وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE
CHEIKH LARBI TEBESSI
-TEBESSA-

جامعة الشيخ العربي التبسي
- تبسة -

Département de Mathématiques et d'Informatique
Ecole Doctorale de Mathématiques Appliquées

MEMOIRE DE MAGISTER

En Mathématiques

THEME

Existence globale de solutions pour certains systèmes de Réaction-Diffusion à réaction fractionnaire

Option :
Analyse Fonctionnelle et Systèmes Dynamiques

Présenté par : **HICHEM LOUAFI**

Devant le jury :

Président :	**MECHRI SALEH.**	**PROF.**	**Univ. TEBESSA**
Rapporteur :	**AYADI ABDELHAMID.**	**PROF.**	**Univ. O.BOUAGHI**
Invité :	**ABDELMALEK SALEM.**	**C.C.**	**Univ. TEBESSA**
Examinateur :	**BOUZIT MOHAMMED.**	**M.C.**	**Univ. O.BOUAGHI**
Examinateur :	**DJEZZAR SALAH.**	**M.C.**	**Univ. CONSTANTINE**

Remerciements

Louange à Dieu qui m'a fait le bonheur d'achever ce travail.

Je remercie bien mon encadreur Monsieur : ***Ayadi Abdelhamid,*** Professeur à l'Université d' O. Bouaghi pour toute l'aide qu'il m'a apporté ainsi pour ces conseils et ces facilités pour mener terme à ce travail.

Je remercie Monsieur : ***Abdelmalek Salem***, Docteur à l'Université de Tébessa, d'avoir accepté d'être mon co-rapporteur et pour toutes nos discussions.

Je remercie Monsieur : ***Mechri Saleh,*** Professeur à l'Université de Tébessa, avec une mention particulière, d'avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie aussi Monsieur : ***Djezzar Salah***, Maître de Conférence à l'Université de Constantine, d'avoir accepté de faire partie de ce jury.

Je remercie aussi Monsieur : ***Bouzit Mohammed***, Maître de Conférence à l'Université d' O. Bouaghi, de participer à l'évaluation de ce travail.

Je remercie particulièrement Monsieur : ***Kouachi Saïd,*** Professeur au C. Universitaire de Khenchela, de m'avoir dirigé pendant cette année de Majistère. Je tiens à le remercie très chaleureusement pour ses encouragements et pour l'attention portée sur mes travaux.

Hichem LOUAFI

Résumé

Notre travail à pour objet l'étude de l'existence globale des solutions des systèmes de Réaction-Diffusion à réaction fractionnaire de type Gierer-Meinhardt.
Ce type de systèmes à une vaste application aux domaines de Biologie et de Biochimie.
Nos techniques sont basées sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov.

Abstract

In this work we prove the global existence of solutions of some Reaction-Diffusion systems with fractional reactions for type Gierer-Meinhardt. This type of systems has a vast application in Biology and Biochemistry. Our techniques are based on the construction of Lyapunov functional.

ملخص

الهدف من عملنا هذا دراسة الوجود الكلي لحلول بعض أنظمة رد الفعل و الإنتشار ذات طرف تفاعل كسري من نوع ڤيرار-منهارد.
وهذا النوع من الأنظمة له تطبيقات واسعة في مجالات البيولوجيا و البيوكيمياء.
التقنيات المستعملة في هذه الدراسة تعتمد على إنشاء دالية ليابونوف.

Table des matières

0.1 Introduction Générale

Généralement on étudie dans ce travail l'existence globale en temps des solutions d'une classe des systèmes formés de deux, trois et quatre équations aux dérivées partielles du type parabolique formant un *Système de Réaction-Diffusion* de type *Gierer-Meinhardt* (à réaction fractionnaire). Dans ce but on a construit une fonctionnelle de Lyapunov.

Le travail est réparti en quatre chapitres:

Au Chapitre.1: On rappelle les notations, les notions préliminaires et les symboles en vues de les utiliser dans les chapitres suivants. On insistera, en particulier, sur quelques théorèmes généraux d'analyse fonctionnelle, sur les espaces de Sobolev, quelques inégalités utiles et la positivité des formes quadratiques.

Au Chapitre 2: (Introduction aux systèmes de Réaction-Diffusion) On parle de l'importance des systèmes de réaction-diffusion dans la résolution de plusieurs problèmes dans les différents domaines (**chimie, physique, biologie, électronique et génétique des populations)** ainsi on donne la forme générale de ces systèmes

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u).$$

Ainsi le chapitre est réparti en deux sections: Dans la première section (la modélisation) on va exposer les méthodes générales transformant les phénomènes naturelles à des *Systèmes de Réaction-Diffusion* en utilisant la loi de conservation de masse et la seconde loi de Fick. Les conditions aux bords et les conditions initiales seront bien choisies. Dans la deuxième section: On va étudier ou donner quelques exemples dans des domaines variés: En chimie, physique nucléaire, biologie, électronique et en génétique des populations.

Au Chapitre 3: Dans ce chapitre nous parlerons du système de *Gierer-Meinhardt* qui est un type célèbre parmi les systèmes de Réaction-Diffusion, on donne une forme pratique de ce système qui modélise un phénomène biologique, en suite on donne un exemple de modélisation pour la coloration des coquilles de mer, en suite on étudie l'existence globale des solutions d'un système de Gierer-Meinhardt de deux équations, en présentant un lemme, un théorème et une proposition.

Au Chapitre 4: Nous étudierons l'existence globale-en temps-des solutions pour certains systèmes de Réaction-Diffusion à réaction fractionnaire (de type *Gierer-Meinhardt*); le premier composé de trois équations, appliqué à la biologie végétale; au développement des plantes dans le domaine de *phyllotaxie* (disposition des palmes sur le stipe de la plante), en utilisant pour cette étude un lemme auxiliaire d'estimation, un théorème et une proposition d'existence globale de solutions qu'on la prouve à l'aide de la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov . Enfin, de la même manière, on fait une étude de l'existence globale pour le deuxième système de *Gierer-Meinhardt* modifié par la modification de *Conway-Cooper*, composé de quatre équations.

Chapitre 1

Notations et Notions Générales

1.1 Notations générales

On note par $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice carrée d'ordre n qui s'écrit comme suit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{1.1.1}$$

Les **déterminants principaux successifs** de A sont notés par $\det 1$, $\det 2, ...,$ $\det n$, on les écrits:

$$\det 1 = a_{11}, \det 2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, ..., \det n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.1.2}$$

Les déterminants sous la forme

$$\det A\left[i_1, i_2...i_p \mid j_1, j_2...j_p\right] = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_2j_1} & ... & a_{i_pj_1} \\ a_{i_1j_2} & a_{i_2j_2} & ... & a_{i_pj_2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{i_1j_p} & a_{i_2j_p} & ... & a_{i_pj_p} \end{vmatrix}, \tag{1.1.3}$$

avec

$$\begin{cases} 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < ... < j_p \leq n \end{cases}, \; p \leq n,$$

et

$$i_1 = j_1, i_2 = j_2, ...i_p = j_p,$$

sont appelés les **déterminants principaux.**

Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ et $d\sigma$ est la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.

$\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ désigne la dérivée normale de u extérieure à $\partial\Omega$, c'est-à-dire:

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \nabla u \cdot \overrightarrow{\eta},$$

où $\overrightarrow{\eta}$ est le vecteur unitaire de la normale extérieure à $\partial\Omega$.

Le gradient de u est défini par:

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}), \text{ alors } |\nabla u|^2 = \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2. \tag{1.1.4}$$

On désigne par $\mathbb{L}^p(\Omega)$ l'espace de fonctions (ou plus exactement des classes d'équivalence de fonctions, au sens de l'égalité presque partout) u mesurables sur Ω telles que $\int\limits_\Omega |u|^p \, dx < \infty, 1 \leq p < \infty$ muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p \, dx. \tag{1.1.5}$$

On désigne par $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ l'espace des (classes) de fonctions u mesurables et vérifient $|u| \leq C$, $p.p$ (presque partout) sur Ω où C est une constante. $\mathbb{L}^\infty(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ C, |u| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \right\}. \tag{1.1.6}$$

On définit les espaces $L^p(0, T, \mathbb{X})$ et $L^\infty(0, T, \mathbb{X})$ comme suit:
$L^p(0, T, \mathbb{X}) = \left\{ u \text{ mesurable de } [0, T] \to \mathbb{X}, \; \int_0^T \|u\|^P_{\mathbb{X}} \, dt < \infty, \text{si } 1 \leq p < \infty \right\}$ muni de la norme:

$$\|u\|^p_{L^p(0,T,\mathbb{X})} = \int_0^T \|u\|^P_{\mathbb{X}} \, dt \tag{1.1.7}$$

$$L^{\infty}(0,T,\mathbb{X})=\left\{u \text{ mesurable de } [0,T]\to\mathbb{X},\ \sup_{t\in(0,T)} ess\,\|u\|_{\mathbb{X}}<\infty\right\} \text{ muni de la norme:}$$

$$\|u\|_{L^{\infty}(0,T,\mathbb{X})}=\sup_{t\in(0,T)} ess\,\|u\|_{\mathbb{X}}\,. \tag{1.1.8}$$

Naturellement on a: $L^p(0,T,L^p(\Omega))=L^p(\Omega\times(0,T))$.

$\mathbb{C}(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues dans Ω muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{C}(\Omega)}=\max_{x\in\Omega}|u(x)|\,.$$

$\mathbb{C}^k(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiable sur Ω (k entier positif) et on écrit

$$\mathbb{C}^{\infty}(\Omega)=\bigcap_{k\geq 0}\mathbb{C}^k(\Omega).$$

BC désigne l'espace des fonctions bornées et uniformément continues dans $\mathbb{R}$, et on écrit:

$$BC_0=\{u\in BC:\lim_{|x|\to\infty}|u(x)|=0\}.$$

$\mathfrak{D}(\Omega)$ c'est l'espace des fonctions $\mathbb{C}^{\infty}$ à support compact contenu dans Ω.

$\mathfrak{D}'(\Omega)$ désigne l'espace des distributions sur Ω c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur $\mathfrak{D}(\Omega)$

$$\mathbb{H}^1(\Omega)=\left\{u\in\mathbb{L}^2(\Omega),\frac{\partial u}{\partial x_i}\in\mathbb{L}^2(\Omega),1\leq i\leq n\right\}$$

c'est l'espace de **Sobolev** muni de la norme

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{H^1(\Omega)} &= \int_{\Omega}|u|^2\,dx+\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\\ &= \int_{\Omega}|u|^2\,dx+\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx. \end{aligned} \tag{1.1.9}$$

D'une façon générale pour $m\in\mathbb{N}$, on définit

$$\mathbb{H}^m(\Omega)=\left\{u\in\mathbb{L}^2(\Omega),\ D^{\alpha}u\in\mathbb{L}^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha\in\mathbb{N}^n \text{ vérifiant } |\alpha|\leq m\right\}$$

muni de la norme

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{\mathbb{H}^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |D^\alpha u|^2\,dx \\ &= \sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^2_{\mathbb{L}^2(\Omega)}\ , \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

où $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$ et $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i$ la dérivée au sens des distributions.

D'une manière plus générale pour tout réel p, on définit l'espace

$$\mathbb{W}^{m.p}(\Omega) = \{u \in \mathbb{L}^p(\Omega),\ D^\alpha u \in \mathbb{L}^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{m.p} = \sum_{|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|^p_{\mathbb{L}^p(\Omega)}\ ,\ 1 \leq p < +\infty \tag{1.1.11}$$

donc $\mathbb{W}^{1.2}(\Omega) = \mathbb{H}^1(\Omega)$ et $\mathbb{W}^{m.2}(\Omega) = \mathbb{H}^m(\Omega)$.

1.2 Notions générales

On donne des propositions, des théorèmes avec démonstrations et des remarques utilisés dans les chapitres suivants.

Théorème 1.2.1 (d'Ostrogradski) *(ou théorème de la divergence) Soit S une surface fermée, frontière d'un domaine de volume V. Choisissons comme sens positif de la normale à la surface, le sens qui va de l'intérieur du domaine à l'extérieur, et désignons par α, β et γ les angles que fait cette normale avec la direction des x, y et z positifs respectivement.*

Alors, si A_1, A_2 et A_3 sont des fonctions continues ayant des dérivées partielles continues dans le domaine V, le théorème de la divergence s'exprime ainsi:

$$\int_V \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dV = \int_S A_1 dydz + A_2 dzdx + A_3 dxdy. \tag{1.2.12}$$

Sous forme vectorielle avec $A = (A_1,\ A_2, A_3)$,ceci peut s'écrire simplement

$$\int_V \nabla \cdot A dV = \int_S A \cdot \eta dS. \tag{1.2.13}$$

Ce théorème, est appelé encore le théorème de Green dans l'espace.

Preuve. Pour *la Preuve de ce théorème voir Spiegel* [56] page (210). ■

1.2.1 Formules de Green

Nous rappelons maintenant quelques formules de Green qui généralisent au cas multi-dimensionnel la formule d'intégration par parties de la dimension un. Elles s'écrivent de la manière suivante:

Théorème 1.2.2 *On suppose que Ω est un domaine ouvert de frontière $\partial\Omega$ continue par morceaux.*
Alors, si u et v sont des fonctions de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta_i d\sigma \ , \ 1 \leq i \leq n, \tag{1.2.14}$$

on désigne par η_i le $i^{\text{ème}}$ cosinus directeur de la normale η à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω et on écrit $\eta_i = (\overrightarrow{\eta}.\overrightarrow{e_i})$.
$d\sigma$ la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.

Preuve. Si u (resp. v) appartient à $\mathbb{H}^1(\Omega)$, il existe une suite (u_m) (resp. (v_p)) de $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ qui converge vers u dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$ (resp. vers v dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$) [$\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ dense dans $\mathbb{H}^1(\Omega)$].

On a pour les fonctions u_m et v_p de $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u_m}{\partial x_i} v_p dx = -\int_{\Omega} u_m \frac{\partial v_p}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u_m v_p \eta_i d\sigma, \ 1 \leq i \leq n, \tag{1.2.15}$$

on obtient l'expression (1.2.14) par passage à la limite dans la formule précédente. ■

Corollaire 1.2.1 *Pour toute fonction u de $\mathbb{H}^2(\Omega)$ et toute fonction v de $\mathbb{H}^1(\Omega)$, on a la formule de Green*

$$\int_{\Omega} (\Delta u)\, v = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v. \tag{1.2.16}$$

Preuve. Donnons une conséquence de Théorème (1.2.2).
On pose $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$, le Laplacien d'une distribution u. Alors, si u est une fonction de $\mathbb{H}^2(\Omega)$, on a d'après (1.2.14) pour toute fonction v de $\mathbb{H}^1(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
-\int\limits_{\Omega} (\Delta u)\, v &= -\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \eta_i d\sigma \right\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma \\
&= \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma.
\end{aligned}
$$

■

Remarque 1.2.1 *La formule (1.2.14) reste valable si $u, v \in C^1$et la formule (1.2.16) reste valable si $u \in C^2, v \in C^1$.*

1.2.2 Formes Quadratiques

Définition 1.2.1 *Une forme quadratique est un polynôme homogène du second degré relativement aux n variables $u_1, u_2, ..., u_n$. Une forme quadratique a toujours la représentation*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j \tag{1.2.17}$$

où

$$\mathrm{A} = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

est une matrice symétrique.

Si nous désignons la matrice-colonne $(u_1, u_2, ..., u_n)$ par u et la forme quadratique par

$$A(u,u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i u_j, \tag{1.2.18}$$

nous pouvons écrire

$$A(u,u) = u^T A u = Au \cdot u. \tag{1.2.19}$$

Si

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

*est une matrice symétrique réelle, la forme (*1.2.18*) est dite forme quadratique réelle. Dans ce travail, on s'intéresse que des formes quadratiques réelles.*

Définition 1.2.2 *Une forme quadratique (1.2.18) est dite définie non-négative si, pour des valeurs réelles arbitraires des variables*

$$\mathrm{A}(u,u) \geq 0. \tag{1.2.20}$$

Définition 1.2.3 *Une forme quadratique (1.2.18) est dite définie positive si, pour des valeurs arbitraires des variables non nulles ($u \neq 0$), on a*

$$\mathrm{A}(u,u) > 0. \tag{1.2.21}$$

Théorème 1.2.3 *Une forme quadratique (1.2.18) est dite définie positive si, et seulement si, tous les déterminants principaux successifs de sa matrice des coefficients, sont positifs*

$$\det 1 > 0, \det 2 > 0, ..., \det n > 0. \tag{1.2.22}$$

Preuve. Pour la preuve de ce théorème voir Gantmacher [12] page (308). ■

Corollaire 1.2.2 *Dans une forme quadratique définie positive (1.2.18) tous les déterminants principaux de la matrice des coefficients, sont positifs, lorsque les déterminants principaux successifs d'une matrice symétrique réelle sont positifs, tous les déterminants principaux restants sont positifs.*

Remarque 1.2.2 *Si les déterminants principaux successifs sont non-négatifs*

$$\det 1 \geq 0, \det 2 \geq 0, ..., \det n \geq 0, \tag{1.2.23}$$

il ne résulte pas que $\mathrm{A}(u,u)$ *soit définie non-négative. Ainsi la forme*

$$a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2, \tag{1.2.24}$$

dans laquelle $a_{11} = a_{12} = 0, a_{22} < 0$, satisfait (1.2.23) mais n'est pas définie non-négative.

Nous avons cependant le théorème suivant:

Théorème 1.2.4 *Une forme quadratique (1.2.18) est dite définie non-négative si, et seulement si, tous les déterminants principaux de sa matrice des coefficients sont non-négatifs*

$$\det A\left[i_1, i_2 \ldots i_p \mid i_1, i_2 \ldots i_p\right] \geq 0,$$

où

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leq n, \;\; et\; p \leq n.$$

Preuve. Pour la preuve de ce théorème voir *Gantmacher* [12] page (309). ■

1.2.3 Quelques inégalités utiles

Inégalité de Cauchy

Soit a, $b \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, alors:

$$|ab| \leq \frac{\epsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon} b^2$$

Preuve. L'inégalité de Cauchy est un cas particulier de l'inégalité de Young suivante: ■

Inégalité de Young

Soit f une fonction continue et croissante sur $[0, c]$ où $c > 0$.

$f(0) = 0$, $a \in [0, c]$ et $b \in [0, f(c)]$, alors

$$ab \leq \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(x)\, dx \tag{1.2.25}$$

où f^{-1} est la fonction inverse de f.

Preuve. on commence par l'expression

$$g(a) = ab - \int_0^a f(x)\, dx \tag{1.2.26}$$

on prend $b > 0$ comme un paramètre. Puisque $g'(a) = b - f(a)$ et comme la fonction f est croissante, on a

$$\begin{aligned} g'(a) &> 0 \quad \text{pour } 0 < a < f^{-1}(b), \\ g'(a) &= 0 \quad \text{pour } a = f^{-1}(b), \\ g'(a) &< 0 \quad \text{pour } a > f^{-1}(b). \end{aligned}$$

De cela, $g(a)$ est une valeur maximale de la fonction g atteinte à $a = f^{-1}(b)$.

