elle est moins coûteuse que les théories d'ordre supérieur et celles des approches par couches. Ensuite nous avons basé notre étude sur les deux premières théories, la théorie classique de stratifiées et la théorie de déformations de cisaillement de premier ordre. Comme dans tout cas d'utilisation de la méthode des éléments finis, il est nécessaire de vérifier et de valider la précision et les performances de l'élément fini employé. En effet les trois éléments d'ABAQUS (**S4R**, **S8R**, et **STR165**) ont été soumis à une série de tests sur le flambement thermique des plaques isotropes et des plaques composites stratifiées sous différentes conditions aux limites (simplement appuyée et encadrée). Puis nous avons comparés les résultats obtenus par notre modélisation avec les résultats de la littérature. La comparaison montre que les résultats de notre modélisation sont en bon accord avec les résultats de la littérature. D'autre part, une étude paramétrique sur l'effet de certains paramètres influençant la température critique de flambement des plaques stratifiées est présentée. Dans cette étude trois types de matériaux qui sont très

Utilisés ont été considérés, à savoir : le T300/5208 Graphite/Epoxy, le AS4/3501-6 Graphite/Epoxy et le E-glass/Epoxy. Nous avons choisi ces trois types de matériaux a cause de :

- ❖ le matériau **T300/5208** contient des propriétés mécaniques élevées.
- ❖ le matériau **AS4/3501-6** présente des propriétés mécaniques proches de celles du **T300/5208**, mais contient un coefficient de dilatation thermique longitudinal négatif
- ❖ le matériau **E-glass/Epoxy** contient des propriétés mécaniques faibles par rapport les deux autres matériaux.

D'autre part, on été pris on considérations dans cette étude les paramètres suivante : l'effet de rapport d'aspect pour les plaques croise avec deux types de stratifications  $[0_2/90_2]_s$  et  $[90_2/0_2]_s$  et les plaques stratifiées équilibrées avec différentes conditions aux limites simplement appuyée et encastree , l'effet de nombre de couches, l'effet de l'anisotropie ( $E_L/E_T$ ) et ( $\alpha_T/\alpha_L$ ) , l'effet de l'épaisseur et la dépendant des propriétés mécaniques sur la température critique de flambement thermique des plaques composite stratifiées. Les résultats numériques de notre modélisation montrent que :

- ❖ Pour les deux types de stratification  $[0_2/90_2]_s$  ;  $[90_2/0_2]_s$  la température critique de flambement diminue avec l'augmentation de rapport d'aspect ( $a/b$ ) pour les trois types de matériaux .Nous avons noté que Le matériau **AS4/3501-6** donne des températures critiques de flambement plus hautes par rapport le matériau **T300/5208** malgré le module de Young longitudinal ( $E_1$ ) élevé de ce dernier. Cela est du au coefficient longitudinal négatif de dilatation thermique de AS4 / 3501-6. D'autre part, Le matériau **E-glass/Epoxy** donne des températures critiques de flambement plus basse à cause de sa faible propriété mécanique.
- ❖ les températures critiques de flambement aussi dans le cas des plaques équilibrées diminué avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ).
- ❖ les températures critiques de flambement augmentent avec l'augmentation du nombre des couches.
- ❖ les températures critiques de flambement diminue avec l'augmentation des rapports d'anisotropes: ( $E_L/E_T$ ) et ( $\alpha_T/\alpha_L$ ).
- ❖ l'influence significative de la dépendance des propriétés mécaniques a la température sur la température critique de flambement thermique.
- ❖ Aussi l'augmentation de la température citrique de flambement thermique avec la diminution du rapport d'épaisseur ( $a/h$ ).



