



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Republique Algerienne Democratique Et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة العربي التبسي - تبسة

Université Larbi Tébessi – Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Electrique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master Académique

En : électronique

Spécialité : instrumentation électronique

Par : SEDIRA Faouzia et DEGHAICHIA Roufaida

Sujet

COMPARAISON DES PERFORMANCES ENTRE LES REGULATEURS PID ET LQI APPLIQUES AUX SYSTEMES DYNAMIQUES MULTIVARIABLES

Évalué le : 14/06/2021 , devant le jury composé de :

M. Houam Lotfi
M. Djari Abdelhamid
M. Lemita Abdellah

MCB
MCA
MAA

Président
Rapporteur
Examineur

Promotion : 2020/2021



Remerciements

Avant tout on remercie dieu tout puissant de nous avoir donné le privilège, la chance d'étudier et de nous avoir donné force, courage, et patience pour accomplir ce travail. Nos parents qui ont veillé sur nous durant toute notre vie.

Nous remercions naturellement notre encadreur, Mr. Djari abdlhamid pour leur orientation éclairée, et leur aide dans l'élaboration de notre mémoire. Nous exprimons nos vifs remerciements à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin, et encouragé pour la réalisation de ce mémoire, qu'ils trouvent ici l'expression de nos remerciements les plus sincères

Nous tenons aussi à adresser nos vifs remerciements à tous les enseignants qui ont contribué à notre formation.

Enfin nous remercions les membres du jury de nous avoir honorés en acceptant de juger ce travail.

DÉDICACES

Je dédie ce modeste travail avec vif plaisir à ceux qui sont les plus proches à mon cœur, qui m'ont toujours aimé et qui ont fait toute leurs forces pour que je sois toujours heureuse.

Mes très chers parents et mes. Qui m'ont soutenue durant toute ma vie, sans eux je ne serai rien

À mon cher frère AL ALWANI

À mes chères sœurs

À mes amis et mes collègues

À tous mes professeurs

Faouzia

Dédicaces

À ceux qui n'ont jamais cessé de m'encourager, et me conseiller.

*À ceux qui n'ont jamais été avares ni de leur temps ni de leurs
Connaissances pour satisfaire mes interrogations.*

*Je dédie ce modeste travail avec vif plaisir à ceux qui sont les plus
proches à mon cœur, qui m'ont toujours aimé et qui ont fait toute leurs
forces pour que je sois toujours heureuse.*

*Mes très chers parents et mes grands-parents. Qui m'ont soutenue durant
toute ma vie, sans eux je ne serai rien*

À mon cher frère

À mes chères sœurs

À toute ma grande famille

À mes amis et mes collègues

À tous mes professeurs

Roufaida

Résumé

Dans ce travail, nous sommes intéressés à une étude comparative entre le régulateur Proportionnel-Intégral-Dérivée et régulateur Linéaire Quadratique avec intégration. La première approche est basé sur le régulateur Proportionnel-Intégral-Dérivée PID dont on a posé un problème de choix de valeur des gains qui définir par les algorithmes génétiques. Le deuxième approche utilise le régulateur Linéaire Quadratique avec intégration LQI, cette technique basé sur la résolution de l'équation de Riccati pour donne un gain de retour d'état et une commande optimale. Une étude comparative de performances pour chaque régulateur avec une application sur un système dynamique multivariables nommé Twin Rotor Mimo System (TRMS). Les résultats de simulation montrent la supériorité du régulateur LQI par apport au régulateur PID en terme de stabilité ; rapidité et précision.

Mot clés : Proportionnel Intégral Dérivée; régulateur Linéaire Quadratique; régulateur Linéaire

Abstract

In this work, we are interested in a comparative study between the Proportional-Integral-Derivative regulator and Linear Quadratic regulator with integration. The first approach is based on the Proportional-Integral-Derivative PID regulator, for which we posed a problem of choice of value of the gains which to be defined by the genetic algorithms. The second approach uses the Linear Quadratic regulator with LQI integration, this technique based on solving the Riccati equation to provide feedback gain and optimal control. A comparative study of performances for each regulator with an application on a multivariable dynamic system called Twin Rotor Mimo System (TRMS). S simulation results show the superiority of the LQI regulator over the PID regulator in terms of stability; speed and precision.

Keywords: Proportional Integral Derivative; Linear Quadratic regulator; Linear Quadratic regulator with integration; the Riccati equation; multivariables dynamic systems.

المخلص

في هذا العمل ، نحن مهتمون بدراسة مقارنة بين المنظم الاشتقاقي النسبي المتكامل والمنظم الخطي التربيعي مع التكامل. يعتمد النهج الأول على منظم PID المتناسب والتكامل والمشتق ، والذي طرحنا فيه مشكلة اختيار قيمة المكاسب التي حددتها الخوارزميات الجينية. يستخدم الأسلوب الثاني المنظم الخطي التربيعي مع تكامل LQI ، وتستند هذه التقنية إلى حل معادلة Riccati لتوفير اكتساب التغذية المرتدة والتحكم الأمثل. دراسة مقارنة لأداء كل منظم مع تطبيق على نظام ديناميكي متعدد المتغيرات يسمى Twin Rotor Mimo System (TRMS). تظهر نتائج محاكاة S تفوق منظم LQI على منظم PID من حيث الاستقرار ؛ السرعة والدقة.

الكلمات المفتاحية: مشتق متكامل نسبي ؛ منظم خطي من الدرجة الثانية منظم تربيعي خطي مع تكامل ؛ معادلة ريكاتي نظام ديناميكي متعدد المتغيرات.

Liste de matières

Resumé.....	i
Listes des Tableaux.....	ii
Liste des Figures	iii
Abréviation.....	iv
Introduction Générale	1

Chapitre I les régulateurs PID

I.1. Introduction.....	3
I.2. Description des régulateurs PID.....	3
I.3. L aspects fonctionnels du régulateur PID.....	5
I.3.1. Action proportionnelle (P).....	5
I.3.1.1. Principe de l'action proportionnelle	5
I.3.1.2. Fonction de transfert d'un régulateur proportionnel.....	6
I.3.1.3. Limite du régulateur proportionnel.....	7
I.3.2. Action intégrale et proportionnelle intégrale.....	7
I.3.2.1. Action intégrale seul (I).....	7
I.3.2.2. Action Proportionnel intégrale (PI).....	7
I.3.2.3. Fonction de transfert d'un régulateur proportionnel intégral.....	8
I.3.3. Action proportionnelle dérivée(PD).....	8
I.3.3.1. Principe de l'action	8
I.3.3.2. Fonction de transfert du correcteur PD.....	8
I.3.3.3. Filtrage de la dérivée.....	8
I.3.4. Action Proportionnelle intégrale Dérivée (PID).....	9
I.4. Réglage des régulateurs PID	10
I.4.1. Méthode de Ziegler &Nichols.....	10
I.4.1.1. Dans le domaine temporel.....	10
I.4.1.2. Dans le domaine fréquentiel.....	11
I.4.2. Méthode de Cohen-Coon	12
I.4.3. Placement des pôles	13
I.4.3.1. Système de deuxième ordre	13
I.5. Différentes structures de régulateurs PID	15
I.5.1. Le type série	15
I.5.2. Le type parallèle.....	16
I.5.3. Le type mixte	16
I.6. Comparaison entre les trois types.....	17
I.7. Domaine d'application et limites du régulateur PID.....	18
I.8. Les avantages et les inconvénients du régulateur PID.....	18
I.9. Conclusion	19

Chapitre II Commande linéaire quadratique avec intégration

II.1. Introduction.....	20
-------------------------	----

II.2. La commande LQ	20
II.2.1. Principe	20
II.2.2. Résolution de l'équation de Riccati.....	22
II.2.2.1. Choix des matrices de pondération.....	22
II.2.2.2. La règle de Bryson.....	22
II.2.2.3. Résolution par les sous espaces invariants	23
II.2.3. Introduction	24
II.2.4. Principe de la commande linéaire quadratique avec intégration.....	24
II.2.5. Description	25
II.3. Conclusion.....	26

Chapitre III

Application de la commande LQ et PID sur les systeme multivariable

III.1. Introduction.....	2
III.2. Modèle de TRMS.....	31
III.3. Application de la commande PID et LQI sur le modèle de TRMS	36
III.4. Résultats de simulation	36
III.5. Comparaison entre les deux commandes PID et LQI sur le modèle de TRMS.	41
III.6. Conclusion.....	41
Conclusion Générale.....	39
Bibliographie.....	40

Liste des Tableaux

Tab N°	Titre	Page
Tableau (I.1)	Réglage de Ziegler & Nichols dans le domaine.	11
Tableau (I.2)	<i>Réglage de Ziegler & Nichols dans le domaine fréquentiel.</i>	12
Tableau (I.3)	<i>Réglage de Cohen-coon à partir d'une réponse indicielle.</i>	13
Tableau (III.1)	<i>Paramètres du modèle de TRMS.</i>	30
Tableau (III.2)	les performances de la 1 ^{ière} sortie(y1)	36
Tableau (III.3)	les performances de la 2 ^{ème} sortie(y2)	36

Liste des figures

Figure N°	Titre	Page
Figure (I.1)	Schéma fonctionnel d'un processus réglé par un PID classique.	4
Figure (I.2)	Régulateur proportionnel.	6
Figure (I.3)	Sortie d'un régulateur intégral pur.	7
Figure (I.4)	Effet prédictif du terme dérivé.	8
Figure (I.5)	Dérivée filtrée.	9
Figure (I.6)	Réponse d'un système stable et apériodique à une entrée en échelon.	11
Figure (I.7)	Régulateur PID de type série.	15
Figure (I.8)	Régulateur PID type parallèle.es d'analyse vibratoire.	16
Figure (I.9)	Régulateur PID type mixte.	17
Figure (I.10)	Réponses corrigées avec PID série, parallèle et mixte.	17
Figure (II.1)	commande linéaire quadratique.	24
Figure (II.2)	commande linéaire quadratique avec action intégrale.	24
Figure (II.3)	Principe de la commande LQI.	25
Figure (III.1)	Modèle descriptif du TRMS.	27
Figure (III.2)	du système commandé par LQI.	32
Figure (III.3)	du système commandé par PID.	33
Figure (III.4)	la réponse temporelle y_1 avec PID et LQI.	33
Figure (III.5)	la réponse temporelle y_2 avec PID et LQI.	35
Figure (III.6)	les commandes u_1 obtenues par PID et LQI.	35
Figure (III.7)	les commandes u_2 obtenues par PID et LQI.	35
Figure (III.8)	les erreurs e_1 obtenues par PID et LQI.	35
Figure (III.9)	les erreurs e_2 obtenues par PID et LQI.	36

Abréviation et Symboles

LQ	Linéaire Quadratique.
LQI	Linéaire Quadratique avec Intégral.
PID	Proportionnel Intégral Dérivé.
MIMO	Multi Input Multi Output.
T_d	Le temps de dérivée.
T_i	La constante de temps intégral.
T, θ , t	Temps.
$\varepsilon(t)$	L'erreur statique.
k_c	Le gain du contrôleur.
$u(t)$	La sortie du contrôleur.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Introduction Générale

Le monde d'aujourd'hui a connue plusieurs développements dans des différents domaines. L'automatique est une solution qui a permis de résoudre de nombreuses difficultés rencontrées lors de la commande des systèmes développés. Les systèmes développés sont de plus en plus complexes et difficiles à commander, pour cela existe plusieurs lois de commande qui ont connu aussi de nombreux travaux de recherches. L'application de ses commandes nécessite un modèle mathématique proche du modèle réel.

Malgré un éventail très large de processus existants et malgré les diverses formulations envers les exigences requises, le régulateur proportionnel intégral dérive (PID), dont l'architectures relativement dépouille consiste en seulement trois termes distincts, s'est imposé dans plus de 90% des boucles de contre réaction [1]. La prédominance incontestée de ce type de commande provient, outre la simplicité extrême, des performances qu'il peut offrir aux systèmes en boucles fermée, satisfaisant très souvent les cahiers des charges, si ses paramètres sont choisis judicieusement.

Afin d'améliorer les inconvénients requis par les régulateurs PID, plusieurs chercheurs ont développé diverses techniques de commandes dont les performances sont meilleures et satisfaisantes. Parmi ces commandes, la commande linéaire quadratique avec intégration LQI [2].

Dans ce mémoire on étudiera les performances de la commande linéaire quadratique LQI appliqué sur un modèle de TRMS ainsi qu'une comparaison faite avec les régulateurs PID.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le chapitre I porte sur l'étude théorique des régulateurs PID et leurs avantages et inconvénients ainsi que leurs types.