Ainsi

$$g(a) \leq \max g(x) = g\left(f^{-1}(b)\right) \tag{1.2.27}$$

Appliquons une intégration par parties

$$\begin{aligned} g\left(f^{-1}(b)\right) &= bf^{-1}(b) - \int_0^{f^{-1}(b)} f(x)\,dx \\ &= \int_0^{f^{-1}(b)} xf'(x)\,dx \end{aligned}$$

Si on prend $y = f(x)$, l'égalité ci-dessus devient:

$$g\left(f^{-1}(b)\right) = \int_0^b f^{-1}(y)\,dy \tag{1.2.28}$$

En comparant (1.2.26), (1.2.28), et (1.2.27), on obtient (1.2.25)

(Voir Mitrinovic, Pecaric et Fink [43]). ■

La fonction $f(x) = x^{p-1}$ avec $p > 1$ dans chaque intervalle $[0, c]$ satisfait les conditions précédentes. On applique (1.2.25) utilisant $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ on obtient

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.2.29}$$

Si on remplace la fonction $f(x)$ par ϵx^{p-1} dans (1.2.25) où $\epsilon > 0$, alors on obtient l'inégalité de Young en ϵ:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab \leq \epsilon a^p + \frac{(\epsilon p)^{\frac{-q}{p}}}{q} b^q. \tag{1.2.30}$$

Ce qui donne

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab \leq \epsilon a^p + (\epsilon)^{\frac{-1}{p-1}}\, b^q.$$

Inégalité de Hölder

Soit $p > 1$ et $q > 1$ des nombres réels liés par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$\forall (f, g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) : \int_\Omega |f(x) g(x)| \, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.2.31}$$

Preuve. En utilisant l'inégalité (1.2.29), on obtient

$$|f(x) g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q$$

il en résulte que $fg \in L^1(\Omega)$ et que

$$\int_\Omega |f(x) g(x)| \, dx \leq \frac{1}{p} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx + \frac{1}{q} \int_\Omega |g(x)|^q \, dx. \tag{1.2.32}$$

Remplaçant dans (1.2.32) f par λf $(\lambda > 0)$ il vient

$$\int_\Omega |f(x) g(x)| \, dx \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \int_\Omega |f(x)|^p \, dx + \frac{1}{\lambda q} \int_\Omega |g(x)|^q \, dx$$

On choisit $\lambda = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \right)^{-\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$ on obtient alors (1.2.31). Voir Brezis [5] page (56). ∎

Chapitre 2

Introduction aux Systèmes de Réaction-Diffusion

2.1 Introduction

Les systèmes de réaction-diffusion sont des systèmes couplés d'équations différentielles aux dérivées partielles de type parabolique. Aujourd'hui, ces systèmes ont reçu un grand traité d'attention, motivé par la richesse de la structure de leurs ensembles de solutions, et car ils modélisent des phénomènes qui apparaissent dans des secteurs variés: chimie, biologie, neurophysiologie, épidémiologie, combustion, génétique des populations, etc. Les individus diffèrent d'un problème à un autre: En chimie, par exemple, ils représentent des substances chimiques. En biochimie, ils peuvent représenter des molécules. En métallurgie, des atomes. En dynamique des populations, ce sont des humains. En génétique des populations, ils représentent des caractères. En biophysique, des charges électriques ou bien des différences de potentiel. En environnement, ils peuvent représenter les animaux ou les plantes d'une forêt, d'une mer ou bien d'un fleuve.

Tous ces problèmes s'écrivent sous la forme:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\Delta u = f(u), \tag{2.1.1}$$

où $u(x,t) = (u_1(x,t), ..., u_m(x,t))$ est un vecteur de variables dépendantes, et c'est l'inconnue, $f(x,t,u(x,t)) = (f_1(x,t,u(x,t)),...,f_m(x,t,u(x,t))$ c'est la réaction (généralement non linéaire) et D est une matrice carrée $m \times m$ définie positive et diagonalisable appelée matrice de diffusion. Les termes de réaction sont le résultat de toute interaction entre les composantes de u, par exemple, en chimie u est un vecteur de concentrations chimiques, et f représente l'effet des réactions chimiques sur ces concentrations. Le terme $D\Delta u$ représente les diffusions moléculaires à travers la frontière de réaction.

Les conditions aux bords seront choisies selon l'origine et la nature du problème étudié: s'il n'y a pas d'immigration des individus à travers la frontière du domaine Ω sur lequel le problème est posé, on choisit les conditions aux bords homogènes de Neumann. S'il n'y a pas d'individus sur la frontière, on prend les conditions aux bords homogènes de Dirichlet. L'inconnue (la solution qu'on cherche) est un vecteur dont les composantes sont généralement des fonctions positives: en chimie, par exemple, c'est un vecteur de concentrations chimiques. En biochimie ou en métallurgie, c'est un vecteur de concentrations en nombres de molécules ou d'atomes respectivement. En dynamique des populations et en environnement, c'est un vecteur de densités de populations humaines, animales ou végétales...

Les conditions initiales sont généralement positives; puisqu'il s'agit de concentrations, densités, charges électriques ...

2.2 Modélisation

On considère une région bornée Ω de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (qui peut être une surface géographique, une cellule vivante ou des molécules) dans laquelle des réactions se réalisent (ces réactions peuvent être une épidémie, une rumeur ou bien une réaction moléculaire; d'ailleurs la cellule vivante est le siège de plusieurs réactions chimiques, ainsi que les surfaces géographiques forment les lieux de milliers de virus et rumeurs circulant entre les individus des populations...).

Si on note par $u_i(x,t)$ la concentration de la $i^{ème}$ espèce prenant part dans ces réactions, $f_i(x,t,u_1(x,t),...,u_m(x,t))$ son taux de formation dans la réaction en question au point x et à l'instant $t > 0$ et soit J_i le flux de ces espèces à travers la frontière

Γ de la région Ω. Considérons un volume V infiniment petit de la région Ω de frontière $S = \partial V$. La vitesse de formation de la $i^{ème}$ espèce dans le volume V est égale à la quantité formée par la réaction ôtée de son flux à travers la surface S; en termes d'équations

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u_i(x,t)dx = \int_V f_i(x,t,u_1(x,t),...,u_m(x,t))dx - \int_S J_i d\sigma, \qquad (2.2.2)$$

après application directe du théorème de la divergence au terme désignant le flux, (voir le théorème (1.2.1) page (8) on obtient

$$\int_V (\frac{\partial u_i}{\partial t} - f_i + \nabla \cdot J_i)dx = 0, \qquad (2.2.3)$$

puisque le volume V est infiniment petit et arbitraire, on en déduit

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla \cdot J_i = f_i \ , \ i = 1, ..., \ m. \qquad (2.2.4)$$

Remarque 2.2.1 *Dans le cas d'une réaction chimique, le terme de réaction f_i est obtenu de l'application (sur le plan microscopique) de la loi d'action des masses (ou loi de Gulberg et Waage). D'ailleurs dans le cas des populations (plan macroscopique) on applique une loi semblable. Le flux (ou la diffusion) est donné par la loi de Fick (seconde loi de Fick)*

$$J_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \nabla u_j \ , \qquad (2.2.5)$$

où

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, \ j \leq m} \ ,$$

est une matrice définie positive appelée matrice de diffusion. En substituant (2.2.5) dans (2.2.4), on obtient

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \nabla u_j) = f_i \ , \qquad (2.2.6)$$

normalement les a_{ij} sont constants, quoi qu'ils peuvent dépendre de t, x et u. Aussi on va considérer des termes de réactions dépendant seulement de u. Dans ce cas on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\Delta u = f(u), \qquad (2.2.7)$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i, \ j \leq m}$ est une matrice non diagonale, ses termes sont les coefficients de diffusion. a_{ij} caractérise la diffusion de u_i dans u_j. Dans ce cas on a affaire à ce qu'on appelle croisement de diffusion entre les densités u_i (En anglais : cross diffusion).

Remarque 2.2.2 *Par un simple changement de variables linéaires, la matrice A peut être ramenée à une matrice diagonale $D = (d_1, ..., d_m)$ avec $d_i > 0$, $i = 1, ..., m$, et le système (2.2.7) devient:*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + D\Delta v = g(v). \tag{2.2.8}$$

Remarque 2.2.3 *Remarquant que, pour établir (2.2.7), on a simplifié plusieurs termes, si non on aboutirait à des équations très compliquées et difficiles à étudier.*

2.3 Exemples

2.3.1 En chimie

Peut-être la plus grande source de problèmes intéressants dans ce domaine est la modélisation des multi-spécifique réactions chimiques.

Nous considérons un mécanisme général de réaction de la forme

$$\mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 + ... + \mu_m R_m \underset{k_r}{\overset{k_f}{\rightleftharpoons}} \nu_1 P_1 + \nu_2 P_2 + ... + \nu_\ell P_\ell \tag{2.3.9}$$

Ici, les R_i et P_i représentent les réactif et produit espèces, respectivement, et $\mu_i, \nu_i \in lN$ pour chaque i. Maintenant, si nous mettons $u_i = [R_i]$ et $v_i = [P_i]$ et laisser k_f, k_r nous faire l'(entier non négatif) avant et arrière des taux de réaction, respectivement, alors nous pouvons modeler le processus par l'application de la loi de la conservation de la masse et de la seconde loi de Fick par le système de réaction-diffusion suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial t} - \nabla \cdot (d_i \nabla u_i) = \mu_i \left(k_r \displaystyle\prod_{j=1}^{\ell} v_j^{\nu_j} - k_f \prod_{j=1}^{m} u_j^{\mu_j} \right), & i = 1, ...m \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial t} - \nabla \cdot (d_{m+i} \nabla v_i) = \nu_i \left(k_f \displaystyle\prod_{j=1}^{m} u_j^{\mu_j} - k_r \prod_{j=1}^{\ell} v_j^{\nu_j} \right), & i = 1, ...\ell \end{cases} \tag{2.3.10}$$

Nous supposons que la réaction se déroule dans un domaine borné Ω de frontière régulière $\partial\Omega$.

Remarque 2.3.1 *La matrice diagonale D peut dépendre de t, x et u, comme il peut ne pas être diagonale (c'est le cas lorsque la diffusion d'une espèce affecte le rythme de production des autres).*

Par exemple, pour l'ébullition de l'eau, on prend dans (2.3.9)
$p = 3$, $I = \{1, 2\}$, $J = \{3\}$, $n_1 = n_3 = 2$ et $n_2 = 1$, R_1 =hydrogène, R_2 =oxygène et R_3 =l'eau, on obtient la réaction classique

$$2H_2 + O_2 \underset{l}{\overset{h}{\rightleftharpoons}} 2H_2O. \tag{2.3.11}$$

Les équations qui décrire cette réaction s'écrivent alors d'après (2.3.10) comme suit

$$\begin{cases} \dfrac{\partial [H_2]}{\partial t} - d_1 \Delta [H_2] = 2 \left(-h [H_2]^2 [O_2] + l [H_2O]^2 \right) \\ \dfrac{\partial [O_2]}{\partial t} - d_2 \Delta [O_2] = -h [H_2]^2 [O_2] + l [H_2O]^2 & x \in \Omega, \ t > 0, \\ \dfrac{\partial [H_2O]}{\partial t} - d_3 \Delta [H_2O] = 2 \left(h [H_2]^2 [O_2] - l [H_2O]^2 \right) \end{cases} \tag{2.3.12}$$

avec conditions aux bords appropriées (par exemple $\dfrac{\partial [H_2]}{\partial \eta} = \dfrac{\partial [O_2]}{\partial \eta} = \dfrac{\partial [H_2O]}{\partial \eta} = 0$, $t > 0$, $x \in \partial\Omega$) et conditions initiales positives (i.e)

$$[H_2]_{t=0} := [H_2]_0 > 0, [O_2]_{t=0} := [O_2]_0 > 0, [H_2O]_{t=0} := [H_2O]_0 > 0. \tag{2.3.13}$$

Les coefficients h et l sont supposés des constantes positives, quoi qu'ils peuvent dépendre de la température:

$$h, \ l \approx cT^{\beta} \exp\left(\frac{E}{R} T\right), 1 \leq \beta \leq 2 , \tag{2.3.14}$$

voir S. L. Hollis [17] et J.Morgan [44] avec différentes conditions aux bords.

Un autre exemple est décrit par les réactions suivantes:

$$U_1 + U_2 \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} U_3, \qquad U_1 + U_4 \underset{k_4}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} U_5, \qquad U_2 + U_6 \underset{k_6}{\overset{k_5}{\rightleftharpoons}} U_4. \tag{2.3.15}$$

Cela emmène au six composantes du système de réaction-diffusion

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} - d_1 \Delta u_1 &= -k_1 u_1 u_2 - k_3 u_1 u_4 + k_2 u_3 + k_4 u_5, \\
\frac{\partial u_2}{\partial t} - d_2 \Delta u_2 &= -k_1 u_1 u_2 + k_2 u_3 - k_5 u_2 u_6 + k_6 u_4, \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} - d_3 \Delta u_3 &= k_1 u_1 u_2 - k_2 u_3 + k_5 u_2 u_6 - k_6 u_4, \\
\frac{\partial u_4}{\partial t} - d_4 \Delta u_4 &= -k_3 u_1 u_4 + k_4 u_5 + k_5 u_2 u_6 - k_6 u_4, \\
\frac{\partial u_5}{\partial t} - d_5 \Delta u_5 &= k_3 u_1 u_4 - k_4 u_5 - k_5 u_2 u_6 + k_6 u_4, \\
\frac{\partial u_6}{\partial t} - d_6 \Delta u_6 &= -k_5 u_2 u_6 + k_6 u_4.
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

Dans le cas spécial $k_5 = k_6 = 0$, U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 peuvent représenter l'hémoglobine Hb, O_2, HbO_2, CO_2 et $HbCO_2$. Hollis [17] établit l'existence globale prévu que:

(1) u_3 satisfait le même type des conditions aux bords comme l'un ou l'autre u_1 ou u_2, et

(2) u_5 satisfait le même type de conditions aux bords comme u_1 ou u_4.

Les solutions de (2.3.16) avec une condition initiale non négative uniformément bornée et des conditions aux bords:

$$\lambda_i u_i + (1 - \lambda_i)\, \partial_\eta u_i = \beta_i \qquad \text{sur } \partial\Omega \times \{t > 0\}$$

existent globalement.(Pour cet exemple, voir S.Abdelmalek [1])

2.3.2 En physique nucléaire

Le modèle décrivant une réaction nucléaire est décrit par le *système de réaction-diffusion*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = d_1 \Delta u + u\,(av - b) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = d_2 \Delta v + cv \end{cases} \quad \text{sur } \Omega \times (0, +\infty), \tag{2.3.17}$$

avec conditions aux bords homogènes de Neumann et conditions initiales positives. On montre que (voir Pao [47]), pour $a > 0$, $b \geq 0$ et $c > 0$, la solution du système (2.3.17) avec conditions aux bords bien choisies et conditions initiales positives explose en temps fini (cesse d'exister). Cette réaction est analogue à celle de deux enzymes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = u_{xx} - \sigma u \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = v_{xx} + \sigma v \end{cases} \quad \text{sur } (0,1) \times (0, +\infty)\,, \tag{2.3.18}$$

avec les conditions aux bords

$$\left\{ \begin{cases} u_x(0,t) = ag_1(v(0,t)) \\ u_x(1,t) = 0 \end{cases} \right. \qquad ; \ t > 0 \qquad (2.3.19)$$
$$\left. \begin{cases} v_x(0,t) = 0 \\ v_x(1,t) = ag_2(u(1,t)) \end{cases} \right.$$

et conditions initiales positives. Ce modèle a été étudié par Pao [46], Thomas & Aronson [57] et Turner & Ames [58].

2.3.3 En biologie

Le modèle décrivant la prédation des proies de densité spatiale u par des prédateurs de densité spatiale v est décrit par le *système de réaction-diffusion*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \nu\dfrac{\partial u}{\partial x} + u(p - qv) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} - b\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \mu\dfrac{\partial u}{\partial x} + v(r - su) = 0 \end{cases} , \qquad \text{dans } (0,\infty) \times \mathbb{R},$$

avec des conditions initiales vérifiant :

$$\begin{cases} 0 \leq \delta \leq u_0(x) \leq \alpha \\ 0 \leq \gamma \leq v_0(x) \leq \beta \end{cases} \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R},$$

où a, $b > 0$; p, r, q, s, ν, μ, δ, α et β désignent des constantes positives et $u_0(x) \equiv u(0,x)$, $v_0(x) \equiv v(0,x)$ sont des fonctions données. Les inconnues sont $u = u(x,t)$ et $v = v(x,t)$.

Physiquement, les constantes p et q sont les cœfficients décrivant la croissance de la densité du prédateur, tandis que le cœfficient s décrit la décroissance de la densité de la proie due à la présence du prédateur.

2.3.4 En électronique

Prenons comme exemple la diffusion du phosphore dans le Silicone. On dope une plaque de Silicium par le Phosphore (en la chauffant par exemple); le phénomène est décrit par les trois réactions:

$$
\begin{aligned}
V + I &\leftrightarrow\ <0>, \\
P + V &\leftrightarrow\ E, \\
P + I &\leftrightarrow\ F.
\end{aligned}
$$

La première réaction décrit la neutralisation d'une lacune V (un lieu où se trouvait un atome de Silicium) par l'occupation de son lieu par un atome de Silicium interstitiel I (c'est un atome de Silicium qui ne se trouve pas dans sa place habituelle). Dans la deuxième, un atome de Phosphore substitutionnel P prenant la place d'une lacune V, crée un complexe du type E, tandis que dans la troisième réaction, un atome de Phosphore substitutionnel P prenant la place d'un atome de Silicium interstitiel I crée un complexe du type F. Les trois réactions sons réversibles.

Si on note par $[V]$, $[E]$, $[I]$, $[F]$ et $[P]$ les concentrations en nombre de lacunes V, nombre de complexes du type E, nombre d'atomes de Silicium interstitiel I, nombre de complexes du type F et nombre d'atomes de Phosphore substitutionnel P, en appliquant la loi de conservation de la masse et en tenant compte de la diffusion de chaque type (par application de la loi de Fick $J = -D\nabla c$, puis la loi de continuité $\nabla J = -\partial c/\partial t$) on aboutit au système de Réaction -Diffusion suivant:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{\partial}{\partial t}[V] = d_1\Delta[V] - k_1[P][V] + k_2[E] - k_0([V][I] - [V_{eq}][I_{eq}]) \\
\frac{\partial}{\partial t}[E] = d_1\Delta[E] + k_2[P][V] - k_2[E] \\
\frac{\partial}{\partial t}[I] = d_3\Delta[I] - k_3[P][I] + k_4[F] - k_0([V][I] - [V_{eq}][I_{eq}]) \\
\frac{\partial}{\partial t}[F] = d_4\Delta[F] + k_4[P][I] - k_4[F] \\
\frac{\partial}{\partial t}[P] = d_5\Delta[P] - k_5[P][V] + k_2[E] - k_3[P][I] + k_4[F]
\end{array}
\right.
\qquad x \in \Omega, \quad t > 0,
$$

avec conditions aux bords bien choisies.

