



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR  
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE LARBI TEBESSI - TEBESSA-  
FACULTE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE



Mémoire de fin d'études pour l'obtention du Diplôme de Master  
Option : Energétique

Thème

## Simulation numérique d'un échangeur de chaleur coaxial à courants parallèles

Présenté par :

- DAI Lylia

Encadré par :

M<sup>r</sup>. BOUAFFANE Abdelkrim

Devant le Jury

D<sup>r</sup>. BELAZIZIA Abdennacer

M.C.A

Président

Université Larbi Tébessi-Tébessa

M<sup>me</sup>. CHELLOUG F.ZOHRA

M.A.A

Examinatrice

Université Larbi Tébessi-Tébessa

M<sup>r</sup>. BOUAFFANE Abelkrim

M.A.A

Rapporteur

Université Larbi Tébessi-Tébessa

Année universitaire : 2019- 2020



## Remerciements

Avant tout je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donné la force et la volonté pour accomplir ce travail

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements et ma gratitude particulièrement à monsieur BOUAFFANE Abdelkrim, pour l'encadrement de ce mémoire de master, pour son aide très précieuse et ses conseils qui m'ont permis de présenter ce travail.

Un vif remerciement est dédié à tous les membres de génie mécanique.

Je voudrais remercier tous les enseignants et enseignantes que j'ai connus tout au long du cycle de mes études.



# *Dédicaces*



*A la mémoire  
de ma mère*

*A toute ma famille surtout ma chère tante : Mounira.*

*À toutes mes amis de près ou de loin.*

*À tous ceux qui me sont chers.*

## Résumé

Une étude numérique de la convection forcée laminaire et stationnaire à l'intérieure d'un échangeur de chaleur coaxial cocourant a été présentée dans ce travail. L'écoulement des deux fluides est régi par les équations de Navier Stokes. Le transfert de chaleur par convection forcé est gouverné par l'équation d'énergie. La forme finale des équations gouvernantes et les conditions aux limites sont transformées à la forme adimensionnelle et discrétisées par la technique des volumes finis. Les équations algébriques obtenues par la discrétisation sont résolues itérativement par l'algorithme Simple.

L'étude consiste à examiner l'influence de deux paramètres importants comme le nombre de Reynolds dans les deux tubes et la longueur des tubes sur les caractéristiques thermique de l'échangeur. Les résultats obtenus montrent que la puissance thermique échangée entre l'eau chaude et l'eau froide s'améliore avec l'augmentation du nombre de Reynolds et la longueur de l'échangeur. L'augmentation du nombre de Reynolds (interne ou externe) fait diminuer l'efficacité, tandis que l'augmentation de la longueur fait augmenter l'efficacité.

**Mots-clés :** Echangeur de chaleur, convection forcée, volume fini.

## **Abstract:**

This work presents a numerical study of laminar and stationary forced convection inside a co-current coaxial heat exchanger. The flow of two fluids is controlled by the equation of Navier Stokes. The transfer of heat through forced convection is governed by energy equation. The final form of the governing equations and the boundary conditions are transformed to the dimensionless form and discretized by the technique of finite volumes. The algebraic equations obtained by discretization are solved iteratively by the SIMPLE algorithm.

This study consists on examining the influence of two important parameters like the Reynolds number in the two tubes and the length of the tubes on the thermal characteristics of the exchanger. The results obtained show that the thermal flow exchanged between hot and cold water improves with the increase in the Reynolds number and the length of the exchanger. The increasing in Reynolds number (internal or external) decreases efficiency, while increasing length increases efficiency.

**Keywords:** Heat Exchangers, forced convection, finite volume.

# Sommaire

Remerciements	
Dédicaces	
Résumés	
Sommaire	
Nomenclatures	
Liste des figures	
Liste des tableaux	
Introduction générale.....	1

## Chapitre I : Généralités sur les Echangeurs de Chaleur

I.1 Introduction.....	3
I.2 Définition d'un échangeur.....	3
I.3 Classification des échangeurs de chaleur.....	3
I.3.1 Classification selon l'état thermodynamique des fluides.....	4
I.3.2 Classification selon la compacité de l'échangeur.....	5
I.3.3 Classification selon la configuration des écoulements.....	6
I.3.3.a Ecoulement des deux fluides parallèles en même sens (Echangeurs à co-courants).....	6
I.3.3.b Ecoulement des deux fluides parallèles mais de sens contraires (Echangeur Contre-courant).....	7
I.3.3.c Ecoulement des deux fluides croisés avec ou sans brassage (Echangeur croisés).....	8
I.3.4 Classification selon les types de construction/technologies.....	9
I.3.4.a Échangeurs tubulaires.....	9
I.3.4.b Echangeurs à plaques.....	13
I.3.5 Classification selon le procédé de transfert.....	15
I.3.6 Classification selon le nombre de fluides utilisés.....	15
I.4 Autres types d'échangeurs.....	16
I.5 Critères de performance d'un échangeur .....	16
I.5.1 Performance thermique.....	16

I.5.2 Performance hydraulique.....	17
I.6 Conclusion.....	17

## **Chapitre II : Modèle Mathématique**

II.1 Introduction.....	18
II.2 Présentation du problème.....	18
II.3 Équation gouvernantes.....	19
II.3.1 Hypothèses simplificatrices.....	21
II.3.2 Conditions aux limites.....	22
II.3.3 Diamètre hydraulique.....	23
II.4 Forme adimensionnelle du modèle mathématique.....	24
II.4.1 Conditions aux limites.....	27
II.5 Nombre de Nusselt local.....	28
II.5.1 Nombre de Nusselt local interne.....	28
II.5.2 Nombre de Nusselt local externe.....	29
II.5.3 Coefficient d'échange global.....	30
II.6 Efficacité d'un échangeur.....	32
II.7 Conclusion.....	32

## **Chapitre III : Discrétisation des Equations Gouvernantes**

III.1 Introduction.....	33
III.2 Méthode des volumes finis (MVF).....	33
III.2.1 Principe.....	33
III.3 Etapes de la méthode des volumes finis.....	36
III.4 Equation générale de transfert.....	36
III.5 Discrétisation des équations de conservation.....	37
III.5.1 Discrétisation de l'équation de continuité.....	37
III.5.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement selon l'axe or.....	38
III.5.3 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement selon l'axe oz.....	42

<b>III.5.4</b>	Discrétisation de l'équation d'énergie.....	44
<b>III.6</b>	Couplage vitesse pression.....	48
<b>III.6.1</b>	L'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations).....	48
<b>III.6.2</b>	L'algorithme SIMPLE passe par des étapes dans l'ordre.....	51
<b>III.7</b>	Méthode de résolution des équations algébriques.....	53
<b>III.7.1</b>	Méthode de balayage par ligne.....	53
<b>III.7.2</b>	Méthode de résolution TDMA.....	55
<b>III.8</b>	Critère de convergence.....	56
<b>III.9</b>	Méthode de relaxation.....	56
<b>III.10</b>	Conclusion.....	57

## **Chapitre IV : Résultats et Interprétations**

<b>IV.1</b>	Introduction.....	58
<b>IV.2</b>	Validation du code de calcul.....	58
<b>IV.3</b>	La convergence et la stabilité du programme.....	61
<b>IV.4</b>	Présentation des résultats.....	64
<b>IV.4.1</b>	Effet de Reynolds sur les caractéristiques thermiques de l'échangeur.....	67
<b>IV.4.2</b>	Comparaison entre les trois cas.....	73
<b>IV.4.3</b>	L'influence de la longueur sur les caractéristiques thermique de l'échangeur.....	75

Conclusion générale.

Références bibliographiques.

## Nomenclatures

Symboles	Signification	Unités
L	La longueur de l'échangeur de chaleur	m
$D_h$	Diamètre hydraulique	m
$r_{int}$	Rayon du tube intérieur	m
$r_{ext}$	Rayon du tube extérieur	m
e	Épaisseur de paroi intérieure	m
$C_p$	Chaleur spécifique de fluide	J/Kg.°K
$h_{int}$	Coefficient d'échange de chaleur interne	W/m <sup>2</sup> .°K
$h_{ext}$	Coefficient d'échange de chaleur externe	W/m <sup>2</sup> .°K
$h_g$	Coefficient global d'échange de chaleur	W/m <sup>2</sup> .°K
$\lambda_f$	Conductivité thermique du fluide	W/m.°K
P	Pression	Pa
T	Température	°K
$T_{01}$	Température de fluide chaud (interne)	°K
$T_{02}$	Température de fluide froid (externe)	°K
$T_p$	Température de la paroi	°K
$\nu$	Viscosité cinématique	m <sup>2</sup> /s
$\mu$	Viscosité dynamique	Kg/m.s
$\rho$	La masse volumique	Kg/m <sup>3</sup>
U	Vitesse d'écoulement du fluide selon la direction Z	m/s
V	Vitesse d'écoulement du fluide selon la direction r	m/s
W	Vitesse d'écoulement du fluide selon la direction $\theta$	m/s
$\emptyset$	Flux de chaleur convectif	W
<b>Nombres adimensionnels:</b>		
$Re$	Nombre de Reynolds	[---]
$Pr$	Nombre de Prandtl	[---]
$Nu$	Nombre de Nusselt	[---]

### Variables adimensionnelles:

$r^*$	Composante adimensionnelle selon la direction ( $or$ )	[---]
$Z^*$	Composante adimensionnelle selon la direction ( $oz$ )	[---]
$V^*$	Composante de vitesse adimensionnelle selon la direction ( $or$ )	[---]
$U^*$	Composante de vitesse adimensionnelle selon la direction ( $oz$ )	[---]
$\theta$	Température adimensionnelle	[---]

### Indices inferieurs :

E	Nœud considéré du côté Est du nœud P
e	La face Est du volume de contrôle considéré
N	Nœud considéré du côté Nord du nœud P
n	La face Nord du volume de contrôle considéré
P	Nœud considéré du maillage
S	Nœud considéré du côté Sud du nœud P
s	La face Sud du volume de contrôle considéré
W	Nœud considéré du côté Ouest du nœud P
w	La face Ouest du volume de contrôle considéré

## Liste des figures

<b>Figure I.1 :</b> Échangeur eau/air d'automobile.....	5
<b>Figure I.2:</b> (a) échangeur sans ailettes, (b) échangeur avec ailettes.....	5
<b>Figure I.3 :</b> Représentation de l'évolution de température dans un échangeur à co-courant.....	6
<b>Figure I.4 :</b> Représentation de l'évolution de température dans un échangeur à co-courant.....	7
<b>Figure I.5 :</b> Représentation d'un échangeur à courant croisé.....	8
<b>Figure I.6 :</b> Représentation de l'évolution de température (2D) dans un échangeur à courant croisé.....	9
<b>Figure I.7 :</b> Différents types d'échangeurs tubulaires.....	10
<b>Figure I.8 :</b> Échangeur monotube. ....	10
<b>Figure I.9 :</b> Échangeur à tube coaxiaux.....	11
<b>Figure I.10 :</b> Divers formes des tubes à ailettes.....	12
<b>Figure I.11:</b> Échangeur thermique à tubes et calandre.....	13
<b>Figure I.12 :</b> Échangeur à plaque.....	13
<b>Figure I.13 :</b> Échangeur à plaque en spirale. Les deux fluides circulent en contre-courant.....	14
<b>Figure I.14 :</b> Classification des échangeurs de chaleur suivant le nombre de fluides utilisés.....	16
<b>Figure II.1 :</b> Géométrie du problème.....	19
<b>Figure III.1 :</b> Volume de contrôle typique bidimensionnel.....	34
<b>Figure III.2 :</b> Volume de contrôle décalé pour u et v dans un maillage entrelacé.....	35
<b>Figure III.3 :</b> Etapes de méthodes des volumes finis [16].....	36
<b>Figure III.4 :</b> Volume de contrôle décalé vers le haut.....	39
<b>Figure III.5 :</b> Volume de contrôle décalé vers la droite.....	43
<b>Figure III.6 :</b> Schéma présente l'algorithme SIMPLE.....	52
<b>Figure III.7 :</b> définition de l'intervalle de calcul.....	53

<b>Figure IV.1</b> : Comparaison de la solution numérique avec la solution analytique.....	59
<b>Figure IV.2</b> : Comparaison entre le nombre de Nusselt calculé et les valeurs présentées dans la référence [12].....	60
<b>Figure IV.3</b> : Variation du résidu $R_U$ en fonction des itérations.....	62
<b>Figure IV.4</b> : Variation du résidu $R_V$ en fonction des itérations.....	62
<b>Figure IV.5</b> : Variation du résidu $R_T$ en fonction des itérations.....	63
<b>Figure IV.6</b> : Variation de Nusselt moyen en fonction des itérations.....	63
<b>Figure IV.7</b> : Variation de Nusselt moyen en fonction des itérations.....	64
<b>Figure IV.8</b> : Profile de vitesse en régime établi dans un échangeur co-courant.....	65
<b>Figure IV.9</b> : Contour de la température dans un échangeur co-courant.....	66
<b>Figure IV.10</b> : Distribution de température dans un échangeur co-courant.....	66
<b>Figure IV.11</b> : Variation du flux de chaleur échangé en fonction du Reynolds.....	68
<b>Figure IV.12</b> : Variation du coefficient d'échange global en fonction du Reynolds.....	69
<b>Figure IV.13</b> : Variation de l'efficacité en fonction du Reynolds.....	69
<b>Figure IV.14</b> : Variation du flux de chaleur échangé en fonction du Reynolds.....	70
<b>Figure IV.15</b> : Variation du coefficient d'échange global en fonction du Reynolds.....	70
<b>Figure IV.16</b> : Variation de l'efficacité en fonction du Reynolds.....	71
<b>Figure IV.17</b> : Variation du flux de chaleur échangé en fonction du Reynolds.....	71
<b>Figure IV.18</b> : Variation du coefficient d'échange global en fonction du Reynolds.....	72
<b>Figure IV.19</b> : Variation de l'efficacité en fonction du Reynolds.....	72
<b>Figure IV.20</b> : Comparaison de flux échangé entre les trois cas.....	73
<b>Figure IV.21</b> : Comparaison du coefficient d'échange global entre les trois cas.....	74
<b>Figure IV.22</b> : Comparaison de l'efficacité entre les trois cas.....	74
<b>Figure IV.23</b> : Variation du flux de chaleur échangé et le flux maximal en fonction de longueur.....	76
<b>Figure IV.24</b> : Variation du coefficient d'échange global en fonction de longueur.....	76
<b>Figure IV.25</b> : Variation de l'efficacité en fonction de longueur.....	77
<b>Figure IV.26</b> : Variation de $(\Delta T_S)$ en fonction de longueur.....	77

## Liste des tableaux

<b>Tableau III.1</b> : Les variables et les coefficients des équations de transfert adimensionnelle.....	37
<b>Tableau III.2</b> : La fonction $A( P_e )$ pour les différents schémas numériques. ....	48
<b>Tableau IV.1</b> : Comparaison entre les valeurs du nombre de Nusselt interne numérique et les valeurs indiquées dans la référence [12].....	60

# *Introduction général*

### Introduction générale

Les échanges thermiques interviennent dans de nombreux secteurs d'activités humaines. Dans la plupart de ces activités, le transfert de chaleur doit s'effectuer sans altération des milieux intervenant dans le transfert thermique. L'utilisation d'équipements spécifiques d'échange est alors nécessaire. Ces équipements sont connus sous la dénomination d'échangeurs de chaleur. Les échangeurs de chaleur ont une place capitale dans tout ce qui concerne le management de la chaleur. Ce composant est pratiquement présent dans tous les systèmes technologiques effectuant une transformation d'énergie. Les échangeurs de chaleur jouent un rôle prépondérant au niveau de la performance technique et économique de ces systèmes, d'où l'intérêt de les étudier.

Le souci technologique majeur des échangeurs de chaleur consiste à satisfaire la dualité entre le transfert de chaleur et la perte de charge c'est-à-dire avoir un compromis entre la maximisation du transfert et la minimisation de la perte de charge en se limitant toujours à optimiser les coûts d'investissement.

