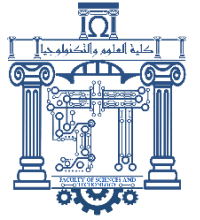




الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
Republique Algerienne Democratique Et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة العربي التبسي - تبسة

Université Larbi Tébessi – Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie civil

## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme de Master Académique**

En : **Science et Technologie**

Spécialité : **Génie Civil STRUCTURE**

Par : HAMPLA Ines

Sujet

# ETUDE DE L'EFFET DE LA TEMPERATURE SUR LE COMPORTEMENT VIBRATOIRE DES PLAQUES COMPOSITES STRATIFIEES

Présenté et soutenu publiquement, le 12 / 06 / 2022, devant le jury composé de :

M. Djamel BOUTAGOUGA

Professeur

Président

M. Mohamed-Lamine SALHI

MAA

Rapporteur

M. Brahim ATHAMNIA

MCB

Examineur 1

Promotion : 2021/2022

# *Dédicace*

*A mes chers parents qui m'ont soutenu, encouragé et sacrifié pour moi durant ces années d'études,*

*A mon frère et ma sœur pour leurs encouragements permanents, et leur soutien moral,*

*A toute ma famille,*

*A ma deuxième famille de H. E. S. Tébessa basket ballé, à mon coach Mohamed Ali ZARFAOUI pour leur soutien tout au long de mon parcours universitaire,*

*A mes chers amis et mes frères pour leurs messages motivants, leur soutien et leurs encouragements,*

*Je vous dédie le fruit de mes 17 années d'études, merci d'être toujours là pour moi.*

*... Que Dieu te bénisse ...*

# Remerciement

*Grand remerciement à ALLAH LE TOUT PUISSANT de nous avoir aidé et éclairé dans notre travail.*

*La présentation de ce modeste travail me donne l'occasion d'exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Mohamed Lamine SALHI, mon directeur de mémoire. Je tiens à le remercier pour ce sujet intéressant et pour la confiance qu'il m'a accordée, ses nombreux conseils n'ont jamais été laisse-moi tomber. Je suis heureux de lui exprimer ici ma profonde gratitude.*

*Je remercie également M. Djamel BOUTAGOUGA et M. Brahim ATHAMNIA qui ont accepté de juger mon travail.*

*Je voudrais également profiter de ce travail et exprimer mes remerciements, ma gratitude et mon respect à tous mes enseignants et administrateurs du Département de Génie civil de l'Université Larbi Tbessi, Tébessa.*

*Enfin, je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé de près ou de loin ou même par un mot d'encouragement.*

## La liste de notations et symbole

| Les symboles                   | Les Notations   |
|--------------------------------|---|
| [...]                          | Matrice   |
| { }                            | Vecteur   |
| $[...]^{-1}$                   | Matrice inverse   |
| $[...]^T$                      | Matrice transposée  |
| $\int$                         | Intégrale   |
| $\sum$                         | La somme  |
| $h$                            | Epaisseur de la plaque                                      |
| $[C]$                          | Matrice de rigidité   |
| $[S]$                          | Matrice de souplesse  |
| $[Q'_{ij}]$                    | La matrice de rigidité réduite hors axes principaux         |
| $[T]$                          | La matrice de changement                                    |
| $v_c$                          | Volume de matériau composite                                |
| $v_f$                          | Volume de fibre   |
| $v_m$                          | Volume de matrice   |
| $V_m$                          | Fraction volumique de matrice                               |
| $V_f$                          | Fraction volumique de fibre                                 |
| $\varepsilon_f$                | Déformation de fibre  |
| $\varepsilon_m$                | Déformation de matrice                                      |
| $\varepsilon_c$                | Déformation de composite                                    |
| $\sigma_f, \sigma_m, \sigma_c$ | Contrainte suivant (fibre, matrice, composite).             |
| $A_m, A_f$                     | Les Aries des sections droites de la fibre et de la matrice |
| $E_1$                          | Module de Young longitudinale                               |
| $E_2$                          | Module de Young transversale                                |
| $G_{ij}$                       | Module de cisaillement longitudinal                         |
| $\nu_{ij}$                     | Coefficient de Poisson longitudinal                         |
| $\sigma_{ij}$                  | Des contraintes   |
| $\varepsilon_{ij}$             | Des déformations  |
| { $\sigma$ }                   | Vecteur des contraintes                                     |
| { $\varepsilon$ }              | Vecteur des déformations                                    |
| $S_{ijkl}$                     | Tenseur de souplesse  |
| $C_{ijkl}$                     | Tenseur d'élasticité  |
| $u, v$                         | Déplacement suivante x, y                                   |
| $w$                            | Déplacement suivante z                                      |
| $\theta_x, \theta_y$           | Rotation autour x et y                                      |
| $K$                            | Nom de la couche  |
| $\theta$                       | Angle d'orientation des fibres                              |
| $Q_x$                          | Force de cisaillement dans la direction x                   |
| $Q_y$                          | Force de cisaillement dans la direction y                   |
| $M_x, M_y$                     | Moments de flexion suivant les directions x et y            |
| $M_{xy}$                       | Moment de torsion   |
| $N_x, N_y$                     | Contraintes Normales  |
| $N_{xy}$                       | Contrainte de cisaillement                                  |

|  |   |
|--|---|
| $[A_{ij}]$   | Matrice de rigidité en membrane                           |
| $[B_{ij}]$   | Matrice de couplage membrane-flexion-torsion.             |
| $[H_{ij}]$   | Matrice de rigidité en flexion                            |
| $[D_{ij}]$   | Matrice de cisaillement                                   |
| $U$  | Champs des déplacements                                   |
| $F_{ij}$   | Cisaillement hors plan                                    |
| $K_{ij}$   | Facteur de correction en cisaillement                     |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$                         | Contrainte normales                                       |
| $\varepsilon_x$  | Déformation dans les directions x                         |
| $\varepsilon_y$  | Déformation dans les directions y                         |
| $\varepsilon_z$  | Déformation dans les directions z                         |
| $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0$ | Déformation membranaire                                   |
| $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$                             | Résultante de cisaillement                                |
| $\phi_x, \phi_y$                                       | Les rotations des sections droites autour des axes x et y |
| $\gamma_{xz}^0, \gamma_{yz}^0$                         | La déformation en cisaillement moyenne                    |
| $Q_{ij}^0$   | Coefficient de rigidité                                   |
| $h_k$  | Partie supérieure de l'épaisseur de la plaque stratifiée  |
| $h_{k-1}$  | Partie inférieure de l'épaisseur de la plaque stratifiée  |
| $\alpha_1$   | Le coefficient de dilatation thermique longitudinal       |
| $\alpha_2$   | Le coefficient de dilatation thermique transversal        |
| $\omega$   | La fréquence de vibration                                 |
| $\bar{\omega}$   | La fréquence propre de vibration                          |
| $\Delta T$   | La variation de température                               |
| $a$  | Longueur de la plaque                                     |
| $b$  | Largeur de la plaque                                      |
| $a/b$  | Rapport de la longueur sur la largeur de la plaque        |
| $h$ et $t$   | L'épaisseur de la plaque                                  |
| $a/h$  | Rapport de la longueur sur l'épaisseur                    |

**Les abréviations:**

**CPT:** classical plate theory.

**FSDT:** first –ordre shear deformation plate theory.

**HDST:** High-order Shear Deformation Plate Theory.

**CCCC :** encastrée sur les quatre côtes.

**SSSS :** simplement appuyée sur les quatre côtes.

## La liste des tableaux

### Chapitre V : Modélisation Des Plaques Composites Stratifiées

|  |    |
|--|----|
| <b>Tableau 5. 1</b> Les unités dans ABAQUS [58] .....  | 51 |
| <b>Tableau 5. 2</b> Les conditions aux limites .....   | 51 |
| <b>Tableau 5. 3</b> Convergence de la fréquence propre $\bar{\omega}$ de plaques isotropes avec $a/h = 10$ . .....   | 52 |
| <b>Tableau 5. 4</b> Convergence de la fréquence propre $\bar{\omega}$ de plaques isotropes avec $a/h = 100$ .....  | 52 |
| <b>Tableau 5. 5</b> Convergence des fréquences propres d'une plaque (0°/90°/0°) encastée. ....   | 54 |
| <b>Tableau 5. 6</b> Convergence des fréquences propres d'une plaque (0°/90°/0°) simplement appuyée.....  | 54 |
| <b>Tableau 5. 7</b> Effet de la température et du rapport d'épaisseur sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée (0°/90°/0°) simplement appuyée .....                                  | 56 |
| <b>Tableau 5. 8</b> Propriétés du T300/5208 et l'AS4/3501-6 [64]. .....  | 57 |
| <b>Tableau 5. 9</b> Effet de la température et du rapport d'épaisseur sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée (0°/90°/0°) simplement appuyée (matériau : T300/5208). .....          | 57 |
| <b>Tableau 5. 10</b> Effet de la température et du rapport d'épaisseur sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée (0°/90°/0°) simplement appuyée (matériau : AS4/3501-6). .....        | 57 |
| <b>Tableau 5. 11</b> Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées .....  | 59 |
| <b>Tableau 5. 12</b> Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées [0°] <sub>s</sub> .....  | 59 |
| <b>Tableau 5. 13</b> Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées [15°] <sub>s</sub> .....   | 60 |
| <b>Tableau 5. 14</b> Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées [30°] <sub>s</sub> .....   | 60 |
| <b>Tableau 5. 15</b> Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées [45°] <sub>s</sub> .....   | 60 |
| <b>Tableau 5. 16</b> Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées [0 <sub>2</sub> /90 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> avec un rapport d'aspect $a/b = 1.0$ . ..... | 63 |
| <b>Tableau 5. 17</b> Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées [90 <sub>2</sub> /0 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> avec un rapport d'aspect $a/b = 1.0$ . ..... | 63 |
| <b>Tableau 5. 18</b> Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées [0 <sub>2</sub> /90 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> avec un rapport d'aspect $a/b = 1.5$ . ..... | 63 |
| <b>Tableau 5. 19</b> Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées [90 <sub>2</sub> /0 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> avec un rapport d'aspect $a/b = 1.5$ . ..... | 64 |
| <b>Tableau 5. 20</b> Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées [0 <sub>2</sub> /90 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> avec un rapport d'aspect $a/b = 2.0$ . ..... | 64 |
| <b>Tableau 5. 21</b> Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées [90 <sub>2</sub> /0 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> avec un rapport d'aspect $a/b = 2.0$ . ..... | 64 |
| <b>Tableau 5. 22</b> Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées [0 <sub>2</sub> /90 <sub>2</sub> ] <sub>s</sub> un rapport d'aspect $a/b = 2.5$ .....        | 65 |

**Tableau 5. 23** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[90_2/0_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 2.5$ . .....65

**Tableau 5. 24** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[0_2/90_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 3.0$ . .....65

**Tableau 5. 25** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[90_2/0_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 3.0$ . .....66

## **La liste des figures**

**Figure 1** Matériaux composites dans le secteur de l'Aéronautique [2] ..... 1

**Figure 2** Pourcentage d'utilisation des matériaux composites dans l'industrie aéronautique [3].....2

**Figure 3** Matériaux composites dans le secteur de l'Aérospatial [6].....2

**Figure 4** Matériaux composites dans le secteur de l'industrie automobile [1].....3

**Figure 5** La place des matériaux composites dans une automobile en 2014 [1] .....3

**Figure 6** Matériaux composites dans le secteur de Sport [5].....4

**Figure 7** Les matériaux composites dans le secteur de Médical [6] .....4

**Figure 8** Les matériaux composites dans le secteur de Génie Civil (vue intérieur d'un pont). [6].....5

**Figure 9** Les matériaux composites dans le secteur Naval [7] .....5

**Figure 10** Marché des composites réparti selon les applications [8] .....5

## **Chapitre I : Généralité Sur Les Matériaux Composites**

**Figure 1. 1** Les matériaux composites [9] .....7

**Figure 1. 2** Composants de matériaux composites.....8

**Figure 1. 3** Les différentes types de matrice ..... 8

**Figure 1. 4** Tissu de fibre de verre [9] .....10

**Figure 1. 5** Tissu de fibre de carbone [15] ..... 10

**Figure 1. 6** Composites sandwiches [17] ..... 11

**Figure 1. 7** Pli à renforcement unidirectionnel [16]..... 12

**Figure 1. 8** Les constituants d'un composite stratifié [20]..... 12

**Figure 1. 9** Composite stratifiée [21] ..... 12

**Figure 1. 10** Stratifié équilibré ..... 13

**Figure 1. 11** Stratifié symétrique ..... 13

**Figure 1. 12** Stratifié antisymétrique ..... 13

**Figure 1. 13** Stratifié Croisé $[0_2/90_2]$  .....14

**Figure 1. 14** Stratifié Hybride (V : verre, C : carbone) ..... 14

## Chapitre II : Comportement Des Plaques Composites Stratifiées

|  |    |
|--|----|
| <b>Figure 2. 1</b> Elément plaque [23] .....   | 16 |
| <b>Figure 2. 2</b> Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel [25] .....           | 17 |
| <b>Figure 2. 3</b> Schéma simplifié d'une traction longitudinale. ....                     | 18 |
| <b>Figure 2. 4</b> Schéma simplifié d'une traction transversale. ....                      | 19 |
| <b>Figure 2. 5</b> Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal. ....          | 20 |
| <b>Figure 2. 6</b> Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée [28]. .... | 26 |

## Chapitre III : Les Théories Des Plaques Composites Stratifiées

|  |    |
|--|----|
| <b>Figure 3. 1</b> Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiées [9]... ..                 | 29 |
| <b>Figure 3. 2</b> Schématisation des résultantes en membrane, des moments de flexion et de torsion [31] .                       | 32 |
| <b>Figure 3. 3</b> Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque selon l'hypothèse de Reissner-Mindlin [28] ..... | 36 |
| <b>Figure 3. 4</b> Schématisation des résultantes en membrane [9].....   | 38 |
| <b>Figure 3. 5</b> Schématisation des moments de flexion et de torsion [9] .....   | 38 |
| <b>Figure 3. 6</b> Schématisation des résultantes en cisaillement [9] .....  | 39 |

## Chapitre V : Modélisation Des Plaques Composites Stratifiées

|  |    |
|--|----|
| <b>Figure 5. 1</b> Différent type d'éléments disponibles dans la bibliothèque d'ABAQUS [55].....   | 51 |
| <b>Figure 5. 2</b> Les deux premiers modes de vibration de plaque isotrope carrée. ....  | 53 |
| <b>Figure 5. 3</b> Les deux premiers modes de vibration de plaque composite stratifiée carrée STRI65.....  | 55 |
| <b>Figure 5. 4</b> Les deux premiers modes de vibration de plaque composite stratifiée carrée S8R, S4R....   | 55 |
| <b>Figure 5. 5</b> Les deux premiers modes de vibration de plaque composite stratifiée carrée simplement appuyée pour les deux matériaux (T300/5208 Graphite/Epoxy et l'AS4/3501-6 Graphite/Epoxy). .... | 58 |
| <b>Figure 5. 6</b> Effet de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées équilibrées simplement appuyée(SS). ....  | 61 |
| <b>Figure 5. 7</b> Effet de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées équilibrées encastées (CC). ....  | 62 |
| <b>Figure 5. 8</b> Effets du rapport d'aspect (a/b) sur les fréquences propres de vibration de plaque simplement appuyées (SS) pour le matériau T300/5208. ....  | 66 |
| <b>Figure 5. 9</b> Effets du rapport d'aspect (a/b) sur les fréquences propres de vibration de plaque simplement appuyées (SS) pour le matériau AS4/3501-6. ....   | 66 |
| <b>Figure 5. 10</b> Effets du rapport d'aspect (a/b) sur les fréquences propres de vibration de plaque encastée (CC) pour le matériau T300/5802. ....  | 67 |
| <b>Figure 5. 11</b> Effets du rapport d'aspect (a/b) sur les fréquences propres de vibration de plaque encastée (CC) pour le matériau AS4/3501-6. ....   | 68 |



## ملخص

تعتبر المواد المركبة واحدة من أكثر التطورات التكنولوجية الواعدة في مجال المواد اليوم. حيث أصبحت تقنية المواد المركبة عصرية، وشهدت توسعا غير عادي بسبب المزايا الرائعة التي توفرها هذه المواد. وبالتالي، يتزايد استخدامها يوما بعد يوم مقارنة بالمواد التقليدية، في جميع المجالات الصناعية تقريبا، مثل: الطيران، والفضاء، والسيارات وبناء السفن، وحتى الهندسة المدنية، إلخ. تخضع الهياكل المصنوعة من مواد مركبة وخاصة الألواح ذات الطبقات لحمولات حرارية يمكن أن تؤثر بشكل كبير على سلوك هذا النوع من الهياكل.

الهدف من هذا العمل هو دراسة تأثير درجة الحرارة على السلوك الاهتزازي للصفائح ذات الطبقات باستخدام برنامج ABAQUS والذي يعتمد في طريقة عمله على العناصر المنتهية. في هذا العمل، تم تقديم دراسة بارامترية مكثفة عن السلوك الاهتزازي للصفائح ذات الطبقات.

خلال هذا العمل، تم الأخذ بعين الاعتبار العديد من الخصائص الميكانيكية، مثل نوع المادة، الشروط الحدية، تقسيم الطبقات، أبعاد الصفائح، السمك، وتأثير درجة الحرارة على خصائص المواد. حيث أوضحت نتائج الدراسة أنه في معظم الحالات تقل الترددات الطبيعية للاهتزاز مع زيادة درجة الحرارة.

من ناحية أخرى، إذا كانت درجة الحرارة المفروضة على الصفائح تتساوى مع درجة حرارة الانبعاج الحرجة، فإن الترددات الطبيعية تؤول الى الصفر.

**الكلمات المفتاحية:** المواد المركبة، الصفائح ذات الطبقات، تأثير الحرارة، الاهتزازات، العناصر المنتهية.

## Résumé

L'une des avancées technologiques la plus prometteuse, de nos jours, dans le domaine des matériaux sont les "matériaux composites". La technologie des composites est devenue tendance, elle a vu une expansion extraordinaire du fait des avantages remarquables qu'offrent ces matériaux. Par conséquent, leur utilisation prend, de jour en jour, de l'ampleur vis-à-vis des matériaux traditionnels, dans pratiquement tous les domaines industriels, en l'occurrence : l'aéronautique, l'aérospatial, les constructions automobiles et navales, génie civil, etc. La plupart du temps, les structures en matériaux composites et en particulier les plaques stratifiées sont sujettes à de sérieux chargements thermiques qui peuvent affecter significativement le comportement de ce type de structures.

L'objectif de ce travail est d'étudier l'effet de la température sur le comportement vibratoire des plaques stratifiées composites en utilisant le logiciel ABAQUS basé sur la méthode des éléments finis. Dans ce travail, une intensive étude paramétrique sur le comportement vibratoire des plaques stratifiées est présentée.

Au cours de ce travail, plusieurs paramètres ont été pris en considération, tel que, le type du matériau, les conditions aux limites, la séquence d'empilement le rapport d'aspect, le rapport d'épaisseur, et la dépendance des propriétés matérielles à la température. L'étude a montré que, dans la plupart des cas, les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la température. D'autre part, si la température infligée à la plaque coïncide avec la température critique de flambement, les fréquences propres tendent vers zéro.

**Mots clés :** matériaux composite, plaques stratifiées, effet de la température, vibration, éléments finis.

## **Abstract**

One of the most promising technological advances in the field of materials today is "composite materials". The technology of composites has become a trend and has seen an extraordinary expansion due to the remarkable advantages that these materials offer. As a result, their use is becoming more and more important compared to traditional materials, in practically all industrial fields, in this case: aeronautics, aerospace, automobile and shipbuilding, civil engineering, etc. Most of the time, composite structures and in particular laminated sheets are subject to severe thermal loading that can significantly affect the behavior of this type of structures.

The objective of this work is to study the effect of temperature on the vibratory behavior of composite laminated plates using ABAQUS software based on the finite element method. In this work, an intensive parametric study on the vibratory behavior of laminated plates and presented.

In this study, several parameters were taken into account, such as, material type, boundary conditions, stratification, aspect ratio, and thickness ratio, the effect of the temperature-dependent-properties and the presence of cutouts. The study showed that in most cases the natural frequencies of vibration decreases with the increasing in temperature. On the other hand, if the temperature imposed to the plate coincides with the critical temperature of buckling, the natural frequencies tend to zero.

**Key words:** composite materials, laminated plates, effect of temperature, vibration, finite elements.

# Table des Matières

|                            |      |
|----------------------------|------|
| Remerciement.....          | I    |
| Liste des symboles.....    | II   |
| Liste des tableaux.....    | IV   |
| Liste des figures.....     | V    |
| ملخص.....                  | VII  |
| Résumé .....               | VIII |
| Abstract .....             | IX   |
| Table des matières.....    | X    |
| Introduction générale..... | 1    |

## Chapitre I : Généralité Sur Les Matériaux Composites

|       |   |    |
|-------|---|----|
| 1     | Introduction :.....                           | 7  |
| 2     | Historique :.....                             | 7  |
| 3     | Définition :.....                             | 7  |
| 4     | Constituants d'un matériau composite :.....   | 7  |
| 4.1   | Les matrices :.....                           | 8  |
| 4.1.1 | Les matrices organiques : .....               | 8  |
| a.    | Les matrices thermodurcissables : .....       | 8  |
| b.    | Les matrices thermoplastiques : .....         | 9  |
| 4.1.2 | Les matrices métalliques :.....               | 9  |
| 4.1.3 | Les matrices céramiques :.....                | 9  |
| 4.2   | Les renforts :.....                           | 9  |
| 4.2.1 | Principaux renforts :.....                    | 9  |
| a.    | Fibres de verre :.....                        | 9  |
| b.    | Fibres de carbone :.....                      | 10 |
| c.    | Fibres d'aramide :.....                       | 10 |
| 6     | Les caractéristiques générales :.....         | 11 |
| 7     | Architecture des matériaux composites : ..... | 11 |
| 7.1   | Les Sandwiches :.....                         | 11 |
| 7.2   | Les monocouches :.....                        | 12 |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 7.3   | Les Stratifiées : .....                                      | 12 |
| 7.3.1 | Les orientations des fibres de composite stratifiées : ..... | 12 |
| 8     | Les avantages des matériaux composites : .....               | 14 |
| 9     | Les inconvénients des matériaux composites : .....           | 14 |
| 10    | Conclusion : .....   | 15 |

## Chapitre II : Comportement des plaques composites stratifiées

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1     | Introduction : .....   | 16 |
| 2     | Comportement des plaques stratifiées : .....   | 16 |
| 3     | Loi de comportement des stratifiées : .....  | 16 |
| 4     | Les caractéristiques mécaniques d'un pli composite (mélange renfort matrice) : ..... | 17 |
| 4.1   | Module d'Young longitudinal $E_1$ : .....  | 18 |
| 4.2   | Modules de Young transversal $E_2$ : .....   | 19 |
| 4.3   | Coefficient de Poisson longitudinal $\nu_{12}$ : .....                               | 20 |
| 5     | La relation contrainte - déformation : .....   | 21 |
| 5.1   | Différents Types des matériaux : .....   | 22 |
| 5.1.1 | Matériaux anisotropes : .....  | 22 |
| 5.1.2 | Matériaux orthotropes : .....  | 23 |
| 5.1.3 | Matériaux transversalement isotropes (unidirectionnels) : .....                      | 24 |
| 5.1.4 | Matériaux isotropes : .....  | 24 |
| 6     | Relation contrainte-déformation plane : .....  | 25 |
| 7     | Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres : .....              | 26 |
| 8     | Conclusion : .....   | 27 |

## Chapitre III : Les théories des plaques composites stratifiées

|       |  |    |
|-------|--|----|
| 1     | Introduction : .....                                     | 28 |
| 2     | Historique des plaques : .....                           | 28 |
| 3     | Théorie classique des stratifiées (CLT) : .....          | 28 |
| 3.1   | Les hypothèses de la Théorie de Kirchhoff : .....        | 28 |
| 3.2   | Relation déformations-déplacements (Cinématique) : ..... | 29 |
| 3.3   | Expression des résultantes et des moments : .....        | 30 |
| 3.3.1 | Résultantes en membrane : .....                          | 30 |
| 3.3.2 | Moment de flexion et de torsion : .....                  | 31 |
| 4     | Influence de l'empilement des couches : .....            | 33 |
| 4.1   | Couche isotrope : .....                                  | 33 |

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 4.2 | Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux : ..... | 33 |
| 4.3 | Couche orthotrope non rapportée à ses axes : .....        | 33 |
| 5   | Les type de stratifiée : .....                            | 34 |
| 5.1 | Stratifiés symétriques : .....                            | 34 |
| 5.2 | Stratifiés croisés : .....                                | 34 |
| 5.3 | Stratifiés croisés symétriques : .....                    | 35 |
| 5.4 | Stratifiés antisymétriques : .....                        | 35 |
| 5.5 | Stratifiés croisés antisymétriques : .....                | 35 |
| 6   | La théorie de premier ordre (FSDT) : .....                | 36 |
| 6.1 | Le champ des déformations en membrane-flexion : .....     | 37 |
| 6.2 | Le champ des déformation en membrane-flexion :.....       | 37 |
| 6.3 | les efforts résultants en membrane et flexionnelle :..... | 38 |
| 6.4 | Equation constitutive :.....                              | 39 |
| 7   | Conclusion :.....   | 41 |

## Chapitre IV : Effets de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1   | Introduction : .....   | 42 |
| 2   | Synthèse bibliographique : .....   | 42 |
| 3   | Comportement dynamiques des plaques stratifiées en matériaux composites :..... | 44 |
| 3.1 | Relations fondamentales des plaques dans un schéma du premier ordre :.....     | 44 |
| 3.2 | Relations fondamentales relatives aux résultantes en membrane :.....           | 44 |
| 3.3 | Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement :.....          | 44 |
| 3.4 | Relations fondamentales relatives aux moments :.....                           | 44 |
| 4   | Lois de comportement :.....  | 45 |
| 5   | Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées :.....     | 46 |
| 6   | Matrice de rigidité élémentaire et vecteur forces :.....                       | 47 |
| 7   | Matrice de masse élémentaire :.....  | 48 |
| 8   | Procédure de solution :.....   | 49 |
| 9   | Conclusion :.....  | 49 |

## Chapitre V : Modélisation Des Plaques Composites Stratifiées

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction :.....</b>  | <b>50</b> |
| <b>2</b> | <b>Présentation du logiciel ABAQUS :.....</b>   | <b>50</b> |
| <b>3</b> | <b>Les éléments utilisés par ABAQUS :.....</b>  | <b>50</b> |
| <b>4</b> | <b>Les systèmes d'unités dans le logiciel ABAQUS :.....</b>   | <b>51</b> |
| <b>5</b> | <b>Validation :.....</b>  | <b>52</b> |
|          | <b>5.1 Vibrations libres de Plaques isotropes :.....</b>  | <b>52</b> |
|          | <b>5.2 Vibrations libres de plaques composites stratifiées :.....</b>                               | <b>53</b> |
| <b>6</b> | <b>Etude paramétrique :.....</b>  | <b>55</b> |
|          | <b>6.1 Effets de la température sur les fréquences propres de plaques composite stratifiées :55</b> |           |
|          | <b>6.1.1 Effet du rapport d'épaisseur :.....</b>  | <b>55</b> |
|          | <b>6.1.2 Effet de la dépendance des propriétés matérielles à la température :.....</b>              | <b>58</b> |
|          | <b>6.1.3 Effet du rapport d'aspect sur la vibration de plaques composite stratifiées:58</b>         |           |
| <b>7</b> | <b>Conclusion :.....</b>  | <b>68</b> |
|          | <b>Conclusion générale.....</b>   | <b>70</b> |
|          | <b>Référence bibliographique.....</b>   | <b>72</b> |
|          | <b>Annexe.....</b>  | <b>76</b> |
|          | <b>A.1 : Modélisation sur l'ABAQUS CAE.....</b>   | <b>76</b> |
|          | <b>A.1.2 : Les principaux Modules d'ABAQUS .....</b>  | <b>76</b> |
|          | <b>a) Le module « PART » .....</b>  | <b>76</b> |
|          | <b>b) Le module « PROPERTY ».....</b>   | <b>76</b> |
|          | <b>c)Le module « ASSEMBLY ».....</b>  | <b>76</b> |
|          | <b>d) Le module « STEP ».....</b>   | <b>76</b> |
|          | <b>e)Le module « INTERACTION ».....</b>   | <b>76</b> |
|          | <b>f) Le module « LOAD » .....</b>  | <b>76</b> |
|          | <b>j) Le module « JOB » .....</b>   | <b>77</b> |
|          | <b>h) Le module « MESH ».....</b>   | <b>77</b> |
|          | <b>i) Le module « VISUALIZATION ».....</b>  | <b>77</b> |
|          | <b>g) Le module « SKETCH » .....</b>  | <b>77</b> |
|          | <b>A.1.2 : Méthodologie .....</b>   | <b>77</b> |

# INTRODUCTION GENERALE



## 1 Introduction générale :

Le besoin industriel d'aujourd'hui incite les ingénieurs et les chercheurs du monde entier à remplacer les matériaux traditionnels par de nouveaux matériaux capables de résister à des conditions difficiles.