Remarque 2.3.2 *le principe des transistors est basé sur ces réactions, seulement le Phosphore est remplacé par le Béryllium ou le Carbone et dopant seulement les deux extrémités de plaque de Silicium.*

2.3.5 En génétique des populations

Considérons une population formée d'individus diploïdes (individus portant le même nombre de chromosomes que celui de l'ovule fécondé). Supposons que le gêne en un point et en une paire de chromosomes donnés se présente sous deux formes (appelées caractères) que nous notons par a et A; alors la population est divisé en trois classes (ou génotype). Deux entre elles sont formées d'individus appelés "homozygotes" et portent un seul type de caractères, les membres de ces deux classes sont notés par aa et AA et dépendent des caractères qu'ils portent. La troisième classe est formée d'individus appelés "hétérozygote" et portent un type de chaque caractère; nous notons ces individus par aA. Si la distribution géographique de la population est linéaire (se trouvant sur la même droite); notons alors par $\sigma_1(x,t)$, $\sigma_2(x,t)$ et $\sigma_3(x,t)$, les densités linéaires des génotypes aa, aA et AA respectivement au point de coordonnées x de l'habitat à l'instant $t > 0$. Nous admettons que le couplage des individus de la population se fait au hasard avec un coefficient de naissance noté r et que le flux à travers l'habitat est constant μ. Admettons aussi que le décès ne dépend que des caractères a et A et notons par λ_1, λ_2 et λ_3 les coefficients de décès des génotypes aa, aA et AA respectivement. En général ces coefficients diffèrent légèrement les uns des autres, malgré qu'il existe des génotypes plus viables (qui durent plus) que d'autres, voir Fischer (par Kouachi [25]). Nous obtenons le système:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x^2} - \lambda_1\sigma_1 + \dfrac{r}{\sigma}(\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2)^2 \\ \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x^2} - \lambda_2\sigma_2 + \dfrac{2r}{\sigma}(\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2)(\sigma_3 + \frac{1}{2}\sigma_2) \qquad \text{sur:} \quad (0,l)\times(0,\infty), \\ \dfrac{\partial \sigma_3}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 \sigma_3}{\partial x^2} - \lambda_3\sigma_3 + \dfrac{r}{\sigma}(\sigma_3 + \frac{1}{2}\sigma) \end{array}\right. \tag{2.3.20}$$

où $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

Remarque 2.3.3 *Si $\lambda_3 \leq \lambda_2 \leq \lambda_1$; la viabilité des hétérozygotes est entre celle des* *homozygotes, on appelle ce cas l'homozygote intermédiaire. Par contre si $\lambda_2 < \lambda_3 \leq \lambda_1$, nous avons la supériorité hétérozygote et si $\lambda_3 \leq \lambda_1 < \lambda_2$, nous avons l'infériorité hétérozygote.*

Remarque 2.3.4 *La modélisation mathématique de certains problèmes de propagation des flammes en théorie des réacteurs chimiques mène à des équations de la forme (2.3.20), voir Gelfand (par Kouachi [25]).*

Remarque 2.3.5 *Le modèle de propagation des populations électriques à travers l'axe nerveux d'un animal marin de grande taille (a Squid) conduit à une équation de la forme:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u),$$

où u désigne ici le voltage. Ce modèle a été proposé par Hodgkin et Huxley, Nagumo, Arimoto et Yoshizawa, Cohen; (voir Kouachi [25]).

2.4 Existence des solutions

2.4.1 Résolution des équations de réaction-diffusion

Il n'existe pas de solutions générales des systèmes d'équations de réaction-diffusion. On dispose cependant d'informations qualitatives sur l'existence globale des solutions et leurs comportements attendus lorsque la variable t tend vers l'infini.

Le fait que ces systèmes modélisent des phénomènes du monde réel, les questions mathématiques importantes qui les concernent sont:
1-Existence et unicité de la solution pour des données initiales données dans une vaste classe de fonctions.
2-Caractère globale de la solution.
3-Positivité de la solution chaque fois que les données initiales sont positives.
4-Comportement asymptotique de la solution globale lorsque le temps t tend vers ∞.
5-Dépendance continue de la solution des données initiales.

2.4.2 Fonctionnelles de Lyapunov classiques

Pour démontrer l'existence des solutions des systèmes de réaction diffusion, il y a plusieurs méthodes telles que la méthode des régions invariantes, méthode de l'effet régularisant, méthodes fonctionnelles basées sur des estimations à priori ou sur des fonctionnelles de Lyapunov. Ici, nous n'exposons pas les deux premières méthodes puisqu'elles ne donnent pas toujours l'existence globale vu la difficulté et la complexité des termes de réaction de certains systèmes de réaction-diffusion, mais nous nous consacrons à la dernière méthode qui donne des résultats satisfaisants.

Définition 2.4.1 ***(Fonctionnelle de Lyapunov)*** *On appelle fonctionnelle de Lyapunov associée à un système de réaction-diffusion formé de m équations, toute fonction*

$$\mathbf{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \tag{2.4.21}$$

telle que

$$\frac{d}{dt}\left(\mathbf{L}(u_1(t,\cdot), ..., u_m(t,\cdot))\right) \leq 0$$

pour tout $t > 0$ et toute solution $(u_1(\cdot,x), ..., u_m(\cdot,x))$ de système.

Remarque 2.4.1 *Nous pouvons utiliser seulement une fonctionnelle bornée pour démontrer l'existence globale de solutions.*

2.4.3 Existence globale

On considère principalement des problèmes paraboliques semilinéaires de la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(u), & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{2.4.22}$$

où f est une fonction de classe C^1 avec une croissance superlinéaire.

Proposition 2.4.1 *Soit X un espace de Banach des fonctions définies dans Ω. On suppose que le problème (2.4.22) possède pour tout $u_0 \in X$ une solution unique u dans* *l'intervalle* $[0, T]$, *où* $T = T(u_0)$. *Alors il existe* $T_{\max} = T_{\max}(u_0) \in (T, \infty]$ *avec les propriétés suivantes:*

(i) La solution u *est continue dans l'intervalle* $[0, T_{\max})$.

(ii) Si $T_{\max} < \infty$, *alors* u *ne peut être continue dans* $[0, \tau)$ *pour tout* $\tau > T_{\max}$. *On appelle* u *la solution maximale et* $T_{\max}$ *est son temps maximal d'existence.*

(iii) D'autre côté on considère que $T = T(\|u_0\|_X)$. *Alors l'un des deux:* $T_{\max} = \infty$ *ou* $\lim_{t \to T_{\max}} \|u(t)\|_X = \infty$ *est satisfait.*

Preuve. Soit $u_0 \in X$ est fixé. Si u_1 et u_2 sont des solutions de (2.4.22) dans $[0, T_1)$ et $[0, T_2)$, respectivement, alors $u_1 = u_2$ dans $[0, \min(T1, T2))$ due à l'unicité. Soit $\{u_\alpha : [0, T_\alpha) \to X\}$ l'ensemble de toutes les solutions de (2.4.22) et $\widetilde{T} := supT_\alpha$. On définie $u : [0, \widetilde{T}) \to X$ par $u(t) := u_\alpha(t)$, où α est un indice tel que $T_\alpha > t$. Alors u est évidemment une solution de (2.4.22) dans $[0, \widetilde{T})$, et les propriétés (i) et (ii) sont vérifiées. Sous l'hypothèse dans la propriété (iii), on suppose que:

$$\widetilde{T} < \infty \text{ et } \lim_{t \to \widetilde{T}} \inf \|u(t)\|_X < \infty.$$

Choisissons $C > 0$ et $t_k \to \widetilde{T}$ tel que $\|u(t_k)\|_X < C$ pour tout $k = 1, 2, ...$ A cause de notre hypothèse il existe $T > 0$ indépendant de k tel que le problème (2.4.22) avec les conditions initiales $u(t_k)$ possède une solution unique $u_k : [0, T] \to X$, $k = 1, 2, ...$par l'unicité, $u_k(t) = u(t+t_k)$ pour tout t petit. Fixons k tel que $t_k \in (\widetilde{T} - T, \widetilde{T})$ et mettons

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} u(t), t \in [0, t_k] \\ u(t - t_k), t \in [t_k, t_k + T] \end{cases}$$

Alors $\widetilde{u}$ est une solution de (2.4.22) dans $[0, t_k + T]$ et $t_k + T > \widetilde{T}$ donc on a une contradiction avec la définition de $\widetilde{T}$. ■

Remarque 2.4.2 *On note que (2.4.22) possède une solution globale si* $T_{\max} = \infty$. *La proposition (2.4.1) nous fournis un simple critère pour l'existence globale: Si* $\|u(t)\|_X$ *reste borné, alors* $T_{\max} = \infty$. *Puisque les hypothèses de la proposition (2.4.1) sont satisfaits avec* $X = L^\infty(\Omega)$ *si* $f \in C^1$, *on remarque que la solution est bornée dans* $L^\infty(\Omega)$ *et suffisante pour son existence globale. Notons que la même déclaration est juste pour plusieurs autres classes générales d'équations et systèmes.*

On peut appliquer la proposition sur l'exemple suivant:

Exemple 2.4.1 *Considérons le problème bien posé*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}-\Delta u &= |u|^{p-1}u, \qquad x\in\Omega, t>0, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0, \qquad x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0) &= u_0, \qquad x\in\Omega \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

avec $p=1+4/n$. *Soit* $u_0\in L^2(\Omega)$ *et on suppose* $T:=T_{\max}(u_0)<\infty$, *alors*

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}\geq C(n,p)\left|\log(T-t)\right|^{\frac{1}{2}}, t\to T.$$

Maintenant on fait retour à l'étude de l'existence globale.

Théorème 2.4.1 ***(Existence Globale par effet régularisant):*** *Soit l'équation (2.1.1), si*

$$f(t,x,u)\in\mathbb{L}^{\infty}(0,T,\mathbb{L}^p(\Omega)) \quad \textit{pour } p>\frac{n}{2}, \textit{ où } n=\dim\Omega. \tag{2.4.24}$$

(i.e)

$$\begin{aligned} f(t,x,u) &\in \mathbb{L}^{\infty}(0,T,\mathbb{L}^p(\Omega))\Leftrightarrow \sup_{\substack{0\leq t\leq T\\ x\in\Omega}}\|f(t,x,u)\|_{\mathbb{L}^p(\Omega)}<+\infty \\ &\Leftrightarrow \exists c>0, \int_{\Omega}|f(t,x,u)|^p\,dx\leq c, \forall t\in[0,T], \end{aligned}$$

alors la solution de l'équation est globale (voir Henry [16]).

Théorème 2.4.2 *Il existe un* $T_{\max}\in(0,\infty]$ *tel que (2.1.1) possède une solution unique dans* $[0,T_{\max})\times\overline{\Omega}$, *en outre si* $T_{\max}<\infty$ *alors* $\underset{t\to T_{\max}}{lim}\|u(t)\|_{\infty,\Omega}=\infty$.

Preuve. Voir Ryan [53] page (40). ∎

Exemple: Considérons le système suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}=a\Delta u+f(u,v), & x\in\Omega, t>0, \\ \frac{\partial v}{\partial t}=b\Delta v+g(u,v), & x\in\Omega, t>0, \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}=\frac{\partial v}{\partial \eta}=0, & x\in\partial\Omega, t>0, \\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\Omega, \\ v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega, \end{cases} \tag{2.4.25}$$

où a, b sont des constantes positives. Ici Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ et $(u_0, v_0) \in \{(u_0, v_0) \in L^\infty \times L^\infty(\Omega) : u_0, v_0 \geq 0\}$, On suppose que $f, g : [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ sont des C^1-fonctions et satisfont:

$$f(0, v),\ g(u, 0) \geq 0, \quad \text{pour } u, v \geq 0, \tag{2.4.26}$$

ce qui assure que le système (2.4.25) préserve la positivité.

Les deux classes célèbres sont le Système avec la dissipation de la masse et le Système de Gierer-Meinhardt dont on intéresse que par l'étude de ce dernier. Et pour plus de détail sur la première classe avec cet exemple, voir Abdelmalek [1] page (32).

2.4.4 Régions Invariantes

Pour prouver l'existence globale de solutions des systèmes de réaction diffusion, il est nécessaire d'opter une méthode analytique, qui nous permet de créer une couverture théorique appropriée dans le but d'étudier l'évolution en temps des solutions, cette technique est intitulée Région Invariante qui est très importante dans le cas où la matrice de diffusion n'est pas diagonale voir Kanel et Kirane [23], Kuiper [34] Kouachi [31, 28, 29, 30], Sembera & Benes [54] et Abdelmalek [2].

Dans cette phase d'étude on a aboutit à quelques théorèmes généraux dans les quels nous pouvons les appliquer pour spécifier certains systèmes d'équations.

Définition 2.4.2 *Un sous-ensemble fermé $\sum \subset \mathbb{R}^n$ est appelé une région invariante pour le système défini par (2.1.1), si toute solution $u(x, t)$ ayant ses valeurs initiales et aux limites dans $\sum$, reste dans $\sum$ pour toute $x \in \Omega$ et pour toute $t \in [0, t^*)$ où $t^* < T_{\max}$.*

Lemme 2.4.1 *Considérons le système (2.1.1) avec conditions initiales $u_0 \in BC_0$, si le système admet une région invariante $\sum$, et $u_0(x) \in \sum$ pour toute $x \in \mathbb{R}$. Alors: la solution existe pour toute $t > 0$.*

Preuve. Voir Smoller [55] page (202). ■

Exemple 2.4.2 *Considérons le système: (voir S.Abdelmalek [2])*

$$\begin{cases} u_t = a\Delta u + b\Delta v + f(u,v,w), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t = c\Delta u + a\Delta v + b\Delta w + g(u,v,w), & x \in \Omega, t > 0, \\ w_t = c\Delta v + a\Delta w + h(u,v,w), & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \tag{2.4.27}$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{aligned} \lambda u + (1-\lambda)\partial_\eta u = \beta_1 & \qquad sur\ \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ \lambda v + (1-\lambda)\partial_\eta v = \beta_2 & \qquad sur\ \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ \lambda w + (1-\lambda)\partial_\eta w = \beta_3 & \qquad sur\ \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \end{aligned}$$

et les conditions initiales:

$$u(0,x) = u_0(x),\ v(0,x) = v_0(x),\ w(0,x) = w_0(x), \quad dans\ \Omega,$$

où a, b et c sont des constantes positives et $\sqrt{2}a \geq (b+c)$.
la région invariante est:

$$\sum = \begin{cases} (u_0,v_0,w_0) \in \mathbb{R}^3\ t\ .q & \begin{cases} \sqrt{2\mu}\,|v_0| \leq u_0 + \mu w_0, \\ u_0 \leq \mu w_0 \end{cases} si \begin{cases} \sqrt{2\mu}\,|\beta_2| \leq \beta_1 + \mu\beta_3, \\ \beta_1 \leq \mu\beta_3 \end{cases} \\ (u_0,v_0,w_0) \in \mathbb{R}^3\ t\ .q & \begin{cases} |u_0 + \mu w_0| \leq \sqrt{2\mu} v_0, \\ u_0 \leq \mu w_0 \end{cases} si \begin{cases} |\beta_1 + \mu\beta_3| \leq \sqrt{2\mu}\beta_2, \\ \beta_1 \leq \mu\beta_3 \end{cases} \\ (u_0,v_0,w_0) \in \mathbb{R}^3\ t\ .q & \begin{cases} \sqrt{2\mu}\,|v_0| \leq u_0 + \mu w_0, \\ \mu w_0 \leq u_0 \end{cases} si \begin{cases} \sqrt{2\mu}\,|\beta_2| \leq \beta_1 + \mu\beta_3, \\ \mu\beta_3 \leq \beta_1 \end{cases} \\ (u_0,v_0,w_0) \in \mathbb{R}^3\ t\ .q & \begin{cases} |u_0 + \mu w_0| \leq \sqrt{2\mu} v_0, \\ \mu w_0 \leq u_0 \end{cases} si \begin{cases} |\beta_1 + \mu\beta_3| \leq \sqrt{2\mu}\beta_2, \\ \mu\beta_3 \leq \beta_1 \end{cases} \end{cases}$$

où

$$\mu = \frac{b}{c}$$

Chapitre 3

Systèmes de Réaction-Diffusion de type Gierer-Meinhardt

3.1 Introduction

la formation des patterns dans le développement d'une organisation plus élevée hors d'un œuf simple fertilisé ou d'un tissu végétale est l'aspect le plus fascinant de la biologie. Une question centrale est pourquoi les palmes se disposes d'une manière organisée sur le stipe d'une plante? Cependant, un regard à la nature inorganique indique que la formation des patterns (En anglais: Pattern formation) n'est pas particulière aux objets vivants. La formation des patterns est la règle également dans le monde non vive. La formation des galaxies, étoiles, nuages, pluie chute, foudre, systèmes de fleuve, montagnes, les cristaux, toutes les formes d'érosion -toute témoigne à la génération des structures commandées-.

Il est instructif pour rechercher des principes communs dans la génération de ces structures; si une petite déviation d'une distribution homogène a une rétroaction positive forte sur elle-même, la déviation augmentera. Par exemple, l'érosion procède plus rapidement à l'endroit de quelques dommages initiaux aléatoires et les fleuves contournés pointus sont formés en dépit de celui que la pluie a été répartie presque homogènement sur le pays. Une grande dune de sable peut résulter d'une pierre dans un désert qui produit un abri de vent et peut accélèrent ainsi localement le dépôt du sable; ce dépôt augmente la probabilité d'avantage de dépôt de sable, et ainsi de suite.

En Biologie; *Alfred Gierer* et *Hans Meinhardt* ont formalisé cette observation et ont proposé un modèle moléculaire plausible pour modéliser la formation, composé de deux équations aux dérivées partielles formant un Système de Réaction-Diffusion à réaction fractionnaire de type activateur-inhibiteur:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = \rho \dfrac{a^2}{h} - \mu_a a + D_a \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \rho_a \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = \rho a^2 - \mu_h h + D_h \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \rho_h \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Ici,

a est une substance autocatalytique à courte portée, (i.e) activateur et h est son antagoniste à longue portée, (i.e) inhibiteur. $\dfrac{\partial a}{\partial t}$ décrit le changement de la concentration de l'activateur a par rapport le temps. Le premier terme du côté droit $(\rho \dfrac{a^2}{h})$ décrit le taux de production qui dépend non linéairement de la concentration de l'activateur et de l'inhibiteur. Le nombre de molécules délabrées par rapport le temps est proportionnel au taux de décomposition (μ_a) et au nombre de molécules actuelles (a) (comme dans une ville le nombre de personnes décédées dépend du nombre d'habitants). L'échange des molécules est modélisé par la diffusion $(D_a \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2})$, (il y a d'autres modes possibles de propagation). La deuxième équation décrit en termes analogues le changement de la concentration de l'inhibiteur. ρ_a est un petit taux de production d'activateur-indépendant de l'activateur et est exigé pour lancer l'autocatalyse d'activateur à la concentration très basse de l'activateur (par exemple, dans le cas de la régénération). ρ_h est la production basique de l'inhibiteur.

Le modèle décrit la concentration d'une substance autocatalytique à courte portée; l'activateur, qui règle la production de son antagoniste à longue portée; l'inhibiteur (Gierer et Meinhardt, 1972, Gierer, 1981, Meinhardt, 1982). C'est certainement un modèle minimal, mais il fournit un pont théorique entre les observations d'une part et la déduction des mécanismes moléculaire-génétiques fondamentaux d'autre part.

La possibilité de construire des modèles par la réaction de deux substances qui diffusent avec différents taux a été découverte par *Turing* (1952). *Gierer* et *Meingardt* ont prouvé que même si cette condition est satisfaite, seulement une classe très spéciale des réactions peut former des patterns si et seulement si dans le cas de l'autocatalyse local et l'inhibition de long-portée. Des différentes réalisations sont possibles : L'inhibition peut résulter d'un épuisement où l'autocatalyse peut être basée sur une inhibition d'une inhibition. L'équation de Turing satisfait cette condition. Dans le terme de mécanisme de Gierer-Meinhardt, l'inhibition résulte d'un déplacement d'activateur par la diffusion rapide de la substance.

3.2 Exemples de modélisation: Comment la coquille de mer s'adoniser avec ces couleurs?

Une cellule productrice-colorante infecte une voisine et après une partie de retard cette cellule également devient colorante et déclenche alternativement la prochaine voisine, et ainsi de suite jusqu'à la génération des lignes obliques.

Les patterns de la production de colorant sont plus communs avec les patterns des formations. La situation générale presque dans tous les patterns qui forment des systèmes est que les groupes des cellules se développent différemment à leurs voisines.

Pour la modélisation, supposons que la coloration dans la coquille est sous la commande d'une molécule; l'activateur a. La réaction inhibitrice peut résulter de l'épuisement d'un substrat, s.