Vue l'importance de l'amélioration du transfert de chaleur dans les échangeurs de chaleur, cette étude est consacrée à une simulation numérique de la convection forcée laminaire dans un échangeur de chaleur coaxial tubulaire à courants parallèles. L'objectif principal de cette étude est de montrer l'effet de la variation du nombre de Reynolds (du fluide chaud et du fluide froid) et la variation de la longueur sur le coefficient de transfert de chaleur, la puissance thermique échangée et l'efficacité.

Le contenu de ce mémoire est reparti sur quatre chapitres :

Le premier chapitre est consacré à la présentation des généralités sur les échangeurs de chaleur. Une classification, le principe de fonctionnement de différents types d'échangeurs et leurs applications sont présentés. Dans le deuxième chapitre nous présentons l'ensemble des équations régissant l'écoulement du fluide et le transfert de la chaleur dans les deux tubes et les conditions aux limites sous forme dimensionnelle et adimensionnelle. Dans le troisième chapitre on utilise la méthode des volumes finis pour convertir les équations différentielles gouvernantes adimensionnelles obtenues dans le deuxième chapitre à des équations algébriques et nous présentons l'algorithme de calcul. Dans le dernier chapitre, nous

présentons la validation du code utilisé pour le calcul numérique et les résultats obtenus et leurs interprétations. Finalement, on expose une conclusion générale sur notre étude qui résume les principaux résultats obtenus.

# *Chapitre I*

*Généralités sur les Echangeurs de Chaleur*

### **I.1 Introduction :**

Dans les sociétés industrielles dont le fluide vital est l'énergie, l'échangeur de chaleur est un élément essentiel de toute politique de maîtrise de l'énergie. Une grande part (90 %) de l'énergie thermique utilisée dans les procédés industriels transite au moins une fois par un échangeur de chaleur, aussi bien dans les procédés eux-mêmes que dans les systèmes de récupération de l'énergie thermique de ces procédés.

On les utilise principalement dans les secteurs de l'industrie (chimie, pétrochimie, sidérurgie, agroalimentaire, production d'énergie, etc.), du transport (automobile, aéronautique), mais aussi dans le secteur résidentiel et tertiaire (chauffage, climatisation, etc.). Le choix d'un échangeur de chaleur, pour une application donnée, dépend de nombreux paramètres : domaine de température et de pression des fluides, propriétés physiques et agressivité de ces fluides, maintenance et encombrement. Il est évident que le fait de disposer d'un échangeur bien adapté, bien dimensionné, bien réalisé et bien utilisé permet un gain de rendement et d'énergie des procédés [1].

### **I.2 Définition d'un échangeur :**

Un échangeur de chaleur, comme son nom l'indique, est un appareil destiné à transmettre la chaleur d'un fluide à un autre. Dans les échangeurs les plus courants, les deux fluides sont séparés par une paroi à travers laquelle les échanges se font par convection, la transmission de chaleur fluide-paroi relève essentiellement de la convection. Le rayonnement n'intervient de manière sensible que s'il existe des différences de température très importantes entre un fluide semi-transparent et la paroi. Il est donc possible de ne pas en tenir compte dans de nombreux cas pratiques. Les deux fluides peuvent être soit deux liquides, soit deux gaz ou vapeurs, soit un liquide et un gaz. En outre l'échange de chaleur dans l'appareil peut s'effectuer soit sans changement d'état soit (l'appareil est alors un simple échangeur de chaleur), soit avec changement d'état (l'appareil est alors selon le cas, un condensateur ou un évaporateur ou un cristalliseur) [2,3].

### **I.3 Classification des échangeurs de chaleur :**

Il est possible de caractériser un échangeur de chaleur par :

- Etat thermodynamique des fluides.
- Compacité (surface d'échange/volume de l'échangeur).
- Configuration des écoulements.

- Types de construction/technologies.
- Le procédé de transfert de chaleur.
- Nombre de fluide.

### **I.3.1 Classification selon l'état thermodynamique des fluides :**

Le passage des fluides dans l'échangeur peut s'effectuer avec ou sans changement de phase ; suivant le cas, on dit que l'on a un écoulement monophasique, diphasique, vaporisation, condensation...

Les fluides peuvent être à l'état liquide, gazeux ou diphasique (changement de phase liquide-vapeur).

#### **Exemples:**

\* Eau liquide – Air:

Radiateur, tour de refroidissement,...

\* Eau liquide – Eau:

Découplage entre deux circuits hydrauliques, ballon d'eau chaude sanitaire,...

\* Air - Réfrigérant (diphasique):

Condenseur et évaporateur à air sur machines frigo,...

\* Eau liquide – Réfrigérant (diphasique):

Condenseur de machines frigos sur géothermie ...

\* Huile – Air:

Refroidisseur d'huile,...

\* Air – Air:

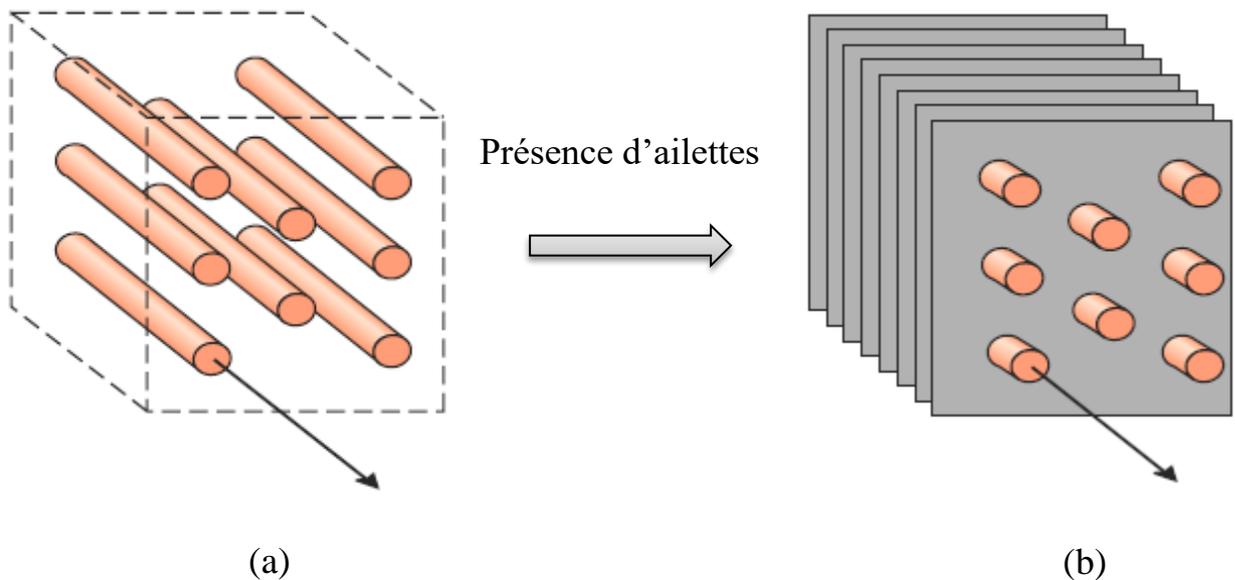
Récupération de chaleur sur ventilation, récupérateur pour turbines à gaz,... [4]



**Figure (I.1):** Échangeur eau/air d'automobile.

### I.3.2 Classification selon la compacité de l'échangeur :

La compacité est définie par le rapport de l'aire de la surface d'échange au volume de l'échangeur. Un échangeur est considéré comme compact si sa compacité est supérieure à  $700 \text{ [m}^2/\text{m}^3]$  avec présence d'ailettes, cette valeur est susceptible de varier de  $500$  à  $800 \text{ [m}^2/\text{m}^3]$  [5].

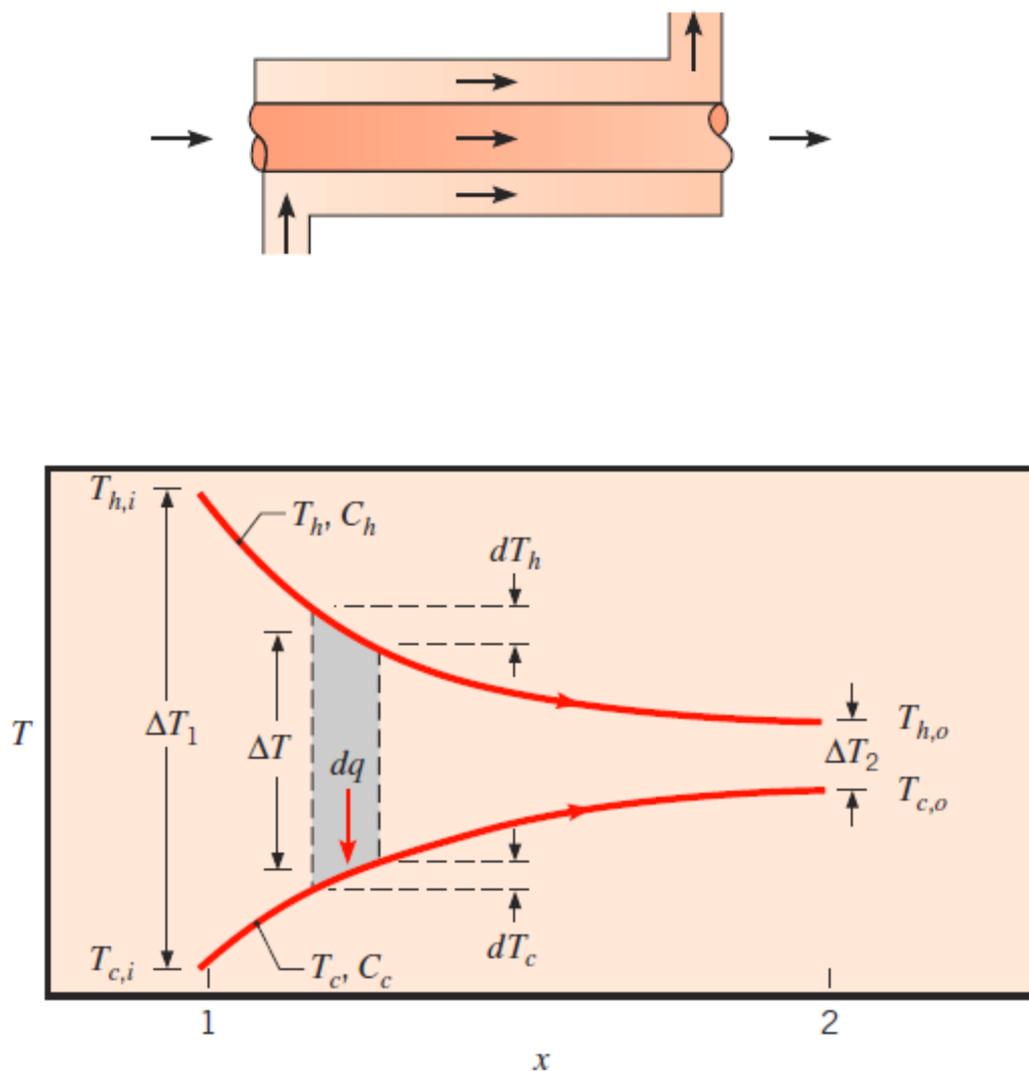


**Figure (I.2):** (a) échangeur sans ailettes, (b) échangeur avec ailettes.

### I.3.3 Classification selon la configuration des écoulements :

#### I.3.3.a Ecoulement des deux fluides parallèles en même sens (Echangeurs co-courants):

Dans les échangeurs à co-courant, l'agent primaire et l'agent secondaire entrent par la même extrémité, dans le même sens et sortent par la même extrémité [6]. Où la température de fluide froid ne peut pas être supérieure à la température de sortie du fluide chaud. Les températures des fluides évoluent pendant leur traversée longitudinale de l'échangeur, à moins que l'un des fluides ne subisse un changement de phase, auquel cas sa température reste constante [7]. La figure (I.2) représente l'évolution de ces températures le long d'un échangeur tubulaire à co-courants.



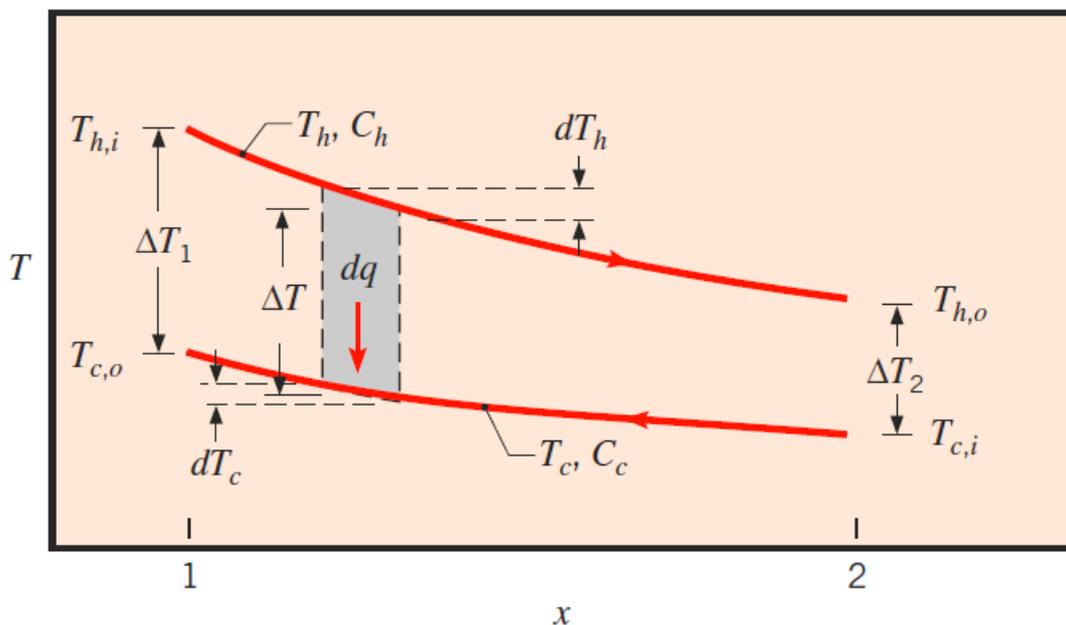
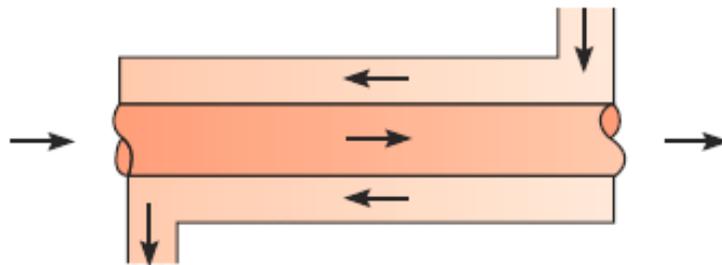
**Figure (I.3) :** Représentation de l'évolution de température dans un échangeur à co-courant.

**I.3.3.b Ecoulement des deux fluides parallèles mais de sens contraires (Echangeur Contre-courant):**

Dans les échangeurs à contre-courants, Les agents entrant par des extrémités opposées, ayant un sens d'écoulement opposé et sortant de l'appareil par des extrémités opposées, c'est-à-dire. Le sens de fluide intérieur est opposé avec autre fluide (qui externe) [6]. Où la température de sortie du fluide froid peut dépasser la température de sortie du fluide chaud. Cette disposition est l'une des plus favorables pour l'échange thermique.

L'avantage de l'échangeur à contre-courant sur l'échangeur à co-courants est de nécessiter, pour un même flux de chaleur, des surfaces d'échanges plus faibles [7].

De la même façon que précédemment, La figure (I.3) donne l'évolution de ces températures le long d'un échangeur tubulaire à co-courants très simple.



**Figure (I.4) :** Représentation de l'évolution de température dans un échangeur à co-courant.

### I.3.3.c Ecoulement des deux fluides croisés avec ou sans brassage (Echangeur croisés):

L'écoulement des deux fluides se fait d'une façon perpendiculairement l'un à l'autre (Figure N° I.4). Le fluide non brassé circule dans les conduites : c'est celui dont la veine est divisée entre plusieurs canaux parallèles distincts et de faible section. L'autre fluide circule librement entre les veines et peut être considéré comme partiellement brassé du fait des tourbillons générés par les tubes. Le brassage a pour effet d'homogénéiser les températures dans les sections droites de la veine fluide. Sans cela, les températures varient non seulement avec la direction de l'écoulement, mais aussi dans la section de veine. Les échangeurs à courants croisés sont surtout utilisés pour des échangeurs entre un gaz circulant en calandre et un liquide circulant dans les tubes [8]. Une représentation schématique d'échangeur à courants croisés et l'évolution de température (2D) est donnée par les figures (I.4) et (I.5).

