وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE
CHEIKH LARBI TEBESSI
-TEBESSA-

جامعة الشيخ العربي
التبسي
- تبسة -

Département de Mathématiques et d'Informatique
Ecole Doctorale de Mathématiques
Appliquées

MEMOIRE DE MAGISTER
En Mathématiques

THEME

L'intégrabilité des Algèbres de Lie

Option :
Analyse Fonctionnelle et Systèmes Dynamiques

Présenté par : RAFIK GUEFAIFIA

Devant le jury:

Président :	**MECHERI SALEH**	**PROF. Univ. TEBESSA**
Rapporteur :	**ZOUBIDA SOUICI BENHAMMADI**	**M.C. Univ. ANNABA**
Examinateur :	**H. DJOUDI**	**PROF. Univ. ANNABA**
Examinateur :	**S. KELAIAIA**	**M.C. Univ. ANNABA**
Examinateur :	**M.BELKHALFA**	**M.C. Univ. MASCARA**

Remerciements

Je remercie d'abord Dieu qui m'a donné la force et la volonté pour élaborer ce travail.

Je tiens à adresser mes remerciements les plus chaleureux et ma profonde gratitude à mon encadreur Madame ***Zoubida Souici Benhammadi,*** M.C *à l'université d'Annaba, qui m'a aidé dans la réalisation de ce travail et a guidé mes premiers pas dans la recherche, sa culture mathématique, son soutien moral et ses qualités humaines qui m'ont beaucoup impressionnés..*

Je tiens à remercier vivement Monsieur **S.*Mechri*** *, Professeur à l'université de Tebessa, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, et m'a fait bénificier de ses vastes connaissances, ses précieux conseils et ses encouragements m'ont été d'un grand support.*

Mes vifs remerciements vont également à Mes monsieurs: ***H.Djoudi*** professeur à l'université d'Annaba,**S.Kelaiaia** Maîtres de conférence à l'université d'Annaba et **M.Belkhalfa** Maîtres de conférence à l'université Mascara, pour avoir bien accepté de *prendre part au jury et juger mon travail.* Qu'elles trouvent ici l'expression de mon profond respect et mon admiration pour leur gentillesse et leur esprit scientifique.

De même, c'est pour moi un très grand plaisir d'exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur **F.Meramria** chef département de l'institut de mathématiques *à l'université de Tebessa Sans oublier tous mes enseignants.*

Du fond de mon coeur, un grand merci à toute ma famille. En particulier, mon père: M.Med Elhadi pour son aide très précieux, ma mère: G.Mabrouka pour son soutien moral et mes frères.

Enfin, je n'oublie pas de remercier tous mes amis et tous mes collègues sans exception, et tous ceux que j'ai connue au département de mathématiques qui ont rendu mon séjour au département agréable.

Table des matières

0.1 Introduction générale

Dans ce travail on va étudier le probléme de l'intégrabilité des sous algèbres de Lie d'une algèbre de Lie g d'un groupe de Lie G,pour ça on commence dans la partie I (chapitre 1) par les notions d'algèbre de Lie et de groupe de Lie de dimension finie,et en donne des exemples et on définit ensuite l'algèbres de Lie d'un groupe de Lie et on calcule l'algèbre de Lie du groupe de Lie $O(n)$ et $SL(n, \mathbb{R})$,on donne aussi dans ce chapitre plusieurs manières de definir l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie .Dans le chapitre 2 on s'intéresse à l'intégrabilité des sous algèbres de Lie de dimension finie,c'est-à-dire partant d'une sous algèbre de Lie h de dimension finie peut -on toujours trouver un groupe de Lie H tel que $h = T_eH$.

On commence par donner les définitions de l'application exponentielle et formule de Campbell-Baker-Hausdorff,et les sous groupes à un paramétre et la notions de révetement universel,et dans cette derniere partie un résultat sur l'intégrabilité des sous algèbres de Lie,ce résultat est donné par le théorème 2-5-3 du chapitre2.

On déduit de cette partie que toute sous algèbre de Lie de dimension finie est intégrable en un sous groupe de Lie,c'est-à-dire qu'on peut construire un sous groupe de Lie H à partir d'une sous algèbre de Lie h.

Dans la partie II on étudie le probléme de l'intégrabilité des sous algèbres de Lie de dimension infinie d'une algèbre de Lie g d'un groupe de Lie G,celà revient à intégrer le sous fibré $L^h = \cup_{a \in g} a.h$ du fibré tangent TG on commence dans le chapitre 3 par notions générales (groupes de Lie et algèbres de Lie de dimension infinie) et les espaces topologiques,les groupes de Lie et algèbres de Lie CBH

Le chapitre 4 est consacré à l'intégrabilité des sous algèbres de Lie de dimension infinie,on donne un exemple où la sous algèbre de Lie ne s'intégre pas en un groupe de Lie (exemple de tore $M = T^2 = S^1 \times S^1$) et en classifie les sous algèbres de Lie qui s'intégrent en un groupe de Lie (cas des algébres de Lie CBH) et on donne le théorème 4-1-2,cas des algèbres de Lie Banachique et on donne le théorème 4-4-1,cas des algèbres de Lie de premièr espèce et on donne le théorème 4–5-1,et la dernnier le cas de sous algèbres de Lie CBH d'un groupe de Lie regulier et on donne le résultat dans le théorème 4-6-1et 4-6-2.

Enfin on constate que les sous algèbres de Lie de dimension infinie ne s'intégrent pas en un groupe de Lie dans tous les cas.

Dans la derniere partie on va généraliser la formule de Campbell-Baker-Hausdorff sur le groupoïde de Lie.

On commence dans le chapitre 5 par des notions générales sur le fibré vectoriel,le morphisme de fibré vectoriel avec des exemples,et on définit l'algèbroïde de Lie et le groupoïde de Lie avec des exemples,et on termine cette partie par définir l'algèbroïde de Lie d'un groupoïde de Lie

Dans le chapitre 6 on donne la définition locale d'un groupoïde de Lie dans une carte convenablement choisie et on généralise la formule de Campbell-Baker-Hausdorff sur le groupoide de Lie le résultat est donné dans le théorème 6-2-1.On termine ce travail par la perspective suivant:

Puisque la généralisation de la formule de Campbell-Baker-Hausdorff est faite dans le cas des groupoïdes de Lie ,est-ce-qu'on peut intégrer un algèbroïde de Lie de type CBH en un groupoïde de Lie de type CBH.

Partie I

Intégrabilité des sous algèbres de Lie de dimension finie

Chapitre 1

Algèbres de Lie et groupes de Lie de dimension finie.

1.1 Introduction

On définit tout d'abord les algèbres de Lie ainsi que les groupes de Lie de dimension finie explicités avec des exemples,on rappelle ensuite l'algébre de Lie d'un groupe de Lie suivie d'un calcul sur deux exemples,le premier exemple concernant les groupes des matrices orthogonales et le deuxiéme concerne les groupes linéaires spéciales dans $\mathbb{R}$.

1.2 Algèbres de Lie, exemples

Définition 1.2.1 *Une algèbre de Lie g de dimension n finie sur $\mathbb{k}$ est une espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{k}$ muni d une forme bilinéaire $[,] : g \times g \to g$, appelée crochet de Lie ,qui possède les proprietés suivantes:*

i)$[X, X] = 0$, *pour tout* $X \in g$ *(antisymetrie)*

ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$, *pour tous* X, Y *et* Z *dans* g *(identité de Jacobi).*

1.2.1 Exemples:[5]

Exemple 1.2.1 *Tout espace vectoriel* V *sur* $\mathbb{k}$ *munie du crochet* $[X, Y] = 0,\ X,\ Y \in V$, *est une algèbre de Lie sur* $\mathbb{k}$.

Exemple 1.2.2 *Soit* V *un espace vectoriel sur* $\mathbb{k}$. *L algebre* $gl(V)$ *des endomorphismes de* V *munie du crochet* $[A, B] = AB - BA$, *est une algèbre de Lie de dimension* $\dim(V)^2$ *sur* $\mathbb{k}$. *Par exemple si* $V = \mathbb{C}^n$ $(resp. V = \mathbb{R}^n)$, *alors* $gl(V)$ *est l'algèbre de Lie* $gl(n, \mathbb{C})$ $(resp, gl(n, \mathbb{R}))$ *des matrices carrees d'ordre n a coefficient complexe* (*resp,réel*). *Le crochet de Lie sur* $gl(n, \mathbb{C})$ $(resp, gl(n, \mathbb{R}))$ *est alors defini par le produit matriciel:* $[A, B] = AB - BA$.

Exemple 1.2.3 *Soient* R_x, R_y *et* R_z *les rotations de* $\mathbb{R}^3$ *autour des axes* x, y *et* z *respectivement, i.e*

$$R_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, R_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant le crochet défini par le produit matriciel, on vérifie que $[R_x, R_y] = R_z, [R_y, R_z] = R_x, [R_z, R_x] = R_y$. *Ainsi l'espace vectoriel réel de dimension 3 engendré par les trois matrices* R_x, R_y *et* R_z *est une algèbre de Lie réelle de dimension* 3, *appelée l'algèbre de Lie des rotations de l'espace et noté* $O(3)$.

L'espace vectoriel $sl(n, \mathbb{k})$ *des matrices carrées d'ordre* n,*à coefficients réels et de trace nulle est muni du crochet* $[X, Y] = XY - YX$, *est une algébre de Lie sur* $\mathbb{k}$ *de dimension* $n^2 - 1$.

Exemple 1.2.4 *Soit* A *une algèbre associative sur* $\mathbb{k}$. *Le produit dans* A, *noté* $X.Y$, *induit un crochet sur* $A : [X, Y] = XY - YX$, *de sorte que* A *possède une structure d'algèbre de Lie sur* $\mathbb{k}$.