Les matériaux traditionnels tels que le verre, le carbone, le bore..., répondent à ces conditions de manière très fragile, un défaut suffisamment petit pour amorcer la rupture totale de la structure.

Les chercheurs ont consacré beaucoup d'efforts à la recherche de matériaux de construction dotés d'un ensemble exceptionnel de propriétés ; Légèreté, résistance et rigidité, afin de pouvoir réaliser des structures qui résistent adéquatement aux dommages.

Le résultat de cette recherche a été les matériaux composites qui sont aujourd'hui utilisés principalement dans plusieurs domaines en raison des avantages qu'ils offrent tels qu'un excellent rapport résistance/poids, un rapport dureté/poids, une légèreté, une résistance à l'usure, une faible densité et bien d'autres. Avantages. Par conséquent, l'utilisation de ces matériaux s'est fortement accrue dans de nombreux domaines industriels modernes tels que :

### 1.1 L'aéronautique :

La figure ci-dessous illustre l'utilisation importante des matériaux composites dans la structure des avions Airbus (ici un A380), et montre à elle-seule l'intérêt de ces matériaux dans des applications aéronautiques.

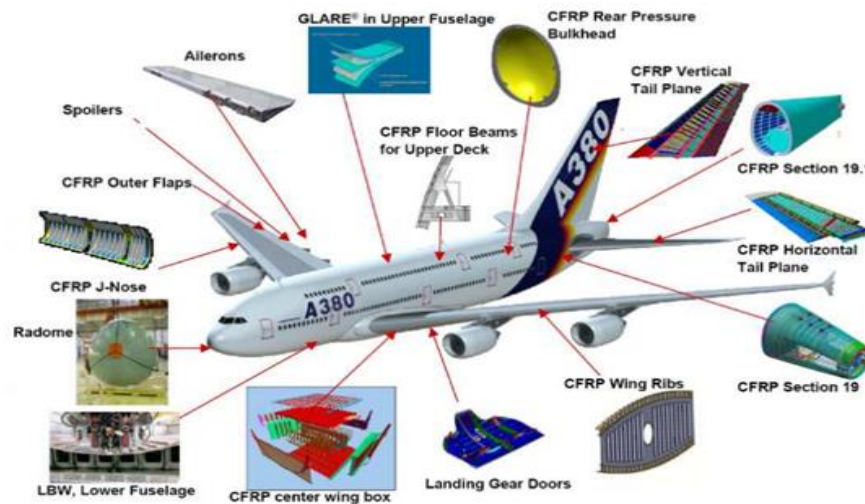
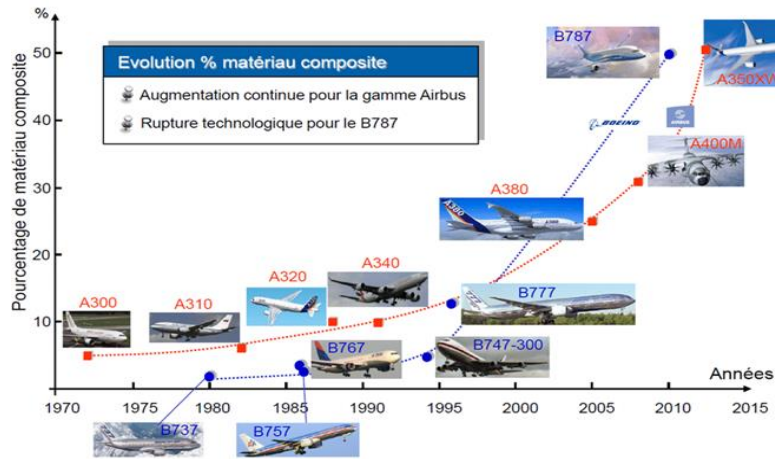


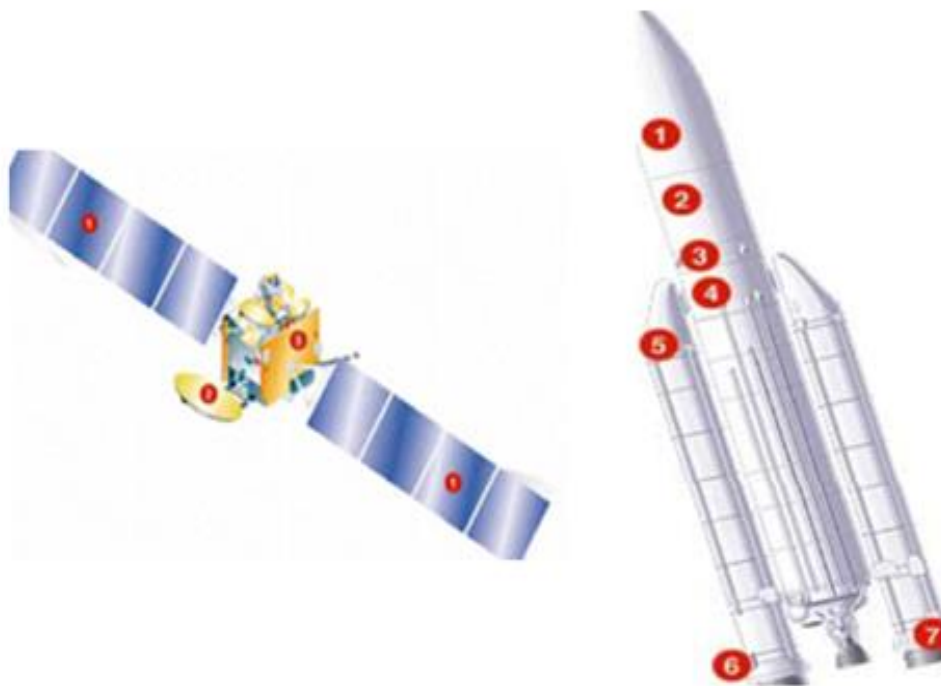
Figure 1 Matériaux composites dans le secteur de l'Aéronautique [2]



**Figure 2** Pourcentage d'utilisation des matériaux composites dans l'industrie aéronautique [3]

### 1.2 L'Aérospatial :

Parties structurales de stellites et de vecteurs (sandwich, stratifiés), Protections thermiques et structures à déformation thermique directionnelle nulle [6].

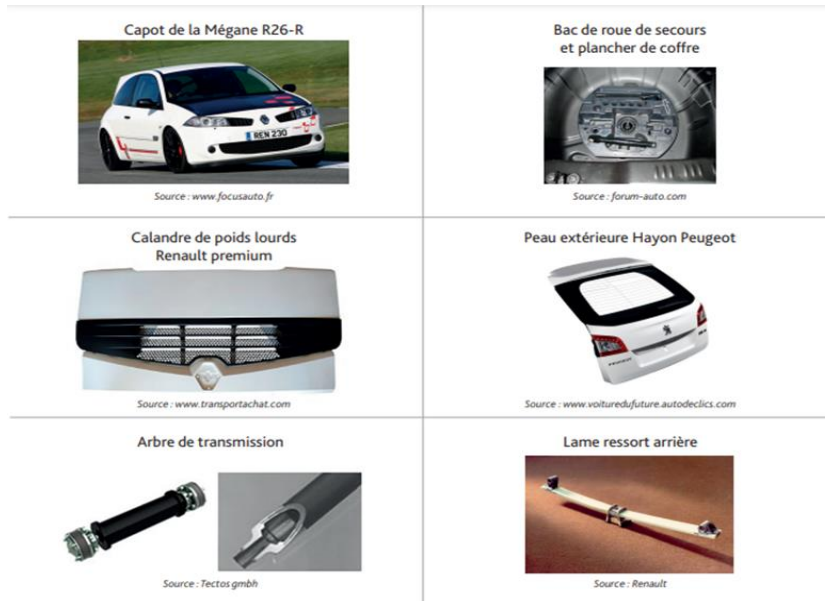


**Figure 3** Matériaux composites dans le secteur de l'Aérospatial [6]

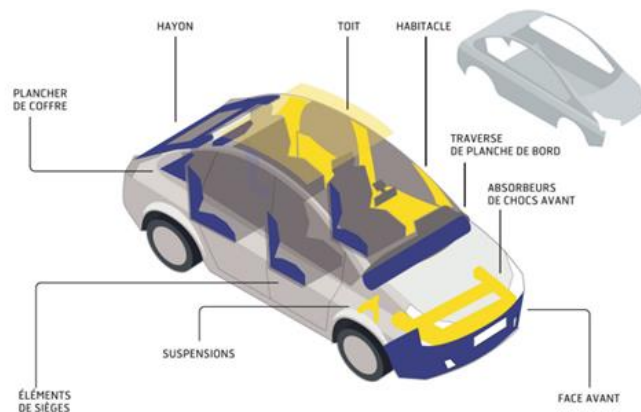
### 1.3 L'industrie automobile :

L'industrie automobile reste un grand champ d'investigation pour les matériaux composites. A ce jour, plus de 30 000 tonnes de matières plastiques et composites sont utilisées pour la fabrication de

pièces de carrosserie, notamment dans les parechocs, les ailes, les portes latérales, les ouvrants arrières, les pièces sous capot.... [1].



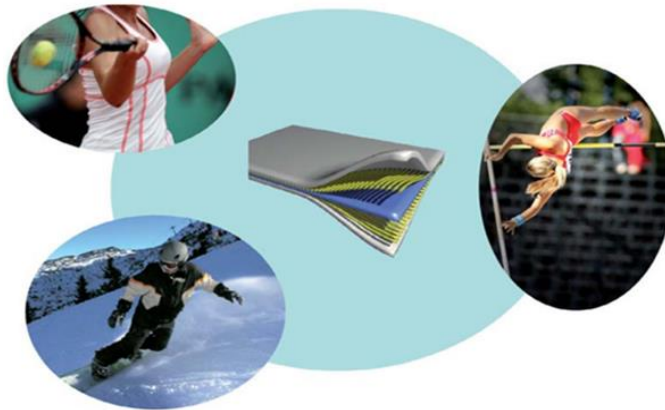
**Figure 4** Matériaux composites dans le secteur de l'industrie automobile [1]



**Figure 5** La place des matériaux composites dans une automobile en 2014 [1]

### 1.4 Le sport :

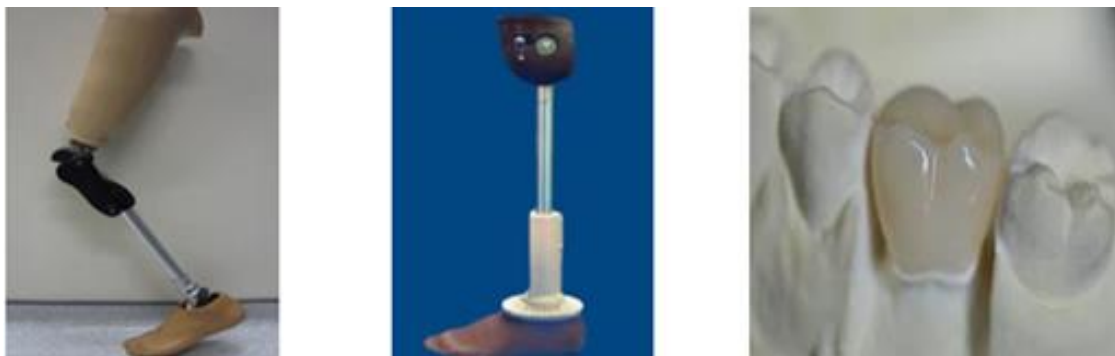
Les composites se sont imposés dans les sports et les loisirs en se substituant principalement au bois (en particulier dans le nautisme et la glisse) et quelquefois aux métaux (notamment dans le cyclisme). [5]



**Figure 6** Matériaux composites dans le secteur de Sport [5]

### 1.5 Domaine Médical :

L'utilisation des composites dans le domaine médical et de la sécurité est relativement récente et concerne des composites plus performants, à matrices époxy et fibres de carbone, ou au contraire à matrices thermoplastiques et fibres longues de verre ou de carbone [6].



**Figure 7** Les matériaux composites dans le secteur de Médical [6]

### 1.6 Les travaux publics et bâtiments :

Au fil des ans, différentes techniques de réparation et d'entretien des structures ont été couramment utilisées. Le traitement du béton peut faire l'objet d'opérations de réparation, par application de couches de peinture ou de mortier hydraulique ou polymère après traitement des poutres dégradées. La zone de fracture est injectée de polymère. Les différentes techniques de renforcement des structures correspondent à la projection de béton fibré ou non fibré, ou au collage de tôles d'acier selon le procédé Hermite, ou à l'application d'une précontrainte complémentaire par des câbles métalliques ou composites [6].



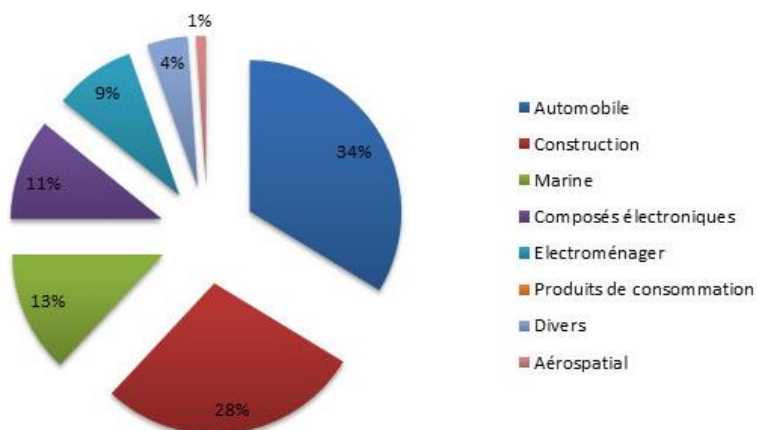
**Figure 8** Les matériaux composites dans le secteur de Génie Civil (vue intérieur d'un pont). [6]

### 1.7 Les constructions navales

Coque en sandwich, Structures en composite, Mat et voiles en carbone [7].



**Figure 9** Les matériaux composites dans le secteur Naval [7]



**Figure 10** Marché des composites réparti selon les applications [8]

La gamme de propriétés des matériaux composites disponibles s'étend au rythme du développement de la famille des matériaux composites, qu'ils soient renforcés par des particules, par des fibres ou structuraux comme les stratifié, les structure sandwichs et les stratifier Hybride.

# Chapitre I : Généralité Sur Les Matériaux Composites

## 1 Introduction :

Dans ce chapitre, nous avons introduit la connaissance générale des matériaux composites, leurs caractéristique, ses différents types. Ainsi que les différents composants des matériaux composites, tels que (matrice et renfort) et leurs rôles respectifs. Ensuite on va voir l'architecteur des matériaux composites tels que (sandwich, monocouche et stratifié). Enfin, dans ce chapitre, nous aborderons certains des avantages et des inconvénients des composites.

## 2 Historique :

Les origines des matériaux composites sont inconnues mais tous les écrits historiques contiennent des références à certaines formes des matériaux. Par exemple, la paille a été utilisée par les arabes pour renforcer les briques ; le contreplaqué a été utilisé par les anciens Egyptiens afin d'obtenir une meilleure résistance tant aux chargements mécaniques qu'à l'environnement, les épées et les armures médiévales ont été fabriquées par des couches des différents matériaux. Aujourd'hui, les matériaux composites font partie courante de notre vie que cela soit des objets très excitants et à la mode comme la canne de golf et le kayak, ou beaucoup plus usuels tels que le contreplaqué et le béton [4].

## 3 Définition :

Un matériau composite est constitué de l'assemblage de deux matériaux de natures différentes, se complétant et permettant d'aboutir à un matériau dont l'ensemble des performances est supérieur à celui des composants pris séparément [9].

Un matériau composite, est constitués essentiellement d'un matériau fibreux, jouant le rôle de renfort (armature, squelette...), et il assure la tenue mécanique (résistance à la traction et rigidité) et, un matériau résineux, appelé matrice, qui lie les fibres renforts, répartit les efforts (résistance à la compression ou à la flexion) et assure une bonne protection chimique du matériau [10].

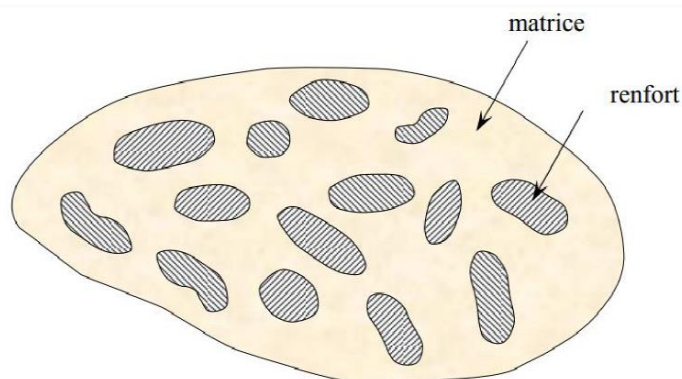


Figure 1. 1 Les matériaux composites [9].

## 4 Constituants d'un matériau composite :

Matériau composite : association de deux constituants : les matrices et les renforts.



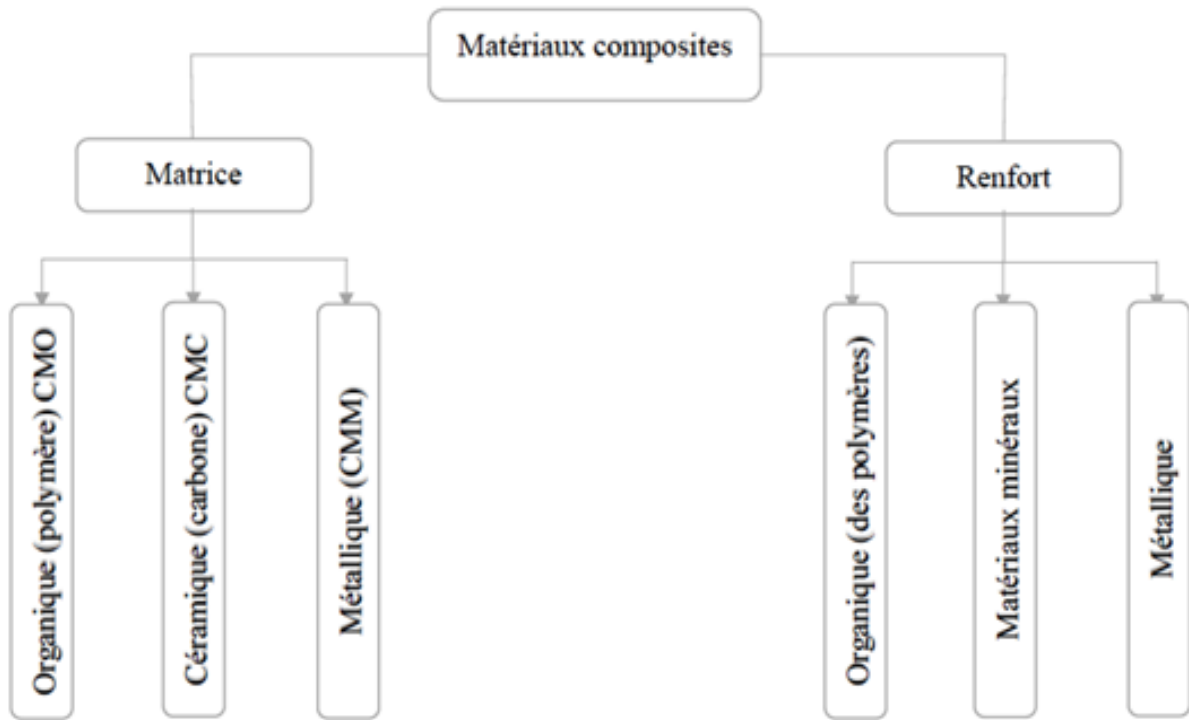


Figure 1. 2 Composants de matériaux composites

**4.1 Les matrices :**

Le rôle de la matrice est de transmettre les efforts mécaniques aux fibres (résistance à la flexion ou à la compression) et d’assurer leurs protections chimiques et de donner la forme au produit réalisé [6]. On distingue différents types de matrice (figure I.3) :

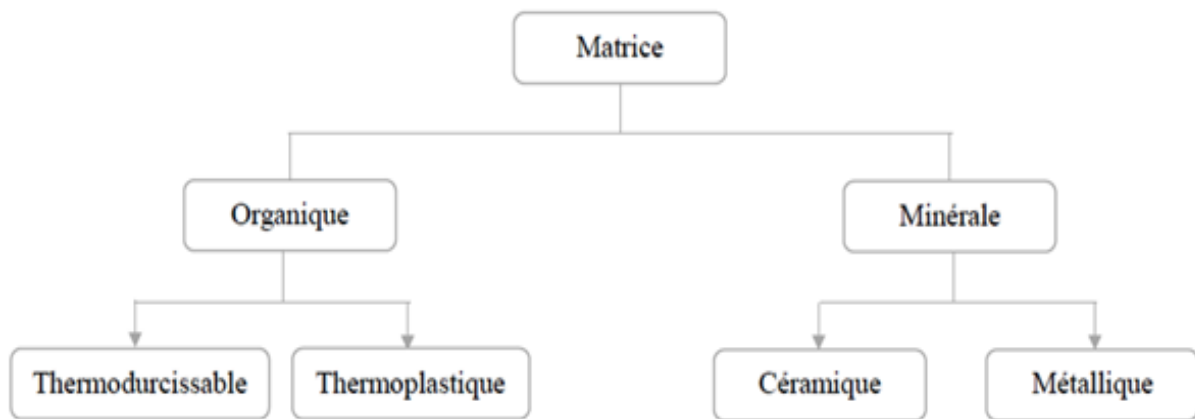


Figure 1. 3 Les différentes types de matrice

**4.1.1 Les matrices organiques :**

**a. Les matrices thermodurcissables :**

Les résines thermodurcissables présentent et possèdent la propriété de passer de façon irréversible d’un état liquide à un état solide. Elles ont des caractéristiques mécaniques élevées et une masse volumique faible. Ces résines ne peuvent être mises en forme qu’une seule fois [12].

Il existe donc trois types de matrices thermodurcissables :

- Les résines polyesters.
- Les résines de condensation.

- Les résines époxydes.

### **b. Les matrices thermoplastiques :**

Les résines thermoplastiques présentent la propriété de passer de façon réversible de l'état solide à l'état pâteux. La mise en œuvre rapide est possible par thermoformage. Elles présentent la possibilité de soudage et de recyclage du fait de la réversibilité [12].

On donne les exemples suivants :

- Polypropylène (pp).
- Polysulfure de phénylène (PPS).
- Polycarbonate polyamide (PA).
- Polyéther-sulfone (PES).
- Polyéther-imide (PEI).
- Polyéther-éther-cétone (PEEK).

### **4.1.2 Les matrices métalliques :**

L'utilisation de ses matériaux composites à des températures supérieures à 300 °C, est surtout recherche pour l'utilisation industrielle et l'application dans les domaines aéronautiques et spatiales. Le cout de leur mise en œuvre est très élevée, en particulier l'aluminium et le titane [6].

### **4.1.3 Les matrices céramiques :**

Les matériaux utilisés sont les carbures de silicium et de carbone. Ils sont utilisés pour la fabrication des pièces qui subissent des contraintes d'origine thermique et leur coût est très élevé [13].

## **4.2 Les renforts :**

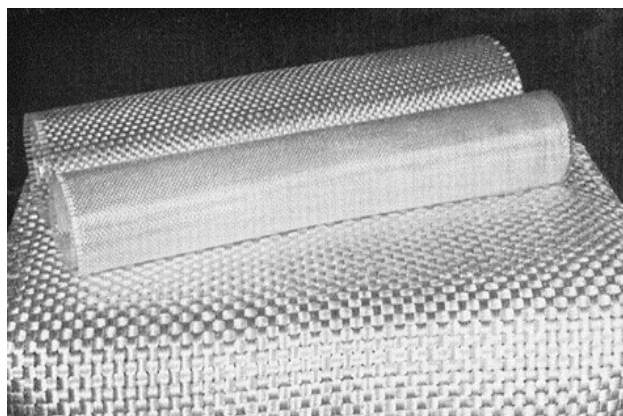
Les renforts sont tous les produits qui améliorent les propriétés de la matrice (mécaniques, thermiques, chimiques, etc.) et assurent les meilleures propriétés mécaniques des matériaux composites à réaliser.

Les fibres sont disponibles sur le marché en fonction des coûts de revient recherchés pour la structure réalisée. Les renforts constitués de fibres se présentent sous les formes : linéique (fils, mèches), tissus surfaciques (tissus, mats), multidirectionnelle (tresse, tissus complexes, tissage tri directionnel ou plus) [14].

### **4.2.1 Principaux renforts :**

#### **a. Fibres de verre :**

Les fibres de verre ont un excellent rapport performance-prix. C'est les renforts les plus utilisés actuellement dans la construction de structures composites [6].



**Figure 1. 4** Tissu de fibre de verre [9]

### b. Fibres de carbone :

C'est la fibre la plus utilisées dans les applications hautes performances. Elle est obtenue par carbonisation de la fibre de PAN (Polyacrylonitrile). Bonnes propriétés mécaniques, Dilatation thermique très faible, Bonne tenue à l'humidité, Faible densité, Prix très élevé, Fragilité au choc, Adhésion difficile avec les résines. Selon la température de combustion, on distingue deux types de fibres [6] :

- Fibres haute résistance (HR) : pour une combustion de 1000 à 1500 °C.
- Fibres haut module (HM) : pour une température de combustion de 1800 à 2000 °C.