Le chapitre II présente une étude théorique sur les Notions de La commande Linéaire Quadratique avec intégration (LQI) leurs notions principales et la méthodologie du calcul de la loi de commande ainsi que la conception d'un schéma global de cette stratégie de commande.

Dans **le dernier chapitre**, on a appliqué la commande LQI sur le modèle linéaire du TRMS et nous avons comparé les performances obtenues avec celles des régulateurs PID.

Enfin, nous achevons ce mémoire par une conclusion générale qui englobe les principaux résultats obtenus ainsi que des perspectives qu'il permet d'ouvrir.

CHAPITRE : I : LES REGULATEURS PID

I.1. Introduction

Bien que le contrôle proportionnel ait été employé par les Grecs en 250 avant J.C, pour réaliser un système de contrôle de niveau d'eau basé sur un principe similaire à celui de la chasse d'eau, on peut considérer que le régulateur PID à 3 modes (proportionnel, intégral et dérivé) date des années 1930 où il est devenu commercialement disponible. Les premières études théoriques datent de cette période. Le contrôle par contre-réaction (ou feed-back en anglais) a joué un rôle essentiel pour le développement dans les années 30 des amplificateurs opérationnels très utilisés en électronique.

Le contrôleur PID pneumatique s'est répandu dans l'industrie dans les années 40. Il a été remplacé par le contrôleur électronique dans les années 50 et les premières applications des ordinateurs ont eu lieu au début des années 60 mais ce n'est qu'avec l'avènement du circuit intégré numérique dans les années 70 que l'électronique digitale s'est répandue. Aujourd'hui la puissance disponible sur les automates ou les SNCC (Système Numérique de Contrôle Commande) permet d'envisager l'utilisation d'algorithmes beaucoup plus sophistiqués que le PID à 3 modes des années 30.

Cependant le poids du passé est important, au niveau matériel d'abord, car beaucoup d'installations sont encore en pneumatique, mais aussi dans l'esprit des industriels, le PID reste le régulateur le plus utilisé et le mieux connu, et bien qu'implanté sous forme numérique et avec de nombreuses améliorations, il se présente à l'utilisateur sous une forme très proche de la version initiale continue. Comme nous le verrons, ceci peut être dans certains cas une limitation [1].

II.2. Description des régulateurs PID

- Un régulateur PID remplit essentiellement trois fonctions : Fournir un signal de commande $u(t)$ en tenant compte de l'évolution du signal de sortie $y(t)$ par rapport à la consigne $y^*(t)$.
- Éliminer l'erreur statique grâce au terme intégrateur.
- Anticiper les variations de la sortie grâce au terme dérivateur. Le régulateur PID classique relie directement le signal de commande $u(t)$ au signal d'écart $e(t)$. Sa description temporelle est la suivante :

$$u(t) = \left(k_p e(t) + k_i \int e(t) + k_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (\text{I.1})$$

L'écart se définit par :

$$e(t) = y^*(t) - y(t) \tag{I.2}$$

Où $y^*(t)$ est la consigne et $y(t)$ est la sortie mesurée par le capteur. En prenant la transformée de Laplace de l'équation, on obtient la fonction de transfert du correcteur.

$$C(p) = Kp + \frac{K_i}{p} + Kd * p \tag{I.3}$$

Cette combinaison des termes P, I et D est aussi désignée sous le nom de forme parallèle ou non interactive. Le schéma fonctionnel d'un processus réglé à l'aide d'un tel régulateur est donné à la figure (I.1).

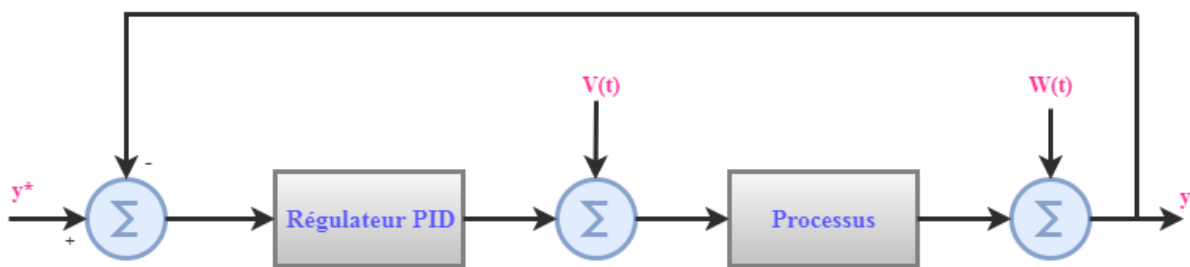


Figure I.1 Schéma fonctionnel d'un processus réglé par un PID classique.

La figure (I.1) illustre le principe général d'un processus réglé par PID où on y trouve les perturbations $V(t)$ et $W(t)$. Ces bruits sont généralement issus des capteurs et des actionneurs du système. Pour atteindre les performances souhaitées d'un régulateur on tend à apporter les modifications suivantes : On réduit l'effet de la consigne sur le terme proportionnel pour minimiser les dépassements en conservant un faible temps de réglage. L'écart est alors défini par :

$$ep(t) = k_p (y^*(t) - y(t)) \tag{I.4}$$

Suivant le dépassement souhaité, le paramètre k_p de pondération est choisi entre 0 et 1. Afin d'éviter de fortes amplitudes du signal de commande lors de brusques variations de la consigne, on diminue ou on annule l'effet de la consigne sur le terme dérivé :

$$ed(t) = k_d (y^*(t) - y(t)) \tag{I.5}$$

La description temporelle du régulateur PID modifié est alors la suivante :

Tenant compte des définitions des trois écarts, le signal de command $U(t)$ s'écrit :

$$U(t) = (K_p y^*(t) + K_i \int y^*(t) dt + K_p \frac{d}{dt} y^*(t)) - (K_p y + K_i \int y dt + K_d \frac{d}{dt} y) \tag{I.6}$$

Dont la transformée de Laplace vaut :

$$U(p) = (K_p + K_i \frac{1}{p} + K_d)y^*(p) - (K_p + K_i \frac{1}{p} + K_d p)y(p) \quad (I.7)$$

D'un point de vue pratique, deux autres modifications sont fréquemment apportées au régulateur PID. Afin de diminuer l'influence du bruit hautes fréquences, on limite le gain du dérivateur en remplaçant le terme Kd par la fonction de transfert suivante, avec τ très petit :

$$G(p) = Kd \frac{P}{1+\tau P} \quad (I.8)$$

En présence du terme intégral et dans le cas où l'écart tarde à s'annuler, la composante intégrale peut croître sans cesse et entraîner la saturation du convertisseur ou de l'actuateur commandant le processus. Puis lors du changement de signe de l'écart, il faudra attendre que la composante intégrale décroisse suffisamment pour ne plus saturer les éléments qui se trouvent en aval. Pour éviter ce temps perdu, on introduit une limitation sur la valeur maximum que peut atteindre le terme intégral. On notera qu'avec cette modification, le régulateur ne peut plus être considéré comme linéaire.

Et bien, lors d'un simple contrôle proportionnel, il subsiste une erreur statique. Lorsque le système s'approche de sa consigne, l'erreur n'est plus assez grande pour faire avancer le moteur. Le terme intégral permet ainsi de compenser l'erreur statique et fournit, par conséquent, un système plus stable en régime permanent. Plus Ki est élevé, plus l'erreur statique est corrigée. Pour reprendre l'exemple de la voiture qui dérive, le terme intégral consiste à rajouter un petit coup de contre braquage afin de se rétablir correctement [3].

I.3. Aspects fonctionnels du régulateur PID

La réalisation de la boucle d'asservissement par un PID comporte deux aspects essentiels :

- Le réglage du régulateur PID, pour lequel la connaissance d'un modèle dynamique du procédé d'une part et les performances désirées d'autre part déterminent le choix de la méthode de synthèse.
- L'implantation du régulateur dans une version analogique ou numérique et dans une configuration série, parallèle ou mixte [4].

I.3.1. Action proportionnelle (P)

I.3.1. 1. Principe de l'action proportionnelle

L'objectif du contrôle par feed-back est de ramener le signal d'erreur $\varepsilon(t)$, différence entre la mesure et la consigne vers l'entrée. L'action proportionnelle consiste à générer une action qui varie de façon proportionnelle au signal d'erreur :

$$u(t) = u_0 + k_c \varepsilon(t) = u_0 + k_c (y_c(t) - y(t)) \quad (\text{I.9})$$

Où ;

$u(t)$ est la sortie du contrôleur.

k_c est le gain du contrôleur.

$y_c(t)$ est la consigne.

$Y(t)$ est la mesure de la variable à réguler.

Le gain k_c est ajustable pour des valeurs normalisées -10% à 110%. C'est un nombre sans dimension.

Par convention, on le choisit positif et on distingue deux sens d'action :

- Le sens direct : dans ce cas : l'erreur $\varepsilon(t)$ et l'action $u(t)$ varient dans le même sens.
- Le sens inverse : dans ce cas : $\varepsilon(t)$ et $u(t)$ varient en sens inverse (c'est le cas habituel). Pour tenir compte des limites physiques du système. On spécifie aussi la zone de variation admissible pour l'action par sa valeur maximale u_{\max} et sa valeur minimale u_{\min}
- Quand le régulateur atteint l'une de ses bornes, on dit qu'il est saturé. [5]. [6]. [7] voir la **figure (I.2)**.

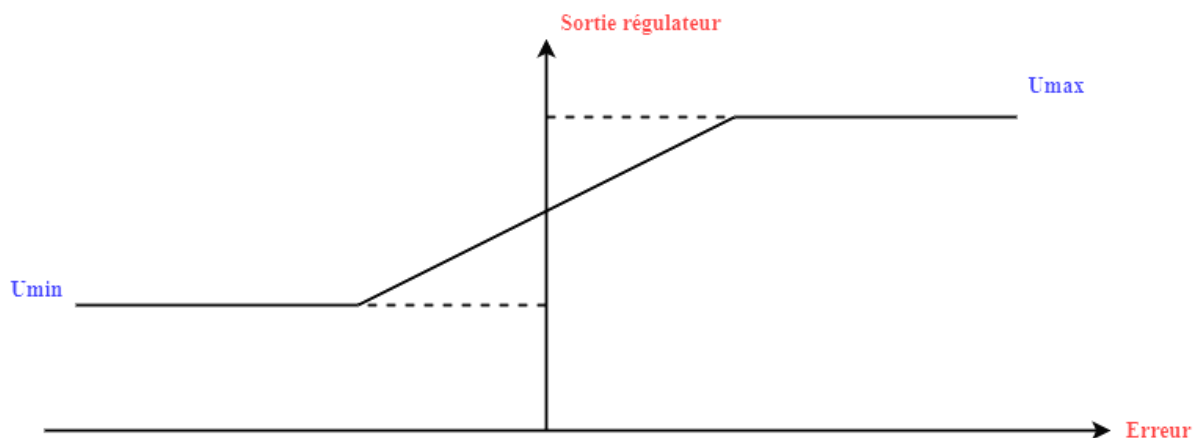


Figure I.2 Régulateur proportionnel.

I.3.1.2. Fonction de transfert d'un régulateur proportionnel

La fonction de transfert du régulateur proportionnel s'obtient en prenant la transformée de Laplace de l'équation (I.1) comme suit :

$$C(p) = \frac{u(p)}{\varepsilon(p)} = k_c \quad (\text{I.10})$$

I.3.1.3. Limite du régulateur proportionnel

Un inconvénient inhérent au régulateur P est son incapacité à éliminer les erreurs en régime permanent, après un changement de point de consigne ou une charge. À cause de cette limitation, le contrôleur proportionnel ne s'emploie que rarement [8].

I.3.2. Action intégrale et proportionnelle intégrale

I.3.2.1. Action intégrale seul (I)

La sortie d'un régulateur intégral est de la forme :

$$u(t) = \frac{1}{T_i} = \int_0^t \varepsilon(t) dt \quad (\text{I.11})$$

Le coefficient T_i est appelé la constante de temps intégrale et s'exprime en t-1. L'ajustage de T_i permet de doser l'effet de l'intégrale : T_i représente le temps nécessaire pour que la variation de sortie du contrôleur soit égale à celle de l'amplitude d'une variation en échelon sur l'entrée du régulateur [9].