Exemple 1.2.5 *Soit* M *une variété de classe* C^∞, *tout champ de vecteur* X *sur* M *induit une dérivation* D_X *définie par* $D_X f = T_x f(X(x))$. *On définit alors le crochet de deux champs de vecteurs* X *et* Y *sur* M *par:* $[X, Y] = D_X \circ D_Y - D_Y \circ D_X$. *Ainsi l'espace vectoriel réel des champs de vecteurs de classe* C^∞ *sur* M *possède une structure d'algèbre* *de Lie réelle. En fait un calcul simple permet de calculer localement le crochet de deux champs de vecteurs. Soit (U,ϕ) une carte sur M avec $\phi = (x_1, x_2, ..., x_m)$, où m désigne la dimension de M. Alors*

$$\left[\sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^{m} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} - b_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Remarque 1.2.1 *L'algèbre de Lie $C^{\infty}(TM)$ est en général de dimension infinie.*

Définition 1.2.2 *Le centre d'un algèbre de Lie g est les sous-ensemble*

$$Z_g = \{X \in g \ / \ [X,Y] = 0, \forall Y \in g\}$$

Définition 1.2.3 *Une $\mathbb{k}$-sous- algébre de Lie h de g est un $\mathbb{k}$-sous -espace vectoriel de g tel que $[h,h] \subset h$*

1.3 Groupes de Lie, exemples:[4]

Définition 1.3.1 *Un groupe de Lie est une variété G, de classe C^{∞}, munie d'une loi de groupe telle que l'application $(x,y) \mapsto x^{-1}.y$ soit une application de classe C^{∞} dans $G \times G$ sur G.*
Dans la suite, pour un groupe de Lie G, on notera:

$$\begin{cases} . : & (x,y) \rightarrow x.y \text{ la loi de groupe } G, \\ S : & x \rightarrow x^{-1} \text{ la symétrie dans } G, \\ e : & \text{l'élément neutre de } G. \end{cases}$$

Il résulte de la définition que, dans un groupe de Lie G,et $. \in C^{\infty}(G \times G, G)$, $S \in Diff^{\infty}(G)$.

1.3.1 Exemples:[4]

Exemple 1.3.1 $S^1 = \left\{e^{i\theta} / \ \theta \in \mathbb{R}\right\}$, *noté $U(1)$. C'est le* ***groupe du cercle.***

Exemple 1.3.2 *Les groupes matriciels réels:*

1) Groupe linéaire réel:

$GL(n,\mathbb{R}) = \{M \in M(n,\mathbb{R}) \diagup \det M \neq 0\}$, *dimension* n^2.

2) Groupe spécial linéaire:

$SL(n,\mathbb{R}) = \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \diagup \det M = 1\}$, *dimension* $n^2 - 1$.

3) Groupe orthogonal:

$O(n) = \{M \in GL(n,\mathbb{R}) \diagup M\ {}^tM = I\}$, *dimension* $\dfrac{n^2-n}{2}$.

4) Groupe spécial orthogonal:

$SO(n) = SL(n,\mathbb{R}) \cap O(n)$, *dimension* $\dfrac{n^2-n}{2}$.

où $M(n,\mathbb{R})$ *est l'algèbre réelle des matrices* $n \times n$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exemple 1.3.3 *Les groupes matriciels complexes pour lesquels on identifie* $\mathbb{C}$ *à* $\mathbb{R}^2$:

1) Groupe linéaire complexes:

$GL(n,\mathbb{C}) = \{M \in M(n,\mathbb{C}) \diagup \det M \neq 0\}$, *dimension* $2n^2$.

2) Groupe spécial linéaire:

$SL(n,\mathbb{C}) = \{M \in GL(n,\mathbb{C}) \diagup \det M = 1\}$, *dimension* $2n^2 - 2$.

3) Groupe unitaire:

$U(n) = \{M \in GL(n,\mathbb{C}) \diagup M^tM = I\}$, *diemnsion* n^2.

4) Groupe spécial unitaire:

$SU(n) = SL(n,\mathbb{C}) \cap U(n)$, *dimension* $n^2 - 1$.

où $M(n,\mathbb{C})$ *est l'algèbre complexes des matrices* $n \times n$ *sur* $\mathbb{C}$ *et* M^t *est la transconjuguée de* M.

1.4 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie.

Définition 1.4.1 $\forall a \in G$,*on appelle translation à gauche par a l'application notée* L_a : $x \to a.x$, *et on appelle translation à droite par a l'application notée* $R_a : x \to x.a$

Définition 1.4.2 *un champ de vecteurs* $X \in C^\infty TG$ *est dit invariant par translation à gauche si*

$$(L_a)_* X = X, \forall a \in G$$

où

$$(L_a)_* X = TL_a \circ X \circ L_{a^{-1}} = X$$

Définition 1.4.3 *L'algèbre de Lie d'un groupe de Lie est définie par* $g = T_e G$.

Remarque 1.4.1 *Il y a une autre manière de construire l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie* G *c'est l'ensemble des champs de vecteurs* $X \in C^\infty TG$ *qui sont invariants par translation à gauche.*

Remarque 1.4.2 *Si on utilise les champs de vecteurs invariants à droite au lieu de ceux invariants à gauche,on obtient une autre structure d'algèbre de Lie sur* $T_e G$ *verifiant* $[X, Y]_{droite} = -[X, Y]$.

Théorème 1.4.1 *L'ensemble des vecteurs invariants par translation à gauche est une sous algébre de Lie noté* h.

Preuve. Soit $g = T_e G$ l'algébre de Lie du groupe de Lie G et notons $h = \{X \in \chi(G) : (L_a)_* X = X\}$

Démontrons que g est isomorphe à h.

$$(L_a)_* X = X \iff (L_a)_* X = TL_a \circ X \circ L_{a^{-1}} = X$$

$$\iff TL_a \circ X = X \circ L_a$$

si $x = e$ alors

$$X(L_a(e)) = T_e L_a \circ X(e)$$

$$\Longrightarrow X(a) = T_e L_a (X(e)) \, \forall a \in G$$

D'autre part si $x = b$ alors ■

$$T_b L_a \circ X(b) = X \circ L_a(b) = X(ab)$$

donc h est un sous espace vectoriel et Comme $(L_a)_*$ est un difféomorphisme alors

$$(L_a)_*[X,Y] = [(L_a)_*X,(L_a)_*Y] = [X,Y]$$

d'ou $[X,Y]$ est invariant par $(L_a)_*$.

Théorème 1.4.2 *Il y a un isomorphisme d'espaces vectorielles entre $g = T_eG$.et l'ensemble des champs de vecteurs $X \in C^\infty TG$ qui sont invariant par translation à gauche*

Preuve. On construit

$$\Psi : g \to h$$

Soit $X \in h, X = \widehat{\xi}$ demontrons qu'il existe $\xi \in g$ tel que $\psi(\xi) = \widehat{\xi}$

$$\widehat{\xi} = T_eL_b(\xi), \Psi = T_eL_b$$

est on a aussi la bijection réciproque définie par

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & X(e) \\ \widehat{\xi}(e) & = & \xi \end{array}$$

on a un isomorphisme donc on peut transporter les structures d'espaces vectoriels
On a un crochet d'algèbres de Lie.
Soient $\xi,\eta \in g$ on a alors

$$[\xi,\eta] = \left[\widehat{\xi},\widehat{\eta}\right](e)$$

invariant par translation à gauche car les deux le sont. ■

1.5 Calcul d'algèbres de Lie de certains groupes de Lie

Théorème 1.5.1 *Soit X, Y deux variétés,et $f : X \to Y$ une application differentiable tel que $y \in Y$*

si $x \in f^{-1}(y)$ *,alors*

$$T_x\left(f^{-1}(y)\right) = Ker\left(df_x\right)$$

où

$$df_x : T_x(X) \to T_{f(x)}Y.$$

Exemple 1.5.1 *Soit*

$$O(n) = \left\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \diagup\ A\ A^t = I\right\}$$

l'ensemble des matrices orthogonales.
On définit

$$\begin{aligned} f \quad &: \quad M_{n,n} \to S_{n,n} \\ A \quad &\mapsto \quad AA^t \end{aligned}$$

$S_{n,n}$ *l'ensemble des matrices symmetriques.*
donc

$$O(n) = f^{-1}(I)$$

Soit $A \in O(n)$ *alors*

$$df_A : T_A M_{n,n} \to T_{f(A)} S_{n,n}$$

définie par

$$\begin{aligned} df_A(B) &= \lim_{s \to 0} \frac{f(A + sB) - f(A)}{s} \\ &= \lim_{s \to 0} \frac{(A + sB)(A + sB)^t - AA^t}{s} \end{aligned}$$

on a donc

$$= BA^t + AB^t$$

et

$$T_I(O(n)) = Ker\left(df_I\right) = \left\{B \in M_{n,n} : B = -B^t\right\}$$

c'est l'algèbre de Lie du groupe de Lie $O(n)$ *.*

Exemple 1.5.2 (10) *L'ensemble $SL(n,\mathbb{R})$ des groupes lineaire speciale est une sous-groupe de $GL(n,\mathbb{R})$ des matrices de diterminant égale* 1 :
$SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in M(n,\mathbb{R}) : \det A = 1\}$
L'algèbre de Lie de $SL(n,\mathbb{R})$ est le sous-espace $sl(n,\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle.
On a $\exp(tX) \in SL(n,\mathbb{R})$ *pour tout t, si et seulement si* $\det(\exp(tX)) = e^{tTrX} = 1$, *ce qui est équivalent à $TrX = 0$,L'ensemble des matrices de trace nulle forme un $\Bbbk-$espace vectoriel,d'où le résultat.*

Exemple 1.5.3 *Considérons l'ensemble*

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

C'est un groupe de $GL(3,\mathbb{R})$,de plus H_3 est un groupe de Lie son algèbre de Lie est l'algèbre définie par :

$$h_3 = \left\{ X(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

addmettant comme base :$\delta = (X,Y,Z)$ formée des champs de vecteurs X,Y,Z de l'algèbre de Lie h_3 tel que :

$$X = \frac{\partial}{\partial x}, Y = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, Z = \frac{\partial}{\partial z}$$

vérifiant :

$$\begin{aligned} [X,Y] &= Z \\ [X,Z] &= [Z,Y] = 0 \end{aligned}$$

Chapitre 2

Intégrabilité.