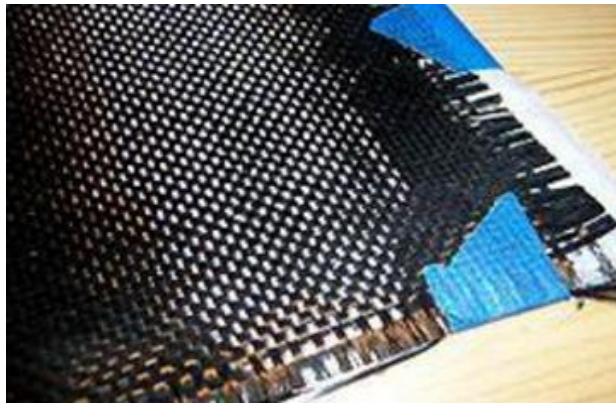


Figure 1. 5 Tissu de fibre de carbone [15]

### c. Fibres d'aramide :

Les fibres d'aramide sont des fibres synthétiques à base de polyamide aromatiques dont les premières applications reviennent à l'année 1972. Ces fibres sont généralement développées pour renforcer les pneumatiques. Bonne résistance spécifique à la traction, Dilatation thermique nulle, Absorption des vibrations et des chocs, Bonne inertie chimique vis-à-vis des carburants, Faible densité, Reprise d'humidité importante, Prix élevé, Adhésion difficile avec les résines. Ils en existent deux types principaux [6] :

- La fibre haute module Kevlar 49 et Twaron HM.
- La fibre standard Kevlar 29 et Twaron HM 50.

## 5 Définitions de base :

- *Homogène* : mêmes propriétés en tout point du matériau,
- *Hétérogène* : en 2 points différentes, propriété différentes,
- *Isotrope* : même propriété dans toute les directions,
- *Isotrope transverse* : il existe en axe de symétrie par rapport à une étroite,
- *Orthotrope* : propriétés symétriques par rapport à deux plans orthogonaux,
- *Anisotrope* : les propriétés sont différentes selon les différentes directions [11].

## 6 Les caractéristiques générales :

Les propriétés des matériaux composites dépendent de beaucoup de facteurs et sont différentes selon les divers types de matériaux composites. Ces propriétés résultent

- Des propriétés, de la nature et de la quantité des matériaux constitutifs,

- Des constituants, de la géométrie et de la distribution du renfort,
- De leurs interactions, de la nature de l'interface matrice-renfort, etc.

Les principales caractéristiques des pièces fabriquées en matériaux composites sont

- Faible masse,
- Bonne tenue en fatigue (durée de vie augmentée),
- Absence de corrosion,
- Absence de plasticité (leur limite élastique correspond à la limite de rupture),
- Vieillesse sous l'action de l'humidité et de la chaleur,
- Inertie à certains produits chimiques courants (solvants, peinture, huiles, Pétroles...), etc. [16]

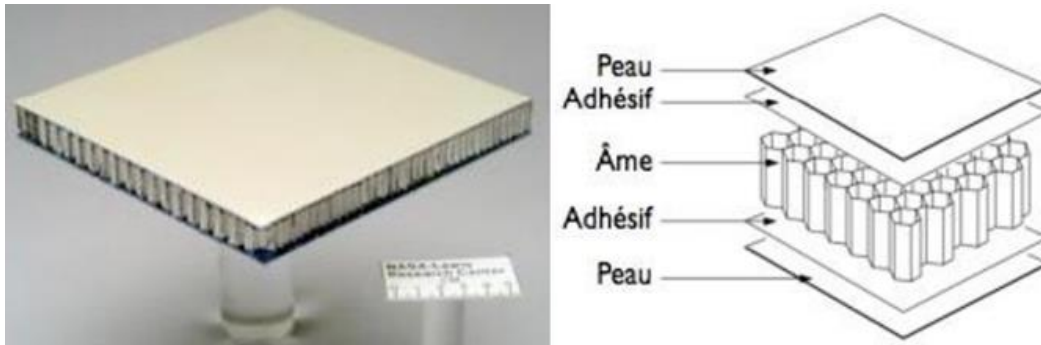
## 7 Architecture des matériaux composites :

On distingue dans les matériaux composites trois types :

- Les Sandwiches.
- Les Monocouches.
- Les Stratifiées.

### 7.1 Les Sandwiches :

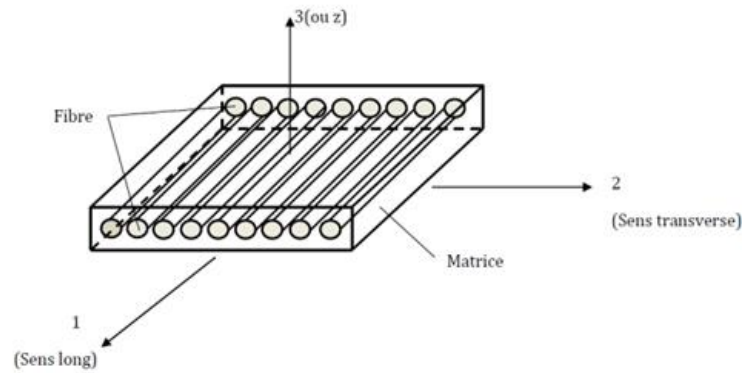
Les pièces composites tissées ou stratifiées sont généralement minces. Par conséquent, elles ne résistent efficacement qu'aux sollicitations en membrane, c'est-à-dire dans leur plan, et résistent mal aux sollicitations hors plan (flexion et torsion). Pour concevoir des pièces rigides en flexion et en torsion, une technique couramment employée est celle des structures en sandwich, constituées de deux peaux (généralement stratifiées) collées sur une âme épaisse mais légère, comme une mousse de polymères ou un nid d'abeilles, à l'aide d'adhésifs [17].



**Figure 1. 6** Composite sandwich [17]

### 7.2 Les Monocouches :

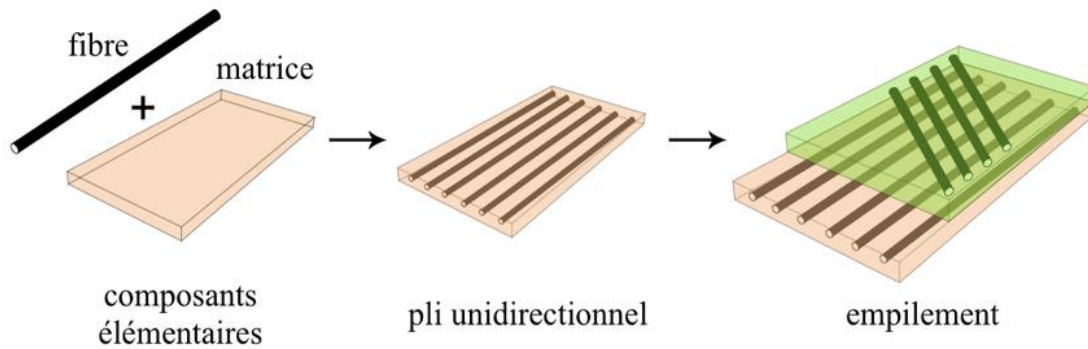
Les monocouches représentent l'élément de base de la structure composite. Les différents types de monocouches sont caractérisés par la forme du renfort : à fibres continue, à fibres courtes, fibres tissés et mat [18].



**Figure 1. 7** Pli a renforcement unidirectionnel [16].

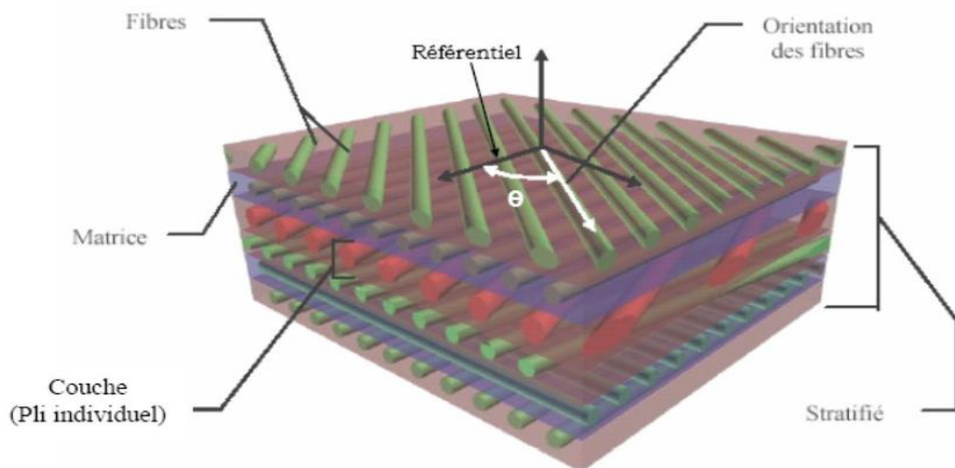
**7.3 Les Stratifiées :**

Les stratifiés sont constitués de couches successives (appelées parfois plis) de renforts (fils, mat, tissus, etc.) imprégnés de résines [19].



**Figure 1. 8** Les constituants d'un composite stratifié [20]

**7.3.1 Les orientations des fibres de composite stratifiées :**



**Figure 1. 9** Composite stratifiée [21]

Le choix de l'empilement et plus particulièrement des orientations permettra d'avoir des propriétés mécaniques spécifiques. On pourra avoir des stratifiés du type [10] :

**a. Équilibré :**

Stratifié comportant autant de couches orientées suivant la direction  $+\theta$  que de couches orientées suivant de la direction  $-\theta$ .



**Figure 1. 10** Stratifié équilibré

**b. Symétrique :**

Stratifié comportant des couches symétriques par rapport à un plan moyen.



**Figure 1. 11** Stratifié symétrique

**c. Antisymétrique :**

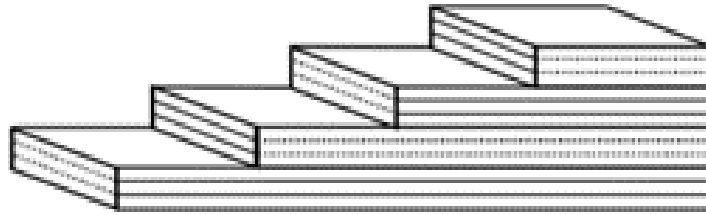
Stratifié comportant des couches non symétriquement par rapport à un plan moyen.



**Figure 1. 12** Stratifié antisymétrique

**d. Croisé :**

Stratifié comportant autant de couches à  $0^\circ$  que de couches à  $90^\circ$ .



**Figure 1. 13** Stratifié Croisé  $[0_2/90_2]$

e. **Hybride :**

Les couches successives comportent des fibres de natures différentes, il s'agit d'un stratifié hybride.

|             |     |
|-------------|-----|
| $0^\circ$   | $V$ |
| $45^\circ$  | $C$ |
| $-45^\circ$ | $C$ |
| $90^\circ$  | $C$ |
| $90^\circ$  | $C$ |
| $-45^\circ$ | $C$ |
| $45^\circ$  | $C$ |
| $0^\circ$   | $C$ |

$[0_V / \pm 45_C / 90_C]_S$

**Figure 1. 14** Stratifié Hybride (V : verre, C : carbone)

Parmi les différents hybrides, on distinguer :

- Les hybrides inter-couches : constitués d'une suite de couches, chacune de nature différente.
- Les hybrides intra-couches : constitués par une séquence de couches identiques, chaque couche étant constituée de renforts différents [22].

## 8 Les avantages des matériaux composites :

- ✓ Résistance et rigidité important.
- ✓ Résistance à la fatigue.
- ✓ La durabilité et anticorrosion.
- ✓ Insensibles aux produits chimiques.
- ✓ Mise en forme de pièces complexes.

## 9 Les inconvénients des matériaux composites :

- ✓ Vieillissement sous l'action de l'eau et de la température.
- ✓ Faible tenue à l'impact pour les stratifiés.
- ✓ Coût parfois prohibitifs.

**10 Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons cherché à donner une vue d'ensemble des matériaux composites et des différents types de composites, notamment les plaques stratifiées ; différents aspects. Visant à donner un aperçu des différents composants tels que le composé à large diffusion et haute performance ; ses propriétés mécaniques. Nous avons également présenté les désignations des diapositives et les avantages et inconvénients des matériaux composites.



**Chapitre II :**  
**Comportement des**  
**plaques composites**  
**stratifiées**

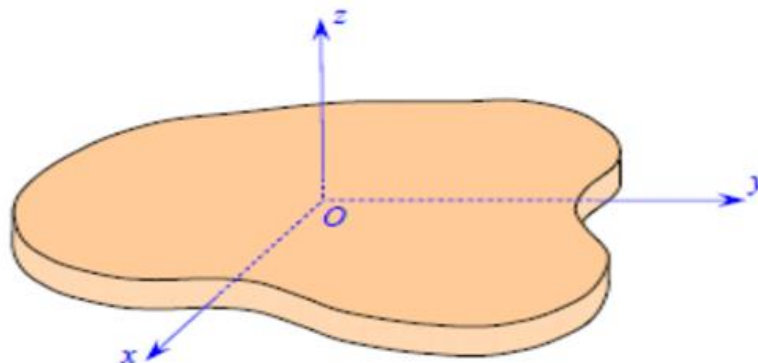
## 1 Introduction :

Les plaques sont des éléments de structure couramment utilisés, définis par une surface plane de référence (plan  $xy$ ) et d'épaisseur, notée  $h(x, y)$ , petite par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur), selon l'ordre de grandeur de l'épaisseur  $h$  par rapport aux autres dimensions, on distingue deux types des plaques [23] :

- Les plaques minces.
- Les plaques épaisses.

Le plan inférieur est donc le plan  $z = -h/2$  et le plan supérieur est le plan

$$z = h/2.$$



**Figure 2. 1** Élément plaque [23]

Le domaine d'utilisation de plaque est très large dans divers domaines, notamment dans le domaine du génie civil, elle est utilisée dans des constructions simples ou des ouvrages d'art. Elle existe sous différentes formes dont circulaire et rectangulaire et d'autres formes selon la qualité du travail [24].

## 2 Comportement des plaques stratifiées :

Le comportement mécanique des plaques stratifiées a été étudiée en détail pendant de nombreuses années, malgré ça il reste un problème de recherche ouvert en raison de leur comportement complexe. L'étude du comportement mécanique des matériaux composites vise à comprendre leur réponse à une contrainte donnée. Les variables impliquées dans ce champ sont [9] :

- Le tenseur des contraintes ( $\sigma$ ).
- Le tenseur des déformations ( $\epsilon$ ).

Les champs de déformation et de contrainte dans un milieu sont liés par des lois appelées lois de comportement, qui caractérisent le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui expliquent au mieux les phénomènes observés. L'expérience a montré que de nombreux milieux solides déformables ont un comportement élastique linéaire à une température donnée et dans un intervalle de déformation donné [22].

## 3 Loi de comportement des stratifiées :

L'étude de comportement des stratifiées contenir deux phases principales [25] :

- L'étude du comportement mécanique de chaque pli.

- L'étude de comportement global du matériau contient de plusieurs monocouche (plis) Et appelé généralement par le comportement du stratifiés.

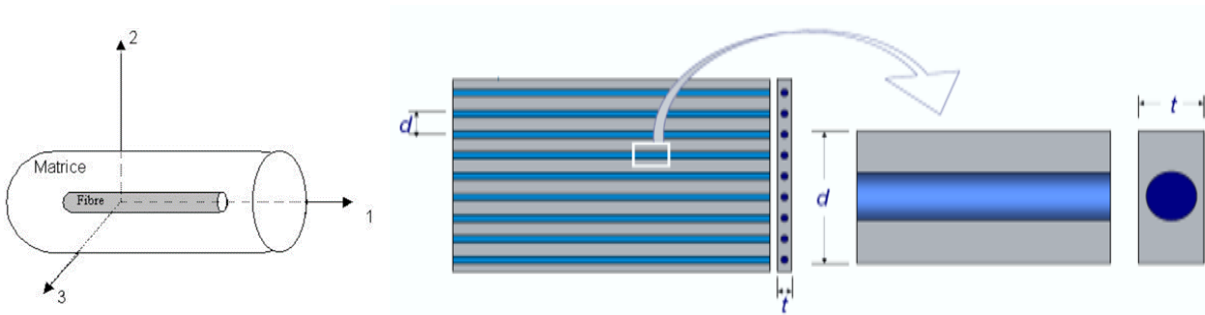
#### 4 Les caractéristiques mécaniques d'un pli composite (mélange renfort matrice) :

Le but du calcul d'un composite est de déterminer les caractéristiques mécaniques du matériau à partir de ses composants, nous allons calculer les paramètres suivants

- **Module d'Young  $E$  (longitudinale et transversal).**
- **Coefficient de Poisson.**
- **Module de cisaillement.**

L'un des facteurs les plus importants qui déterminent les caractéristiques mécaniques d'un matériau composite est le rapport relatif de la matrice et du renforcement. Ce rapport peut être exprimé en fraction volumique (ou fraction en volume) [22]. On s'intéresse ici à une couche renforcée par des fibres unidirectionnelles uniformément réparties dans tout le corps de la couche [7].

Soit une cellule élémentaire de **fraction volumique  $V = 1$**  constituée de fibres et de matrice avec :



**Figure 2. 2** Cellule élémentaire d'un composite unidirectionnel [25]

- La fraction volumique de fibres est :

$$V_f = \frac{V_f}{V_c} \quad (II.1)$$

- La fraction volumique de matrice est :

$$V_m = \frac{V_m}{V_c} \quad (II.2)$$

Avec :

$$V_m = 1 - V_f \quad (II.3)$$

Puisque :

$$V_c = V_f + V_m \quad (II.4)$$

$V_c, V_f$  et  $V_m$  Sont respectivement le volume de matériau composite, volume de fibre et le volume de matrice. (Les indices  $c, f$  et  $m$  seront systématiquement utilisés comme indices respectifs des caractéristiques du matériau composite, des fibres et de la matrice) [22].

#### 4.1 Module d'Young longitudinal $E_1$ :

Il est déterminé dans un essai de traction longitudinal. L'hypothèse simplificatrice est de supposer une déformation uniforme et identique dans la fibre et dans la matrice [22].

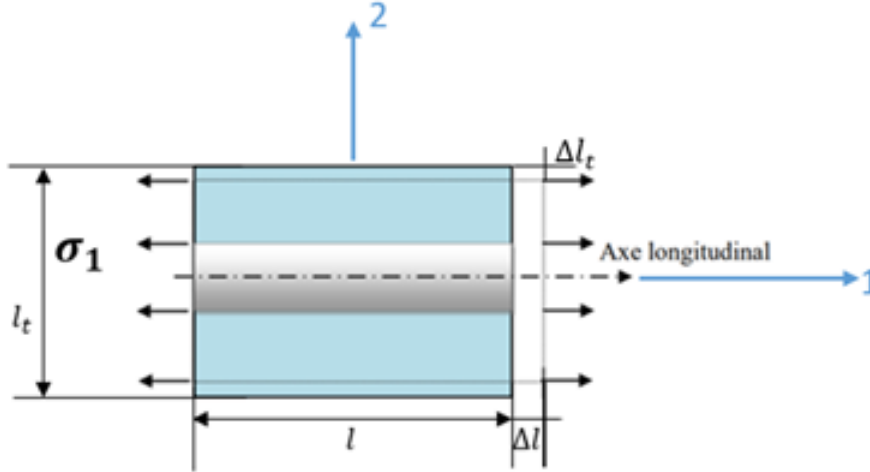


Figure 2. 3 Schéma simplifié d'une traction longitudinale.

Le lien élastique linéaire implique :

$$\sigma_1^m = E_m \varepsilon_1^m; \sigma_1^f = E_f \varepsilon_1^f; \sigma_1^c = E_c \varepsilon_1^c \quad (II.5)$$

L'hypothèse d'adhérence parfaite a comme conséquence que la déformation est la même Partout (en particulier, les sections droites restent planes).

$$\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^c \quad (II.6)$$

Le lien élastique linéaire implique :

$$\sigma_1^c = E_1 \varepsilon_1^c = E_1 \varepsilon_1^m = E_1 \varepsilon_1^f \quad (II.7)$$

L'équilibre impose la relation :

$$\begin{cases} \sigma_1^c A_c = \sigma_1^f A_f + \sigma_1^m A_m \\ \sigma_1^c A_c = E_1^f \varepsilon_1^f A_f + E_1^m \varepsilon_1^m A_m \\ \sigma_1^c A_c = E_1^f \varepsilon_1^c A_f + E_1^m \varepsilon_1^c A_m \\ \sigma_1^c A_c = \varepsilon_1^c (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \end{cases} \quad (II.8)$$

Avec :

$$V_f = \frac{V_f}{V_c} = \frac{A_f}{A_c} \quad \text{et} \quad V_m = 1 - V_f = \frac{A_m}{A_c} \quad (II.9)$$

Donc :

$$\begin{cases} E_1 \sigma_1^c A_c = \varepsilon_1^c (E_1^f A_f + E_1^m A_m) \\ E_1 = \frac{E_1^f A_f + E_1^m A_m}{A_c} \end{cases} \quad (II.10)$$

Le module de Young longitudinal peut être exprimé par :

$$E_1^c = E_1^f V_f + (1 - V_f) E_1^m \quad (II.11)$$

Cette expression est appelé la loi des mélanges pour le module d'Young dans la direction des fibres [22].

#### 4.2 Modules de Young transversal $E_2$ :

Il est déterminé dans un essai de traction transversal où le composite est chargé suivant la direction perpendiculaire aux fibres. La charge est transmise intégralement dans la fibre et dans la matrice [22].

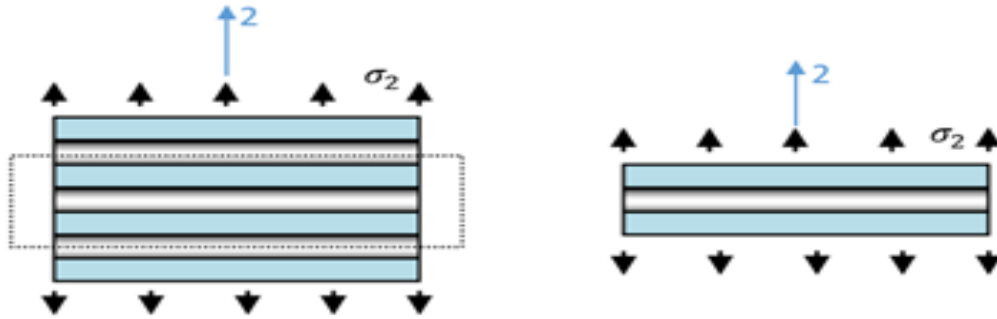


Figure 2. 4 Schéma simplifié d'une traction transversale.

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que la contrainte est constante dans une section droite

$$\sigma_2^c = \sigma_2^m = \sigma_2^f \quad (II.12)$$

$$\begin{cases} V \varepsilon_1^c = \varepsilon_1^f V_f + (1 - V_f) \varepsilon_1^m \\ V \frac{\sigma_2^c}{E_2} = V_f \frac{\sigma_2^c}{E_2^f} + (1 - V_f) \frac{\sigma_2^c}{E_2^m} \end{cases} \quad (II.13)$$

Donc :

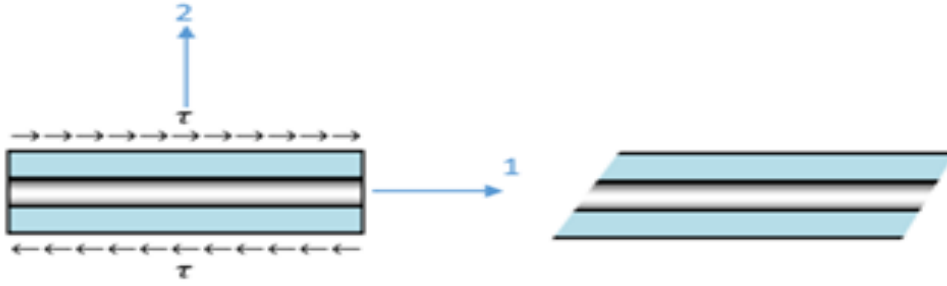
$$\frac{1}{E_2} = \frac{V_f}{E_2^f} = \frac{(1 - V_f)}{E_2^m} \quad (II.14)$$

Le module de Young transversale peut être exprimé par :

$$E_2 = \frac{E_2^f E_2^m}{V_f E_2^f + (1 - V_f) E_2^m} \quad (II.15)$$

#### II.6.3. Module de cisaillement longitudinal $G_{12}$ :

Est déterminé dans un essai de cisaillement longitudinal. Les contraintes en cisaillement dans la fibre et dans la matrice sont égales [22].



**Figure 2. 5** Schéma simplifié d'un essai de cisaillement longitudinal.

L'équilibre du volume élémentaire représentatif implique que ce soit :

$$\tau^c = \tau^m = \tau^f \quad (II.16)$$

Tandis que par le lien élastique on a :

$$\tau^m = G_m \varepsilon_{12}^m ; \tau^f = G_f \varepsilon_{12}^f ; \tau^c = G_{12} \varepsilon_{12}^c \quad (II.17)$$

La compatibilité, en moyenne, de la déformation à cisaillement prescrit que ce soit :

$$V \varepsilon_{12}^c = \varepsilon_{12}^f V_f + (1 - V_f) \varepsilon_{12}^m \Rightarrow \frac{\tau^c}{G_{12}} = \frac{\tau^f}{G_f} V_f + \frac{\tau^m}{G_m} (1 - V_f) \quad (II.18)$$

Module de cisaillement longitudinale peut être exprimé par :

$$G_{12} = \frac{G_f G_m}{V_f G_m (1 - V_f) G_f} \quad (II.19)$$

### 4.3 Coefficient de Poisson longitudinal $V_{12}$ :

Le coefficient de Poisson est déterminé dans un essai de traction longitudinale comme pour  $E_1$ . En utilisant l'approche du comportement mécanique du matériau [22].

Par définition :

$$V_f = -\frac{\varepsilon_2^f}{\varepsilon_1^f} ; V_m = -\frac{\varepsilon_2^m}{\varepsilon_1^m} ; V_{12} = -\frac{\varepsilon_2^c}{\varepsilon_1^c} \quad (II.20)$$

- D'ailleurs, l'hypothèse de l'adhérence prescrit encore que :

$$\varepsilon_1^m = \varepsilon_1^f = \varepsilon_1^c \quad (II.21)$$

Comme  $E_2$  pour la compatibilité, en moyenne, des déformations transversales impose encore la relation :

$$\begin{cases} V\varepsilon_2^c = \varepsilon_2^f V_f + (1 - V_f)\varepsilon_2^m \\ \varepsilon_2^c = v_f \varepsilon_1^f V_f + (1 - V_f)v_m \varepsilon_1^m \\ v_{12}\varepsilon^c = v_f \varepsilon_1^f V_f + (1 - V_f)v_m \varepsilon_1^m \end{cases} \quad (II.22)$$

Coefficient de poisson longitudinale peut être exprimé par :

$$v_{12} = v_f V_f + (1 - V_f)v_m \quad (II.23)$$

Enfin Cette expression est la loi des mélanges pour le coefficient de Poisson longitudinal [22].

### 5 La relation contrainte - déformation :

La contrainte ( $\sigma_{ij}$ ) et la déformation ( $\varepsilon_{kl}$ ) sont liées à des tenseurs de rigidité ( $C_{ijkl}$ ) utilisant la loi de Hooke dans le domaine élastique linéaire [26].

On peut écrire la relation de la manière suivante :  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ .

Avec :

$$\begin{cases} i, j, k, l \text{ prennent les valeurs } 1, 2, 3 \\ \varepsilon_{kl}: \text{Le tenseur de déformations} \\ \sigma_{ij}: \text{Le tenseur de contraintes} \\ C_{ijkl}: \text{Le tenseur d'élasticité} \end{cases}$$

Ou bien :

$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\}$  Cette loi est appelée généralement la **loi de Hooke généralisée**, introduit Les 9 composantes (équation (II.22)) du tenseur des contraintes et des déformations peuvent être réduites à six composantes indépendantes à cause de sa symétrie [26].

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ & & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ & & & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} & C_{2332} & C_{2313} & C_{2321} \\ & & & & C_{3131} & C_{3112} & C_{3132} & C_{3113} & C_{3121} \\ & \text{sym} & & & & C_{1212} & C_{1232} & C_{1213} & C_{1221} \\ & & & & & & C_{3232} & C_{3213} & C_{3221} \\ & & & & & & & C_{1313} & C_{1321} \\ & & & & & & & & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} \quad (II.24)$$

Où :

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= \{\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{32} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{21}\}^T \\ \{\varepsilon\} &= \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{31} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{32} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{21}\}^T \end{aligned} \quad (II.25)$$

Ainsi, la notation tensorielle peut être contractée en utilisant la notation suivante :

Indice du tenseur : (11) (22) (33) (23, 32) (13, 31) (12, 21)

Indice contracté : 1 2 3 4 5 6

✓ Le Tenseur des contraintes :

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} = \sigma_{23} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.26)$$

✓ Le Tenseur des déformations :

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} = 2\varepsilon_{23} = \gamma_{23} = \gamma_{32} \\ 2\varepsilon_{31} = 2\varepsilon_{13} = \gamma_{31} = \gamma_{13} \\ 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21} = \gamma_{12} = \gamma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (II.27)$$

## 5.1 Différents Types des matériaux :

### 5.1.1 Matériaux anisotropes :

La loi de Hooke peut être exprimée par :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} & i, j, k, l = 1, 2, 3 \\ \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} & i, j, k, l = 1, 2, 3 \end{cases} \quad (II.28)$$

Avec :

$S_{ijkl}$ : tenseur de souplesse

A cause de la symétrie des tenseurs on a :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (II.29)$$

Le tenseur de rigidité en a 81 coefficients de même pour le tenseur de souplesse, pour raison de la symétrie des contraintes  $\sigma_{ij}$  et de déformation  $\varepsilon_{ij}$ , il y a une réduction des coefficients a 36 parmi ces derniers, 21 sont indépendants [27].

On peut écrire sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (II.30)$$

Et la matrice de souplesse :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.31)$$



[C] Et [S] c'est respectivement la matrice de rigidité et la matrice de souplesse (**flexibilité**).

Avec :

$$[S] = [C]^{-1} \quad (II.32)$$

### 5.1.2 Matériaux orthotropes :

Si trois plans perpendiculaire, représente des plans de symétries pour un matériau, ce dernier est dit orthotrope. Cette symétrie réduit le nombre de coefficient de rigidité à 9 [10].

La matrice de rigidité de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (II.33)$$

La matrice de souplesse de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.34)$$

Les 9 modules de rigidité sont :

$E_1, E_2, E_3$  : 3 modules d'élasticité longitudinal.

$G_{12}, G_{23}, G_{31}$  : 3 modules de cisaillement.

$\nu_{12}, \nu_{23}, \nu_{31}$  : 3 module de Poisson.

Les constantes de rigidités sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \quad C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \quad C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{12} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \quad C_{13} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta} \quad C_{23} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta} \\ C_{44} = G_{23} \quad C_{55} = G_{13} \quad C_{66} = G_{12} \\ \Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \end{array} \right. \quad (II.35)$$

Les éléments de souplesse  $S_{ij}$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} \quad S_{13} = \frac{-\nu_{13}}{E_1} \\ S_{22} = \frac{1}{E_1} \quad S_{23} = \frac{\nu_{23}}{E_1} \quad S_{33} = \frac{1}{E_1} \\ S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right. \quad (II.36)$$

Avec :

$$\frac{V_{ij}}{E_i} = \frac{V_{ji}}{E_j} \quad (II.37)$$

La matrice de souplesse de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{\nu_{23}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{\nu_{23}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{0}{G_{23}} & \frac{0}{G_{13}} & \frac{0}{G_{12}} & \frac{1}{G_{23}} & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.38)$$

### 5.1.3 Matériaux transversalement isotropes (unidirectionnels) :

Le matériau unidirectionnel c'est un matériau orthotrope qui possède un axe privilégié par exemple x1 de façon qu'il doit y avoir invariance par une rotation quelconque autour de cet axe. Ce matériau est donc isotrope dans le plan perpendiculaire à cet axe. Le nombre de coefficients indépendants se réduit à 5 coefficients [10].

La matrice de rigidité comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (II.39)$$

La matrice de souplesse de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.40)$$

Avec :

$$\begin{cases} C_{13} = C_{12} & C_{33} = C_{22} & C_{55} = C_{66} & C_{44} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) \\ S_{13} = S_{12} & S_{33} = S_{22} & S_{55} = S_{66} & S_{44} = 2(S_{22} - S_{23}) \end{cases} \quad (II.41)$$

### 5.1.4 Matériaux isotropes :

Un matériau isotrope est un matériau dont tous les plans sont des plans de symétrie, et le système de coordonnées est pris arbitrairement [10]. Et les caractéristiques mécaniques sont les même dans toutes les directions donc :

- Module d'Young :

$$E_1 = E_2 = E_3 = E \quad (II.42)$$

- Coefficient de Poisson :

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = \nu \quad (II.43)$$

- Module de cisaillement :

$$G_{12} = G_{13} = G_{23} = G \quad (II.44)$$

La matrice de souplesse de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & \frac{\nu_{23}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{\nu_{23}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{0}{E_1} & \frac{0}{E_1} & \frac{0}{E_1} & \frac{G_{23}}{G_{23}} & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.45)$$

Avec :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (II.46)$$

## 6 Relation contrainte-déformation plane :

Pour un matériau orthotrope, et dans le cas d'un état de **contrainte plane**, La relation contrainte déformation peut être donnée par : [22]

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 = \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (II.47)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (II.48)$$

Les constantes de rigidité dans un état de contrainte plan sont : [22]

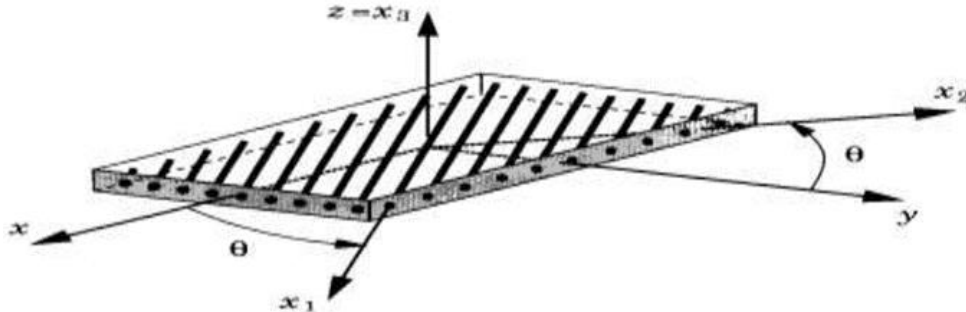
$$\begin{cases} Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & Q_{21} = Q_{12} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{44} = G_{23} & Q_{55} = G_{13} & Q_{66} = G_{21} \end{cases} \quad (II.49)$$

Avec :

$E_1$  et  $E_2$  sont des module d'Young du matériau dans les directions 1et 2,  $G_{12}$  est le module de cisaillement, et  $\nu_{12}$  coefficients de poisson.

### 7 Relation contrainte déformation pour une orientation des fibres :

Les stratifiés sont produits en empilant des couches successives avec des fibres dont la direction varie d'une couche à l'autre. Pour étudier le comportement élastique de tels stratifiés, il est nécessaire de prendre un système d'axes de référence pour l'ensemble du stratifié et de rapporter le comportement élastique de chaque couche à ce système de référence. [22]



**Figure 2. 6** Axes principaux et axes de référence d'une couche stratifiée [28].

Les matrices de rigidité  $C'$  et de souplesse  $S'$ , exprimées dans le système de référence, sont obtenues en appliquant aux matrices de rigidité et de souplesse  $C$  et  $S$  les relations de changement de base en façons suivante: [22]

$$[C'] = [T]^{-1}[C][T] \tag{II. 50}$$

$$[S'] = [T]^{-1}[S][T] \tag{II. 51}$$

$[T]$ : C'est la matrice de changement de base.

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs^2 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \tag{II. 52}$$

Avec :  $c = \cos \theta$      $s = \sin \theta$

Les contraintes dans le repère  $(x, y, z)$  sont définies en fonction des déformations par :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [Q'] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{II. 53}$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{II. 54}$$

Les contraintes en cisaillement transverse dans la couche  $k$  s'expriment suivant :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{44} & Q'_{45} \\ Q'_{45} & Q'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \tag{II. 55}$$

La matrice de rigidité réduite hors axes est donnée par l'expression suivante :

$$[Q'] = [T]^{-1}[Q][T] \quad (II.56)$$

Les composantes de la matrice sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q'_{11} = Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta \\ Q'_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\cos^4\theta\sin^4\theta) \\ Q'_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta \\ Q'_{22} = Q_{11}\sin^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + Q'_{22}\cos^4\theta \\ Q'_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta \\ Q'_{66} = [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})]\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) \\ Q'_{44} = Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta \\ Q'_{55} = Q_{44}\cos^2\theta + Q_{55}\sin^2\theta \\ Q'_{45} = (Q_{44} - Q_{55})\sin\theta\cos\theta \end{array} \right. \quad (II.57)$$

Avec :

- $Q'_{ij}$  Sont les coefficients de la matrice de rigidité d'une couche k donné.
- $\theta$  L'angle d'orientation de la fibre.

Il faut toutefois noter que  $Q'_{16}$  et  $Q'_{26}$  ne sont que des combinaisons linéaires des quatre constantes élastiques de base. Ils impliquent un couplage entre les contraintes normales et les déformations en cisaillement, ainsi qu'un couplage entre les contraintes en cisaillement et les déformations normales [25].

## 8 Conclusion :

Dans ce chapitre, nous mettons en évidence les caractéristiques mécaniques des matériaux (module d'Young longitudinal et transversal, coefficient de Poisson, module de cisaillement), d'autre part, nous décrivons en détail différents types de matériaux (anisotrope, orthotrope, transversalement isotrope, et isotrope matériaux) et montre également l'orientation des fibres dans les repérés locales et globales. L'étude du comportement des stratifiés repose sur différentes théories, que nous étudierons en détail dans le chapitre suivant.

# CHAPITRE III : Les Théories Des Plaques Composites Stratifiées

## 1 Introduction

Ce chapitre est consacré à présenter les différentes théories pour étudier le comportement mécanique des plaques stratifiées parmi ces théories on peut citer :

- ✓ La théorie classique des stratifiés basée sur l'hypothèse de Kirchhoff (CLT).
- ✓ La théorie de déformation en cisaillement du premier ordre basé sur l'hypothèse de Reissner-Mindlin (FSDT).

## 2 Historique des plaques :

La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. Elle s'inspire de la théorie des poutres. En 1888, Love utilise les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler Bernoulli pour les poutres, pour fonder une théorie des plaques minces. La théorie des plaques épaisses a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), Timoshenko (1921), Reissner (1945) et Uflyand (1948). [27]

## 3 Théorie classique des stratifiés (CLT) :

La Théorie Classique des Stratifiés est basée sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff, employées pour l'étude de structures du type plaque, et sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love, utilisées pour l'étude de structures du type coques courbes.

D'après cette théorie, une ligne droite et perpendiculaire à la surface moyenne indéformée de la structure (connue comme surface de référence ou surface neutre), reste droite et perpendiculaire à la surface de référence, ne changeant pas sa forme dans la direction de l'épaisseur, c'est-à-dire, elle reste inextensible dans cette direction, tel que représenté sur la *Figure 3.1*. [27]

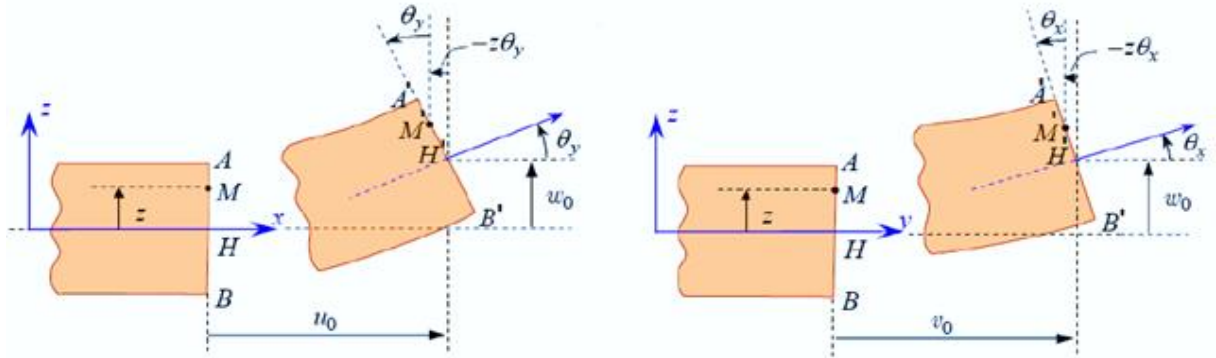
### 3.1 Les hypothèses de la Théorie de Kirchhoff :

Selon REDDY [29], dans la théorie *CLT* les effets des *déformations de cisaillements transversaux* ( $\gamma_{xz}; \gamma_{yz}$ ) et la *déformation normale transversale* ( $\varepsilon_z$ ), ne sont pas considérés.

Les autres hypothèses adoptées pour la formulation de la théorie *CLT*, sont :

- Le stratifié est considéré comme une superposition de couches parfaitement liées, (la liaison est supposée infinitésimale) afin d'éviter le délaminage,
- La déformation est supposée continue à travers l'épaisseur du stratifié afin d'empêcher le glissement d'un pli par rapport à un autre,
- Le stratifié se comporte comme une seule couche mince mais avec des caractéristiques élastiques très spéciales.
- La déformation transversale est nulle, (pas de variation de l'épaisseur).
- Les points situés sur une normale à la surface moyenne avant déformation restent sur cette normale au cours de la déformation. Ceci revient à négliger l'effet de cisaillement transverse.
- Le matériau de chaque pli présente un comportement élastique ;
- Les déformations, les déplacements et les rotations sont petits. [25]

Selon REDDY [29], le champ de déplacements de la théorie *CLT* est donné par l'expression suivante [25] :



**Figure 3. 1** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie classique des stratifiés [9]

$$U = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (III.1)$$

$u_0$  et  $v_0$  : sont les déplacements membranaires de la feuille moyenne.

$w_0$  : est le déplacement hors plan de la feuille moyenne de la plaque.

En raison de l'hypothèse de déplacements linéaires et tenant compte du fait que les déformations de cisaillement transverse ne sont pas prises en compte, la précision de la théorie *CLT* n'est adéquate que dans l'étude structures minces. Ainsi, selon CEN et al. [30], l'erreur commise par son emploi augmente avec le ratio de *l'épaisseur-largeur* des structures composites. [25]

### 3.2 Relation déformations-déplacements (Cinématique) :

Les relations déplacements-déformations suivantes sont établies aux niveaux des plis du stratifié. Pour l'obtention des relations entre les composantes des déplacements et des déformations nous considérons dans ce mémoire que ces quantités sont petites et que l'on reste dans le domaine de *l'élasticité linéaire*. Ainsi, la relation entre les déformations et déplacements est définie en fonctions des dérivées des déplacements ( $u, v, w$ ) par rapport aux coordonnées ( $x, y, z$ ). Donc, selon REDDY [29], ces relations sont exprimées sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left[ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right] - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left[ -\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right] = 0 \\ \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \left[ -\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right] = 0 \end{aligned} \quad (III.2)$$

Le champ des déformations est bien la superposition :

- Des déformations de *membrane* :



$$\boldsymbol{\varepsilon}_m = \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (III.3)$$

S'exprimant en fonction des déplacements  $(u_0, v_0)$  des points situés dans le plan  $(o y z)$ .

- Des déformations en *flexion et torsion* :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_f = \mathbf{z}\boldsymbol{\kappa}(x, y) = \mathbf{z} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{z} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (III.4)$$

$\kappa_x, \kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$  Sont les courbures de la plaque sollicitée en flexion.

Finalement le champ des déformations s'écrit :  $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{\varepsilon}_f$  (III.5)

A partir de l'équation (II.54) les contraintes dans une couche k, s'expriment par :

$$\boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{M}) = \boldsymbol{\sigma}_k(x, y, z) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \left[ \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \mathbf{z} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right]$$

Ou  $\boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{M}) = \boldsymbol{\sigma}_k(x, y, z) = \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_m(x, y) + \mathbf{z} \mathbf{Q}'_k \boldsymbol{\kappa}(x, y)$  (III.6)

$\boldsymbol{\sigma}_k(\mathbf{M})$  Représente la matrices de contrainte dans la couche k :  $h_{k-1} \leq z \leq h_k$ , la matrice de rigidité réduite  $\mathbf{Q}'_k$  varie d'une couche à l'autre .il en résulte donc **une discontinuité** du champ des contraintes dans les couches successives [25].

### 3.3 Expression des résultantes et des moments :

#### 3.3.1 Résultantes en membrane :

D'après Berthelot [09], Les résultantes des forces qui agissent sur le stratifié peuvent être obtenus en intégrant les contraintes dans chaque couche à travers son épaisseur :

$$\begin{aligned}
N(x, y) &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz & (III.7) \\
&= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z Q'_k \kappa(x, y)] dz \\
&= \sum_{k=1}^N \left[ Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[ Q'_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] \\
&= \left[ \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \kappa(x, y)
\end{aligned}$$

Soit, en définitive :

$$N(x, y) = A_{ij} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} \kappa(x, y) \quad (III.8)$$

Avec

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N [Q'_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \quad (III.9)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [Q'_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (III.10)$$

$N_x$ ,  $N_y$  et  $N_{xy}$  sont les résultantes par unité de longueur, respectivement des contraintes normales (suivant  $x$  et suivant  $y$ ) et de contrainte de cisaillement dans le plan  $(x, y)$ . Elles sont schématisées sur la **Figure 3.2** [25].

### 3.3.2 Moment de flexion et de torsion :

Les moments de flexion et de torsion exercés sur un stratifié sont définis par :

$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (III.11)$$

$$\begin{aligned}
M(x, y) &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} [z Q'_k \varepsilon_m(x, y) + z^2 Q'_k \kappa(x, y)] dz \\
&= \sum_{k=1}^N \left[ Q'_k \varepsilon_m(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z dz \right] + \sum_{k=1}^N \left[ Q'_k \kappa(x, y) \int_{h_{k-1}}^{h_k} z^2 dz \right] \\
&= \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (h_k^2 - h_{k-1}^2) Q'_k \right] \varepsilon_m(x, y) + \left[ \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (h_k^3 - h_{k-1}^3) Q'_k \right] \kappa(x, y)
\end{aligned}$$

Soit, en définitive :

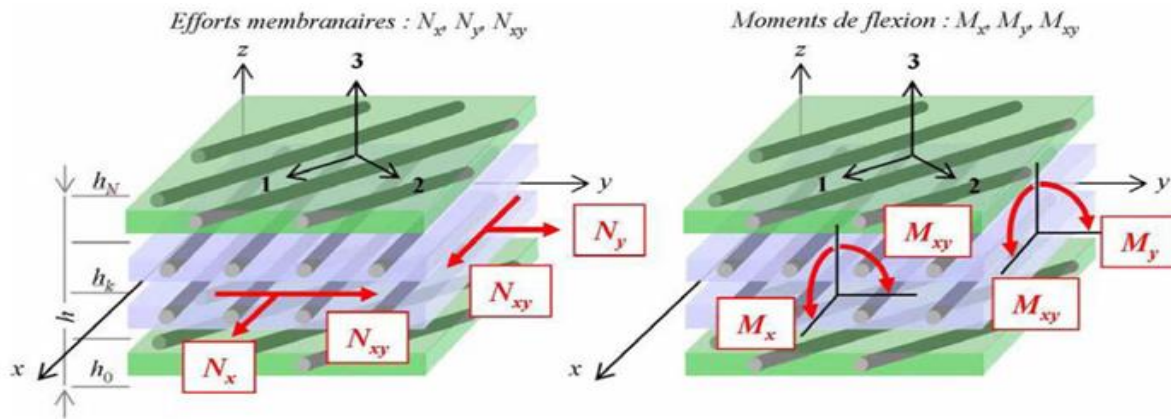
$$N(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} \kappa(x, y) \quad (III.12)$$

Avec

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [Q'_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (III.13)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [Q'_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (III.14)$$

$M_x$  et  $M_y$  sont les moments de flexion et  $M_{xy}$  le moment de torsion. Ils sont schématisés sur **Figure 3.2** [25].



**Figure 3. 2** Schématisation des résultantes en membrane, des moments de flexion et de torsion [31]

Connaissant que  $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y$  et  $\kappa_{xy}$  sont indépendants de  $z$ , les vecteurs forces et moments résultant peuvent être assemblés sous la forme :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} A_{ij} = \sum_{k=1}^N [Q'_{ij}]_k (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} [Q'_{ij}]_k (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} [Q'_{ij}]_k (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{matrix} \quad (III.15)$$

Sous cette écriture, l'analyse de la matrice de rigidité assemblée du stratifié (la matrice **ABD**) permet de mettre en évidence certains comportements élastiques caractéristiques des stratifiés [25] :

- ✓ La matrice A correspond au comportement de membrane,
- ✓ La matrice D correspond au comportement de flexion,

- ✓ La matrice  $B$  correspond aux termes de couplage entre les phénomènes de membrane et de flexion.

Ainsi, si  $B$  n'est pas nul, un effort de traction dans le plan moyen entraîne une flexion du stratifié. Toutefois d'autres couplages existent à l'intérieur même des comportements de membrane et de plaque :

- ✓ Les termes  $A_{16}$  et  $A_{26}$  correspondent aux couplages plans entre *traction* et *cisaillement*.
- ✓ Les termes  $D_{16}$  et  $D_{26}$  quantifient les couplages entre *flexion* et *torsion* de la plaque stratifiée. Le plus souvent ces couplages constituent une difficulté supplémentaire de la conception composite.

## 4 Influence de l'empilement des couches :

### 4.1 Couche isotrope :

Dans le cas d'une plaque en matériau *homogène isotrope*, le comportement élastique est décrit par le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Les *résultantes en membrane* ( $N_x, N_y, N_{xy}$ ) dépendent uniquement des *déformations en membrane* ( $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$ ) et les *moments de flexion et torsion* ( $M_x, M_y, M_{xy}$ ) dépendent uniquement des *courbures* du plan moyen ( $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ ). Dans le cas d'une plaque isotrope, il n'existe donc pas de couplage membrane-flexion/torsion.

### 4.2 Couche orthotrope rapportée à ses axes principaux :

Berthelot (2010) considère que pour une couche *orthotrope*, d'épaisseur  $h$ , dont les axes du matériau sont *confondus* avec les axes de référence de la plaque (axes de référence des contraintes et déformations exercées sur la plaque), la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (III. 16)$$

D'où l'expression des coefficients de rigidité du stratifié :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= Q_{ij}h & D_{ij} &= Q_{ij} \frac{h^3}{12} \\ A_{16} = A_{26} &= 0 & B_{ij} &= 0 & D_{16} = D_{26} &= 0 \end{aligned} \quad (III. 17)$$

Comme dans le cas d'un matériau isotrope, les résultantes en membrane ne dépendent que des déformations de membrane et les moments ne dépendent que des courbures.

### 4.3 Couche orthotrope non rapportée à ses axes :

Dans le cas où les axes du matériau de la couche orthotrope *ne coïncident pas* avec les axes de référence des contraintes, la matrice de rigidité réduite s'écrit :

$$[Q'] = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \quad (III. 18)$$

Où les coefficients  $Q'_{ij}$  hors axes sont définis en fonction des coefficients  $Q_{ij}$  dans les axes du matériau. Les coefficients de rigidité de la plaque s'expriment alors suivant :

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= Q'_{ij}h & D_{ij} &= Q'_{ij} \frac{h^3}{12} \\
 A_{16} = A_{26} &= 0 & B_{ij} &= 0 & D_{16} = D_{26} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{III. 17}$$

Nous constatons à nouveau l'absence de couplage membrane-flexion/torsion.

Toutefois, contrairement au cas d'une plaque isotrope ou d'une plaque orthotrope dont les axes principaux coïncident avec les axes de référence de la plaque, nous observons que les *résultantes normales*  $N_x, N_y$  dépendent des *déformations axiales*  $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0$ , ainsi que de la *déformation en cisaillement*  $\gamma_{xy}^0$ . Il existe donc dans ce cas un couplage *traction-cisaillement*.

De la même manière, les composantes des *moments* dépendent toutes des *courbures en flexion*  $\kappa_x, \kappa_y$ , et de la *courbure en torsion*  $\kappa_{xy}$ . Il existe donc également un *couplage flexion-torsion*.

## 5 Les type de stratifiée : [22]

### 5.1 Stratifiés symétriques :

Dans le cas de stratifiée symétrie le coefficient  $B_{ij}$  de la matrice de rigidité sont *nuls* La forme générale de L'équation constitutive de stratifiés symétriques présente de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & 0 & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ 0 & 0 & 0 & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}
 \tag{III. 18}$$

Dans le cas de stratifiés symétriques ont observé qu'il n'existe pas de couplage membrane-flexion. Il en résulte que le comportement des stratifiés symétriques est plus simple à analyser que celui des stratifiés présentant un couplage membrane-flexion/torsion. En plus, les stratifiés symétriques ne présentent pas une tendance au gauchissement due aux déformations (contractions) induites lors du refroidissement consécutif au processus de mise en œuvre des matériaux.

### 5.2 Stratifiés croisés :

Dans le cas de stratifié croisé constitué des couches dont les directions principales sont orientées alternativement à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  par rapport aux directions de référence du stratifié. L'équation constitutive de stratifiés croisés est de la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}
 \tag{III. 19}$$

### 5.3 Stratifiés croisés symétriques :

L'équation constitutive de stratifiés croisés symétrique c'est la combinaison, entre L'équation constitutive de stratifiés symétrique et L'équation constitutive de stratifiés croisés

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (III.20)$$

L'absence de couplage membrane –flexion/torsion des stratifiés symétriques s'ajoute aussi l'absence de couplage traction-cisaillement et flexion –torsion.

### 5.4 Stratifiés antisymétriques :

L'équation constitutive de stratifiés antisymétriques s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (III.21)$$

Cette équation montre l'existence d'un couplage membrane –torsion.