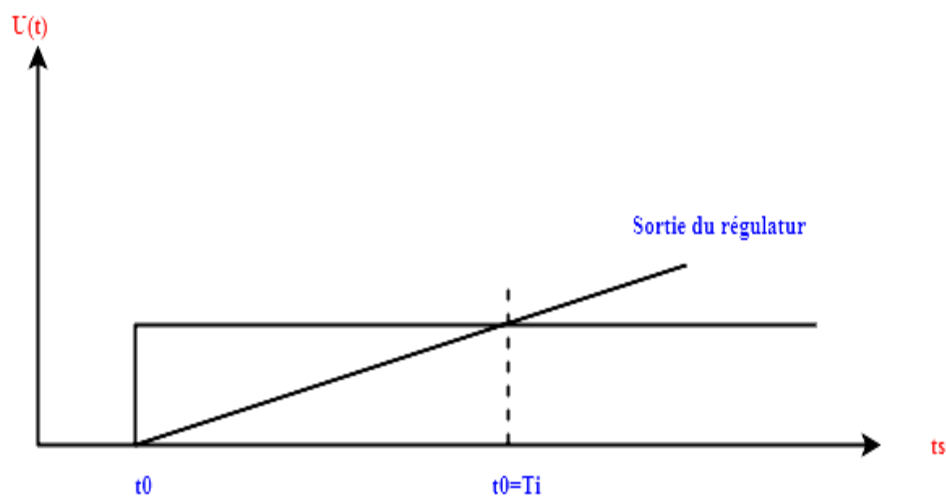


Figure I.3 *Sortie d'un régulateur intégral pur.*

L'intérêt du contrôleur intégral est de permettre d'éliminer l'erreur du régulateur qui persistait avec un régulateur proportionnel seul.

I.3.2.2. Action Proportionnel intégrale (PI)

Le correcteur intégral est rarement utilisée seul, car son effet ne devient sensible que lorsque l'erreur dure depuis un certain temps. Pour obtenir une réponse initiale plus rapide, on l'utilise avec un correcteur proportionnel. La sortie d'un régulateur PI est de la forme suivante [8] [5]:

$$u(t) = u_0 + K_c(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t \varepsilon(t)dt) \tag{I.12}$$

I.3.2.3. Fonction de transfert d'un régulateur proportionnel intégral

La fonction de transfert du régulateur PI s'obtient en prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente :

$$c(p) = \frac{u(p)}{\varepsilon(p)} = k_c (1 + \frac{1}{T_{ip}}) \tag{I.13}$$

I.3.3. Action proportionnelle dérivée(PD)

I.3.3.1 Principe de l'action

L'objectif de l'action dérivée est d'anticiper les variations à venir du signal de mesure en appliquant une correction proportionnelle à sa vitesse de variation. L'action dérivée a un effet prédictif. La sortie d'un régulateur PD idéal est de la forme [9] [8]:

$$u(t) = u_0 + T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \tag{I.14}$$

La constante Td est appelée temps de dérivée

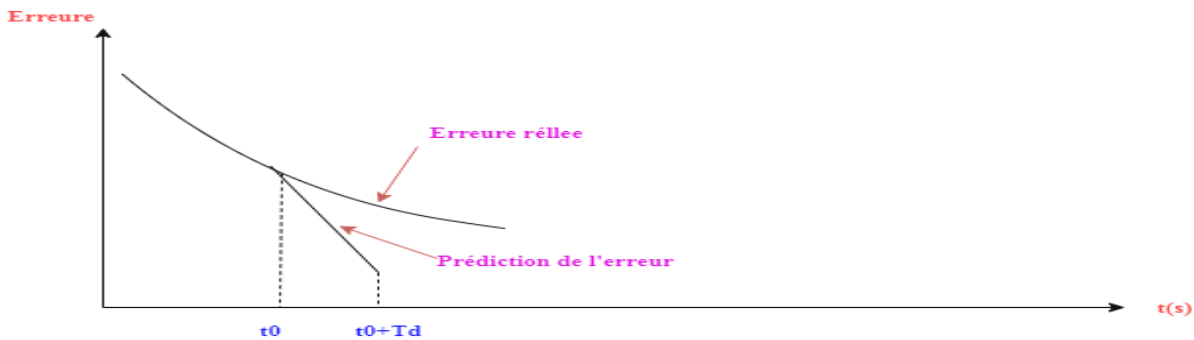


Figure I.4 Effet prédictif du terme dérivé.

I.3.3.2. Fonction de transfert du correcteur PD

La fonction de transfert du régulateur PD idéal s'obtient en prenant la transformée de Laplace de l'équation précédente :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = k_c (1 + T_d p) \tag{I.15}$$

I.3.3.3. Filtrage de la dérivée

En pratique, il n'est pas possible de réaliser un régulateur dérivée idéal .On utilise en fait un module de dérivée filtrée :

$$C(p) = \frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = T_d p \tag{I.16}$$

Le réglage de la constante de filtrage T_d/N permet d'amortir et de limiter la sortie du régulateur Le coefficient N correspond au gain du module 'dérivée filtrée'.En d'autres termes, le bruit de mesure ou les changements de consigne sont amplifiés au plus par un coefficient N [8] [5].

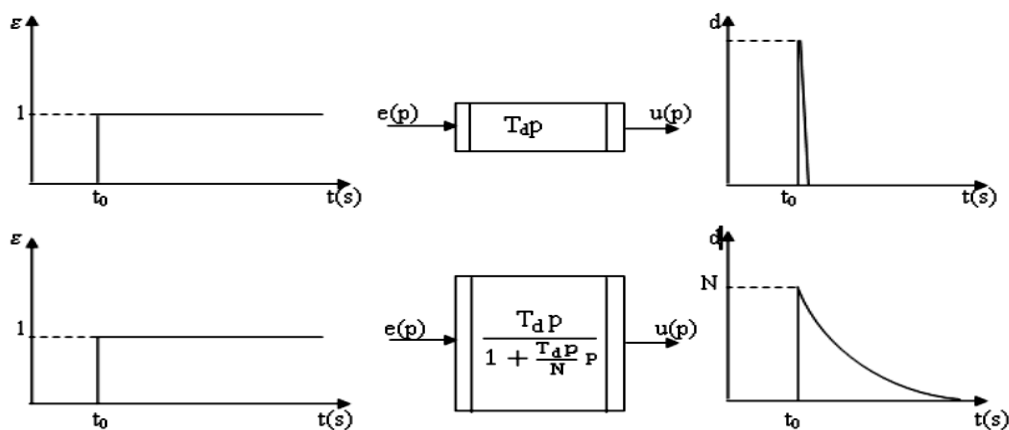


Figure I.5 Dérivée filtrée [4].

L'effet 'dérivée' est destiné à accélérer la réponse du régulateur. Cette accélération n'est en général pas souhaitée lors des changements de consigne, mais seulement pour corriger une erreur due à une perturbation.

I.3.4. Action Proportionnelle intégrale Dérivée (PID)

Les régulateurs rencontrés sur les installations industrielles combinent les effets proportionnel, intégral et dérivée. La sortie d'un régulateur PID standard, avec filtrage de la dérivée calculée sur l'écart consigne-mesure est donc de la forme [8] :

$$u(t) = u_0 + k_c \left[\varepsilon(t) + \frac{1}{T} \int_0^t \varepsilon(t) dt + T_d D(t) \right] \quad (\text{I.17})$$

Avec

$$\frac{T_d}{N} \frac{dD(t)}{dt} + Dt = T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

I.4. Réglage des régulateurs PID

I.4.1. Méthode de Ziegler & Nichols

I.4.1.1. Dans le domaine temporel

J.G Ziegler et B Nichols ont été les premiers à montrer comment on peut choisir les paramètres d'un PID à partir d'une réponse à un échelon du procédé. Leur méthode, même si elle n'est pas la meilleure, jouit d'une notoriété telle qu'elle n'est pas possible de l'ignorer.

L'idée consiste à approximer la réponse du procédé à un échelon unitaire, que l'on suppose apériodique, par un modèle du type, voir la

$$G(P) = \frac{Ke^{-\theta P}}{1+\tau P} \quad (\text{I.18})$$

Le coefficient de pente R est défini comme étant :

$$R = \frac{K}{\tau}$$

Il suffit ensuite d'appliquer les relations du suivant que l'on utilise un régulateur P, PI ou PID. Ces relations ont été développées empiriquement pour donner une réponse en boucle fermée oscillante, avec un dépassement initial de l'ordre de 30 à 40% et avec un rapport d'amplitude des oscillations de 1/4 (rapport entre le dépassement de deux pics de même signe).

Pour un système du deuxième ordre, ceux-ci correspondent à un coefficient d'amortissement $\xi = 2$ et un premier dépassement de 50% [5], [7], [10].

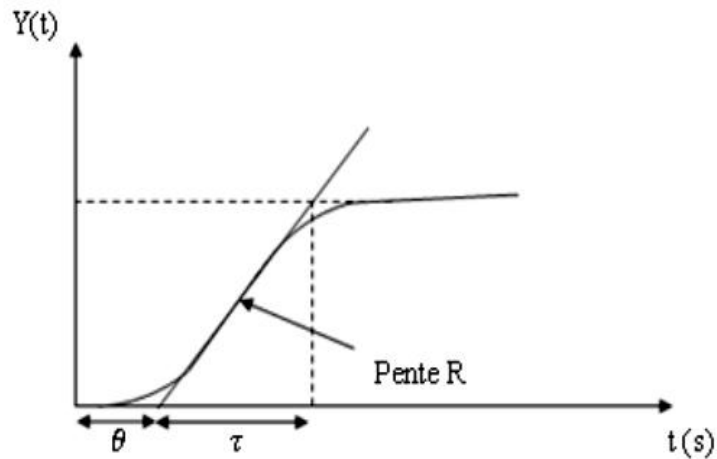


Figure I.6 Réponse d'un système stable et apériodique à une entrée en échelon [7].

Type de régulateur	k_c	T_i	T_d
P	$\frac{1}{\theta R}$	—	—
PI	$\frac{0.9}{\theta R}$	3,33 θ	—
PID	$\frac{11.2}{\theta R}$	2 θ	0,5 θ

Tableau I.1 Réglage de Ziegler & Nichols dans le domaine temporel [5].

I.4.1.2. Dans le domaine fréquentiel

Dans leur célèbre publication [11] Ziegler et Nichols proposent une approche utilisable en ligne. L'idée de base consiste à chercher le gain k_u , valeur limite de stabilité du processus, on suit les étapes suivantes :

1. Mettre le régulateur en mode manuel.
2. Enlever l'action intégrale et dérivée (mettre T_i au maximum, T_d au minimum).
3. Mettre le gain à une faible valeur.
4. Mettre le contrôleur en mode automatique.

5. Faire une petite variation de consigne et observer la réponse de la variable contrôlée.

Comme le gain est petit. La réponse sera très amortie.

6. Doubler le gain et refaire une variation de consigne.

Continuer ainsi jusqu'à ce que la réponse devienne oscillante. Cette valeur du gain est notée k_u (ultime gain). Les actions du régulateur sont ensuite déterminées suivant la table ci-dessous. Les réglages de Ziegler-Nichols ont été déterminés empiriquement pour donner une réponse oscillante avec une diminution pic à pic de $\frac{1}{4}$.

Les paramètres Type de régulateur	K_C	$\frac{1}{T_i}$	T_d
P	0.5K_u	-	-
PI	0.45 K_u	0.8 T_u	-
PID	0.6 K_u	0.5 T_u	0.125 T_u

Tableau I.2 Réglage de Ziegler & Nichols dans le domaine fréquentiel [11].

k_u : C'est le gain qui amène le système en oscillation limite et T_u : c'est la période des oscillations.

I.4.2. Méthode de Cohen-Coon

La méthode de Cohen-Coon est très proche de celle de Ziegler-Nichols [8]. Nous la citons ici pour référence (voir **tableau (I.2)**). Pour un modèle de la forme :

$$G(p) = \frac{ke^{-\theta p}}{1+\tau P} \quad (\text{I.19})$$

Type de régulateur	K_C	$\frac{1}{T_i}$	T_d
P	$\frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} \left[\frac{3\tau + \theta}{3\tau} \right]$	—	—
I	$\frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} \left[\frac{10.8\tau + \theta}{3\tau} \right]$	$\theta \frac{30 + 3(\frac{\theta}{\tau})}{9 + 20(\frac{\theta}{\tau})}$	—
D	$\frac{1}{K} \frac{\tau}{\theta} \left[\frac{16.8\tau + \theta}{12\tau} \right]$	$\theta \frac{30 + 3(\frac{\theta}{\tau})}{9 + 20(\frac{\theta}{\tau})}$	$\frac{4\theta}{11 + 2(\frac{\theta}{\tau})}$

Tableau I.3 Réglage de Cohen-coon à partir d'une réponse indicielle.

I.4.3. Placement des pôles

La méthode de placement de pôles est tout aussi intéressante et nous allons donner un aperçu dans ce qui suit, en s'intéressant à un système du second ordre et le cas du premier ordre est donné en annexe.