La formulation mathématique de ces interactions (activateur-substrat) est donnée par le système de réaction -diffusion de type Gierer-Meinhardt (compliqué) suivant (voir Meinhardt [37]):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = \rho s a^{2^*} - \mu a + D_a \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} = \sigma - \rho s a^{2^*} - \nu s + D_s \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2}, \end{cases}$$

où

$$a^{2^*} = \frac{a^2}{1 + k a^2} + \rho_0.$$

L'activateur, a et sa molécule précurseur, le substrat s, diffusent d'une cellule à une autre avec les taux D_a et D_s respectivement et se délabrent avec les taux μ et ν. Le substrat s produit avec le taux constant σ. La constante k est un paramètre de contrôle, ρ représente la densité de source et ρ_0 est une valeur initiale de production. Ces équations nous permettent de calculer le changement de concentration de a et de s dans un intervalle de temps.

3.3 Existence globale des solutions d'un système de Gierer-Meinhardt d'ordre deux

Considérons le système de Réaction-Diffusion à réaction fractionnaire de type Gierer-Meinhardt à deux équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \Delta u_1 - \mu u_1 + b_1 \dfrac{u_1^p}{u_2^q} + \sigma, & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a_2 \Delta u_2 - \nu u_2 + b_2 \dfrac{u_1^r}{u_2^s}, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \tag{3.3.2}$$

avec les conditions aux bords de Neumann

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0, \ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0, \qquad x \in \Gamma, t > 0,$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} u_1(x,0) &= \psi_1(x) > 0, \qquad x \in \Omega, \\ u_2(x,0) &= \psi_2(x) > 0, \qquad x \in \Omega, \end{aligned}$$

où:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné de frontière Γ régulière.

Les constantes de diffusions: a_1 et a_2 sont supposées positives.

μ,ν et σ sont des constantes positives,

p, q, r et s: des indices non négatives avec $p > 1$.

$0 < b_1 \leq b_2$.

3.3.1 Etude de l'existence globale

On va démontrer que si:

$$\begin{aligned} r &> p - 1, \\ rq &> (p-1)(s+1), \end{aligned}$$

le problème (3.3.2) admet des solutions bornées en tout le temps pour des valeurs initiales arbitraires.

Lemme 3.3.1 *Soit p, q, r et s des constantes telles que, $r > p-1$ et $rq > (p-1)(s+1)$. Pour toute h, α, $\beta > 0$, il existe $c = c(h, \alpha, \beta) > 0$ et $\theta = \theta(\alpha) \in (0,1)$, telles que,*

$$\alpha \frac{u^{p-1+\alpha}}{v^{q+\beta}} \leq \beta \frac{u^{r+\alpha}}{v^{s+1+\beta}} + c\left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}}\right)^{\theta}, \qquad u \geq 0, v \geq h.$$

Preuve. *On a*

$$\begin{aligned} \alpha \frac{u^{p-1}}{v^{q}} &= \alpha \beta^{-\frac{p-1}{r}} \left(\beta \frac{u^{r}}{v^{s+1}}\right)^{\frac{p-1}{r}} v^{\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q} \\ &= \alpha \beta^{-\frac{p-1}{r}} \left(\beta \frac{u^{r}}{v^{s+1}}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon} \left(\beta \frac{u^{r}}{v^{s+1}}\right)^{-\epsilon} v^{\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q}, \end{aligned}$$

pour certain ϵ réalise:

$$0 < \epsilon < \min\left(\frac{-\dfrac{(s+1)(p-1)}{r} + q}{(s+1)}, 1 - \frac{p-1}{r}\right). \tag{3.3.3}$$

Donc on a

$$\begin{aligned} \alpha \frac{u^{p-1}}{v^{q}} &= \alpha (\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon} \left(\beta \frac{u^{r}}{v^{s+1}}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon} (u)^{-r\epsilon} (v)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q + \epsilon(s+1)}, \\ &= \alpha (\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon} \left(\beta \frac{u^{r}}{v^{s+1}}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon} \left(\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} (v)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q + \epsilon(s+1)}. \end{aligned}$$

D'après (3.3.3) on a

$$\frac{p-1}{r} + \epsilon < 1,$$

et

$$\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q + \epsilon(s+1) < 0,$$

alors on obtient

$$(v)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q + \epsilon(s+1)} \leq h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r} - q + \epsilon(s+1)},$$

d'autre part on a

$$\left(\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} = \left(\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} v^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}} v^{-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}},$$

et
$$v^{-\dfrac{\beta r\epsilon}{\alpha}} \leq h^{-\dfrac{\beta r\epsilon}{\alpha}},$$

donc
$$\begin{aligned}
\alpha\frac{u^{p-1}}{v^q} &= \alpha\left(\beta\right)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{u^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}(v)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}\\
&\leq \alpha\left(\beta\right)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{u^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}\\
&= \alpha\left(\beta\right)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{u^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}v^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}v^{-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}\\
&\leq \alpha\left(\beta\right)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{u^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}v^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}h^{-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}\\
&= \alpha\left(\beta\right)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{v^\beta}{u^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}},
\end{aligned}$$

posons
$$c_1 = \alpha\left(\beta\right)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}},$$

on obtient
$$\alpha\frac{u^{p-1}}{v^q} \leq c_1\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{v^\beta}{u^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}.$$

Rappelons l'inégalité de Young

$$fg \leq \varepsilon f^{p_0} + c_\varepsilon g^{q_0},\ \textit{telle que } f,g \geq 0, \varepsilon \geq 0, c_\varepsilon = \varepsilon^{-\frac{1}{p_0-1}}, p_0, q_0 > 0, \tfrac{1}{p_0}+\tfrac{1}{q_0} = 1.$$

Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{c_1}, \qquad f = \left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}, \qquad g = \left(\frac{v^\beta}{u^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} \quad \textit{et} \quad p_0 = \frac{1}{\frac{p-1}{r}+\epsilon}.$$

$$\tfrac{1}{p_0}+\tfrac{1}{q_0} = 1, \textit{donne} \quad q_0 = \frac{1}{1-\frac{p-1}{r}-\epsilon},$$

Et que
$$c_\varepsilon = (\varepsilon)^{-\frac{1}{p_0-1}} = \left(\frac{1}{c_1}\right)^{-\frac{p-1+r\epsilon}{r-(p-1)-r\epsilon}}.$$

Donc on obtient
$$\alpha\frac{u^{p-1}}{v^q} \leq c_1\left(\frac{1}{c_1}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}}\right) + \left(\frac{1}{c_1}\right)^{-\frac{p-1+r\epsilon}{r-(p-1)-r\epsilon}}\left(\frac{v^\beta}{u^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha\left(1-\frac{p-1}{r}-\epsilon\right)}}\right),$$

alors

$$\alpha\frac{u^{p-1}}{v^q}\leq\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}}\right)+c_2\left(\frac{v^\beta}{u^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha\left(1-\frac{p-1}{r}-\epsilon\right)}},\qquad\qquad \text{où } c_2=c_1^{1+\frac{p-1+r\epsilon}{r-(p-1)-r\epsilon}},$$

ce qui donne

$$\alpha\frac{u^{p-1+\alpha}}{v^{q+\beta}}\leq\beta\frac{u^{r+\alpha}}{v^{s+1+\beta}}+c_2\left(\frac{u^\alpha}{v^\beta}\right)^{1-\frac{r\epsilon}{\alpha\left(1-\frac{p-1}{r}-\epsilon\right)}}.$$

Enfin prenons ϵ suffisamment petit on obtient

$$\alpha\frac{u^{p-1+\alpha}}{v^{q+\beta}}\leq\beta\frac{u^{r+\alpha}}{v^{s+1+\beta}}+c\left(\frac{u^\alpha}{v^\beta}\right)^{\theta}.$$

■

Théorème 3.3.1 *Soit la fonctionnelle*

$$\omega(t)=\int_\Omega\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega.$$

associée au système (3.3.2) avec $\alpha_1>1,\beta_1>0$, alors pour $\frac{p-1}{r}<\min\left(\frac{q}{s+1},1\right)$ et pour toute $\psi_1,\psi_2\in C(\overline{\Omega})$ avec $\psi_1,\psi_2>0$, $\omega(t)$ est uniformément bornée dans l'intervalle $[0,T^*]$, $T^*<T^{\max}$.

Proposition 3.3.1 *Sous les assomptions du théorème (3.3.1), la solution (u_1,u_2) du problème (3.3.2) est bornée et globale dans l'intervalle de temps $(0,\infty)$.*

Preuve de théorème (3.3.1).

$$\omega(t)=\int_\Omega\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega.$$

Dérivons $\omega(t)$ par rapport à t, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\omega(t)\right)=\int_\Omega\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)d\Omega$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \frac{1}{u_2^{2\beta_1}}\left(\alpha_1 u_1^{\alpha_1-1}u_2^{\beta_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)-\beta_1 u_1^{\alpha_1}u_2^{\beta_1-1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\right)d\Omega \\
&= \int_\Omega \left(\alpha_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\left(a_1\Delta u_1-\mu u_1+b_1\frac{u_1^p}{u_2^q}+\sigma\right)-\beta_1\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\left(a_2\Delta u_2-\nu u_2+b_2\frac{u_1^r}{u_2^s}\right)\right)d\Omega \\
&= \int_\Omega \left(\begin{array}{c} \alpha_1 a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\Delta u_1-\alpha_1\mu\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}+b_1\alpha_1\frac{u_1^{\alpha_1+p-1}}{u_2^{\beta_1+q}}+\alpha_1\sigma\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega \\ -\beta_1 a_2\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\Delta u_2+\beta_1\nu\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}-b_2\beta_1\frac{u_1^{r+\alpha_1}}{u_2^{s+\beta_1+1}} \end{array}\right)d\Omega \\
&= \int_\Omega \left(\begin{array}{c} \alpha_1 a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\Delta u_1-\beta_1 a_2\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\Delta u_2+\left(\beta_1\nu-\alpha_1\mu\right)\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}+b_1\alpha_1\frac{u_1^{\alpha_1+p-1}}{u_2^{\beta_1+q}} \\ +\alpha_1\sigma\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega-b_2\beta_1\frac{u_1^{r+\alpha_1}}{u_2^{s+\beta_1+1}} \end{array}\right)d\Omega.
\end{aligned}
$$

En appliquant la formule de Green pour les termes en Laplacien, on a

$$\int_\Omega \alpha_1 a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\Delta u_1 d\Omega=-\alpha_1 a_1\int_\Omega \nabla\left(\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\right)\nabla u_1 d\Omega+\alpha_1 a_1\int_\Gamma\left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}d\Gamma,$$

et comme $\dfrac{\partial u_1}{\partial\eta}=0$ (condition de Neumann), alors

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \alpha_1 a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\Delta u_1 d\Omega &= -\alpha_1 a_1\int_\Omega \nabla\left(\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\right)\nabla u_1 d\Omega, \\
&= -\alpha_1 a_1\int_\Omega \frac{1}{u_2^{2\beta_1}}\left(\left(\alpha_1-1\right)u_1^{\alpha_1-2}u_2^{\beta_1}\nabla u_1-\beta_1 u_1^{\alpha_1-1}u_2^{\beta_1-1}\nabla u_2\right)\nabla u_1 d\Omega,
\end{aligned}
$$

donc on a

$$\int_\Omega \alpha_1 a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\Delta u_1 d\Omega=\int_\Omega\left(-\alpha_1\left(\alpha_1-1\right)a_1\frac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}}\left|\nabla u_1\right|^2+\alpha_1\beta_1 a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}}\nabla u_1\nabla u_2\right)d\Omega.$$

Pour le terme $\displaystyle\int_\Omega\left(\beta_1 a_2\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\Delta u_2\right)d\Omega$ on a

$$\int_\Omega\left(\beta_1 a_2\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\Delta u_2\right)d\Omega=-\beta_1 a_2\int_\Omega\nabla\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\right)\nabla u_2 d\Omega+\beta_1 a_2\int_\Gamma\left(\frac{\partial u_2}{\partial\eta}\right)\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}d\Gamma,$$

et comme $\dfrac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0$ (condition de Neumann), alors

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\beta_1 a_2 \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}} \Delta u_2 \right) d\Omega &= -\beta_1 a_2 \int_\Omega \nabla \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}} \right) \nabla u_2 d\Omega \\
&= -\beta_1 a_2 \int_\Omega \left(\frac{1}{u_2^{2\beta_1+2}} \left(\begin{array}{c} \alpha_1 u_1^{\alpha_1-1} u_2^{\beta_1+1} \nabla u_1 - \\ (\beta_1+1) u_1^{\alpha_1} u_2^{\beta_1} \nabla u_2 \end{array} \right) \nabla u_2 \right) d\Omega \\
&= \int_\Omega \left(-\alpha_1 \beta_1 a_2 \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}} \nabla u_1 \nabla u_2 + \beta_1 (\beta_1+1) a_2 \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}} |\nabla u_2|^2 \right) d\Omega.
\end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\omega(t)) &= \int_\Omega \left(\begin{array}{c} -\alpha_1(\alpha_1-1) a_1 \frac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}} |\nabla u_1|^2 + \alpha_1 \beta_1 (a_1+a_2) \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}} \nabla u_1 \nabla u_2 \\ -\beta_1(\beta_1+1) a_2 \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}} |\nabla u_2|^2 + (\beta_1 \nu - \alpha_1 \mu) \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} \\ +b_1 \alpha_1 \frac{u_1^{\alpha_1+p-1}}{u_2^{\beta_1+q}} - b_2 \beta_1 \frac{u_1^{r+\alpha_1}}{u_2^{s+\beta_1+1}} + \alpha_1 \sigma \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \end{array} \right) d\Omega, \\
&= (\beta_1 \nu - \alpha_1 \mu) \int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} d\Omega + \int_\Omega \left(b_1 \alpha_1 \frac{u_1^{\alpha_1+p-1}}{u_2^{\beta_1+q}} - b_2 \beta_1 \frac{u_1^{r+\alpha_1}}{u_2^{s+\beta_1+1}} + \alpha_1 \sigma \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \right) d\Omega \\
&\quad + \int_\Omega \left(\begin{array}{c} -\alpha_1(\alpha_1-1) a_1 \frac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}} |\nabla u_1|^2 - \beta_1(\beta_1+1) a_2 \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}} |\nabla u_2|^2 \\ +\alpha_1 \beta_1 (a_1+a_2) \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}} \nabla u_1 \nabla u_2 \end{array} \right) d\Omega \\
&= I_1 + J_1,
\end{aligned}$$

telle que

$$I_1 = \int_\Omega \left(\begin{array}{c} -\alpha_1(\alpha_1-1) a_1 \frac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}} |\nabla u_1|^2 + \alpha_1 \beta_1 (a_1+a_2) \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}} \nabla u_1 \nabla u_2 \\ -\beta_1(\beta_1+1) a_2 \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}} |\nabla u_2|^2 \end{array} \right) d\Omega,$$

$$J_1 = \int_\Omega \left((\beta_1 \nu - \alpha_1 \mu) \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} + b_1 \alpha_1 \frac{u_1^{\alpha_1+p-1}}{u_2^{\beta_1+q}} - b_2 \beta_1 \frac{u_1^{r+\alpha_1}}{u_2^{s+\beta_1+1}} + \alpha_1 \sigma \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \right) d\Omega.$$

Estimation de J_1.

D'après le principe de maximum il existe C_0 qui dépend de ψ_1, ψ_2 telle que $u_2 \geq c_0 > 0$, donc on a

$$\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} = \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{u_2}\right)^{\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}} \leq \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{c_0}\right)^{\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}}$$

donc

$$\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \leq c_3 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}, \qquad \text{où } c_3 = \left(\frac{1}{c_0}\right)^{\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}}, \tag{3.3.4}$$

on a

$$J_1 = (\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} d\Omega + b_1\alpha_1 \int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1+p-1}}{u_2^{\beta_1+q}} d\Omega - b_2\beta_1 \int_\Omega \frac{u_1^{r+\alpha_1}}{u_2^{s+\beta_1+1}} d\Omega + \alpha_1\sigma \int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} d\Omega.$$

En appliquant lemme (3.3.1) on obtient

$$\alpha_1 \frac{u_1^{\alpha_1+p-1}}{u_2^{\beta_1+q}} \leq \beta_1 \frac{u_1^{\alpha_1+r}}{u_2^{\beta_1+s+1}} + c\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1},$$

alors

$$\begin{aligned} b_1\alpha_1 \frac{u_1^{\alpha_1+p-1}}{u_2^{\beta_1+q}} &\leq b_1\beta_1 \frac{u_1^{\alpha_1+r}}{u_2^{\beta_1+s+1}} + b_1 c\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1}, \\ &\leq b_2\beta_1 \frac{u_1^{\alpha_1+r}}{u_2^{\beta_1+s+1}} + c_4\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1}, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

donc d'après (3.3.4) et (3.3.5), on obtient

$$\begin{aligned} J_1 \leq\ & (\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} d\Omega + b_2\beta_1 \int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1+r}}{u_2^{\beta_1+s+1}} d\Omega + \int_\Omega c_4 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1} d\Omega \\ & + \alpha_1\sigma \int_\Omega c_3 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} d\Omega - b_2\beta_1 \int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1+r}}{u_2^{\beta_1+s+1}} d\Omega, \end{aligned}$$

alors

$$J_1 \leq (\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} d\Omega + \int_\Omega c_4 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1} d\Omega + \alpha_1\sigma \int_\Omega c_3 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} d\Omega,$$

d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\int_{\Omega} c_4 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1} d\Omega \leq c_5 \left(\omega(t)\right)^{\theta_1}, \qquad \text{où } c_5 = c_4 \left|\Omega\right|^{1-\theta_1}.$$

On a

$$\int_{\Omega} c_3 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}} d\Omega \leq \left(\int_{\Omega} \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right) d\Omega\right)^{\dfrac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}} \left(\int_{\Omega} (c_3)^{\alpha_1} d\Omega\right)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

alors

$$\int_{\Omega} c_3 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}} d\Omega \leq c_6 \left(\omega(t)\right)^{\dfrac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}}, \qquad \text{où } c_6 = c_3 \left|\Omega\right|^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

alors on obtient

$$J_1 \leq \left(\beta_1 \nu - \alpha_1 \mu\right) \omega(t) + c_5 \left(\omega(t)\right)^{\theta_1} + \alpha_1 \sigma c_6 \left(\omega(t)\right)^{\dfrac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}},$$

ce qui donne

$$J_1 \leq \left(\beta_1 \nu - \alpha_1 \mu\right) \omega(t) + c_7 \left(\left(\omega(t)\right)^{\theta_1} + \alpha_1 \sigma \left(\omega(t)\right)^{\dfrac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}}\right).$$

I_1 s'écrive:

$$I_1 = -\int_{\Omega} Q_1 d\Omega,$$

où

$$Q_1 = \alpha_1 \left(\alpha_1 - 1\right) a_1 \frac{u_1^{\alpha_1 - 2}}{u_2^{\beta_1}} \left|\nabla u_1\right|^2 - \alpha_1 \beta_1 \left(a_1 + a_2\right) \frac{u_1^{\alpha_1 - 1}}{u_2^{\beta_1 + 1}} \nabla u_1 \nabla u_2 + \beta_1 \left(\beta_1 + 1\right) a_2 \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1 + 2}} \left|\nabla u_2\right|^2.$$

