



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
Republique Algerienne Democratique Et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة العربي التبسي - تبسة

Université Larbi Tébessi – Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de génie civil

## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme de Master Académique**

**En : Génie Civil**

**Spécialité : Structure**

**Par : ZOUAOUI OUMAIMA**

**Sujet**

# UTILISATION DE L'ELEMENT SBRPK POUR L'ETUDE DE LA FLEXION DES PLAQUES

Présenté et soutenu publiquement, le / / , devant le jury composé de :

Mr. HARKATI EL HADDI	Pr	Univ larbi tebessi	Président
Mr. ABDERRAHMANI SIF EDDINE	MCB	Univ larbi tebessi	Rapporteur
Mr. GOUDJIL FAYCEL	MAA	Univ larbi tebessi	Examineur 1

Promotion : 2020/2021

# SOMMAIRE

DEDICACE	I
REMERCIEMENT	II
LISTE DES SYMBOLES	III
LISTE DES TABLEAUX	IV
LISTE DES FIGURES	V
RESUME	VI
ABSTRACT	VII
ملخص	VIII
INTRODUCTION GENERALE	2

## CHAPITRE 01

### GENERALITE SUR M.E. F

1. Introduction	4
2. Recherche bibliographique	6
3. Concept de la méthode des éléments finis	8
4. Étapes de la méthode des éléments finis	8
5. Les Avantages de la M.E.F	9
6. Classement d'éléments fini	9
6.1. Les propriétés d'un élément fini	10
6.2. Signalement d'un élément fini	10
6.3. Les nœuds	10
6.4. Les forces nodales	11
6.5. Degrés de liberté	11
6.6. Caractéristiques d'un fini	11
7. Condition d'équilibre	11
8. Condition de compatibilité	11
9. Lois de Hooke	12
10. Conditions aux limites	13
11. Modèles d'éléments finis	13
11.1. Modèle déplacement	13
11.2. Modèle en déformation	13

11.3. Modèle équilibre	13
11.4. Modèle mixte	14
11.5. Modèle hybride	15
12. Conclusion	15

## **CHAPITRE 02**

### **THEORIE DES PLAQUES**

1. Introduction	16
2. Définition	16
3. Différents types de plaques	17
4. Différents types de comportements des plaques	17
5. Théorie des plaques minces	18
5.1. Hypothèses pour l'étude des plaques minces	18
5.2. Champs de déplacement	19
6. Théorie des plaques épaisses	21
6.1. Hypothèses	22
6.2. Champs de déplacement	22
6.3. Champs de déformation	23

## **Chapitre 03**

### **Présentation Du Programme**

1. Introduction	27
2. Programme FORTRAN	27
3.1. Définition	27
3.2. Elaboration d'un programme	27
3.3. Les parties principales du programme FORTRAN	27
3. Organigramme de FORTRAN	29
3.1. Le rôle de chaque subroutine	30
3.2. Le rôle de chaque sous subroutine	30
3.3. Présentation des différentes étapes du programme	30

## **Chapitre 04**

### **Application Numérique**

1. Élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des plaques minces	33
1.1. Champ de déplacement	34
1.2. Champ de déformation	34
1.3. Conditions de compatibilité cinématique	34
1.4. Les relations constitutives entre les contraintes et les déformations	35
1.5. Dérivation des fonctions de forme et matrice de rigidité de l'élément SBRPK	35
2. Formulation des éléments de plaque	37
3. Applications	39
3.1. Flexion d'une plaque carrée avec diverses conditions	39
3.2. Plaque encastrée sous charge concentrée au centre	40
3.3. Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre	41
4. Analyse et interprétation	42
CONCLUSION GENERALE	43
BIBLIOGRAPHIE	45
ANNEXES	48

# *Dédicace*

*Je dédie ce travail à :*

*-Mes parents*

*-Ma sœur*

*-Ma famille*

# **REMERCIEMENTS**

*Tout d'abord, je remercie Allah, le tout grand puissant de m'avoir donné la force, le courage, la patience et la volonté de mener à bien ce modeste travail.*

*Tout d'abord, j'adresse mes remerciements à mes précieux parents les plus chers au monde de leur aide et leur soutien pour leur encouragement durant la réalisation de ce mémoire.*

*Je tiens à remercier vivement et sincèrement mon encadreur **Dr. ABDERRAHMANI. S** qui a contribué et a assuré la direction de ce travail, pour tout le soutien, les orientations et la patience qu'il a manifesté durant son encadrement tout le long de la réalisation de ce mémoire.*

*Je tiens à remercier Monsieur **Pr. HARKATI. E**, président de jury, qui m'a fait le grand honneur de présider ce jury.*

*Je tiens à remercier aussi Messieurs **GOUDJIL. F** qui m'ont fait l'honneur d'examiner mon travail.*

*Je saisis aussi l'occasion pour rendre hommage à tous mes enseignants auprès desquels j'ai reçu ma formation.*

*Mes remerciements vont aussi à toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.*

# NOTATIONS

[Ke]	Matrice de rigidité élémentaire
[K]	Matrice de rigidité globale
[B]	Matrice de déformation
[K <sub>0</sub> ]	Matrice de rigidité
a, b, h	Dimensions et épaisseur de l'élément
$d_i$	Vecteur de déplacement nodal
E	Module de Young
$\nu$	Coefficient de poisson
$u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$	Déplacement et rotation d'un point quelconque
x, y, z	Coordonnées du repère global
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Déformation directes suivant x, y et z respectivement
[ ]	Matrice
[ ] <sup>T</sup>	Matrice transposé
[ ] <sup>-1</sup>	Matrice inverse
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$	Déformation tangentielle
[A]	Matrice des coefficients correspondant aux coordonnées de l'élément
M.E. F	Méthode des éléments finis

# LISTE DES TABLEAUX

## Chapitre 4

Tableau 4-1	Plaque carrée à deux bords encastrés sous charge concentrée au centre	41
Tableau 4-2	Plaque carrée à deux bords simplement appuyés sous charge concentrée au centre	42

# LISTES DES FIGURES

## **Chapitre 1**

Figure 1-1      Maillage du domaine en triangles en trois nœuds      9

## **Chapitre 2**

Figure 2-1      Description d'une plaque (géométrie et variables)      17

Figure 2-2      Déformation d'une plaque mince      20

Figure 2-3      Cinématique de love-kirchhoff      20

Figure 2-4      Cinématique de Reissner-Mindlin      21

Figure 2-5      Hypothèse de base des théories de plaques en flexion      26

## **Chapitre 3**

Figure 3-1      Les étapes nécessaires du programme      29

## **Chapitre 4**

Figure 4-1      Élément rectangulaire de plaque a quatre nœuds avec  $w, \beta_x, \beta_y$  (03d.d.l/nœud).      35

Figure 4-2      Déplacements nodaux      38

Figure 4-3      Géométrie de l'élément SBH8      39

Figure 4-4      Élément rectangulaire de plaque à quatre nœuds, avec  $W, \beta_x$  et  $\beta_y$  les trois degrés de libertés pour chaque nœud      40

Figure 4-5      Maillage du quart de la plaque      41

## RESUME

Les plaques sont considérées comme des structures essentielles en génie civil. Pour les étudier, les méthodes analytiques demeurent restreintes aux formes simples (non complexes), d'où la nécessité d'utiliser les méthodes numériques (méthodes des éléments finis). La formulation des éléments ne se limite pas uniquement au champ des déplacements ; des éléments finis (non conformes) basés sur le champ de déformation ont prouvés leurs efficacités durant les quatre dernières décennies

L'objectif principal de ce travail est formulé et utiliser l'élément SBRPK dans l'analyse des plaques minces et confrontation avec logiciel FORTRAN et d'autre résultat numérique et analytique s'il existe.

**Mots-Clés :** Éléments finis, Approche déformation, Flexion des plaques, Plaques minces.

## **ABSTRACT**

Plates elements are considered essential structures in civil engineering. For the analysis, analytical methods remain restricted to simple (non-complex) forms, hence the need to use numerical methods (finite element methods). The formulation of the elements is not limited only to the field of displacements; finite elements (non-conforming) based on the strain field have proven their effectiveness during the last four decades.

The main objective of this work is formulated and use the element SBRPK in the analysis of thin plates and confrontation with FORTRAN software and other numerical and analytical result if it exists.

**Keywords:** Finite elements, Deformation approach, Plate bending, thin plates.

## المخلص

تعتبر عناصر اللوحات من الهياكل الاساسية في الهندسة المدنية. بالنسبة للتحليل، تظل الاساليب التحليلية مقتصرة على الاشكال البسيطة (غير المعقدة)، ومن هنا تأتي الحاجة الى استخدام الاساليب العددية (طرق العناصر المحدودة). لا تقتصر صياغة العناصر على مجال النزوح فقط، اثبتت العناصر المحدودة (غير المطابقة)، بناءً على مجال الاجهاد فعاليتها خلال العقود الاربعة الماضية.

الهدف الرئيسي من هذا العمل هو صياغة واستخدام عنصر SBRPK في تحليل الصفائح الرقيقة والمواجهة مع برنامج FORTRAN و النتائج التحليلية والعددية الاخرى.

**الكلمات المفتاحية:** العناصر المحدودة، نهج التشوه، ثني الصفائح، الصفائح الرقيقة.

# Introduction générale

Le contexte de la crise économique actuelle associée à la mondialisation, pousse forcément les industriels dans une politique de minimisation des coûts de recherche pour le développement de leurs produits. En particulier l'ingénieur dans différents domaines industriels à de plus en plus recours aux outils numériques de simulation par les éléments finis à la place du procédé de prototypage ou expérimental qui est très coûteux. Le besoin de développer des éléments finis rectangulaire pour le calcul des structures, constitue une recherche intéressante et pleine de défis. Le calcul par ces éléments est devenu très répandu dans de nombreux domaines de technologie, (la mécanique, le transfert de chaleur, la mécanique des sols, le génie civil, etc...). Les éléments membranaires sont des éléments avec quatre nœuds ou plus utilisés pour modéliser des structures d'une épaisseur spécifiée qui ne présentent aucune contrainte normale à cette épaisseur.

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique d'analyse numérique permettant à obtenir des solutions approximatives à une large variété des sciences de l'ingénieur.

Le principe de base de la MEF consiste à remplacer le domaine réel par un ensemble d'éléments discrets, qui peuvent être réunis de plusieurs manières, et donc les employer pour représenter les formes les plus complexes.

La MEF avec l'apparition des ordinateurs, est devenue pour la première fois en 1956, une formulation générale d'approximation de la mécanique des structures lorsqu'elle fut utilisée chez Boeing par Turner, Clough, Martin et Topp, pour calculer des parties de la structure d'un avion, ces travaux marquèrent la naissance de la méthode des Eléments Finis.

L'analyse numérique des plaques minces en flexion par la méthode des éléments finis a connu ces dernières années une évolution considérable. La formulation des éléments ne se limite pas à l'utilisation du champ des déplacements, mais à l'utilisation, dès le départ du champ de déformation, il s'agit bien sûr de l'approche en déformation. L'objectif de ce travail est formulé et utiliser l'élément SPRPK dans l'analyse des plaques minces.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres :

Le premier chapitre est une étude générale sur la méthode des éléments.

Le deuxième chapitre nous présentons quelques généralités les plaques.

Le troisième chapitre ; présenté le programme à utiliser.

Nous montrons dans le quatrième chapitre quelque application numérique et leurs résultats, comparés à la solution analytique. Les résultats ont été présentés sur tableaux de faciliter la comparaison entre les résultats obtenus.

# **Chapitre 01 :**

## **Généralité Sur M.E. F**

## 1.1 Introduction

La méthode des éléments finis (MEF) est une technique d'analyse numérique permettant à obtenir des solutions approximatives à une large variété des sciences de l'ingénieur.

Le principe de base de la MEF consiste à remplacer le domaine réel par un ensemble d'éléments discrets, qui peuvent être réunis de plusieurs manières, et donc les employer pour représenter les formes les plus complexes.

La MEF avec l'apparition des ordinateurs, est devenue pour la première fois en 1956, une formulation générale d'approximation de la mécanique des structures lorsqu'elle fut utilisée chez Boeing par Turner, Clough, Martin et Topp, pour calculer des parties de la structure d'un avion, ces travaux marquèrent la naissance de la méthode des Eléments Finis.