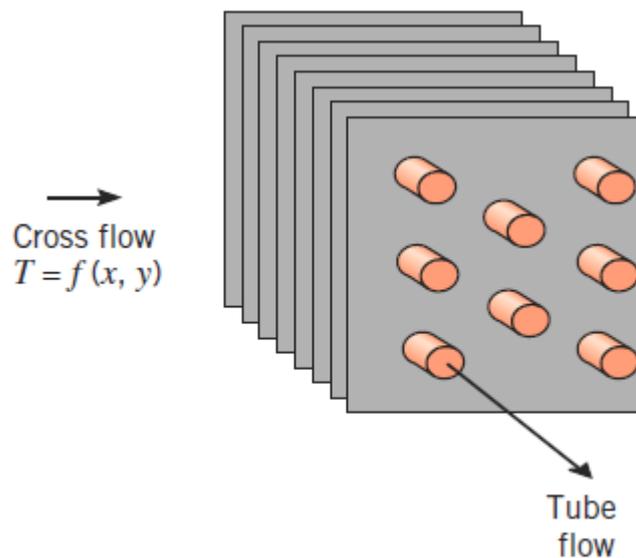
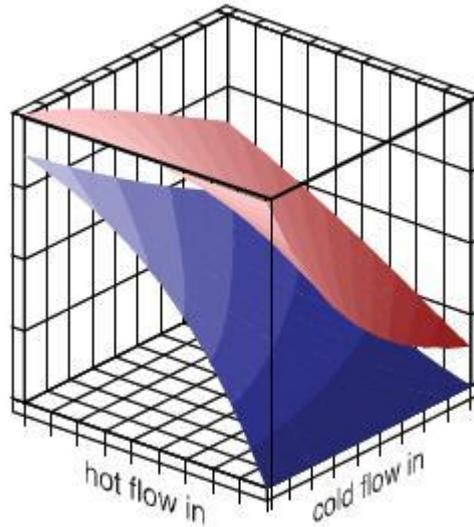


Figure (I.5) : Représentation d'un échangeur à courant croisé.



**Figure (I.6) :** Représentation de l'évolution de température (2D) dans un échangeur à courant croisé.

### I.3.4 Classification selon les types de construction/technologies :

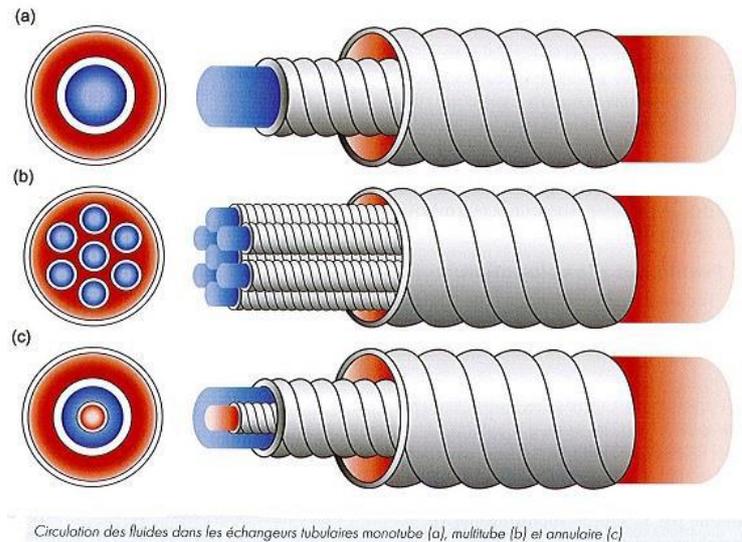
Les principaux types d'échangeurs rencontrés sont les suivants :

- ✓ à tubes : monotubes, coaxiaux ou multitubulaires ;
- ✓ à plaques : à surface primaire ou à surface secondaire ;
- ✓ autres types : contact direct, à caloducs ou à lit fluidisé [5].

#### I.3.4.a Échangeurs tubulaires :

C'est le type d'échangeurs le plus répandu. Ils représentent presque la moitié des échangeurs thermiques dans l'industrie. Il présente un certain nombre d'avantages :

- Facilités au niveau de la fabrication et de la maintenance.
- Utilisé à des pressions élevées et à de fortes températures [9].



**Figure (I.7) :** Différents types d'échangeurs tubulaires.

On distingue trois catégories d'échangeurs à tube :

- ✓ **échangeur monotube** : dans lequel le tube est placé à l'intérieur d'un réservoir et a généralement la forme d'un serpent ;



**Figure (I.8) :** Échangeur monotube.

- ✓ **échangeur coaxial** : La configuration la plus simple est celle dans laquelle les deux fluides s'écoulent soit dans le même sens soit en sens contraire dans des tubes coaxiaux (ou concentriques).

En pratique, les échangeurs à tubes coaxiaux ne permettent pas d'obtenir des surfaces d'échange de grande étendue [9].

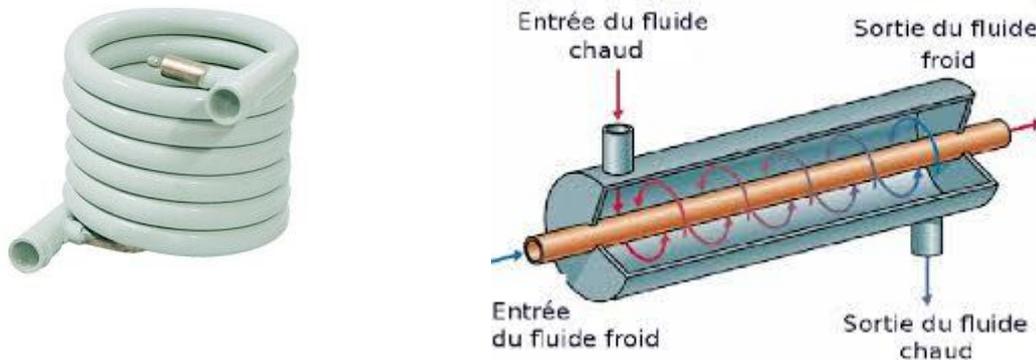
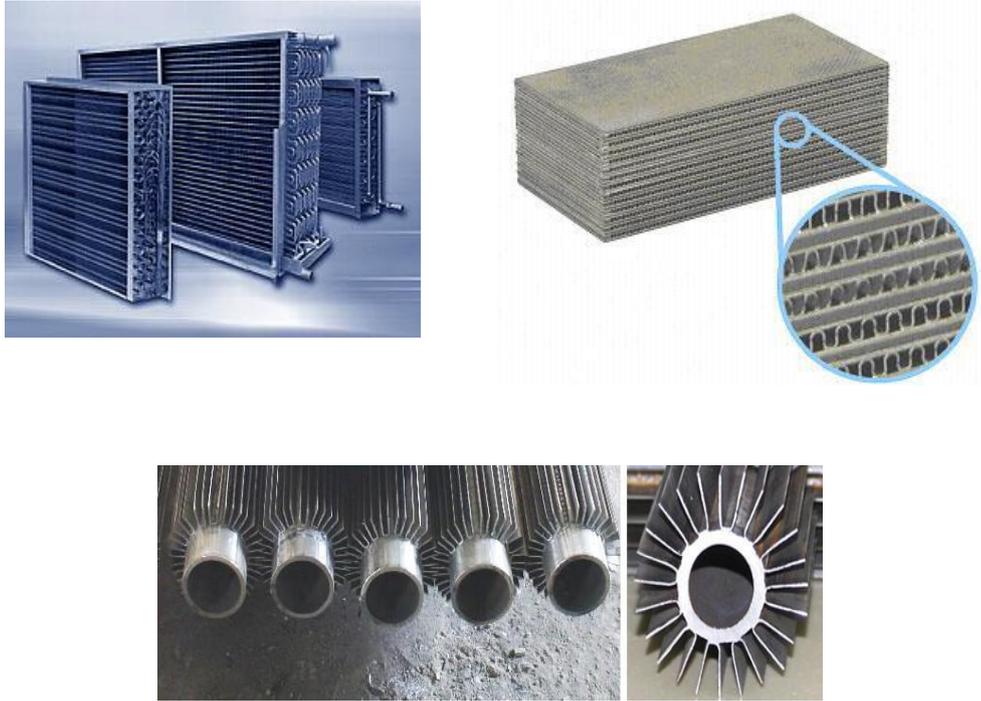


Figure (I.9) : Échangeur à tube coaxiaux.

- ✓ **échangeur multitubulaire** : existant sous quatre formes :
  - *échangeur à tubes séparés* : à l'intérieur d'un tube de diamètre suffisant se trouvent placés plusieurs tubes de petit diamètre maintenus écartés par des entretoises. L'échangeur peut être soit rectiligne, soit enroulé.
  - *échangeur à tubes rapprochés* : pour maintenir les tubes et obtenir un passage suffisant pour le fluide extérieur au tube, on place un ruban enroulé en spirale autour de certains d'entre eux. Les tubes s'appuient les uns sur les autres par l'intermédiaire des rubans [5].
  - *échangeur à tubes ailettes* : ces tubes permettent d'améliorer le coefficient d'échange thermique : lorsque l'un des fluides transitant dans l'échangeur s'avère moins bon caloporteur que l'autre, l'utilisation d'ailettes autour des tubes ou dans les tubes s'impose pour que la résistance thermique globale ne soit pas entièrement due au fluide ayant le plus petit coefficient d'échange thermique.

Les ailettes peuvent être disposées de différentes façons :

- les ailettes transversales.
- les ailettes longitudinales.



**Figure (I.10) :** Divers formes des tubes à ailettes.

➤ *échangeur à tubes et calandre :*

Où la calandre est une enveloppe métallique cylindrique entourant un faisceau de tubes : ils possèdent une boîte de distribution c'est-à-dire un dispositif qui distribue ou recueille le fluide aux extrémités des tubes.

Ils peuvent être à boîte fixe, à boîte flottante, ou à tubes en U avec une boîte à chaque extrémité de l'échangeur. Les tubes peuvent être supportés par des chicane afin d'augmenter la vitesse du fluide dans la calandre dans le but d'améliorer le coefficient d'échange. Pour cela, un compromis doit être trouvé pour avoir simultanément un coefficient d'échange global et des pertes de charge acceptables [10].

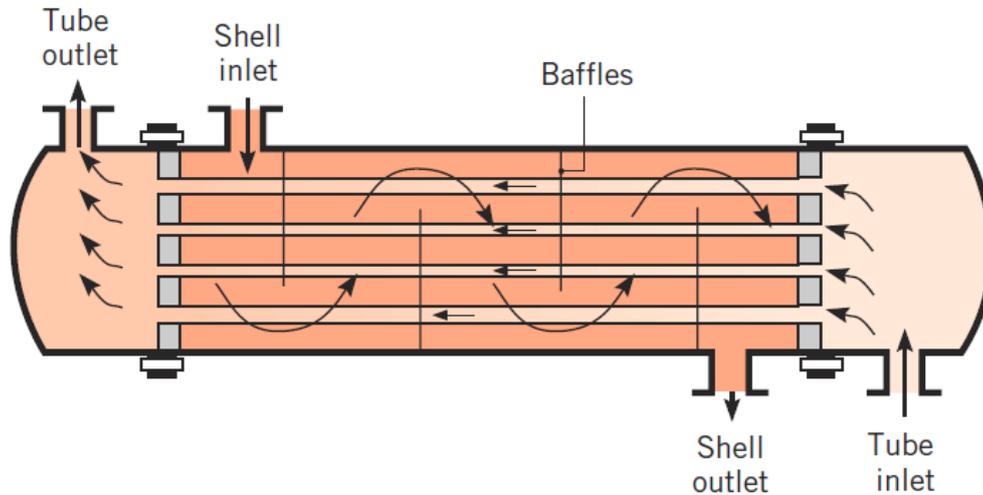


Figure (I.11) : Échangeur thermique à tubes et calandre.

#### I.3.4.b Echangeurs à plaques :

L'échangeur à plaques est un type d'échangeur de chaleur qui connaît un usage croissant dans l'industrie. Il est composé d'un grand nombre de plaques disposées en forme de millefeuilles et séparées les unes des autres d'un petit espace (quelques millimètres) où circulent les fluides. Le périmètre des plaques est bordé d'un joint qui permet par compression de la structure d'éviter les fuites [6].

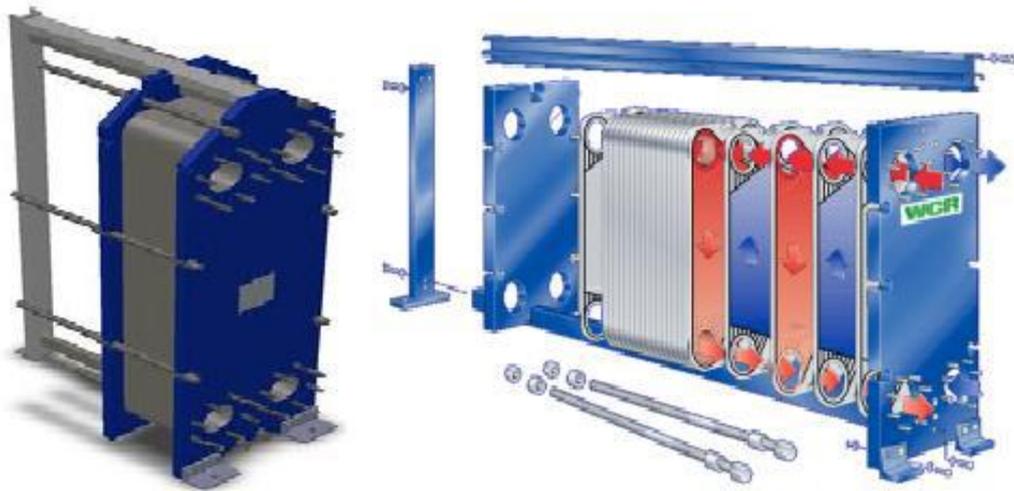


Figure (I.12) : Échangeur à plaque.

Ce type d'échangeur est caractérisé par:

- ✓ Simple et fiable.
- ✓ Grande durée de vie et pratiquement pas de panne.
- ✓ Absence de pièces en mouvement « sécurité de fonctionnement ».
- ✓ Peu de maintenance nécessaire.
- ✓ Faible risque de contamination de l'air frais en cas de bonne conception.
- ✓ Exécution en divers matériaux et nombreuses combinaisons possibles.
- ✓ L'échangeur présente une perte de charge relativement importante, surtout à de grands débits [9].

Ainsi, on peut trouver d'autre classification de ce type d'échangeurs (compacts/à plaques) tels :

tels :

- Les échangeurs à plaques spirales ;
- Les échangeurs à plaques circulaires ;
- Les échangeurs à plaques soudées.



**Figure (I.13) :** Échangeur à plaque en spirale. Les deux fluides circulent en contre-courant.

L'échangeur à spirale (figure.I.12) est un échangeur à plaques, constitué de deux tôles enroulées parallèlement. D'une part, l'un des fluides circule de la périphérie vers le centre de l'appareil et du centre à l'autre périphérie (la sortie). D'autre part, le deuxième fluide qui est souvent le fluide primaire circule directement et perpendiculairement à travers

l'échangeur [11]. Cet échangeur peut fonctionner jusqu'à des pressions de l'ordre de 25 bar et des températures de l'ordre de 300 °C.

### **I.3.5 Classification selon le procédé de transfert :**

#### **a) échangeur à contact direct :**

Dans ce type d'échangeur le transfert se fait entre deux fluides non-miscibles, un gaz et un fluide en contact direct par exemple, les tours de refroidissement à convection naturelle ou forcée sont couramment utilisées pour disposer la chaleur rejetée des procédés industriels vers l'atmosphère plutôt que vers l'eau de rivière et des océans.

#### **b) échangeur à contact indirect :**

Ce groupe d'échangeurs de chaleur est identique aux échangeurs double tube, tube et calandre ou les radiateurs .les fluides chauffants et chauffés sont séparés par une surface imperméable et ne se mélange pas donc.