Q_1 est une forme quadratique qu'on peut l'écrir sous la forme matricielle suivante:

$$Q_1 = \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 \left(\alpha_1 - 1\right) a_1 \dfrac{u_1^{\alpha_1 - 2}}{u_2^{\beta_1}} & -\dfrac{1}{2} \alpha_1 \beta_1 \left(a_1 + a_2\right) \dfrac{u_1^{\alpha_1 - 1}}{u_2^{\beta_1 + 1}} \\ -\dfrac{1}{2} \alpha_1 \beta_1 \left(a_1 + a_2\right) \dfrac{u_1^{\alpha_1 - 1}}{u_2^{\beta_1 + 1}} & \beta_1 \left(\beta_1 + 1\right) a_2 \dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1 + 2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{pmatrix}.$$

Q_1 est définit non négative ssi tout les déterminant principaux de sa matrice sont non négatives, (i. e):

$$\alpha_1 a_1 (\alpha_1 - 1) \geq \frac{\alpha_1^2 \beta_1 (a_1 + a_2)^2}{4a_2 (\beta_1 + 1)} \text{ et } \alpha_1 > 1.$$

Sous ces conditions on obtient

$$\frac{d}{dt} (\omega(t)) \leq J_1.$$

Enfin:

$$\frac{d}{dt} (\omega(t)) \leq (\beta_1 \nu - \alpha_1 \mu) \omega(t) + A c_7 \left((\omega(t))^{\theta_1} + \alpha_1 \sigma (\omega(t))^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}} \right),$$

supposons $\beta_1 \nu - \alpha_1 \mu < 0$, alors on aura

$$\omega'(t) \leq C_5 \omega^{\theta_1}(t) + c_7 \alpha_1 \sigma \omega^{\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}}(t). \tag{3.3.6}$$

Par une intégration simple de (3.3.6) dans $[0, T^*]$ on obtient que $\omega(t)$ est uniformement bornée; $\omega(t) \leq \gamma_2$ (où γ_2 dépend de ψ_1 et de ψ_2). ■

Preuve de proposition (3.3.1). Par une application directe du théorème (2.4.1), en utilisant le théorème (3.3.1), on déduit que la solution (u_1, u_2) du problème (3.3.2) est bornée et globale dans l'intervalle de temps $(0, \infty)$. ■

Chapitre 4

Existence globale de solutions pour certains systèmes de R-D à réaction fractionnaire

4.1 Existence globale de solutions pour trois composantes des systèmes de R-D de type Gierer-Meinhardt

Considérons le système de réaction-diffusion de type G-M à trois équations, qui modélise une phénomène biologique dans la développement des plantes (voir l'application page (54)):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \Delta u_1 - \mu_1 u_1 + \dfrac{u_1^{p_1}}{u_2^{q_1}(u_3^{r_1}+c)} + \sigma, & x \in \Omega, t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a_2 \Delta u_2 - \mu_2 u_2 + \dfrac{u_1^{p_2}}{u_2^{q_2} u_3^{r_2}}, & x \in \Omega, t > 0, \\ \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = a_3 \Delta u_3 - \mu_3 u_3 + \dfrac{u_1^{p_3}}{u_2^{q_3} u_3^{r_3}}, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \tag{4.1.1}$$

avec les conditions aux bords de Neumann

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0, \ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0 \text{ et } \frac{\partial u_3}{\partial \eta} = 0, \qquad x \in \Gamma, t > 0,$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} u_1(x,0) &= \xi_1(x) > 0, \qquad x \in \Omega, \\ u_2(x,0) &= \xi_2(x) > 0, \qquad x \in \Omega, \\ u_3(x,0) &= \xi_3(x) > 0, \qquad x \in \Omega, \end{aligned}$$

où:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné de frontière Γ régulière.

Les constantes de diffusions: a_1, a_2 et a_3 sont supposées positives.

μ_1, μ_2 et μ_3 sont des constantes positives,

p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 et r_3: des indices non négatives avec

$$p_1 > 1, \ \frac{p_1 - 1}{p_2} < \min\left(\frac{q_1}{q_2 + 1}, \frac{r_1}{r_2}, 1\right).$$

$\sigma > 0$, $c \geq 0$.

4.1.1 Etude de l'existence globale

Lemme 4.1.1 *Soit p, q, r, s, m, et n des constantes telles que*

$$\begin{aligned} r &> p - 1 \\ rm &> (p-1)(n) \\ rq &> (p-1)(s+1) \end{aligned}$$

Pour toute h, l, α, β, $\gamma > 0$, il existe $C = C(h, l, \alpha, \beta, \gamma) > 0$ et $\theta = \theta(\alpha) \in (0,1)$, telles que

$$\alpha \frac{u^{p-1+\alpha}}{v^{q+\beta} w^{m+\gamma}} \leq \beta \frac{u^{r+\alpha}}{v^{s+1+\beta} w^{n+\gamma}} + C \left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta} w^{\gamma}}\right)^{\theta}, \qquad u_1 \geq 0, u_2 \geq h, u_3 \geq l$$

Preuve. *On a*

$$\begin{aligned}
\alpha\frac{u^{p-1}}{v^q w^m} &= \alpha\left(\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{\frac{p-1}{r}} v^{-q} v^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}} w^{-m} w^{\frac{(n)(p-1)}{r}}\\
&= \alpha\beta^{-\frac{p-1}{r}}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{\frac{p-1}{r}} v^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q} w^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m}\\
&= \alpha\beta^{-\frac{p-1}{r}}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{-\epsilon} v^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q} w^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m},
\end{aligned}$$

pour certain ϵ réalise:

$$0<\epsilon<\min\left(\frac{-\dfrac{(s+1)(p-1)}{r}+q}{(s+1)},\frac{-\dfrac{(n)(p-1)}{r}+m}{(n)},1-\frac{p-1}{r}\right). \tag{4.1.2}$$

Donc

$$\alpha\frac{u^{p-1}}{v^q w^m}=\alpha\left(\beta\right)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{u^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}(v)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}w^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n}.$$

D'après (4.1.2) on trouve

$$\frac{p-1}{r}+\epsilon<1,$$

et

$$\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)<0,$$

et

$$\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon(n)<0,$$

alors

$$(v)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}\leq h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}, \tag{4.1.3}$$

$$(w)^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon(n)}\leq l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon(n)}, \tag{4.1.4}$$

d'autre part on a

$$\left(\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} = \left(\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} v^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}} v^{-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}} w^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}} w^{-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}. \tag{4.1.5}$$

Nous avons

$$v \geq h \Rightarrow v^{-\dfrac{\beta r\epsilon}{\alpha}} \leq h^{-\dfrac{\beta r\epsilon}{\alpha}}. \tag{4.1.6}$$

aussi

$$w \geq l \Rightarrow w^{-\dfrac{\gamma r\epsilon}{\alpha}} \leq l^{-\dfrac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}. \tag{4.1.7}$$

Donc, d'après (4.1.3), (4.1.4), (4.1.5), (4.1.6) et (4.1.7) on aura

$$\begin{aligned}
\alpha\frac{u^{p-1}}{v^q w^m} &= \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}(v)^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}\,w^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n}\\
&\leq \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}\, l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n}\\
&= \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}\, l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n} v^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}} v^{-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}} w^{\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}} w^{-\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}\\
&\leq \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{1}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}} h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)}\, l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n} v^{\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}} w^{\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}} h^{-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}} l^{-\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}\\
&= \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon} h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}\, l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n-\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{v^{\beta}w^{\gamma}}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}},
\end{aligned}$$

posons

$$C_1 = \alpha\,(\beta)^{-\frac{p-1}{r}-\epsilon} h^{\frac{(s+1)(p-1)}{r}-q+\epsilon(s+1)-\frac{\beta r\epsilon}{\alpha}}\, l^{\frac{(n)(p-1)}{r}-m+\epsilon n-\frac{\gamma r\epsilon}{\alpha}},$$

on obtient

$$\alpha\frac{u^{p-1}}{v^q w^m} \leq C_1\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}\left(\frac{v^{\beta}w^{\gamma}}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}.$$

Rappelons l'inégalité de Young

$$fg \leq \varepsilon f^{p_0} + c_{\varepsilon} g^{q_0},\ \textit{telle que}\ f, g \geq 0, \varepsilon \geq 0, c_{\varepsilon} = \varepsilon^{-\frac{1}{p_0-1}}, p_0, q_0 > 0, \tfrac{1}{p_0} + \tfrac{1}{q_0} = 1.$$

Posons

$$\varepsilon = \frac{1}{C_1}, \qquad f = \left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)^{\frac{p-1}{r}+\epsilon}, \qquad g = \left(\frac{v^{\beta}w^{\gamma}}{u^{\alpha}}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha}}, \qquad p_0 = \frac{1}{\frac{p-1}{r}+\epsilon}.$$

On a

$$\tfrac{1}{p_0}+\tfrac{1}{q_0}=1, \quad donne \quad q_0=\frac{1}{1-\frac{p-1}{r}-\epsilon}.$$

Donc on obtient

$$\alpha\frac{u^{p-1}}{v^q w^m}\le C_1\left(\frac{1}{C_1}\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)+\left(\frac{1}{C_1}\right)^{-\frac{p-1+r\epsilon}{r-(p-1)-r\epsilon}}\left(\frac{v^\beta w^\gamma}{u^\alpha}\right)^{\frac{r\epsilon}{\alpha\left(1-\frac{p-1}{r}-\epsilon\right)}}\right),$$

alors

$$\alpha\frac{u^{p-1}}{v^q w^m}\le\left(\beta\frac{u^r}{v^{s+1}w^n}\right)+C_2\left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^{-\frac{r\epsilon}{\alpha\left(1-\frac{p-1}{r}-\epsilon\right)}}, \qquad où \quad C_2=C_1^{1+\frac{p-1+r\epsilon}{r-(p-1)-r\epsilon}},$$

ce qui donne

$$\alpha\frac{u^{p-1+\alpha}}{v^{q+\beta}w^{m+\gamma}}\le\beta\frac{u^{r+\alpha}}{v^{s+1+\beta}w^{n+\gamma}}+C_2\left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^{1-\frac{r\epsilon}{\alpha\left(1-\frac{p-1}{r}-\epsilon\right)}}.$$

Enfin prenons ϵ suffisamment petit on obtient

$$\alpha\frac{u^{p-1+\alpha}}{v^{q+\beta}w^{m+\gamma}}\le\beta\frac{u^{r+\alpha}}{v^{s+1+\beta}w^{n+\gamma}}+C\left(\frac{u^\alpha}{v^\beta w^\gamma}\right)^{\theta}.$$

■

Théorème 4.1.1 *Soit la fonctionnelle*

$$w(t)=\int\frac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^\gamma}d\Omega.$$

associée au système (4.1.1) avec $\alpha>1,\beta>0$ et $\gamma>0$, alors pour $\frac{p_1-1}{p_2}<\min\left(\frac{q_1}{q_2+1},\frac{r_1}{r_2},1\right)$ et pour toute $\xi_1,\xi_2,\xi_3\in C(\overline{\Omega})$ avec $\xi_1,\xi_2,\xi_3>0$, $w(t)$ est uniformement bornée dans l'intervalle $[0,T^*]$, $T^*<T^{\max}$.

Proposition 4.1.1 *Sous les assomptions du théorème (4.1.1), la solution (u_1,u_2,u_3) du problème (4.1.1) est bornée et globale dans l'intervalle de temps $(0,\infty)$.*

Preuve de théorème(4.1.1). $w(t)=\displaystyle\int\frac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^\gamma}d\Omega$

Dérivons $w(t)$ par rapport à t, on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}w(t) &= \int_\Omega \frac{d}{dt}\left(\frac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^\gamma}\right) d\Omega \\
&= \int_\Omega \frac{1}{u_2^{2\beta}u_3^{2\gamma}}\left(\alpha u_1^{\alpha-1}u_2^\beta u_3^\gamma \frac{\partial u_1}{\partial t} - \beta u_1^\alpha u_2^{\beta-1}u_3^\gamma \frac{\partial u_2}{\partial t} - \gamma u_1^\alpha u_2^\beta u_3^{\gamma-1}\frac{\partial u_3}{\partial t}\right) d\Omega \\
&= \int_\Omega \left(\alpha \frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) - \beta\frac{u_1^\alpha}{u_2^{\beta+1}u_3^\gamma}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right) - \gamma \frac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^{\gamma+1}}\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)\right) d\Omega \\
&= \int_\Omega \begin{pmatrix} \alpha \dfrac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma}\left(a_1\Delta u_1 - \mu_1 u_1 + \dfrac{u_1^{p_1}}{u_2^{q_1}(u_3^{r_1}+c)} + \sigma\right) \\ -\beta\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^{\beta+1}u_3^\gamma}\left(a_2\Delta u_2 - \mu_2 u_2 + \dfrac{u_1^{p_2}}{u_2^{q_2}u_3^{r_2}}\right) \\ -\beta\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^{\beta+1}u_3^\gamma}\left(a_2\Delta u_2 - \mu_2 u_2 + \dfrac{u_1^{p_2}}{u_2^{q_2}u_3^{r_2}}\right) \\ -\gamma\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^{\gamma+1}}\left(a_3\Delta u_3 - \mu_3 u_3 + \dfrac{u_1^{p_3}}{u_2^{q_3}u_3^{r_3}}\right) \end{pmatrix} d\Omega \\
&= \int_\Omega \begin{pmatrix} a_1\alpha\dfrac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma}\Delta u_1 - \mu_1\alpha\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^\gamma} + \alpha\dfrac{u_1^{p_1+\alpha-1}}{u_2^{q_1+\beta}u_3^\gamma(u_3^{r_1}+c)} + \sigma\alpha\dfrac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma} \\ -a_2\beta\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^{\beta+1}u_3^\gamma}\Delta u_2 + \mu_2\beta\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^\gamma} - \beta\dfrac{u_1^{p_2+\alpha}}{u_2^{q_2+\beta+1}u_3^{r_2+\gamma}} \\ -a_3\gamma\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^{\gamma+1}}\Delta u_3 + \mu_3\gamma\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^\gamma} - \gamma\dfrac{u_1^{p_3+\alpha}}{u_2^{q_3+\beta}u_3^{r_3+\gamma+1}} \end{pmatrix} d\Omega \\
&= \int_\Omega \begin{pmatrix} a_1\alpha\dfrac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma}\Delta u_1 - a_2\beta\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^{\beta+1}u_3^\gamma}\Delta u_2 - a_3\gamma\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^{\gamma+1}}\Delta u_3 \\ -\mu_1\alpha\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^\gamma} + \mu_2\beta\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^\gamma} + \mu_3\gamma\dfrac{u_1^\alpha}{u_2^\beta u_3^\gamma} \\ +\alpha\dfrac{u_1^{p_1+\alpha-1}}{u_2^{q_1+\beta}u_3^\gamma(u_3^{r_1}+c)} - \beta\dfrac{u_1^{p_2+\alpha}}{u_2^{q_2+\beta+1}u_3^{r_2+\gamma}} - \gamma\dfrac{u_1^{p_3+\alpha}}{u_2^{q_3+\beta}u_3^{r_3+\gamma+1}} + \sigma\alpha\dfrac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma} \end{pmatrix} d\Omega
\end{aligned}
$$

$$= I + J$$

telle que

$$\begin{aligned}
I &= a_1\alpha\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma}\Delta u_1 d\Omega - a_2\beta\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1} u_3^\gamma}\Delta u_2 d\Omega - a_3\gamma\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha}}{u_2^\beta u_3^{\gamma+1}}\Delta u_3 d\Omega, \\
J &= -\mu_1\alpha\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha}}{u_2^\beta u_3^\gamma} d\Omega + \mu_2\beta\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha}}{u_2^\beta u_3^\gamma} d\Omega + \mu_3\gamma\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha}}{u_2^\beta u_3^\gamma} d\Omega \\
&\quad +\alpha\int_\Omega \frac{u_1^{p_1+\alpha-1}}{u_2^{q_1+\beta} u_3^\gamma (u_3^{r_1}+c)} d\Omega - \beta\int_\Omega \frac{u_1^{p_2+\alpha}}{u_2^{q_2+\beta+1} u_3^{r_2+\gamma}} d\Omega - \gamma\int_\Omega \frac{u_1^{p_3+\alpha}}{u_2^{q_3+\beta} u_3^{r_3+\gamma+1}} d\Omega + \sigma\alpha\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma} d\Omega,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
I &= a_1\alpha\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma}\Delta u_1 d\Omega - a_2\beta\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1} u_3^\gamma}\Delta u_2 d\Omega - a_3\gamma\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha}}{u_2^\beta u_3^{\gamma+1}}\Delta u_3 d\Omega, \\
J &= (-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma)\, w(t) \\
&\quad +\alpha\int_\Omega \frac{u_1^{p_1+\alpha-1}}{u_2^{q_1+\beta} u_3^\gamma (u_3^{r_1}+c)} d\Omega - \beta\int_\Omega \frac{u_1^{p_2+\alpha}}{u_2^{q_2+\beta+1} u_3^{r_2+\gamma}} d\Omega - \gamma\int_\Omega \frac{u_1^{p_3+\alpha}}{u_2^{q_3+\beta} u_3^{r_3+\gamma+1}} d\Omega + \sigma\alpha\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma} d\Omega.
\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green, tenant compte les conditions aux bords de Neumann, on a

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma}\Delta u_1 d\Omega = -\int_\Omega \nabla\left(\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma}\right)\nabla(u_1)\, d\Omega \\
&= -\int_\Omega \nabla(u_1)\frac{1}{u_2^{2\beta}u_3^{2\gamma}}\begin{pmatrix} (\alpha-1)\,u_1^{\alpha-2}u_2^\beta u_3^\gamma \nabla(u_1) \\ -\left(\beta u_2^{\beta-1}u_3^\gamma\nabla(u_2) + \gamma u_2^\beta u_3^{\gamma-1}\nabla(u_3)\right)\left(u_1^{\alpha-1}\right)\end{pmatrix} d\Omega \\
&= -\int_\Omega \begin{pmatrix} (\alpha-1)\dfrac{u_1^{\alpha-2}}{u_2^\beta u_3^\gamma}\left|\nabla u_1\right|^2 - \beta\dfrac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta+1}u_3^\gamma}\nabla(u_1)\nabla(u_2) \\ -\gamma\dfrac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^{\gamma+1}}\nabla(u_1)\nabla(u_3)\end{pmatrix} d\Omega
\end{aligned}$$

donc

$$\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^\gamma}\Delta u_1 d\Omega = -\int_\Omega \begin{pmatrix} (\alpha-1)\dfrac{u_1^{\alpha-2}}{u_2^\beta u_3^\gamma}\left|\nabla u_1\right|^2 - \beta\dfrac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta+1}u_3^\gamma}\nabla(u_1)\nabla(u_2) \\ -\gamma\dfrac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^\beta u_3^{\gamma+1}}\nabla(u_1)\nabla(u_3)\end{pmatrix} d\Omega.$$

$$\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma}}\Delta u_2 d\Omega=-\int\limits_{\Omega}\nabla\left(u_2\right)\nabla\left(\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma}}\right)d\Omega$$

$$\begin{aligned}
&= -\int\limits_{\Omega}\nabla\left(u_2\right)\frac{1}{u_2^{2\beta+2}u_3^{2\gamma}}\left(\alpha u_1^{\alpha-1}u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma}\nabla\left(u_1\right)-\left(\begin{array}{c}\left(\beta+1\right)u_2^{\beta}u_3^{\gamma}\nabla\left(u_2\right)\\ +\gamma u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma-1}\nabla\left(u_3\right)\end{array}\right)u_1^{\alpha}\right)d\Omega\\
&= -\int\limits_{\Omega}\left(\begin{array}{c}\alpha\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma}}\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_2\right)-\left(\beta+1\right)\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+2}u_3^{\gamma}}\left|\nabla u_2\right|^2\\ -\gamma\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_2\right)\nabla\left(u_3\right)\end{array}\right)d\Omega
\end{aligned}$$

donc

$$\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma}}\Delta u_2 d\Omega=-\int\limits_{\Omega}\left(\begin{array}{c}\alpha\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma}}\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_2\right)-\left(\beta+1\right)\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+2}u_3^{\gamma}}\left|\nabla u_2\right|^2\\ -\gamma\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_2\right)\nabla\left(u_3\right)\end{array}\right)d\Omega.$$

$$\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+1}}\Delta u_3 d\Omega=-\int\limits_{\Omega}\nabla\left(u_3\right)\nabla\left(\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+1}}\right)d\Omega$$

$$\begin{aligned}
&= -\int\limits_{\Omega}\nabla\left(u_3\right)\frac{1}{u_2^{2\beta}u_3^{2\gamma+2}}\left(\begin{array}{c}\alpha u_1^{\alpha-1}u_2^{\beta}u_3^{\gamma+1}\nabla\left(u_1\right)\\ -\left(\nabla\left(u_2^{\beta}\right)u_3^{\gamma+1}+\nabla\left(u_3^{\gamma+1}\right)u_2^{\beta}\right)u_1^{\alpha}\end{array}\right)d\Omega\\
&= -\int\limits_{\Omega}\left(\begin{array}{c}\alpha\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_3\right)-\beta\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_2\right)\nabla\left(u_3\right)\\ -\left(\gamma+1\right)\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+2}}\left|\nabla u_3\right|^2\end{array}\right)d\Omega
\end{aligned}$$

donc

$$\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+1}}\Delta u_3 d\Omega=-\int\limits_{\Omega}\left(\begin{array}{c}\alpha\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_3\right)-\beta\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_2\right)\nabla\left(u_3\right)\\ -\left(\gamma+1\right)\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+2}}\left|\nabla u_3\right|^2\end{array}\right)d\Omega.$$