2.1 Introduction:

Dans ce chapitre on rappelle les notions de courbe intègrale, de flot de champ de vecteurs , d'application exponentielle, de groupe à un paramétre ,de relèvement ,de revêtement et de morphisme de groupes de Lie.

On donnera ensuite les principaux résultats concernant l'intègrabilité des sous algèbres de Lie de dimension finie.

2.2 Application exponentielle

2.2.1 Courbe intégrale

Définition 2.2.1 *Soit M une variété differentielle.*
On appelle courbe intégale de X de condition initiale x tout couple (I, u) où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient 0 et $u : I \to M$ une application qui est $C^{\infty}(I, M)$ et qui est solution de l'équation suivante.

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{du}{dt} = X \circ u \\ 0 \in M \ \text{tel que} \ u(0) = X \end{array} \right\}$$

2.2.2 Flot de champ de vecteurs

Définition 2.2.2 *$\forall x \in M$,il existe une unique courbe intégrale (I_x, u_x) de X,de condition initiale x et telle que,pour toute courbe intégrale (I, u) de X,de condition initiale x :*
$I \subset I_x$ et $u = u_x/I$.
La courbe intégrale (I_x, u_x) est appelée courbe intégrale maximale de condition initiale x.Dans la suite,on pose systématiquement:

$$I_x = \left]t^- (x) , t^+ (x)\right[$$

où :

$$t^- (x) , t^+ (x) \in \mathbb{R}$$

et

$$t^- (x) < 0 < t^+ (x)$$

Soit $X \in C^q TM$ où M est une variété différentielle de classe C^p $(p - 1 \geq q \geq 1)$.

Définition 2.2.3 *On appelle flot du champ du vecteurs X l'application*

$$\lambda : D(X) \to M$$

définie par

$$\lambda (t, x) = u_x (t) , \forall (t, x) \in D(X) = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times M/t \in I_x\}$$

où (I_x, u_x) est la courbe intégrale maximale de X de condition initiale $x \in M$.

2.2.3 Application exponentielle [4]

Nous allons maintenant construire une application entre g et G.

Cette application permet de trouver certaines propriétés de G connaissant g.

Définition 2.2.4 *Soient G un groupe de Lie et g son algèbre de Lie et $\lambda \in (\mathbb{R} \times G, G)$ étant le flot d'un champ de vecteur $X \in g$ donné.on posant*

$$\exp (X) = \lambda (1, e) \in G$$

L'application

$$\exp \quad : \quad g \to G$$

$$\xi \quad \longmapsto \quad \lambda\left(1,e\right)$$

où

$$X_{\xi} = T_e L_a\left(\xi\right)$$

avec

$$\begin{aligned}\lambda\left(1,e\right) &= u\left(1\right) \text{ tel que } \frac{du}{dt} = X_{\xi} \circ u \\ u\left(0\right) &= 1\end{aligned}$$

est appelée application exponentielle.

Remarque 2.2.1 *Par construction,cette application vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$:*

$\ast$ $\lambda\left(t,a\right) = a\exp\left(t\xi\right), \forall\left(t,a\right) \in \mathbb{R} \times G.$

$\ast$ $\lambda_x\left(t,e\right) = \exp\left(t\xi\right).$

$\ast$ $\dfrac{d\exp\left(t\xi\right)}{dt} = \xi/_{\exp(t\xi)}.$

$\ast\exp\left(t\xi\right).\exp\left(t'\xi\right) = \exp\left((t+t')\xi\right).$

$\ast\exp 0 = e$

2.3 Sous groupe à un paramètre [10]

Définition 2.3.1 *Soit G un groupe de Lie sur $\mathbb{k}$.*

Un sous-groupe à un paramètre de G est un homomorphisme de groupes $\gamma : \mathbb{k} \to G$ tel que :

$$\gamma\left(s+t\right) = \gamma\left(s\right).\gamma\left(t\right), \forall s,t \in \mathbb{k}$$

Exemple 2.3.1 *Soit $\left(\theta_1, ..., \theta_n\right) \in \mathbb{R}^n$,alors l'application*

$$\begin{aligned}\gamma \quad &: \quad \mathbb{R} \to T^n \\ t \quad &\mapsto \quad \left(e^{2\pi i\theta_1.t}, ..., e^{2\pi i\theta_n.t}\right)\end{aligned}$$

est un sous-groupe à un paramètre de T^n.En utilisant la carte canonique au voisinage de $e = (1, ..., 1) \in T^n$,on obtient que

$$\gamma^{'}(0) = (\theta_1, ..., \theta_n) \in \mathbb{R}^n = T_e T^n$$

Théorème 2.3.1 *Soit G un groupe de Lie.*

1) pour tout $X \in T_e G$, il existe un unique sous-groupe à un paramètre $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ tel que :

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= e \\ \gamma_X^{'}(t) &= (L_a)_*(X)(\gamma_X(t)) \end{aligned}$$

2) L'application

$$\begin{aligned} T_e G &\to \{\textit{sous-groupe à un paramètre}\} \\ X &\mapsto \gamma_X \end{aligned}$$

est bijective.

Preuve. L'injectivité est claire.En effet,si $\gamma_X = 0$,alors $\gamma_X^{'}(0) = 0$.

pour la surjectivité,considérons $\gamma_X : \mathbb{R} \to G$ Un sous-groupe à un paramètre.On calcule alors:

$$\gamma^{'}(t) = \frac{d}{ds}\gamma(s+t)_0 = \frac{d}{dt}\gamma(t).\gamma(s)_0 = TL_{\gamma(t)}\left(\gamma^{'}(0)\right) = (L_a)_*\left(\gamma^{'}(0)\right)(\gamma(t))$$

ce qui prouve que $\gamma = \gamma_X$ pour $X = \gamma^{'}(0)$. ■

Remarque 2.3.1 *On a donc trois interprétations :*

champs de vecteurs invariants à gauche ~$T_e G$ ~Un sous-groupe à un paramètre

2.4 Relèvement, revêtement:[3], [7]

Définition 2.4.1 *Un revêtement est une application continue surjective $p : X \to B$ entre espaces topologiques telle que pour tout point $b \in B$,il existe un voisinage ouvert V de b*

tel que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{tikzcd} V \times J \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "pr_1"'] & p^{-1}(V) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"] & X \arrow[d, "p"] \\ & V \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

où J est un espace discret.
On dit que c'est un revêtement de variétés si tous les objets considérés peuvent être choisis comme étant des variété et toutes les fléches considérées comme étant des morphismes de variétés.

Définition 2.4.2 *Soient E, B et X des espaces topologiques,et soient $p : E \to B, f : X \to B$ deux application continues.*
Un relèvement de f est une application $\overline{f} : X \to E$ telle que $f = p \circ \overline{f}$
on dit que f se relève à E si un relèvement de f existe.

2.5 Intégrabilité: [3]

Soit g l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie G.

Pour toute sous algèbre de Lie de dimension finie h de g il existe au moins un sous groupe de Lie H tel que l'algèbre de Lie de H soit h qui vont être illustrés comme suit:

Théorème 2.5.1 *Soit G un groupe de Lie.On pose $g = T_e G$ alors :*
1) L'exponentielle $g \to G$ est un morphisme de variétés.
2) $T_0 \exp = Id_g$.
3) L'exponentielle induit un difféomorphisme ouvert d'un voisinage ouvert de $0 \in g$ dans un voisinage ouvert de $e \in G$.

Théorème 2.5.2 (*Formule de Campbell-Baker-Hausdorff*) *[3]*

Soient G un groupe de Lie et g son algèbre de Lie.

On définit

$$\Psi(z) = \frac{z}{z-1}\ln z = z\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(z-1)^k}{k+1}$$

Soient X et Y dans g assez proches de 0,On pose $x = adX$ et $y = adY$.

Soit $f(X,Y)$ défini par

$$\exp(f(X,Y)) = \exp(X)\exp(Y)$$

Alors :

$$f(X,Y) = X + \int_0^1 \psi\left(e^{adX}e^{tadY}\right)(Y)\,dt$$

donc :

$$f(X,Y) = X + \sum_{k,p_i,q_i\geq 0, p_i+q_i>0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \frac{x^{p_1}y^{q_1}........x^{p_k}y^{q_k}x^{p_{k+1}}(Y)}{p_1!q_1!..........p_k!q_k!p_{k+1}!\,(q_1+....q_k+1)}$$

D'aprés le théorème de Campbell-Baker-Hausdorff on a le corollaire

Corollaire 2.5.1 *Soient G un groupe de Lie et g son algèbre de Lie. Si h est une sous algèbre de Lie de g, alors pour tout X et Y dans h, $f(X,Y) \in h$.*

Le théorème suivant est le resultat principal sur l'intégrabilité

Théorème 2.5.3 *Soient G un groupe de Lie et g son algèbre de Lie.Soient h une sous -algèbre de Lie de g et $H \subset G$ le sous-groupe engendré par $\exp(h)$.Alors H admet une unique structure de groupe de Lie telle que l'inclusion de H dans G soit une immersion qui induise un isomorphisme $T_e(H) \to h$.*

Preuve. 1) H sous groupe se déduit du corollair précédent.

2)unicité de la strucure de groupe de Lie.

on suppose qu'il existe deux structures de groupes de Lie H_1 et H_2 tel que $i_1 : H_1 \to G$ et $i_2 : H_2 \to G$ soient des immersions qui induisent des isomorphismes $T_eH_1 \to h_1$ et $T_eH_1 \to h_1$ d'où d'après 3) du théorème2-5-1 exp est un difféomorphisme local au voisinage de 0 donc un isomorphisme de groupes de Lie.

3)Existence d'une structure de groupe de Lie.