#### **c) échangeur avec stockage (régénérateur) :**

La surface d'échange est alternativement en contact avec le fluide le plus chaud puis avec le fluide froid ; la chaleur est soustraite du fluide chaud stocké dans le matériau, constituant la matrice et puis la transmet au fluide froid durant la dernière partie du cycle [1].

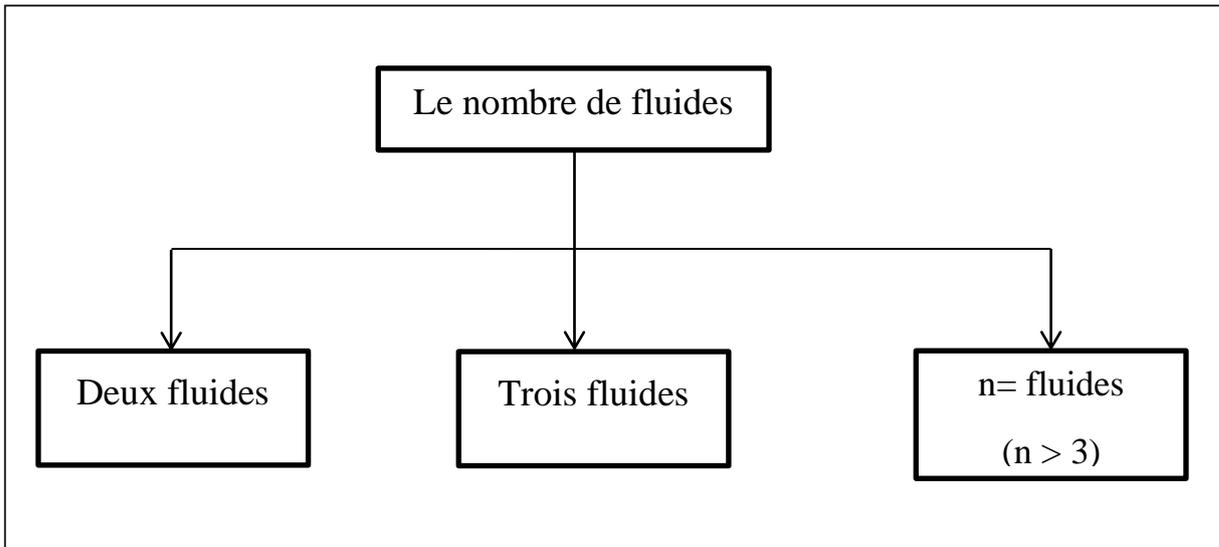
### **I.3.6 Classification selon le nombre de fluides utilisés :**

La plupart des processus de chauffage, de refroidissement, récupération de la chaleur et rejection de la chaleur implique le transfert de chaleur entre deux fluides, en conséquence les échanges de chaleur à deux fluides sont les plus connus.

Les échangeurs de chaleur à trois fluides sont généralement utilisés dans la cryogénie et dans quelques processus chimiques (système de séparation de l'air, liquéfaction et la purification de l'hydrogène, synthèse du gaz d'ammoniac).

Des échangeurs de chaleur avec plusieurs fluides comme 12 courants fluides ont été utilisés dans quelque application des processus chimiques.

La classification des échangeurs de chaleur suivant le nombre de fluide est illustrée sur la figure (I.13).



**Figure (I.14) :** Classification des échangeurs de chaleur suivant le nombre de fluides utilisés.

#### I.4 Autres types d'échangeurs :

- **échangeurs polyblocs en graphite:** le graphite a une grande inertie chimique et une excellente conductivité thermique. Ces échangeurs sont utiles dans le cas des liquides corrosifs qui passent dans des canaux usinés dans un bloc de graphite. Des élargissements sur certaines parties des canaux permettent de créer une turbulence favorable à l'échange thermique.
- **épingle chauffante:** on immerge un tube dans la masse à chauffer ou à refroidir. Le serpentin correspond à la même technique.
- **double enveloppe:** le fluide caloporteur circule dans la double paroi d'un réacteur pour chauffer ou refroidir son contenu.
- **liebigh:** il correspond à une version simplifiée à un tube d'un échangeur tubulaire. Il est utilisé en position verticale et joue fréquemment le rôle de condenseur de sécurité au-dessus d'un réservoir contenant un liquide très volatil ou d'un condenseur total d'une colonne de rectification.

#### I.5 Critères de performance d'un échangeur :

##### I.5.1 Performance thermique:

- On cherche à maximiser la puissance thermique transférable.

- Dépend du coefficient de transfert de chaleur global  $AU$  [W/K] (à maximiser), qui est le produit de l'aire de la surface d'échange  $A$  [m<sup>2</sup>] et du coefficient d'échange  $U$  [W/m<sup>2</sup>.K].
- $U$  dépend du coefficient d'échange convectif côté fluide chaud  $h_c$  et côté fluide froid  $h_f$  [W/m<sup>2</sup>.K], de la conductivité thermique de la paroi  $k$  [W/m.K] et de l'épaisseur de la paroi.
- La différence de température moyenne entre les fluides.

### I.5.2 Performance hydraulique : caractérisée par la perte de charge.

- Minimisation des pertes de charge (pertes pression) subies par chacun des fluides (réduction de la consommation des auxiliaires assurant la circulation des fluides dans l'échangeur).
- Pertes de charge et efficacité sont liées ➔ Design d'un échangeur résulte souvent en un compromis entre pertes de charge et efficacité.

$$\Delta p = f \cdot \frac{\rho u_m^2}{2D_h} \cdot L$$

- $f$  : le coefficient de perte de charge qui dépend des conditions d'écoulement (laminaire, turbulent, transitoire), de la géométrie, de la rugosité, etc...

- $\rho$  : la masse volumique,

- $u_m$  : la vitesse moyenne d'écoulement du fluide,

- $L$  : la longueur d'écoulement du fluide,

- $D_h$  : le diamètre hydraulique de la conduite [4].

### I.6 Conclusion :

Vu l'importance industrielles des échangeurs de chaleur, il existe une diversité des différents types des échangeurs de chaleur qui ont de nombreuses applications dans les différents domaines.

On s'intéresse dans cette étude aux échangeurs coaxiaux ou à double tube qui sont très utilisés dans le domaine géothermique.

# *Chapitre II*

## *Modèle Mathématique*

## II.1 Introduction :

La convection forcée trouve son importance dans de nombreuses applications industrielles, les échangeurs de chaleur, les capteurs solaires, le refroidissement des composants électroniques. Dans ce chapitre, nous formulons les équations modélisant le problème étudié. Ces équations seront écrites en coordonnées cylindriques, ce qui permettra une meilleure analyse des résultats et une facilité de calcul étant donné la nature géométrique du domaine de travail.

On commence par l'écriture des équations sous leurs formes générales, puis on passera aux différents traitements de ces équations pour les adapter au cas étudié. Pour cela on doit prendre en considération les hypothèses simplificatrices nécessaires ainsi que les conditions aux limites associées. En suite nous exprimons les équations de conservation et les conditions aux limites sous forme adimensionnelle.

## II.2 Présentation du problème :

Notre étude concerne un écoulement laminaire et stationnaire à l'intérieur d'un échangeur de chaleur à double tube concentrique à courant parallèle. Les deux fluides qui pénètrent l'échangeur de chaleur sont considérés comme newtoniens et incompressibles avec des propriétés physiques et thermiques constantes. L'un des deux fluides s'écoule dans le tube central à la vitesse  $U_{01}$  et à la température  $T_{01}$  et l'autre dans l'espace annulaire à la vitesse  $U_{02}$  et à la température  $T_{02}$ . Les deux fluides circulent dans le même sens (co-courant), et l'échangeur est parfaitement isolé de l'extérieur. Un schéma descriptif du problème à étudier est donné dans la figure (II.1):

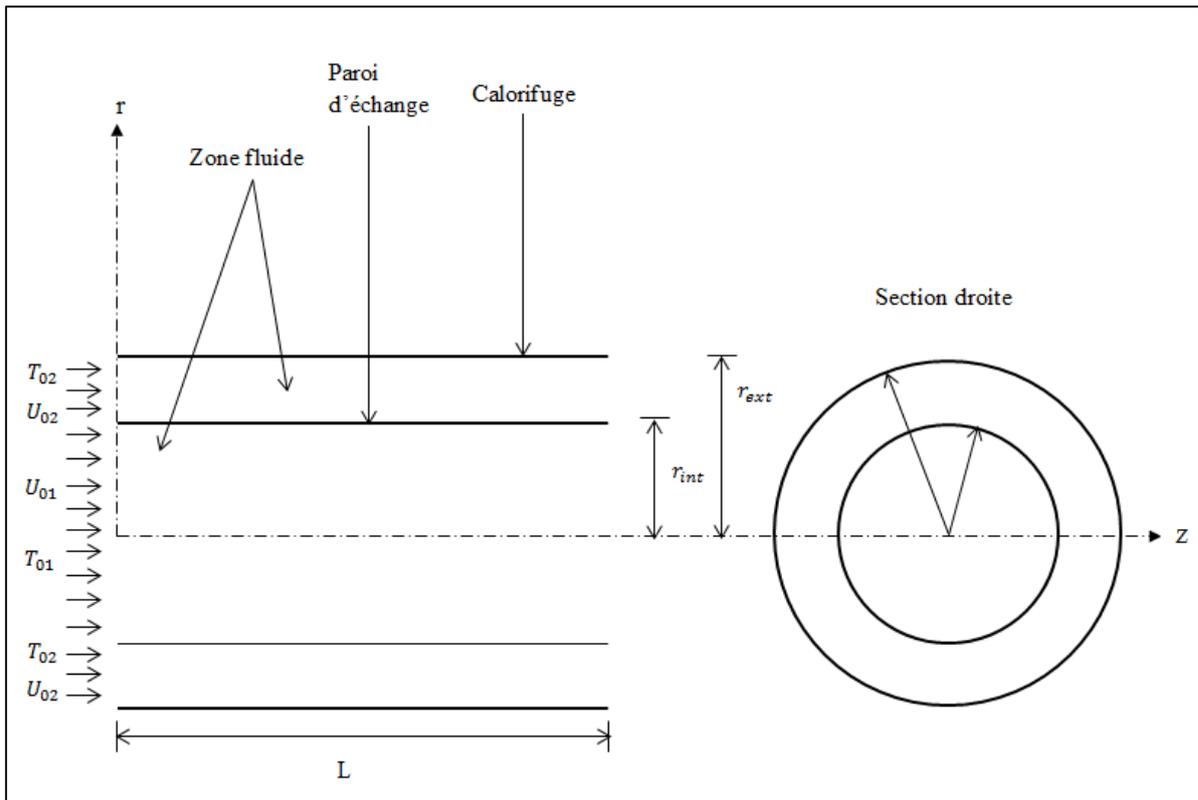


Figure (II.1) : Géométrie du problème.

### II.3 Équation gouvernantes :

Les équations qui gouvernent le problème étudié sont les suivantes :

#### a) Équation de continuité :

Dans le cas général, la formule est donnée par:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

L'équation de continuité en coordonnées cylindriques est donnée sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.2})$$

Avec :  $\vec{V} = u\vec{e}_z + v\vec{e}_r + w\vec{e}_\theta$

**b) Équation de quantité de mouvement :**

La deuxième loi de la dynamique appliqué à une particule de fluide passant à travers un volume de contrôle élémentaire de fluide permettant d'établir l'équation de quantité de mouvement qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{F}_e + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II.3})$$

Nous exprimons les équations de conservation de quantité de mouvement avec les équations de Navier-Stokes. Les équations de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques donnent selon les trois projections :

**b.1) Équation de quantité de mouvement radiale or:**

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \rho g_r \\ + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

**b.2) Équation de quantité de mouvement axial oz:**

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z \\ + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

**b.3) Équation de quantité de mouvement azimutale oθ :**

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{vw}{r} + u \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \rho g_\theta \\ + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) - \frac{w}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

**c) Équation d'énergie :**

L'équation d'énergie appelée aussi équation de la diffusion de la chaleur ou bien encore équation différentielle de la chaleur pour permettre la détermination des champs de température dans l'espace et dans le temps du corps étudié. L'application du premier

principe de la thermodynamique permet d'établir l'équation d'énergie qui s'écrit sous la forme suivante [12]:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \vec{\nabla} [\lambda_f \vec{\nabla} T] + \Phi + S \quad (\text{II.7})$$

L'équation d'énergie est écrite en coordonnées cylindriques comme suit :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + u \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda_f \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \Phi + S \quad (\text{II.8})$$

$S$  : Représentation le terme source.

$\Phi$  : La quantité de chaleur générée par le frottement où :

$$\Phi = 2\mu \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} + v \right) \right]^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} + \mu \left\{ \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + r \frac{\partial v}{\partial \theta} \left( \frac{w}{r} \right) \right]^2 \right\} \quad (\text{II.9})$$

### II.3.1 Hypothèses simplificatrices :

De façon à obtenir un modèle mathématique simple qui décrit ce problème, on utilise les hypothèses simplificatrices suivantes :

- Fluide newtonien et incompressible.
- Etude bidimensionnel sur  $(r,z)$ .
- Écoulement dans un régime stationnaire  $\left( \frac{\partial}{\partial t} = 0 \right)$ .
- Problème axisymétrique : la variation suivant la direction  $\theta$  est nulle  $\left( \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \right)$ .
- Les forces volumiques négligeables.
- La quantité de chaleur générée par le frottement est négligé  $(\Phi=0)$ .

Après l'introduction des hypothèses simplificatrices, le système des équations devient :

- **Équation de continuité :**

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.10})$$

- **Équations de quantité de mouvement :**

✓ Selon (or) :

$$\rho \left( v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.11})$$

✓ Selon (oz) :

$$\rho \left( v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.12})$$

- **Équation d'énergie :**

$$\rho c_p \left( v \frac{\partial T}{\partial r} + u \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \lambda_f \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (\text{II.13})$$

Les équations présentées précédemment peuvent être écrites **en formule dimensionnelle** comme suit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial z} = 0 \quad (\text{II.14})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v v)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\mu v}{r^2} \quad (\text{II.15})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r v u)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho u u)}{\partial z} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (\text{II.16})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho c_p r v T)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho c_p u T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_f \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \lambda_f \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (\text{II.17})$$

### II.3.2 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites pour l'ensemble d'équations régissant sont présentées ci-dessous:

- Entré :  $z = 0$

**Tube interne :**  $0 \leq r \leq r_{int}$

$$u = u_{01}, v = 0, T = T_{01}$$

**Tube externe :**  $r_{int} \leq r \leq r_{ext}$

$$u = u_{02}, v = 0, T = T_{02}$$

- Sortie ( $z = L$ ) : écoulement complètement établi.