Alors on obtient

$$
\begin{aligned}
I \;=\; & -a_1\alpha\int\limits_{\Omega}\left((\alpha-1)\frac{u_1^{\alpha-2}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma}}\left|\nabla u_1\right|^2-\beta\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma}}\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_2\right)-\gamma\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_3\right)\right)d\Omega \\
& +a_2\beta\int\limits_{\Omega}\left(\alpha\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma}}\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_2\right)-(\beta+1)\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+2}u_3^{\gamma}}\left|\nabla u_2\right|^2-\gamma\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_2\right)\nabla\left(u_3\right)\right)d\Omega \\
& +a_3\gamma\int\limits_{\Omega}\left(\alpha\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_3\right)-\beta\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_2\right)\nabla\left(u_3\right)-(\gamma+1)\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+2}}\left|\nabla u_3\right|^2\right)d\Omega
\end{aligned}
$$

$$
=\int\limits_{\Omega}\left(\begin{array}{c}
-a_1\alpha(\alpha-1)\frac{u_1^{\alpha-2}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma}}\left|\nabla u_1\right|^2+\alpha\beta\left(a_1+a_2\right)\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma}}\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_2\right) \\
+\alpha\gamma\left(a_1+a_3\right)\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_3\right) \\
-a_2\beta(\beta+1)\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+2}u_3^{\gamma}}\left|\nabla u_2\right|^2-\gamma\beta\left(a_2+a_3\right)\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta+1}u_3^{\gamma+1}}\nabla\left(u_2\right)\nabla\left(u_3\right) \\
-a_3\gamma(\gamma+1)\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma+2}}\left|\nabla u_3\right|^2
\end{array}\right)d\Omega
$$

$$
=\int\limits_{\Omega}\left(\begin{array}{c}
-a_1\alpha(\alpha-1)u_2^2u_3^2\left|\nabla u_1\right|^2+\alpha\beta\left(a_1+a_2\right)u_2u_1u_3^2\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_2\right) \\
+\alpha\gamma\left(a_1+a_3\right)u_2^2u_1u_3\nabla\left(u_1\right)\nabla\left(u_3\right)-a_2\beta(\beta+1)u_1^2u_3^2\left|\nabla u_2\right|^2 \\
-\gamma\beta\left(a_2+a_3\right)u_2u_1^2u_3\nabla\left(u_2\right)\nabla\left(u_3\right) \\
-a_3\gamma(\gamma+1)u_1^2u_2^2\left|\nabla u_3\right|^2
\end{array}\right)\frac{u_1^{\alpha-2}}{u_2^{\beta+2}u_3^{\gamma+2}}d\Omega
$$

$$
=\int\limits_{\Omega}\left(\begin{array}{c}
-a_1\alpha(\alpha-1)\left[u_2u_3\left|\nabla u_1\right|\right]^2+\alpha\beta\left(a_1+a_2\right)\left[u_2u_3\nabla\left(u_1\right)\right]\left[u_1u_3\nabla\left(u_2\right)\right] \\
+\alpha\gamma\left(a_1+a_3\right)\left[u_2u_3\nabla\left(u_1\right)\right]\left[u_1u_2\nabla\left(u_3\right)\right]-a_2\beta(\beta+1)\left[u_1u_3\left|\nabla u_2\right|\right]^2 \\
-\gamma\beta\left(a_2+a_3\right)\left[u_1u_3\nabla\left(u_2\right)\right]\left[u_1u_2\nabla\left(u_3\right)\right] \\
-a_3\gamma(\gamma+1)\left[u_1u_2\left|\nabla u_3\right|\right]^2
\end{array}\right)\frac{u_1^{\alpha-2}}{u_2^{\beta+2}u_3^{\gamma+2}}d\Omega,
$$

$$
=-\int\limits_{\Omega}Q\frac{u_1^{\alpha-2}}{u_2^{\beta+2}u_3^{\gamma+2}}d\Omega,
$$

où

$$Q=\left(\begin{array}{c} a_1\alpha(\alpha-1)\left[u_2u_3\left|\nabla u_1\right|\right]^2-\alpha\beta(a_1+a_2)\left[u_2u_3\nabla(u_1)\right]\left[u_1u_3\nabla(u_2)\right] \\ -\alpha\gamma(a_1+a_3)\left[u_2u_3\nabla(u_1)\right]\left[u_1u_2\nabla(u_3)\right]+a_2\beta(\beta+1)\left[u_1u_3\left|\nabla u_2\right|\right]^2 \\ +\gamma\beta(a_2+a_3)\left[u_1u_3\nabla(u_2)\right]\left[u_1u_2\nabla(u_3)\right] \\ +a_3\gamma(\gamma+1)\left[u_1u_2\left|\nabla u_3\right|\right]^2 \end{array}\right)$$

Q est une forme quadratique par rapport à: $u_2u_3\nabla u_1$, $u_1u_3\nabla(u_2)$ et $u_1u_2\nabla(u_3)$, qui s'écrive sous la forme matricielle:

$$Q=\left(\begin{pmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & a_2\beta(\beta+1) & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} \\ -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} & a_3\gamma(\gamma+1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_2u_3\nabla(u_1) \\ u_1u_3\nabla(u_2) \\ u_1u_2\nabla(u_3) \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} u_2u_3\nabla(u_1) \\ u_1u_3\nabla(u_2) \\ u_1u_2\nabla(u_3) \end{pmatrix}$$

Q est définie non négative *si, et seulement si, tous les déterminants principaux de sa matrice des coefficients, sont non négative:*

$\begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & a_2\beta(\beta+1) \end{vmatrix}\geq 0$,si, et seulement si,

$$\frac{(\alpha-1)}{\alpha}\frac{(\beta+1)}{\beta}\geq\left(\frac{a_1+a_2}{2\sqrt{a_1a_2}}\right)^2, \tag{4.1.8}$$

$\begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} \\ -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} & a_3\gamma(\gamma+1) \end{vmatrix}\geq 0$,si, et seulement si,

$$\frac{(\alpha-1)}{\alpha}\frac{(\gamma+1)}{\gamma}\geq\left(\frac{a_1+a_3}{2\sqrt{a_1a_3}}\right)^2, \tag{4.1.9}$$

$\begin{vmatrix} a_2\beta(\beta+1) & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} \\ \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} & a_3\gamma(\gamma+1) \end{vmatrix}\geq 0$,si, et seulement si,

$$\frac{(\beta+1)}{\beta}\frac{(\gamma+1)}{\gamma}\geq\left(\frac{a_2+a_3}{2\sqrt{a_2a_3}}\right)^2, \tag{4.1.10}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & a_2\beta(\beta+1) & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} \\ -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} & a_3\gamma(\gamma+1) \end{vmatrix}$$

$$
= \frac{1}{a_1\alpha(\alpha-1)} \left\| \begin{matrix} \begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & a_2\beta(\beta+1) \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} \\ -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\beta\frac{a_1+a_2}{2} \\ -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} & \beta\gamma\frac{a_2+a_3}{2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1\alpha(\alpha-1) & -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} \\ -\alpha\gamma\frac{a_1+a_3}{2} & a_3\gamma(\gamma+1) \end{vmatrix} \end{matrix} \right\|
$$

$$
= \frac{\alpha^2\beta\gamma}{a_1\alpha(\alpha-1)} \left(\begin{array}{c} \left(a_1a_2(\alpha-1)(\beta+1) - \alpha\beta\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\right)\left(a_1a_3(\alpha-1)(\gamma+1) - \alpha\gamma\left(\frac{a_1+a_3}{2}\right)^2\right) \\ -\beta\gamma\left(a_1(\alpha-1)\frac{a_2+a_3}{2} - \alpha\left(\frac{a_1+a_3}{2}\right)\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\right)^2 \end{array} \right)
$$

$\Delta \geq 0$,si, et seulement si,

$$
\begin{aligned}
\frac{(\alpha-1)}{\alpha}\frac{(\beta+1)}{\beta}\frac{(\gamma+1)}{\gamma} &> \frac{(\alpha-1)}{\alpha}\left(\frac{a_2+a_3}{2\sqrt{a_2a_3}}\right)^2 + \frac{(\beta+1)}{\beta}\left(\frac{a_1+a_3}{2\sqrt{a_1a_3}}\right)^2 \\
&\quad + \frac{(\gamma+1)}{\gamma}\left(\frac{a_1+a_2}{2\sqrt{a_1a_2}}\right)^2 \\
&\quad - 2\left(\frac{a_2+a_3}{2\sqrt{a_2a_3}}\right)\left(\frac{a_1+a_3}{2\sqrt{a_1a_3}}\right)\left(\frac{a_1+a_2}{2\sqrt{a_1a_2}}\right) \qquad (4.1.11)
\end{aligned}
$$

Estimation de J

$$
\begin{aligned}
J &= (-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma)\, w(t) \\
&\quad + \alpha\int_\Omega \frac{u_1^{p_1+\alpha-1}}{u_2^{q_1+\beta}u_3^{\gamma}(u_3^{r_1}+c)}d\Omega - \beta\int_\Omega \frac{u_1^{p_2+\alpha}}{u_2^{q_2+\beta+1}u_3^{r_2+\gamma}}d\Omega - \gamma\int_\Omega \frac{u_1^{p_3+\alpha}}{u_2^{q_3+\beta}u_3^{r_3+\gamma+1}}d\Omega + \sigma\alpha\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma}}d\Omega
\end{aligned}
$$

D'après le principe de maximum il existe C_0 qui dépend de ξ_1, ξ_2 et de ξ_3 telle que $u_2, u_3 \geq C_0 > 0$, donc on a

$$
\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma}} = \left(\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma}}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\frac{1}{u_2}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \left(\frac{1}{u_3}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}} \leq \left(\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma}}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}}
$$

donc

$$
\frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma}} \leq C_3\left(\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma}}\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}, \qquad \text{où } C_3 = \left(\frac{1}{C_0}\right)^{\frac{\beta+\gamma}{\alpha}}.
$$

On a

$$
\begin{aligned}
J &= (-\mu_1\alpha + \mu_2\beta + \mu_3\gamma)\, w(t) \\
&\quad + \alpha\int_\Omega \frac{u_1^{p_1+\alpha-1}}{u_2^{q_1+\beta}u_3^{\gamma}(u_3^{r_1}+c)}d\Omega - \beta\int_\Omega \frac{u_1^{p_2+\alpha}}{u_2^{q_2+\beta+1}u_3^{r_2+\gamma}}d\Omega - \gamma\int_\Omega \frac{u_1^{p_3+\alpha}}{u_2^{q_3+\beta}u_3^{r_3+\gamma+1}}d\Omega + \sigma\alpha\int_\Omega \frac{u_1^{\alpha-1}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma}}d\Omega
\end{aligned}
$$

en appliquant lemme 4.1.1 on obtient

$$\alpha \frac{u_1^{p_1+\alpha-1}}{u_2^{q_1+\beta} u_3^{\gamma}(u_3^{r_1}+c)} \leq \alpha \frac{u_1^{p_1+\alpha-1}}{u_2^{q_1+\beta} u_3^{\gamma+r_1}} \leq \beta \frac{u_1^{p_2+\alpha}}{u_2^{q_2+\beta+1} u_3^{r_2+\gamma}} + C\left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)^{\theta},$$

donc

$$\begin{aligned} J \leq & \left(-\mu_1\alpha+\mu_2\beta+\mu_3\gamma\right) w(t) + \beta \int_{\Omega} \frac{u_1^{p_2+\alpha}}{u_2^{q_2+\beta+1} u_3^{r_2+\gamma}} d\Omega + \int_{\Omega} C\left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)^{\theta} d\Omega \\ & + \alpha\sigma \int_{\Omega} C_3 \left(\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma}}\right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}} d\Omega - \beta \int_{\Omega} \frac{u_1^{p_2+\alpha}}{u_2^{q_2+\beta+1} u_3^{r_2+\gamma}} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \frac{u_1^{p_3+\alpha}}{u_2^{q_3+\beta} u_3^{r_3+\gamma+1}} d\Omega, \end{aligned}$$

alors

$$J \leq \left(-\mu_1\alpha+\mu_2\beta+\mu_3\gamma\right) w(t) + \int_{\Omega} C\left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)^{\theta} d\Omega + \alpha\sigma \int_{\Omega} C_3 \left(\frac{u_1^{\alpha}}{u_2^{\beta}u_3^{\gamma}}\right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}} d\Omega,$$

d'après l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\int_{\Omega} C\left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)^{\theta} d\Omega \leq \left(\int_{\Omega} \left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right) d\Omega\right)^{\theta} \left(\int_{\Omega} (C)^{\frac{1}{1-\theta}} d\Omega\right)^{1-\theta},$$

donc

$$\int_{\Omega} C\left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)^{\theta} d\Omega \leq C_4 \left(w(t)\right)^{\theta}, \qquad \text{où } C_4 = C\left|\Omega\right|^{1-\theta}.$$

On a

$$\int_{\Omega} C_3 \left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}} d\Omega \leq \left(\int_{\Omega} \left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right) d\Omega\right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}} \left(\int_{\Omega} (C_3)^{\alpha} d\Omega\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

alors

$$\int_{\Omega} C_3 \left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}w^{\gamma}}\right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}} d\Omega \leq C_5 \left(w(t)\right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}}, \qquad \text{où } C_5 = C_3\left|\Omega\right|^{\frac{1}{\alpha}},$$

alors on obtient

$$J \leq \left(-\mu_1\alpha+\mu_2\beta+\mu_3\gamma\right) w(t) + C_4\left(w(t)\right)^{\theta} + \alpha\sigma C_5 \left(w(t)\right)^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}},$$

ce qui donne

$$J \leq (-\mu_1 \alpha + \mu_2 \beta + \mu_3 \gamma)\, w(t) + C_6 \left((w(t))^{\theta} + \alpha\sigma\, (w(t))^{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}} \right).$$

Sous les conditions (4.1.8), (4.1.9), (4.1.10) et (4.1.11) on a: $\dfrac{d}{dt}(w(t)) \leq J$. Et supposons $-\mu_1 \alpha + \mu_2 \beta + \mu_3 \gamma < 0$, alors on aura

$$w'(t) \leq C_6 w^{\theta}(t) + C_6 \alpha\sigma w^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(t). \tag{4.1.12}$$

Par une intégration simple de (4.1.12) dans $[0, T^*]$ on obtient que la fonctionnelle $w(t)$ est uniformement bornée; $w(t) \leq \gamma_3$ (où γ_3 dépend de ξ_1, ξ_2 et de ξ_3). ■

Preuve de proposition (4.1.1). Par une application directe du théorème (2.4.1), en utilisant le théorème (4.1.1), on déduit que la solution (u_1, u_2, u_3) du problème (4.1.1) est bornée et globale en temps. ■

4.1.2 Application

En biologie végétale, le développement d'une plante passe par une chaine d'étapes de formation des patterns, parmi ces étapes, la disposition des palmes sur le stipe (la tige) de la plante qu'on appelle en biologie: *La Phyllotaxie.* Meinhardt, Koch et Bernasconi ont fait des études dans ce domaine (*Phyllotaxie*) et ont propose des modèles mathématiques (voir Meinhardt [39]). Nous choisissons le modèle suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = D_a \dfrac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \mu_a a + \dfrac{a^2}{h(s+k_a)} + \sigma_a, \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = D_h \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \mu_h h + a^2, \\ \dfrac{\partial s}{\partial t} = D_s \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \mu_s s + a, \end{cases}$$

qui est un cas spéciale du système (4.1.1) et qui réalise les conditions de l'existence globale des solutions en temps.

4.2 Existence globale des solutions d'un système de type Gierer-Meinhardt (modifié) à quatre équations

Considérons le système de Réaction-Diffusion à réaction fractionnaire de type Gierer-Meinhardt modifié (par la modification de Conway-Cooper, où on ajoute la différence: $[a(u_1 - u_2 + b)]$ à la troisième équation) à quatre équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = a_1 \Delta u_1 - \mu u_1 + b_1 \dfrac{u_1^{p_1}}{u_2^{q_1}} + \sigma, & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = a_2 \Delta u_2 - \nu u_2 + b_2 \dfrac{u_1^{r_1}}{u_2^{s_1}}, & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} = a_3 \Delta u_3 - \mu u_3 + b_3 \dfrac{u_3^{p_2}}{u_4^{q_2}} + \sigma + a(u_1 - u_2 + b), & x \in \Omega, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_4}{\partial t} = a_4 \Delta u_4 - \nu u_4 + b_4 \dfrac{u_1^{r_2}}{u_2^{s_2}}, & x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \tag{4.2.13}$$

avec les conditions aux bords de Neumann

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = 0,\ \frac{\partial u_3}{\partial \eta} = 0 \text{ et } \frac{\partial u_4}{\partial \eta} = 0, \qquad x \in \Gamma, t > 0,$$

et les conditions initiales

$$\begin{aligned} u_1(x,0) &= \varphi_1(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u_2(x,0) &= \varphi_2(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u_3(x,0) &= \varphi_3(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u_4(x,0) &= \varphi_4(x) > 0, & x \in \Omega, \end{aligned}$$

où:

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine borné de frontière Γ régulière.

Les constantes de diffusions: a_1, a_2, a_3 et a_4 sont supposées positives.

μ,ν et σ sont des constantes positives,

p_1, p_2, q_1, q_2, r_1, r_2, s_1 et s_2: des indices non négatives avec $p_1 > 1$, $p_2 > 1$.

b_1, b_2, b_3, et b_4 des constantes positives telles que $b_1 \leq b_2$ et $b_3 \leq b_4$.

4.2.1 Etude de l'existence globale

On va démontrer que si:

$$r_1 > p_1 - 1,\ r_2 > p_2 - 1,\ r_1 q_1 > (p_1 - 1)(s_1 + 1) \text{ et } r_2 q_2 > (p_2 - 1)(s_2 + 1),$$

le problème (4.2.13) admet des solutions bornées en tout le temps pour des valeurs initiales arbitraires.