I.4.3.1. Système de deuxième ordre

Considérons maintenant un système du deuxième ordre de fonction de transfert :

$$G(P) = \frac{K}{(1+\tau_1 P)(1+\tau_2 p)} \tag{I.20}$$

Un régulateur PI ne permet pas de placer les pôles du système en boucle fermée .Il est nécessaire ici d'utiliser un régulateur PID comme nous allons le voir .La fonction de transfert d'un régulateur idéal est :

$$C(P) = k_c \left(1 + \frac{K}{T_i p} + T_d p \right) \tag{I.21}$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle fermée est donc égal à:

$$p^3 + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau} + \frac{Kk_c k_d}{\tau_1 \tau_2} \right) p^2 + \left(\frac{1+Kk_c}{\tau_1 \tau_2} \right) p + \frac{Kk_c}{T_i \tau_1 \tau_2} = 0 \tag{I.22}$$

Supposant que l'on désire une réponse en boucle fermée avec un dépassement, ce qui correspond a un polynôme du type :

$$(1+\tau p)(\omega_0^2 P^2 + 2\varepsilon\omega_0 P + 2) \tag{I.23}$$

Avec : ω_0 est la pulsation propre ; ξ est le facteur d'amortissement ; τ est la constante de temps à introduire [6] [8]. Par identification, on déduit les valeurs des coefficients du régulateur :

$$K_c = \frac{1}{K} \left(\frac{2\varepsilon\tau_1\tau_2}{\tau\omega_0} + \frac{\tau_1\tau_2}{\omega_0^2} - 1 \right) \tag{I.24}$$

$$T_i = 2\varepsilon\tau_{d2} + \tau - \frac{\tau_{d1}(\tau_{d2})^2}{\tau_1\tau_2} \tag{I.25}$$

$$T_d = \frac{\frac{2\varepsilon\tau_1\tau_2}{\omega_0} + \frac{\tau_1\tau_2}{\tau} - (\tau_1 + \tau_2)}{\frac{2\varepsilon\tau_1\tau_2}{\tau\omega_0} + \frac{2\varepsilon\tau_1\tau_2}{\omega_0^2} - 1} \tag{I.26}$$

Dans cette méthode on prend la fonction de transfert sous la forme suivante [12] :

$$G(p) = \frac{a_0}{1+b_1p+b_2p^2} \tag{I.27}$$

Simplifions le dénominateur du processus par le numérateur du correcteur. La fonction en boucle ouverte est :

$$H(P) = C(p)G(p) \left[K_c \left(\frac{1+T_i p+T_i T_d}{T_i p} \right) \left(\frac{b_0}{1+a_1 P+a_2 P} \right) \right] \tag{I.28}$$

Avec:

$$1+T_i p + T_i T_d p^2 = 1 + a_1 P + a_2 p^2 \tag{I.29}$$

D'où:

$$H(p) = \frac{K_c b_0}{T_i p} \tag{I.30}$$

La fonction de transfert en boucle fermée est alors un premier ordre:

$$H(P) = \frac{1}{1+\left(\frac{T_i}{K_c b_0}\right)p} \tag{I.31}$$

Qui est de la forme :

$$H(P) = \frac{1}{1+T_0 P} \tag{I.32}$$

Avec:

$$T_0 = \frac{T_i}{K_c b_0}$$

Les actions du régulateur PID sont données par la résolution des équations (I.19) et (I.20)

$$T_i = a_1$$

$$T_i = \frac{a_2}{T_i}$$

$$K_0 = \frac{T_i}{T_0 b_0}$$

I.5. Différentes structures de régulateurs PID

Différentes possibilités d'associations des modules P, I et D existent. Ces structures sont fonctionnellement équivalentes, et il est facile de convertir les coefficients utilisés dans l'une pour obtenir ceux d'une autre [8]. Les trois configurations les plus utilisées sont :

I.5.1. Le type série

$$u(t) = u_0 + k_{c,s} \left(\frac{T_{i,s} + T_{d,s}}{T_{i,s}} \right) \varepsilon(t) + \frac{K_{c,s}}{T_{i,s}} \int_0^t \varepsilon(t) dt + K_{c,s} T_{d,s} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (I.33)$$

Avec :

$$\varepsilon(t) = y_c(t) - y_c(t)$$

La fonction de transfert s'écrit:

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = k_{c,s} \left[\frac{T_{i,s} + T_{d,s}}{T_{i,s}} + \frac{1}{T_{i,s} P} + T_{i,s} P + \right] = k_{c,s} \left(1 + \frac{1}{T_{i,s} P} \right) (1 + T_{i,s} P) \quad (I.34)$$

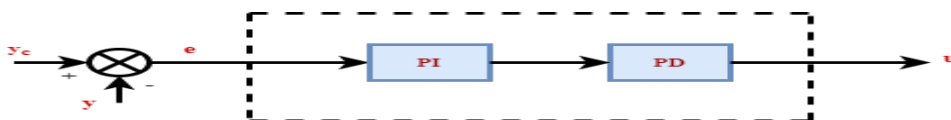


Figure I.7 Régulateur PID de type série.

I.5.2. Le type parallèle

$$u(t) = k_{c,p}\varepsilon(t) + \frac{1}{T_{i,p}} \int_0^t \varepsilon(t)dt + T_{d,p} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \tag{I.35}$$

Avec :

$$\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$$

La fonction de transfert s'écrit:

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(t)} = k_{c,s} + \frac{1}{T_{i,p} P} + T_{i,p} P \tag{I.36}$$

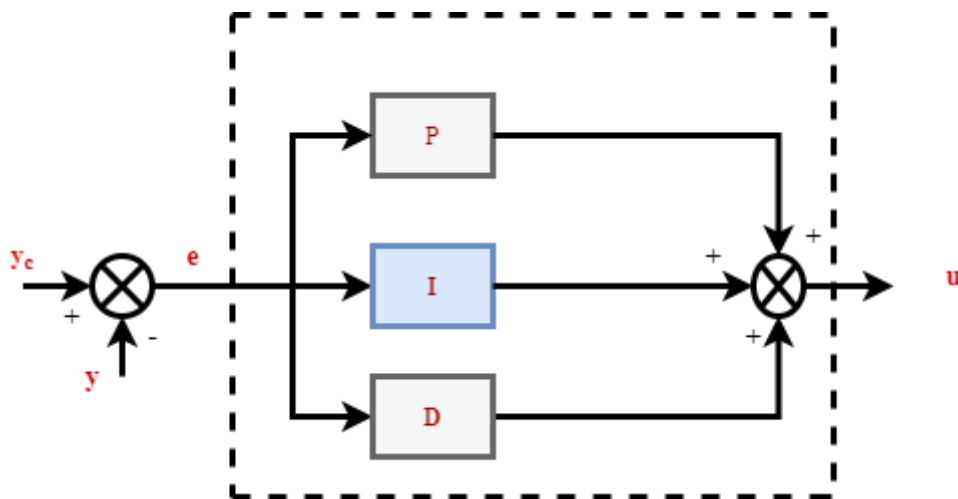


Figure I.8 Régulateur PID type parallèle.

I.5.3. Le type mixte

$$u(t) = u_0 + k_{c,m}\varepsilon(t) + \frac{k_{s,m}}{T_{i,m}} \int_0^t \varepsilon(t)dt + k_{c,m} T_{d,m} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \tag{I.37}$$

Avec :

$$\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t)$$

La fonction de transfert s'écrit:

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = k_{c,m} \left(1 + \frac{1}{T_{i,m} P} + T_{d,m} P \right) \tag{I.38}$$

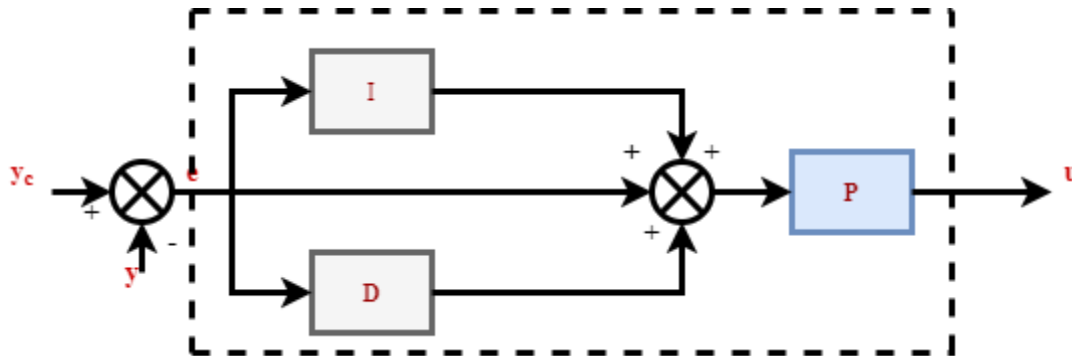


Figure I.9 Régulateur PID type mixte.

I.6. Comparaison entre les trois types

Après simulation de la fonction de transfert précédente $G(p)$, on aura le graphe suivant :

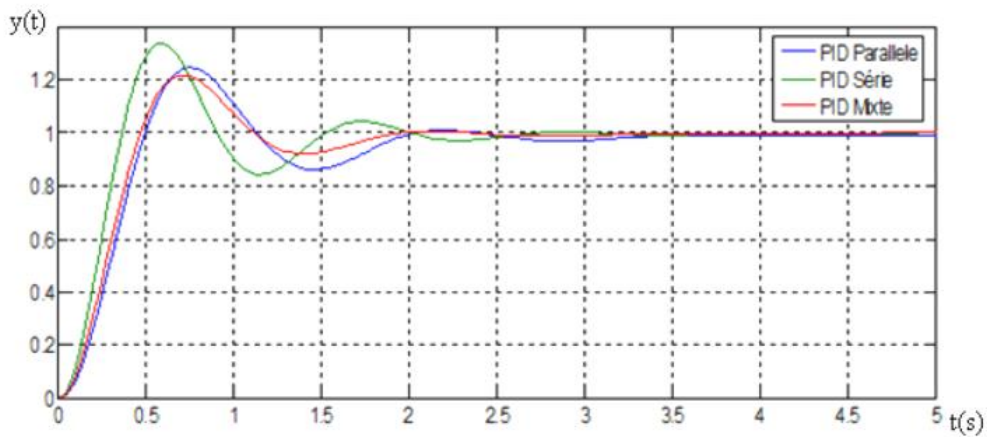


Figure I.10 Réponses corrigées avec PID série, parallèle et mixte [13].

- D’après la **figure(12)** on remarque que :
- Série : Un grand dépassement ; un temps de montée rapide et un grand temps de réponse.

- Parallèle : Diminution du dépassement ; Augmentation du temps de montée et augmentation du temps de réponse.
- Mixte : Diminution du dépassement ; Diminution du temps de montée et Diminution du temps de réponse.

On constate que le PID mixte est le mieux adapté par rapport aux deux autres types, car il donne de meilleures performances à tous les niveaux (temps de montée, temps de réponse et dépassement)

I.7. Domaine d'application et limites du régulateur PID

Dans le monde industriel, le régulateur PID est largement employé. Bien que relativement simple, cet algorithme soutient favorablement la comparaison avec des algorithmes plus sophistiqués, tant au point de vue de la performance que de la robustesse de la régulation vis-à-vis de non-linéarités ou variation du procédé. Par ailleurs, ce type d'algorithme est facile à implanter, ce qui plaide en sa faveur à l'époque des régulateurs pneumatiques ou même électroniques. C'est moins vrai aujourd'hui où derrière chaque régulateur se cache un microprocesseur. Une qualité du PID est qu'il est facile à comprendre donc facile à régler et à maintenir. Ces raisons expliquent pourquoi il est si largement employé, le plus souvent sous la forme PI, l'action D est souvent mise à zéro.

Il existe cependant des cas pour lesquels le régulateur PID n'est pas bien adapté. Nous avons vu que lorsque le procédé a un retard important, les performances sont mauvaises. C'est le cas aussi lorsque le système est oscillant [8] [13].

I.8. Les avantages et les inconvénients du régulateur PID

L'asservissement par PID est aujourd'hui l'un des asservissements les plus utilisés et ce pour plusieurs raisons. Premièrement, il est très simple à mettre en place et s'avère efficace pour la plupart des systèmes réels. De plus, le calcul des coefficients laisse le choix entre plusieurs méthodes de difficulté croissante. D'une part, une méthode expérimentale très facile à mettre en place, permet d'obtenir rapidement des coefficients corrects pour des systèmes ne nécessitant pas de très grandes précisions dans l'asservissement. D'autre part, des méthodes mathématiques avancées offrent des techniques pour obtenir les coefficients idéaux pour un système en particulier. Ainsi, la mise en place d'un asservissement PID peut-être à la fois rapide et efficace et permettra une optimisation des coefficients pour les systèmes les plus avancés. Cependant, il est important de noter que ce type d'asservissement est limité par un certain nombre de contraintes. Tout d'abord, il peut s'avérer

inefficace pour certains systèmes qui contiennent du bruit (coefficient Dérivé) ou qui ne sont pas linéaires (l'asservissement PID étant linéaire, la non-linéarité d'un système entraîne des instabilités). Enfin, il est possible d'optimiser la réponse d'un système en multipliant les asservissements (Comme par exemple le double asservissement PID) [1][13].