*Référence  
Bibliographique.*

## Référence bibliographique

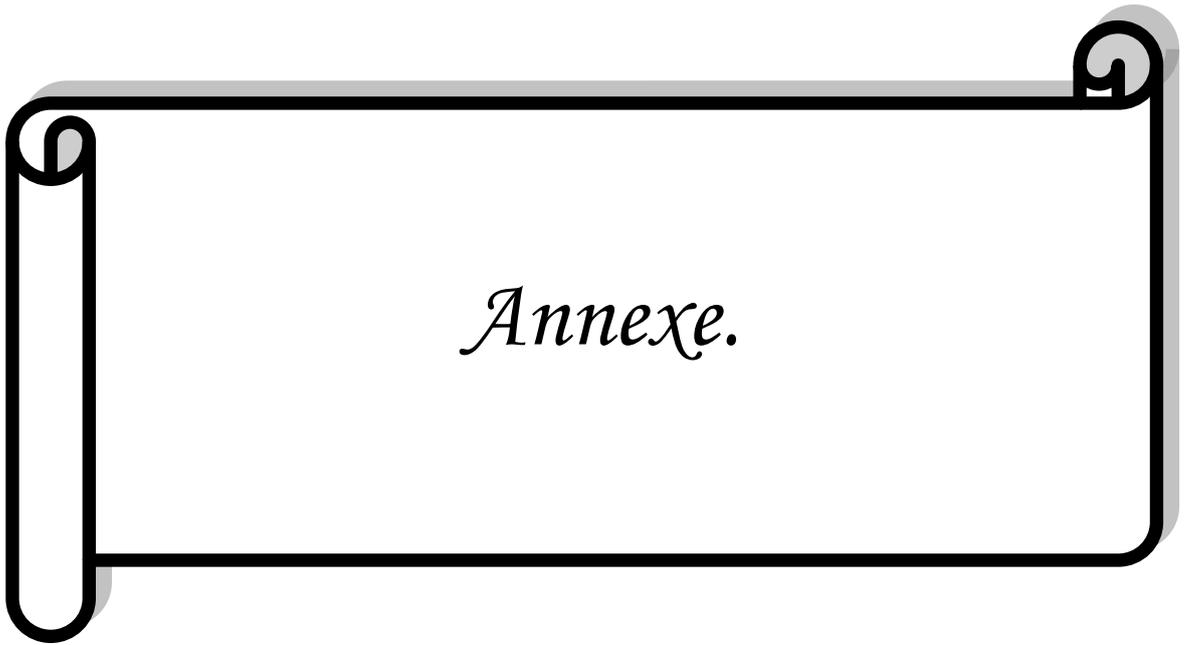
- [1] Berthelot, JM. (1999), Matériaux composites « comportement mécanique et analyse des structures » (troisième édition). Paris: Technique et Documentation.
- [2] Horel,F. (2013), mémoire du diplôme de maîtrise «Modélisation analytique de l’amortissement des poutres composites sandwich contenant des couches viscoélastiques » , université de Montréal.
- [3] Kaouche , N. (2016), Mémoire de magister « Prise en compte du vieillissement et de l’endommagement dans le dimensionnement de structures en matériaux composites » .Université d’Oran Mohamed Boudiaf
- [4] Gornet, L. (Apr2010), « Généralités sur les matériaux composites ».
- [5 ] El Hadji, B.(2008), thèse de doctorat « Nouveaux matériaux composites thermo formables à base de fibres de cellulose», Institut national polytechnique de Grenoble.
- [6] Laurin , F. (2013), « Introduction générale sur les matériaux composites ». Onera.
- [7] Teguaia , M.S.(2015), Mémoire de magister « Dynamique des structures composites sandwiches » ,université mohamed Khider –Biskra.
- [ 8] kaskas ,S. (2010), Mémoire de magister « Étude de l’effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique de poutre composites », Université Constantine.
- [9 ] BENSALIM ,S.(2006), thèse de doctorat « Contribution à la caractérisation et à la modélisation électromagnétique et thermique des matériaux composites anisotropes »,université de Nantes.
- [10] Khedidja, H. (2009) , mémoire de magister « Etude du comportement mécanique en flexion 3 points d’un matériau composite par les éléments finis », Université badji mokhtar –Annaba.
- [11] Peter, S. , Ingrid, D.,et Patrícia, D. ( 2017 ), «Analysis of Sandwich Structures by the FEM» American journal of mechanical Engineering.6 , 243-246 .
- [12] Gay, D.(1997) « matériaux composites », Hermes,4 éme éditions.
- [13] Bruno, C .Christophe, B . Didier, G. (2013), «Structure en matériaux composites stratifiés». Institut Clément Ader.
- [14] Ghorab, S. (2005), Mémoire de magister « Comportement viscoélastiques des matériaux orthotropes», Université Mentouri Constantine.
- [15] Dhiba,H. (2017), Mémoire de master« étude de l’effet des nanoparticules sur l’endommagement de l’interface d’un bio-nano composite », Université Tahar Moulay –Saida.