Lemme 4.2.1 *(Même lemme (3.3.1)) Soit* p, q, r *et* s *des constantes telles que,* $r > p - 1$ *et* $rq > (p-1)(s+1)$. *Pour toute* h, α, $\beta > 0$, *il existe* $c = c(h, \alpha, \beta) > 0$ *et* $\theta = \theta(\alpha) \in (0,1)$, *telles que,*

$$\alpha \frac{u^{p-1+\alpha}}{v^{q+\beta}} \leq \beta \frac{u^{r+\alpha}}{v^{s+1+\beta}} + c\left(\frac{u^{\alpha}}{v^{\beta}}\right)^{\theta}, \qquad u \geq 0, v \geq h.$$

Théorème 4.2.1 *Soit la fonctionnelle*

$$\omega(t) = \int_{\Omega} \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}} d\Omega.$$

associée au système (4.2.13) avec $\alpha_1, \alpha_2 > 1$ *et* $\beta_1, \beta_2 > 0$, *alors pour* $\frac{p_1-1}{r_1} < \min\left(\frac{q_1}{s_1+1}, 1\right)$, $\frac{p_2-1}{r_2} < \min\left(\frac{q_2}{s_2+1}, 1\right)$ *et pour toute* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *et* $\varphi_4 \in C(\overline{\Omega})$ *avec* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *et* $\varphi_4 > 0$, $\omega(t)$ *est uniformement bornée dans l'intervalle* $[0, T^*]$, $T^* < T^{\max}$.

Proposition 4.2.1 *Sous les assomptions du théorème (4.2.1), la solution* (u_1, u_2, u_3, u_4) *du problème (4.2.13) est bornée et globale dans l'intervalle de temps* $(0, \infty)$.

Preuve de théorème (4.2.1).

$$\omega(t) = \int_{\Omega} \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}} d\Omega = \omega_1(t) + \omega_2(t),$$

où

$$\omega_1(t) = \int_{\Omega} \frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} d\Omega \text{ et } \omega_2(t) = \int_{\Omega} \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}} d\Omega.$$

Dérivons $\omega(t)$ par rapport à t, on obtient

$$\frac{d}{dt}(\omega(t)) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right) d\Omega = I + J,$$

où

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right) d\Omega, \\ J &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right) d\Omega. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right) d\Omega = \int_\Omega \frac{1}{u_2^{2\beta_1}}\left(\alpha_1 u_1^{\alpha_1-1}u_2^{\beta_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) - \beta_1 u_1^{\alpha_1}u_2^{\beta_1-1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\right) d\Omega, \\ &= \int_\Omega \left(\alpha_1 \frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\left(a_1\Delta u_1 - \mu u_1 + b_1\frac{u_1^{p_1}}{u_2^{q_1}} + \sigma\right) - \beta_1\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\left(a_2\Delta u_2 - \nu u_2 + b_2\frac{u_1^{r_1}}{u_2^{s_1}}\right)\right) d\Omega, \\ &= \int_\Omega \left(\begin{array}{c} \alpha_1 a_1\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\Delta u_1 - \beta_1 a_2\dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\Delta u_2 + (\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} + b_1\alpha_1\dfrac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}} \\ +\alpha_1\sigma\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega - b_2\beta_1\dfrac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}} \end{array}\right) d\Omega. \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green pour les termes en Laplacien, on a

$$\int_\Omega \alpha_1 a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\Delta u_1 d\Omega = -\alpha_1 a_1\int_\Omega \nabla\left(\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\right)\nabla u_1 d\Omega + \alpha_1 a_1\int_\Gamma \left(\frac{\partial u_1}{\partial \eta}\right)\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} d\Gamma,$$

et comme $\dfrac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0$ (condition de Neumann), alors

$$\begin{aligned} \int_\Omega \alpha_1 a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\Delta u_1 d\Omega &= -\alpha_1 a_1\int_\Omega \nabla\left(\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\right)\nabla u_1 d\Omega, \\ &= -\alpha_1 a_1\int_\Omega \frac{1}{u_2^{2\beta_1}}\left((\alpha_1-1)\,u_1^{\alpha_1-2}u_2^{\beta_1}\nabla u_1 - \beta_1 u_1^{\alpha_1-1}u_2^{\beta_1-1}\nabla u_2\right)\nabla u_1 d\Omega, \end{aligned}$$

donc

$$\int_\Omega \alpha_1 a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\Delta u_1 d\Omega = \int_\Omega \left(-\alpha_1(\alpha_1-1)\,a_1\frac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}}\left|\nabla u_1\right|^2 + \alpha_1\beta_1 a_1\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}}\nabla u_1\nabla u_2\right) d\Omega.$$

Pour le terme $\displaystyle\int_\Omega \left(\beta_1 a_2\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\Delta u_2\right) d\Omega$, on trouve

$$\int_\Omega \left(\beta_1 a_2\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+1}}\Delta u_2\right) d\Omega = \int_\Omega \left(-\alpha_1\beta_1 a_2\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}}\nabla u_1\nabla u_2 + \beta_1(\beta_1+1)\,a_2\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}}\left|\nabla u_2\right|^2\right) d\Omega.$$

Alors on obtient

$$I=\int\limits_{\Omega}\left(\begin{array}{c}-\alpha_1\left(\alpha_1-1\right)a_1\dfrac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}}\left|\nabla u_1\right|^2+\alpha_1\beta_1\left(a_1+a_2\right)\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}}\nabla u_1\nabla u_2\\ -\beta_1\left(\beta_1+1\right)a_2\dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}}\left|\nabla u_2\right|^2+\left(\beta_1\nu-\alpha_1\mu\right)\dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\\ +b_1\alpha_1\dfrac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}}-b_2\beta_1\dfrac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}}+\alpha_1\sigma\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\end{array}\right)d\Omega.$$

$$\begin{aligned}J&=\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)d\Omega=\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_4^{2\beta_2}}\left(\alpha_2u_3^{\alpha_2-1}u_4^{\beta_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)-\beta_2u_3^{\alpha_2}u_4^{\beta_2-1}\left(\frac{\partial u_4}{\partial t}\right)\right)d\Omega,\\ &=\int\limits_{\Omega}\left(\begin{array}{c}\alpha_2\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\left(a_3\Delta u_3-\mu u_3+b_3\dfrac{u_3^{p_2}}{u_4^{q_2}}+\sigma+a(u_1-u_2+b)\right)\\ -\beta_2\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+1}}\left(a_4\Delta u_4-\nu u_4+b_4\dfrac{u_3^{r_2}}{u_4^{s_2}}\right)\end{array}\right)d\Omega,\\ &=\int\limits_{\Omega}\left(\begin{array}{c}\alpha_2a_3\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\Delta u_3-\beta_2a_4\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+1}}\Delta u_4+\left(\beta_2\nu-\alpha_2\mu\right)\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}+b_3\alpha_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}}\\ +\alpha_2\sigma\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}+\alpha_2a(u_1-u_2+b)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}-b_4\beta_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}\end{array}\right)d\Omega,\end{aligned}$$

Utilisons la formule de Green pour les termes en Laplacien,

$$\int\limits_{\Omega}\left(\alpha_2a_3\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\Delta u_3\right)d\Omega=-\alpha_2a_3\int\limits_{\Omega}\nabla\left(\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\right)\nabla u_3d\Omega+\alpha_2a_3\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\partial u_3}{\partial\eta}\right)\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Gamma,$$

et comme $\dfrac{\partial u_3}{\partial \eta}=0$ (condition de Neumann), alors

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega}\left(\alpha_2a_3\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\Delta u_3\right)d\Omega&=-\alpha_2a_3\int\limits_{\Omega}\nabla\left(\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\right)\nabla u_3d\Omega,\\ &=-\alpha_2a_3\int\limits_{\Omega}\frac{1}{u_4^{2\beta_2}}\left(\left(\alpha_2-1\right)u_3^{\alpha_2-2}u_4^{\beta_2}\nabla u_3-\beta_2u_3^{\alpha_2-1}u_4^{\beta_2-1}\nabla u_4\right)\nabla u_3d\Omega,\\ &=\int\limits_{\Omega}\left(-\alpha_2\left(\alpha_2-1\right)a_3\frac{u_3^{\alpha_2-2}}{u_4^{\beta_2}}\left|\nabla u_3\right|^2+\alpha_2\beta_2a_3\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2+1}}\nabla u_3\nabla u_4\right)d\Omega.\end{aligned}$$

Pour le terme $\int\limits_{\Omega}\left(\beta_2a_4\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+1}}\Delta u_4\right)d\Omega$, on trouve

$$\int\limits_{\Omega}\left(\beta_2a_4\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+1}}\Delta u_4\right)d\Omega=\int\limits_{\Omega}\left(-\beta_2\alpha_2a_4\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2+1}}\nabla u_3\nabla u_4+\beta_2\left(\beta_2+1\right)a_4\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+2}}\left|\nabla u_4\right|^2\right)d\Omega,$$

alors J devient

$$J=\int_{\Omega}\left(\begin{array}{c}-\alpha_2\left(\alpha_2-1\right)a_3\dfrac{u_3^{\alpha_2-2}}{u_4^{\beta_2}}\left|\nabla u_3\right|^2+\alpha_2\beta_2\left(a_3+a_4\right)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2+1}}\nabla u_3\nabla u_4\\ -\beta_2\left(\beta_2+1\right)a_4\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+2}}\left|\nabla u_4\right|^2+\left(\beta_2\nu-\alpha_2\mu\right)\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}+b_3\alpha_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}}+\alpha_2\sigma\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\\ +\alpha_2 a(u_1-u_2+b)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}-b_4\beta_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}\end{array}\right)d\Omega.$$

Donc $\dfrac{d}{dt}\left(\omega(t)\right)=I+J$ devient

$$\frac{d}{dt}\left(\omega(t)\right)=\int_{\Omega}\left(\begin{array}{c}-\alpha_1\left(\alpha_1-1\right)a_1\dfrac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}}\left|\nabla u_1\right|^2+\alpha_1\beta_1\left(a_1+a_2\right)\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}}\nabla u_1\nabla u_2\\ -\beta_1\left(\beta_1+1\right)a_2\dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}}\left|\nabla u_2\right|^2-\alpha_2\left(\alpha_2-1\right)a_3\dfrac{u_3^{\alpha_2-2}}{u_4^{\beta_2}}\left|\nabla u_3\right|^2\\ +\alpha_2\beta_2\left(a_3+a_4\right)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2+1}}\nabla u_3\nabla u_4-\beta_2\left(\beta_2+1\right)a_4\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+2}}\left|\nabla u_4\right|^2\\ +\left(\beta_1\nu-\alpha_1\mu\right)\dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}+b_1\alpha_1\dfrac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}}-b_2\beta_1\dfrac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}}+\alpha_1\sigma\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\\ +\left(\beta_2\nu-\alpha_2\mu\right)\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}+b_3\alpha_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}}+\alpha_2\sigma\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}\\ +\alpha_2 a(u_1-u_2+b)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}-b_4\beta_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}\end{array}\right)d\Omega$$

$$=I_1+I_2+J_1+J_2$$

telle que

$$I_1=\int_{\Omega}\left(\begin{array}{c}-\alpha_1\left(\alpha_1-1\right)a_1\dfrac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}}\left|\nabla u_1\right|^2+\alpha_1\beta_1\left(a_1+a_2\right)\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}}\nabla u_1\nabla u_2\\ -\beta_1\left(\beta_1+1\right)a_2\dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}}\left|\nabla u_2\right|^2\end{array}\right)d\Omega,$$

$$I_2=\int_{\Omega}\left(\begin{array}{c}-\alpha_2\left(\alpha_2-1\right)a_3\dfrac{u_3^{\alpha_2-2}}{u_4^{\beta_2}}\left|\nabla u_3\right|^2+\alpha_2\beta_2\left(a_3+a_4\right)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2+1}}\nabla u_3\nabla u_4\\ -\beta_2\left(\beta_2+1\right)a_4\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2+2}}\left|\nabla u_4\right|^2\end{array}\right)d\Omega,$$

$$J_1=\int_{\Omega}\left(\left(\beta_1\nu-\alpha_1\mu\right)\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}+b_1\alpha_1\frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}}-b_2\beta_1\frac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}}+\alpha_1\sigma\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}\right)d\Omega,$$

$$J_2 = \int\limits_{\Omega} \left(\begin{array}{c} (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}} + b_3\alpha_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}} + \alpha_2\sigma\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} \\ +\alpha_2 a(u_1 - u_2 + b)\dfrac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} - b_4\beta_2\dfrac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}} \end{array} \right) d\Omega,$$

où $\dfrac{d}{dt}(\omega_1(t)) = I_1 + J_1$ et $\dfrac{d}{dt}(\omega_2(t)) = I_2 + J_2$.

Estimation de J_1

$$\begin{aligned} J_1 &= \int\limits_{\Omega} \left((\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}} + b_1\alpha_1\frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}} - b_2\beta_1\frac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}} + \alpha_1\sigma\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \right) d\Omega, \\ &= (\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega + b_1\alpha_1\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}}d\Omega - b_2\beta_1\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^{r_1+\alpha_1}}{u_2^{s_1+\beta_1+1}}d\Omega + \alpha_1\sigma\int\limits_{\Omega}\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega. \end{aligned}$$

D'après le principe de maximum il existe c_8 qui dépend de φ_1 et de φ_2 telle que $u_2 \geq c_8 > 0$, donc on a

$$\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} = \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{u_2}\right)^{\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}} \leq \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}} \left(\frac{1}{c_8}\right)^{\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}}$$

donc

$$\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1}} \leq c_9 \left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}, \qquad \text{où } c_9 = \left(\frac{1}{c_8}\right)^{\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}}, \tag{4.2.14}$$

en appliquant lemme (4.2.1) on obtient

$$\alpha_1\frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}} \leq \beta_1\frac{u_1^{\alpha_1+r_1}}{u_2^{\beta_1+s_1+1}} + c\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1},$$

alors

$$b_1\alpha_1\frac{u_1^{\alpha_1+p_1-1}}{u_2^{\beta_1+q_1}} \leq b_1\beta_1\frac{u_1^{\alpha_1+r_1}}{u_2^{\beta_1+s_1+1}}+b_1c\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1}$$

$$\leq b_2\beta_1\frac{u_1^{\alpha_1+r_1}}{u_2^{\beta_1+s_1+1}}+c_{10}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1} \qquad (4.2.15)$$

où $c_{10}=b_1c$.

Donc d'après (4.2.14) et (4.2.15), on obtient

$$\begin{aligned} J_1 \leq\ & (\beta_1\nu-\alpha_1\mu)\int_\Omega\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega+b_2\beta_1\int_\Omega\frac{u_1^{\alpha_1+r_1}}{u_2^{\beta_1+s_1+1}}d\Omega+\int_\Omega c_{10}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1}d\Omega \\ & +\alpha_1\sigma\int_\Omega c_9\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}d\Omega-b_2\beta_1\int_\Omega\frac{u_1^{\alpha_1+r_1}}{u_2^{\beta_1+s_1+1}}d\Omega, \end{aligned}$$

alors

$$J_1\leq(\beta_1\nu-\alpha_1\mu)\int_\Omega\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}d\Omega+\int_\Omega c_{10}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1}d\Omega+\alpha_1\sigma\int_\Omega c_9\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}d\Omega,$$

d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\int_\Omega c_{10}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1}d\Omega\leq\left(\int_\Omega\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)d\Omega\right)^{\theta_1}\left(\int_\Omega(c_{10})^{\frac{1}{1-\theta}}d\Omega\right)^{1-\theta_1},$$

donc

$$\int_\Omega c_{10}\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\theta_1}d\Omega\leq c_{11}\left(\omega_1(t)\right)^{\theta_1}, \qquad \text{où } c_{11}=c_{10}\left|\Omega\right|^{1-\theta_1}.$$

On a

$$\int_\Omega c_9\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}d\Omega\leq\left(\int_\Omega\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)d\Omega\right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}\left(\int_\Omega(c_9)^{\alpha_1}d\Omega\right)^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

alors

$$\int_\Omega c_9\left(\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1}}\right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}d\Omega\leq c_{12}\left(\omega_1(t)\right)^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}, \qquad \text{où } c_{12}=c_9\left|\Omega\right|^{\frac{1}{\alpha_1}},$$

alors on obtient

$$J_1 \leq (\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\,\omega_1(t) + c_{11}\,(\omega_1(t))^{\theta_1} + \alpha_1\sigma c_{12}\,(\omega_1(t))^{\dfrac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}},$$

ce qui donne

$$J_1 \leq (3\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\,\omega_1(t) + c_{13}\left((\omega_1(t))^{\theta_1} + \alpha_1\sigma\,(\omega_1(t))^{\dfrac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}}\right).$$

Estimation de J_2

On a

$$\begin{aligned} J_2 &= (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega + b_3\alpha_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}}d\Omega + \alpha_2\sigma\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega \\ &\quad +\alpha_2 a\int_\Omega (u_1 - u_2 + b)\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega - b_4\beta_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}d\Omega, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} J_2 &\leq (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega + b_3\alpha_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}}d\Omega + \alpha_2\sigma\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega + \\ &\quad \alpha_2 a\int_\Omega (u_1 + b)\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega - b_4\beta_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}d\Omega, \end{aligned}$$

et comme nous avons montré dans le chapitre précédent que les solutions du système composé de deux premières équations du système (4.2.13), existent globalement et bornées ($\exists H > 0$, telle que $u_1, u_2 \leq H$), donc on peut écrir

$$\begin{aligned} J_2 &\leq (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega + b_3\alpha_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}}d\Omega + \alpha_2\sigma\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega + \\ &\quad \alpha_2 a(H + b)\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega - b_4\beta_2\int_\Omega \frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}d\Omega. \end{aligned}$$

D'après le principe de maximum il existe c_{14} qui dépend de φ_1, φ_2, φ_3 et de φ_4 telle que $u_4 \geq c_{14} > 0$, donc on a

$$\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} = \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\dfrac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{u_4}\right)^{\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}} \leq \left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\dfrac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}}\left(\frac{1}{c_{14}}\right)^{\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}}$$

donc

$$\frac{u_3^{\alpha_2-1}}{u_4^{\beta_2}} \leq c_{15}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}, \qquad \text{où } c_{15}=\left(\frac{1}{c_{14}}\right)^{\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}}.$$

D'après lemme (4.2.1)

$$\alpha_2\frac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}} \leq \beta_2\frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}+c\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2},$$

alors

$$\begin{aligned} b_3\alpha_2\frac{u_3^{\alpha_2+p_2-1}}{u_4^{\beta_2+q_2}} &\leq b_3\beta_2\frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}+b_3c\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2}, \\ &\leq b_4\beta_2\frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}+c_{16}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2}, \end{aligned}$$

où $c_{16}=b_3c$.