On construit une topologie convenable sur H.

cette topologie déterminera une unique structure differentiable sur H telle que l'inclusion de H dans G soit une immersion.

construction:

On construit T un voisinage ouvert de 0 dans g et on montre qu'il existe une unique topologie sur H vérifiant:

i)$\exp(T \cap h)$ ouvert de H.

ii)$\exp : \exp(T \cap h) \to \exp(T \cap h)$ homéomorphisme.

T se construit comme suit:

Soit $V \subset g$ un voisinage ouvert de 0 tel que $\exp : V \to \exp(V)$ soit un difféomorphisme.

Soit $U \subset V$ un voisinage de 0 étoilé et symétrique tel que $\exp(U)\exp(U) \subset \exp(V)$.

Soit $T \subset U$ un voisinage ouvert de 0 symétrique tel que $\exp(T)\exp(T) \subset \exp(U)$.

Topologie sur H :

On dit qu'une partie E de H est un ouvert si on a :

$\forall x \in E, \exists\ W$ un ouvert de $T \cap h$ contenant 0 et $x' \in H$ tel que $x \in x' \exp(W) \subset E$.

on vérifie que c'est une topologie , que l'inversion et la multiplication sont différentiables et que $T_eH = h$

en effet:$\exp : g \to G$

$$T_0 \exp : T_0 g \to T_e G$$

En prenant $H = \exp h$

on aura $T_eH = T_0 \exp(T_0 h) = h$ d'après 1) du théorème2-5-1. ■

Corollaire 2.5.2 *Pour toute algébre de Lie g il existe un sous groupe de Lie H tel que $g = T_eH$ et ce $H = \exp(h)$.*

On énonce un resultat sur les revetements

Théorème 2.5.4 *Soit M une variété connexe.*

On peut également définir le revétement universel de M par la propriété universelle suivante.Pour toute variété pointée (X, x) ,tout revétement $(X, x) \to (M, m)$ se factorise *de maniére unique de la façon suivante.*

$$\begin{tikzcd} & \left(\tilde{M}, m\right) \arrow[dl] \arrow[dd] \\ (X, x) \arrow[dr] & \\ & (M, m) \end{tikzcd}$$

Si $p : X \to B$ *est un revétement de groupe de Lie et* A *un groupe de Lie simplement connexe,alors pour tout morphisme de groupe de Lie* $f : A \to B$*,il existe une unique morphisme* $\tilde{f} : A \to X$ *le relevant.*
Si G *est un groupe de Lie connexe,alors la variété* $\left(\tilde{G}, \tilde{e}\right)$ *admet une unique structure de groupe de Lie telle que* $\left(\tilde{G}, \tilde{e}\right) \to (G, e)$ *soit un morphisme de groupe deLie.*

Remarque 2.5.1 $\exp(h)$ *est le révetement d'un groupe de Lie.*

Exemple 2.5.1 *Soit* $G = GL(n, \mathbb{C})$ *,alors* $g = gl(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$ *.et soit* h *une sous-algébre de Lie de* $M(n, \mathbb{C})$ *telle que* $< \exp(h) >= GL(n, \mathbb{C})$ *alors* $h = M(n, \mathbb{C})$.

Conclusion 2.5.1 *On constate de ce chapitre que toute sous algèbre de Lie de dimension finie de* g *est intégrable en un sous groupe de Lie,c'est-à-dire qu'on peut construire un sous groupe de Lie* G *à partir d'un algébre de Lie.*

Partie II

Intègrabilité des sous algèbres de Lie de dimension infinie

Chapitre 3

Notions générales

3.1 Introduction

Ce chapitre est destiné à définir les notions de groupe de Lie et algèbre de Lie de dimension infinie et de définir les notions de différentiabilité de type Gateaux de série formelle.

3.2 Rappels

3.2.1 Groupe de Lie

Définition 3.2.1 *Une variété de dimension infinie est un espace topologique Hausdorff sequentiellement complet modelé (via un atlas) sur un espace vectoriel localement convexe.*

Définition 3.2.2 (Milnor 82) *Un groupe de Lie de dimension infinie est un groupe G muni d'une structure de variété infiniment différentiable compatible avec les opérations de groupe,c'est-à-dire telle que le produit de $G \times G$ à valeurs dans G qui à (g, g') associe $g^{-1}g'$ est de classe C^∞*

Remarque 3.2.1 *La notion de variété différentiable en dimension infinie est définies de la méme fason que les variété en dimension finie.la différentiabilité utilisée est de type Gateaux comme on va le definir plus loin.*

Définition 3.2.3 *.On appelle groupuscule de Lie sur* $\mathbb{k}$ *un système* (G, e, m, θ) *vérifiant les condition suivantes:*

1) G *est une variété analytique sur* $\mathbb{k}$

2) $e \in G$

3) θ *est une application analytique de* G *dans* G.

4) m *est une application analytique d'une partie ouvert* Ω *de* $G \times G$ *dans* G.

5) pour tout $g \in G$*,on a*

$$(e, g) \in \Omega, (g, e) \in \Omega, m(e, g) = g$$

6) pour tout $g \in G$*,on a*

$$(g, \theta(g)) \in \Omega, (\theta(g), g) \in \Omega, m(g, \theta(g)) = m(\theta(g), g) = e.$$

7) si,g, h, k *sont des élements de* G *tels que*

$$(g, h) \in \Omega, (h, k) \in \Omega, (m(g, h), k) \in \Omega, (g, m(h, k)) \in \Omega$$

alors

$$m(m(g, h), k) = m(g, m(h, k))$$

On dit que e *est l'élément neutre du groupscule.On écrit souvent* gh *au lieu de* (g, h) *et (par abus de notation),*g^{-1} *au lieu de* $\theta(g)$

Exemple 3.2.1 *.Un groupe de Lie* G *est un groupuscule de Lie.*

Définition 3.2.4 (*Plongement*) *Un Plongement entre deux variétés* M *et* N *de dimension infinie est une application différentiable* $\pi : M \to N$ *injective,telle que* $(d\pi)_x$ *est injectif pour tout* x.

Définition 3.2.5 *Soient* G *un groupe de Lie de dimension infinie et* H *un sous-groupe de* G.

On dit que H *est un sous-groupe de Lie de* G *si :*

i) H *est un groupe de Lie.*

ii) l'application identité de H *dans* G *est un plongement de la variété* H *dans la variété* G.

3.2.2 Algèbre de Lie

Définition 3.2.6 *Une algèbre de Lie de dimension infinie sur* $\Bbbk$ *est un espace vectoriel de dimension infinie sur* $\Bbbk$ *munie d'une forme bilinéaire*

$$[,] : g \times g \to g$$

appelée crochet de Lie,qui possède les propriétés suivantes:
i) $[X, X] = 0$ *pour tout* $X \in g$ *(antisymérique).*
ii) $[X, [Y, Z]] + [Y, [X, Z]] + [Z, [X, Y]] = 0$,*pour tout* X, Y *et* Z *dans* g *(identité de jacobi)..*

3.2.3 Espace vectoriel topologique:

Définition 3.2.7 *Soit* X *un* $\Bbbk$*-espace vectoriel.*
On appelle espace vectoriel topologique tout espace vectoriel, X,*muni d'une topologie compatible avec la structure d'espace vectoriel,c'est-à-dire:*
i) l'application $(x, y) \mapsto x + y$ *est continue de* $X \times X$ *dans* X.
ii) l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ *est continue de* $\Bbbk \times X$ *dans* X.

Définition 3.2.8 *Un espace vectoriel topologique est dit localement convexe s'il existe une base de voisinage de l'origine qui sont des ensembles convexes.*

Exemple 3.2.2 *Un espace vectoriel normé est un espace localement convexe.*

Définition 3.2.9 *Soient* h *et* g *deux algèbre de Lie topologiques de dimension infinie.*h *est dite sous-algèbre de* g *si :*

i) h *est un sous-algèbre de* g,*au sens algèbrique du terme.*

ii) l'application identité de h *dans* g *est un morphisme continue d'algèbres.*

3.2.4 Application analytique:

Définition 3.2.10 *(d'un polynome homogène)[8]* **:***Un polynome homogène de degré* n *d'un espace vectoriel* E *à valeurs dans un espace vectoriel* F *est une applcation* $f_n; E \to F$

définie à l'aide d'une appliction n lineaire

$$\overline{f_n} : E \times .... \times E \to F$$

par

$$f_n(h) = \overline{f_n}(h, h, ..., h)$$

pour tout h *de* E.

On note $P^k(E, F)$ *l'espace des polynome homogènes continus de degré* k *de* E *à valeurs dans* F.

Définition 3.2.11 *(d'une série formelle) [8] Une série* $\sum_{k\geq 0} f_k$ *,où pour tout* $k \in \mathbb{N}, f_k$ *est un polynome homogène de degré* k*,sera dite série formelle.*
L'espace des série formelles à coefficients continus $\big($*ie dans* $P^k(E, F)\big)$ *est noté* $S(E, F)$.

Définition 3.2.12 *(d'une fonction analytique)***:** *[8] Soit* $f : U \subseteq E \to F$ *une fonction continue définie dans l'ouvert* U. f *est dite analytique dans* U *si pour tout point* $x \in U$ *il existe une série*

$$\sum_{n\geq 0} f_{n;x} \in S(E, F)$$

telle que;

$$f(x+h) = \sum_{n\geq 0} f_{n,x}(h).$$

pour tout h *appartenant à un voisinage de zéro dans* E.

3.2.5 Représentation adjointe

Soit G *un groupe de Lie et soit* α_g *la conjugaison par*

$$\begin{aligned} \alpha_a \quad &: \quad G \to G \\ b \quad &\mapsto \quad aba^{-1} \end{aligned}$$

donc

$$\alpha_a (b) = aba^{-1} = L_a \circ R_{a^{-1}} (b)$$

On note

$$Ad (a) (\xi) = T_e (L_a \circ R_{a^{-1}}) (\xi)$$

où $\xi \in g = T_e G$

3.2.6 Dérivation de type Gateaux: [8]

Soit E, F *deux espaces vectoriels topologiques localment convexe Hausdorff,et soit* U *un ouvert de* E.