**Tube interne :**  $0 \leq r \leq r_{int}$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

**Tube externe :**  $r_{int} \leq r \leq r_{ext}$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

- Axe de symétrie :  $r = 0 ; 0 < z < L$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=0} = 0, \quad v = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r=0} = 0$$

- Paroi interne :  $r = r_{int} ; 0 \leq z \leq L$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad -\lambda_{in} \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_{int}} = -\lambda_{ex} \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_{int}}$$

- Paroi externe :  $r = r_{ext} ; 0 \leq z \leq L$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_{r_{ext}} = 0$$

### II.3.3 Diamètre hydraulique :

$D_h$  : est le diamètre hydraulique en m  $D_h = \frac{4A}{Pe}$

- ❖ à l'intérieur du tube interne :

A : section de passage est donné par :  $A = \pi r_i^2$

Pe : périmètre mouillé est donné par :  $Pe = 2\pi r_i$

Donc :  $D_{h\ int} = 2 r_i = D_i$

❖ pour la section annulaire :

A : section de passage est donné par :  $A = \pi (r_e^2 - r_i^2)$

Pe : périmètre mouillé est donné par :  $Pe = 2\pi(r_e + r_i)$

Donc :  $D_{h\ ext} = 2 (r_e - r_i) = D_e - D_i$

Dans cette étude, On prend :  $r_{ext} = 2r_{int}$

$$D_h = D_{h\ ext} = D_{h\ int} = 2r_i$$

#### II.4 Forme adimensionnelle du modèle mathématique :

Afin de simplifier l'étude, on peut utiliser les variables sous leur forme adimensionnelle. Ceci a pour conséquence de réduire le nombre de paramètres pouvant varier, facilitant ainsi la manipulation des équations et l'analyse des résultats. Dans ce contexte, on introduit dans nos équations les variables adimensionnelles. Voici les variables sans dimension que l'on va considérer :

$$\theta = \frac{T - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} , \quad P^* = \frac{P}{\rho_0 u_{01}^2} , \quad r^* = \frac{r}{D_h} , \quad Z^* = \frac{z}{D_h} , \quad U^* = \frac{u}{U_{01}}$$

$$V^* = \frac{v}{U_{01}} , \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_{01}} = 1 \quad (\text{Fluide incompressible})$$

En introduisant ces variables sans dimensions dans les équations (II.14), (II.15), (II.16), (II.17), on trouve les équations adimensionnelles suivantes :

- **Équation de continuité :**

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* V^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^*)}{\partial Z^*} = 0 \tag{II.18}$$

- **Équation de quantité de mouvement :**

✓ Selon (or) :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*V^*V^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^*V^*)}{\partial Z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right) - \frac{V^*}{r^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial Z^{*2}} \right] \quad (\text{II.19})$$

✓ Selon (oz) :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*V^*U^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^*U^*)}{\partial Z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial Z^*} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z^{*2}} \right] \quad (\text{II.20})$$

• Équation d'énergie :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*V^*\theta)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^*\theta)}{\partial Z^*} = \frac{1}{Re.Pr} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^{*2}} \right] \quad (\text{II.21})$$

Les équations adimensionnelles de conservation qui régissent l'écoulement à la forme finale s'écrivent comme suit :

➤ Pour le tube interne :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*V^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^*)}{\partial Z^*} = 0 \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*V^*V^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^*V^*)}{\partial Z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{1}{Re_1} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right) - \frac{V^*}{r^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial Z^{*2}} \right] \quad (\text{II.23})$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^*V^*U^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^*U^*)}{\partial Z^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial Z^*} + \frac{1}{Re_1} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z^{*2}} \right] \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* V^* \theta)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^* \theta)}{\partial Z^*} = \frac{1}{Re_1 \cdot Pr_1} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^{*2}} \right] \quad (\text{II.25})$$

➤ Pour la section annulaire (le tube externe) :

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* V^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^*)}{\partial Z^*} = 0 \quad (\text{II.26})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* V^* V^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^* V^*)}{\partial Z^*} = \\ - \frac{\partial P^*}{\partial r^*} + \frac{1}{Ru} \cdot \frac{1}{Re_2} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial V^*}{\partial r^*} \right) - \frac{V^*}{r^{*2}} + \frac{\partial^2 V^*}{\partial Z^{*2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* V^* U^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^* U^*)}{\partial Z^*} = \\ - \frac{\partial P^*}{\partial Z^*} + \frac{1}{Ru} \cdot \frac{1}{Re_2} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 U^*}{\partial Z^{*2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* V^* \theta)}{\partial r^*} + \frac{\partial(U^* \theta)}{\partial Z^*} = \frac{1}{Ru} \cdot \frac{1}{Re_2 \cdot Pr_2} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^{*2}} \right] \quad (\text{II.29})$$

Après l'adimensionnalisation on trouve que les nombres adimensionnels qui gouvernent notre étude sont :

- Nombres de Reynolds ( $Re$ ) :

$$Re_1 = \frac{U_{01} \cdot \rho_{01} \cdot D_{h \text{ int}}}{\mu_{fi}} \qquad Re_2 = \frac{U_{02} \cdot \rho_{02} \cdot D_{h \text{ ext}}}{\mu_{fe}}$$

- Nombres de Prandtl (Pr) :

$$Pr_1 = \frac{c_{pi} \cdot \mu_{fi}}{\lambda_{fi}} \qquad Pr_2 = \frac{c_{pe} \cdot \mu_{fe}}{\lambda_{fe}}$$

Avec :  $Ru = \frac{U_1}{U_2}$

### II.4.1 Conditions aux limites :

Les conditions aux limites après adimensionnalisation s'écrivent alors :

- **Entré :  $z = 0$**

**Tube interne :  $0 \leq r \leq r_{int}$**

$$U^* = 1 \quad , \quad V^* = 0 \quad , \quad \theta = 0$$

**Tube externe :  $r_{int} \leq r \leq r_{ext}$**

$$U^* = 1 \quad , \quad V^* = 0 \quad , \quad \theta = 1$$

- **Sortie ( $z = L$ ) : écoulement complètement établi.**

**Tube interne :  $0 \leq r \leq r_{int}$**

$$\frac{\partial U^*}{\partial Z^*} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V^*}{\partial Z^*} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z^*} = 0$$

**Tube externe :  $r_{int} \leq r \leq r_{ext}$**

$$\frac{\partial U^*}{\partial Z^*} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V^*}{\partial Z^*} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial Z^*} = 0$$

- **Axe de symétrie :  $r = 0 ; 0 < z < L$**

$$\left( \frac{\partial U^*}{\partial r^*} \right)_{r^*=0} = 0 \quad , \quad V^* = 0 \quad , \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right)_{r^*=0} = 0$$

- **Paroi interne :  $r = r_{int} ; 0 \leq z \leq L$**

$$U^* = 0 \quad , \quad V^* = 0 \quad , \quad \lambda_{in} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right)_{r^*=r_{int}} = \lambda_{ex} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right)_{r^*=r_{int}}$$

- **Paroi externe :**  $r = r_{\text{ext}} ; 0 \leq z \leq L$

$$U^* = 0 , \quad V^* = 0 , \quad \left( \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right)_{r^*_{\text{ext}}} = 0$$

## II.5 Nombre de nusselt local:

Le nombre de Nusselt est un coefficient de transfert de chaleur, mais sous forme adimensionnelle. Il fournit une mesure du rapport de la quantité de chaleur transmise par convection, à la quantité de chaleur qui serait transmise par conduction [13].

Au niveau de la couche en contact avec la paroi, la vitesse des particules est nulle (le fluide est immobile), et en raison de la différence de température entre cette partie du fluide et la paroi en contact avec elle, la chaleur est transmise (transférée) par conduction thermique, tandis que le transfert de chaleur à l'intérieur de l'échangeur se fait par convection thermique entre la paroi interne et les deux fluides. À partir de celle-ci, nous avons le nombre de Nusselt local interne et externe.

### II.5.1 Nombre de nusselt local interne :

$$h_{\text{int}}(z) [T_{\text{mi}}(z) - T_p(z, r = r_{\text{int}})] = -\lambda_f \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_{\text{int}}} \quad (\text{II.30})$$

Avec :

$h_{\text{int}}(z)$  : Coefficient de convection local interne.

$T_{\text{mi}}(z)$  : Température moyenne interne du fluide à la section transversale  $Z$ .

$T_p(z)$  : Température de la paroi intérieure à la section transversale  $Z$ .

$$T_{\text{mi}}(Z) = \frac{\int_A \rho C_p u T dA}{\int_A \rho C_p u dA} \quad (\text{II.31})$$

Avec:  $dA = 2\pi r dr$  ,  $\rho c_p = \text{cte}$

$$T_{\text{mi}}(Z) = \frac{\int_0^{r_{\text{int}}} u T r dr}{\int_0^{r_{\text{int}}} u r dr} \quad (\text{II.32})$$

L'équation (II.30) est écrite dans la forme adimensionnelle en entrant les variables adimensionnelles suivantes:

$$\theta_{mi}(Z) = \frac{T_{mi}(z)-T_{01}}{T_{02}-T_{01}} \quad , \quad u = U^*U_0 \quad , \quad r = r^*D_h$$

$$\frac{h_{int}(z).D_h}{\lambda_f} = \frac{\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_{r^*=r^*_{int}}}{\theta_p(Z)-\theta_m(Z)} \quad (II.33)$$

D'où :

$$Nu_{int}(Z) = \frac{\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_{r^*=r^*_{int}}}{\theta_p(Z)-\theta_m(Z)} \quad (II.34)$$

Avec :

$\theta_{mi}(Z)$  : Température adimensionnelle moyenne du fluide interne à la section transversale  $Z$ .

$\theta_p(Z)$  : Température adimensionnelle de la paroi intérieure à la section transversale  $Z$ .

$$\theta_{mi}(Z) = \frac{\int_0^{r^*_{int}} \theta u^* r^* dr^*}{\int_0^{r^*_{int}} u^* r^* dr^*} \quad (II.35)$$

### II.5.2 Nombre de nusselt local externe :

$$-\lambda_f \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_{int}} = h_e(z) [T_p(z, r = r_{int}) - T_{me}(z)] \quad (II.36)$$

Avec :

$h_e(z)$  : Coefficient de convection local externe.

$T_{me}(Z)$  : Température moyenne externe du fluide à la section transversale  $Z$ .

$T_p(Z)$  : Température de la paroi intérieure à la section transversale  $Z$ .

$$T_{me}(Z) = \frac{\int_A \rho C_P u T dA}{\int_A \rho C_P u dA} \quad (\text{II.37})$$

Avec :  $dA = 2\pi r dr$ ,  $\rho c_p = \text{cte}$

$$T_{me}(Z) = \frac{\int_{r_{int}}^{r_{ext}} u T r dr}{\int_{r_{int}}^{r_{ext}} u r dr} \quad (\text{II.38})$$

De la même manière, on trouve le nombre de Nusselt externe :

$$\frac{h_{ext}(z).D_h}{\lambda_f} = \frac{\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_{r^*=r^*_{int}}}{\theta_m(Z) - \theta_p(Z)} \quad (\text{II.39})$$

$$Nu_{ext}(Z) = \frac{\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_{r^*=r^*_{int}}}{\theta_m(Z) - \theta_p(Z)} \quad (\text{II.40})$$

Avec :

$\theta_{me}(Z)$  : Température adimensionnelle moyenne du fluide externe à la section transversale  $Z$ .

$\theta_p(Z)$  : Température adimensionnelle de la paroi intérieure à la section transversale  $Z$ .

$$\theta_{me}(Z) = \frac{\int_{r_{int}^*}^{r_{ext}^*} \theta u^* r^* dr^*}{\int_{r_{int}^*}^{r_{ext}^*} u^* r^* dr^*} \quad (\text{II.41})$$

### II.5.3 Coefficient d'échange global :

Evaluation du coefficient d'échange local global :

Le coefficient d'échange global de transfert de chaleur met en jeu trois résistances :

- La convection dans le fluide interne est régie par un coefficient de convection  $h_{int}$  permettant de définir **une résistance thermique convective** appelée  $R_{th1}$  :

$$R_{th1} = \frac{1}{h_{int}(z)} \quad (\text{II.42})$$

- La conduction à travers la paroi solide d'épaisseur  $e$  et de conductivité thermique  $\lambda$ , permettant de définir **une résistance thermique de conduction** appelée  $R_{th2}$  :

$$R_{th2} = \frac{\ln\left(\frac{r_{int+e}}{r_{int}}\right)}{2\pi\lambda_p L} \quad (\text{II.43})$$

- La convection dans le fluide interne est régie par un coefficient de convection  $h_{ext}$  permettant de définir **une résistance thermique convective** appelée  $R_{th3}$  :

$$R_{th3} = \frac{1}{h_{ext}(z)} \quad (\text{II.44})$$

L'équation de coefficient d'échange globale est défini par :

$$h_g(z) = \frac{1}{\frac{1}{h_{int}(z)} + \frac{\ln\left(\frac{r_{int+e}}{r_{int}}\right)}{2\pi\lambda_p L} + \frac{1}{h_{ext}(z)}} \quad (\text{II.45})$$

Avec :

$$\ln\left(\frac{r_{int+e}}{r_{int}}\right) \approx 0$$

Et de là:

$$\frac{1}{h_g} = \frac{1}{h_{int}} + \frac{1}{h_{ext}} \quad (\text{II.46})$$

**Coefficient de convection moyen  $\bar{h}$  :**

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h(Z) dz \quad (\text{II.47})$$

## II.6 Efficacité d'un échangeur :

L'efficacité d'un échangeur : est le rapport du flux de chaleur effectivement transféré dans l'échangeur aux flux de chaleur maximal qui serait transféré dans les mêmes conditions.

$\varepsilon$  = Flux réel échangé / Flux maximum possible

$$\varepsilon = \Phi_{réel} / \Phi_{max} \quad (\text{II.48})$$

Si on pose :  $C = \dot{m} C_p$

$$\Phi_{max} = C_{min}(T_{ce} - T_{fe}) \quad (\text{II.49})$$

### II.7 Conclusion :

Dans le présent chapitre, nous avons établi, pour le problème traité, le modèle physique considéré et les équations qui régissent le phénomène de la convection forcée en régime laminaire et stationnaire à l'intérieur d'un échangeur de chaleur. En effet, l'utilisation des méthodes numériques sera pratiquement nécessaire pour la résolution des équations de bilan, parce que la solution analytique s'avère difficile et très compliquée, donc on va résoudre ces équations numériquement en utilisant la méthode des volumes finis.

# *Chapitre III*

*Discrétisation des Equations Gouvernantes*

### III.1 Introduction :

Les outils de simulation numérique occupent une place importante dans les études en mécanique des fluides et le transfert de chaleur. Vu l'épuisement des ressources énergétiques et dans un souci de préservation de l'environnement son utilisation s'est accru exponentiellement ces dernières années.

La simulation numérique se définit comme la résolution de modèles correspondant à un système donné pour étudier le comportement de ce dernier dans un contexte précis. Elle est la suite logique de la modélisation qui est la première approche d'une simulation.

La simulation est là pour compléter l'expérimentation. Elle permet d'effectuer l'analyse du problème dans des conditions réalistes à moindre cout.

La simulation permet aussi d'étudier des cas dans des conditions d'essai extrêmes que l'expérimentation ne peut faire en raison de cout très élevés.

La simulation se présente presque toujours sous forme d'un programme ou d'un logiciel. Ces derniers sont couramment appelés des environnements de simulation [14].

Vu l'énorme avantage que présente l'approche numérique par rapport aux autres approches, celles –ci devenue la science de base que les chercheurs utilisent dans leurs travaux. Actuellement il existe trois méthodes numériques modernes qui sont utilisées généralement pour la résolution des systèmes d'équations aux drivées partielles régissant les écoulements. Ces méthodes sont :

- ✓ La méthode des éléments finis.
- ✓ La méthode des différences finis
- ✓ La méthode d'intégrale locale sur des volumes finis [15].

### III.2 Méthode des volumes finis (MVF) :

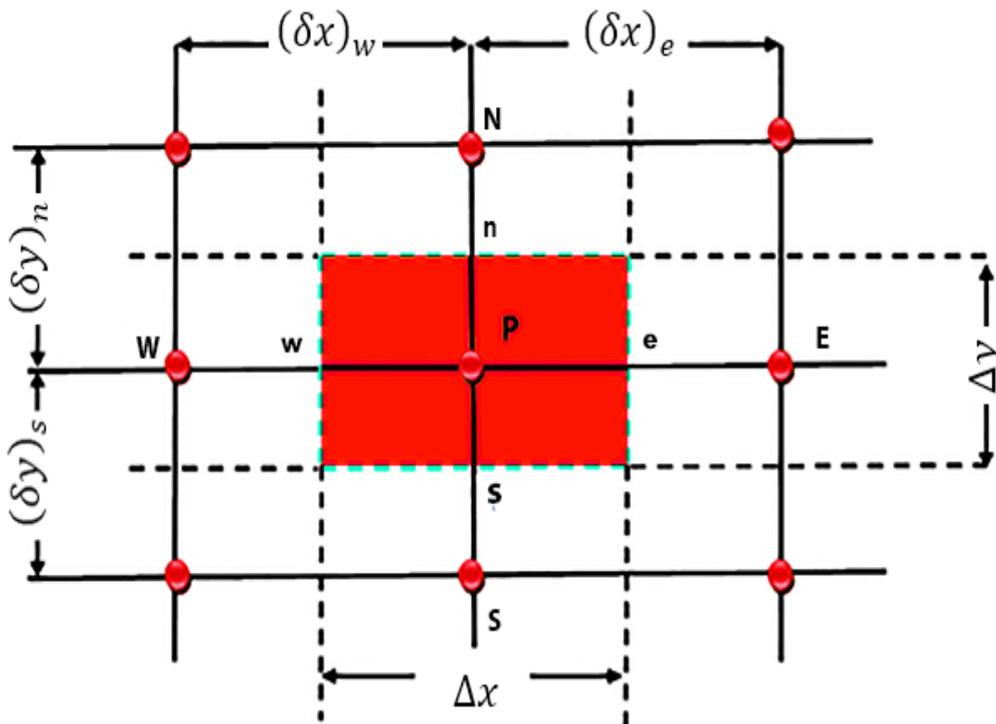
La méthode a été décrite pour la première fois en 1971 par Patankar et Spalding et publiée en 1980 par Patankar (Numerical Heat Transfer and Fluid Flow) [16].