Les applications de la méthode des éléments finis se scindent selon la nature du problème à résoudre en trois catégories. Dans la première catégorie, on y trouve le problème d'équilibre qui s'inscrit dans le domaine de la mécanique des solides, où on a besoin de connaître les déplacements, les déformations et les contraintes pour un chargement mécanique ou thermique donné, dont on trouve la majorité des applications de la MEF. Dans la deuxième catégorie, on retrouve les problèmes des valeurs propres, ceux-ci, sont des problèmes stationnaires dont la solution nécessite souvent la détermination des fréquences naturelles et les modes de vibrations des solides et des fluides. Quant à la troisième catégorie, le facteur temps est intégré aux problèmes des deux premières catégories. Les domaines d'application de la MEF s'étendent à toutes les disciplines de l'ingénieur, mais reste que les ingénieurs en génie civil, mécanique et spatiaux sont les utilisateurs les plus fréquents de cette méthode.

Parmi certaines applications de la méthode des éléments finis, on retrouve la modélisation des plaques; sa géométrie, les conditions aux limites (appuyé ou encastré), l'épaisseur (mince ou épaisse), le matériau utilisé (homogène ou isotrope), tous ces paramètres devraient être bien connus au préalable et leur prise en considération dans la conception du programme d'éléments finis est indispensable.

L'analyse numérique des plaques par la méthode des éléments finis a connu ces dernières années une évolution considérable. La formulation des éléments ne se limite pas à l'utilisation du champ des déplacements, mais récemment, à l'utilisation du champ de déformation pour la formulation des nouveaux éléments, qui a connu également une nouvelle évolution.[1]

Les bases théoriques de la méthode des éléments finis (M.E.F) repose d'une part sur la formulation énergétique de la mécanique des structures et d'autre part sur les méthodes d'approximations.

La M.E.F (Méthode des éléments finis) est mise au point en 1953 chez Boeing (Seattle, USA, calcul des structures d'ailes d'avion) ; on y développe le premier élément fini, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements (publié par Turner, Clough, Martin et Topp en 1956) [2].

L'expression élément finie a été inventée par clough en 1960. Années 60, la M.E.F s'attaque à tous les domaines du calcul de structures. Des programmes on trouve, la M.E.F, principalement dans le domaine de la mécanique des solides et des structures. Ont été conçus pour être exécutés sur de gros ordinateurs tels que : ABAQUS, SAP, CATIA.

La crédibilité des résultats obtenus va permettre l'utilisation de la méthode des éléments finis par des entreprises et des bureaux d'études de taille réduite.

C'est évidemment l'apparition d'ordinateurs puissants qui a permis le développement de la simulation numérique. Le rythme d'évolution de l'informatique est actuellement gigantesque et les possibilités d'application augmentent sans cesse.[3]

## **1.2 Recherche bibliographique [1],[4],[5],[6]**

La première impulsion ayant un énoncé mathématique de problèmes de plaque a été probablement faite par Euler, qui en 1776, a effectué une analyse des problèmes des vibrations libres de plaque. Chladni, physicien allemand a découvert les différents modes de vibrations libres. Dans les expériences sur les plaques horizontales, il a utilisé une poudre uniformément répartie, qui faisait régulièrement des schémas après induction d'une vibration. La poudre accumulée le long des lignes nodales, où il n'y a pas eu lieu des déplacements verticaux. J. Bernoulli a tenté de justifier en théorie, les résultats de ces expérimentations acoustiques. La solution de Bernoulli est basée sur les précédents travaux aboutissant à la théorie de la flexion de faisceau d'Euler-D. Bernoulli a présenté la plaque en tant que système de bandes droites perpendiculaires l'une à l'autre, chaque bande considérée fonctionnant comme un faisceau. Mais l'équation différentielle régissant, à distinguer des approches actuelles, ne contient pas le moyen terme.

Le mathématicien français Germain a développé une équation différentielle de plaque, dans laquelle le phénomène de voilement est négligé, il a reçu un prix par l'Académie de Paris en 1816 pour ce travail.

Le chercheur Lagrange, a été l'un des commentateurs de ce travail, il a corrigé les résultats de Germain en ajoutant le terme manquant, donc, il fut la première personne qui à présenter correctement l'équation de plaque.<sup>2</sup>

Cauchy et Poisson étaient les premiers à formuler le problème de plaque en flexion sur la base des équations générales de la théorie de l'élasticité. Expansion toutes les grandeurs caractéristiques en série, ils ont conservé seulement les termes du premier ordre de petitesse. De cette manière, ils ont obtenu l'équation différentielle régissant pour la flexion qui coïncide entièrement avec la célèbre équation de Germain-Lagrange. En 1829, Poisson élargi avec succès l'équation de plaque de Germain-Lagrange à la solution d'une plaque sous charge statique. Dans cette solution, cependant, la rigidité de la plaque en flexion  $D$  est définie comme étant égale à un terme constant.

Poisson a également suggéré l'établissement de trois conditions aux limites pour n'importe quel point sur une frontière libre. Les conditions aux limites dérivées de Poisson et la question sur le nombre et la nature de ces conditions a fait l'objet de beaucoup de controverses et a fait l'objet d'une recherche plus poussée.

La première théorie de la flexion des plaques est associée au chercheur Navier, qui a examiné l'équation générale de plaque en fonction de la rigidité «  $D$  » de plaque épaisse. Il a également mis en place une méthode "exacte" qui transforme l'équation différentielle en expressions algébriques par l'utilisation des séries trigonométriques de Fourier.

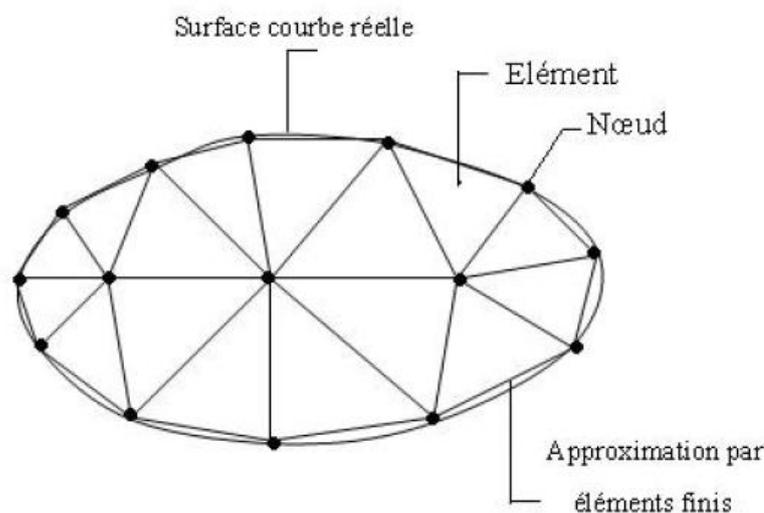
En 1850, Kirchhoff a présenté une thèse sur la théorie des plaques minces. Dans cette thèse, Kirchhoff a énoncé deux hypothèses de bases indépendantes, qui sont désormais largement reconnues dans la théorie de la flexion des Plaques et sont connues sous le nom « hypothèses de Kirchhoff ». En utilisant ces hypothèses, Kirchhoff a simplifié, l'énergie fonctionnelle 3D de la théorie d'élasticité des plaques pliées. En exigeant qu'elle soit stationnaire, il a obtenu l'équation de Lagrange-Germain comme l'équation d'Euler. Il a également fait observer qu'il existe seulement deux conditions aux limites sur le bord d'une plaque. D'autres contributions importantes de Kirchhoff sont la découverte l'équation de la fréquence des plaques et de l'introduction de la méthode des déplacements virtuels dans la solution des problèmes de plaque. Kirchhoff a contribué à la théorie physique clarifiée de la théorie de flexion de plaque et a promu son utilisation très répandue dans la pratique.

Des études vastes dans le domaine de la théorie des plaques en flexion et de ses diverses applications ont été effectuées par des savants éminents, tels que Hencky, Huber, von Karman, Nadai, Foppl. Hencky

a fait une contribution à la théorie des grandes déformations et à la théorie générale de la stabilité élastique des plaques minces. Nadai a largement associé la théorie et l'expérimentale à une vérification de l'exactitude de la théorie de plaque de Kirchhoff. Il a traité les différents types de singularités de plaques à raison d'une application de la force concentrée, des effets de point d'appui, etc. Les équations générales pour les grands déplacements des plaques de très mince épaisseur ont été simplifiées par Foppl qui a utilisé la fonction de contrainte agissant dans le plan médian de la plaque. La forme définitive de l'équation différentielle de la théorie de grand déplacement, cependant, a été développée par von Karman. Il a aussi fait des recherches sur le comportement en voilement de plaques.[3]

### 1.3 Concept de la méthode des éléments finis

Le concept de base de la méthode des éléments finis est la subdivision du modèle mathématique à des composants disjoints de géométrie simple appelés (Éléments finis), le comportement de chaque élément est exprimé en termes d'un nombre fini de degrés de liberté, le comportement (réponse) du modèle mathématique est considéré, approximativement, celui du modèle discret obtenu par connexion ou assemblage des éléments. [7]



**Figure (1.1) :** Maillage du domaine en triangles à trois nœuds

### 1.4 Étapes de la méthode des éléments finis [3]

Dans diverses applications précitées, les éléments finis perdent leur signification physique d'éléments structuraux : la méthode des éléments finis est considérée comme un outil de mathématiques appliquées destiné à résoudre les équations différentielles.

Néanmoins, les étapes de l'étude d'un problème aux limites sont toujours les mêmes, on peut les résumer en sept étapes :

1. Découpage du domaine en un maillage d'éléments finis ;
2. Interpolation en respectant les critères de convergence ;
3. Calcul des caractéristiques de chaque élément ;
4. Assemblage ;
5. introduction des conditions aux limites essentielles et résolution ;
6. Évaluation, dans chaque élément, des grandeurs utiles (contraintes, déplacements...) ;
7. Jugement de manière critique les résultats obtenus.

### **1.5 Les Avantages de la M.E.F**

La puissance de la méthode des éléments finis réside essentiellement dans sa souplesse.

Elle peut être applicable à une variété de problèmes mécaniques ou bien physiques. La géométrie du domaine peut être quelconque, les forces et les conditions aux limites peuvent être aussi de natures quelconques.

Le maillage peut combiner autant de types d'éléments que l'on souhaite. Et toute cette généralité est contenue dans un programme unique qu'on peut faire tourner sur un ordinateur

(Sélection du de problème, de la géométrie, du type d'élément, des chargements et des conditions aux limites).

La méthode des éléments finis réside dans le fait que le modèle qu'elle utilise est très proche de la structure réelle.

### **1.6 Classement d'éléments fini :**

Les différents types d'éléments finis suivant leur géométrie. Plusieurs classes d'éléments finis peuvent être distinguées :

- Les éléments 1D : barres, poutres rectilignes ou courbes.
- Les éléments 2D : élasticité plane (déformation ou contrainte plane), plaque en flexion, coques courbes.

- Les éléments 3D : éléments de volume ou coques épaisses.

### 1.6.1 Les propriétés d'un élément fini

Le découpage en éléments finis permet d'isoler un élément fini pour l'étudier tout en établissant les caractéristiques.

### 1.6.2 Signalement d'un élément fini

Le signalement d'un élément fini comprend les points suivants :

➤ **Géométrie** :

Un élément fini peut être 1 d, 2d ou 3 d sa forme sont simples.

- Segment d'une droite ou de courbe (plan ou courbe)
- Triangle ou quadrilatère
- Tétraèdre, prisme ou hexaèdre

➤ **Les frontières** :

Sont respectivement :

- Les points (extrémités du segment)
- Des segments de droite ou de courbe.
- Des faces planent ou courbe

➤ **Matériau** :

Le matériau de l'élément est défini par une loi de comportement (loi de Hooke isotrope) ce dernier a les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions (métaux)

Il est caractérisé par 02 constantes élastiques : E et  $\nu$

### 1.6.3 Les nœuds

Les nœuds définissent la géométrie et assurent la connexion des éléments les uns aux autres, ils occupent des positions stratégiques comme les extrémités, les sommets, les milieux des arêtes et faces.