### 5.5 Stratifiés croisés antisymétriques :

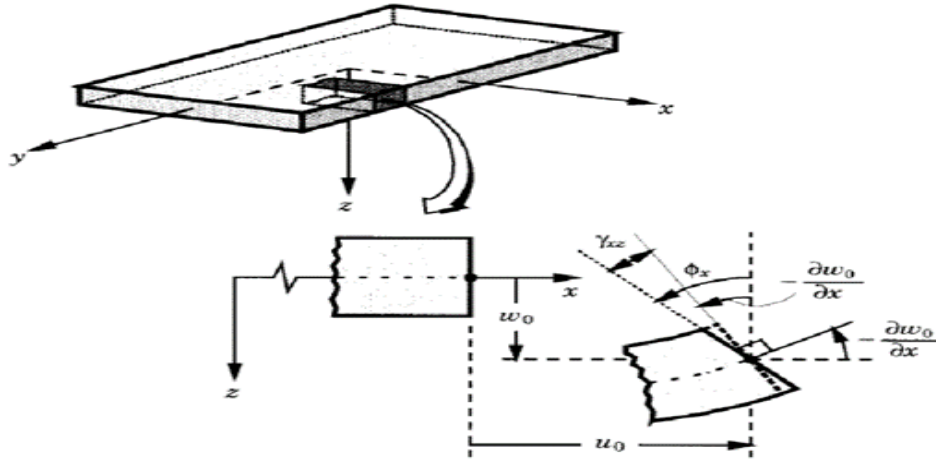
L'équation constitutive de stratifiés croisés antisymétriques s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & -B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & -B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{pmatrix} \quad (III.22)$$

Cette équation montre l'existence d'un couplage traction - flexion.

## 6 La théorie de premier ordre (FSDT) : [32]

Les modèles élaborés selon la *Théorie de la Déformation de Cisaillement de Premier Ordre (FSDT)*, sont basés sur les hypothèses adoptées dans la théorie des plaques de *Mindlin-Reissner*, selon lesquelles une ligne droite et perpendiculaire au plan moyen d'une couche quelconque, reste droite avant la déformation, toutefois, elle ne reste pas nécessairement normale à ce plan de référence après la déformation de la structure (*Figure 3.3*). La théorie *FSDT* suppose que la contrainte normale de cisaillement  $\sigma_{zz}$  nulle.



**Figure 3. 3** Géométries déformées et non déformées d'un bord d'une plaque selon l'hypothèse de Reissner-Mindlin [28]

Le champ de déplacement de la théorie de premier ordre s'écrit comme suit [28] :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \tag{III. 23}$$

$\phi_x$  Et  $\phi_y$  sont les rotations de la normale autour des axes  $(x, y)$ , respectivement.

Dans ce travail en adoptant la théorie de premier ordre (FSDT). Dans le cas d'un schéma du premier ordre le champ des déformations est déduit du champ des déplacements. Il s'écrit :

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \tag{III. 24}$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \tag{III. 25}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \tag{III. 26}$$

$$\gamma_{xy} = 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \tag{III. 27}$$

$$\gamma_{xz} = 2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \tag{III. 28}$$

$$\gamma_{yz} = 2\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{III. 29}$$

Ce champ des déformations est celui d'un schéma du premier ordre avec prise en compte du cisaillement transverse.

Le champ des déformations peut être sous-divisé en deux champs :

### 6.1 Le champ des déformations en membrane-flexion :

$$\varepsilon_{mf} = \varepsilon_m(x, y) + zk(x, y)$$

- Les déformations en membrane :

$$\varepsilon_m(M) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (III.30)$$

- Les déformations en flexion et torsion :

$$\varepsilon_f = zk(x, y) \quad (III.31)$$

$$k(x, y) = \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (III.32)$$

$$\varepsilon_f(M) = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad (III.33)$$

La matrice  $k(x, y)$  est appelée *matrice des courbures* de la plaque sollicitée en flexion.

### 6.2 Le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\gamma_c(M) = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} \quad (III.34)$$

Dans la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse, on admet toutefois que le champ est identique dans toutes les couches. La première approche consiste à admettre que les déformations en cisaillement sont égales aux déformations moyennes  $\gamma_{yz}^0$  et  $\gamma_{xz}^0$  du stratifié [9], soit :

$$\gamma_c(M) = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III.35)$$

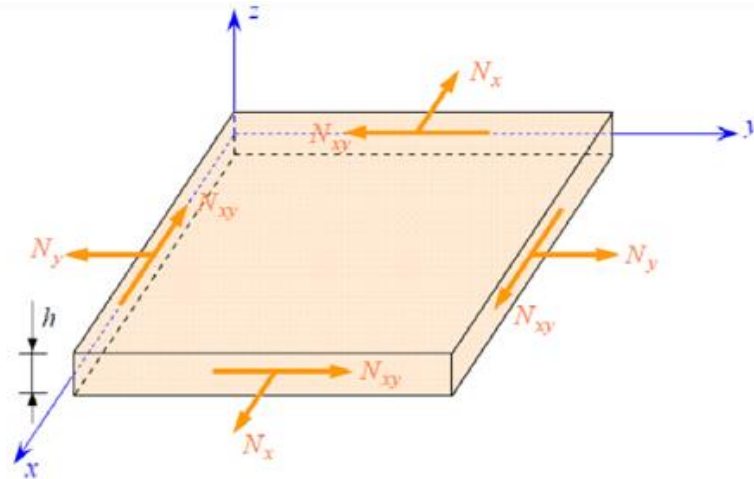
### 6.3 Les efforts résultants en membrane et flexionnelle :

➤ Les efforts de membrane sont :



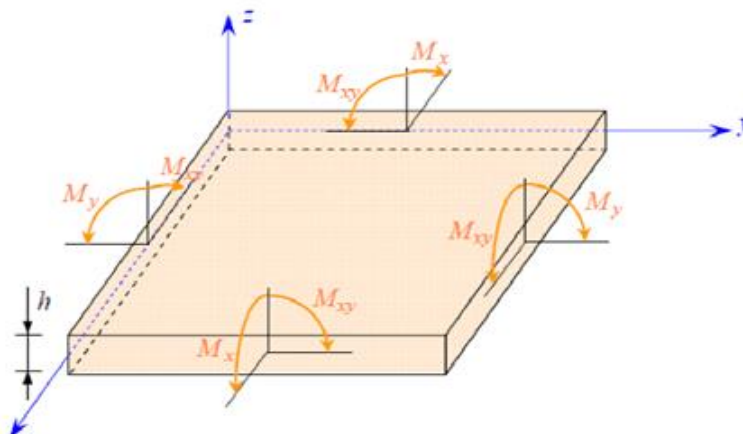
$$N(x, y) = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \tag{III. 36}$$

Les composantes  $N_x, N_y$  et  $N_{xy}$  sont les résultantes, par unité de longueur, des contraintes normales et de cisaillement dans le plan  $(x, y)$ . [32] Elles sont schématisées sur la **Figure 3.4**.



**Figure 3. 4** Schématisation des résultantes en membrane [9]

➤ **Moment de flexion et de torsion :**



**Figure 3. 5** Schématisation des moments de flexion et de torsion [9]

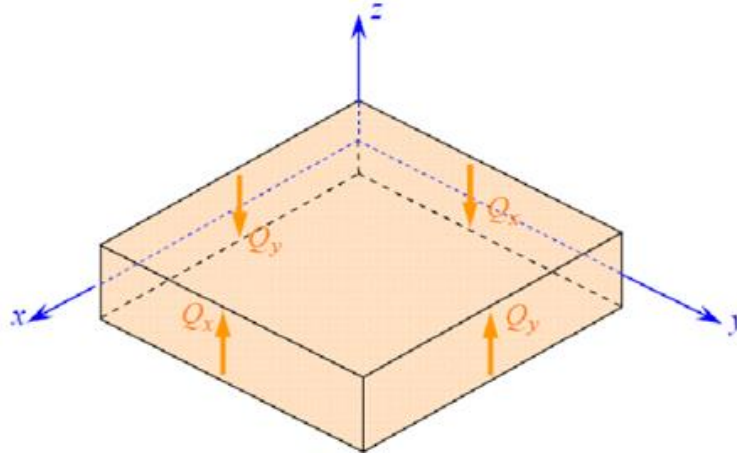
$$M(x, y) = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} Z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \tag{III. 37}$$

$M_x, M_y$  Sont les moments de flexion et  $M_{xy}$  le moment de torsion. [32]

➤ **Résultantes en cisaillement :**

$$Q(x, y) \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (III.38)$$

Les résultantes en cisaillement sont définies par unité de longueur du stratifié. [32] Elles sont schématisées sur la *Figure 3.6*.



**Figure 3. 6** Schématisation des résultantes en cisaillement [9]

### 6.4 Équation constitutive :

Finalement en va faire l'équation du comportement mécanique d'un stratifié sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III.39)$$

Soit :

$$N(x, y) = A_{ij} \varepsilon_m(x, y) + B_{ij} k(x, y) \quad (III.40)$$

Les matrices  $A_{ij}$  et  $B_{ij}$  s'écrivent :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) [Q']_k \quad (III.41)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) [Q']_k \quad (III.42)$$

Donc :

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{61} & A_{62} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (III.43)$$

Soit :

$$M(x, y) = B_{ij} \varepsilon_m(x, y) + D_{ij} \kappa(x, y) \quad (III.44)$$

Avec :

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) [Q']_k \quad (III.45)$$

Alors :

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{61} & B_{62} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (III.46)$$

On a :

$$F_{ij} = \sum_{k=1}^N (h_k - h_{k-1}) [Q']_{ij} \quad (III.47)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{54} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III.48)$$

En modifiée la partie relative aux résultantes en cisaillement transverse et remplaçantes coefficients de rigidité  $F_{ij}$  par de nouveaux coefficients de rigidité en cisaillement  $H_{ij}$  du stratifié :

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{44} F_{44} & K_{45} F_{45} \\ K_{54} F_{54} & K_{55} F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III.49)$$

Avec :  $H_{ij} = K_{ij} F_{ij}$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{54} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (III.50)$$

Les facteurs de correction du CT (FC), notés  $k$ , sont ajoutés pour corriger le décalage entre la répartition des contraintes de cisaillement transversal réelles (3D) et celles supposées dans la théorie du premier ordre. [32]

Finalement en peut être écrite l'équation du comportement mécanique d'un stratifié sous forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_f \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma^0 \end{Bmatrix} \quad (III.51)$$

- ✓ La matrice  $A$  correspond au comportement de *membrane*,
- ✓ La matrice  $D$  correspond au comportement de *flexion*,

- ✓ La matrice  $B$  correspond aux termes de *couplage* entre les phénomènes de *membrane et de flexion*,
- ✓ La matrice  $H$  correspond au comportement de *cisaillement transverse*.

Dans le cas où le stratifié est symétrique, le couplage membrane-flexion-torsion est nul ( $B = 0$ ). [32]

## 7 Conclusion :

Au cours de ce chapitre, on a présenté les théories du comportement mécanique des plaques stratifiées ; comme on a vu ci-dessus, on a utilisé la théorie classique des stratifiés pour les plaques minces et la théorie de déformation en cisaillement du premier ordre pour les plaques épaisses. Ces théories sont utilisées dans le quatrième chapitre.

# CHAPITRE IV : Effets De La Température Sur Les Vibrations Des Plaques Composites Stratifiées

## 1 Introduction

L'effet de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées se manifeste de plusieurs façons. Le premier et le plus évident des effets de la température est la détérioration des propriétés matérielles des structures avec l'accroissement de cette dernière, ce qui induit une réduction des fréquences propres de la structure. Le second effet qui résulte de l'élévation de température est le développement de contraintes thermiques, capable de changer la rigidité effective de la structure. Ce changement de la rigidité n'est pas associé au changement de propriétés matérielles, mais dépend seulement de l'état de contraintes [50].

## 2 Synthèse bibliographique

D'après **TAUCHERT** [33] l'un des premiers travaux à avoir pris en considération l'effet de la dépendance des propriétés matérielles de la température sur la vibration des plaques est dû à **Fauconneau** et **Marangoni** [34]. Les auteurs ont étudié l'effet d'une élévation linéaire à une dimension de la température sur les fréquences propres d'une plaque rectangulaire isotrope simplement appuyée. Dans cette étude seule de module d'élasticité était dépendant de la température.

**Dhotarad** et **Ganesan** [35,36] ont examiné l'influence du gradient de la température sur les vibrations des plaques isotropes rectangulaire mince ayant au moins une arête encastree [35] ou simplement appuyée [36]. Les auteurs ont utilisé une distribution de température à une- et à deux-dimension en utilisant la méthode des différences finies ainsi que celle des éléments finis. On trouve également des travaux qui ont considéré des plaques avec une épaisseur variable.

**Rao** et **Satyanarayana** [37] ont étudié l'effet du gradient de la température sur les fréquences propres d'une plaque isotrope ayant une épaisseur qui varie linéairement sous une combinaison de conditions aux limites (simplement appuyé et encastree).

**Ganesan** et **Dhotarad** [38] ont étendu leur travail reporté dans la référence [35] pour l'étude des plaques orthotropes avec une variation linéaire de l'épaisseur, similaire à celle de [37]. Par la suite, **Tomar** et ses collègues [39-42] ont étudié le comportement vibratoire des plaques rectangulaires et circulaires isotropes ainsi qu'orthotropes ayant des propriétés élastiques dépendantes de la température et une épaisseur variable.

**Adeniji-Fashola** et **Oyediran** [43] ont étudié le comportement vibratoire d'une plaque isotrope rectangulaire précontrainte en utilisant une approche analytique. Dans la dernière décennie, Gupta et ses collègues [44-48] ont présenté une série de travaux sur des plaques ayant une variation bidirectionnelle de l'épaisseur. Les auteurs ont pris en considération les effets du gradient de la température et la non-homogénéité pour étudier les vibrations libres des plaques orthotropes et viscoélastiques rectangulaires ainsi que trapézoïdales.

En 1998, **K. SIVAKUMAR, N. G. R. IYENGAR DEB**, Ont présenté une étude qui concerne l'analyse de vibrations libres de plaques composites en présence d'ouverture. Les ouvertures dans les membres structurels comme les ailes d'avions composées de stratifiés composites peuvent entraîner une modification de leur comportement dynamique. Le modèle utilisant un élément iso paramétrique à neuf nœuds  $C^0$ , avec 7ddl/nœud et une théorie de déplacement d'ordre supérieur qui tient compte de la variation parabolique des contraintes transversales de cisaillement est utilisé pour prédire le comportement dynamique. Des résultats ont été obtenus pour des plaques stratifiées avec diverses géométries d'ouverture telles que le carré, le rectangle, le cercle et l'ellipse dans la grande plage d'amplitude. Les courbes sont dessinées pour diverses conditions aux limites et ratios de l'ouverture. Le modèle actuel des éléments fini Ritz prédit le comportement dans la plage d'amplitude élevée de manière assez satisfaisante. La présence de l'ouverture et sa forme ont un effet significatif sur le comportement

du laminé dans la grande plage d'amplitude. On observe en général que lorsque le taux de l'ouverture augmente jusqu'à 0.2, la non-linéarité augmente et diminue progressivement pour une augmentation supplémentaire du taux de l'ouverture. Ces aspects doivent être gardés à l'esprit lors de la conception de plaques stratifiées composites avec ouvertures. Lorsque le rapport d'amplitude augmente au-delà de 0.6, l'effet de la non-linéarité pour un stratifié à pli d'angle symétrique est plus grand par rapport au stratifié à pli d'angle antisymétrique en présence d'une ouverture carrée. On observe que pour la même zone d'ouverture, le stratifié avec trou circulaire produit une non-linéarité supérieure à celle du stratifié avec ouverture carrée pour tous les stratifiés discutés ci-dessus. Il est également noté que les stratifiés à couches croisées antisymétriques produisent un comportement de type adoucissant en présence de ouvertures rectangulaires et elliptiques [49].

En 2013, **CHEN et al.** [51] ont étudié les vibrations et la stabilité des plaques composites précontraintes ayant des propriétés matérielles qui dépendent de la température. L'étude a porté sur l'effet de la dépendance propriétés matérielles à la température et du nombre de couches sur charge et la température critique de flambement, ainsi que sur les vibrations libres des plaques stratifiées croisées.

En 2015, **LAHOUEL.B** a étudié les vibrations et le flambement des plaques composites stratifiées conventionnelles et auxétiques avec ou sans trous. Dans la première partie, une comparaison a été faite entre les théories de la méthode FSDT, CLT et FEA en étudiant la variance de la charge critique d'enfoncement et des fréquences normales en fonction du rapport largeur sur épaisseur de la plaque. Et Dans la deuxième partie, une analyse en éléments finis utilisant le code Ansys, est employée pour prédire le comportement auxétique des stratifiés symétriques  $[\pm\theta]_s$ . Une étude numérique a également été menée sur le comportement vibratoire libre des plaques stratifiées auxétiques. La dernière partie a trait à l'analyse numérique du comportement vibratoire de plaques stratifiées symétriques, avec ou sans trous carrées, lorsqu'elles sont soumises à des charges de compression.

En 2015, **OUNIS HOUDAYFA** [50] a étudié de l'effet de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées a utilisé un élément fini basé sur le modèle DDM (Displacement Discret Mindlin). Deux effets sont considérés simultanément, à savoir : L'effet de la dépendance des propriétés matérielles à la température et l'effet des contraintes thermiques.

En 2018, **ATIKI El houssine** [32] a étudié l'analyse de vibrations libres des plaques stratifiées en matériaux composites en présence d'une ouverture centrale. En utilisant un élément fini rectangulaire à quatre nœuds avec cinq degré de liberté par nœud, L'analyse est basée sur la théorie de premier ordre de cisaillement transverse.

En 2020, **ELMASCRIS** [52] a contribué à l'étude l'effet de température sur le comportement vibratoire des structures en matériaux composites avancés. Dans cette thèse, il analyse la vibration libre des plaques FGM simplement appuyées dans un environnement thermique ayant des propriétés matérielles qui dépendent de la température. La théorie développée est une théorie de déformation de cisaillement hyperbolique avec la prise en compte de la déformation normale. Le nombre d'inconnues dans la théorie proposée est seulement cinq, contrairement aux autres théories. Les conditions thermiques uniforme, linéaire, non linéaire et sinusoïdale sont imposées aux surfaces supérieures et inférieures de la plaque FGM.

En 2021, **A. RAHMANI, S. FAROUGHI et M.I. FRISWELL** [53] Ils ont réalisé une analyse complète du comportement vibratoire sur des plaques composites stratifiées antisymétriques reposant sur des fondations viscoélastiques subissant des effets thermiques. Les équations de mouvement gouvernantes développées selon le principe de Hamilton et la théorie des plaques de Reddy ont été utilisées, où la théorie de la déformation par cisaillement d'ordre supérieur (HSDT) est utilisée pour

capturer une haute résolution. De plus, la méthode de quadrature différentielle généralisée (GDQM) est utilisée pour prédire la réponse vibrationnelle et les fréquences propres.

### 3 Comportement dynamiques des plaques stratifiées en matériaux composites :

#### 3.1 Relations fondamentales des plaques dans un schéma du premier ordre :

Les relations fondamentales ou équations d'équilibre d'un solide élastique sont données :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz} + f_x &= \rho a_x \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{yz} + f_y &= \rho a_y \\ \frac{\partial}{\partial x} \sigma_{zx} + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{zy} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} + f_z &= \rho a_z \end{aligned} \quad (IV.1)$$

Où  $f_x, f_y$  et  $f_z$  sont les composantes des forces volumiques exercées sur un solide,  $a_x, a_y$  et  $a_z$  Les composantes du vecteur accélération.  $\rho$  Est la masse volumique.

#### 3.2 Relations fondamentales relatives aux résultantes en membrane :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_x dz \quad (IV.2)$$

L'intégration des équations (IV.2), suivant l'épaisseur du stratifié, conduit aux relations fondamentales d'un élément de plaque, relatives aux résultantes. L'intégration des deux premières aboutit aux relations relatives aux résultantes de membrane. [32]

#### 3.3 Relation fondamentale relative aux résultantes de cisaillement :

L'intégration suivant l'épaisseur du stratifié de la troisième terme des équations (IV.2) conduit à [32] :

$$\int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} dz + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} f_z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho a_z dz \quad (IV.3)$$

#### 3.4 Relations fondamentales relatives aux moments :

Les relations fondamentales relatives aux moments sont obtenues en multipliant par  $z$  les deux premières des équations (IV.2), puis en intégrant suivant l'épaisseur de la plaque[32].

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \int_{-h/2}^{h/2} z \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz + \int_{-h/2}^{h/2} z f_x dz = \int_{-h/2}^{h/2} \rho z a_x dz \quad (IV.4)$$

### 4 Lois de comportement :

Comme dans notre cas les propriétés matérielles sont supposées être dépendantes de la température, les relations contraintes-déformations dans le système de coordonnées locales des fibres d'un stratifié sujette à une variation de température, sont données par (Reddy [28]) :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11}(T) & Q_{12}(T) & 0 \\ Q_{21}(T) & Q_{22}(T) & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66}(T) \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{Bmatrix} \right) \\ \begin{Bmatrix} \tau_{13} \\ \tau_{23} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{44}(T) & 0 \\ 0 & Q_{55}(T) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (IV.5)$$



Où 1 et 2 désigne respectivement la direction longitudinale des fibres et la direction transversale normale aux fibres dans le plan de la plaque.  $\varepsilon_1^T$  Et  $\varepsilon_2^T$  sont les déformations d'origine thermique et qui sont données par :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1^T \\ \varepsilon_2^T \\ 0 \end{pmatrix} = \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_1(T) \\ \alpha_2(T) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (IV.6)$$

Avec  $\alpha_1(T)$  et  $\alpha_2(T)$  sont respectivement le coefficient de dilatation thermique longitudinal et transversal en fonction de la température et  $\Delta T$  la variation de température. Les composantes de la rigidité  $Q_{ij}(T)$  sont données par :

$$\begin{aligned} Q_{11}(T) &= \frac{E_1(T)}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{22}(T) = \frac{E_2(T)}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, Q_{12}(T) = \frac{\nu_{12}E_1(T)}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66}(T) &= G_{12}(T), Q_{44}(T) = G_{13}(T), Q_{55}(T) = G_{23}(T) \end{aligned} \quad (IV.7)$$

Il est noté que la dépendance à la température du coefficient de poisson  $\nu$  est négligeable par rapport aux autres propriétés, donc elle n'est prise en considération [32].

Les relations contraintes-déformations de la couche "k" dans le repère global du stratifié, sont données par :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{21} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{61} & Q'_{62} & Q'_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k - \Delta T \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k \\ \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k &= \begin{bmatrix} K_{11}Q'_{44} & K_{12}Q'_{45} \\ K_{21}Q'_{54} & K_{22}Q'_{55} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_k \end{aligned} \quad (IV.8)$$

Avec  $K_{ij}$  sont les facteurs de correction de cisaillement.

Les efforts à mi- plan d'une plaque et les moments sont liés aux déformations et aux courbures par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & B_{31} & B_{32} & B_{33} \\ B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (IV.9)$$

Où

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \\ [T] &= [C][\gamma] \end{aligned} \quad (IV.10)$$

Avec  $[A], [D], [B]$  et  $[C]$  sont les rigidités extensionnelle, flexionnelle, couplage membrane-flexion et de cisaillement transverse, respectivement, celles-ci peuvent être définies par :

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k dz & B_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k z dz \\
D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k z^2 dz & C_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k dz
\end{aligned} \tag{IV. 11}$$

En notant par  $\sigma_{ij}$  les contraintes dans le plan, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
N_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz & M_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} z dz \\
T_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ij} dz
\end{aligned} \tag{IV. 12}$$

Les résultantes de force et de moment thermique sont définies par :

$$\begin{aligned}
N^T &= \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k [\Delta T \{\alpha\}^T] dz \\
M^T &= \int_{-h/2}^{h/2} [Q'_{ij}]_k [\Delta T \{\alpha\}^T] z dz
\end{aligned} \tag{IV. 13}$$

## 5 Energie potentielle de déformation et travail des forces appliquées :

L'énergie potentielle de déformation d'une plaque est donnée par :

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma^T \cdot \varepsilon \cdot dv \tag{IV. 14}$$

Où  $v$  est le volume de la plaque.

En utilisant les relations contraintes-déformations et les relations constitutives des stratifiés, l'énergie potentielle de déformation peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_v \left( \{\varepsilon_L\}^T [A] \{\varepsilon_L\} + \{\varepsilon_L\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B] \{\varepsilon_L\} + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} \right. \\
&\quad \left. + \{\gamma\}^T [C] \{\gamma\} \right) dv
\end{aligned} \tag{IV. 15}$$

Dans le cas de grande déformation et l'existence de chargement thermique, l'énergie potentielle totale est donnée par :

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_v \left( \{\varepsilon_L^0\}^T [A] \{\varepsilon_L^0\} + \{\varepsilon_L^0\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B] \{\varepsilon_L^0\} + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} + \{\gamma\}^T [C] \{\gamma\} \right. \\
\left. - 2 \left( \{\varepsilon_L^0\}^T [N^T] + \{\kappa\}^T [M^T] \right) + \{\varepsilon_{NL}^0\} [N^T] \right) dv \tag{IV. 16}$$

En introduisant les relations (IV. 9) dans l'expression de l'énergie, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2} \iint_{-1}^1 \{U_n\}^T \left( \begin{array}{l} \{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} \\ + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} \\ + \{B_c\}^T [C] \{B_c\} \end{array} \right) \{U_n\} |J| d\xi d\eta \\
& - \iint_{-1}^1 \{U_n\}^T \{ [S_\varepsilon]^T [N^T] + [S_\kappa]^T [M^T] \} |J| d\xi d\eta \\
& + \frac{1}{2} \iint_{-1}^1 \{U_n\}^T \{ [G]^T [N_0^T] [G] \} \{U_n\} |J| d\xi d\eta
\end{aligned} \tag{IV.17}$$

Où

$|J|$  Est le déterminant de la matrice Jacobienne.

$$\{\varepsilon_l^0\} = [B_m]\{q\}, \quad \{\kappa\} = [B_f]\{q\}, \quad \{\gamma\} = [B_c]\{q\}$$

$$[N_0^T] = \begin{bmatrix} N_x^T & N_{xy}^T \\ N_{xy}^T & N_y^T \end{bmatrix}$$

$[G]$  Est une matrice  $2 \times 40$  composantes, qui relie le vecteur  $\left[ \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right]$  au vecteur déplacement  $\{q\}$ .

## 6 Matrice de rigidité élémentaire et vecteur forces :

En se basant sur le principe de l'énergie potentielle minimale, la première variation permet d'obtenir :

- La matrice de rigidité élémentaire :

$$[K^e] = \iint_{-1}^1 \left( \begin{array}{l} \{B_m\}^T [A] \{B_m\} + \{B_m\}^T [B] \{B_f\} \\ + \{B_f\}^T [B] \{B_m\} + \{B_f\}^T [D] \{B_f\} \\ + \{B_c\}^T [C] \{B_c\} \end{array} \right) |J| d\xi d\eta \tag{IV.18}$$

- Le vecteur forces thermiques élémentaire :

$$\{F^e\} = \iint_{-1}^1 \{q\}^T \{ [S_\varepsilon]^T [N^T] + [S_\kappa]^T [M^T] \} |J| d\xi d\eta \tag{IV.19}$$

- La matrice géométrique élémentaire due aux contraintes thermiques :

$$[K_G^e] = \iint_{-1}^1 \{ [G]^T [N_0^T] [G] \} |J| d\xi d\eta \tag{IV.20}$$

## 7 Matrice de masse élémentaire :

Vu que notre étude vise à traiter le comportement vibratoire des plaques composites, il est nécessaire de formuler la matrice mass. Cette dernière, peut être évaluée à partir de l'expression de l'énergie cinétique, qui s'écrit :

$$V = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV \tag{IV.21}$$

Avec  $\dot{u}, \dot{v}$  et  $\dot{w}$  sont les composantes du vecteur vitesse d'un point  $q$  de la plaque.  $\rho$  Est la masse volumique.