Une applicatin $f : U \to F$ *est dite de classe* C^0 *si elle est continue.*

s'il existe un point x *en* U *et un vecteur* v *en* E*,la dérivation directionelle de* f *en* x *en direction* v *défini par:*

$$Df (x, v) = Df_x (v) = \lim_{t \to 0} \frac{f (x + tv) - f (x)}{t}$$

si elle est existe.elle est appelée dérivation de type Gateaux.

Chapitre 4

Intégrabilité

4.1 Introduction

On donne un contre exemple où une algèbre de Lie de dimension infinie ne s'intègre pas en un groupe de Lie et on définit les algèbres de Lie CBH et groupe de Lie CBH et on décrit une classe de sous algèbres de Lie intégrables d'une algèbres de Lie d'un groupe de Lie de dimension infinie qui sont les sous algèbres de Lie CBH,les algèbres de Lie Banachique,les algèbres de Lie de premier espèce.

4.2 Exemple de sous algèbre de Lie de dimension infinie qui ne s'integre pas en un groupe de Lie. [8]

En 1982 tandis que Milnor conjecturait que toute sous-algèbre de Lie fermée est intégrable en un sous-groupe de Lie Omori rappelait qu'il avait exhibé en 1973 un contre-exemple à cette conjecture.

Soit

$$M = T^2 = S^1 \times S^1$$

le tore de dimension deux,de coordonnées x et y modulo 2π

Considérons pour tout angle θ modulo 2π la sous-algèbre de Lie fermée

$$H_\theta = \left\{ X \in \chi^\infty \left(T^2\right) \simeq L\left(Diff\left(T^2\right)\right) \text{ tq } X(x,y) = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y} \right\}$$

de $\chi^\infty(T^2) \simeq L(Diff^\infty(T^2))$ des champs de vecteurs

$$v(x,y) = f(x,y)\,\partial_x + g(x,y)\,\partial_y$$

tel que $g(x,y) = 0$ pour $x \in [\theta, \theta+\pi]$ .Le champ de vecteurs constant v_0 définit par

$$v_0(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}$$

appartient en particulier à H_0 où

$$H_0 = \left\{ X(x,y) = f(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial}{\partial y}, g(x,y) = 0 \text{ pour } x \in [0,\pi] \right\}$$

et le difféomorphisme

$$\exp(tv_0)(x,y)$$

n'est autre que la rotation d'angle t

$$\exp(tv_0)(x,y) = (x+t, y)$$

par suite

$$Ad(\exp(\theta v_0))\,H_0 = H_\theta$$

La sous-algébre fermée H_0 n'est pas stable par l'action adjointe $Ad(g)$ pour $g \in \exp(H_0)$ ne peut pas être une algèbre de Lie d'un sous groupe de Lie de $Diff(T^2)$.

4.3 Cas des algèbres de Lie CBH.[6]

4.3.1 Feuilletage de Stefan

Définition 4.3.1 *Une distribution $C^\infty D$ sur une variété M est la donnée pour tout x_0 de M d'un sous espace D_{x_0} de $T_{x_0}M$ tel que il existe un nombre fini k_0 dependant de x_0, de champ de vecteurs C^∞ de M,$(X_i)_{1\leq i\leq k_0}$ tel que $(X_i(x_0))_{1\leq i\leq k_0}$ engendrent D_{x_0} et que $\forall x \in M\ X_i(x) \in D_x$.*

Définition 4.3.2 *Une variété M est intégrale s'il existe pour tout x une variété S tel que $M = T_x S$.*

Définition 4.3.3 *Un feuilletage de Stefan est une distribution $C^\infty D$ tel que pour tout point il passe une variété intégrale S de D*

$$ie \forall x \in S \qquad T_x S = D_x$$

maximale unique.

4.3.2 EXPRSSION DE LA MULTIPLICATION EN TERME DE CROCHET [3]

Soit g_1 un $\mathbb{k}$ algèbre de Lie associtive unitaire.

On pose $G = g_1 - \{0\}$ qui est un groupe de Lie et on appelle $g = T_e G$ son algèbre de Lie.

Soient X et Y deux éléments de g assez proches de 0,alors $\exp(X)\exp(Y)$ est assez proche de e,on peut alors définir $f(X.Y)$ par:

$$\exp(f(X,Y)) = \exp(X)\exp(Y)$$

Pour expliciter H,on utilise la série valable pour $|z-1| < 1$ et $|e^z - 1| < 1$ $(ie : |z| < \log 2)$

$$\log(z) = \log(1 + (z-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (z-1)^k$$

L'égalité

$$\log e^z = z$$

valable dans les série formelles nous permet d'écrire pour $\|X\| < \dfrac{\log 2}{2}$ et $\|Y\| < \dfrac{\log 2}{2}$

$$f(X,Y) = \log\left(e^X e^Y\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left[\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{X^p}{p!}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{Y^q}{q!}\right) - 1\right]^k$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sum_{p_i, q_i \geq 0} \frac{X^{p_1} Y^{q_1} \ldots\ldots X^{p_k} Y^{q_k}}{p_1! q_1! \ldots\ldots\ldots p_k! q_k!}$$

Si on ne regarde que les termes de degré inferieur à 2,on trouve:

$$\log\left(e^X e^Y\right) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \ldots$$

c'est la formule de Campbell-Baker-Hausdorff.

4.3.3 Algèbre de Lie CBH:[8]

Soit $\sum$ l'ensemble des algébres de Lie topologiques g localement convexes Hausdorff complet tel que la série formelle de $g \times g$ à valeurs dans g qui à $(x; y)$ associe $c(adx)\, y$ tel que $c(adx)\, y = \sum_{n \geq 0} (adx)^n\, y$ est Gateaux analytique aux voisinage de l'origine.

Définition 4.3.4 *Une algèbre de Lie de cette classe sera dite de type CBH ou (CBH).*

Exemple 4.3.1 *L' algèbre de Lie banachique est une algèbre de Lie CBH.*

4.3.4 Groupe de Lie CBH: [8]

Définition 4.3.5 *Une groupe de Lie de dimension infinie dont l'algèbre de Lie est de type CBH ou (CBH) est appelé groupe de Lie CBH.*

Exemple 4.3.2 *Les groupes de dimension finis est de type CBH.*

Remarque 4.3.1 *Les algèbres de Lie $\chi^\infty(M)$ des champs de vecteur d'une variété n'est pas une algèbre de Lie CBH.puisque ne définissent pas un feuilletage de Stefan.*

Théorème 4.3.1 *Une algèbre de Lie appartient à $\sum$ si et seulement si sa série formelle de Campbell-Baker-Hausdorff est Gateaux analytique au voisinage de l'origine.*

Théorème 4.3.2 *Soit G un groupe de Lie CBH d'algèbre de Lie g*
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une sous-algèbre de Lie h de g soit l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie CBH,H plongé dans G,est qu'elle soit de type Campbell-Baker-Hausdorff.Dans ce cas,le plongement est analytique et la composante connexe de H est unique à isomorphisme près.

Preuve. .i) condition nécessaire évidente.

ii) condition suffisante :

Cette partie consiste à intégrer le sous fibré $L^h = \cup_{a \in g} a.h$ c'est à dire on cherche une variété intégrale de la distribution L^h celà revient à trouver un sous groupe H tel que en tout point $x \in G$ on a $T_x H = a.h$

Soit U un voisinage ouvert de zéro dans g tel que

$$\exp : U \to G_e$$

soit un difféomorphisme analytique et tel que la série f de Campbell-Baker-Hausdorff soit analytique dans l'ouvert $U \times U$.

Si h est une sous-algèbre de Lie CBH de g,l'injection $h \hookrightarrow g$ est continue et il existe un voisinage ouvert V' de zéro dans H tel que l'application exponentielle restreinte à V' soit injective et tel que f :$V' \times V' \to h$ siot analytique.

On désigne par V un voisinage équilibré de 0 tel que $f(V, V) \subset V'$:

1) On construire $H_e = \exp(V)$ dans G.

Par cette construction H_e est un sous groupe dans G est symétrique,*ie* $H_e = H_e^{-1}$.

Munisson H_e de la topologie induite par l;application exponentielle et celle de V et déclarons H_e variété analytique par l'unique carte

$(V, \exp)$.

H_e muni du produit de groupe hérité de G est un groupuscule de Lie.Cela découle immediatement de l'analycité de la série de Campbell-Baker-Hausdorff dans $V \times V$.

2) $a.H_e$ est une variété intégrale de L^h au voisinage de a.

En effet cela est vrai pour $a = e$ d'après la formule de Campbell-Baker-Hausdorff et L^H est une distribution invariante à gauche.D'autre part l'intersection $a_1 H_e \cap a_2 H_e$ est ouverte dans $a_1 H_e$ et $a_2 H_e$.Pour s'en convaincre,il suffit de vérifier que $a_1 H_e \cap H_e$ est ouvert dans H_e et dans aH_e pour tout a de G.Mais si $x \in aH_e \cap H_e$,$x = a.y$ où $y = a^{-1}.x$ appartient à H_e.Il est facile de trouver un voisinage ouvert W_e de e dans H_e tel que $y.W_e$ soit un voisinage ouvert de y dans H_e et $x.W_e$ soit un voisinage ouvert de x dans H_e.Mais alors $a.(y.W_e) = a.(g^{-1}.x.W_e) = x.W_e$ appartient à l'intersection $aH_e \cap H_e$ et est ouvert dans H_e et dans aH_e

3) Soit τ la topologie de variété sur G.

et soit Θ la collection des ouverts des variétés intégrales $a.H_e$ où $a \in G$.

Θ est plus fine que τ.

Soit H la composante connexe de l'élément neutre e pour la topologie Θ.

Il est clair que $H_e \subset H$.

4) H est un variété analytique intégrale de L^h.