### 1.6.4 Les forces nodales

À travers les nœuds transitent des forces associées aux degrés de liberté, les unes sont les réactions internes, les autres les forces  $F$  dues aux charges appliquées à l'élément (poids propre, charge uniforme, température...)

### 1.6.5 Degrés de liberté

Pour tout élément fini, on doit faire le choix d'une ou plusieurs fonctions (en général le champ des déplacements), elles sont exprimées en fonction des valeurs particulières qu'elles prennent aux nœuds valeurs qui deviennent les inconnues nodales ; par leurs degrés de liberté nodaux communs des différents éléments adjacents, permet de reconstituer, la solution complète

(ASSEMBLAGE), tout en veillant à respecter certaines règles, dites critères de convergence.

### 1.6.6 Caractéristiques d'un élément fini

Le signalement précédent permet de construire les deux caractéristiques d'un élément fini qui sont :

- Sa matrice de rigidité  $K$
- Son vecteur force  $F$

Elles interviennent dans l'équation d'équilibre de l'élément fini, en relation forces déplacement.

$$F = K U \quad (1-1)$$

## 1.7 Condition d'équilibre

Les forces agissant sur toute la structure ou sur chacun des éléments considérés comme un corps libre doivent être en équilibre.

## 1.8 Condition de compatibilité [3]

Les déplacements de l'ensemble de la structure ou de chacun de ses éléments doivent être compatible, en d'autres termes les déplacements des extrémités des éléments qui sont connectés à un même doivent être identiques.

On peut encore dire que si on effectue une section sur un élément, les déplacements d'élément à gauche et à droite de cette section doivent être égaux.

Pour que cette cohésion soit respectée (c.à.d. Pour que les volumes élémentaires ; auxquels ont été appliquées les déformations  $\varepsilon_{ij}$ , continuent de rester accolés), il faut que le champ de déformation  $\varepsilon_{ij}$  ( $M$ ) dérive d'un champ de déplacement  $u_i$  ( $M$ ), continûment dérivable, tel que  $\varepsilon_{ij}$  peut s'écrire :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \quad (1-2)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right) \quad (1-3)$$

Donc, connaissant le champ de déplacement  $u_i$  ( $M$ ), on en déduit par équation (1-3) le champ de déformation  $\varepsilon_{ij}$  ( $M$ ).

Réciproquement, si on connaît le champ des déformations  $\varepsilon_{ij}$  ( $M$ ), peut-on calculer le champ de déplacements  $u_i$  ( $M$ ). Le premier problème est celui de la compatibilité des déformations, le seconde celui de l'intégration d'un champ de déplacement.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varepsilon_{ii} = \frac{\partial^3}{\partial x_j^2 \partial x_i} u_i \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varepsilon_{jj} = \frac{\partial^3}{\partial x_i^2 \partial x_j} u_j \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \varepsilon_{ii} + \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \varepsilon_{jj} = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \varepsilon_{ij} \quad (1-6)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} = 0 \quad (1-7)$$

Cette équation (1-7) générale permet d'exprimer les équations de compatibilité en élasticité tridimensionnelle.

## 1.9 Lois de Hooke

Le comportement de la structure doit satisfaire à la loi de HOOKE qui décrit le rapport entre la charge et la déformation des matériaux.

Dans toute l'étude qui suit, on considérait que la déformation est proportionnelle à la charge, ce qui se traduit par l'équation (1-1).

## 1.10 Conditions aux limites

Les conditions aux limites exigent que les conditions d'équilibre et de compatibilité en chacune des limites de la structure soient satisfaites.

*Exemple :* les déplacements d'une extrémité encastree doivent être nuls.

## 1.11 Modèles d'éléments finis [8]

Le plus souvent, le champ interpolé est celui des déplacements, et il est rarement celui des déformations ou des contraintes. Ces interpolations portent sur tout l'élément ou une partie de celui-ci, à l'intérieur ou à la frontière. On peut créer divers types, dits « modèles » d'éléments finis selon la combinaison choisie comme :

### 1.11.1 Modèle déplacement :

Ce modèle est le plus populaire, le plus connu et le plus développé. Dans cette catégorie, les éléments finis sont basés sur une interpolation du champ des déplacements, étendu à tout l'élément. Alors, les déplacements sont déterminés de manière détaillée et unique dans la structure, donc les contraintes ne peuvent être connues que par certaines moyennes et ne sont pas continués aux frontières.

### 1.11.2 Modèle en déformation :

Ce modèle présente une approximation qui se fait sur le champ de déformation, puis on intègre pour retrouver le champ de déplacement de telle sorte que les équations d'équilibres et de compatibilité soient satisfaites à l'intérieur de l'élément.

### 1.11.3 Modèle équilibre :

Le modèle en équilibre n'a pas connu le même succès que le modèle en déplacement.

Contrairement au précédent, un tel élément est construit à partir d'une approximation du seul champ des contraintes. La connaissance des contraintes est alors détaillée, celle des déplacements est par contre sommaires.

Ce modèle est rarement employé en pratique, car il conduit en général à qualité égale à un plus grand nombre d'inconnues que le modèle déplacement.

### **1.11.4 Modèle mixte :**

Si on combine les deux modèles précédents, on peut avoir des champs mixtes (déplacement, déformation, contrainte) qui sont considérés ici, ce qui rend la formulation, ou la mise au point longue et coûteuse ; mais en contrepartie les éléments qui en découlent sont d'excellente qualité, on utilise parfois ce modèle pour corriger certains défauts du modèle de déplacement.

### **1.11.5 Modèle hybride :**

Ce Modèle qui peut être défini par deux interpolations indépendantes, l'une portant sur le champ intérieur de l'élément, l'autre sur le champ décrivant la frontière, les paramètres inconnus du champ intérieur sont exprimés en fonction des paramètres nodaux de champ de bord, on cherche à minimiser la différence entre les deux champs, ces derniers peuvent être du même type (déplacement - déplacement) ou de types différents (déplacement - contrainte). En général ce modèle donne des résultats meilleurs que le modèle déplacement surtout au niveau des contraintes.

## **1.12 Conclusion**

La M.E.F c'est une méthode approchée de calcul numérique permettant de déterminer l'état d'équilibre d'un milieu continu élastique à deux ou trois dimensions.

Elle consiste à déterminer de manière approximative les déplacements d'un certain nombre de points du milieu appelés « nœuds ».

Le Modèle de déformation présente une interpolation directe sur les déformations permet d'avoir une meilleure précision sur ces grandeurs, sur les contraintes et sur les déplacements (obtenus par intégration), contrairement à la formulation classique où les déformations sont obtenues par dérivation du champ adopté pour déplacements.

## **Chapitre 02 :**

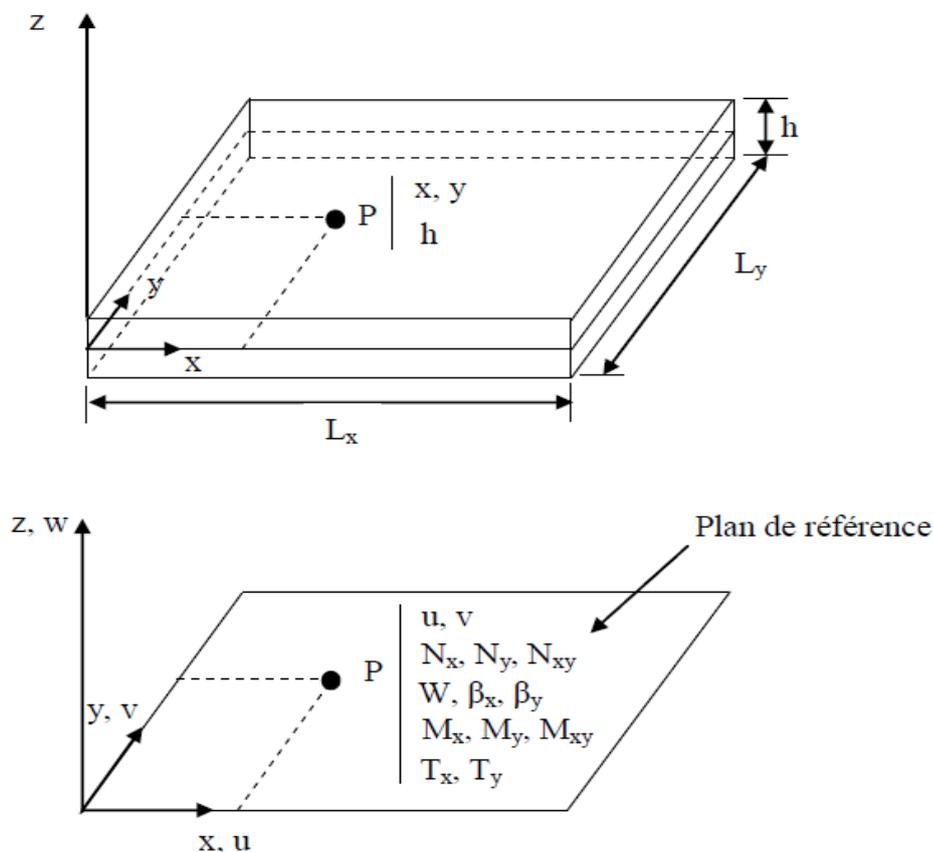
# **Théorie des plaques**

## 2.1 Introduction

Les plaques sont des structures très utilisées dans l'industrie sous-marine, aérospatial, le génie civil et dans des constructions courantes (ponts, toits de bâtiments, ...), dans le domaine de l'énergie, et dans la conception industrielle (turbines, pièces de mécanique, carrosserie de voiture, ...), et même dans le monde du vivant (artères, bronches, ...), etc. Tous ces domaines sont stratégiques et économiquement très importants. C'est pour cette raison que les plaques ont fait l'objet de très grand nombre de travaux depuis plus d'un siècle.

## 2.2 Définition

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane (plan) et par une petite épaisseur (notée  $h$ ) par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur, figure II.4), elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Une analyse élastique des plaques consiste à une analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane [1].



(Figure. 2-1) : Description d'une plaque (géométrie et variables)

## 2.3 Différents types de plaques

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories :

- **Les plaques isotropes** : elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (: respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art, ...).
- **Les plaques orthotropes** : leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art.
- **Les plaques anisotropes** : leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les définir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.[9], [10].

## 2.4 Différents types de comportements des plaques

L'énergie de déformation d'une plaque peut être décomposée en trois termes principaux : la flexion, la membrane et le cisaillement. Lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers zéro, l'énergie de cisaillement devienne négligeable et la déformation subie par la plaque appartient à l'une des trois catégories asymptotiques suivantes en fonction de la géométrie, des conditions aux limites et des forces appliquées:

- La flexion dominante ;
- La membrane dominante ;
- Le cas mixte ;

Dans les deux premières catégories, c'est la partie correspondante de l'énergie de déformation qui est dominante, tandis que dans les cas mixtes aucune partie n'est négligeable par rapport à l'autre. En considérant la même force, matériau et conditions aux limites, une plaque (plaque) peut exhiber des

comportements asymptotiques complètement différents en fonction de la nature géométrique de la surface moyenne.

L'espace continu des déplacements in extensionnels « avec énergies de membrane et cisaillement nul, est nommé » qui joue un rôle fondamental dans le classement évoqué ci-dessus : dans le cas flexion-dominante, le problème limite est formulé dans cet espace qui doit être différent de zéro, tandis que dans le cas membrane dominante, cet espace est réduit au champ nul. [11], [12]

## 2.5 Théorie des plaques minces

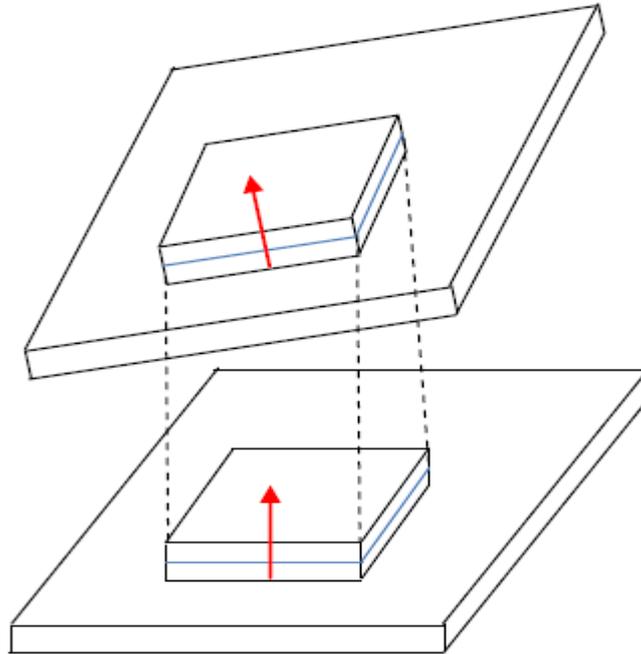
Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. L'hypothèse adoptée est celle de Love-Kirchhoff de contraintes planes, les déformations dues aux cisaillements transverses sont négligées. La normale reste droite et est perpendiculaire à la surface moyenne après avoir déformée (Figure. 2-2 et 2-3) [1]

### 2.5.1 Hypothèses pour l'étude des plaques minces

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques minces par Kirchhoff de contrainte plane, généralisent à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformation à l'effort tranchant.