En introduisant le champ de déplacement définie par l'équation (III.22) et les fonctions de forme bilinéaires  $\{N_i\}$ , on obtient :

$$V^e = \frac{1}{2} \{U_n\}^T \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \{N_i\}^T \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \{N_i\} \right\} \{U_n\} |J| d\xi d\eta \quad (IV.22)$$

Avec

$$I_0 = \sum_{i=1}^N \rho (z_{i+1} - z_i) \quad (IV.23)$$

$$I_2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^N \rho (z_{i+1}^3 - z_i^3)$$

Avec  $N$  est le nombre de couches de la plaque stratifiée.

- La matrice de masse élémentaire est définie par :

$$[M^e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left( \{N_i\}^T \begin{bmatrix} I_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \{N_i\} \right) |J| d\xi d\eta \quad (IV.24)$$

## 8 Procédure de solution :

Afin d'étudier l'effet de la température sur les vibrations des plaques composites stratifiées, on procède en deux étapes : la première étape consiste à déterminer la température critique de flambement de la plaque stratifiée. Cette étape nous aide à déterminer la température maximale que peut supporter la plaque avant de perdre sa stabilité. La détermination de la température critique de flambement revient à résoudre le problème aux valeurs propres suivant [32] :

$$([K] + \lambda[K_G])\{X\} = 0 \quad (IV.25)$$

Avec :

$[K]$  Est la matrice de rigidité globale,  $[K_G]$  est la matrice géométrique globale,  $\lambda$  la charge non dimensionnelle de flambement,  $\{X\}$  représente le vecteur modal.

Cependant, comme les propriétés matérielles dépendent de la température, la détermination de la température de flambement se fait d'une manière itérative, en suivant les étapes suivantes [32] :

1. Calculer la température critique flambement sans dépendance des propriétés matérielles à la température.
2. En utilisant la température critique trouvée dans l'étape 1, on détermine des propriétés matérielles en fonction de cette température et on calcule à nouveau la température critique de flambement.

Après avoir déterminé la température critique de flambement, on entame la deuxième étape qui est l'effet des contraintes thermiques sur les fréquences propres de vibration. A cet effet, on résout le problème aux valeurs propres suivant [32] :

$$[(\mathbf{K}) + (\mathbf{K}_G) - \omega^2(\mathbf{M})]\{\mathbf{X}\} = \mathbf{0} \quad (\text{IV.26})$$

Avec  $[\mathbf{K}_G]$  est la matrice géométrique qui traduit la variation de la raideur avec l'état de contrainte thermique,  $[\mathbf{M}]$  est la matrice masse globale,  $\omega$  fréquence propre de vibration.[32]

## 9 Conclusion :

Au cours de ce chapitre, nous avons commencé par une synthèse bibliographique généralement sur l'effet de la température sur la vibration des différents types des plaques avec l'utilisation de plusieurs théories. Ensuite nous avons basé l'étude de ce phénomène sur deux théories premièrement la théorie classique de stratifiées puis la théorie de déformation de cisaillement d premier ordre.

**CHAPITRE V :**  
**Modélisation Des Plaques**  
**Composites Stratifiées**

## 1 Introduction

Comprendre l'effet de la température sur le comportement vibratoire des composites stratifiés est essentiel. Ce chapitre est principalement consacré à la modélisation des plaques composites stratifiées par un logiciel basé sur la méthode des éléments finis « **ABAQUS** ».

Le présent chapitre est divisé en deux parties :

Dans la première partie, nous allons présenter une étude comparative pour vérifier et valider les résultats de modélisation des plaques isotrope et des plaques composite stratifiées sous l'effet de la température (la distribution uniforme) avec les résultats existant dans les littératures (analytique et numérique) afin de valider notre travail.

Notre modélisation est basée sur les trois éléments d'ABAQUS à savoir :

- STRI65 : élément Shell triangulaire à 6 nœuds/5 ddl avec intégration réduite.
- S4R : élément Shell à 4 nœuds avec intégration réduite.
- S8R : élément Shell à 8 nœuds avec intégration réduite.

Pour la deuxième partie, nous allons faire une étude paramétrique pour comprendre le comportement vibratoire des plaques composites stratifiées. L'influence de différents paramètres pouvant affecter la température de vibration des plaques stratifiées. A savoir :

- L'effet rapport d'épaisseur ( $a/h$ ).
- Les conditions aux limites.
- Les types des matériaux (T300/5208 Graphite/Epoxy ; AS4/3501-6 Graphite/Epoxy) Ces matériaux sont très largement utilisés dans l'industrie.
- Stratification (orientation des fibres).
- L'effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ).
- Effet de la dépendance des propriétés matérielles à la température.

## 2 Présentation du logiciel ABAQUS :

**ABAQUS** est un code de calcul par la méthode des éléments finis créé en 1978. Il est avant tout un logiciel de simulation de problèmes très variés en mécanique. Simuler la réponse physique des structures soumises à des chargements, des températures, des impacts ou autres conditions extérieures, Il est connu et répandu, en particulier pour ses traitements performants de problèmes non-linéaires. [54]

## 3 Les éléments utilisés par ABAQUS :

Le code de calcul, **ABAQUS** dispose d'une multitude de types d'éléments qui diffèrent par leurs propriétés d'interpolation, de symétrie, et leurs propriétés physiques. [56]

Ainsi, les différentes grandes classes d'éléments :

- Les éléments unidimensionnels (1D) : barre, poutre, rectiligne ou courbe.
- Les éléments bidimensionnels (2D) : élasticité plane (contrainte ou déformation plane), plaques en flexion, coques courbes de forme triangulaire ou rectangulaire.
- Les éléments tridimensionnels (3D) : de forme tétraédrique, hexaédrique... etc.
- Les éléments axisymétriques : (pour les pièces présentant une symétrie de révolution au niveau de la géométrie et du chargement).
- Les autres éléments : ressorts, amortisseurs, rigides. [55]

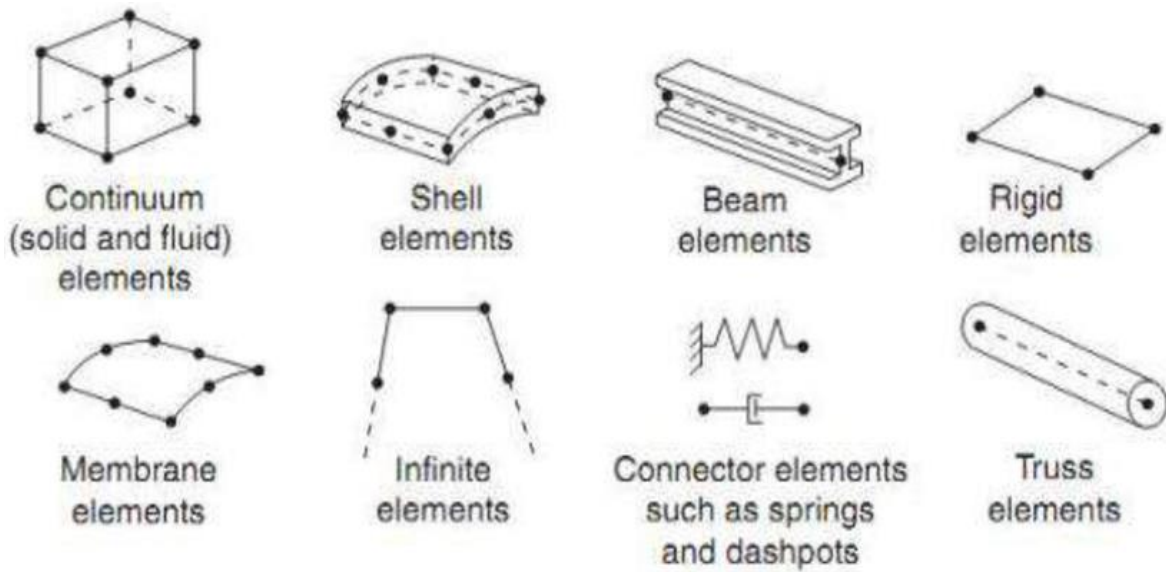


Figure 5. 1 Différent type d'éléments disponibles dans la bibliothèque d'ABAQUS [55].

#### 4 Les systèmes d'unités dans le logiciel ABAQUS :

Avant de commencer à définir un modèle, vous devez choisir le système d'unités que vous utiliserez. ABAQUS n'a pas de système intégré d'unités. Toutes les données d'entrée doivent être spécifiées dans des unités cohérentes dans les résultats qui suivent le système d'unité et base sur SI (mm). [57]

Tableau 5. 1 Les unités dans ABAQUS [58]

| Quantité        | SI                         | SI(mm)                         | US Unit (Ft)               | US Unit (inch)                          |
|-----------------|----------------------------|--------------------------------|----------------------------|---|
| Longueur        | <i>m</i>                   | <i>mm</i>                      | <i>ft</i>                  | <i>in</i>                               |
| Force           | <i>N</i>                   | <i>N</i>                       | <i>lbf</i>                 | <i>lbf</i>                              |
| Masse           | <i>kg</i>                  | <i>tonne(10<sup>3</sup>kg)</i> | <i>slug</i>                | <i>lbf s<sup>2</sup>/in</i>             |
| Temps           | <i>s</i>                   | <i>s</i>                       | <i>s</i>                   | <i>s</i>                                |
| Contrainte      | <i>Pa(N/m<sup>2</sup>)</i> | <i>MPa(N/mm<sup>2</sup>)</i>   | <i>lbf/ft<sup>2</sup></i>  | <i>Psi (lbf/in<sup>2</sup>)</i>         |
| Energie         | <i>J</i>                   | <i>mJ(10<sup>-3</sup>J)</i>    | <i>ft lbf</i>              | <i>in lbf</i>                           |
| Masse volumique | <i>kg/m<sup>3</sup></i>    | <i>tonne/mm<sup>3</sup></i>    | <i>slug/ft<sup>3</sup></i> | <i>lbf s<sup>2</sup>/in<sup>4</sup></i> |

Tableau 5. 2 Les conditions aux limites

| Conditions aux limites | Abréviation | Les retenus aux bords  |
|------------------------|-------------|--|
| Simplement appuyé      | SSSS        | $x \rightarrow v = w = \theta_y = 0$<br>$y \rightarrow u = w = \theta_x = 0$ |
| Encastré               | CCCC        | $u = v = w = \theta_x = \theta_y = 0$  |

#### La première partie :



## 5 Validation

### 5.1 Vibrations libres de Plaques isotropes :

On considère une plaque isotrope carrée ( $a/b = 1$ ), avec deux rapports d'épaisseur  $a/h = 10$  et  $a/h = 100$ , ainsi que deux types de conditions aux limites, Encastrée (CC) et Simplement appuyée (SS). Les fréquences propres adimensionnelles sont données par [50] :

$$\bar{\omega} = \omega \times a \sqrt{\frac{\rho}{G}} \quad (V.1)$$

Les plaques ont des propriétés matérielles définies par :

$$\nu = 0.3 ; E = 10920 ; G = 4200 ; \text{densité} = 1$$

Les Tableau 5. 3 et Tableau 5. 4 montre la convergence de la fréquence propre  $\bar{\omega}$  de plaques isotropes encastrées et simplement appuyées pour deux cas d'épaisseur  $a/h = 10$  et  $a/h = 100$ , respectivement. Les résultats trouvés par le présent élément ont été comparé avec des résultats trouvés par un élément fini quadrilatérale à intégration sélective ainsi qu'avec la solution analytique.

**Tableau 5. 3** Convergence de la fréquence propre  $\bar{\omega}$  de plaques isotropes avec  $a/h = 10$ .

|    |         | Présent<br>S4R | Présent<br>S8R | OUNIS.H<br>[50] | Q4 [59] | Analytique<br>[60] |
|----|---------|----------------|----------------|-----------------|---------|--------------------|
| CC | 10 × 10 | 1.6672         | 1.6370         | 1.6045          | 1.6259  | 1.5940             |
|    | 15 × 15 | 1.6502         | 1.6369         | 1.5973          | 1.6063  |                    |
| SS | 10 × 10 | 0.96719        | 0.95945        | 0.9398          | 0.9399  | 0.930              |
|    | 15 × 15 | 0.96293        | 0.95953        | 0.9345          | 0.9327  |                    |

D'après le Tableau 5. 3, on voit que les résultats obtenus par la présente modélisation sont en très bon accord avec ceux de la littérature.

**Tableau 5. 4** Convergence de la fréquence propre  $\bar{\omega}$  de plaques isotropes avec  $a/h = 100$ .

|    |         | Présent<br>S4R | Présent<br>S8R | OUNIS.H<br>[50] | Q4 [59] | Analytique<br>[60] |
|----|---------|----------------|----------------|-----------------|---------|--------------------|
| CC | 10 × 10 | 0.18478        | 0.18108        | 0.1763          | 0.1800  | 0.1754             |
|    | 15 × 15 | 0.18260        | 0.18091        | 0.1758          | 0.1774  |                    |
| SS | 10 × 10 | 0.10015        | 0.09931        | 0.0971          | 0.0973  | 0.0963             |
|    | 15 × 15 | 0.09968        | 0.09931        | 0.0966          | 0.0968  |                    |

D'après le Tableau 5. 4, on voit que les résultats obtenus par la présente modélisation sont en très bon accord avec ceux de la littérature.

Nous présentons respectivement les deux premiers modes de vibration de plaque isotrope carrée simplement appuyée et encastree pour élément S8R, S4R avec le maillage (10 × 10) et pour deux cas d'épaisseur  $a/h = 10$  et  $a/h = 100$ .

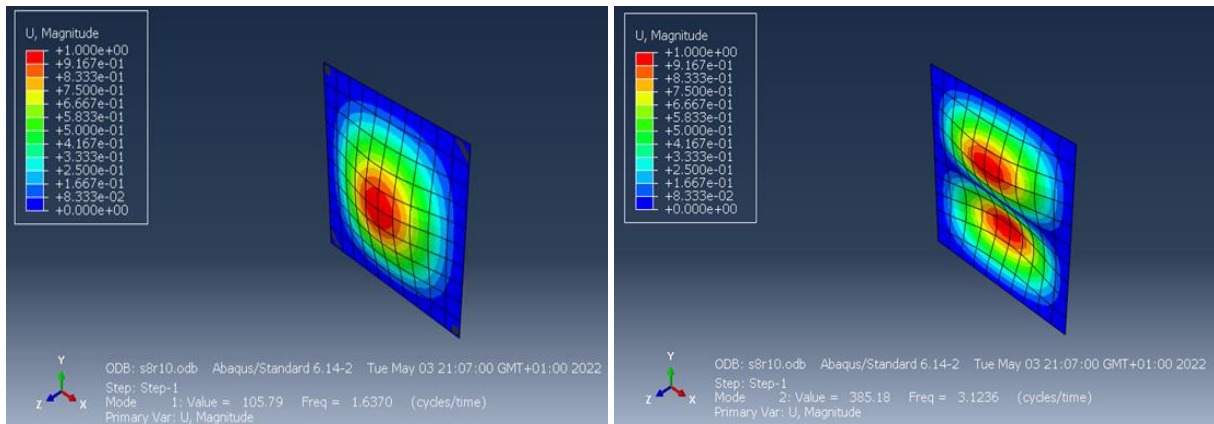


Figure 5. 2 Les deux premiers modes de vibration de plaque isotrope carrée.

### 5.2 Vibrations libres de plaques composites stratifiées :

Le but de ce test est d'étudier la convergence des fréquences propres de plaques composites stratifiées carrées avec une séquence d'empilement(0°/90°/0°). L'effet des conditions aux limites ainsi que du rapport d'épaisseur sont considérés. Les valeurs propres sont exprimées en termes de fréquences adimensionnelles, définies par [50] :

$$\bar{\omega} = \left( \frac{\omega b^2}{\pi^2} \right) \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \tag{V.2}$$

Avec :

$$D_0 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})} \tag{V.3}$$

Avec des propriétés matérielles définies par :

$$E_1/E_2 = 40 ; G_{12} = G_{13} = 0.6E_2 ; G_{23} = 0.5E_2 ; \nu_{12} = 0.25 ; \nu_{21} = 0.00625$$

Le tableau 5.5 présent la convergence des deux premières fréquences d'une plaque composite encastree avec une séquence d'empilement(0°/90°/0°). Deux rapport d'épaisseur ( $t/b=0.001$  et  $0.20$ ) sont pris en considération. Les résultats sont obtenus pour un maillage de ;  $10 \times 10$ .

Les fréquences trouvées avec la présente formulation sont comparées avec les résultats des P-Ritz de Liew [61] et Ounis.H [50].

**Tableau 5. 5** Convergence des fréquences propres d'une plaque ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) encastree.

| t/b                   | Maillage ( $10 \times 10$ ) |         |        |        |
|-----------------------|-----------------------------|---------|--------|--------|
|                       | 0.001                       |         | 0.2    |        |
|                       | 1                           | 2       | 1      | 2      |
| <b>Modes</b>          |                             |         |        |        |
| <b>Présent S4R</b>    | 15.0472                     | 18.2273 | 4.2760 | 6.0543 |
| <b>Présent S8R</b>    | 14.7540                     | 18.1681 | 4.2534 | 5.9524 |
| <b>Présent STRI65</b> | 14.6460                     | 17.7922 | 4.3092 | 6.1181 |
| <b>Ounis.H [50]</b>   | 14.8326                     | 17.9662 | 4.4905 | 6.8336 |
| <b>Liew [61]</b>      | 14.6655                     | 17.6138 | 4.4468 | 6.6419 |

D'après le tableau 5. 5, on remarque que les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux de Liew [61] et Ounis.H [50].

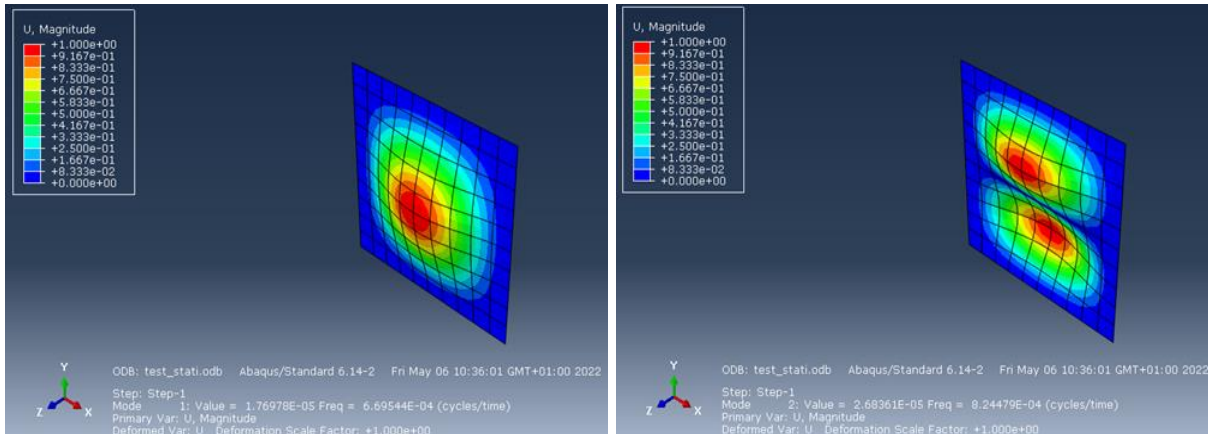
Le tableau 5. 6 présente la convergence des deux premières fréquences d'une plaque composite simplement appuyée avec une séquence d'empilement ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ). Les mêmes paramètres que celles du cas de la plaque encastree sont considérés.

**Tableau 5. 6** Convergence des fréquences propres d'une plaque ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) simplement appuyée

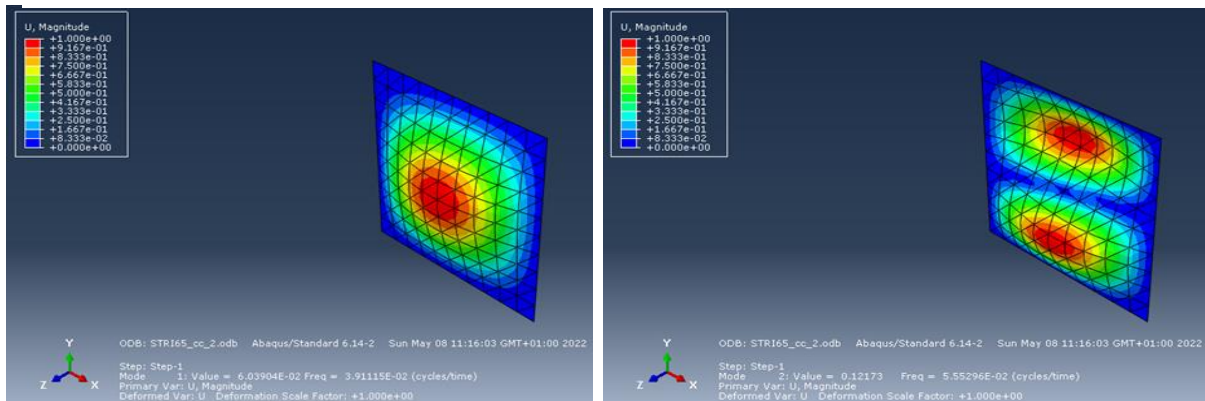
| t/b                   | Maillage ( $10 \times 10$ ) |        |        |        |
|-----------------------|-----------------------------|--------|--------|--------|
|                       | 0.001                       |        | 0.2    |        |
|                       | 1                           | 2      | 1      | 2      |
| <b>Modes</b>          |                             |        |        |        |
| <b>Présent S4R</b>    | 6.6800                      | 9.6510 | 3.5558 | 5.4495 |
| <b>Présent S8R</b>    | 6.6255                      | 9.4576 | 3.5430 | 5.3646 |
| <b>Présent STRI65</b> | 6.6202                      | 9.4700 | 3.5658 | 5.4041 |
| <b>Ounis.H [50]</b>   | 6.6808                      | 9.6503 | 3.6214 | 5.5244 |
| <b>Liew [61]</b>      | 6.6252                      | 9.4470 | 3.5939 | 5.7691 |

On remarque que, là aussi, les résultats sont en bon accord avec la solution de Liew [61] et Ounis.H [50].

Nous présentons les deux premiers modes de vibration de plaque composite stratifiée carrée encastree et simplement appuyée pour élément S8R, S4R, STRI65 avec le maillage (10 × 10) et deux rapport d'épaisseur (t/b=0.001 et 0.20).



**Figure 5. 3** Les deux premiers modes de vibration de plaque composite stratifiée carrée S8R, S4R



**Figure 5. 4** Les deux premiers modes de vibration de plaque composite stratifiée carrée STRI65

## 6 Etude paramétrique

### 6.1 Effets de la température sur les fréquences propres de plaques composite stratifiées :

#### 6.1.1 Effet du rapport d'épaisseur :

Le but de ce test est d'étudier l'effet de l'élévation de la température sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées. Pour ce faire, on considère une plaque composite stratifiée carrée à trois couches (0°/90°/0°) simplement appuyée avec trois rapports d'épaisseur (a/h = 5, 10, 20).

La plaque est supposée soumise à deux types de chargement thermique, à savoir :  $\Delta T = 0\text{ C}^\circ, 100\text{ C}^\circ$ .

Les valeurs propres sont exprimées en termes de fréquences adimensionnelles, définie par [50] :

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_2 h^2}} \tag{V.4}$$

Les propriétés matérielles définies par :

$$E_1/E_2 = 40 ; G_{12} = G_{13} = 0.6E_2 ; G_{23} = 0.5E_2 ; \nu_{12} = 0.25$$

$$\alpha_1 = 1.14 \times 10^{-6} ; \alpha_2 = 11.4 \times 10^{-6}$$

Le tableau 5. 7 réunit les résultats obtenus par la présente formulation et des résultats trouvés par un élément fini à neuf nœuds basé sur la théorie du premier ordre [62] et ceux d'une solution analytique basé sur la théorie d'ordre supérieure [63] et l'élément de Ounis.H [50].

**Tableau 5. 7** Effet de la température et du rapport d'épaisseur sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée (0°/90°/0°) simplement appuyée.

| $\Delta T$ | $a/h$ | Présent | Ounis.H [50] | Lal et Singh [62] | Shen et al. [63] |
|------------|-------|---------|--------------|-------------------|------------------|
| 0 C°       | 20    | 17.470  | 17.604       | 17.523            | 17.483           |
|            | 10    | 14.653  | 14.750       | 14.710            | 14.702           |
|            | 5     | 10.102  | 10.198       | 10.245            | 10.263           |
| 100 C°     | 20    | 16.779  | 16.912       | 17.171            | 17.172           |
|            | 10    | 14.450  | 14.547       | 14.636            | 14.597           |
|            | 5     | 10.030  | 10.126       | 10.232            | 10.226           |
| 200 C°     | 20    | 16.057  | 16.190       | 16.812            | 16.853           |
|            | 10    | 14.245  | 14.342       | 14.562            | 14.490           |
|            | 5     | 9.957   | 10.053       | 10.219            | 10.188           |

Dans ce test aussi, on remarque que le présent élément présente des résultats qui sont en très bon accord avec ceux de la littérature [62 ,63].

Dans le tableau 5. 7 on remarque que les fréquences propres de la plaque étudiée diminuent avec l'élévation de la température ainsi qu'avec la réduction du rapport d'épaisseur.

Le but de ce test est d'étudier l'effet de l'élévation de la température sur les fréquences propres des plaques composites stratifiées. Pour ce faire, on considère une plaque composite stratifiée carrée à trois couches (0°/90°/0°) simplement appuyée avec trois rapports d'épaisseur ( $a/h = 5,10,20$ ). Deux types de matériaux ont été considérés, à savoir : le T300/5208 Graphite/Epoxy et le AS4/3501-6 Graphite/Epoxy (voir tableau 5. 8).

La plaque est supposée soumise à deux types de chargement thermique, à savoir :  $\Delta T = 0\text{ C}^\circ, 100\text{ C}^\circ$ .