- [16] Boubeker , R. (2016), Thèse de Doctorat « Etude Expérimentale et Numérique du comportement des Plaques Trouées en Matériaux Composites », Université Mohamed Khider –Biskra.
- [17] Mettouchi, L. Mémoire de master «Influence de la charge particule de cuivre et du renfort couches de fibres de verre sur le comportement mécanique d'un composite», Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [18] Masri, T.(2006), Mémoire de magister «contribution a la modélisation de phénomènes de rupture des matériaux composite », Université Mohamed Khider –Biskra.
- [19] Berreur, L, Maillard, B.d, et Nosperger, S. (2002) « L'industrie française des matériaux composites », Ministère de l'économie des finances et de l'industrie .
- [20] Cheridi,H .Mémoire de magister«analyse dynamique des plaques minces et épaisses :application aux matériaux homogènes et non homogènes» , Université mentouri-constantine.
- [21] Delahaigue,J. (2015), mémoire du diplôme de maitrise «Influence de la température de coupe sur les propriétés mécaniques en traction uni-axiale d'un composite carbone/époxy et étude de l'usinabilité d'un composite lin/époxy » , université du Quebec .
- [22] Tati .A, et Hessini ,M. (2014), « Analyse du comportement de flambage des plaques minces stratifiées en matériaux composites par la méthode des éléments finis». Courier du Savoir – N°09, Mars 2009, pp.09-15, 9. Revues.univ-biskra.dz.
- [23] Chorfi ,S . (2010), Mémoire de Magister «Analyse des plaques orthotropes minces sous l'effet des conditions Extérieures », Université Frères Mentouri Constantine.
- [24] Khechai,A. (2013), mémoire de master « étude numérique de l'effet de singularités géométrique sur la distribution des contraintes dans les plaques stratifiées », Université Mohamed Khider –Biskra..
- [25] Vannucci , P .(2005) «Matériaux Composites structuraux ». Université de Versailles et Saint Quentin-en-Yvelines, A .U.
- [26] Albert William, F. (2010), Thèse de doctorat « Modélisation par éléments finis de plaques composites contribution a l'étude de l'amortissement endommagement et prise en compte d'incertitudes», Université Fédérale d'Uberlândia.
- [27] Djemai, H. (2017), thèse Doctorat « Contribution à l'étude de l'endommagement dans les matériaux composites sandwiches », Université Mohamed Kheider-Biskra.
- [28] Reddy, JN. (2004) , « Mechanics of laminated composite plates and shells; theory and analysis». (Second edition). CRC Press.
- [29] Kaw, A. K. (2005), « Mechanics of Composite Materials, Second Edition », CRC Press.

- [30] Makhlof, O., et Mansour ; N. « cour de Résistance des Matériaux RDM-II »
- [31] Chen, L.-W., et Chen, L.-Y.(1987), « Thermal buckling of Laminated composite plates». J. Therm. Stresses. 10, 345-35
- [32] Benahmes, A. ( 2018) , Thèse de doctorat «Contribution à l'étude du comportement mécanique des plaques composites en utilisant des théories d'ordre élevé avec un nombre réduit de variable », université Djilali liabes sidi bel Abbes.
- [33] boussalem, S , Khermane ,A. (2018), mémoire de master « Simulation du comportement mécanique des composites stratifiés en présence des singularités géométriques», université saad dahlab -blida.
- [34] Daikh , A.(2018),thèse de Doctorat « vibration libre et flambement des structures sandwiches en FGM », université Djilali liabes -sidi bel Abbes.
- [35] Singha, M. K., Ramachandra, L. S., et Bandyopadhyay, J. N.(2001), Thermal postbuckling analysis of laminated composite plates.Composite. Structures. 54, 453-458.
- [36] Bouleftour ,A . (2014), mémoire de master « Evaluation d'éléments finis volumiques dans Abaqus sur des cas tests non linéaires géométriques », Université Mohamed Khider –Biskra.
- [37] Haouchine ,M .( 2016), mémoire de master « Simulation de l'écrasement de tubes minces - Comparaison expérimental/numérique »,Université mouloud Mammeri de tizi- ousou
- [38] Whitney, J. M., et Ashton, J. E.(1971), « Effect of environment on the elastic response of layered composite plates ». AIAA Journal 9, 1708-1713.
- [39] Ashton, J. E., et Waddoups, M. E.(1969), «Analysis of Anisotropic Plates ». J. Compos. Mater. 3, 148-165.
- [40] Flaggs, D. L., et Vinson, J. R. (1978), « Hydrothermal effects on the buckling of laminated composite plates ». Fibre Science and Technology 11, 353-365.
- [41] Tauchert, T. R.(1987), « Thermal buckling of thick antisymmetric angle-ply laminates ». J. Therm. Stresse. 10, 113-124.
- [42] Zhang, Y. X., et Yang, C. H.(2009), «Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates »Composite. Structures.. 88, 147-157.
- [43] Chen, L.-W., et Chen, L.-Y.(1989), « Thermal buckling analysis of composite laminated plates by the finite-element method ». J. Therm. Stresses. 12, 41-56.
- [44] Ounis, H.(2015) , thèse de Doctorat «Etude numérique par éléments finis de l'effet de la température sur la vibration et la stabilité des plaques stratifiées », Université Mohamed Kheider-Biskra