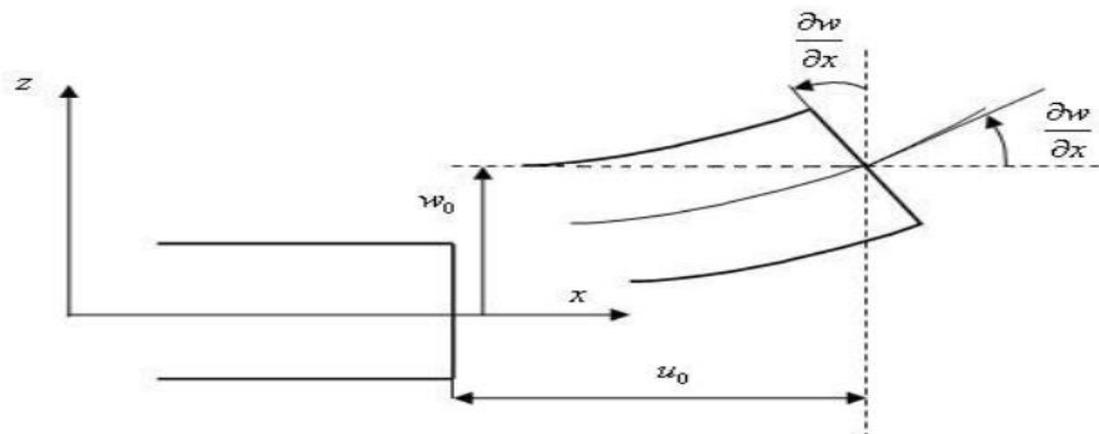
- La plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions. Elle possède un plan moyen aussi appelé plan neutre.
- L'hypothèse des sections droites inclut celle dite de conservation des normales (les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur la normale à la surface moyenne déformée) ce qui conduit au modèle classique généralement associé au nom de Kirchhoff (mais qui doit également beaucoup aux scientifiques français du 19e siècle : Sophie Germain, Lagrange, Poisson, Boussinesq, Levy, Saint-Venant).
- La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- Les termes non linéaires du déplacement sont négligés, en particulier, l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal  $w$  est considéré.
- La contrainte  $\sigma_z$  dans la direction transversale est nulle. Elle doit en effet s'annuler sur les faces extérieures et, du fait que la plaque est mince, il est naturel d'admettre qu'elle est nulle en tout  $z$ .
- Les éléments basés sur la théorie sont les mieux adaptés à la modélisation des plaques minces. Leur formulation ne nécessite que l'approximation d'une seule composante de déplacement  $w(x,y)$ .

Les dérivées secondes des déplacements interviennent dans l'expression de l'énergie de déformation. Ainsi, la condition de compatibilité inter-éléments correspond à la continuité C1 du déplacement traverse c.-à-d. à la continuité de  $w$  et de la pente normale  $\frac{dw}{dx}$



(Figure.2-2) : Déformation d'une plaque mince.

### 2.5.2 Champs de déplacement



(Figure.2-3) : Cinématique de love - Kirchhoff.

Les composantes des champs de déplacements pour cette théorie des plaques minces s'expriment comme suit :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) - z \cdot w_\alpha(x_1, x_2) & \alpha = 1, 2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.1)$$

Avec :

$u_\alpha$  : Le déplacement de membrane dans la direction

$w$  : La flèche de la plaque

$w_\alpha$  : La rotation due à la flexion (sans cisaillement)

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\begin{cases} \beta_x = \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_y = \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (2.2)$$

Dans ce cas, le champ de déplacement est défini uniquement par une variable, c'est le déplacement transverse.

$$\begin{cases} u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w = W(x, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

### **Champs de déformation :**

D'après la définition du tenseur des déformations, les équations des déformations sont données comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = Z \cdot \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = -Z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = Z \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial y} = -Z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{Z}{2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) = -2Z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} (\theta_y - \theta_y) = 0 \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} (-\theta_x + \theta_x) = 0 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

D'autre part, les relations déformations-contraintes sont résumées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

L'équation précédente peut s'écrire sous forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

## 2.6 Théorie des plaques épaisses : [1], [8]

Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion, une théorie plus complète basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaire.

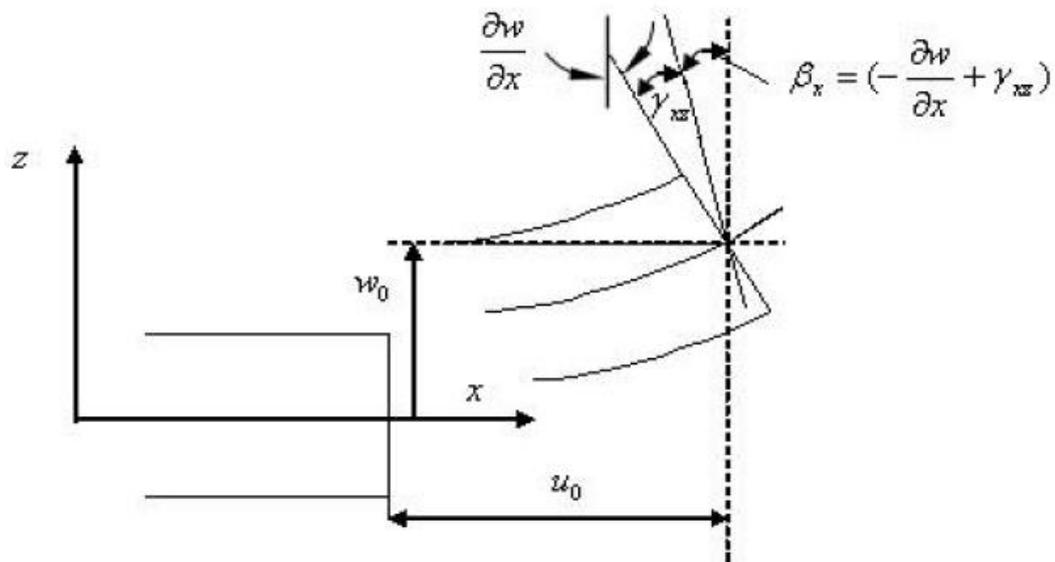
Rayleigh en 1877 [14] puis Timoshenko en 1921 montre que la prise en compte des effets d'inertie de rotation et de cisaillement affecte les fréquences propres de flexion des poutres [15, 16]. Ces deux effets tendent à diminuer les fréquences de résonances calculées en raison de la croissance de l'inertie et de la flexibilité du système.

Une extension de la théorie des plaques à l'effet de cisaillement est proposée par Reissner en 1945 dans le cas statique [17]. Une première théorie pour le cas dynamique, incluant les effets du cisaillement et de l'inertie de rotation est proposée par Uflyand en 1948 [18].

L'article de Mindlin [19] a été publié trois années plus tard.

### 2.6.1 Hypothèses

Les hypothèses de Mindlin, reprennent les points 1 et 4 de celles de Kirchhoff. Les points 2 et 3 des précédentes hypothèses ne sont plus retenus afin de prendre en compte les deux nouveaux effets (Figure.2-4)



(Figure 2-4) : Cinématique de Reissner-Mindlin

### 2.6.2 Champs de déplacement :

Dans la théorie des plaques épaisses, ou théorie de Reissner et Mindlin, la fibre normale reste toujours rectiligne, mais n'est plus nécessairement perpendiculaire au plan moyen, si  $\theta_x$  et  $\theta_y$  désignent les angles que fait la fibre normale avec l'axe  $z$ , ils ne correspondent plus à l'inclinaison du plan moyen, on a donc :

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3 = Z) = u_\alpha^0(x_1, x_2) + Z \cdot \phi_\alpha(x_1, x_2) & \alpha = 1, 2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3 = Z) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.7)$$

D'autre part, les rotations sont données par :

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.8)$$

$$\beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$$

Donc, les variables cinématiques indépendantes sont :

$u\alpha$  : Le déplacement de membrane dans la direction

$w$  : Le déplacement transversal

$\beta_x$  ( $\theta_y$ ) : la rotation du plan xy autour de y

$\beta_y$  ( $-\theta_x$ ) : la rotation du plan xy autour de x

Avec ce choix de la forme des champs de déplacement, les déformations transversales sont constantes en z. Les contraintes de cisaillement sont donc uniformes. Cette description oblige à introduire des coefficients correcteurs pour mieux prendre en compte, dans l'écriture de l'énergie, les effets de cisaillement transversal. Les résultats obtenus dépendent essentiellement du choix empirique dans des situations complexes des coefficients correcteurs.

Donc, le champ des déplacements s'exprime alors en fonction des trois variables par la relation suivante :

$$\begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w(x, y) \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} \beta_x(x, y) \\ \beta_y(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

### 2.6.3 Champs de déformation

Concernant le champ de déformation, les termes gardent leur forme générale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = Z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = Z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z = 0 \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = Z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (2.10)$$

Et par ailleurs,  $\varepsilon_{xz}$  et  $\varepsilon_{yz}$  ne sont plus nuls :

$$\begin{cases} 2\varepsilon_{xz} = \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (2.11)$$

On ne peut donc négliger le cisaillement. Le vecteur des courbures ne peut plus se simplifier et restent comme suit :

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

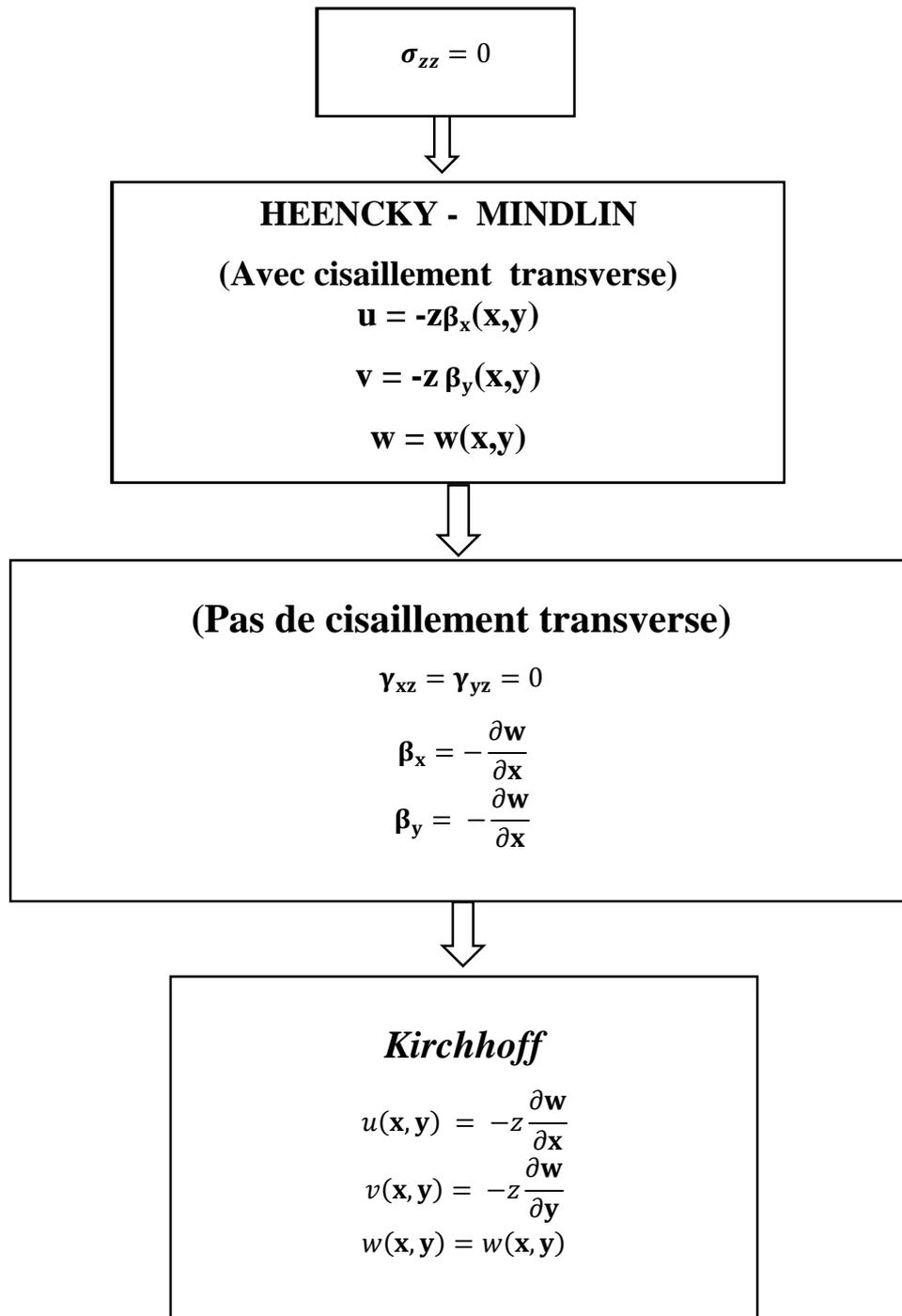
$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) & -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Et l'on a toujours :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{k} \quad (2.14)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} = \mathbf{Z} \cdot \vec{\chi} \quad (2.15)$$