En effet,si a et a' sont deux éléments du groupe G,tels que l'intrsection $a.H_e \cap a'.H_e$ est non vide,alors $a'^{-1}.a$ appartient à $V \times V \subseteq V'$.L'analycité du changement de carte est donc une conséquence de l'analycité de h dans$V' \times V'$ .H est donc une variété analytique intégrale de L et $\{aH, a \in G\}$ est un feuilletage analytique de L.

Il en résulte que H est un suos-groupe de G.

5) $H \hookrightarrow G$ est un plongement analytique.

6) H sous groupe CBH

oPour l'analyticité de $(a, y) \mapsto a.y^{-1}$ au voisinage de $(a_0, y_0) \in H \times H$,poson $k_0 = a_0 y_0^{-1}$ et remarquons,que si $a = a_0.\gamma$ et $y = y_0.\eta$ alors $ay^{-1} = k_0.i_{y_0}(\gamma.\eta^{-1})$,où i_{y_0} désigne l'automorphisme intérieur de G défini par $i_{y_0} : a \mapsto y_0.a.y_0^{-1}$.

L'analycité de f dans $V' \times V'$ et le fait que $V.V \subset V'$ montrent que $i_{y_0} : H \to H$ est analytique au voisinage de e pour tout y_0 élément de H_e.D'autre part la multiplication à gauche est analytique dans H.Par suite H_e engendre H.Si maintenant x appartient à H.il admet une décomposition finie $x = x_1....x_l$ où pour tout $j \in \{1, ..., l\}, x_j \in H_e$.

Comme $i_{xx'} = i_x \circ i_{x'}$,l'analyticité de i_x dans un voisinage de l'élément neutre de H est démontrée pour tout $x \in H$,Enfin,rappelons que H_e est un groupuscule de Lie.On en déduit,en décomposant le produit $a.y^{-1}$,L'analyticité de ce méme produit de $H \times H$ dans H.Comme par construction l'exponentielle sert de carte locale pour H, H est donc un sous-groupe CBH plongé dans G et admettant h pour algèbre de Lie. ■

4.4 Cas des algèbres de Lie Banachique:[8]

Théorème 4.4.1 *Tout algèbre de Lie banachique L de centre trivial est intégrable en un groupe de Lie Banach (analytique) plongé dans $GL^{(L)}$.*

Preuve. L est munie d'une norme $\|.\|$ telle que :
$\|[x,y]\| \leq \|x\| . \|y\|$.
On sait que c'est une algèbre de Lie de type CBH.Puisque si $x \in L$,alors la norme $\|ad(x)\|$ de $ad(x)$ dans $E_{nd}(L)$ est inférieure à la norme $\|x\|$ de x dans L.Il résulte de le théorème 4-3-2 que L est intégrable par un groupe de Lie CBH plongé dans $GL^{(L)}$.
■

4.5 Cas des algèbres de Lie de première espèce [9]

Définition 4.5.1 *Un groupe de Lie admettant l'exponentielle comme carte au voisinage de l'identité sera dit groupe de Lie de première espèce,Ils définissent une large classe EXP de groupes de Lie de dimension infinie.*

Définition 4.5.2 *Soit L une algèbre de Lie topologique ayant Z pour centre,le quotient $K = \dfrac{L}{Z}$ est naturellement structuré en algèbre de Lie topologique.*
On peut identifier K à une sous-algèbre de Lie topologique de l'algèbre de Lie $End(L)$ des endomorphismes continus de L par l'injection $K \hookrightarrow^{ad} End(L)$.
L'algèbre de Lie L sera dite de première espèce si la fonction exponontielle est définie dans K et structure $\cup_{n=1}^{\infty} (ExpK)^n$ en un groupe de Lie de premier espèce.
La classe des algèbres de Lie de première espèce,notée $L(EXP)$,est précisèment la classe associée à EXP.
C'est l'analycité de la structure de variété sous-jacente compatible avec les opérations de groupe qui distingue un groupe de Lie CBH d'un groupe de Lie première espèce.
L'inclusion $CBH \subset EXP$ est stricte.

Exemple 4.5.1 *Les groupes des difféomorphismes C^{∞} formels de la droite réelle qui fixent un point est un groupe de Lie de premiére espéce qui n'est pas CBH.*

Le deuxieme théorème de Lie $[Lie2CBH]$ pour les groupes CBH admettent immediatement les généralisation suivantes dans le cadre des groupes de première espèce.

Théorème 4.5.1 $[Lie2EXP]$ [8] *Pour qu'une sous-algèbre de Lie H de l'algèbre de Lie g d'un groupe de Lie de première espèce G soit l'algèbre de Lie de première espèce H,plongé dans G,il est nécessaire et suffisant que H soit de première espèce.*

4.6 Cas de sous algèbres de Lie CBH d'un groupe regulier [9]

Définition 4.6.1 *Un groupe de Lie régulier au sens de Milnor-Omori,c'est-à-dire que l'équation différentielle ordinaire*

$$\alpha^{-1}\frac{d\alpha(t)}{dt} = v(t)$$

où

$$v : I = [0,1] \to g$$

est un chemin lisse à valeurs dans l'algèbre de Lie,admet toujour une solution

$$\alpha : I = [0,1] \to G$$

pointée en 0, *ie telle que* $\alpha(0) = e$.

Définition 4.6.2 *On munit l'ensemble* $C^{\infty}([0,1], L(G))$ *des chemins lisses de l'algèbre de Lie* $L(G)$ *de la topologie de la convergence uniforme* C^{∞}.
Selon Milnor un groupe de Lie est régulier si l'équation differentielle ordinaire

$$\alpha^{-1}\frac{d\alpha(t)}{dt} = v(t)$$

avec

$$\alpha(0) = e$$

admet une solution lisse γ_v *quel que soit le chemin lisse* v *de* $L(G)$ *et si la correspondance* $v \mapsto \gamma_v(1)$ *de* $C^{\infty}([0,1], L(G))$ *à valeurs dans* G *est infiniment différentiable.*
On dit alors,que v *est la dérivée logarithmique à gauche du chemin* γ_v.*où* $L(G)$ *désigne l'algèbre de Lie de* G.

Théorème 4.6.1 *Toute sous-algèbre de Lie de type CBH d'une algèbre de Lie d'un groupe régulier de centre trivial est intégrable en un sous-groupe de Lie de type CBH .*

Théorème 4.6.2 *Toute sous-algèbre de Lie CBH .h de g ayant un centre $Z(h)$ de dimension finie est intégrable en un sous groupe de Lie CBH de G.si le centre $Z(h)$ quelconque il est toujours possible d'affiner la topologie de h de sorte qu'elle reste une sous-algèbre de Lie CBH et soit intégrable en un sous-groupe de Lie CBH de G.Dans tous les cas h est intégrable en un groupe de Lie CBH.*

Conclusion 4.6.1 *En général une sous-algébre de Lie de dimension infinie ne s'intégre pas en un sous-groupe de Lie dans tous les cas.*
On a donné un contre exemple sur le tore de dimension deux où on a vu que son sous-algébre de Lie n'est pas intégrable en un sous-groupe de Lie et on a classifié les sous algèbres de Lie qui sont intègrables.

Partie III

Généralisation

Chapitre 5

Notions générales

5.1 Introduction

Dans cette partie on définit la notion de fibré vectoriel pour definir la notion génerale des algébroides de Lie

et on définit les notions de groupoïde de Lie et on décrit comme pour les algèbres de Lie ,l'algèbroïde de Lie d'un Groupoïde de Lie qui est un exemple d'algèbroïde.

5.2 Notions générales:

5.2.1 Fibré vectoriel:

Définition 5.2.1 *Soient E un ensemble,B une variété différentielle de classe C^p, π : $E \to B$ une surjection.*
Une structure de fibré vectoriel de base B,de projection π,de rang k,et de classe C^q $(q \leq p)$ est définie sur E par la donnée :
i) d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}_{i\in I}$ de B.
ii) d'une famille $\{\Psi_i\}_{i\in I}$ d'applications telle que:
-$\forall i \in I, \Psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times V$ est une bijection,V étant un espace vectoriel réel de dimension finie k,indépendant de $i \in I$.
-$pr_1 \circ \Psi_i = \pi/_{\pi^{-1}(U_i)}, \forall i \in I$.

-$\forall (i,i') \in I^2, \forall x \in U_i \cap U_{i'}$,*l'application* $A_{ii'}(x) : V \to V$ *définie par* $A_{ii'}(x)(v) = (pr_2 \circ \Psi_i \circ \Psi_{i'}^{-1})(x,v)$ *est un automorphisme de l'espace vectoriel* V.
-$\forall \left(i,i'\right) \in I^2$,*l'application* $A_{ii'}(x) : x \mapsto A_{ii'}(x)$ *est une application de classe* C^q *de* $U_i \cap U_{i'}$ *dans* $GL(V)$.

Exemple 5.2.1 *Soient* M *une variété différentielle de classe* C^p *et de dimension* n, TM *son fibré tangent,*$p : TM \to M$ *l'application pied et* $(A) = \{c_i = (U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ *l'atlas complet de* $M.\forall i \in I$,*on définit* $\Psi_i : p^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ *par:*
$\Psi_i(\xi) = \left(p(\xi), d_{p(\xi)}\varphi_i(\xi)\right)$
la famille $\{\Psi_i\}_{i \in I}$ *satisfait aux condition (ii) de la définition (1) pour* $E = TM, B = M, \pi = P$,*les morphismes de transition,qui s'expriment alors par:*
$A_{ij}(x) = D\left(\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}\right)_{\varphi_j(x)} \in GL(n, \mathbb{R})$,*étant de classe* C^{p-1}.
Le fibré tangent TM *est bien un fibré vectoriel de base* M,*de projection* p,*de rang* $n = \dim M$ *et de classe* C^{p-1}.

Exemple 5.2.2 *Si* B *est une variété de classe* C^p,$E = B \times \mathbb{R}^k$ *est une fibré vectoriel de base* B,*de projection* $\pi = pr_1$,*de rang* k *et de classe* C^p.
Un tel fibré vectoriel est dit trivial.
Un cas particulier si $k = 1$ *et* $B = S^1$ *on a* $S^1 \times \mathbb{R} \to S^1$ *est un fibré cylindre de base* S^1.