- [45] Chandrashekhara, K.(1992), « Thermal buckling of laminated plates using a shear flexible finite element ». *FiniteElements in Analysis and Design* 12, 51-61
- [46] El mossouess,B.(2018) , Thèse de doctorat« Étude de la stabilité des plaques en matériaux fonctionnellement gradués En utilisant des théories de déformation de cisaillement d'ordre élevé», université d'Oran.
- [47] Lee, Y.-S., Lee, Y.-W., Yang, M.-S., et al.(1999), « Optimal design of thick laminated composite plates for maximum thermal buckling load ». *J. Therm. Stresse.* 22, 259-273
- [48] Prabhu, M. R., et Dhanaraj, R.(1994), « Thermal buckling of laminated composite plates ». *Computers .Structures* 53, 1193-1204.
- [49] Babu, C. S., et Kant, T.(1999), «Two shear deformable finite element models for buckling analysis of skew fibre-reinforced composite and sandwich panels ». *Composite. Structures.* 46, 115-124.
- [50] Kabir, H. R. H., Askar, H., et Chaudhuri, R. A.(2003), « Thermal buckling response of shear flexible laminated anisotropic plates using a three-node isoparametric element ». *Composite. Structures.* 59, 173-187.
- [51] Chang, J.-S.(1990), « FEM analysis of buckling and thermal buckling of antisymmetric angle-ply laminates according to transverse shear and normal deformable high order displacement theory ». *Computers. Structure.* 37, 925-946.
- [52] Babu, C. S., et Kant, T.(2000), « Refined higher order finite element models for thermal buckling of laminated composite and sandwich plates ». *J. Therm. Stresses.* 23, 111-130.
- [53] Lee, J.(1997), «Thermally induced buckling of laminated composites by a layerwise theory ». *Computers .Structures* 65, 917-922.
- [54] Shariyat, M.(2007), «Thermal buckling analysis of rectangular composite plates with temperature-dependent properties based on a layerwise theory ». *Thin Wall. Struct.* 45, 439-452.
- [55] Shiau, L.-C., Kuo, S.-Y., et Chen, C.-Y.(2010), « Thermal buckling behavior of composite laminated plates ». *Composite. Structures.* 92, 508-514.
- [56] Zhao, X., Lee, Y. Y., et Liew, K. M.(2009), « Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates ». *Composite. Structures* 90, 161-171.
- [57] Matsunaga, H.(2005), « Thermal buckling of cross-ply laminated composite and sandwich plates according to a global higher-order deformation theory ». *Composite. Structures .* 68, 439-454.

- [58] Noor, A., et Burton, W.(1992), « Three-dimensional solutions for thermal buckling of multilayered anisotropic plates ». J. Eng. Mech. 118, 683-701.
- [59] Thangaratnam, K. R., Palaninathan, et Ramachandran, J.(1989), « Thermal buckling of composite laminated plates ». Computers. Structure. 32, 1117-1124.
- [60] Singha, M. K., Ramachandra, L. S., et Bandyopadhyay, J. N.(2001), « Thermal postbuckling analysis of laminated composite plates». Composite. Structures . 54, 453-458.
- [61] Yucheng Shi, R. Y. Y. L. C. M.(1999), « Thermal postbuckling of composite plates using the finite element modal coordinate method ». J. Therm. Stresses. 22, 595-614.
- [62] Al maghribi ,A .( 2008), Thèse de doctorat« comportement des matériaux composites a fibres courtes : applications a l'impact basse vitesse », université de Toulouse.
- [63] Sairam, K.S et sinha , P.K . (1992), « Hygrothermal effects on the buckling of laminated composite plates ». Composite. Structure. 21, 233-247.
- [64] Bekkouche, N .Kheddaoui, M. (2017), mémoire de master « étude de l'effet de cisaillement transverse sur le comportement mécanique des matériaux composite». UniversitéTahar Moulay – Saida.
- [65] Singer, J., Arbocz, J., et Weller, T. (2002) Buckling Experiments, Shells, Built-up Structures, Composites and Additional Topics, Wiley.