**Tableau 5. 8** Propriétés du T300/5208 et l'AS4/3501-6 [64].

| Matériaux         | $E_1$ (Gpa) | $E_2$ | $G_{12}$ | $\nu_{12}$ | $\alpha_1(10^{-6}/C^\circ)$ | $\alpha_2(10^{-6}/C^\circ)$ |
|-------------------|-------------|-------|----------|------------|-----------------------------|-----------------------------|
| <b>T300/5208</b>  | 181         | 10.3  | 7.17     | 0.28       | 0.02                        | 22.5                        |
| <b>AS4/3501-6</b> | 142         | 10.3  | 7.2      | 0.27       | -0.9                        | 27                          |

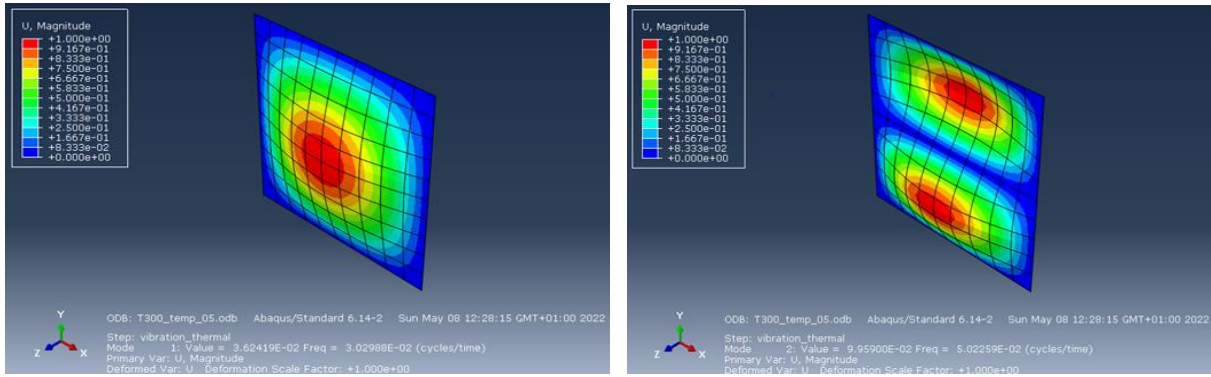
**Tableau 5. 9** Effet de la température et du rapport d'épaisseur sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) simplement appuyée (matériau : T300/5208).

| $\Delta T$    | $a/h$ | Présent |
|---------------|-------|---------|
| <b>0 C°</b>   | 20    | 12.9695 |
|               | 10    | 11.9802 |
|               | 5     | 9.5852  |
| <b>100 C°</b> | 20    | 12.5177 |
|               | 10    | 11.8606 |
|               | 5     | 9.5484  |
| <b>200 C°</b> | 20    | 12.0485 |
|               | 10    | 11.7397 |
|               | 5     | 9.5117  |

**Tableau 5. 10** Effet de la température et du rapport d'épaisseur sur les fréquences propres d'une plaque stratifiée ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) simplement appuyée (matériau : AS4/3501-6).

| $\Delta T$    | $a/h$ | Présent |
|---------------|-------|---------|
| <b>0 C°</b>   | 20    | 11.8646 |
|               | 10    | 11.1118 |
|               | 5     | 9.1583  |
| <b>100 C°</b> | 20    | 11.4982 |
|               | 10    | 11.0162 |
|               | 5     | 9.1298  |
| <b>200 C°</b> | 20    | 11.1205 |
|               | 10    | 10.9196 |
|               | 5     | 9.1014  |

Dans les deux tableaux 5. 9 et 5. 10 on remarque que les fréquences propres de la plaque étudiée diminuent avec l'élévation de la température ainsi qu'avec la réduction du rapport d'épaisseur.



**Figure 5. 5** Les deux premiers modes de vibration de plaque composite stratifiée carrée simplement appuyée pour les deux matériaux (T300/5208 Graphite/Epoxy et l’AS4/3501-6 Graphite/Epoxy).

**6.1.2 Effet de la dépendance des propriétés matérielles à la température :**

A cet effet, on considère deux types de stratification, l'une croisée avec un une séquence d'empilement de  $[0/90]_S$  et l'autre équilibrée avec une séquence d'empilement de  $[\pm\theta]_S$ . Dans ce test, on considère des plaques de forme carrée avec un rapport d'épaisseur ( $a/h = 30$ ) ainsi que deux types de conditions aux limites (SS, CC).

Les propriétés matérielles sont supposées être en fonction linéaire de la température et sont données comme suit [50] :

$$\begin{aligned}
 E_1(T) &= E_{10}(1 + E_{11}T), & E_2(T) &= E_{20}(1 + E_{21}T) \\
 G_{12}(T) &= G_{120}(1 + G_{121}T), & G_{13}(T) &= G_{130}(1 + G_{131}T) \\
 G_{23}(T) &= G_{230}(1 + G_{231}T), & \alpha_1(T) &= \alpha_{10}(1 + \alpha_{11}T) \\
 & & \alpha_2(T) &= \alpha_{20}(1 + \alpha_{21}T)
 \end{aligned}
 \tag{V. 5}$$

Avec

$$\begin{aligned}
 E_{10}/E_{20} &= 40, & G_{120}/E_{20} &= G_{130}/E_{20} = 0.5, & G_{230}/E_{20} &= 0.2 \\
 \nu &= 0.25, & \alpha_{10} &= 10^{-6} (^{\circ}C^{-1}), & \alpha_{20} &= 10^{-5} (^{\circ}C^{-1}) \\
 E_{11} &= -0.5 \times 10^{-3}, & E_{21} &= G_{121} = G_{131} = G_{231} = -0.2 \times 10^{-3} \\
 \alpha_{11} &= \alpha_{21} = 0.5 \times 10^{-3}
 \end{aligned}$$

Les fréquences propres sont exprimées en termes de fréquences adimensionnelles, définies par [50] :

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho}{E_2 h^2}}
 \tag{V. 6}$$

Deux cas d'études sont présentés, à savoir :

- Effet de la température sur les fréquences propres sans dépendance des propriétés matérielles à la température (IDT),
- Effet de la température sur les fréquences propres avec dépendance des propriétés matérielles à la température (DT).

Le tableau 5. 11 présente les effets de la température sur les fréquences propres de vibration d'une plaque stratifiée (0/90/90/0). Cinq types de chargement thermique définis en fonction de la température critique de flambement sont considérés ( $T_0/T_{cr} = 0, 0.25, 0.5, 0.75$  et 1).

**Tableau 5. 11** Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées

| C.L |                 |     | $T_0/T_{cr}$ |         |         |         |        |
|-----|-----------------|-----|--------------|---------|---------|---------|--------|
|     |                 |     | 0            | 0.25    | 0.5     | 0.75    | 1      |
| SS  | Présent         | IDT | 17.6307      | 15.2686 | 12.4667 | 8.8152  | 0      |
|     |                 | DT  | 17.6307      | 14.8759 | 11.0631 | 8.6451  | 0      |
|     | Ounis.H<br>[50] | IDT | 17.7533      | 15.3762 | 12.5534 | 8.8776  | 0      |
|     |                 | DT  | 17.7533      | 15.3293 | 12.4418 | 8.7191  | 0.049  |
| CC  | Présent         | IDT | 32.5260      | 28.6433 | 23.9500 | 17.6125 | 0.2102 |
|     |                 | DT  | 32.5260      | 27.5992 | 22.7330 | 16.8164 | 0.1401 |
|     | Ounis.H<br>[50] | IDT | 32.7673      | 28.7123 | 23.7985 | 17.1787 | 0      |
|     |                 | DT  | 32.7673      | 28.7123 | 22.5678 | 15.5566 | 0.1379 |

D'après le tableau 5. 11, on voit très bien que les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la température pour les deux cas de conditions aux limites. On remarque aussi qu'avec la prise en compte de la dépendance des propriétés à la température amoindrit les fréquences propres de vibration.

Il est très intéressant de noter que si la température imposée est égale à la température critique de flambement de la plaque, les fréquences propres tendent vers zéro. Cette dernière remarque a été notée pour le cas des plaques sandwichs (Librescu et Lin [65], Shiau et Kuo [66]), ainsi que dans le cas des plaques isotropes (Dhanaraj et Palaninathan [67], Murphy et al. [68]), et plaques stratifiées (Ounis.H [50]).

**Tableau 5. 12** Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[0^\circ]_s$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |         |         |         |        |
|-----|------------------|--------------|---------|---------|---------|--------|
|     |                  | 0            | 0.25    | 0.5     | 0.75    | 1      |
| SS  | T300             | 13.1745      | 12.0612 | 10.8329 | 9.4467  | 0.0510 |
|     | AS4              | 12.0173      | 11.2321 | 10.3871 | 9.2627  | 0.0278 |
| CC  | T300             | 26.8520      | 25.3779 | 23.6346 | 18.1624 | 0      |
|     | AS4              | 24.4422      | 23.4261 | 22.1801 | 17.1940 | 0      |



**Tableau 5. 13** Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées $[15^\circ]_s$ .

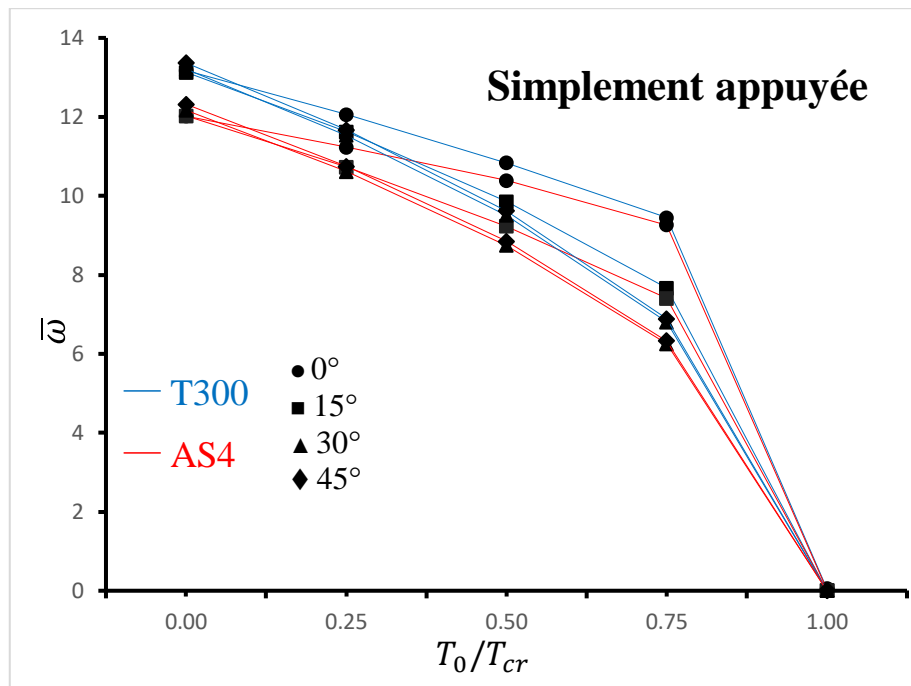
| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |         |         |         |        |
|-----|------------------|--------------|---------|---------|---------|--------|
|     |                  | 0            | 0.25    | 0.5     | 0.75    | 1      |
| SS  | T300             | 13.1315      | 11.6172 | 9.8561  | 7.6625  | 0      |
|     | AS4              | 12.0257      | 10.7254 | 9.2291  | 7.4047  | 0      |
| CC  | T300             | 25.8313      | 24.1898 | 22.2240 | 17.6988 | 0.0749 |
|     | AS4              | 23.5916      | 22.3857 | 20.8920 | 16.8781 | 0.0710 |

**Tableau 5. 14** Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées $[30^\circ]_s$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |         |         |         |        |
|-----|------------------|--------------|---------|---------|---------|--------|
|     |                  | 0            | 0.25    | 0.5     | 0.75    | 1      |
| SS  | T300             | 13.2091      | 11.5275 | 9.5056  | 6.8088  | 0      |
|     | AS4              | 12.1678      | 10.6123 | 8.7427  | 6.2535  | 0      |
| CC  | T300             | 23.6355      | 21.5145 | 18.8215 | 14.8253 | 0      |
|     | AS4              | 21.7959      | 20.0750 | 17.8156 | 14.3047 | 0.0433 |

**Tableau 5. 15** Effets de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées $[45^\circ]_s$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |         |         |         |   |
|-----|------------------|--------------|---------|---------|---------|---|
|     |                  | 0            | 0.25    | 0.5     | 0.75    | 1 |
| SS  | T300             | 13.3662      | 11.6668 | 9.6196  | 6.8886  | 0 |
|     | AS4              | 12.3202      | 10.7432 | 8.8477  | 6.3244  | 0 |
| CC  | T300             | 22.4708      | 20.2311 | 17.3427 | 13.0568 | 0 |
|     | AS4              | 20.8602      | 18.9691 | 16.4453 | 12.5417 | 0 |

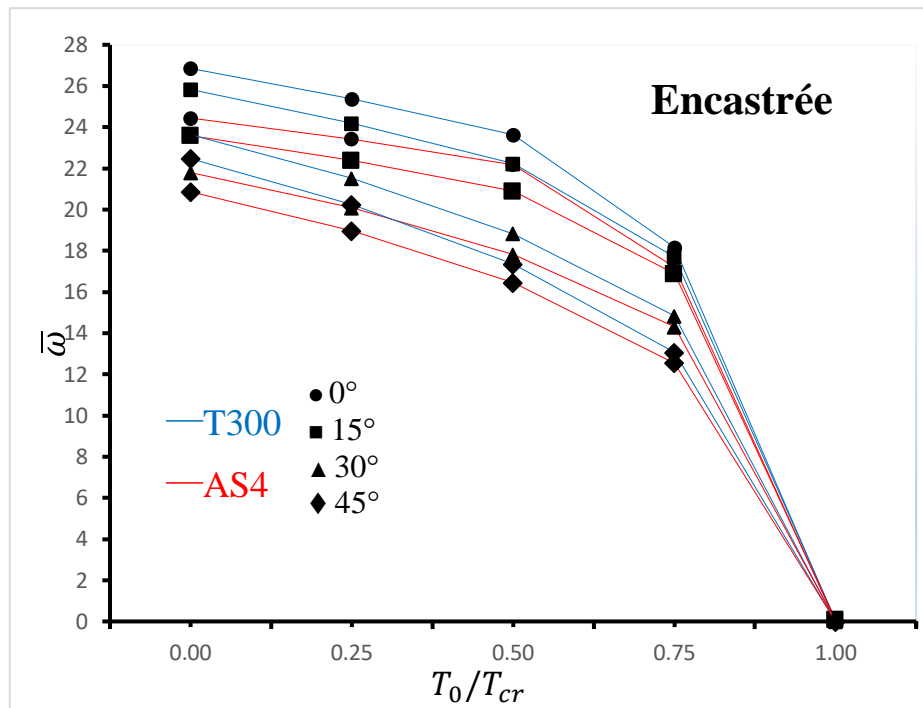


**Figure 5. 6** Effet de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées équilibrées simplement appuyée(SS).

La figure 5. 6 présente l'effet de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques stratifiées équilibrées simplement appuyée(SS), avec une séquence d'empilement  $[\pm\theta]_s$ , sous deux types de matériaux le T300/5208 Graphite/Epoxy et le AS4/3501-6 Graphite/Epoxy. On remarque que pour les deux types de matériaux, les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la température.

Et aussi on trouve que le T300/5208 donne des résultats plus élevés par rapport au matériau AS4/3501-6 Graphite/Epoxy.

On note que si la température imposée est égale à la température critique de flambement de la plaque, les fréquences propres tendent vers zéro.



**Figure 5. 7** Effet de la température sur les fréquences propres de plaques stratifiées équilibrées encastrées (CC).

La figure 5. 7 présenter l'effet de la température sur les fréquences propres de vibration de plaques stratifiées équilibrées encastrées (CC), avec une séquence d'empilement  $[\pm\theta]_s$  sous deux types de matériaux le T300/5208 et le AS4/3501-6. On remarque que les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la température.

Dans ce cas aussi, nous avons observé que le T300/5208 est donne des résultats plus élevé par rapport le AS4/3501-6, et si la température imposée est égale à la température critique de flambement de la plaque, les fréquences propres tendent vers zéro.

Quant à l'effet des conditions aux limites, on note que la plaque encastrée (Figure 5. 7) donne les fréquences propres les plus hautes, alors que les plus basses sont enregistrées avec la plaque simplement appuyée (Figure 5. 6).

### 6.1.3 Effet du rapport d'aspect sur la vibration de plaques composite stratifiées :

Dans cette section, on va étudier l'effet de la géométrie de la plaque stratifiée sur les fréquences propres de vibration de plaques stratifiées. Pour ce faire, plusieurs rapports d'aspect ont été considérés ( $a/b=1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ ) avec deux types de séquence d'empilement  $[0_2/90_2]_s$  et  $[90_2/0_2]_s$ . Deux types de conditions aux limites ; simplement appuyé (SS), encastré(CC) sont prises en compte, ainsi que deux types de matériaux ont été étudiés, à savoir : le T300/5208, le AS4/3501-6Graphite/Epoxy. Avec un rapport d'épaisseur  $a/h=10$ .

Les tableaux 5.16 et 5.17 montre l'effet du premier rapport d'aspect  $a/b = 1.0$  sur les fréquences propre de vibration de plaques stratifiées pour les deux types de matériaux et les deux types de stratification.

**Tableau 5. 16** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[0_2/90_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 1.0$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |         |       |
|-----|------------------|--------------|---------|-------|
|     |                  | 0            | 0.5     | 1     |
| SS  | T300             | 13.1633      | 9.3078  | 0.053 |
|     | AS4              | 12.0061      | 8.4895  | 0.023 |
| CC  | T300             | 26.8006      | 19.8768 | 0.156 |
|     | AS4              | 24.3758      | 17.8147 | 0     |

**Tableau 5. 17** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[90_2/0_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 1.0$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |         |       |
|-----|------------------|--------------|---------|-------|
|     |                  | 0            | 0.5     | 1     |
| SS  | T300             | 13.0521      | 9.2294  | 0.028 |
|     | AS4              | 11.9276      | 8.4339  | 0.028 |
| CC  | T300             | 25.9500      | 18.8645 | 0.078 |
|     | AS4              | 23.7477      | 17.2155 | 0.098 |

Les tableaux 5.18 et 5.19 montre l'effet du deuxième rapport d'aspect  $a/b = 1.5$  sur les fréquences propre de vibration de plaques stratifiées pour les deux types de matériaux et les deux types de stratification.

**Tableau 5. 18** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[0_2/90_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 1.5$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |         |       |
|-----|------------------|--------------|---------|-------|
|     |                  | 0            | 0.5     | 1     |
| SS  | T300             | 7.8146       | 5.5258  | 0     |
|     | AS4              | 7.2211       | 5.1061  | 0.025 |
| CC  | T300             | 16.0433      | 11.4985 | 0     |
|     | AS4              | 14.6804      | 10.5114 | 0     |

**Tableau 5. 19** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[90_2/0_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 1.5$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |         |       |
|-----|------------------|--------------|---------|-------|
|     |                  | 0            | 0.5     | 1     |
| SS  | T300             | 11.6153      | 8.4979  | 0.026 |
|     | AS4              | 10.4974      | 7.5302  | 0.018 |
| CC  | T300             | 23.1840      | 18.6289 | 0.091 |
|     | AS4              | 21.1640      | 16.9024 | 0.041 |

Les tableaux 5.20 et 5.21 montre l'effet du suivant rapport d'aspect  $a/b = 2.0$  sur le comportement vibratoire des plaques stratifiées pour les deux types de matériaux et les deux types de stratification.

**Tableau 5. 20** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[0_2/90_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 2.0$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |        |       |
|-----|------------------|--------------|--------|-------|
|     |                  | 0            | 0.5    | 1     |
| SS  | T300             | 6.2569       | 4.4243 | 0.022 |
|     | AS4              | 5.8097       | 4.1080 | 0     |
| CC  | T300             | 12.9848      | 9.2819 | 0     |
|     | AS4              | 11.9631      | 8.5477 | 0.010 |

**Tableau 5. 21** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[90_2/0_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 2.0$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |         |       |
|-----|------------------|--------------|---------|-------|
|     |                  | 0            | 0.5     | 1     |
| SS  | T300             | 11.2265      | 8.5756  | 0.026 |
|     | AS4              | 10.0992      | 7.6185  | 0     |
| CC  | T300             | 22.5016      | 18.4214 | 0     |
|     | AS4              | 20.5293      | 16.8108 | 0.027 |

Les tableaux 5.22 et 5.23 montre l'effet du le rapport d'aspect  $a/b = 2.5$  sur les fréquences propre de vibration de plaques stratifiées pour les deux types de matériaux et les deux types de stratification.

**Tableau 5. 22** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[0_2/90_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 2.5$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |        |       |
|-----|------------------|--------------|--------|-------|
|     |                  | 0            | 0.5    | 1     |
| SS  | T300             | 5.6692       | 4.0087 | 0.025 |
|     | AS4              | 5.2650       | 3.7229 | 0.021 |
| CC  | T300             | 11.9210      | 8.5183 | 0.029 |
|     | AS4              | 11.0171      | 7.8698 | 0     |

**Tableau 5. 23** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[90_2/0_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 2.5$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |         |   |
|-----|------------------|--------------|---------|---|
|     |                  | 0            | 0.5     | 1 |
| SS  | T300             | 11.0732      | 8.5962  | 0 |
|     | AS4              | 9.9384       | 7.5791  | 0 |
| CC  | T300             | 22.2651      | 18.3653 | 0 |
|     | AS4              | 20.3068      | 16.7173 | 0 |

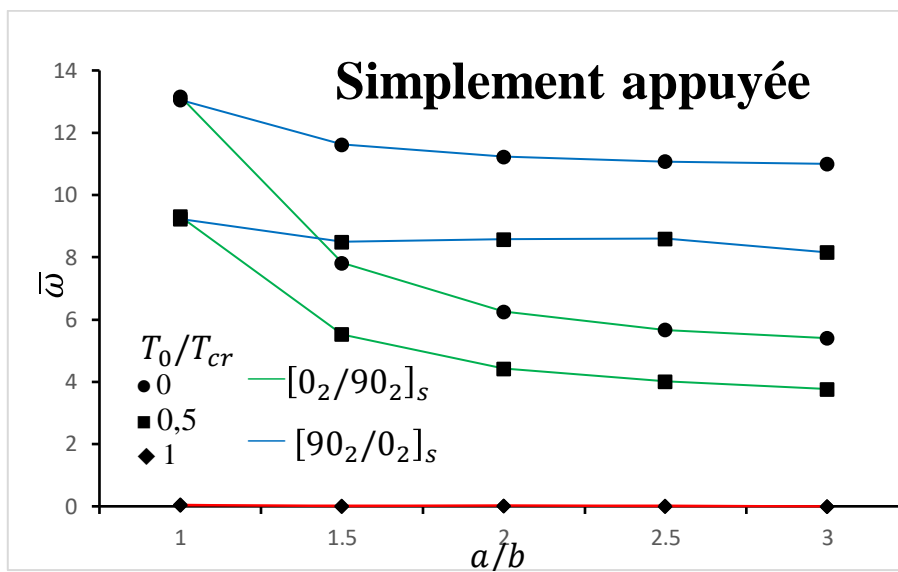
Les tableaux 5.24 et 5.25 montre l'effet du dernier rapport d'aspect  $a/b = 3.0$  sur les fréquences propres de vibration de plaques stratifiées pour les deux types de matériaux et les deux types de stratification.

**Tableau 5. 24** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[0_2/90_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 3.0$ .

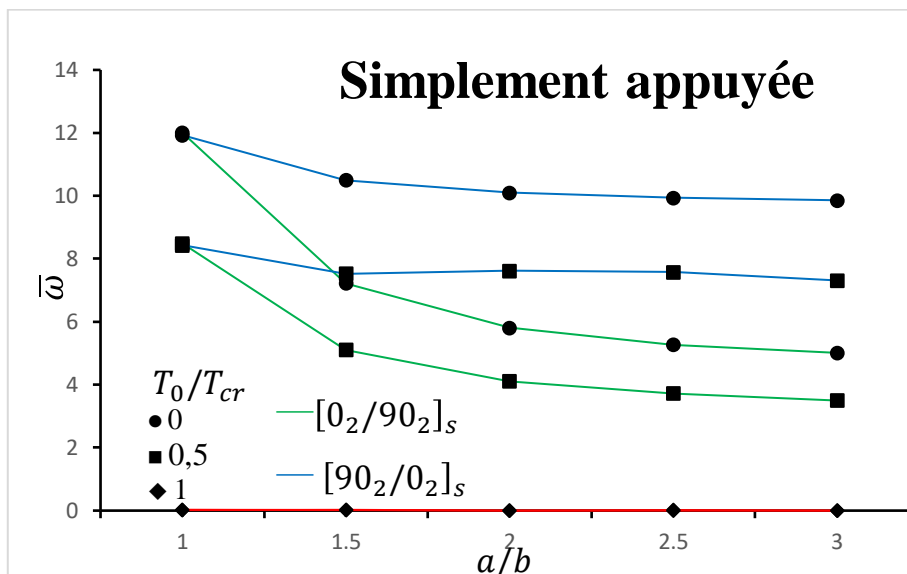
| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |        |   |
|-----|------------------|--------------|--------|---|
|     |                  | 0            | 0.5    | 1 |
| SS  | T300             | 5.4014       | 3.7682 | 0 |
|     | AS4              | 5.0109       | 3.4970 | 0 |
| CC  | T300             | 11.4817      | 7.7844 | 0 |
|     | AS4              | 10.6226      | 7.2085 | 0 |

**Tableau 5. 25** Effets du rapport d'aspect sur les fréquences propres de plaques stratifiées  $[90_2/0_2]_s$  avec un rapport d'aspect  $a/b = 3.0$ .

| C.L | Type de matériau | $T_0/T_{cr}$ |         |   |
|-----|------------------|--------------|---------|---|
|     |                  | 0            | 0.5     | 1 |
| SS  | T300             | 11.0003      | 8.1560  | 0 |
|     | AS4              | 9.8599       | 7.3124  | 0 |
| CC  | T300             | 22.1688      | 14.0355 | 0 |
|     | AS4              | 20.2133      | 13.2531 | 0 |



**Figure 5. 8** Effets du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur les fréquences propres de vibration de plaque simplement appuyées (SS) pour le matériau T300/5208.

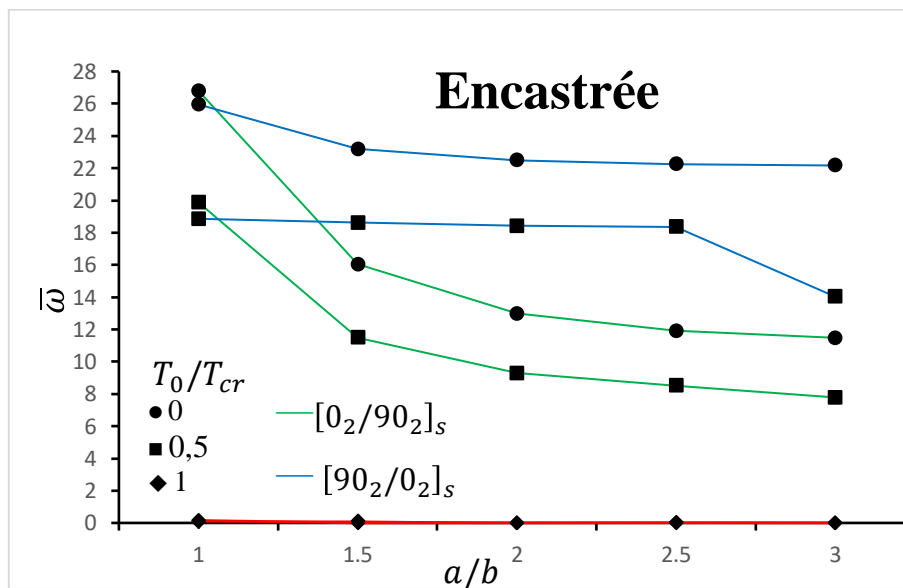


**Figure 5. 9** Effets du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur les fréquences propres de vibration de plaque simplement appuyées (SS) pour le matériau AS4/3501-6.

La figure 5. 8 montre l'effet du rapport d'aspect sur les fréquences propres de vibration de plaques stratifiées simplement appuyée (SS). Pour ce cas de condition aux limites ainsi que pour les deux types de matériaux, on remarque qu'avec le  $[90_2/0_2]_s$ , les fréquences propres de vibration sont légèrement affectées par l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ), alors que pour le  $[0_2/90_2]_s$  les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ). Ceci peut être expliqué par le fait qu'avec la  $[90_2/0_2]_s$ , on obtient une succession de couches ayant une orientation ( $0^\circ$ ) dans le plan moyen.