I.9. Conclusion

Dans ce chapitre, on a détaillé le fonctionnement du régulateur PID en précisant le rôle de chaque paramètre, ensuite, on a présenté un certain nombre d'approches pour calculer les actions d'un régulateur PID.

Dans le chapitre suivant, on va comparer les performances de ce régulateur (PID) avec la C^{ed} LQI appliquées aux système multivariables.

CHAPITRE : II : COMMANDE LINEAIRE QUADRATIQUE AVEC INTEGRATION

II.1. Introduction

La commande linéaire quadratique dite commande LQ, est une commande optimale par retour d'état. Cette commande permet de calculer la matrice de gain assurant une poursuite optimale d'une référence désirée. L'idée consiste à minimiser un critère de performances quadratique traduisant les objectifs de poursuite et de l'optimisation de l'énergie d'erreur et/ou de commande.

II.2. La commande LQ

II.2.1. Principe

Considérons un système linéaire décrit par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) = Nx(t) \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in \mathbb{R}^n; u \in \mathbb{R}^m \\ z \in \mathbb{R}^n \end{matrix} \quad (2.1)$$

La commande par retour d'état qui stabilise le système et minimise le critère:

$$J = \int_0^{\infty} (z^T(t)Qz(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (2.2)$$

$$= \int_0^{\infty} (x^T(t)Q_x x(t) + u^T(t)Ru(t))dt$$

Avec $R > 0$; $Q \geq 0$ et $Q_x = N^T Q N$; **s'écrit** :

$$u(t) = -K_c x(t) \text{ avec } K_c = R^{-1} B^T P_c \quad (2.3)$$

$$P_c A + A^T P_c - P_c B R^{-1} B^T P_c + Q_x = 0 \quad (2.4)$$

Démonstration : La dynamique du système en boucle fermée sur la loi de commande [14][15].

$$u(t) = -kx(t) \quad \text{obéit à l'équation :}$$

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (2.5)$$

La réponse autonome de $x(t)$ s'écrit alors : $x(t) = e^{A_f t} x_0$ avec $A_f = A - BK$ et

$$x_0 = x(t = 0)$$

Le critère J devient :

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Q_x x(t) + u^T(t)Ru(t))dt \quad (2.6)$$

$$= \int_0^{\infty} x^T(t)(Q_x + k^T R k) x(t) dt$$

$$=x_0^T \left(\int_0^\infty e^{A^T t} (Q_x + K^T R K) e^{A t} dt \right) x_0$$

$$=x_0^T P x_0$$

Avec :

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} (Q_x + K^T R K) e^{A t} dt \quad (2.7)$$

La contrainte A_f stable entraine que P vérifie l'équation de LYAPUNOV :

$$A_f^T + P A_f + Q_x + K^T R K = 0 \quad (2.8)$$

Par ailleurs : $P \geq 0$ car $J = x_0^T P x_0 \geq 0 \forall x_0$ (critère quadratique).

Soit K_c la valeur optimale de K qui minimise J et P_c la solution correspondante de l'équation de LYAPUNOV soit :

$$(A - B K_c)^T P_c + P_c (A - B K_c) + Q_x + K_c^T R K_c = 0 \quad (2.9)$$

Considérons une variation ΔK autour de K_c ; soit $k = K_c + \Delta_k$, alors il en résulte une variation ΔP autour de P_c ; soit $P = P_c + \Delta P$ qui vérifie :

$$(A - B (K_c + \Delta_k))^T (P_c + \Delta_p) + (P_c + \Delta_p) (A - B (K_c + \Delta_k)) + Q_x + (K_c + \Delta_k)^T R (K_c + \Delta_k) = 0 \quad (2.10)$$

K_c Est la valeur optimale au sens du critère J , si le critère augmente pour toute variation ΔK autour de K_c ; soit :

$$\Delta P > 0 \forall \Delta_k = A - B (K_c + \Delta_k) \text{ stable}$$

(Si Δ_k est telle que $A - B (K_c + \Delta_k)$ est instable, alors le critère devient infini). Si on retranche l'équation 2.9 de l'équation 2.10, nous obtenons :

$$\left(A - B (K_c + \Delta_k) \right)^T \Delta_p - \Delta_k^T B^T P_c + \Delta_p \left(A - B (K_c + \Delta_k) \right) - P_c B \Delta_k + \Delta_k^T R \Delta_k + \Delta_k^T R K_c + \Delta_k^T R \Delta_k = 0 \quad (2.11)$$

$$(A - B K_c)^T \Delta_p + \Delta_p (A - B K_c) + \Delta_k^T (R K_c - B^T P_c) + (R K_c - B^T P_c)^T \Delta_k + \Delta_k^T R \Delta_k = 0 \quad (2.12)$$

C'est une équation de LYAPUNOV. $A - B K_c$ étant stable, Δ_p est positif si :

$$\Delta_k^T (R K_c - B^T P_c) + (R K_c - B^T P_c)^T \Delta_k + \Delta_k^T R \Delta_k > 0 \forall \Delta_k \quad (2.13)$$

Or $\Delta_k^T R \Delta_k > 0 \forall \Delta_k$ car $R > 0$, il faut donc que :

$RK_c - B^T P_c = 0$; soit :

$$K_c = B^{-1} B^T P_c \tag{2.14}$$

II.2.2. Résolution de l'équation de Riccati

On peut résoudre l'équation matricielle de Riccati, soit analytiquement dans les cas les plus simples, soit par intégration numérique (**Runge-Kutta**)[16].

II.2.2.1. Choix des matrices de pondération

Le choix des matrices de pondération R et Q est important, il faut varier les valeurs de ces matrices pour obtenir les performances souhaitées. Elles sont généralement choisies diagonales. Des règles existent aussi pour le calcul de ces matrices comme la règle de Bryson. Ces matrices de pondération, généralement, sont choisies diagonales où [17] :

$$Q = \text{diag}(q_1, q_2, \dots, q_q) = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & q_q \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

$$R = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_m) = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & r_m \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

II.2.2.2. La règle de Bryson

En utilisant la règle de Bryson [16], l'évaluation initiale de ces matrices de pondération, se fait à base de calibrage physique des entrées-sorties correspondantes, en prenant :

$$r_i = \left[\frac{1}{\text{sup}(u_i)} \right]^2, i=1,2,3 \dots m \tag{2.17}$$

$$q_i = \left[\frac{1}{\text{sup}(y_i)} \right]^2, i=1,2,3 \dots q \tag{2.18}$$

Ensuite on pourra ajuster le choix des pondérations par essais et erreurs en simulation. Si on augmente Q par rapport à R , on aura globalement des réponses rapides au prix d'une commande plus énergique.

L'équation (2.4) s'écrit aussi :

$$[P_c - I_n] = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x & A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ P_c \end{bmatrix} = 0 \quad (2.19)$$

”

$$H = \begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x & A^T \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Est appelée la matrice hamiltonienne associée à l'équation de Riccati (2.14).

Démonstration : Effectuons une transformation régulière sur H :

$$\tilde{H} = M^{-1}HM \quad \text{avec} \quad M = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ P_c & I_n \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P_c & I_n \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -P_c & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P_c & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x A^T P_c & -A^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BR^{-1}B^T P_c & -BR^{-1}B^T \\ -P_c A - A^T P_c - Q_x - P_c BR^{-1}B^T P_c & -A^T + P_c BR^{-1}B^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A - BK_c & -BR^{-1}B^T \\ 0 & -(A - BK_c)^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Donc:

$$\text{Det}(sI_{2n} - \tilde{H}) = \text{det}(sI_{2n} - H) = \text{det}(sI_n - (A - BK_c)) \text{det}(sI_n + (A - BK_c)^T)$$

II.2.2.3. Résolution par les sous espaces invariants

La démonstration précédente nous montre que ” $\begin{bmatrix} I_c \\ P_c \end{bmatrix}$ • est la matrice des vecteurs (de longueur $2n$) qui engendrent le sous espace invariant associé aux n valeurs propres stables de H ($\text{spec}(A - BK_c)$). Soit Λ la matrice $n \times n$ (diagonale ou non) des n valeurs propres stables et soit X la matrice des vecteurs propres de H associées à Λ calculées par exemple par une décomposition spectrale ou une décomposition de Schur de H : $HX = X\Lambda$;

Si l'on partitionne X en deux sous-matrices X_1 et X_2 de dimension $n \times n$:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

Alors on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q_x & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ X_2 X_1^{-1} \end{bmatrix} X_1 \Lambda X_1^{-1} \quad (2.23)$$

$$P_c = X_2 X_1^{-1}$$

P_c Est unique car il n'existe qu'un seul ensemble de n valeurs propres stables de H .

II.2.3. Introduction

Les commande linéaire quadratique avec action intégrale (LQI) sont simples à mettre en œuvre, et ont déjà été appliqués dans une large gamme d'application non linéaire. Les schémas de commande LQI s'établissent de la même manière que les régulateurs LQ, auxquels une action intégrale est ajoutée sur le retour d'état. Le contrôleur LQI permet à la sortie y d'atteindre la référence désirée, même si une perturbation est appliquée sur le système à contrôler, le système vas suivre la consigne désiré [18] [16].

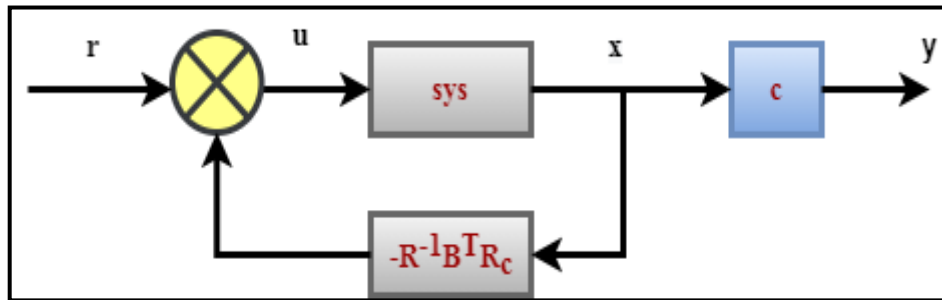
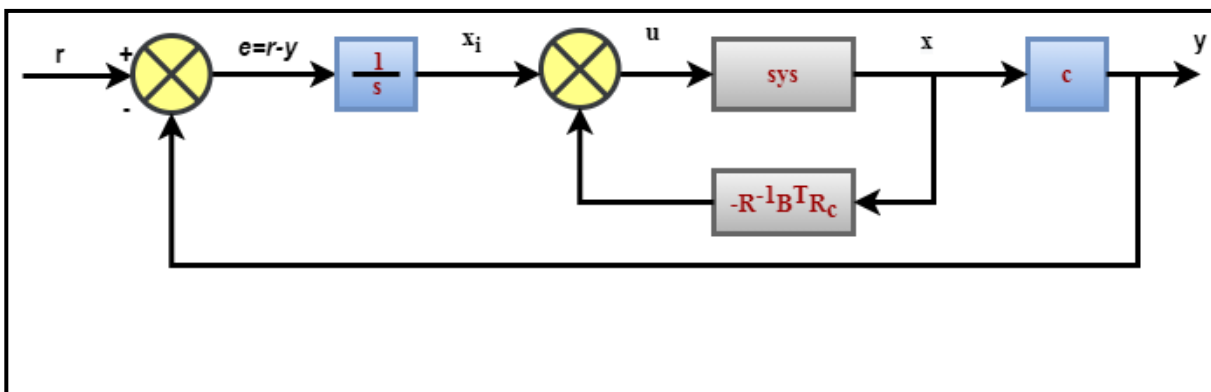


Figure II.1 commande linéaire quadratique.



Figure

II.2 commande linéaire quadratique avec action intégrale.

II.2.4. Principe de la commande linéaire quadratique avec intégration

LQI calcule une loi de contrôle de retour d'état optimale pour le suivi boucle illustrée ci-dessous. Pour une installation SYS avec des équations d'espace d'états $\dot{x} = A_x + Bu$, $y = Cx + Du$, ou leur homologue en temps discret, le la commande par retour d'état est de la forme $u = -K [x; xi]$ où xi est le Sortie intégrateur. Cette loi de contrôle garantit que la sortie y suit la commande de référence r . Pour les systèmes MIMO, le nombre d'intégrateurs est égale à la dimension de la sortie y [19].