Les hypothèses de base, en particulier les hypothèses cinématiques des théories des Plaques en flexion sont récapitulées dans le synoptique de la Figure 2.5 : [9]



(Figure 2-5) : Hypothèses de base des théories de plaques en flexion

## **Chapitre 03 :**

### **Présentation du programme**

### 3.1 INTRODUCTION

La résolution d'un problème par la M.E.F, nécessite la manipulation des opérations matricielles et vecteurs de grandes tailles (matrice des raideurs, matrice de rotation, vecteurs forces,.... etc.).

Ainsi que différentes techniques numériques (Assemblage, résolution,...).Ceci rend l'utilisation de l'ordinateur essentielle pour l'application de la méthode. De point de vue pratique, l'utilisation de la méthode se fait à travers l'utilisation d'un programme qui offre à l'utilisateur un certain nombre de possibilités à travers : une bibliothèque d'éléments, un ensemble de lois de comportement de matériaux et de liaisons, un ensemble d'algorithmes de résolution,...etc. Donc, dans ce chapitre on présente le programme à utiliser qui permet la modélisation des éléments structuraux en élasticité plane.

Dans notre travail présenté, nous avons utilisé un programme de FORTRAN 77.

### 3.2 Programme FORTRAN

#### 3.2.1 Définition

Le FORTRAN est de loin, le langage le plus utilisé dans la programmation relative aux calculs de l'ingénieur. Le programme a été élaboré d'une manière structurée, il est constitué de plusieurs sous programmes ou le passage des paramètres ne s'effectue pas lors de l'appel du sous-programme, ce qui facilite la programmation et la rend très souple car on ne sera pas contraint à chercher les paramètres qui doivent passer d'une routine à l'autre.

#### 3.2.2 Elaboration d'un programme

Un programme Fortran nécessite deux types de fichiers pour son élaboration :

- Les fichiers source (extension. FOR)
- Le fichier exécutable (extension .EXE).

Généralement le programme FORTRAN est divisé en trois parties qui sont les suivantes :

- Introduction des données.
- Calcul, rappelant les formules et expression utilisée, et détaillant la technique adoptée.
- Affichage des résultats.

#### 3.2.2 Les parties principales du programme FORTRAN

##### a) Introduction des données

Cette phase consiste à introduire toutes les caractéristiques de l'exemple

- NELEM : Nombre des éléments
- NNODE : Nombre des nœuds

- NPOIN : Nombre des points
- NDDOF : Nombre de degré de liberté.
- NEVAB : Nombre de variable par élément.
- NDOFN : Nombre de degré de liberté par n  $f$  nœud
- NSTRE : Nombre des contraintes.
- NSVAB : Nombre de degré de liberté par structure.
- NTYPE : hypothèse.
- Les coordonnées, conditions la limite, connectivites, caractéristiques des matériaux utilisés (E. T. v.....) et les charges.

**Remarque** : Le type de fichier donné (.DAT)

**b) Construction de la matrice et du vecteur globaux  $\{K\}$  et  $\{f\}$  et résolution du système des équations  $[K] \{U\} = \{F\}$**

Cette étape est la plus importante du programme, car on y effectue toutes les opérations nécessaires pour aboutir à la solution finale du problème.

- Evaluation de la matrice de rigidité élémentaire.
- Lecture des vecteurs élémentaires des forces.
- Calcul des déplacements aux nœuds  $[K] \{U\} = \{F\}$
- Calcul des contraintes et déformations pour chaque élément.

**c) Impression des résultats**

Le type de fichier de résultat (.OUT).



### 3.3.1 Le rôle de chaque subroutine

- Input : introduction des données (coordonnée, géométrie, condition au limite ....)
- Stif : construire la matrice de rigidité de chaque élément.
- Assemblage : assembler les matrices élémentaires.
- Condition au limite B.C : supprimé les conditions des nœuds fixes dans la matrice globale.
- Load : bloc pour entrer les chargements.
- Solve : résoudre l'équation  $F = K \cdot U$  et prendre les déplacements et les efforts
- Stress : déduire les contraintes.

### 3.3.2 Le rôle de chaque sous subroutine :

- Initialisé : mette la matrice élémentaire au zéro
- Mod : la matrice d'élasticité.
- Str : bloc de fonction des formes et le dérivé.
- Jacobi : l'intégration numérique par la méthode de gauss.
- Matrice B : déduire la matrice B
- BDE : calcul l'intégral  $\int [B]^T [D] [B]$

### 3.3.3 Présentation des différentes étapes du programme

#### a) Lecteur et organisation des données

On divise la structure en un certain nombre d'éléments reliés aux nœuds. Ces éléments représentent les caractéristiques élastiques du milieu idéalisé. Donc les données portent essentiellement sur les nœuds comme les coordonnées, les conditions aux limites et les chargements, et pour les éléments la numérotation des coefficients physiques du matériau. Elle est élaborée par le SUBROUTINE INPUT.

#### b) La matrice de rigidité élémentaire

Initialisé la matrice de rigidité élémentaire et La sous routine MODE la matrice d'élasticité et La sous routine STR fonction de forme et sa dérive, et Les sous routine le jacobien et [B] pour détermine la matrice de déformation une relation entre les sous routine STR et jacobien et [B]. La sous subroutine DBE est le  $\int [B]^T [D] [B]$ , une ploc pour chaque élément ( $I=1 \dots n$  élément). Est géré par sous-programme STIF.

#### c) Assemblage

Calcule la matrice de rigidité global, est effectuée par sous-programme [KS].

#### d) Condition aux limites

Elle est élaborée par le sous-programme BC

**e) Vecteur charge**

Charges nodale et charge entre les nœuds. Elle est élaborée par le sous-programme LOAD

**f) Calcule les déplacements**

Résolution l'équation  $[K_e]\{\delta\}=\{F\}$ , Elle est élaborée par le sous-programme SOLVE.

**g) Calcul les contraintes**

Elle est élaborée par le sous-programme STRE. Ploc entre les sous-programmes.

IMPUTE et STRESSE : le nombre de problème à résoudre (N type). Ploc entre les sous-programmes

LOAD et STRESSE : cas de chargement (N cas) et identifie le point de gausse.

# **Chapitre 04 :**

# **Application Numérique**

Dans l'histoire de la méthode des éléments finis, le développement d'éléments de flexion des plaques remonte à longtemps. La plupart des formulations sont basées sur la théorie de Kirchhoff (la théorie des plaques minces). Un grand nombre de travaux de recherche ont été orientés vers le développement d'éléments basés sur cette théorie. Dans ce chapitre, nous allons tester l'efficacité de l'élément **SBRPK** (Strain Based Rectangular Plate Kirchhoff) ; utilisés dans l'étude par une série des tests qui comporte divers données géométriques, charges et conditions aux limites.

La validation de l'élément SBRPK, est représentée par la comparaison entre les résultats analytique indiqués dans la littérature et les résultats donnés par les autres éléments (SBRP, SBRPS, ACM et SBH8).

#### 4.1 Élément fini rectangulaire basé sur l'approche en déformation pour l'étude de la flexion des plaques minces : [30]

Cet élément, appelé SBRPK (Strain Based Rectangular Plate Kirchhoff) ; élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces, basé sur le modèle en déformation et possédant quatre nœuds, avec la nécessité d'avoir trois degrés de liberté pour représenter les mouvements possibles pour chacun des nœuds( $w, \theta_x, \theta_y$ ), donc l'élément possède douze (12) degrés de liberté.

##### 4.1.1 Champ de déplacement

Le champ de déplacement dans n'importe quel point dans le système des coordonnées cartésiennes est donné par :

$$U = u(x, y, z) = z\beta_x(x, y) \quad (4.1a)$$

$$V = v(x, y, z) = z\beta_y(x, y) \quad (4.1b)$$

$$W = w(x, y, z) = w(x, y) \quad (4.1c)$$

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.1d)$$

$$\beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.1e)$$

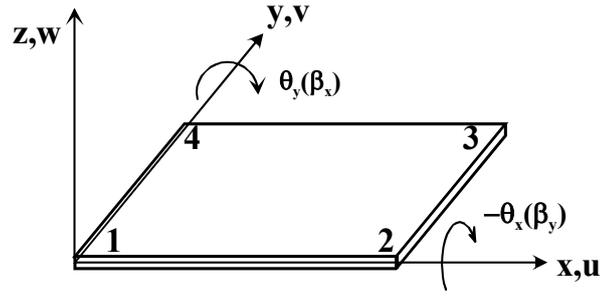


Figure 4.1 : Élément rectangulaire de plaque a quatre nœuds avec  $w, \beta_x, \beta_y$  (03d.d.l/nœud).

#### 4.1.2 Champ de déformation

Les composantes du champ de déformation sont données par :

$$\varepsilon_x = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad (4.2a)$$

$$\varepsilon_y = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad (4.2b)$$

$$\gamma_{xy} = z \left( \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (4.2c)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (4.2d)$$

Les courbures sont données ci-dessous :

$$k_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.3a)$$

$$k_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.3b)$$

$$k_{xy} = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.3c)$$

#### 4.1.3 Conditions de compatibilité cinématique

Ces conditions ont été établies par Saint Venant [Fra 98], leur satisfaction est obligatoire pour garantir l'unicité des déplacements.

$$\frac{\partial^2 k_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial x} = 2 \frac{\partial k_x}{\partial y} \quad (4.4b)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 k_{xy}}{\partial y} = 2 \frac{\partial k_y}{\partial x} \quad (4.4c)$$

#### 4.1.4 Les relations constitutives entre les contraintes et les déformations

Pour un matériau isotrope, les relations constitutives entre les contraintes et les déformations pour la théorie de Kirchhoff sont données par :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Avec  $M_x, M_y, M_{xy}$  représentant les moments de flexion

La matrice de rigidité [D] contient les valeurs  $d_{ij}$ , qui sont définies par :

$$d_{11} = d_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, d_{12} = \frac{\nu Eh^3}{12(1-\nu^2)}, d_{33} = d_{11} \frac{(1-\nu)}{2}$$

Avec E le module d'Young, h l'épaisseur de la plaque, et  $\nu$  coefficient de poisson.