#### III.2.1 Principe :

La méthode des volumes finis est une technique de discrétisation qui convertit les équations de conservation aux dérivées partielles en équation algébriques, qui peuvent être résolus numériquement. La technique des volumes de contrôle consiste dans l'intégration des équations aux dérivées partielles (EDP) sur chaque volume de contrôle pour obtenir les

équations discrétisées qui conservent toutes les grandeurs physiques sur un volume de contrôle ( $V_c$ ) [17].

- ❖ **Volume de contrôle typique** : ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des bilans des grandeurs scalaires. Les faces de ce volume sont localisées au point e, w, n, s. Avec p le centre du volume de contrôle. E, W, N, S, sont les centres des volumes de contrôle adjacents. (Figure. III.1)

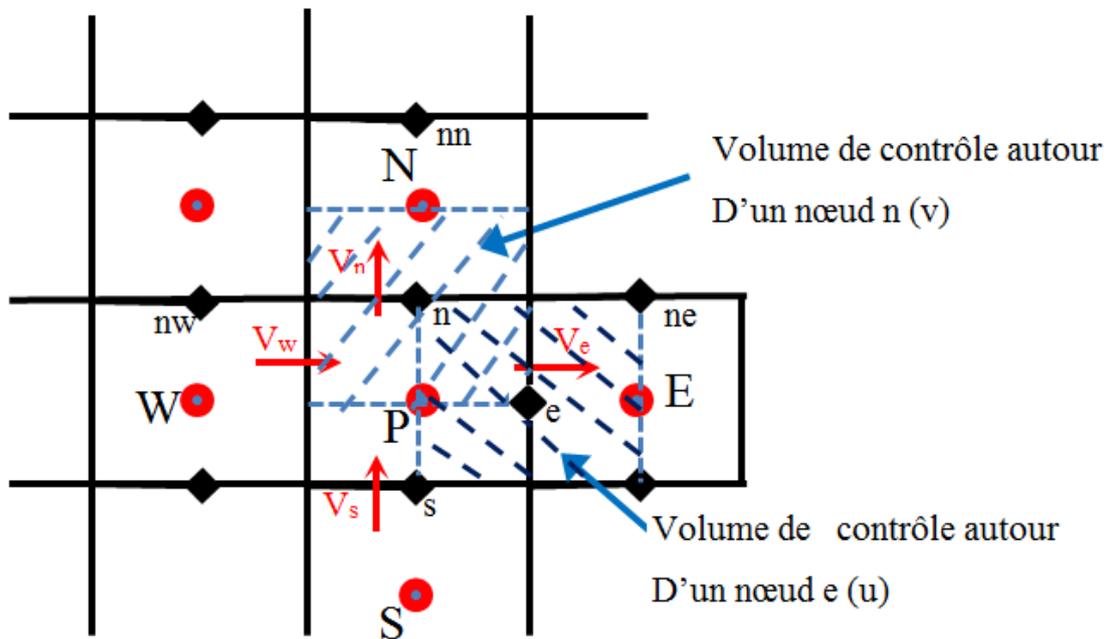


**Figure (III.1)** : Volume de contrôle typique bidimensionnel.

Pour un nœud principal P, les points E, W, N et S sont les centres des volumes de contrôle adjacents, situés respectivement à l'Est, à l'Ouest, au Nord et au Sud du point P. Le volume de contrôle P est montré par les lignes discontinues, et ces faces sont localisées aux points e et w dans la direction x, n et s dans la direction Y.

La subdivision du domaine d'étude en grilles longitudinales et transversales dont l'intersection présente un nœud, où on trouve la variable P et les composantes u et v de la vectrice vitesse qui se trouve au milieu des segments reliant deux nœuds adjacents qui se séparent par les incréments de distance ( $\Delta y$ ,  $\Delta x$ ,  $\delta y_n$ ,  $\delta y_s$ ,  $\delta x_w$ ,  $\delta x_e$ ) sont définis sur la (Figure.III.1). Les scalaires  $\phi$  sont stockés au nœud central. Les composantes de vitesse u

et  $v$  sont stockées dans des nœuds décalés (Figure.III.2). L'emploi de tels maillages entrelacés permet de calculer les gradients de pression dans les équations de quantité de mouvement, sans interpolation des pressions et le calcul des flux convectifs dans les équations sans interpolations des vitesses, cette technique nous permet d'éviter l'instabilité. Dans lequel des cellules de réseau supplémentaires montrent des solutions complètement différentes.

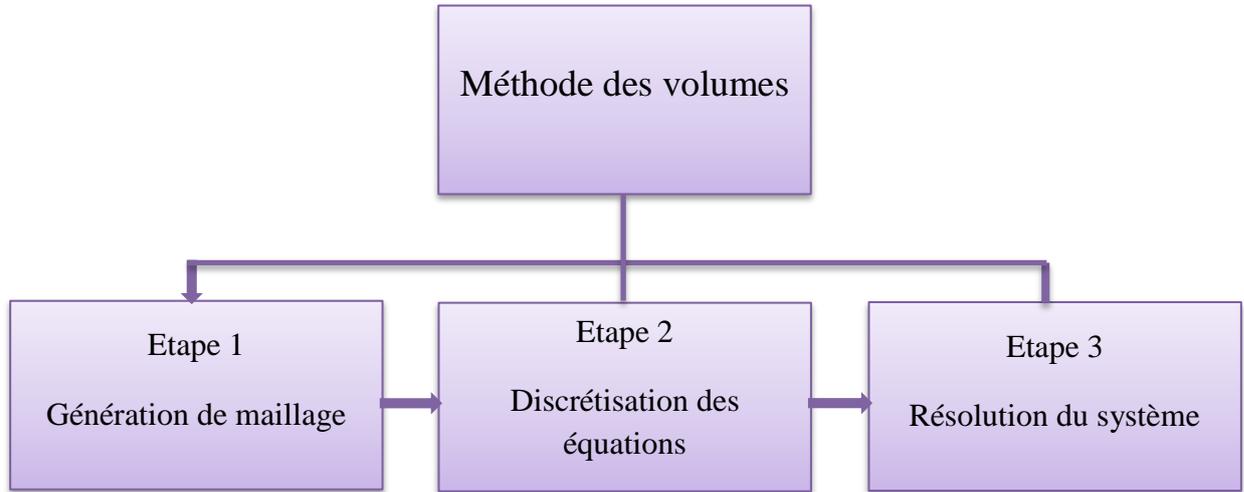


**Figure (III.2) :** Volume de contrôle décalé pour  $u$  et  $v$  dans un maillage entrelacé.

- ❖ **Volume de contrôle décalé :** ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des grandeurs vectorielles (par exemple on peut utiliser ce type de volume de contrôle pour calculer les vitesses  $u$  et  $v$ ) (Figure.III.2). [18]

**III.3 Etapes de la méthode des volumes finis :**

La méthode des volumes finis passe par des étapes qui sont :



**Figure (III.3) :** Etapes de méthodes des volumes finis [16].

**III.4 Equation générale de transfert :**

Les équations de conservation présentées précédemment peuvent être écrites sous une forme commune (III.1). Cette formulation permet de ne pas réitérer le travail de discrétisation pour chaque équation.

L'équation générale de transport d'une variable  $\phi$  pour un écoulement incompressible dans le cas stationnaire et bidimensionnel s'écrit dans le système cylindrique comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V \phi)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho U \phi)}{\partial Z} - \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Gamma_{\phi} r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \Gamma_{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right) \right] = S_{\phi} \quad (III.1)$$

Ou :

$\phi$  : représente une variable dépendante.

$\Gamma_{\phi}$  : est le coefficient de diffusion.

$S_{\phi}$ : représente le terme de source.

Le tableau suivant contient  $\phi$ ,  $\Gamma_{\phi}$  et  $S_{\phi}$  pour chaque équation.

Equations	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant z	U	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial z}$
Quantité de mouvement suivant r	V	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{\partial P}{\partial r} - \frac{V}{Re \cdot r^2}$
Energie	$\theta$	$\frac{1}{Re Pr}$	0

**Tableau (III.1) :** Les variables et les coefficients des équations de transfert adimensionnel.

### III.5 Discrétisation des équations de conservation :

#### III.5.1 Discrétisation de l'équation de continuité :

Nous rappelons l'équation de continuité écrit dans le chapitre II, tel que :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial Z} = 0 \quad (III.2)$$

En intégrant l'équation (III.2) sur le volume de contrôle  $dV$ , on obtient

$$\int_{VC} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial Z} \right] dV = 0 \quad (III.3)$$

Où  $dV = 2\pi r dr dZ$

En remplaçant  $dV$  dans l'équation (III.3) on obtient :

$$\int_s^n \int_w^e \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho U)}{\partial Z} \right] 2\pi r dr dZ = 0 \quad (III.4)$$

$$\int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial(\rho r V)}{\partial r} \right] 2\pi dr dZ + \int_s^n \int_w^e \left[ \frac{\partial(\rho r U)}{\partial Z} \right] 2\pi dZ dr = 0 \quad (III.5)$$

$$\int_w^e 2\pi [(\rho r V)_n - (\rho r V)_s] dZ + \int_s^n 2\pi [(\rho r U)_e - (\rho r U)_w] dr = 0 \quad (III.6)$$

De l'hypothèse de l'uniformité de la vitesse sur les faces du volume de contrôle, l'équation (III.6) devient :

$$(\rho U)_e \int_s^n 2\pi(r)_e dr - (\rho U)_w \int_s^n 2\pi(r)_w dr + (\rho V)_n \int_w^e 2\pi(r)_n dZ - (\rho V)_s \int_w^e 2\pi(r)_s dZ = 0 \quad (III.7)$$

Posant :

$$a_e = 2\pi \int_s^n (r)_e dr \quad (\text{surface de face este du volume étudié})$$

$$a_w = 2\pi \int_s^n (r)_w dr \quad (\text{surface de face ouest du volume étudié})$$

$$a_n = 2\pi \int_w^e (r)_n dz \quad (\text{surface de face nord du volume étudié})$$

$$a_s = 2\pi \int_w^e (r)_s dz \quad (\text{surface de face sud du volume étudié})$$

Donc l'équation (III.7) devient :

$$(\rho U)_e a_e - (\rho U)_w a_w + (\rho V)_n a_n - (\rho V)_s a_s = 0 \quad (III.8)$$

Utilisant la relation du flux de masse comme suit :

$$F_i = (\rho U)_i a_i$$

L'équation (III.8) devient:

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (III.9)$$

$F_e, F_w, F_n$  et  $F_s$  Sont les flux massique (débit massique) traversant les interfaces.

### III.5.2 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement selon l'axe

**or :**

L'équation de quantité de mouvement selon l'axe or est comme suit :

$$\frac{\partial(\rho UV)}{\partial Z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V V)}{\partial r} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{V}{r^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right] \quad (III.10)$$

On peut écrire l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho UV)}{\partial Z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V V)}{\partial r} =$$

$$-\frac{\partial P}{\partial r} + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Gamma_v r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma_v \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] + S_v \quad (\text{III.11})$$

Avec :  $\Gamma_v = \frac{1}{Re}$

$$S_v = \Gamma_v \left( -\frac{1}{r^2} \right) V$$

$$S_v = S_c + S_p V \quad \left\{ \begin{array}{l} S_c = 0 \\ S_p = \Gamma_v \left( -\frac{1}{r^2} \right) \end{array} \right.$$

On intègre l'équation (III.11) sur un volume de contrôle décalé vers le haut présenté à la figure (III.4).

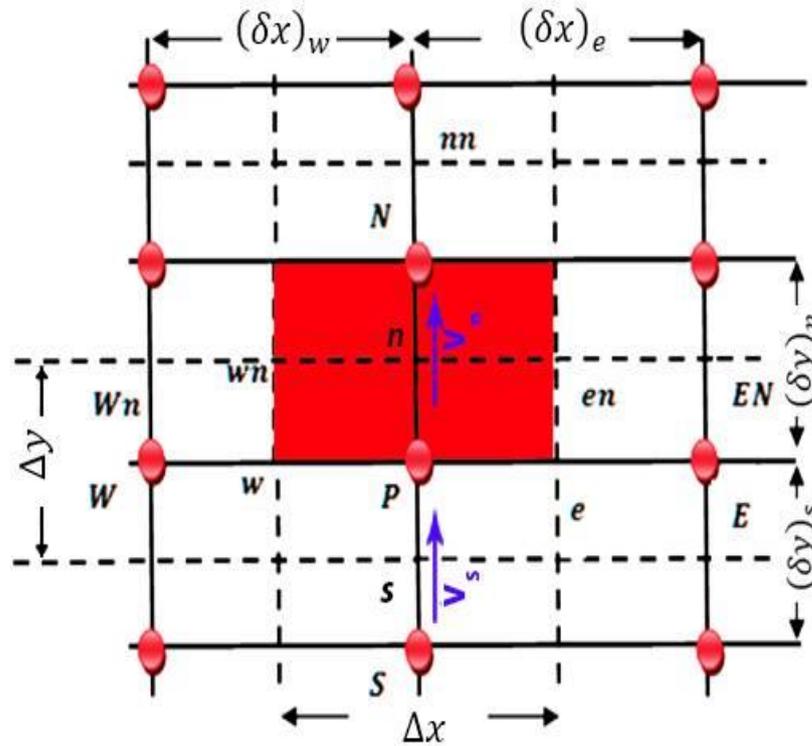


Figure (III.4) : Volume de contrôle décalé vers le haut.

On trouve :

$$\int_{VC} \left[ \frac{\partial(\rho UV)}{\partial z} \right] dV + \int_{VC} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V V)}{\partial r} \right] dV = \int_{VC} -\frac{\partial P}{\partial r} dV$$

$$+ \int_{VC} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Gamma_v r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \Gamma_v \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \right] dV + \int_{VC} S_v dV \quad (III.12)$$

$$\begin{aligned} \int_P^N \int_{wn}^{en} \left[ \frac{\partial(\rho UV)}{\partial Z} \right] 2\pi r dr dZ + \int_P^N \int_{wn}^{en} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V V)}{\partial r} \right] 2\pi r dr dZ = \\ \int_P^N \int_{wn}^{en} -\frac{\partial P}{\partial r} 2\pi r dr dZ + \int_P^N \int_{wn}^{en} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Gamma_v r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \Gamma_v \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \right] 2\pi r dr dZ \\ + \int_P^N \int_{wn}^{en} S_v 2\pi r dr dZ \end{aligned} \quad (III.13)$$

On somme les parties similaires et on simplifié, l'équation (III.13) devient :

$$\begin{aligned} \int_P^N \int_{wn}^{en} \frac{\partial}{\partial r} \left[ (\rho r V V) - \left( \Gamma_v r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \right] 2\pi r dr dZ + \\ \int_P^N \int_{wn}^{en} \frac{\partial}{\partial Z} \left[ (\rho UV) - \left( \Gamma_v \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \right] 2\pi r dr dZ = \\ \int_P^N \int_{wn}^{en} -\frac{\partial P}{\partial r} 2\pi r dr dZ + \int_P^N \int_{wn}^{en} S_v 2\pi r dr dZ \end{aligned} \quad (III.14)$$

On pose :

$$\begin{aligned} J'_r &= (\rho V V) - \left( \Gamma_v \frac{\partial V}{\partial r} \right) \\ J'_z &= (\rho UV) - \left( \Gamma_v \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \end{aligned}$$

Où  $J'_r$  et  $J'_z$  sont les flux totaux de convection et diffusion dans les directions r et z.