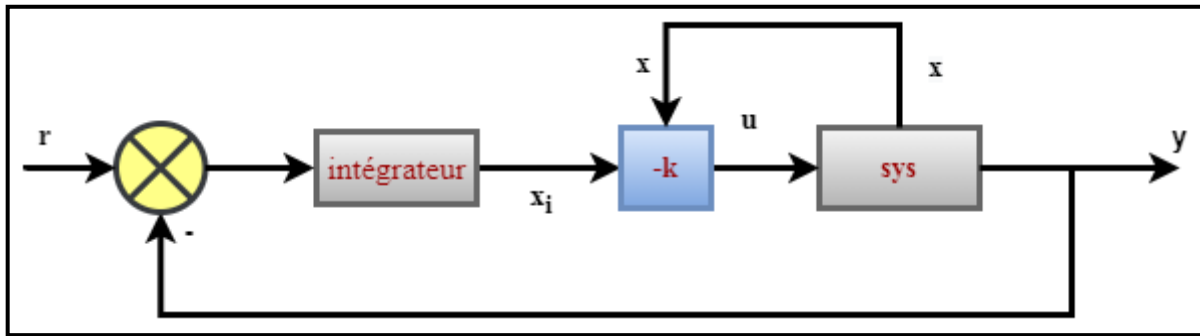


Figure II.3 Principe de la commande LQI.

$[K, S, E] = LQI (SYS, Q, R, N)$ calcule la matrice de gain optimale K étant donné un modèle d'espace d'états SYS de l'installation et matrices de pondération Q, R, N . la loi de contrôle

$$u = -kz = -k[x; xi] \tag{2.24}$$

Minimise la fonction de coût

$$J(u) = \text{Intégrale} \{z'Qz + u'Qu + 2 * z'Nu\} \tag{2.25}$$

En temps continu ou

$$J(u) = \text{Somme} \{z'Qz + u'Ru + 2 * z'Nu\} \tag{2.26}$$

En temps discret. En temps discret, la sortie xi de l'intégrateur est calculé En utilisant la formule d'Euler avant: $xi[n + 1] = xi[n] + T_s *(r[n] - y[n])$ (2.27)

Où T_s est le temps d'échantillonnage de SYS .

La matrice N est mise à zéro lorsqu'elle est omise. LQI renvoie également la solution S de l'équation algébrique de Riccati associée et de la boucle fermée valeurs propres E .

II.2.5. Description

LQI Calcule une loi de contrôle de rétroaction d'état optimale pour la boucle de suivi.

Pour une installation Sys avec les équations de l'espace d'états (ou leur homologue discrète):

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bx \tag{2.28}$$

$$y = Cx + Dx \tag{2.30}$$

Le contrôle de retour d'état est de la forme

$$u = -K[x; xi] \tag{2.31}$$

$LQI(SYS, Q, R, N)$ calcule la matrice de gain optimale K , étant donné un modèle d'espace d'états SYS pour l'installation et les matrices de pondération Q, R, N . La loi de commande $u = -kz = -k[x; xi]$ minimise les fonctions de coût suivantes pour un temps continu[19].

$$J(u) = \int_0^\infty [z^T Qz + u^T Ru + 2 z^T Nu] dt \tag{2.32}$$

Pour un temps discrète :

$$J(u) = \sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty [z^T Qz + u^T Ru + 2 z^T Nu] \tag{2.33}$$

II.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la notion et les principales bases de la commande linéaire quadratique LQ. Aussi, on a démontré le calcul du gain de retour d'état qui se stabilise les sorties autour des références imposées. Dans la suite de notre travail, on va appliquer cette commande sur un modèle d'un système dynamique multi variables.

CHAPITRE : III: APPLICATION DE LA COMMANDE LQ ET PID SUR LES SYSTEMES MULTIVARIABLES

III.1. Introduction

Afin de montrer la l'efficacité de la commande LQI, on va, dans ce chapitre à l'appliquer sur un modèle d'un système MIMO où la comparaison de performances sont étudiées avec les régulateurs PID.

Plusieurs prototypes sont mis en œuvre dans le but de tester les commandes avant de les transférer sur le système réel. Le simulateur d'hélicoptère TRMS (Twain Rotor Mimo System) est l'un de ces prototypes qui supporte l'implémentation des diverses commandes.

III.2. Modèle de TRMS

TRMS (Twin Rotor MIMO System) est un système physique aérodynamique conçu pour le développement et l'implémentation de nouvelles lois de commandes **Figure (III.1)** [20]. [21]

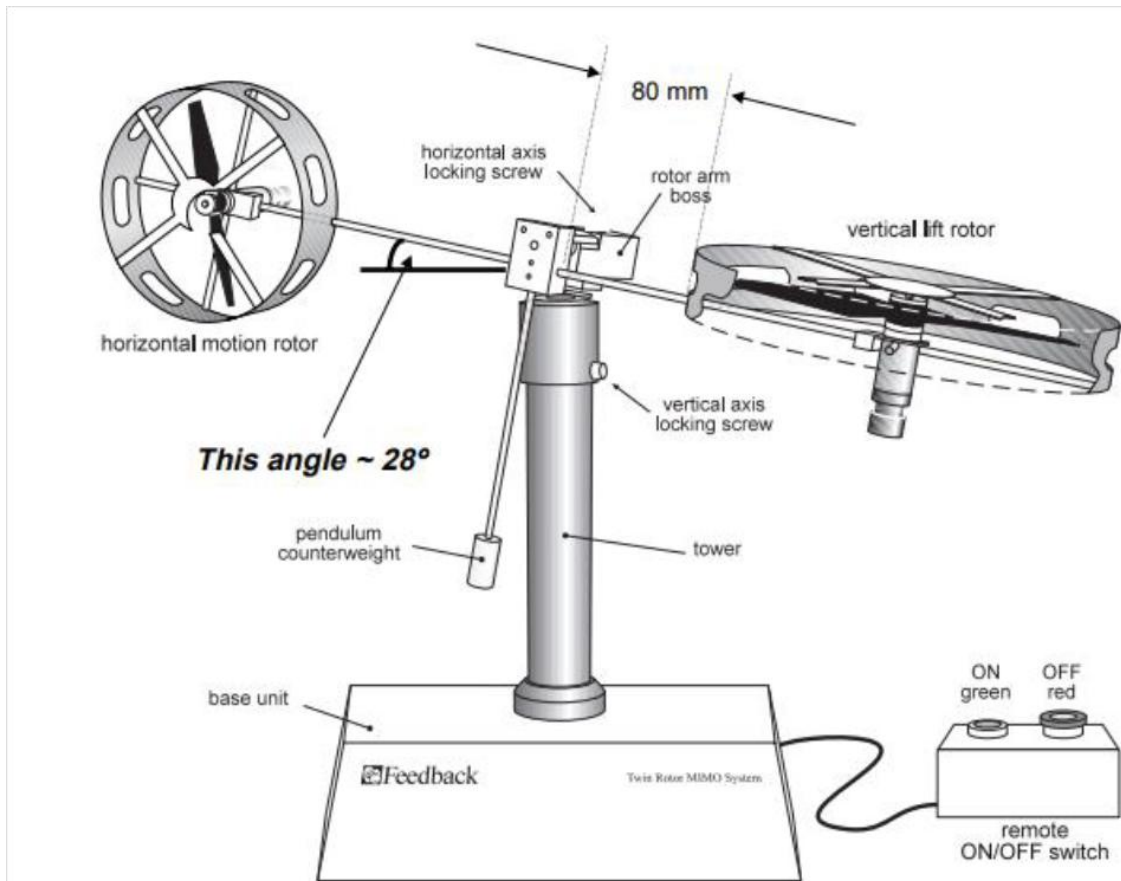


Figure III.1 Modèle descriptif du TRMS [22].

Le comportement du TRMS ressemble à celui d'un hélicoptère, de point de vue commande ; c'est un système non linéaire d'ordre supérieur possédant des couplages significatifs. Il comprend les éléments suivants [23] [22].

- Une poutre qui peut pivoter sur sa base de telle manière qu'elle puisse tourner librement dans le plan vertical et horizontal.

- Deux propulseurs (principal et secondaire) fixées aux deux extrémités de la poutre, ils sont formés d'une hélice, un moteur à courant continu ainsi qu'un bouclier pour des raisons de sécurités.
- Un contrepoids fixé sur la tige à son pivot, son rôle est de diminuer les vibrations (oscillations) de la poutre.
- Une tour pour maintenir la poutre.
- Une base comprenant des circuits électroniques pour l'adaptation, synchronisation et filtrage des signaux entrants et sortants.
- Un boîtier de marche/arrêt des moteurs.

Le modèle dynamique du TRMS est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\psi} = \frac{1}{I_1} \left\{ \left(1 - K_{gy} \phi \cos(\psi) \right) (a_1 \tau_1^2 + b_1 \tau_1) - mg \sin(\psi) - B_{2\psi} \dot{\psi} - B_2 \sin(2\psi) \phi^2 \right\} \\ \ddot{\phi} = \frac{1}{I_2} \left\{ (-B_{1\phi} \dot{\phi}) + a_2 \tau_2^2 + b_2 \tau_2 \left(1 - \frac{K_c(T_{0S}+1)}{T_{ps}+1} \right) \right\} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Le modèle d'état du système dynamique du TRMS est comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = X_2 \\ \dot{X}_2 = \frac{a_1}{I_1} X_3^2 + \frac{b_1}{I_1} X_3 - \frac{Mg}{I_1} \sin X_1 - \frac{B_{1\psi}}{I_1} X_2 - \frac{B_{2\psi}}{I_1} \sin(2X_1) X_5^2 - \frac{K_{gy}}{I_1} a_1 X_5 \cos(X_1) X_3^2 - \frac{K_{gy}}{I_1} b_1 X_5 \cos(X_1) X_3 \\ \dot{X}_3 = \frac{K_1}{I_1} U_1 - \frac{T_{10}}{T_{11}} X_3 \\ \dot{X}_4 = X_5 \\ \dot{X}_5 = \frac{a_2}{I_2} X_6^2 + \frac{b_2}{I_2} X_6 - \frac{B_{1\phi}}{I_2} X_5 - \frac{a_1 K_c}{I_2} \frac{(T_{0S}+1)}{T_{ps}+1} X_3^2 - \frac{b_1}{I_2} \frac{K_c(T_{0S}+1)}{T_{ps}+1} X_3 \\ \dot{X}_6 = \frac{K_2}{T_{21}} U_2 - \frac{T_2}{T_{21}} X_6 \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Soit le développement de Taylor du premier ordre est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu = f(x, u) \\ y = Cx + Du = g(x, u) \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Afin d'appliquer la commande LQI et PID, il doit que les modèles supportés sont linéaires et pour cela ; on va linéariser le modèle non-linéaire du TRMS.

En remplaçant les linéarisations précédentes dans le système non linéaire de l'équation (3.2).

Ou $x \in R$ comme état, $u \in R$ comme entrée de commande et $y \in R$ comme sortie mesurée. Et A, B, C peuvent être trouvé en appliquant la méthode de la matrice de Jacobéen. Les matrices A, B, C sont donnés comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{Mg}{I_1} & -\frac{B_{1\psi}}{I_1} & \frac{b_1}{I_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{T_{10}}{T_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{b_2}{I_2} \\ 0 & 0 & -\frac{b_1}{I_2} & \frac{k_c(T_{0S}+1)}{T_{ps}+1} & -\frac{B_{1\varphi}}{I_2} & \frac{b_2}{I_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T_{20}}{T_{21}} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_1}{T_{11}} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_1}{T_{11}} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Après avoir remplacé les paramètres des matrices A, B, C par ces valeurs données dans le Tableau III.1 on obtient :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.7058 & -0.0882 & 1.3588 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.9090 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.617 & 0 & -5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Symbole	Définition	Valeur
I_1	Moment d'inertie du rotor vertical	0.068 kg.m ²
I_2	Moment d'inertie du rotor horizontal	0.02 kg.m ²
a_1	Paramètre caractéristique statique	0.135
b_1	Paramètre caractéristique statique	0.0924
a_2	Paramètre caractéristique statique	0.0924
b_2	Paramètre caractéristique statique	0.09
M_g	Dynamique de gravité	0.32 N.m
$B_{1\psi}$	Paramètre de la fonction de friction dynamique	0.006 N.m.s/rad
$B_{2\psi}$	Paramètre de la fonction de friction dynamique	0.001 N.m.s ² /rad
$B_{1\phi}$	Paramètre de la fonction de friction dynamique	0.1 N.m.s/rad

$B_{2\phi}$	Paramètre de la fonction de friction dynamique	0.01 N.m.s ² /rad
M_{gy}	Paramètre d'inertie gyroscopique	0.05 s/rad
K_1	Le gain du Moteur 1	1.1
K_2	Le gain du Moteur 2	0.8
T_{11}	constante liée au moteur 1	1.1
T_{10}	constante liée au moteur 1	1
T_{21}	constante liée au moteur 2	1
T_{20}	constante liée au moteur 2	1
T_p	paramètre de la réaction de l'élan	2
T_0	paramètre de la réaction de l'élan	3.5
K_c	Le gain de la réaction de l'élan	-0.2

Tableau III.1 Paramètres du modèle de TRMS [24].