#### 4.1.5 Dérivation des fonctions de forme et matrice de rigidité de l'élément SBRPK

Les courbures sont données par l'équation (4.3) comme suit :

$$k_x = \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad (4.6a)$$

$$k_y = \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad (4.6b)$$

$$k_{xy} = \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \quad (4.6c)$$

Si on a :

$$k_x = 0; k_y = 0; k_{xy} = 0 \quad (4.7)$$

Après intégrations des termes de l'équation (4.7), on obtient :

$$\beta_x = a_2, \beta_y = a_3 \quad (4.8)$$

$$\text{On a aussi} \begin{cases} \gamma_{xz} = \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz} = \beta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

Après substitution les valeurs de  $\beta_x$  et  $\beta_y$  dans l'équation précédente, on trouve :

$$\begin{cases} a_2 + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ a_3 + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (4.10)$$

Après intégration de l'équation différentielle (4.10) on obtient :

$$w = a_1 - a_2x - a_3y \quad (4.11)$$

Cette équation représente le mouvement d'un corps rigide (translation et rotation).

Le présent élément à quatre nœuds, avec trois degrés de liberté (ddl) par nœud, donc l'élément possède douze degrés de liberté, le champ de déplacement doit donc contenir aussi douze coefficients indépendants, trois ont été utilisés  $(a_1, a_2, a_3)$  pour la représentation du MCR dans l'équations (4.8 ; 4.11), il en reste donc neuf coefficients  $(a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12})$  pour représenter de façon approximative la déformation dans l'élément, tout en vérifiant les équations de compatibilité (4.4).

Les valeurs de  $k_x; k_y; k_{xy}$  sont résumées comme suit :

$$k_x = a_4 + a_5x + a_6y + a_7xy \quad (4.12a)$$

$$k_y = a_8 + a_9x + a_{10}y + a_{11}xy \quad (4.12b)$$

$$k_{xy} = a_{12} + 2a_6x + a_7x^2 + 2a_9y + a_{11}y^2 \quad (4.12c)$$

En remplaçant dans les équations (4.3) les courbures par leurs valeurs données par les équations (4.12) et après intégration, nous obtenons les champs des déplacements suivants :

$$w = -a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^3}{6} - a_6 \frac{x^2y}{2} - a_7 \frac{x^3y}{6} - a_8 \frac{y^2}{2} - a_9 \frac{xy^2}{2} - a_{10} \frac{y^3}{6} - a_{11} \frac{xy^3}{6} - a_{12} \frac{xy}{2} \quad (4.13a)$$

$$\beta_x = a_4x + a_5 \frac{x^2}{2} + a_6xy + a_7 \frac{x^2y}{2} + a_9 \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{y^3}{6} + a_{12} \frac{y}{2} \quad (4.13b)$$

$$\beta_y = a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 \frac{x^3}{6} + a_8y + a_9xy + a_{10} \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{xy^2}{2} + a_{12} \frac{x}{2} \quad (4.13c)$$

Le champ de déplacement final pour l'élément **SBRPK** sera obtenu par superposition des termes des équations (4.8 ; 4.11) et celle de l'équation (4.13), on obtient donc :

$$w = a_1 - a_2x - a_3y - a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^3}{6} - a_6 \frac{x^2y}{2} - a_7 \frac{x^3y}{6} - a_8 \frac{y^2}{2} - a_9 \frac{xy^2}{2} - a_{10} \frac{y^3}{6} - a_{11} \frac{xy^3}{6} - a_{12} \frac{xy}{2} \quad (4.14a)$$

$$\beta_x = a_2 + a_4x + a_5 \frac{x^2}{2} + a_6xy + a_7 \frac{x^2y}{2} + a_9 \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{y^3}{6} + a_{12} \frac{y}{2} \quad (4.14b)$$

$$\beta_y = a_3 + a_6 \frac{x^2}{2} + a_7 \frac{x^3}{6} + a_8y + a_9xy + a_{10} \frac{y^2}{2} + a_{11} \frac{xy^2}{2} + a_{12} \frac{x}{2} \quad (4.14c)$$

Les fonctions de déplacement de l'élément développé **SBRPK** données par l'équation (4.14) contient la représentation exacte des modes de corps rigide à travers les termes associés aux

constantes  $a_1, a_2$  et  $a_3$ , et satisfait aussi la compatibilité dans la présentation approximative de la déformation dans l'élément. Les 12 degrés de liberté nodaux de l'élément sont exprimés en termes de  $a_1, a_2, \dots, a_{12}$  constantes par la matrice de transformation [C].

$$\{\delta^e\} = [C]. [A] \tag{4.15}$$

Les vecteurs  $\{\delta^e\}$  et  $[A]$  sont donnés par :

$$\{\delta^e\} = \{w_1\beta_{x1}\beta_{y1}w_2\beta_{x2}\beta_{y2}w_3\beta_{x3}\beta_{y3}w_4\beta_{x4}\beta_{y4}\}^T \tag{4.16}$$

$$\{A\} = \{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9a_{10}a_{11}a_{12}\}^T \tag{4.17}$$

La matrice [C] de (12 × 12) éléments est donnée dans l'annexe A2. En suivant le procédé bien connu pour les éléments finis de type de déplacement [ZIE 91], la matrice de rigidité [Ke] de l'élément de plaque est donnée par :

$$[k^e] = [C]^{-T} (\int \int [Q]^T [D] [Q] ds) [C]^{-1} = [C]^{-T} [k_0] [C]^{-1} \tag{4.18}$$

Ainsi la matrice de déformation est donnée par :

$$[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x & x^2 & 0 & 2y & 0 & y^2 & 1 \end{pmatrix}$$

### 4.2 Formulation des éléments de plaque

a) ACM [31], [32] : Elément fini rectangulaire basé sur l'approche en déplacement pour l'étude de la flexion des plaques minces.

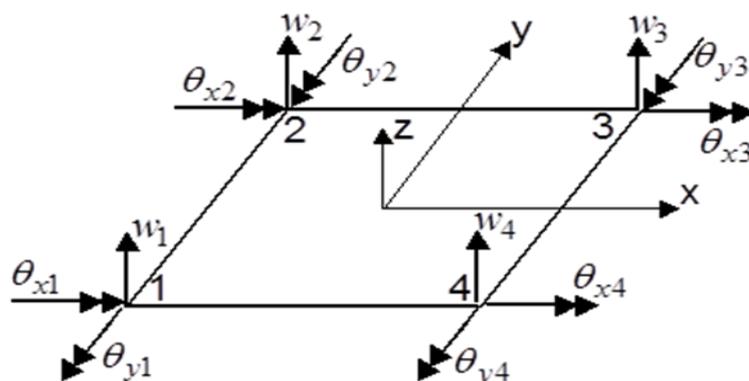


Figure 4.2 : Déplacements nodaux

\* Le champ de déplacement :

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} y^3$$

$$\theta_x = + \frac{\partial w}{\partial y} = (\alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2) \quad (4.10)$$

$$\theta_y = - \frac{\partial w}{\partial x} = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3)$$

**b) SBH8 [27].** : Afin d'éviter l'utilisation des éléments tridimensionnels (hexaédriques et prismatiques) d'ordre élevé pour l'étude de la flexion des plaques, Belarbi et Charif ont développé un nouvel élément hexaédrique simple à huit nœuds avec trois degrés de liberté par nœud (U, V et W) « SBH8 », basé sur le modèle en déformation.

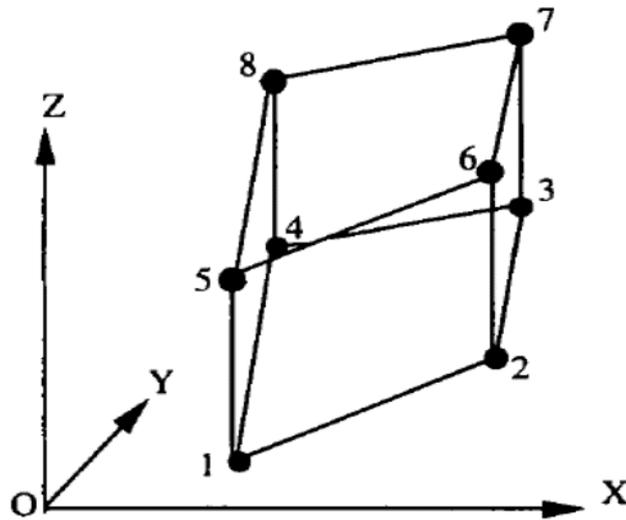


Figure 4.3 : Géométrie de l'élément SBH8

Le champ de déplacement :

$$u = a_1 + a_4 y + a_6 z + a_7 x + a_8 xy + a_9 xz + a_{10} xyz - 0.5a_{12} y^2 - 0.5a_{14} y^2 z - 0.5a_{16} z^2 - 0.5a_{18} yz^2 + 0.5a_{21} z + 0.5a_{23} y + a_{24} yz$$

$$v = a_2 - a_4 x - a_5 z - 0.5a_8 x^2 - 0.5a_{10} x^2 z + a_{11} y + a_{12} xy + a_{13} yz + a_{14} xyz - 0.5a_{17} z^2 - 0.5a_{18} xz^2 + 0.5a_{19} z + a_{20} xz + 0.5a_{23} x \quad (4.11)$$

$$w = a_3 + a_5 y - a_6 x - 0.5a_9 x^2 - 0.5a_{10} x^2 - 0.5a_{13} y^2 - 0.5a_{14} xy^2 + a_{15} z + a_{16} xz + a_{17} yz + a_{18} xyz + 0.5a_{19} y + 0.5a_{21} x + a_{22} xy$$

c) **SBRP [BELO 05]** : élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces et épaisses possède quatre nœuds, avec la nécessité d'avoir trois degrés de liberté pour représenter les mouvements possibles pour chaque des nœuds ( $w, \beta_x, \beta_y$ ), donc cet élément contient douze degrés de liberté.

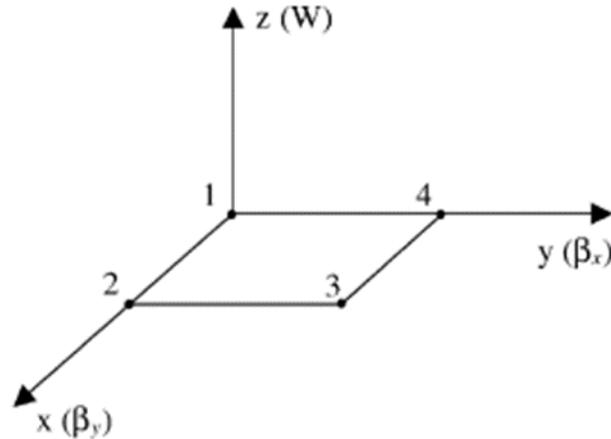


Figure 4.4 : Élément rectangulaire de plaque à quatre nœuds, avec  $W, \beta_x$  et  $\beta_y$  les trois degrés de libertés pour chaque nœud.

**Le champ de déplacement :**

$$\begin{aligned}
 w &= a_1 - a_2x - a_3y - a_4 \frac{x^2}{2} - a_5 \frac{x^2y}{2} - a_6 \frac{y^2}{2} - a_7 \frac{xy^2}{2} - a_8 \frac{xy}{2} + a_9 \frac{x}{2} + a_{10} \frac{xy}{2} + a_{11} \frac{y}{2} + \\
 &\quad a_{12} \frac{xy}{2} \\
 \beta_x &= a_2 + a_4x + a_5xy - a_7 \frac{y^2}{2} + a_8 \frac{y}{2} + \frac{a_9}{2} + a_{10} \frac{y}{2} - a_{12} \frac{y}{2} \\
 \beta_y &= a_3 - a_5 \frac{x^2}{2} + a_6y + a_7xy + a_8 \frac{x}{2} - a_{10} \frac{x}{2} + \frac{a_{11}}{2} + a_{12} \frac{x}{2}
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

### 4.3 Applications

#### 4.3.1 Flexion d'une plaque carrée avec diverses conditions

Pour simplifier la lecture, nous adoptons les notations suivantes :

- PSA\_CCC : Plaque Simplement Appuyée sous Charge Concentrée au Centre.
- PE\_CCC : Plaque Encastrée sous Charge Concentrée au Centre.

On représente le maillage le plus fin du quart de la plaque (figure 4.5).