L'équation (III.14) devient :

$$\begin{aligned} \int_P^N \int_{wn}^{en} \frac{\partial}{\partial r} [r J'_r] 2\pi dr dZ + \int_P^N \int_{wn}^{en} \frac{\partial}{\partial Z} [r J'_z] 2\pi dr dZ = \\ \int_P^N \int_{wn}^{en} -\frac{\partial P}{\partial r} 2\pi r dr dZ + \int_P^N \int_{wn}^{en} S_v 2\pi r dr dZ \end{aligned} \quad (III.15)$$

Intégrant la partie gauche de l'équation (III.15) :

$$I = \int_P^N \int_{wn}^{en} \frac{\partial}{\partial r} [r J'_r] 2\pi dr dZ + \int_P^N \int_{wn}^{en} \frac{\partial}{\partial Z} [r J'_z] 2\pi dr dZ \quad (III.16)$$

Après l'intégration on trouve :

$$\begin{aligned} I = \int_w^e 2\pi \left[ (r J'_r)_n - (r J'_r)_s \right] dZ + \\ \int_s^n 2\pi \left[ (r J'_z)_e - (r J'_z)_w \right] dr \end{aligned} \quad (III.17)$$

De l'hypothèse de l'uniformité de la vitesse sur les faces du volume étudié, l'équation (III.17) devient :

$$I = (J'_r)_n 2\pi \int_w^e (r)_n dZ - (J'_r)_s 2\pi \int_w^e (r)_s dZ + (J'_z)_e 2\pi \int_s^n (r)_e dr - (J'_z)_w 2\pi \int_s^n (r)_w dr \quad (III.18)$$

Et en posant :

$$\begin{aligned} a_n &= 2\pi \int_w^e (r)_n dz & a_e &= 2\pi \int_s^n (r)_e dr \\ a_s &= 2\pi \int_w^e (r)_s dz & a_w &= 2\pi \int_s^n (r)_w dr \end{aligned}$$

L'équation (III.18) devient :

$$I = (J'_r)_n a_n - (J'_r)_s a_s + (J'_z)_e a_e - (J'_z)_w a_w \quad (III.19)$$

Utilisant la relation du flux de masse comme suit :

$$J_i = J'_i a_i$$

Où,  $J_i$  est le débit total.

L'équation (III.19) devient :

$$I = J_e - J_w + J_n - J_s \quad (III.20)$$

Intégrant la partie droite de l'équation (III.15) :

$$II = \int_P^N \int_{wn}^{en} -\frac{\partial P}{\partial r} 2\pi r dr dZ + \int_P^N \int_{wn}^{en} S_v 2\pi r dr dZ \quad (III.21)$$

$$II = 2\pi \int_{wn}^{en} (r)_n (P_P - P_N) dZ + \int_P^N \int_{wn}^{en} S_v 2\pi r dr dZ \quad (III.22)$$

$$II = 2\pi \int_{wn}^{en} (r)_n (P_P - P_N) dZ + \overline{S_v} \Delta V_v \quad (III.23)$$

Où  $\overline{S_v}$  est une valeur moyenne du terme source  $S_v$  sur le volume de contrôle.

Alors, l'équation (III.15) devient :

$$J_e - J_w + J_n - J_s = (P_P - P_N) a_n + (S_c + S_P V) \Delta V_v \quad (III.24)$$

Pour  $i = e, w$ :

$$J_i = \left[ (\rho U)_i \phi_i - \Gamma_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial Z} \right)_i \right] a_i$$

Pour  $i = n, s$ :

$$J_i = \left[ (\rho V)_i \phi_i - \Gamma_i \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_i \right] a_i$$

On multiplie l'équation (III.9) par  $(V_p)$  et on fait la soustraction de l'équation (III.24), il vient :

$$(J_e - F_e V_p) - (J_w - F_w V_p) + (J_n - F_n V_p) - (J_s - F_s V_p) = (P_p - P_n)a_n + (S_c + S_p V)\Delta V_v \quad (III.25)$$

Selon Patankar [19], les termes de la partie gauche de l'équation (III.25) peuvent s'exprimer par :

$$(J_e - F_e V_p) = A_E(V_p - V_E) \quad (III.26)$$

$$(J_w - F_w V_p) = A_W(V_W - V_p) \quad (III.27)$$

$$(J_n - F_n V_p) = A_N(V_p - V_N) \quad (III.28)$$

$$(J_s - F_s V_p) = A_S(V_S - V_p) \quad (III.29)$$

Après la substitution des équations (III.26), (III.27), (III.28) et (III.29) dans l'équation discrétisée (III.25) on obtient :

$$A_n V_n = A_{wn} V_{wn} + A_{en} V_{en} + A_s V_s + A_{nn} V_{nn} + (P_p - P_n)a_n + b_v \quad (III.30)$$

On peut écrire l'équation (III.30) sous la forme suivante:

$$A_n V_n = \sum A_{vs} V_{vs} + b_v + (P_p - P_n)a_n \quad (III.31)$$

$$\text{Tel que : } A_n = A_{wn} + A_{en} + A_s + A_{nn} - S_p \Delta V_v$$

$$b_v = S_c \Delta V_v = 0$$

Où :

$\Delta V_v$  : est le volume étudié ( $VC_v$ ).

$V_{vs}$  : vitesses dans les faces voisines à la face n.

### III.5.3 Discrétisation de l'équation de quantité de mouvement selon l'axe

**oz :**

L'équation de quantité de mouvement selon l'axe oz est comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V U)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho U U)}{\partial Z} = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} \right] \quad (III.32)$$

On peut écrire l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V U)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho U U)}{\partial Z} =$$

$$-\frac{\partial P}{\partial Z} + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Gamma_u r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \Gamma_u \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] + S_u \quad (III.33)$$

Avec :  $\Gamma_u = \frac{1}{Re}$

$$S_u = 0$$

On intègre l'équation (III.33) sur un volume de contrôle décalé vers la droite présenté à la figure (III.5).

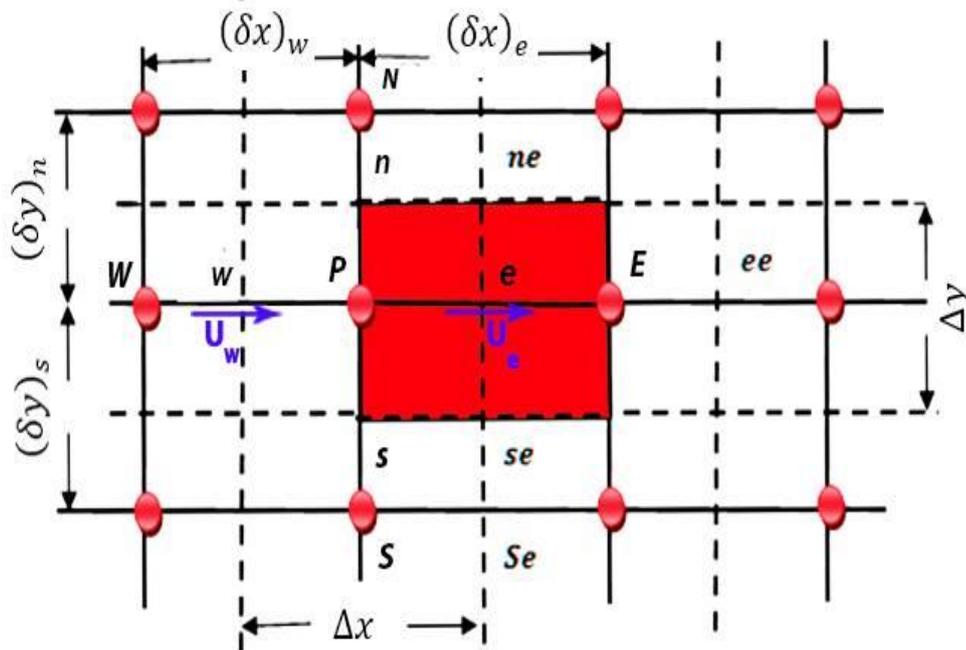


Figure (III.5) : Volume de contrôle décalé vers la droite.

On trouve :

$$\int_{VC} \left[ \frac{\partial(\rho UU)}{\partial Z} \right] dV + \int_{VC} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V U)}{\partial r} \right] dV = \int_{VC} -\frac{\partial P}{\partial Z} dV + \int_{VC} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Gamma_u r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left( \Gamma_u \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \right] dV + \int_{VC} S_u dV \quad (III.34)$$

$$\int_{se}^{ne} \int_P^E \left[ \frac{\partial(\rho UU)}{\partial Z} \right] 2\pi r dr dZ + \int_{se}^{ne} \int_P^E \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V U)}{\partial r} \right] 2\pi r dr dZ =$$

$$\int_{se}^{ne} \int_P^E -\frac{\partial P}{\partial z} 2\pi r dr dZ + \int_{se}^{ne} \int_P^E \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \Gamma_u r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma_u \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] 2\pi r dr dZ + \int_{se}^{ne} \int_P^E S_u 2\pi r dr dZ \quad (III.35)$$

On somme les parties similaires et on simplifié, l'équation (III.35) devient :

$$\int_{se}^{ne} \int_P^E \frac{\partial}{\partial r} \left[ (\rho r V U) - \left( \Gamma_u r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right] 2\pi dr dZ + \int_{se}^{ne} \int_P^E \frac{\partial}{\partial z} \left[ (\rho U U) - \left( \Gamma_u \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] 2\pi r dr dZ = \int_{se}^{ne} \int_P^E -\frac{\partial P}{\partial z} 2\pi r dr dZ + \int_{se}^{ne} \int_P^E S_u 2\pi r dr dZ \quad (III.36)$$

De la même manière, on obtient une équation discrétisée pour  $u$ , sous la forme suivante:

$$A_e U_e = A_w U_w + A_{ee} U_{ee} + A_{se} U_{se} + A_{ne} U_{ne} + (P_P - P_E) a_e + b_u \quad (III.37)$$

On peut écrire l'équation (III.37) sous la forme suivante:

$$A_e U_e = \sum A_{vs} U_{vs} + b_u + (P_P - P_E) a_e \quad (III.38)$$

$$\text{Tel que } A_e = A_w + A_{ee} + A_{se} + A_{ne} - S_P \Delta V_u$$

$$b_u = S_C \Delta V_u$$

Où :

$\Delta V_u$  : est le volume étudié ( $VC_u$ ).

$U_{vs}$  : vitesses dans les faces voisines à la face n.

### III.5.4 Discrétisation de l'équation d'énergie :

L'équation d'énergie est comme suit :

$$\frac{\partial(\rho U \theta)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V \theta)}{\partial r} = \frac{1}{Re.Pr} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right] \quad (III.39)$$

On peut écrire l'équation précédente sous la forme suivante :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho U \theta)}{\partial z} = \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma_\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma_\theta \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right] + S_\theta \quad (III.40)$$

$$\text{Avec : } \Gamma_\theta = \frac{1}{Re.Pr}$$

$$S_\theta = 0$$

On intègre l'équation (III.40) sur le volume de contrôle, on trouve :

$$\int_{VC} \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V \theta)}{\partial r} dV + \int_{VC} \frac{\partial(\rho U \theta)}{\partial Z} dV = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial Z} \left( \Gamma_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) dV + \int_{VC} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) dV + \int_{VC} S_{\theta} dV \quad (III.41)$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho r V \theta)}{\partial r} 2\pi r dr dZ + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial(\rho U \theta)}{\partial Z} 2\pi r dr dZ = \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} \left( \Gamma_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) 2\pi r dr dZ + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \Gamma_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) 2\pi r dr dZ + \int_s^n \int_w^e S_{\theta} 2\pi r dr dZ \quad (III.42)$$

On somme les mêmes parties, l'équation (III.42) devient :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( (\rho r V \theta) - \Gamma_{\theta} \left( r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right) \right] 2\pi r dr dZ + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} \left[ \left( (\rho U \theta) - \left( \Gamma_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) \right) \right] 2\pi r dr dZ = \int_s^n \int_w^e S_{\theta} 2\pi r dr dZ \quad (III.43)$$

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \left( (\rho V \theta) - \Gamma_{\theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \right) \right] 2\pi r dr dZ + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} \left[ r \left( (\rho U \theta) - \left( \Gamma_{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right) \right) \right] 2\pi r dr dZ = \int_s^n \int_w^e S_{\theta} 2\pi r dr dZ \quad (III.44)$$

On pose :

$$J'_r = (\rho V \theta) - \Gamma_{\theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} \right)$$

$$J'_Z = (\rho U \theta) - \Gamma_{\theta} \left( \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right)$$

L'équation (III.44) devient :

$$\int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial r} [r J'_r] 2\pi r dr dZ + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Z} [r J'_Z] 2\pi r dr dZ = \int_s^n \int_w^e S_{\theta} 2\pi r dr dZ \quad (III.45)$$

On intègre la partie gauche de l'équation (III.45), Après l'intégration on trouve :

$$I = \int_w^e 2\pi \left[ (r J'_r)_n - (r J'_r)_s \right] dZ + \int_s^n 2\pi \left[ (r J'_Z)_e - (r J'_Z)_w \right] dr \quad (III.46)$$

De l'hypothèse de l'uniformité de la vitesse sur les faces du volume étudié, l'équation (III.46) devient :

$$I = (J'_z)_e 2\pi \int_s^n (r)_e dr - (J'_z)_w 2\pi \int_s^n (r)_w dr + (J'_r)_n 2\pi \int_w^e (r)_n dZ - (J'_r)_s 2\pi \int_w^e (r)_s dZ \quad (III.47)$$

On pose :

$$\begin{aligned} a_e &= 2\pi \int_s^n (r)_e dr & a_n &= 2\pi \int_w^e (r)_n dz \\ a_w &= 2\pi \int_s^n (r)_w dr & a_s &= 2\pi \int_w^e (r)_s dz \end{aligned}$$

L'équation (III.47) devient :

$$I = (J'_z)_e a_e - (J'_z)_w a_w + (J'_r)_n a_n - (J'_r)_s a_s \quad (III.48)$$

$$J_i = J'_i a_i$$

L'équation (III.48) devient comme suit :

$$I = J_e - J_w + J_n - J_s \quad (III.49)$$

On intègre la partie droite de l'équation (III.45), on trouve :

$$II = \int_s^n \int_w^e S_\theta 2\pi r dr dZ = \overline{S_\theta} \Delta V \quad (III.50)$$

$$\text{Où : } \overline{S_\theta} = S_C + S_P \theta_P$$

Alors :

$$J_e - J_w + J_n - J_s = (S_C + S_P \theta_P) \Delta V \quad (III.51)$$

On multiplie l'équation (III.9) par  $(\theta_P)$  et on fait la soustraction de l'équation (III.51), il vient :

$$(J_e - F_e \theta_P) - (J_w - F_w \theta_P) + (J_n - F_n \theta_P) - (J_s - F_s \theta_P) = (S_C + S_P \theta_P) \Delta V \quad (III.52)$$

L'hypothèse de l'uniformité de vitesse sur les faces du volume étudié, permet d'écrire:

$$(J_e - F_e \theta_P) = A_E (\theta_P - \theta_E) \quad (III.53)$$

$$(J_w - F_w \theta_P) = A_W (\theta_W - \theta_P) \quad (III.54)$$

$$(J_n - F_n \theta_P) = A_N (\theta_P - \theta_N) \quad (III.55)$$

$$(J_s - F_s \theta_p) = A_s(\theta_s - \theta_p) \quad (III.56)$$

Après la substitution des équations (III.53), (III.54), (III.55) et (III.56) dans l'équation discrétisée (III.52) on obtient :

$$A_P \theta_P = A_E \theta_E + A_W \theta_W + A_N \theta_N + A_S \theta_S + b_\theta \quad (III.57)$$

Tel que:  $A_P = A_E + A_W + A_N + A_S - S_P \Delta V$

$$A_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| .$$

$$A_W = D_w A(|P_w|) + \|-F_w, 0\|.$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\|.$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \|-F_s, 0\|.$$

$$b_\theta = S_C \Delta V$$

Pour  $i = e, w$ :

$$P_i = \frac{F_i}{D_i} = \frac{(\rho U)_i a_i}{\frac{\Gamma_i}{\partial z} a_i}$$

Pour  $i = s, n$

$$P_i = \frac{F_i}{D_i} = \frac{(\rho V)_i a_i}{\frac{\Gamma_i}{\partial r} a_i}$$

On peut distinguer plusieurs schémas numériques pour atteindre la solution juste, où on va compter sur la loi de puissance PLDS dans notre solution du phénomène étudié, cette loi donne la meilleure approximation de la solution exacte. Signalons que cette forme se distingue des autres systèmes avec les propriétés de la stabilité et la précision, aussi son utilisation généralisée.