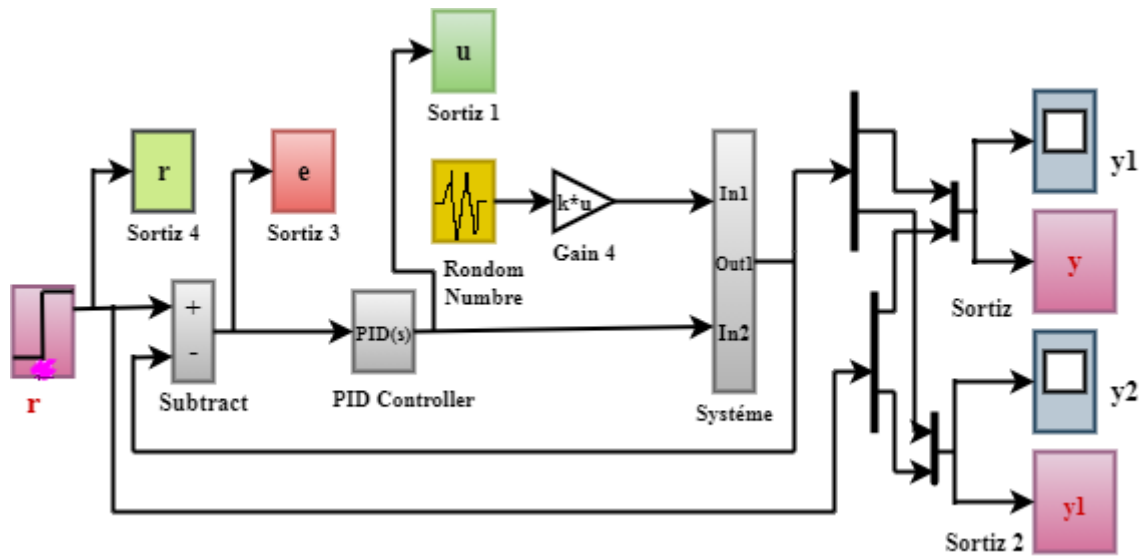


Figure III.3 du système commandé par PID

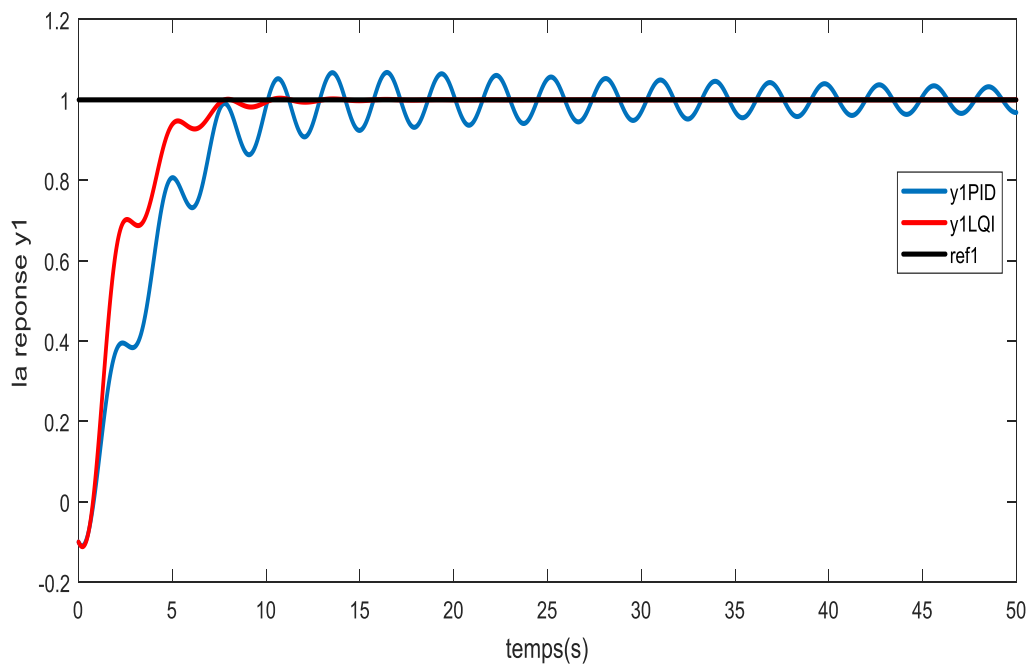


Figure III.4 la réponse temporelle y1 avec PID et LQI.

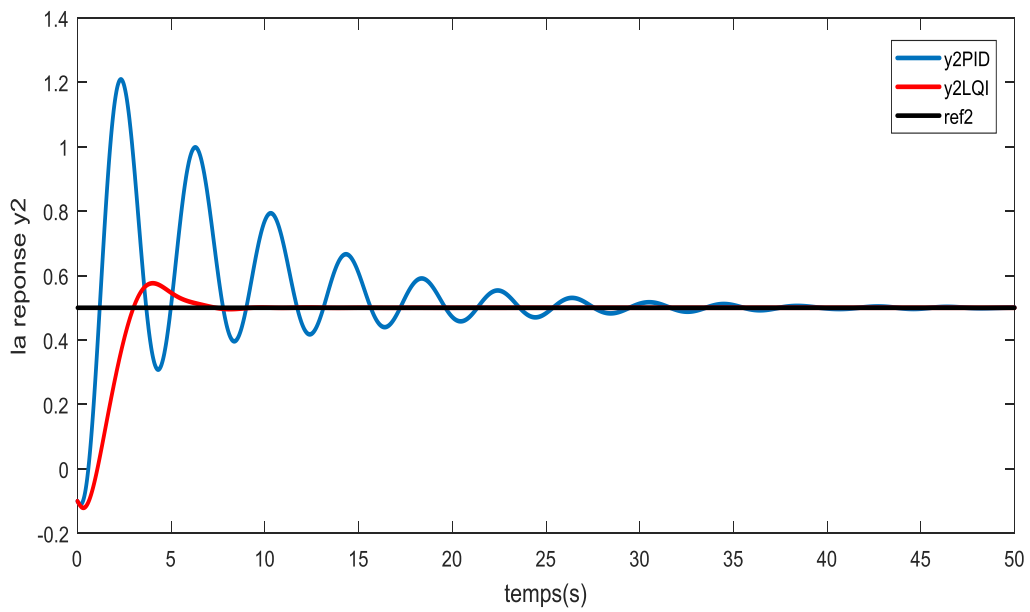


Figure III.5 la réponse temporelle y_2 avec PID et LQI.

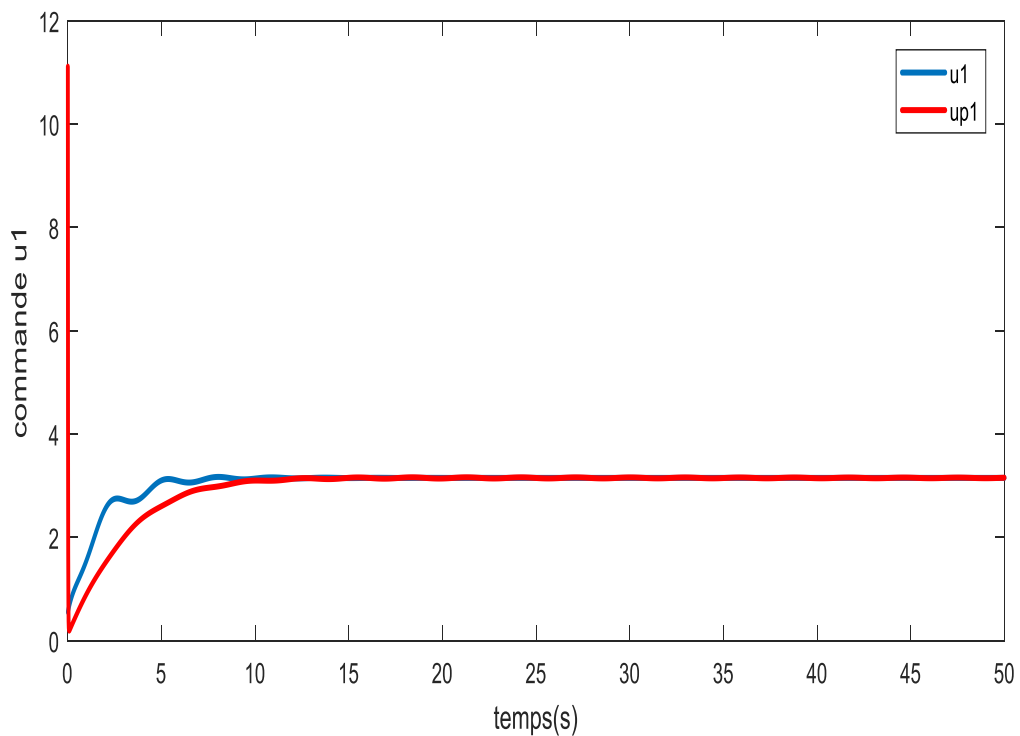


Figure III.6 les commandes u_1 obtenues par PID et LQI.

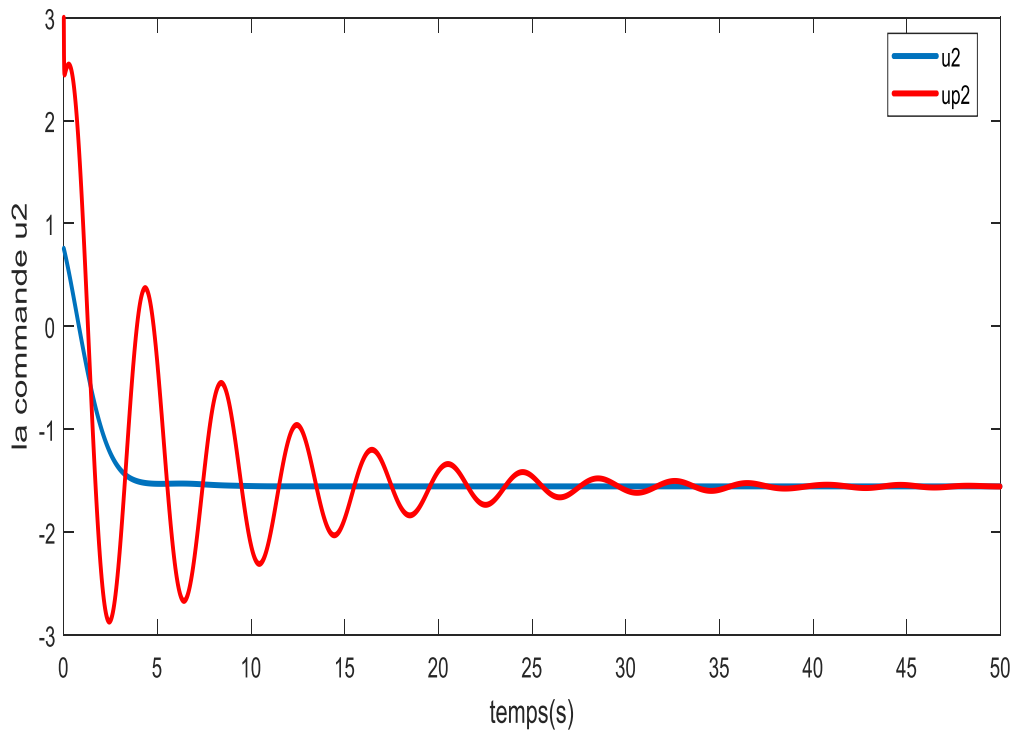


Figure III.7 les commandes u2 obtenues par PID et LQI.