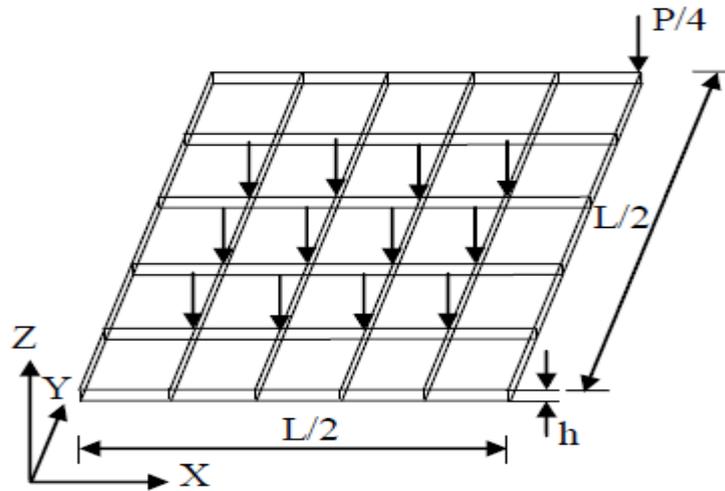


Figure 4.5 : Maillage du quart de la plaque.

#### 4.3.1.1 Plaque encastée sous charge concentrée au centre

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Maillage	Flèche maximale ((WD/PL <sup>2</sup> ).10000)				
	SBH8	SBRP	SBRPS	ACM	SBRPK
2x2	1,078	1,061	1,518	61,337	<b>61.343</b>
4x4	24,204	24,039	25,183	58,022	<b>59.183</b>
8x8	51,216	51,183	48,897	56,722	<b>58.0429</b>
10x10	53,531	53,513	53,692	56,538	<b>57.446</b>
Solution De Kirchhoff	56.00				

Tableau 4.1 : Plaque carrée à deux bords encastés sous charge concentrée au centre.

Convergence de la flèche maximale (PE-CCC ; L=20 ; h=0,2,

$$P=1, \nu=0,3, E=10^6)$$

La solution analytique est donnée par l'équation suivante :

$$PE\_CCC \text{ plaque mince : } \left( W_{ref} = 5.6 \cdot 10^{-3} \frac{PL^2}{D} \right)$$

### 4.3.1.2 Plaque simplement appuyée sous charge concentrée au centre

Les résultats sont présentés dans le tableau suivant :

Maillage	Flèche maximale $((WD/PL^2).10000)$				
	SBH8	SBRP	SBRPS	ACM	<b>SBRPK</b>
2x2	25.566	18.284	17.092	123.553	<b>139.089</b>
4x4	85.63	84.496	83.712	118.297	<b>123.313</b>
8x8	111.674	111.641	101.809	116.703	<b>118.295</b>
10x10	113.756	113.74	117.967	116.465	<b>117.558</b>
Solution De Kirchhoff	117.0				

**Tableau 4.2 : Plaque carrée à deux bords simplement appuyés sous charge concentrée au centre.**

**Convergence de la flèche maximale (PSA-CCC ; L=20 ; h=0,2,**

**P=1,  $\nu=0,3$ , E=10<sup>6</sup>)**

La solution analytique est donnée par l'équation suivante :

$$\text{PSA\_CCC plaque mince : } \left( W_{ref} = 11.7 \cdot 10^{-3} \frac{PL^2}{D} \right)$$

### 4.4 Analyse et interprétation

D'après les résultats présentés dans les tableaux (4.1 et 4.2) ci-dessus, on constate ce qui suit :

- L'élément rectangulaire pour l'étude de la flexion des plaques minces basé sur le modèle en déformation possédant quatre nœuds avec trois degrés de liberté par nœud a été présenté dans cette étude. Les résultats pour les plaques très minces sont très précis et en bon accord avec ceux des solutions analytiques des plaques minces et d'autres résultats disponibles trouvés dans la littérature.
- L'élément ACM converge rapidement vers la solution de référence pour tous les tests.
- Les éléments SBH8, SBRP et SBRPS basés sur la théorie de Reissner-Mindlin présentent une bonne performance pour l'analyse des plaques minces.

# Conclusion générale

La modélisation des plaques comme d'autres domaines de modélisation des structures est devenue très efficace et très rationnelle, c à d on peut arriver à comprendre leurs comportements avec des modèles numériques et atteint des résultats plus corrects.

Les éléments présentés dans cette étude sont : l'élément **SBRPK**, l'élément SBH8, l'élément SBRP, l'élément SBRPS et l'élément ACM, et fondé sur la théorie de plaque. Ces éléments sont différents au niveau du nombre des nœuds et des degrés de liberté. Les éléments (SBRPK, SBRP, SBRPS et ACM) avec quatre nœuds et douze degrés de liberté et l'élément SBH8 avec huit nœuds et vingt quatre degrés de liberté.

Les résultats obtenus à partir de ce travail nous a permis de mettre en évidence certains points, à savoir :

- L'élément SBRPK donne des résultats précis pour la flexion des plaques minces.
- Les éléments SBH8, SBRPS et SBRP basés sur la théorie de Reissner-Mindlin présentent une bonne performance pour l'analyse des plaques minces.
- L'élément ACM présente une grande performance pour l'analyse des plaques minces.
- La performance des éléments basés sur l'approche en déformation a été observée.

# **Bibliographie**

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] : DERBANE SAID « Modélisation des plaques par la méthode des éléments finis » Mémoire de Magister, Département de génie civil et hydraulique, Université Mohamed Khider – Biskra, 2012
- [2] : Turner G. et Dhatt G, ” *Une présentation de la méthode des éléments finis* ”, Eds.P.U.L.Q., France, 1981.
- [3] : LAKHDAR BESSAIS « Analyse des structures par la M.E.F basée sur l’approche en déformation » Mémoire de Magister, Département de Génie Mécanique, Université Mohamed Khider – Biskra, 2012
- [4]: Love A. E. H. « On the small free vibrations and deformations of elastic shells ». Philosophical trans. of the Royal Society (London), 1888, Vol. série A, N° 17.
- [5]: Timoshenko S. « On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars ». Philosophical Magazine, 1921, Vol. 41 (series 6).
- [6]: Timoshenko S. « On on the transverse vibrations of bars of uniform cross-section ». Philosophical Magazine, 1922, Vol. 43 (series 6).
- [7]: Zienkiewicz O.C et Taylor R.L, ”*The Finite element Method*”, McGrawHill, London 1991.
- [8] : SIF EDDINE ABDERRAHMANI « Contribution à la modélisation des plaques par éléments finis non conformes » Thèse de Doctorat, Département de génie civil et hydraulique, Université Mohamed Khider – Biskra, 2017
- [9] SAYAD, Youcef (2012) Modélisation des plaques de formes géométriques irrégulières par la méthode des éléments finis. Masters thesis, Université Mohamed Khider - Biskra.
- [10] K.J. BATHE, D. CHAPELLE, and P.S. Lee « A shell problem 'highly sensitive' to thickness changes. Internat ». J. Numer. Methods Engrg, 2003
- [11] J. PITKÄRANTA, Y. LEINO, O. OVASKAINEN, and J. PIILA. « Shell deformation states and the finite element method: a benchmark study of cylindrical shells ». Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 1995.
- [12] J. SANCHEZ-HUBERT and E. SANCHEZ-PALENCIA. « Coques Elastiques Minces- Propriétés Asymptotiques ». Masson, Paris, 1997.
- [13] G. KIRCHHOFF. Uher das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheibe. Journal fur reine und angewandte Mathematik, vol. 40.

- [14] Rayleigh L. Theory of sound, Vol I et Vol. II. Dover Pub. 1945
- [15] Timoshenko S. On the correction of transverse shear deformation of the differential equations for transverse vibrations of prismatic bars. Philosophical Magazine, 1921, Vol. 41 (series 6) p. 744–746.
- [16] Timoshenko S. On on the transverse vibrations of bars of uniform cross-section. Philosophical Magazine, 1922, Vol. 43 (series 6) p. 125–131.
- [17] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. of Appl. Mech., 1945, Vol. 12 p. A69–A77
- [18] Uflyand Y. S. The propagation of waves in the transverse vibrations of bars and plates. Akad. Nauk. SSSR, Prikl. Mat. Mech., 1948, Vol. 12 p. 287–300.
- [19] Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of Isotropic, elastic plates. Journal of Applied Mechanics, 1951, Vol. 18 p. 31–38.
- [20] : Abderrahmani.S , Contribution à la modélisation des plaques par éléments finis non conformes. Thèse de doctorat, Université Mohamed Khider – Biskra, Mai 2017
- [21] : François Frey, Traité de génie civil de l'école polytechnique fédérale de Lausanne – Volume 3 – Analyse des structures et milieux continus – mécanique des solides, Presses polytechniques et universitaires romandes CH-1015, 1998
- [22]: ZIENKIEWCZ.O.C ET TAYLOR R.L,The Finite Element Method, McGraw-Hill, London 1991
- [23]: Melosh, R.J., A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending, J. Aero-Space Sci., 28 (1961) 34-42
- [24] : ROCKEY Lenneth et William GRIFFITHS « Introduction à la Méthode des éléments Finis », EDITION EYROLLES, édition 1979.
- [25] : Belarbi M.T. et Charif A., Développement d'un nouvel élément hexaédrique simple basé sur le modèle en déformation pour l'étude des plaques minces et épaisses, Revue Européenne des Eléments Finis, Vol. 8, N° 2, pp. 135-157, 1999.

[26]: Belounar L and Guenfoud M, "A New Rectangular finite element based on the strain approach for plate bending", Thin Walled Structures 43 (2005) 4763

# ANNEXES

a/ La matrice  $[K_0]$  pour l'élément SBRPK est donnée par :

$$[K_0] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 & H_7 & H_8 & 0 & 0 \\ & & & & H_9 & H_{10} & H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} & H_{15} & 0 & 0 \\ & & & & & H_{16} & H_{17} & H_{18} & H_{19} & H_{20} & H_{21} & H_{22} & 0 \\ & & & & & & H_{23} & H_{24} & H_{25} & H_{26} & H_{27} & H_{28} & 0 \\ & & & & & & & H_{29} & H_{30} & H_{31} & H_{32} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & H_{33} & H_{34} & H_{35} & H_{36} & 0 \\ & & & & & & & & & H_{37} & H_{38} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & H_{39} & H_{40} & 0 \\ & & & & & & & & & & & H_{41} & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_1 = d_{11}S ; H_2 = d_{11}S_x ; H_3 = d_{11}S_y ; H_4 = d_{11}S_{xy} ; H_5 = d_{12}S ; H_6 = d_{12}S_x$$

$$H_7 = d_{12}S_y$$

$$H_8 = d_{12}S_{xy} ; H_9 = d_{11}S_{xx} ; H_{10} = H_4 ; H_{11} = d_{11}S_{xxy} ; H_{12} = d_{12}S_x ; H_{13} = d_{12}S_{xx}$$

$$H_{14} = d_{12}S_{xy} ; H_{15} = d_{12}S_{xxy} ; H_{16} = d_{33}4S_{xx} + d_{11}S_{yy} ; H_{17} = d_{33}2S_{xxx} + d_{11}S_{xyy}$$

$$H_{18} = d_{11}S_y ; H_{19} = d_{12}S_{xy} + d_{33}4S_{xy} ; H_{20} = d_{12}S_{yy} ; H_{21} = d_{12}S_{xyy} + d_{33}2S_{xyy}$$

$$H_{22} = d_{33}2S_x ; H_{23} = d_{33}S_{xxx} + d_{11}S_{xxy} ; H_{24} = d_{12}S_{xy} ; H_{25} = d_{12}S_{xxy} + d_{33}2S_{xxy}$$