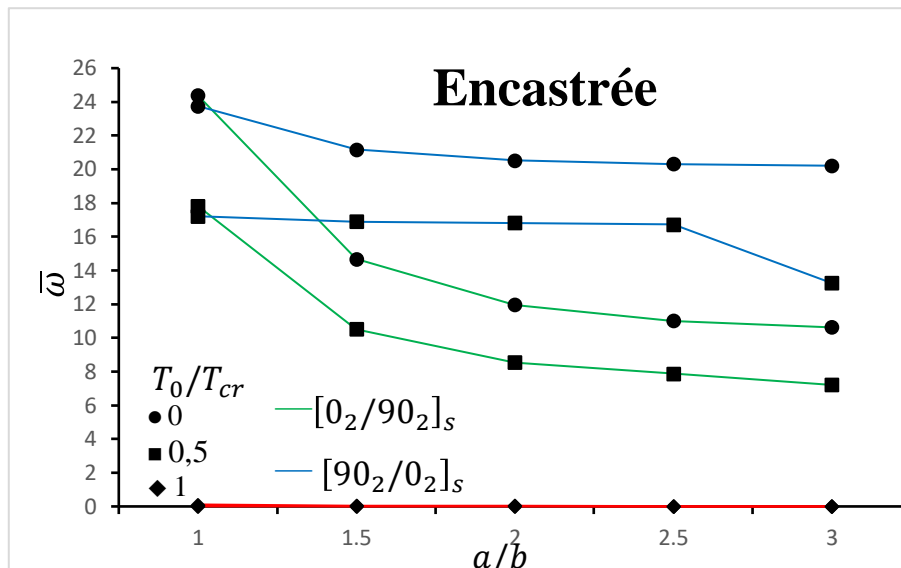
Comme cette orientation est parallèle au sens de l'allongement ( $a$ ), celle-ci peut augmenter la résistance de la plaque face à ce dernier.

La Figure 5. 9 présente l'effet du rapport d'aspect pour le cas des plaques stratifiées encadrées (CC). Avec ce type de condition aux limites, on remarque que les fréquences propres de vibration décroissent avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ), pour les deux séquences d'empilements et les deux matériaux choisis. On note aussi que la diminution de la température avec la stratification  $[90_2/0_2]_s$  est plus prononcée qu'au cas du simplement appuyée (SS).



**Figure 5. 10** Effets du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur les fréquences propres de vibration de plaque encadrée (CC) pour le matériau T300/5802.





**Figure 5. 11** Effets du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur les fréquences propres de vibration de plaque encadrée (CC) pour le matériau AS4/3501-6.

Les Figures 5. 10 et 5. 11 présentent l'effet du rapport d'aspect pour le cas des plaques stratifiées encadrées (CC). D'après des deux figures, on remarque que pour les deux types de stratification [0<sub>2</sub>/90<sub>2</sub>]<sub>s</sub> et [90<sub>2</sub>/0<sub>2</sub>]<sub>s</sub> les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation du rapport d'aspect ( $a/b$ ) pour les deux types de matériaux choisis.

Pour la stratifiée [90<sub>2</sub>/0<sub>2</sub>]<sub>s</sub> les fréquences propres de vibration sont fortement affectées par l'augmentation du rapport d'aspect, par le fait qu'avec le plan moyen de stratifiés on obtient des couches orientées dans la direction (0°), cette direction est parallèle par rapport au sens de dilatation ( $a$ ) de la plaque.

On note également que dans le cas de l'encastrement les fréquences propres de vibration plus élevées par rapport aux résultats de simplement appuyée, Ceci peut être expliqué par le fait que l'encastrement bloque tous les degrés de liberté.

• A travers les résultats obtenus dans la modélisation des plaques stratifiées et les figures on remarque que :

Le matériau **T300/5208** donne des températures critiques de flambement plus hautes par rapport au matériau **AS4/3501-6**, cela est dû aux propriétés mécaniques du matériau T300 plus élevées par rapport à l'autre matériau.

La courbe en rouge dans les quatre figures 5. 8, 5. 9, 5. 10, 5. 11 montre le cas où la température imposée est égale à la température critique de flambement de la plaque, on remarque que les fréquences propres tendent vers zéro quel que soit le rapport d'aspect et le matériau et la stratification.

## 7 Conclusion :

Le présent chapitre avait pour but d'étudier l'effet de plusieurs paramètres tels que : le rapport d'épaisseur ( $a/h$ ), les conditions aux limites, la dépendance des propriétés matérielles de la température, la stratification (orientation des fibres), l'effet du rapport d'aspect ( $a/b$ ) sur les fréquences propres de vibration des plaques stratifiées composites.

Pour ce faire une modélisation numérique avec le logiciel ABAQUS a été présentée, trois éléments d'abaques (**S4R**, **S8R** et **STR165**) sont utilisés.

La première partie de ce chapitre a été consacrée à la validation de la précision de notre modélisation par le biais de plusieurs tests disponibles dans la littérature. A travers les résultats trouvés, on a vu que notre modélisation présente une bonne précision ainsi qu'une bonne rapidité de convergence.

La deuxième partie de ce chapitre portait sur l'étude paramétrique de l'effet de la température sur les fréquences propres de vibration des plaques composites stratifiées minces et épaisses. L'étude consiste des différents paramètres et des différents matériaux telle que : (T300/5208 Graphite/Epoxy ; AS4/3501-6 Graphite/Epoxy), et des différentes conditions aux limites. Les résultats de notre étude montré que :

Si la température infligée à la plaque coïncide avec la température critique de flambement, les fréquences propres tendent vers zéro quel que soit le rapport d'aspect et la température imposé et la séquence d'empilement utilisée.

Pour les deux types de séquence d'empilement  $[0_2/90_2]_s$  et  $[90_2/0_2]_s$  et les deux types des matériaux les fréquences propres de vibration diminue avec l'augmentation de rapport d'aspect ( $a/b$ ) et l'augmentation de la température.

On note aussi que la diminution de la température avec la stratification  $[90_2/0_2]_s$  dans le cas de plaque encastree est plus prononcée qu'au cas du simplement appuyée (SS).

## Conclusion générale :

Notre travail avait pour but d'étudier l'effet de la température sur le comportement vibratoire des plaques composites stratifiées minces et épaisses en utilisant le logiciel « **ABAQUS** » basé sur la méthode des éléments finis.

Pour mener à bien cette étude nous avons présenté dans La première partie de ce travail une généralité sur les matériaux composite tell que les caractéristiques de composite, les différents types, et les différentes constituantes (matrice et renfort), et l'architecteur des matériaux composites (les sandwiches, les monocouches et les Stratifiées), ainsi que les caractéristiques mécanique des composites tell que le module de Young longitudinale et transversal ; le coefficient de poissions et le module de cisaillement.

Ensuite, et pour comprendre bien le comportement mécanique des plaques stratifiées composites nous avons présentés deux théories à savoir la théorie classique des stratifiées basé sur les hypothèses de Kirchhoff (CLT) et la théorie de déformations en cisaillement transverse de première ordre basé sur les hypothèses de Reissner –Mindlin (FSDT).

Pour mieux comprendre l'effet de la température sur le comportement vibratoire des plaques composite stratifiées, nous avons commencé par une synthèse bibliographique sur les origines de la vibration ainsi que sur les modèles éléments finis utilisé par les différents auteurs dans l'analyse de vibrations des plaques stratifiées en matériaux composites.

D'autre part, nous avons divisé noter modélisation en deux, la première partie concerne la vérification et la validation de la précision et la performance des trois éléments d'ABAQUS (**S4R**, **S8R**, et **STR165**) qui est démontrés à travers une série des testes sur le comportement vibratoire des plaques isotrope et des plaques composites stratifiées sous différentes condition aux limites (simplement appuyée et encastrée). Et nous avons comparés les résultats de notre modélisation avec les résultats de littérateur. Les exemples numériques présentés montrent que les éléments d'ABAQUS sont capables de donner d'excellents résultats.

Dans le deuxième partie, nous avons faire une étude paramétrique sur l'effet de certains paramètres influençant le comportement vibratoire des plaques stratifiées composites. Dans cette étude deux types des matériaux qui sont très Utilisés ont été considérés, à savoir : le T300/5208 Graphite/Epoxy et le AS4/35001-6 Graphite/Epoxy.

D'autre part, ont été pris on considérations dans cette étude les paramètres suivante : le type du matériau, les conditions aux limites, la séquence d'empilement le rapport d'aspect, le rapport d'épaisseur, et la dépendance des propriétés matérielles a la température. Les résultats numériques de notre modélisation montrent que :

- Les fréquences propres de la plaque étudiée diminuent avec l'élévation de la température ainsi qu'avec la réduction du rapport d'épaisseur.
- Les fréquences propres diminuent avec l'augmentation de la température pour les deux cas de conditions aux limites. On remarque aussi qu'avec la prise en compte de la dépendance des propriétés matérielles à la température amoindrissent les fréquences propres de vibration.

- Pour les deux types de matériaux le T300/5208 et l'AS4/3501-6, et avec une séquence d'empilement  $[\pm\theta]_s$  les fréquences propres de vibration diminuent avec l'augmentation de la température.
- Pour les deux séquences d'empilement  $[0_2/90_2]_s$  et  $[90_2/0_2]_s$  et les deux types des matériaux les fréquences propres de vibration diminue avec l'augmentation de rapport d'aspect ( $a/b$ ) et l'augmentation de la température.
- Pour le stratifiée  $[90_2/0_2]_s$  les fréquences propres de vibration sont fortement affectée par l'augmentation du rapport d'aspect, par le fait qu'avec le plan moyen de stratifiés on obtient des couches orientes dans la direction( $0^\circ$ ), cette direction est parallèle par rapport au sens de allongement (a) de la plaque.
- Si la température infligée à la plaque coïncide avec la température critique de flambement, les fréquences propres tendent vers zéro quel que soit le rapport d'aspect et la température imposé et la stratification utilisée.
- Le matériau T300/5208 donne des fréquences propres de vibration plus élevés par rapport le matériau AS4/3501-6, cela peut-être expliquer par les propriétés mécaniques de matériau T300/5208 est plus élevés que les propriétés de AS4/3501-6.
- Quant à l'effet des conditions aux limites, la plaque encastrée donne les fréquences propres les plus hautes, alors que les plus basses sont enregistrées avec la plaque simplement appuyée quel que soit le paramètre mécanique étudié.
- On remarque aussi que les plaques encastrées donne des fréquences plus élevés par rapport au plaques simplement appuyée, cela peut-être expliqué par l'effet des conditions aux limites.

# Référence Bibliographique

- [1] **Marc Marzano** - Action Composite, Pascal Celle -GNFA : dossier\_péda\_matériaux\_composites.indd ANFA / Édition 2014
- [2] **Louis ADAM.** (20 septembre 2011) « Etude expérimentale et numérique du procédé d'assemblage par fixations aveugles dans des structures composites », thèse de Doctorat l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse Discipline ou spécialité : Génie Mécanique, Mécanique des Matériaux.
- [3] **Claude FENDZI.** (10 Décembre 2015) « Contrôle Santé des Structures Composites : Application à la Surveillance des Nacelles Aéronautiques », thèse de Doctorat. L'École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.
- [4] **BENDIFALLAH Mourad.** (2012), « Travail de recherche sur les matériaux à mémoire viscoélastiques parfaitement élastiques pour une nouvelle Prothèse Totale de Hanche », Mémoire de MAGISTÈRE En Mécanique. Université de Batna.
- [5] **Yves REMOND et JEAN-FRANÇOIS CARON.** « Les matériaux composites dans le sport ».
- [6] **BOUBEKER, R.** (2016), « Etude Expérimentale et Numérique du comportement des Plaques Trouées en Matériaux Composites », Thèse de Doctorat, Université Mohamed Khider –Biskra.
- [7] **P. VANNUCCI** Master DSME –Dimensionnement des Structures Mécaniques dans leur Environnement Université de Versailles et Saint-Quentin-en-Yvelines.
- [8] **Maxime SCRIVE et Gabriel BANVILLET.** (Mai 2016), « Fibres papetières et bio composites », Mémoire ingénieurs 2<sup>e</sup> année.
- [9] **Berthelot, J. M.** 2010, Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, 4 éditions.
- [10] **KHALIFA.T et BELKHIR.I.** (2019), « Etude Du Comportement Vibratoire Des Plaques Stratifiées à Différents Empilements », Mémoire de Master En Maintenance Industrielle, Université Kasdi Merbah Ouargla.
- [11] **CHERIDI.H.** « analyse dynamique des plaques minces et épaisses : application aux matériaux homogènes et non homogènes », Mémoire de magister Université mentouri Constantine.
- [12] **Bruno CASTANIE., et al,** 2013, « Structure en matériaux composites stratifiés », Institut Clément Ader, Technique de l'ingénieur.
- [13] **LAAREJ M.** « Etude par spectroscopie raman et modélisation d'une résine composite RTM », 2010, Thèse de doctorat, Université Abou Bakr BELKAID de Tlemcen.
- [14] **Laurent GORNET.** 2011, « Généralité sur les matériaux composites », ECN, Centre Nantes.
- [15] **ACHOUR.T.** 2011, « Etude Des Techniques De Réparation Des Structures Composites Endommagées », Mémoire de magister en Génie Mécanique, Université Mentouri Constantine.
- [16] **METTOUCHI.L.** « Influence de la charge particule de cuivre et du renfort couches de fibres de verre sur le comportement mécanique d'un composite », Mémoire de master, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [17] **GENDRE.L.** (Edité le 17/05/2011), « Matériaux composites et structures composites », université paris-SACLAY.

- [18] **MAHDAD.M et AKKOUICHE.F.** 2019, « Etude comparative entre les matériaux sandwich à différentes constituants (Minérales et Naturels) », Mémoire de master, Université Akli Mohand Oulhadj De Brouira.
- [19] **DJEBLOUN.Y.** 2004, « Etude de la rupture en mode I d'ouverture des matériaux composites », Mémoire de Magistère en Construction Mécanique, Université Mohamed Khider Biskra.
- [20] **KERFRIDEN.P.** 2008, « Stratégie de décomposition de domaine à trois échelles pour la simulation du délaminage dans les stratifiés », Thèse De Doctorat, de L'école Normale Supérieure De Cachan.
- [21] « Caractérisation électromagnétique de matériaux conducteurs non conventionnels », <https://www.researchgate.net/publication/297738356>.
- [22] **J.M. Berthelot.** 1999, « Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures, 3ème édition » Paris : Editions Tec&Doc.
- [23] **MARAH.B.** 2020, « Etude Numérique De La Stabilité Des Plaques Composites Stratifiées », Mémoire de master, Université Mohamed khider – Biskra.
- [24] **DAIKH.A.** (2018), « vibration libre et flambement des structures sandwiches en FGM », thèse de Doctorat, université Djilali liabes -sidi bel Abbes.
- [25] **KHECHALA.A.** (2013), « étude numérique de l'effet de singularités géométrique sur la distribution des contraintes dans les plaques stratifiées », mémoire de master, Université Mohamed Khider –Biskra.
- [26] **ALBERT WILLIAM.F.** (2010), « Modélisation par éléments finis de plaques composites contribution à l'étude de l'amortissement endommagement et prise en compte d'incertitudes », Thèse de doctorat, Université Fédérale d'Uberlândia.
- [27] **CHORFLS.** (2010), « Analyse des plaques orthotropes minces sous l'effet des conditions Extérieures », Mémoire de Magister, Université Frères Mentouri Constantine.
- [28] **REDDY.JN.** (2004), *Mechanics of laminated composite plates and shells; theory and analysis.* (Second edition). CRC Press.
- [29] **REDDY, J. N.** 1997, *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis.* 2.ed. Florida: CRC Press.
- [30] **CEN, S., SOH, A., LONG, Y. and YAO, Z. A.** 2002, New 4-node Quadrilateral FE Model with Variable Electrical Degrees of Freedom for the Analysis of Piezoelectric Laminated Composite Plates. *Composite Structures.* v. 58, n. 4, p. 583-599.
- [31] **François-Xavier IRISARRI,** 23 Janvier 2009, « Stratégies de calcul pour l'optimisation multi-objectif des structures composites », thèse de doctorat, Université de Toulouse.
- [32] **ATIKI El houssine,** (23 juin 2018), « Vibration des plaques stratifiées en matériaux composite menues d'ouvertures rectangulaires centrales par la méthode des éléments finis », Mémoire de Master, Université Mohamed khider – Biskra.
- [33] **TAUCHERT, T.** (2014), Plates with Temperature-Dependent Properties. in *Encyclopedia of Thermal Stresses* (Hetnarski, R. ed.), Springer Netherlands. pp 3953-3957.
- [34] **FAUCONNEAU, G., et MARANGONI, R. D.** (1970), Effect of a thermal gradient on the natural frequencies of a rectangular plate. *International Journal of Mechanical Sciences* 12, 113-122.

- [35] DHOTARAD, M. S., et GANESAN, N. (1978), Vibration analysis of a rectangular plate subjected to a thermal gradient. *Journal of Sound and Vibration* **60**, 481-497.
- [36] DHOTARAD, M. S., et GANESAN, N. (1979), Influence of thermal gradient on natural frequency of rectangular plate vibration. *Nucl. Eng. Des.* **52**, 71-81.
- [37] RAO, C. K., et SATYANARAYANA, B. (1975), Effect of thermal gradient on frequencies of tapered rectangular plates. *AIAA Journal* **13**, 1123-1126.
- [38] GANESAN, N., et DHOTARAD, M. S. (1979), Influence of a thermal gradient on the natural frequencies of tapered orthotropic plates. *Journal of Sound and Vibration* **66**, 621-625.
- [39] TOMAR, J. S., et TEWARI, V. S. (1981), Effect of thermal gradient on frequencies of a circular plate of linearly varying thickness. *J. Non-Equilib. Thermodyn.* **6**, 115-122.
- [40] TOMAR, J. S., et GUPTA, A. K. (1985), Effect of thermal gradient on frequencies of an orthotropic rectangular plate whose thickness varies in two directions. *Journal of Sound and Vibration* **98**, 257-262.
- [41] TOMAR, J. S., et GUPTA, A. K. (1984), Thermal Effect on Axisymmetric Vibrations of an Orthotropic Circular Plate of Variable Thickness. *AIAA Journal* **22**, 1015-1017.
- [42] TOMAR, J. S., et GUPTA, A. K. (1983), Thermal effect on frequencies of an orthotropic rectangular plate of linearly varying thickness. *Journal of Sound and Vibration* **90**, 325-331.
- [43] ADENJI-FASHOLA, A. A., et OYEDIRAN, A. A. (1988), Thermal gradient effects on the vibration of prestressed rectangular plates. *Acta Mechanica* **74**, 235-248.
- [44] GUPTA, A. K., TRIPTI JOHRI, et VATS, R. P. (2010), Study of thermal gradient effect on vibrations of a non-homogeneous orthotropic rectangular plate having bi-direction linearly thickness variations. *Meccanica* **45**, 393-400.
- [45] GUPTA, A. K., et SHARMA, P. (2010), Study the thermal gradient effect on frequencies of a trapezoidal plate of linearly varying thickness. *Applied Mathematics* **1**, 357.
- [46] GUPTA, A. K., et KAUR, H. (2008), Study of the effect of thermal gradient on free vibration of clamped visco-elastic rectangular plates with linearly thickness variation in both directions. *Meccanica* **43**, 449-458.
- [48] GUPTA, A. K., JOHRI, T., et VATS, R. P. (2007), Thermal Effect on Vibration of Non-Homogeneous Orthotropic Rectangular Plate Having Bi-directional Parabolically Varying.
- [49] SIVAKUMAR, K., IYENGAR, N. G. R., et DEB, K. (1999), Free vibration of laminated composite plates with cutout. *Journal of Sound and Vibration*, 221(3), 44.
- [50] OUNIS, H. (2015), « Etude numérique par éléments finis de l'effet de la température sur la vibration et la stabilité des plaques stratifiées », thèse de Doctorat, Université Mohamed Kheider-Biskra.
- [51] Chen, C.-S., Chen, C.-W., Chen, W.-R., et al. (2013), Thermally induced vibration and stability of laminated composite plates with temperature-dependent properties. *Meccanica* **48**, 2311-2323.
- [52] ELMASCRI.S. (2020), « Contribution à l'étude de l'effet de température sur le comportement vibratoire des structures en matériaux composites avancés », thèse de Doctorat, Université Djillali Liabes Sidi Bel Abbas.



- [53] **A. RAHMANI, S. FAROUGHI et M.I. FRISWELL.** (2021), «Vibration analysis for anti-symmetric laminated composite plates resting on visco-elastic foundation with temperature effects», *Applied Mathematical Modelling*, **94**, 421–445. doi: 10.1016/j.apm.2021.01.026.
- [54] **PATRICKH ROZICHI.** « Formation ABAQUS » Université de Nantes, France, 2007.
- [55] **M. SARTOR,** « Eléments finis » Notes de cours, Chapitre 01.
- [56] **HAOUCHINE, M.** (2016), mémoire de master « Simulation de l'écrasement de tubes minces - Comparaison expérimental/numérique », Université mouloud Mammeri de TIZI- OUZOU.
- [57] **MARC BLETRY.** Méthodes de caractérisation mécanique des matériaux.2006 2007.
- [58] Abaqus. Une brève introduction. ABAQUS/CAE 6.9.
- [59] **FERREIRA, A. J.** (2008) *MATLAB codes for finite element analysis: solids and structures*, Springer Science & Business Media.
- [60] **DAWE, D. J., ET ROUFAEIL, O. L.** (1980), Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates. *Journal of Sound and Vibration* **69**, 345-359.
- [61] **LIEW, K. M.** (1996), Solving the vibration of thick symmetric laminates by Reissner/Mindlin plate theory and the P-Ritz method. *Journal of Sound and Vibration* **198**, 343-360.
- [62] **Lal, A., et Singh, B. N.** (2009), Stochastic Free Vibration of Laminated Composite Plates in Thermal Environments. *J. Thermoplast. Compos. Mater.*
- [63] **Shen, H.-S., Zheng, J. J., et Huang, X. L.** (2003), Dynamic response of shear deformable laminated plates under thermomechanical loading and resting on elastic foundations. *Compos. Struct.* **60**, 57-66.
- [64] **Shiau, L.-C., Kuo, S.-Y., et Chen, C.-Y.** (2010), Thermal buckling behavior of composite laminated plates. *Compos. Struct.* **92**, 508-514.
- [65] **Librescu, L., et Lin, W.** (1999), Non-linear response of laminated plates and shells to thermomechanical loading: Implications of violation of interlaminar shear traction continuity requirement. *International Journal of Solids and Structures* **36**, 4111-4147.
- [66] **Shiau, L.-C., et Kuo, S.-Y.** (2005), Free Vibration of Thermally Buckled Composite Sandwich Plates. *Journal of Vibration and Acoustics* **128**, 1-7.
- [67] **Dhanaraj, R., et Palaninathan.** (1990), Free vibration of initially stressed composite laminates. *Journal of Sound and Vibration* **142**, 365-378.
- [68] **Murphy, K. D., Virgin, L. N., et Rizzi, S. A.** (1997), The Effect of Thermal Prestress on the Free Vibration Characteristics of Clamped Rectangular Plates: Theory and Experiment. *Journal of Vibration and Acoustics* **119**, 243-249.

# ANNEXE

## Annexe

### A.1 : Modélisation sur l'ABAQUS CAE :

ABAQUS est avant tout un logiciel de simulation par éléments finis de problèmes très variés en mécanique et en génie civil. Il est connu et répandu, en particulier pour ses traitements performants de problèmes non-linéaires.

Le cœur du logiciel ABAQUS est donc ce qu'on pourrait appeler son "moteur de calcul". À partir d'un fichier de données qui décrit l'ensemble du problème mécanique, le logiciel analyse les données, effectue les simulations demandées et fournit les résultats dans un fichier. Deux tâches restent à accomplir : générer le fichier de données (cela s'appelle aussi effectuer le prétraitement), et exploiter les résultats contenus dans le fichier (ou post traitement). La structure du fichier de données peut se révéler rapidement complexe : elle doit contenir toutes les définitions géométriques, les descriptions des maillages, des matériaux, des chargements, etc..., suivant une syntaxe précise.

#### A.1.1 : Les principaux Modules d'ABAQUS :

##### Les Modules :

ABAQUS CAE est divisé en unités fonctionnelles appelées modules. Chaque module contient les outils qui sont propres à une partie de la tâche de modélisation

*a. Le module « PART »*

Le module Part permet de créer tous les objets géométriques nécessaires à notre problème, soit en les dessinant dans ABAQUS CAE, soit en les important d'un logiciel de dessin tiers.

*b. Le module « PROPERTY »*

Le module Property permet, comme son nom l'indique, de définir toutes les propriétés d'un objet géométrique ou d'une partie de ces objets.

*c. Le module « ASSEMBLY »*

Ce module permet d'assembler les différents objets géométriques créés dans un même repère de coordonnées global. Un modèle ABAQUS contient un seul assemblage.

*d. Le module « STEP »*

Ce module permet de définir toutes les étapes et les requêtes pour le post traitement, c'est à dire le moment (temps) à partir duquel une force est appliquée et jusqu'à quand, il est aussi possible de créer des forces ou des conditions limites qui s'activent a des moments donnés.

*e. Le module « INTERACTION »*

Grâce ce module, il est possible de spécifier toutes les interactions entre les différentes parties et régions du modèle, qu'elles soient mécaniques, thermiques ou autres. Il faut savoir qu'ABAQUS ne prend en compte que les interactions explicitement définies, la proximité géométrique n'étant pas suffisante.

*f. Le module « LOAD »*

Le module Load permet de spécifier tous les chargements, conditions limites et champs. Il faut savoir que les chargements et les conditions aux limites sont dépendants des steps, par exemple une force est appliquée au step 1 mais inactive au step 2.

*g. Le module « MESH »*

Ce module contient tous les outils nécessaires pour générer un maillage élément fini sur un assemblage.

*h. Le module « JOB »*

Une fois que toutes les tâches de définition du modèle ont été réalisées, il faut utiliser le module Job pour analyser ce modèle. ABAQUS va alors réaliser tous les calculs nécessaires et en tirer des résultats.

*i. Le module « VISUALIZATION »*

Ce module permet de visualiser le modèle et les résultats, les courbes de charges, les déformations...

*j. Le module « SKETCH »*

Ce module permet de créer des formes bidimensionnelles qui ne sont pas associés à un objet. Il peut être utilisé pour des extrusions par exemple.

### **A.1.2 : Méthodologie :**

Voici un petit rappel des actions à effectuer pour créer un modèle ABAQUS :

1. Dessiner notre modèle.
  - a. Dessiner le profil 2D de la forme voulue.
  - b. Le développer en 3D.
  - c. Rajouter les détails manquants.
2. Affecter les propriétés à l'objet.
  - a. Créer le matériau.
  - b. Créer les sections sur lesquelles appliquer les matériaux.
  - c. Affecter les matériaux aux sections correspondantes.
3. Assembler le modèle.
  - a. Créer les instances.
  - b. Les positionner dans le repère général.
4. Définir les pas d'analyse.
5. Créer les interactions entre les instances.
  - a. Créer les surfaces.
  - b. Définir les types de contacts.

- c. Associer des surfaces avec des types de contact.
6. Appliquer les conditions limites et les chargements.
  - a. Définir les pas d'application.
  - b. Définir les types de condition limite ou chargement.
7. Mailler le modèle.
  - a. Partitionner le modèle.
  - b. Choisir les techniques de maillage.
  - c. Choisir les types de maille.
  - d. Discrétiser le modèle.
  - e. Mailler le modèle.
8. Créer et soumettre un travail.
9. Visualiser les résultats.