5.2.2 Morphisme de fibres vectoriels

Définition 5.2.2 *Soient* E, E' *deux fibrés vectoriels de classe* C^p,*de bases respectives* B, B',*de projection* π, π',*et soit* $f \in C^p(B, B')$.*Une application* $g \in C^p(B, B')$ *est un morphisme de fibré vectoriels au-dessus de* f *si :*
i) $\pi' \circ g = f \circ \pi$
ii) $\forall x \in B, g/_{E_x} \in Hom_{\mathbb{R}}\left(E_x, E'_{f(x)}\right)$

Définition 5.2.3 *Une fibre* E_x *d'un fibré vectoriel* E *est définie par* $E_x = \pi^{-1}(x)$.

Exemple 5.2.3 *Soit* $f \in C^p(M, M')$ *où* M *et* M' *sont des variété différentielles de classe* C^p.*Alors* $g = Tf : TM \to TM'$ *est un morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de* f.

5.3 Algèbroïde de Lie et Groupoïde de Lie

5.3.1 Algèbroïde de Lie

Définition 5.3.1 *Un algebroïde de Lie sur M est un triplet ($E \to M, [,], \rho)$ où $E \to M$ est un fibré vectoriel C^∞ de base M où le crochet $[,]$ est une structure de $\mathbb{R}-$algèbre de Lie sur $Sect(M, E)$ et ρ un morphisme de fibrés vectoriels C^∞ de E dans TM avec:*
$s, s' \in Sect(M, E)$
$[\rho \circ s, \rho \circ s'] = \rho \circ [s, s']$
$[s, f.s'] = f.[s, s'] + (\rho \circ s)(f).s'$.

Définition 5.3.2 *Soient $\widetilde{\rho}_1 : E_1 \to \chi(M)$ et $\widetilde{\rho}_2 : E_2 \to \chi(M)$ deux algebroides de Lie. Un isomorphisme d'algebroïdes de Lie de E_1 dans E_2 est un isomorphisme de fibré vectoriels $\Psi : E_1 \to E_2$ tel que :*
i) $\widetilde{\Psi} : s \in E_1 \to \Psi \circ s \in E_2$ est un morphisme d'algèbres de Lie donc aussi un isomorphisme car Ψ isomorphisme de fibrés.
ii) $\rho_2 \circ \Psi = \rho_1$.

Exemple 5.3.1 *Le fibré tangent et cotangent sont des exemples d'algèbroïde car ce sont des algèbres de Lie.*

5.3.2 Groupoïde de Lie

Définition 5.3.3 *On appelle structure de groupoïde sur un ensemble Γ la donnée de deux applications α et β de Γ dans lui -mème de mème image $\Gamma_0 \subset \Gamma$ d'une application m définie sur la partie Γ_2 de $\Gamma \times \Gamma$ formée des couples (x, y) tels que $\beta(y) = \alpha(x)$ et d'une application i de Γ dans Γ verifiant :*
1) Si l'un des produits $m(x, m(y, z))$ et $m(m(x, y), z)$ est defini l'autre l'est aussi et lui est égal.
2) Les produits $m(\beta(x), x), m(x, \alpha(x))$ sont definis et égaux à x.
3) $m(x, i(x))$ est definie et égal à $\beta(x)$
$m(i(x), x)$ est defini et égal à $\alpha(x)$

Remarque 5.3.1 Γ_0 *est appelé l'ensemble des unités.*

Propriétés:

1) Pour tout x

$$\alpha\left(\beta\left(x\right)\right)=\beta\left(x\right),\beta\left(\alpha\left(x\right)\right)=\alpha\left(x\right)$$

2) Si $(x,y)\in\Gamma_2$

$$\beta\left(m\left(x,y\right)\right)=\beta\left(x\right)$$

et

$$\alpha\left(m\left(x,y\right)\right)=\alpha\left(y\right)$$

pour tout $x\in\Gamma$

$$\alpha\left(\alpha\left(x\right)\right)=\alpha\left(x\right)$$

et

$$\beta\left(\beta\left(x\right)\right)=\beta\left(x\right)$$

$$\alpha\left(i\left(x\right)\right)=\beta\left(x\right)$$

et

$$\beta\left(i\left(x\right)\right)=\alpha\left(x\right)$$

3) $m\left(\alpha\left(x\right),\alpha\left(x\right)\right)=\alpha\left(x\right)$ et $m\left(\beta\left(x\right),\beta\left(x\right)\right)=\beta\left(x\right)$

4) $m\left(x,y_1\right)=m\left(x,y_2\right)\Rightarrow y_1=y_2$

$m\left(x_1,y\right)=m\left(x_2,y\right)\Rightarrow x_1=x_2$

5) $i\left(i\left(x\right)\right)=x$

Définition 5.3.4 *Soit Γ,Γ' deux groupoïdes,on appelle morphisme de groupoïdes de Γ dans Γ' une application $f:\Gamma\to\Gamma'$ tel que si $(x,y)\in\Gamma_2$ alors $\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\in\Gamma'_2$ et $f\left(m\left(x,y\right)\right)=m'\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)$ où m multiplication sur Γ et m' multiplication sur Γ'.*

Définition 5.3.5 *Un groupoïde de Lie Γ est une variété munie d'une structure de groupoïde verifiant :*

1) L'ensemble des unités Γ_0 est une variété separée.

2) α et β sont des submersions.

3) L'application $m:\Gamma_2\to\Gamma$ est differentiablle.

4) L'application

$$\begin{aligned} i &: \Gamma \rightarrow \Gamma \\ x &\mapsto i(x) \end{aligned}$$

est un diffeomorphisme.

Exemple 5.3.2 *Le groupoïde grossier*
Soit X un ensemble.
Soit f :$X \rightarrow X$ une application on identifie f à son graphe G_f.
$f = Graphe\,(f) = G_f. = \{(f\,(x,x))\,, x \in X\} \subset X \times X$
Soient f,g :$X \rightarrow X$
$(z,x) \in G_{f \circ g}$ *s'il existe* $y \in X/\,(z,y) \in G_f.$ *et* $(y,x) \in G_g.$
on peut donc composer deux parties quelconques de $X \times X$.
on dit que (x,y) et (w,z) sont composablles si $y = w$.
$\Gamma_2 = \{((x,y)\,,(w,z)) : \alpha\,(x,y) = y = \beta\,(w,z) = w\}$
on note le produit $(x,z) = m\,((x,y)\,,(y,z))$
$\Gamma_0 = \{(x,x) : x \in X\}$
m :$\Gamma_2 \rightarrow \Gamma$ *et* $i\,(x,y) = (y,x)$

Exemple 5.3.3 *Le groupoïde transformationnel*
Soit G un groupe de Lie,et soit $\Gamma = G \times E$

$$\begin{aligned} \rho &: G \times E \rightarrow E \\ (a,x) &\mapsto a.x \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha\,(a,x) &= x \\ \beta\,(a,x) &= a.x = \rho\,(a,x) \\ m\,((a,x)\,,(b,y)) &= (a.b,y) \\ x &= \rho\,(b,y) = b.y \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}\Gamma & = & G \times E \\ \alpha & \downarrow & \downarrow \beta \\ \Gamma_0 & = & E = \{1\} \times E \subset \Gamma\end{array}$$

Remarque 5.3.2 *Si* $\Gamma_0 = \{e\}$ *alors le groupoïde est un groupe de Lie.*
un groupe de Lie est un groupoïde avec $\alpha = \beta = id$ *et* $\Gamma_0 = \{e\}$.

5.4 Algebroïde de Lie d'un groupoïde de Lie

Soit

$$\Gamma \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \Gamma_0$$

un groupoïde de Lie .
et soit $E = KerT\beta\backslash_{\Gamma_0}, E$ sous fibré vectoriel de Γ :

$$\begin{array}{ccc}T\Gamma_0 & \longleftarrow & {}^{T\alpha}E = KerT\beta\backslash_{\Gamma_0} \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & \Gamma_0 & \end{array}$$

on construit une structure donc d'algebroïde de Lie S s'étude de façon unique en X $\backslash_{\Gamma_0}$ où X champ invariant à gauche sur $\Gamma, S = X \backslash_{\Gamma_0}$

$[s, s'] = [X, X'] \backslash_{\Gamma_0}$ où $S' = X'\backslash_{\Gamma_0}$ définit un crochet de Lie et on a les propirétés 1) et 2) de l'algebroïde.

Chapitre 6

La formule de Campbell-Baker-Hausdorff pour les groupoïde de Lie

6.1 Introduction

On donne dans ce chapitre une généralistion de la formule Campbell-Baker-Hausdorff dans le cas des groupoïdes de Lie.

6.2 La structure locale d'un groupoïde de Lie

6.2.1 Les cartes

Soit Γ un groupoïde de Lie

$$\Gamma \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \Gamma_0$$

avec $\dim \Gamma_0 = n, \dim \Gamma = m$,et soit g son algébroïde de Lie.On va expliciter dans cette partie la structure de Γ dans une carte convenablement choisie au voisinage d'un point $x_0 \in \Gamma_0 \subset \Gamma$.

Comme β est une submersion au point $x_0 \in \Gamma_0 \subset \Gamma$,il existe daprés [11] U voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^n$,V voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{R}^m$ et les cartes $\Psi : U \times V \to \Gamma, \varphi$:

$U \to \Gamma_0$ vérifiant:

1) $\Psi(0,0) = x_0$

2) $\beta(\Psi(u,v)) = \varphi(u)$

3) $\Psi(U \times \{0\}) = \Psi(U \times V) \cap \Gamma_0$.