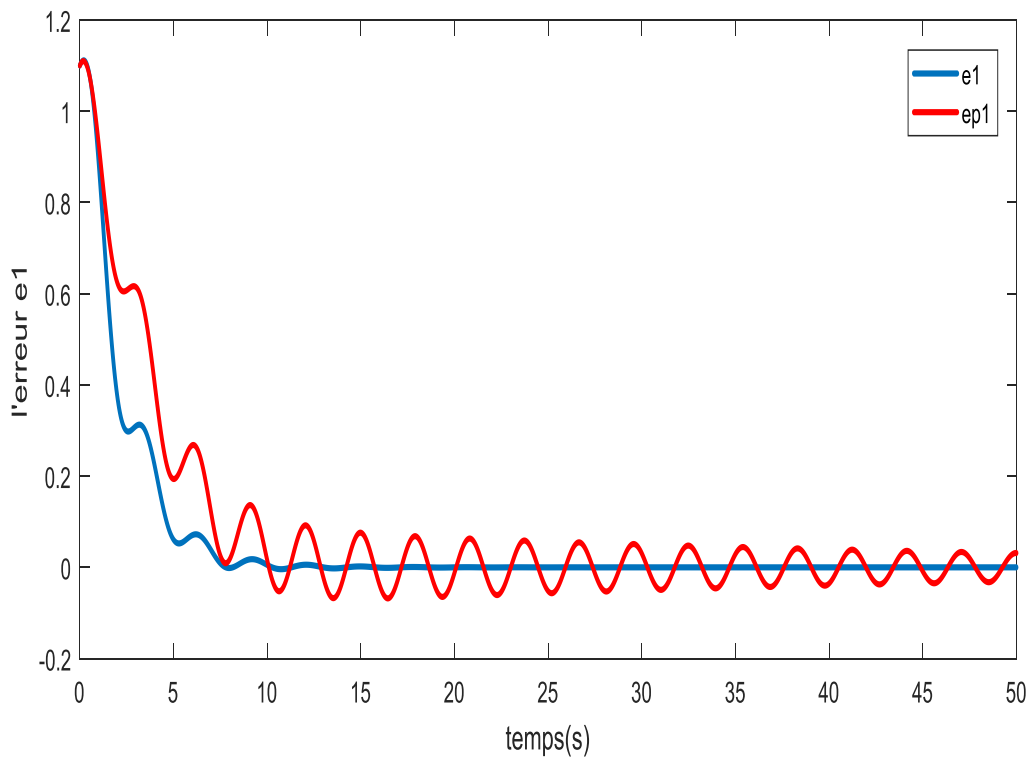


Figure III.8 les erreurs e1 obtenues par PID et LQI.

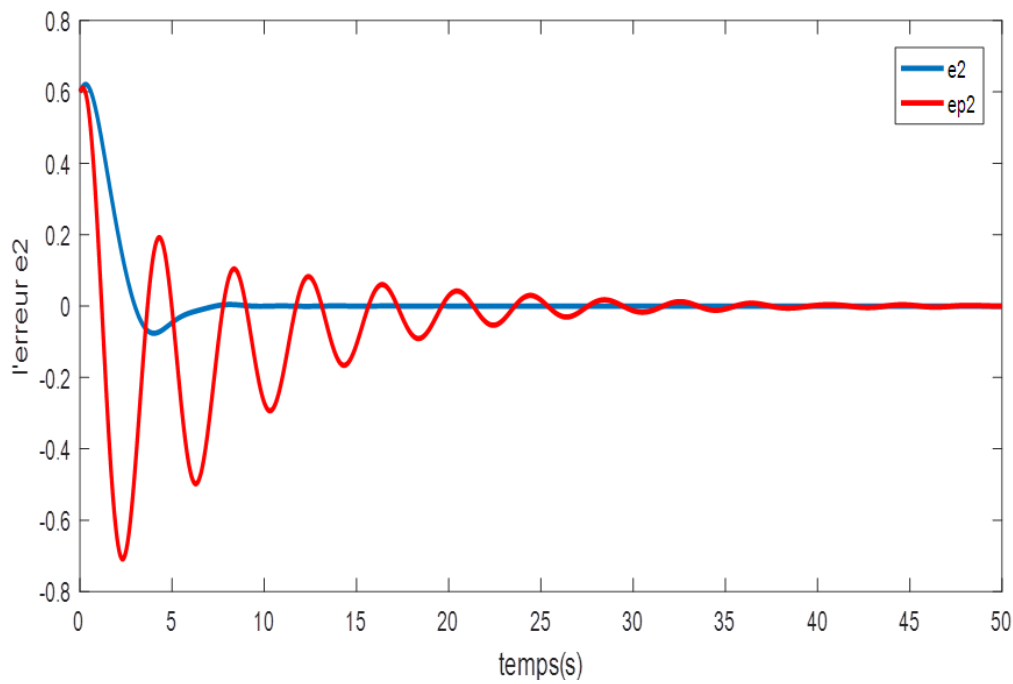


Figure III.9 les erreurs e2 obtenues par PID et LQI.

y1	PID	LQI
e_{∞}	$\pm 0,0314$	0
t_m	7,12	4,64
t_r	18,25	6,84
D%	6,8	0,4

Tableau III.2 les performances de la 1^{ère} sortie(y1)

y2	PID	LQI
e_{∞}	$\pm 0,0027$	0
t_m	1,62	0,45
t_r	6,664	0,475
D%	140,2	15,22

Tableau III.3 les performances de la 2^{ème} sortie(y2)

III.5. Comparaison entre les deux commandes PID et LQI sur le modèle de TRMS

1. Pour la 1^{ère} sortie

La rapidité :

Le système avec régulateur LQI atteint 95% de sa valeur finale en moins de temps ($t_r = 6.84$ s) par rapport au régulateur PID ($t_r = 18.25$ s).

La précision :

Le système avec régulateur LQI donne une erreur ($e_\infty = 0$) par rapport au régulateur PID ($e_\infty = \pm 0,0314$).

Le dépassement :

Le système avec régulateur LQI dépasse la valeur de commande ($u=1$) à 0,4% par rapport au régulateur PID (6.8%).

2. Pour la 2^{ème} sortie

La rapidité :

Le système avec régulateur LQI atteint 95% de sa valeur finale en moins de temps ($t_r = 0.475$ s) par rapport au régulateur PID ($t_r = 6,664$ s).

La précision :

Le système avec régulateur LQI donne une erreur ($e_\infty = 0$) par rapport au régulateur PID ($e_\infty = \pm 0,0027$).

Le dépassement :

Le système avec régulateur LQI dépasse la valeur de commande ($u=0.5$) à 15,22% par rapport au régulateur PID (140.2%).

On conclure que le régulateur LQI donne une bonne performance par rapport le régulateur PID.

III.6. Conclusion

Dans ce dernier chapitre, nous avons conçu avec succès un schéma de contrôle linéaire linéaire quadratique avec intégration LQI pour un modèle d'un système MIMO linéaire (TRMS). Afin d'étudier les performances de cette commande sur ce système, on a les comparé avec de celles obtenues par les régulateurs PID.

Les résultats de simulation nous permettent de déclarer que la commande LQG reste une commande optimale qui assure la poursuite des sorties malgré le changement des valeurs des bruits blancs gaussiens et les conditions initiales. D'autre coté, elle est sensible de ces changements et cela produisent des oscillations indésirables sur les sorties. Les résultats de simulation ont montré la supériorité de la commande LQI en terme de rapidité, stabilité et précision.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de l'application des techniques de commande, à savoir la commande linéaire quadratique avec intégration (LQI).

Ce présent travail a été consacré à la mise en œuvre d'une étude basée sur la comparaison entre le régulateur PID et le régulateur LQI.

Les deux types de régulateurs sont appliqués sur le modèle du TRMS qui est un système MIMO linéarisé. On a étudié la stabilité, la précision et la rapidité sur deux sorties avec les deux régulateurs.

Le problème majeur dans l'utilisation d'un régulateur PID est le choix de ses paramètres qui donne un bon résultat. On a utilisé la méthode des algorithmes génétiques afin de déterminer les gains du PID.

Le gain de retour d'état avec régulateur LQI est basé sur la résolution de l'équation de Riccati puis on peut calculer la commande optimale.

Les résultats obtenus ont montré que l'utilisation d'un régulateur LQI donne une erreur statique plus proche de "0" et un temps de réponse et de dépassement plus inférieur par rapport au régulateur PID.

Les résultats de simulation montrent la supériorité du régulateur LQI par rapport au régulateur PID en termes de stabilité ; rapidité et précision.

Ce travail nous a permis de pratiquer des concepts que nous avons étudiés durant notre cursus et d'autres que nous avons découverts et appris à maîtriser.

Bibliographie

- [1] Jean-Marie Flaus, *La régulation industrielle; régulateur PID, Prédicatifs et flous*. Edition HERMES, Paris 1994.
- [2] F. ALOUANI, « Commande par Logique Flou Appliquée aux pendules inversés et au Simulateur de Vol d'Hélicoptère : Simulation et Expérimentation », mémoire de magister, université de Mohamed Boudiaf de M'sila, 2006.
- [3] J.Richalet. Don O'Donovan "Predictive Functional Control": Principles and Industrial Applications. Springer - 2009
- [4] Jean Duplaix, *Asservissements et régulations*. I.U.T Toulon VAR 2010.
- [5] Maurice Rivoire & Jean-Louis Ferrier, *Cours d'automatique, Asservissement-Régulation Commande analogique*. Edition CHIHAB Alger 1994.
- [6] Cours de Michel VERBEKEN, *Asservissement continu*. I.U.T. du Montluçon 2004.
- [7] Sandrine Le Balois, *MATLAB SIMULINK Application à l'automatique linéaire cours et exercices résolus*. Edition : ellipses Paris 2001.
- [8] Alina BESANCON-VODA & Sylviane GENTIL, *Régulateur PID analogiques et numériques*. Edition Technique d'ingénieur 2012.
- [9] Marcel NOUGARET, *Principes généraux de la correction*. Edition Technique de l'ingénieur 2012.
- [10] Mauris Rivoire & Jean-Louis Ferrie *Cours d'automatique, Commande par calculateur identification*. Edition: EYROLLES Paris 1990.
- [11] Zeigler, J.G. & N.B Nichols, optimum sittings for automatic contrôleurs, Trans. ASME 64-759, 1942.

- [12] C. le Lann, *Le PID utilisé en régulation de position et/ou de vitesse de moteurs électriques*. Projet de fin d'étude 2007.
- [13] A.Fossard "Asservissement Non-Linéaire - fascicule 3 - méthode de Lyapunov", Polycopie de cours Supaéro- 1970.
- [14] C. Manceaux-Cumer, "Techniques de commande robuste, approche par multiplicateurs et approche stochastique" : thèse de l'Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace-1998.
- [15] C. Fargeon, "Commande numérique des systèmes : application aux engins mobiles et aux robots" : Ouvrage collectif publiée sous la direction de Editions Mas-son.
- [16] M. P. OLIVIER, « Equipement pour l'eau et l'environnement : Modélisation, analyse et commande optimale LQR d'un canal d'irrigation », thèse de doctorat, école nationale du génie Rural et des Forêts, Janvier 1994.
- [17] H. AIOUANI, D. BOUDJATIT, « Commande Hybride Tolérante aux Défauts appliquée au Simulateur D'hélicoptère TRMS », projet de fin d'études d'ingénieur d'état en automatique, Ecole National Polytechnique, Alger, 2009.
- [18] Z. G. MOHAMED, « Commande à structure variable appliquée au simulateur de vol d'hélicoptère », mémoire de magister, école nationale polytechnique, Alger, 2010.
- [19] Matlab 9 Mathworks®.
- [20] D. Xue, Y-Q. Chen, D. P. Atherton *Linear Feedback Control: Analysis and Design with MATLAB*, SIAM, USA 2007.
- [21] C.Tournes, C.D.Johnson. (2001)... (1998) *Flight Control Law Using Nonlinear Dynamic Inversion Combined With Quantitative Feedback Theory*.

- [22] J.Roskam. Airplane flight dynamics and performance / J. Roskam, C. T. Lan//Design, Analysis and research Corporation (DARCorporation).-1997, 840.
- [23] F. LAHOUAZI, « Mise en œuvre d'une stratégie de commande neuro floue : Application a un pendule inversé », mémoire de magister, université Mouloud Mammeri Tizi-Ouzou, 2011.
- [24] «Twin Rotor MIMO System Control Experiments», Manual 33-949S, edition 01/12/2006.
- [25] Z, mehieddine et al, « étude comparative entre deux régulateur PID et FLC appliques a la machine à courant continu », spécialité génie électrique, université de Oum el bouaghi, 2011_2012
- [26] Y. BENFATMA, M.S. MANAA, « Commande d'un simulateur d'hélicoptère (TRMS) par une approche hybride Neuro-Floue », mémoire master, université Biskra, 2012.
- [27] A. BEN CHAABANE, « Commandes Hybrides Neuro -glissantes et Neuro Flouesglissantes appliquées au Simulateur D'hélicoptère TRMS », mémoire de magister, ecole nationale polytechnique, Alger, 2011.