Donc

$$\begin{aligned} J_2 &\leq (\beta_2\nu-\alpha_2\mu)\int_\Omega\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega+b_4\beta_2\int_\Omega\frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}d\Omega+\int_\Omega c_{16}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2}d\Omega \\ &\quad+\alpha_2\left(\sigma+a(H+b)\right)\int_\Omega c_{15}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}d\Omega-b_4\beta_2\int_\Omega\frac{u_3^{\alpha_2+r_2}}{u_4^{\beta_2+s_2+1}}d\Omega, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} J_2 &\leq (\beta_2\nu-\alpha_2\mu)\int_\Omega\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}d\Omega+\int_\Omega c_{16}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2}d\Omega \\ &\quad+\alpha_2\left(\sigma+a(H+b)\right)\int_\Omega c_{15}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}d\Omega, \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Hölder on a

$$\int_\Omega c_{16}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2}d\Omega \leq \left(\int_\Omega\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)d\Omega\right)^{\theta_2}\left(\int_\Omega (c_{16})^{\frac{1}{1-\theta_2}}\,d\Omega\right)^{1-\theta_2},$$

donc

$$\int_{\Omega} c_{16}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\theta_2} d\Omega \leq c_{17}\left(\omega_2(t)\right)^{\theta_2}, \qquad \text{où } c_{17}=c_{16}\left|\Omega\right|^{1-\theta_2}.$$

On a

$$\int_{\Omega} c_{15}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}} d\Omega \leq \left(\int_{\Omega}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)d\Omega\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}\left(\int_{\Omega}\left(c_{15}\right)^{\alpha_2}d\Omega\right)^{\frac{1}{\alpha_2}},$$

alors

$$\int_{\Omega} c_{15}\left(\frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2}}\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}} d\Omega \leq c_{18}\left(\omega_2(t)\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}, \qquad \text{où } c_{18}=c_{15}\left|\Omega\right|^{\frac{1}{\alpha_2}},$$

alors on obtient

$$J_2 \leq \left(\beta_2\nu-\alpha_2\mu\right)\omega_2(t)+c_{17}\left(\omega_2(t)\right)^{\theta_2}+\alpha_2\left(\sigma+a(H+b)\right)c_{18}\left(\omega_2(t)\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}},$$

ce qui donne

$$J_2 \leq \left(\beta_2\nu-\alpha_2\mu\right)\omega_2(t)+c_{19}\left(\left(\omega_2(t)\right)^{\theta_2}+\alpha_2\left(\sigma+a(H+b)\right)\left(\omega_2(t)\right)^{\dfrac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}\right).$$

Revenons aux intégrales I_1 et I_2

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\Omega}\left(\begin{array}{c} -\alpha_1\left(\alpha_1-1\right)a_1\dfrac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}}\left|\nabla u_1\right|^2+\alpha_1\beta_1\left(a_1+a_2\right)\dfrac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}}\nabla u_1\nabla u_2 \\ -\beta_1\left(\beta_1+1\right)a_2\dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}}\left|\nabla u_2\right|^2 \end{array}\right)d\Omega \\ &= -\int_{\Omega} Q_1 d\Omega, \end{aligned}$$

où

$$Q_1=\alpha_1\left(\alpha_1-1\right)a_1\frac{u_1^{\alpha_1-2}}{u_2^{\beta_1}}\left|\nabla u_1\right|^2-\alpha_1\beta_1\left(a_1+a_2\right)\frac{u_1^{\alpha_1-1}}{u_2^{\beta_1+1}}\nabla u_1\nabla u_2+\beta_1\left(\beta_1+1\right)a_2\frac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1+2}}\left|\nabla u_2\right|^2.$$

Q_1 est une forme quadratique qu'on peut l'écrir sous la forme matricielle suivante:

$$Q_1 = \left[\begin{pmatrix} \alpha_1 (\alpha_1 - 1) a_1 \dfrac{u_1^{\alpha_1 - 2}}{u_2^{\beta_1}} & -\dfrac{1}{2}\alpha_1\beta_1 (a_1 + a_2) \dfrac{u_1^{\alpha_1 - 1}}{u_2^{\beta_1 + 1}} \\ -\dfrac{1}{2}\alpha_1\beta_1 (a_1 + a_2) \dfrac{u_1^{\alpha_1 - 1}}{u_2^{\beta_1 + 1}} & \beta_1 (\beta_1 + 1) a_2 \dfrac{u_1^{\alpha_1}}{u_2^{\beta_1 + 2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème (1.2.4) Q_1 est définit non négative ssi

$$\alpha_1 a_1 (\alpha_1 - 1) \geq \frac{\alpha_1^2 \beta_1 (a_1 + a_2)^2}{4a_2 (\beta_1 + 1)} \text{ et } \alpha_1 > 1.$$

Donc

$$\frac{d}{dt} (\omega_1(t)) \leq J_1.$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\Omega \begin{pmatrix} -\alpha_2 (\alpha_2 - 1) a_3 \dfrac{u_3^{\alpha_2 - 2}}{u_4^{\beta_2}} |\nabla u_3|^2 + \alpha_2\beta_2 (a_3 + a_4) \dfrac{u_3^{\alpha_2 - 1}}{u_4^{\beta_2 + 1}} \nabla u_3 \nabla u_4 \\ -\beta_2 (\beta_2 + 1) a_4 \dfrac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2 + 2}} |\nabla u_4|^2 \end{pmatrix} d\Omega, \\ &= -\int_\Omega Q_2 d\Omega, \end{aligned}$$

où

$$Q_2 = \alpha_2 (\alpha_2 - 1) a_3 \frac{u_3^{\alpha_2 - 2}}{u_4^{\beta_2}} |\nabla u_3|^2 - \alpha_2\beta_2 (a_3 + a_4) \frac{u_3^{\alpha_2 - 1}}{u_4^{\beta_2 + 1}} \nabla u_3 \nabla u_4 + \beta_2 (\beta_2 + 1) a_4 \frac{u_3^{\alpha_2}}{u_4^{\beta_2 + 2}} |\nabla u_4|^2.$$

Q_2 est une forme quadratique,elle est définit non négative ssi

$$\alpha_2 a_3 (\alpha_2 - 1) \geq \frac{\alpha_2^2 \beta_2 (a_3 + a_4)^2}{4a_4 (\beta_2 + 1)} \text{ et } \alpha_2 > 1.$$

Donc

$$\frac{d}{dt} (\omega_2(t)) \leq J_2.$$

Enfin on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\omega(t)) &= \frac{d}{dt}(\omega_1(t)) + \frac{d}{dt}(\omega_2(t)) \\
&\leq J_1 + J_2 \\
&\leq (\beta_1\nu - \alpha_1\mu)\,\omega_1(t) + c_{13}\left((\omega_1(t))^{\theta_1} + \alpha_1\sigma(\omega_1(t))^{\dfrac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1}}\right) \\
&\quad + (\beta_2\nu - \alpha_2\mu)\,\omega_2(t) + c_{19}\left((\omega_2(t))^{\theta_2} + \alpha_2(\sigma + a(H+b))(\omega_2(t))^{\dfrac{\alpha_2 - 1}{\alpha_2}}\right),
\end{aligned}$$

supposons $\beta_1\nu - \alpha_1\mu < 0$, alors on aura

$$\omega_1'(t) \leq c_{13}\omega_1^{\theta_1}(t) + c_{13}\alpha_1\sigma\omega_1^{\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}}(t). \tag{4.2.16}$$

supposons $\beta_2\nu - \alpha_2\mu < 0$, alors on aura

$$\omega_2'(t) \leq c_{19}\omega_2^{\theta_2}(t) + c_{19}\alpha_2(\sigma + a(H+b))\,\omega_2^{\frac{\alpha_2-1}{\alpha_2}}(t). \tag{4.2.17}$$

Par une intégration simple de (4.2.16) et de (4.2.17) dans $[0, T^*]$ on obtient que $\omega(t)$ est uniformement bornée; $\omega(t) \leq \gamma_4$ (où γ_4 dépend de φ_1, φ_2, φ_3 et de φ_4). ■

Preuve de proposition (4.2.1). Par une application directe du théorème (2.4.1), en utilisant le théorème (4.2.1), on déduit que la solution (u_1, u_2, u_3, u_4) du problème (4.2.13) est bornée et globale dans l'intervalle de temps $(0, \infty)$. ■

4.2.2 Application

Si on pose:

$$\begin{aligned}
a_1 &= d_{u_1}, \quad a_2 = d_{u_2}, \quad a_3 = d_{u_3}, \quad a_4 = d_{u_4}, \sigma = \rho_0\rho, a = ky3, \\
b_1 &= c_0\rho, \quad b_2 = c'\rho', \quad b_3 = c_0\rho, \quad b_4 = c'\rho', b = floor, \\
p_1 &= 2, \quad q_1 = 1, \quad r_1 = 2, \quad s_1 = 0, \quad p_2 = 2, \quad q_2 = 1, \quad r_2 = 2, \quad s_2 = 0,
\end{aligned}$$

on obtient le système

$$
\begin{aligned}
\partial [u_1] \diagup \partial t &= d_{u_1} \partial^2 [u_1] \diagup \partial x^2 - \mu [u_1] + c_0 \rho [u_1]^2 \diagup u_2 + \rho_0 \rho, \\
\partial [u_2] \diagup \partial t &= d_{u_2} \partial^2 [u_2] \diagup \partial x^2 - \nu [u_2] + c' \rho' [u_1]^2 , \\
\partial [u_3] \diagup \partial t &= d_{u_3} \partial^2 [u_3] \diagup \partial x^2 - \mu [u_3] + c_0 \rho [u_3]^2 \diagup [u_4] + \rho_0 \rho + ky3([u_1] - [u_2] + floor), \\
\partial [u_4] \diagup \partial t &= d_{u_4} \partial^2 [u_4] \diagup \partial x^2 - \nu [u_4] + c' \rho' [u_3]^2 .
\end{aligned}
$$

Ce système modélise une réaction-diffusion entre quatre substances qui joue un rôle important dans la formation ou la génération des patterns, voir Crystal [9].

Où: ρ et ρ' sont les concentrations de source de u_1, u_2 et u_3, u_4, respectivement. $[u_1]$, $[u_2]$, $[u_3]$ et $[u_4]$ représentent les concentrations de quatre substances u_1, u_2, u_3 et u_4, respectivement. Le terme ρ_0 est une constante qui représente la production basique de u_1 et u_3. Le symbole μ représente la destruction ou le déplacement de u_1 et u_3, et ν représente la destruction de u_2 et u_4. c_0 et c' sont des constantes de production de u_1, u_2 et u_3, u_4, respectivement. d_{u_1}, d_{u_2}, d_{u_3} et D_h sont les constantes de diffusion de u_1, u_2, u_3 et u_4, respectivement. ky et $floor$ sont des constantes contrôleuses.

Bibliographie

[1] S. Abdelmalek, Existence globale des solutions des systèmes de Réaction-Diffusion via la fonctionnele de Lyapunov en gradient, thèse de Doctorat. Université Mentouri, Constantine (2008).

[2] S.Abdelmalek, *Invariant regions and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a tridiagonal matrix of diffusion coefficients and nonhomogeneous boundary conditions*, J of App. Math. V 2007, ID (12375), 15 pages.

[3] N. Alikakos, *An Application of the Invariance Principle to Reaction-Diffusion Equations*, J. of Diff. Equs. 33, (1979), pp 201-225.

[4] N. Alikakos, *L^p-Bounds of Solutions of Reaction-Diffusion Equations*. Comm. P. D. E. 4 (1979). pp. 827-868.

[5] H. Brezis, Analyse Fonctionnelle théorie et applications. Masson, Paris, 1983.

[6] T. Cazenave & A. Haraux, *Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires*, ellypses 1990

[7] M. J. Cloud and B. C. Drachman, Inequalities with Applications to Engineering, (1998) Springer-Verlag New York.

[8] C. Crystale, *Chaotic behavior in coupled Gierer-Meinhardt equations*, Elsevier. J. Computers & Graphics 25 (2001) 159-170.

[9] R. Dautray et J. L. Lions, Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Volume 3 Masson,1987.

[10] W. B. Fitzgibbon, S. Hollis et J. Morgan, *Stability and Lyapunov functions for reaction-diffusion systems*, SIAM J. Math. Anal. Vol. 28, No. 3, pp. 595-610, May 1997.

[11] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice Hall Englewood Chiffs. N. J. 1964.

[12] F. R. Gantmacher, Théorie des matrices, tome 1. Paris (1966).

[13] R. Gorenflot et B. de Foucault, Biologie Végétale: Les Cormophytes, édition 7, DUNOD, Paris, 2005.

[14] A. Gierer and H. Meinhardt, *A Theory of Biological Pattern Formation*, reprint of Kybernetik 12, 30-39 (1972) (c) by Springer-Verlag 1972.

[15] A. Haraux et A. Youkana, *On a Result of K. Masuda Concerning Reaction-Diffusion Equations*. Tôhoku. Math. J. 40 (1988), pp. 159-163.

[16] D. Henry, Geometric *Theory of Semi-linear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics 840, Springer-Verlag, New-York, 1984.

[17] S. L. Hollis, *On the Question of Global Existence for Reaction-Diffusion Systems with Mixed Boundary Conditions*. Quarterly of Applied Mathematics LI, number 2, June 1993, pp. 241-250.

[18] S. L. Hollis, R. H. Martin et M. Pierre, *Global Existence and Boundedness in Reaction Diffusion Systems*. SIAM. J. Math. Anal, Vol. 18, number 3, May 1987.

[19] S. L. Hollis et J. J. Morgan, *On the Blow-up of Solutions to Some Semilinear and Quasilinear Reaction-diffusion Systems*, Rocky Moutain J. Math. vol 14. no 4 (1994), pp. 1447-1465.

[20] S.L. Hollis et J. Morgan, *Interior estimates for a class of reaction-diffusion systems from L^1 a priori estimates*, JDE, vol 92, no. 2 (1992), 260-276.

[21] S. L. Hollis et J. J. Morgan, *Partly dissipative reaction-diffusion systems and a model of phosphorus diffusion in silicon*, Nonlinear Anal. T. M. A., 19 (1992), pp. 427-440.

[22] I. Kanel et M. Kirane, *Global existence and large time behavior of positive solutions to a reaction diffusion system*, Differential Integral Equations 13 (2000), 255-264.

[23] I. Kanel et M. Kirane, *Pointwise a priori bounds for a strongly coupled system of reaction-diffusion equations wuth a balance law.* Math. Methods App.Sci. 21 (1998) $N^0$13, p-p 1227-1232.

[24] M. Kirane et S. Kouachi, *Global solutions to a system of strongly coupled reaction-diffusion equations.* Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications. Volume 26, number 8 (1996).

[25] S. Kouachi, *Existence globale et explosion des solutions des certains systèmes d'équations aux dérivées partielles*, thèse de doctorat d'état, 1999.

[26] S. Kouachi, *Existence of global solutions to reaction-diffusion systems via a Lyapunov functional.* Electron. J. Diff. Eqns Vol. 2001(2001), No. 68, pp. 1-10.

[27] S. Kouachi, *Existence of global solutions to reaction-diffusion systems with nonhomogeneous boundary conditions via a Lyapunov functional.* E. J. Diff. Eqns Vol. 2002(2002), No. 88, pp. 1-13.

[28] S Kouachi, G*lobale existence* of solutions for *reaction-diffusion systems.* with a full matrix of *diffusion coefficients and nonhomogenous boundry conditions*, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ, No. 2. (2002), pp. 1-10.

[29] S Kouachi, *Global existence of solutions in invariant regions for reaction-diffusion systems. with a balance law and a full matrix of diffusion coefficients*, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ, No. 3. (2003), pp. 1-10.

[30] S. Kouachi, *Invariant Regions and Global Existence of Solutions for Reaction-Diffusion Systems with A Full Matrix of Diffusion Coefficients and Nonhomogeneous Boundary Conditions,* Georgian Mathematical Journal V 11 (2004) No 2, 349-359.

[31] S Kouachi, *Uniform boundedness and global existence of solutions for reaction-diffusion systems with a balance law and a full matrix of diffusion coefficients*, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No. 7. (2001), pp. 1-9.

[32] S. Kouachi, S. Abdelmalek et B. Rebiai *Existence of global solutions to reaction-diffusion systems with nonhomogeneous boundary conditions via a Lyapunov functional*, Arch. Math. (Paper 1534) Accepté.

[33] S. Kouachi et A. Youkana, *Global existence for a class of reaction-diffusion systems.* Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Vol. 49, Number 3, (2001).

[34] H. J. Kuiper, *Positively Invariant Regions for Strongly Coupled Reaction Diffusion Systems with a Balance Law*, J. of Math. Ana. and App. 249 (2000), 340-350.

[35] Laurent Desvillettes et d Klemens Fellner, Entropy Methods for Reaction-Diffusion Systems: Degenrate Diffution, Discrete and Continuous Dynamical Systems, Supplement Volume 2007.

[36] S. Malham et J. Xin, *Global solutions to a reactive Boussinesq system with front data on an in nite domain*. Comm. Math. Phys. 193 (1998), no.2, pp. 287-316.

[37] H.Meinhardt, *A Model for Pattern Formation on the Shells of Molluscs*, J. theor. Biol. (1987) 126, 63-89.

[38] H.Meinhardt, *Models of Biological Pattern Formation*, Academic Press, London (1982).

[39] H.Meinhardt, A Koch et G. Bernasconi, Models of pattern formation applied to plant development, réimpression d'un chapitre de: Symmetry in Plants (D. Barabe et R. V. Jean, Eds), World Scientific Publishing, Singapore; pp. 723-758.

[40] R. H. Martin et M. Pierre, *Nonlinear reaction-diffusion systems*, Nonlinear equations in the applied sciences, Math. Sci. Engrg., 185, Academic Press, Boston, MA, pp. 363-398, 1992.

[41] Li Mingde, Chen Shaohua et Qin Yuchun, *Boundedness and Blow Up for the general Activator-Inhibitor Model*, Acta Mathematicae Applicatae Sinica, vol.11 No.1. Jan., 1995

[42] K. Masuda, *On the Global Existence and Asymptotic Behavior of Solutions of Reaction-Diffusion Equations*, Hokkaido. Math. J. 12 (1983), pp. 360-370.

[43] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric et A. M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*. Mathematics and Its Applications, (1993) Kluwer Academic Publishers

[44] J. J. Morgan, *Global Existence for Semilinear Parabolic Systems*, SIAM J. Math. Anal. 20, 1128-1144 (1989).

[45] J. J. Morgan et S. L. Hollis, *The Existence of Periodic Solutions to Reaction-Diffusion Systems with Periodic Data*, SIAM J. Math. Anal. Vol. 26, No. 5, pp. 1225-1232, September 1995.

[46] C.V.Pao, *On Nonlinear Diffusion Systems*. J. Math.Analysis. App. 87. (1982) 165-198.

[47] C.V.Pao, *Réaction-Diffusion Equation with Nonlinear Boundary Condition*. Nonlinear Analysis 5. (1981) 1077-1094.

[48] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Math. Sciences 44, Springer-Verlag, New York (1983).

[49] M. Pierre et D. Schmitt, *Blowup in reaction-diffusion systems with dissipation of mass*. SIAM J. Math. Anal. 28 (1997), no. 2, 259–269.

[50] P. Quittner et Ph. Souplet, *Superlinear Parabolic Problems, Blow-up, Global Existence and Steady States*. Birkhäuser Verlag AG (2007).

[51] H. Reinhard, *Equations aux Dérivées Partielles, Introduction*, Dunod, Paris, 2001

[52] F. Rothe, *Global Solutions of Reaction-Diffusion Systems*, Lecture Notes in Math. 1072, Springer-Verlag, Berlin (1984).

[53] J. Ryan, G*lobal existence* of *reaction-diffusion equations* over multiple domains, Thises Texas A&M University (2004).

[54] J. Sembera et M. Benes, *Nonlinear Galerkin method for reaction–diffusion systems admitting invariant regions*, J. of Comp. and App. Math. 136 (2001) 163–176.

[55] J. Smoller, *Shock Waves et Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York (1983)

[56] M. R. Spiegel, *Théorie et Applications de L'analyse,* Serie Schaum, (1982).

[57] H. D. Thomas et D. G. Aronson, *Oscillation in a Nonlinear Parabolic Model of Separated Cooperatively Coupled Enzymes.* Nonlinear Systems and Applics. Academi Press. New York (1977).

[58] Turner et Ames, *Twi-Sided Bounds for Linked Unknown Nonlinear Boundary Conditions of Reaction-Diffusion Systems.* J. Math. Analysis and App., 71, (1979), 336-378.