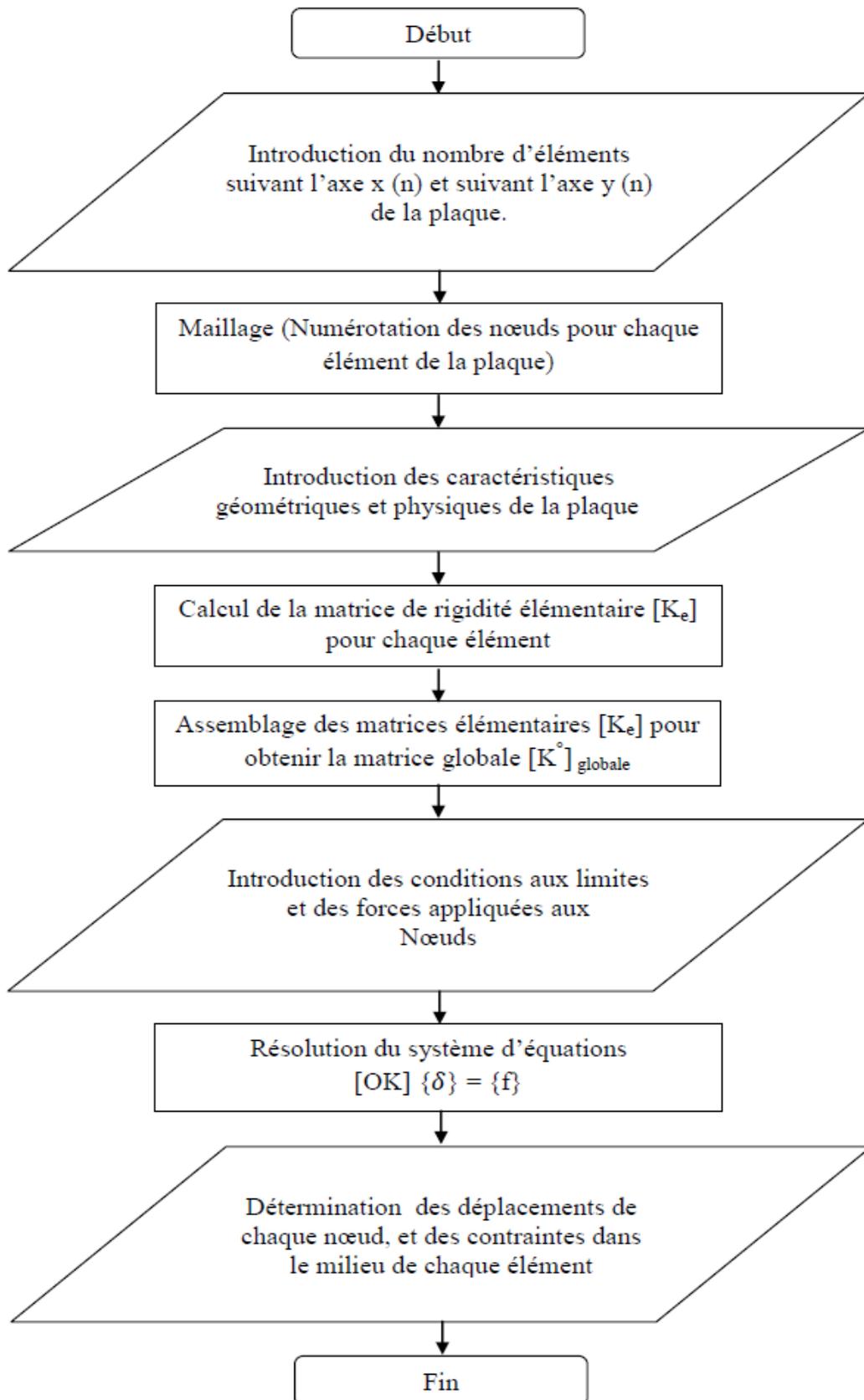
$$H_{26} = d_{12}S_{xyy} ; H_{27} = d_{12}S_{xxyy} + d_{33}S_{xxyy} ; H_{28} = d_{33}S_{xx} ; H_{29} = d_{22}S ; H_{30} = d_{22}S_x$$

$$H_{31} = d_{22}S_y ; H_{32} = d_{22}S_{xy} ; H_{33} = d_{22}S_{xx} + d_{33}4S_{yy} ; H_{34} = d_{22}S_{xy}$$

$$H_{35} = d_{22}S_{xxy} + d_{33}2S_{xyy} ; H_{36} = d_{33}2S_y ; H_{37} = d_{22}S_{yy} ; H_{38} = d_{22}S_{xyy}$$

$$H_{39} = d_{22}S_{xxyy} + d_{33}S_{yyyy} ; H_{40} = d_{33}S_{yy} ; H_{41} = d_{33}S$$

L'organigramme pour l'étude de la flexion des plaques est donnée par :



**Fichier de donnée du programme de calcul en FORTRAN 77 pour l'élément SBRPK pour un maillage de 2X2.**

\*ABDERRAHMANI

\*\*\*PRECISION

1E50

\*\*\*TITRE

CALCUL D une plaque ret

\*\*\*DEFINITION

9 NTNO

4 NTEL

8 NTDI

1 NTFI

15 LB

6 ICCC

\*\*\*UNITE

M N

\*\*\*DONNEE

\*COO

0. 0.

10. 0.

20. 0.

0. 10.

10. 10.

20. 10.

0. 20.

10. 20.

20. 20.

\*CON

1 2 5 4

4 5 8 7

2 3 6 5

5 6 9 8

\*SECTION

0.2

\*MAT

1000000 0.3

\*DEPLACEMENT IMPOSE

1 1 0

2 1 0

3 1 0

4 1 0

6 1 0

7 1 0

8 1 0

9 1 0

\*FORCES IMPOSEES

5 1 1.

\*\*\*DEP

\*\*\*EFF

\*\*\*FIN

**Fichier des résultats du programme de calcul en FORTRAN 77 pour l'élément SBRPK pour un maillage de 2X2.**

\*\*\*\*\*

\*\* CALCUL D une plaque ret \*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\* \*\*

\*\*\* DEFINITION DU PROBLEME \*\*\*

\*\*\* \*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\* \*\*

\*\*\* NOMBRE TOTALE DES NOEUDS 9 \*\*\*

\*\*\* \*\*

\*\*\* NOMBRE TOTALE D ELEMENTS 4 \*\*\*

\*\*\* \*\*

\*\*\* NOMBRE DES DEPLACEMENTS IMPOSES 8 \*\*\*

\*\*\* \*\*

\*\*\* NOMBRE DES FORCES IMPOSEES 1 \*\*\*

\*\*\* \*\*

\*\*\* LARGEUR DE BANDE 15 \*\*\*

\*\*\* \*\*

\*\*\* POINTS DE CONTRAINTES A CHOISIR 6 \*\*\*

```
***                               ***

*****

*****

*****   U N I T E S   ***

*****

***                               ***

*** M N                               ***

*****

*****

*****   C O O R D O N N E E S   *****

*****

*****                               *****

*****   C O O R D >>>> 1 >>>> X   *****

*****   C O O R D >>>> 2 >>>> Y   *****

*****

*****

*** NOEUD *** COORD >>> 1 * COORD >>> 2 *

*****

***   1 *** .00000E+00 * .00000E+00 *

***   2 *** .10000E+02 * .00000E+00 *

***   3 *** .20000E+02 * .00000E+00 *

***   4 *** .00000E+00 * .10000E+02 *

***   5 *** .10000E+02 * .10000E+02 *

***   6 *** .20000E+02 * .10000E+02 *
```

\*\*\* 7 \*\*\* .00000E+00 \* .20000E+02 \*  
\*\*\* 8 \*\*\* .10000E+02 \* .20000E+02 \*  
\*\*\* 9 \*\*\* .20000E+02 \* .20000E+02 \*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* CONNEXIONS \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\* ELEMENT \*\*\* NOEUD >>> 1 \* NOEUD >>> 2 \* NOEUD >>> 3 \* NOEUD >>> 4  
\*

\*\*\*\*\*

***	1	***	1	*	2	*	5	*	4	*
***	2	***	4	*	5	*	8	*	7	*
***	3	***	2	*	3	*	6	*	5	*
***	4	***	5	*	6	*	9	*	8	*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* SECTIONS \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\* CONSTANTES LE LONG DE L ELEMENT \*\*\*\*\*

```
*****
*****
***** SECTION - 1 ==>>> EPAISSEURE *****
*****
*****
***** TOUTE LES ELEMENTS POSSEDENTS LES *****
***** MEME CARACTERISTIQUES DE SECTIONS *****
*****
*****
*****
*****
*****
***** ELEMENT ***** SECT >>> 1 *
*****
*****
***** 1 ***** .20000E+00 *
*****
*****
*****
***** CARACTERISTIQUES DU MATERIAU *****
*****
*****
***** *****
*****
***** MODULE - 1 ==>>>> YOUNG1 *****
***** MODULE - 2 ==>>>> POISSON1 *****
***** MODULE - 3 ==>>>> GAMA *****
***** MODULE - 4 ==>>>> YOUNG2 *****
***** MODULE - 5 ==>>>> POISSON2 *****
***** MODULE - 6 ==>>>> CISAILLEMENT2 *****
***** MODULE - 7 ==>>>> BETA *****
```

```
*****
*****
***** TOUTE LES ELEMENTS POSSEDENTS LES *****
***** MEME CARACTERISTIQUES DE MATERIAUX *****
*****
*****
```

```
*****
```

```
*****
```

```
*** ELEMENT *** MODULE >> 1 * MODULE >> 2 *
```

```
*****
```

```
*** 1 *** .10000E+07 * .30000E+00 *
```

```
*****
```

```
*****
```

```
***** DEPLACEMENTS IMPOSES *****
```

```
*****
```

```
*****
```

```
*** NOEUD *** DIERCTION * VALEUR *
```

```
*****
```

```
*** 1 *** 1 * .00000E+00 *
```

```
*** 2 *** 1 * .00000E+00 *
```

```
*** 3 *** 1 * .00000E+00 *
*** 4 *** 1 * .00000E+00 *
*** 6 *** 1 * .00000E+00 *
*** 7 *** 1 * .00000E+00 *
*** 8 *** 1 * .00000E+00 *
*** 9 *** 1 * .00000E+00 *
```

```
*****
*****
***** FORCES IMPOSEES *****
*****
*****
```

```
*** NOEUD ** DIRECTION * VALEUR *
```

```
*****
*****
*** 5 *** 1 * .10000E+01 *
*****
*****
*****
***** DEPLACEMENTS *****
*****
*****
*****
```

\*\*\*\*\*

```

*      *      *      *      *
* NODE *   W   *   Bx   *   By   *
*      *      *      *      *

```

\*\*\*\*\*

```

* 1 * -.45781E-53 * -.83849E-04 * -.83848E-04 *

```

```

*-----*-----*-----*-----*

```

```

* 2 * .18447E-52 * .41219E-09 * -.10427E-02 *

```

```

*-----*-----*-----*-----*

```

```

* 3 * -.45781E-53 * .83848E-04 * -.83849E-04 *

```

```

*-----*-----*-----*-----*

```

```

* 4 * .18447E-52 * -.10427E-02 * .71025E-09 *

```

```

*-----*-----*-----*-----*

```

```

* 5 * .75943E-02 * -.26445E-10 * -.24176E-09 *

```

```

*-----*-----*-----*-----*

```

```

* 6 * .18447E-52 * .10427E-02 * -.11336E-09 *

```

```

*-----*-----*-----*-----*

```

```

* 7 * -.45780E-53 * -.83849E-04 * .83848E-04 *

```

```

*-----*-----*-----*-----*

```

```

* 8 * .18447E-52 * -.45368E-09 * .10427E-02 *

```

```

*-----*-----*-----*-----*

```

```

* 9 * -.45781E-53 * .83848E-04 * .83848E-04 *

```

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*                    **CONTRAINTES**                    \*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*

```

*  n *           *           *           *

```

```

*elt*o * Mx * My * Mxy * Tx * Ty *
* *d* * * *
*****
* 1* 0 * -.26352D-01 * -.26352D-01 * -.53303D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *
* 1* 1 * .31942D-01 * .31942D-01 * -.59400D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *
* 1* 2 * -.20762D-01 * -.31942D-01 * -.10228D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *
* 1* 5 * -.84647D-01 * -.84646D-01 * .38945D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *
* 1* 4 * -.31942D-01 * -.20762D-01 * -.10228D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *
* 2* 0 * .29364D+00 * .29364D+00 * .53304D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *
* 2* 4 * -.31942D-01 * -.20763D-01 * .10228D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *
* 2* 5 * .55534D+00 * .55534D+00 * -.38945D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *
* 2* 8 * .61922D+00 * .60804D+00 * .10228D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *
* 2* 7 * .31942D-01 * .31942D-01 * .59400D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *
* 3* 0 * .29364D+00 * .29364D+00 * .53303D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *
* 3* 2 * -.20762D-01 * -.31942D-01 * .10228D-01 * .00000D+00 * .00000D+00 *
*__*_*_____ *_____ *_____ *

```