*Annexe.*

## Annexe

### **A.1 : Modélisation sur l'ABAQUS CAE :**

ABAQUS est avant tout un logiciel de simulation par éléments finis de problèmes très variés en mécanique et en génie civil. Il est connu et répandu, en particulier pour ses traitements performants de problèmes non-linéaires.

Le cœur du logiciel ABAQUS est donc ce qu'on pourrait appeler son "moteur de calcul". À partir d'un fichier de données qui décrit l'ensemble du problème mécanique, le logiciel analyse les données, effectue les simulations demandées et fournit les résultats dans un fichier. Deux tâches restent à accomplir : générer le fichier de données (cela s'appelle aussi effectuer le prétraitement), et exploiter les résultats contenus dans le fichier (ou post traitement). La structure du fichier de données peut se révéler rapidement complexe : elle doit contenir toutes les définitions géométriques, les descriptions des maillages, des matériaux, des chargements, etc..., suivant une syntaxe précise.

#### **A.1.1 : Les principaux Modules d'ABAQUS :**

##### **Les Modules :**

ABAQUS CAE est divisé en unités fonctionnelles appelées modules. Chaque module contient les outils qui sont propres à une partie de la tâche de modélisation

##### **a) Le module « PART »**

Le module Part permet de créer tous les objets géométriques nécessaires à notre problème, soit en les dessinant dans ABAQUS CAE, soit en les important d'un logiciel de dessin tiers.

##### **b) Le module « PROPERTY »**

Le module Property permet, comme son nom l'indique, de définir toutes les propriétés d'un objet géométrique ou d'une partie de ces objets.

##### **c) Le module « ASSEMBLY »**

Ce module permet d'assembler les différents objets géométriques créés dans un même repère de coordonnées global. Un modèle ABAQUS contient un seul assemblage.

##### **d) Le module « STEP »**

Ce module permet de définir toutes les étapes et les requêtes pour le post traitement, c'est à dire le moment (temps) à partir duquel une force est appliquée et jusqu'à quand, il est aussi possible de créer des forces ou des conditions limites qui s'activent a des moments donnés.

**e) Le module « INTERACTION »**

Grâce ce module, il est possible de spécifier toutes les interactions entre les différentes parties et régions du modèle, qu'elles soient mécaniques, thermiques ou autres. Il faut savoir qu'ABAQUS ne prend en compte que les interactions explicitement définies, la proximité géométrique n'étant pas suffisante.

**f) Le module « LOAD »**

Le module Load permet de spécifier tous les chargements, conditions limites et champs. Il faut savoir que les chargements et le conditions limites sont dépendants des steps, par exemple une force est appliquée au step 1 mais inactive au step 2.

**j) Le module « MESH »**

Ce module contient tous les outils nécessaires pour générer un maillage élément fini sur un assemblage.

**h) Le module « JOB »**

Une fois que toutes les tâches de définition du modèle ont été réalisées, il faut utiliser le module Job pour analyser ce modèle. ABAQUS va alors réaliser tous les calculs nécessaires et en tirer des résultats.

**i) Le module « VISUALIZATION »**

Ce module permet de visualiser le modèle et les résultats, les courbes de charges, les déformations...

**g) Le module « SKETCH »**

Ce module permet de créer des formes bidimensionnelles qui ne sont pas associés à un objet. Il peut être utilisé pour des extrusions par exemple.

**A.1.2 : Méthodologie :**

Voici un petit rappel des actions à effectuer pour créer un modèle ABAQUS :

1. Dessiner notre modèle.
  - a. Dessiner le profil 2D de la forme voulue.
  - b. Le développer en 3D.
  - c. Rajouter les détails manquants.
2. Affecter les propriétés à l'objet.

- a. Créer le matériau.
  - b. Créer les sections sur lesquelles appliquer les matériaux.
  - c. Affecter les matériaux aux sections correspondantes.
3. Assembler le modèle.
- a. Créer les instances.
  - b. Les positionner dans le repère général.
4. Définir les pas d'analyse.
5. Créer les interactions entre les instances.
- a. Créer les surfaces.
  - b. Définir les types de contacts.
  - c. Associer des surfaces avec des types de contact.
6. Appliquer les conditions limites et les chargements.
- a. Définir les pas d'application.
  - b. Définir les types de condition limite ou chargement.
7. Mailler le modèle.
- a. Partitionner le modèle.
  - b. Choisir les techniques de maillage.
  - c. Choisir les types de maille.
  - d. Discrétiser le modèle.
  - e. Mailler le modèle.
8. Créer et soumettre un travail.
9. Visualiser les résultats.