Remarque 6.2.1 *Les conditions 2) et 3) impliquent $\varphi(u) = \Psi(u,0)$,la structure de Γ pourra être exprimée en utilisant seulement la carte Ψ.*

Remarque 6.2.2 (11) *A tout carte Ψ ainsi donnée dans Γ on associe une canoniquement une carte de l'algebroïde de Lie de g.*

6.2.2 La multiplication et l'inversion

Rappel

1) Pour $a \in \Gamma$ on appelle $\alpha(a) = a^{-1}a$ le domaine de a et $\beta(a) = aa^{-1}$ l'image de a.

Pour exprimer le produit et l'inversion de Γ dans la carte Ψ on a besoin de la forme de l'application α dans cette carte,forme qui est explicitée dans le lemme suivant:

Lemme 6.2.1 *Il existe une submersion $\sigma : U \times V \to U$ telle que $\alpha(\Psi(u,v)) = \varphi(\sigma(u,v))$ .De plus $\sigma(u,0) = u$.*

Preuve. En réduisant eventuellement V,on peut supposer que $\alpha(\Psi(u,v)) \in \varphi(U)$,pour $(u,v) \in U \times V$.il existe alors un élément $\sigma(u,v) \in U$ tel que $\alpha(\Psi(u,v)) = \varphi(\sigma(u,v))$.

Evidamment $\sigma = \varphi^{-1} \circ \alpha \circ \Psi$ est une submersion,comme expresion dans les cartes de la submersion α.Enfin $\varphi(\sigma(u,0)) = \alpha(\Psi(u,0)) = \Psi(u,0) = \varphi(u)$,donc $\sigma(u,0) = u$.

■

On peut maintenant donner les développement dans la carte Ψ de la multiplication et de l'inversion de Γ.Le résultat suivant représente l'analogue de la formule de Campbell-Baker-Hausdorff pour les groupoïdes de Lie.

Théorème 6.2.1 *i) Pour $u, u_1 \in U$ et $v, w \in V$ on a $(\Psi(u,v), \Psi(u_1,w)) \in \Gamma_2$ si et seulement si $u_1 = \sigma(u,v)$ .Dans ce cas le produit est donné par $\Psi(u,v)\Psi(\sigma(u,v),w) =$*

$\Psi(u, p(u,v,w))$ *où* $p : U \times V \times V \rightarrow V$ *est une application différentiable qui a un développement de la forme*

$$p(u,v,w) = v + w + B(u,v,w) + O_3(u,v,w)$$

avec B *bilinéaire en* (v,w) *et* $O_3(u,v,w)$ *de l'ordre de* $\|(v,w)\|^3$.

ii) Soit $(u,v) \in U \times V$ *tel que* $\Psi(u,v)^{-1} \in \Psi(U \times V)$ *.Alors* $\Psi(u,v)^{-1} = \Psi(\sigma(u,v), w)$ *, où* w *vérifie* $p(u,v,w) = 0$*.De plus on a le développement*

$$w = -v + B(u,v,w) + O_3(u,v)$$

avec $O_3(u,v)$ *de dégré d'homogénéité superieure à* 3 *en* v.

Preuve. i) Soit $a = \Psi(u,v)$ et $h = \Psi(u_1, w)$ .On a $\alpha(a) = \varphi(\sigma(u,v))$ et $\beta(h) = \varphi(u_1)$ ce qui montre que $(a,h) \in \Gamma$ si seulement si $u_1 = \sigma(u,v)$.De plus $\alpha(ah) = \alpha(a) = \varphi(u)$ assure l'existence d'un unique $p(u,v,w) \in V$ tel que :

$\Psi(u,v)\Psi(\sigma(u,v), w) = \Psi(u, p(u,v,w))$

On définit l'application $p : U \times V \times V \rightarrow V$,qui vérifie en particulier $p(u,0,w) = w$ et $p(u,v,0) = v$.

En effet

$\Psi(u, p(u,0,w)) = \Psi(u,0)\Psi(\sigma(u,0), w) = \varphi(u)\Psi(u,w) = \Psi(u,w)$

$\Psi(u, p(u,v,0)) = \Psi(u,v)\Psi((\sigma(u,v), 0)) = \Psi(u,v)\alpha(\Psi(u,v)) = \Psi(u,v)$

Il s'ensuit que $\dfrac{\partial p}{\partial v}(u,v,0) = I$, $\dfrac{\partial p}{\partial w}(u,0,w) = I$, $\dfrac{\partial^2 p}{\partial v^2}(u,0,0) = 0$, $\dfrac{\partial^2 p}{\partial w^2}(u,0,0) = 0$, et par un développement de Taylor

$p(u,v,w) = p(u,0,0) + \dfrac{\partial p}{\partial v}(u,0,0)v + \dfrac{\partial p}{\partial w}(u,0,0)w + B(u,v,w) + O_3(u,v,w) = v + w + B(u,v,w) + O_3(u,v,w)$,où $B(u,v,w)$ est pour chaque u bilinéaire en (v,w) et $O_3(u,v,w)$ est homogène d'un degré superieur à 3 en v et w.

ii) Soit $a = \Psi(u,v)$ .On cherche $u_1$et w tel que $a^{-1} = \Psi(u_1, w)$ .D'une part

$\alpha(a^{-1}) = \varphi(u_1)$ et $\beta(a) = \varphi(\sigma(u,v))$ impliquent $u_1 = \sigma(u,v)$.D'autre part comme $aa^{-1} = \beta(a)$,on déduit $\Psi(u,v)\Psi(\sigma(u,v), w) = \Psi(u,0)$,donc $p(u,v,w) = 0$.Il existe d'aprés le théorème des fonctions implicites un fonction f différentiable tel que $w = f(u,v)$.

On développe

$f(u,v) = f(u,0) + \dfrac{\partial f}{\partial v}(u,0)\,v + ... = f_1(u,v) + f_2(u,v) + ...$

où $f_k(u,v)$ est de degré d'homogénéité k en v.On va déterminer f_1 et f_2.Pour cela on utilise $p(u,v,w) = 0$.On a donc

$0 = p(u,v,w) = v + w + B(u,v,w) + ...$

$= v + f_1(u,v) + f_2(u,v) + ... + B(u,v,f_1(u,v) + f_2(u,v) + ...) + ...$

Le terme de degré d'homogénéité 1 dans le développement précédant est $v + f_1(u,v)$ donc $f_1(u,v) = -v$.On remplace dans l'équation précédante est on trouve $0 = f_2(u,v) + B(u,v,-v) + ...$En identifiant le terme de degré 2 on obtient $f_2(u,v) = B(u,v,v)$. ■

Perspectives

Puisque la géneralisation de la formule de Campbell-Baker-Hausdorff est Faite dans le cas des algebroïdes et des groupoïdes de Lie.

Le probléme qui reste ouvert et qui s'etale sur de nouveaux horisons pour la recherche est le suivant :

est-ce-qu'on peut intégrer un algebroïde de Lie de type CBH en un groupoïde de Lie de type CBH?

Bibliographie

[1] N.Bourbaki, *Groupes et algèbres de Lie* ,(Hermann, Paris)chapitre 2,3, 1972.

[2] A.Coste,P.Dazord, A. Weinstein, *Groupoides symplectiques* 2/A-1987. Publications du Departement de Mathématiques de l'université Claude Bernard Lyon.1.

[3] B.Keller, *Introduction aux groupes et algébres de Lie, cours de B. Keller*, Décembre 2001.

[4] T.Masson, *Groupe et algèbre de Lie,* Version de 19 Décembre 2001. 91405 Osary Cedex,France.

[5] S.Mehdi, *Introduction aux algèbres de Lie,* Ecole Doctorale Franco-Algerienne de Géometrie Masacra, Décembre 2005.

[6] B. Ramazan, *Une Formule du type Campbell-Baker-Hausdorff pour les groupoides,* arXiv:math/0001149v1[math.DG] 26 Jan 2000.

[7] H.Rosenberg:*Topologie Algébrique,* Faculté des Sciences D'ORSAY.

[8] T. Robart, *Sur l'intégrabilité des sous algèbres de Lie en dimension infinie,* Can.J.Math. Vol.49(4),1997 pp.820-839.

[9] N. Karman, Thierry robart, *Pseudo groups of infinite type ,Journal de Lie Theory,* 2001, heldermanm verlag, Berlin.

[10] J. M Carbollo, *Groupes et algèbres de Lie,* 2005.

[11] V. Nistor, A. Weinsteim, P. Xu *Pseudo differential operators on differential geometry,* Pacific Journal of Mathematics vol. 189,N. 1, 1999.

Résumé

On sait que pour toute groupe de ***G*** Lie on peut construire une algèbre de Lie notée $\boldsymbol{g=T_eG}$ qui est isomorphe à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariant par translation à gauche
Dans ce travail on s'intéresse à la réciproque :
Est-ce que pour toute algèbre de Lie ***g*** on peut construire un groupe de Lie ***G*** ?
Nous avons démontré que cette proposition est vraie pour les algèbres de Lie de dimension finie, mais par contre exemple on a démontré qu'elle n'est pas vraie en dimension infinie.
Ensuite on donne une classification des algèbres de Lie de dimension infinie qui s'intègre en un groupe de Lie.
Enfin on généralise la formule de Campbel-Baker-Hausdorff. le cas des groupoïdes de Lie

خلاصة

نعلم أنه من أجل كل زمرة G يمكن إنشاء جبر لي نرمز له بالرمز $g=T_eG$ وهو يماثل جبر حقول الأشعة غير المتغيرة بالانسحاب من اليسار .

في هذا العمل نهتم بالقضية العكسية أي :

هل يمكن إنشاء من كل جبر ليg زمرة ليG للجبر g ؟

في حالة جبور لي ذات البعد المنتهي يكون عكس القضية صحيح ، أما في حالة جبور لي ذات البعد الغير المنتهي يكون عكس القضية غير صحيح دوما.

نعطي مثال حيث عكس القضية غير صحيح دوما، ثم نصنف جبور لي ذات البعد المنتهي التي يمكن إنشاء منها زمر لي .

في الأخيرنقوم بتعميم صيغة كامبال باكار هوسدورف في حالة غروبويد لي .