Le tableau suivant résume l'expression de la fonction  $A(|P_e|)$  pour les différents schémas.

La forme	Schémas de la fonction $A( P_e )$
Centré	$1-0.5 P $
Upwind	1
Hybride	$\text{MAX}[0.1 - 0.5 P ]$
Power Law	$\text{MAX}[(1 - 0.1 P )^5]$
Exponentiel (exacte)	$\frac{ P }{\exp( P ) - 1}$

Tableau (III.2) : La fonction  $A(|P_e|)$  pour les différents schémas numériques.

### III.6 Couplage vitesse pression :

On doit trouver la distribution de la pression sur l'intervalle d'écoulement, mais il y a une problématique de manque d'une équation permettant de calculer la pression, c'est pour ça on peut utiliser l'équation de continuité et l'équation de la quantité de mouvement pour relier entre la vitesse et la pression, et ça se fait par l'algorithme **SIMPLE**.

#### III.6.1 L'algorithme SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations)

Cet algorithme a été créé par Patankar et Spalding en 1972, et il être optimisé par Patankar en 1975, où : l'algorithme s'adapte à sa solution sur la correction du champ de la pression et les composantes de la vitesse progressivement jusqu'à ce que variables vérifient les équations de continuité et la quantité de mouvement.

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Selon l'axe } ox: \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n V_n = \sum A_i V_i + b_v + (P_P - P_N) a_n \\ A_s V_s = \sum A_i V_i + b_v + (P_S - P_P) a_s \end{array} \right. \\
 \\
 \text{Selon l'axe } oz: \quad \left\{ \begin{array}{l} A_e U_e = \sum A_i U_i + b_u + (P_P - P_E) a_e \\ A_w U_w = \sum A_i U_i + b_u + (P_w - P_p) a_w \end{array} \right.
 \end{array} \right\} \quad (III.58)$$

Affirme que  $a_e, a_w, a_n, a_s$  sont les faces du volume étudié de composante de la vitesse U et V, qui sont influencées par les forces de la pression P.

Au début, on donne une valeur initiale à la pression  $P^*$  à l'intervalle d'écoulement qui se produit la distribution des vitesses  $U^*$  et  $V^*$ , cette distribution ne vérifie pas l'équation de continuité.

On peut traduire tout ça par le modèle mathématique suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Selon l'axe } or: \quad \left\{ \begin{array}{l} A_n V_n^* = \sum A_i V_i^* + b_v + (P_P^* - P_N^*) a_n \\ A_s V_s^* = \sum A_i V_i^* + b_v + (P_S^* - P_P^*) a_s \end{array} \right. \\ \\ \text{Selon l'axe } oz: \quad \left\{ \begin{array}{l} A_e U_e^* = \sum A_i U_i^* + b_u + (P_P^* - P_E^*) a_e \\ A_w U_w^* = \sum A_i U_i^* + b_u + (P_W^* - P_P^*) a_w \end{array} \right. \end{array} \right\} \text{(III.59)}$$

Où :

$U^*$  et  $V^*$  : les valeurs des composantes de la vitesse, et sont obtenues par l'utilisation des distributions approximatives de chaque vitesse et pression.

Alors, avec l'équation suivante, on peut atteindre la valeur approximative correcte du champ de la pression.

$$P = P^* + P' \tag{III.60}$$

Ou  $P'$  : la valeur de correction de la pression.

La valeur  $P'$  s'affecte sur les champs des vitesses, alors on a :

$$U = U^* + U' \tag{III.61}$$

$$V = V^* + V' \tag{III.62}$$

Avec :

$U'$  : La valeur de correction de la vitesse  $U$ .

$V'$  : La valeur de correction de la vitesse  $V$ .

Nous remplaçons les équations (III.60), (III.61) et (III.62) dans les équations (III.58) il vient :

$$\left. \begin{aligned} A_n(V_n^* + V_n') &= \sum A_i(V_i^* + V_i') + b_v + a_n(P_P^* + P_P' - P_N^* - P_N') \\ A_s(V_s^* + V_s') &= \sum A_i(V_i^* + V_i') + b_v + a_s(P_S^* + P_S' - P_P^* - P_P') \\ A_e(U_e^* + U_e') &= \sum A_i(U_i^* + U_i') + b_u + a_e(P_P^* + P_P' - P_E^* - P_E') \\ A_w(U_w^* + U_w') &= \sum A_i(U_i^* + U_i') + b_u + a_w(P_W^* + P_W' - P_P^* - P_P') \end{aligned} \right\} \text{(III.63)}$$

Par soustraction des équations (III.59) des équations (III.63), on obtient :

$$\left. \begin{aligned} V_n' &= \frac{\sum A_i V_i'}{A_n} + \frac{a_n}{A_n} (P_P' - P_N') \\ V_s' &= \frac{\sum A_i V_i'}{A_s} + \frac{a_s}{A_s} (P_S' - P_P') \\ U_e' &= \frac{\sum A_i U_i'}{A_e} + \frac{a_e}{A_e} (P_P' - P_E') \\ U_w' &= \frac{\sum A_i U_i'}{A_w} + \frac{a_w}{A_w} (P_W' - P_P') \end{aligned} \right\} \text{(III.64)}$$

On pose :

$$d_u^e = \frac{a_e}{A_e} ; \quad d_u^w = \frac{a_w}{A_w} ; \quad d_v^n = \frac{a_n}{A_n} ; \quad d_v^s = \frac{a_s}{A_s}$$

Avec la négligence des éléments  $\frac{\sum A_i V_i'}{A_n}$ ,  $\frac{\sum A_i V_i'}{A_s}$ ,  $\frac{\sum A_i U_i'}{A_e}$  et  $\frac{\sum A_i U_i'}{A_w}$  des équations (III.64), on trouve :

$$\left. \begin{aligned} V_n' &= d_v^n (P_P' - P_N') \\ V_s' &= d_v^s (P_S' - P_P') \\ U_e' &= d_u^e (P_P' - P_E') \\ U_w' &= d_u^w (P_W' - P_P') \end{aligned} \right\} \text{(III.65)}$$

Et on note que la négligence des éléments  $\frac{\sum A_i V_i'}{A_n}$ ,  $\frac{\sum A_i V_i'}{A_s}$ ,  $\frac{\sum A_i U_i'}{A_e}$  et  $\frac{\sum A_i U_i'}{A_w}$ , représente l'approximation principale de l'algorithme SIMPLE, et on obtient :

$$U' = U - U^* \quad ; \quad V' = V - V^*$$

Donc :

$$\left. \begin{aligned} V_n &= V_n^* + d_v^n (P'_P - P'_N) \\ V_s &= V_s^* + d_v^s (P'_S - P'_P) \\ U_e &= U_e^* + d_u^e (P'_P - P'_E) \\ U_w &= U_w^* + d_u^w (P'_W - P'_P) \end{aligned} \right\} \quad (III.66)$$

On injecte l'équation (III.66) dans l'équation de continuité (III.8), on obtient :

$$\begin{aligned} &\rho_e (U_e^* + d_u^e (P'_P - P'_E)) a_e - \rho_w (U_w^* + d_u^w (P'_W - P'_P)) a_w + \\ &\rho_n (V_n^* + d_v^n (P'_P - P'_N)) a_n - \rho_s (V_s^* + d_v^s (P'_S - P'_P)) a_s = 0 \end{aligned} \quad (III.67)$$

Alors l'équation de continuité devient :

$$A_P P'_P = A_E P'_E + A_W P'_W + A_N P'_N + A_S P'_S + b'_P \quad (III.68)$$

L'équation (III.68) représente l'équation de correction de la pression  $P'$ .

Avec :

$$A_P = (\rho_e d_u^e a_e + \rho_w d_u^w a_w + \rho_n d_v^n a_n + \rho_s d_v^s a_s) \quad (III.69)$$

$$A_E = \rho_e d_u^e a_e$$

$$A_W = \rho_w d_u^w a_w$$

$$A_N = \rho_n d_v^n a_n$$

$$A_S = \rho_s d_v^s a_s$$

$$b'_P = -\rho_e U_e^* a_e + \rho_w U_w^* a_w - \rho_n V_n^* a_n + \rho_s V_s^* a_s$$

### III.6.2 L'algorithme SIMPLE passe par des étapes dans l'ordre :

1. Donner une valeur initiale d'un champ de pression  $P^*$  .
2. résoudre les équations de quantité de mouvement pour estimer le champ de la vitesse  $U^*$  et  $V^*$ .
3. résoudre l'équation de correction de pression  $P'$  .
4. correction de la pression ( $P = P^* + P'$ ).
5. corriger le champ de la vitesse  $U$  et  $V$ .
6. résoudre les équations de quantité de mouvement.
7. En prenant le champ de la pression  $P$  en tant qu'une nouvelle approximation et répéter les mêmes étapes précédentes jusqu'à la convergence.

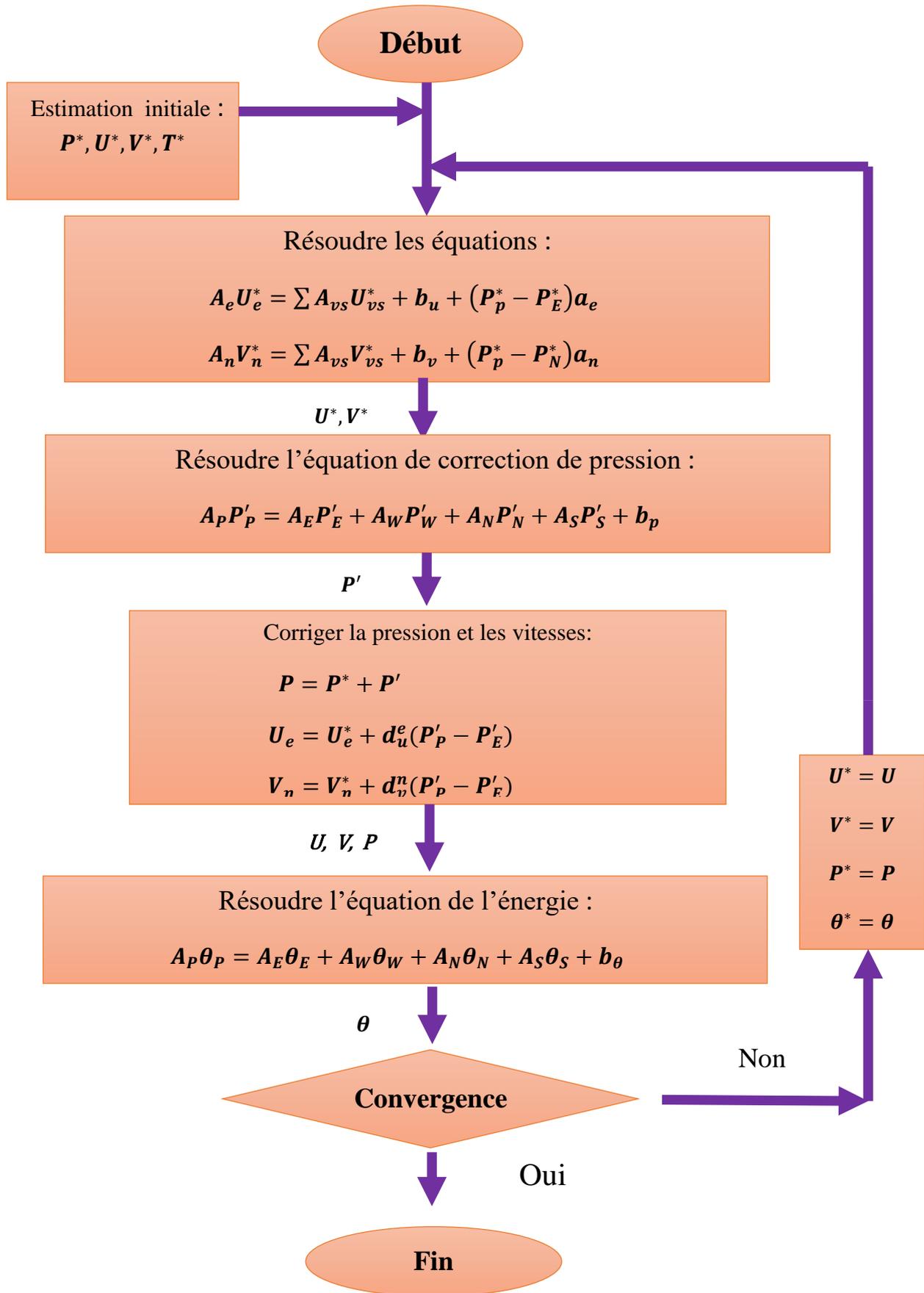


Figure (III.6) : Schéma présente l'algorithme SIMPLE.

### III.7 Méthode de résolution des équations algébriques :

Cette méthode est basée sur la conversion des systèmes d'équations diagonales aux systèmes d'équations tri-diagonales. L'algorithme de THOMAS peut être utilisé pour résoudre ces équations selon un axe connu.

#### III.7.1 Méthode de balayage par ligne :

On définit l'intervalle de calcul comme celui de la figure suivante, celui qui se compose par un système des équations où I est le nombre de lignes, et J est le nombre de colonnes de la maille.

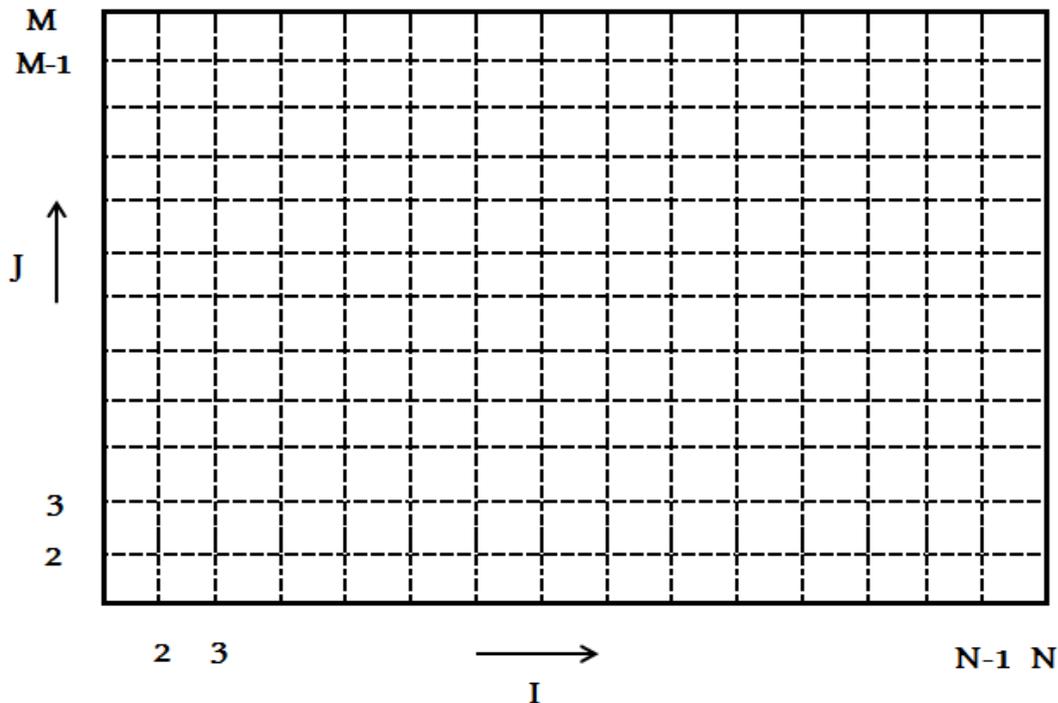


Figure (III.7) : définition de l'intervalle de calcul.

$$A_P \phi_P = A_E \phi_E + A_W \phi_W + A_N \phi_N + A_S \phi_S + b_\phi \quad (\text{III.70})$$

$$A_{i,j} \phi_{i,j} = A_{i+1,j} \phi_{i+1,j} + A_{i-1,j} \phi_{i-1,j} + A_{i,j+1} \phi_{i,j+1}$$

$$+A_{i,j-1}\phi_{i,j-1} + b_{i,j} \quad (III.71)$$

On suppose que les valeurs  $(\phi)$  sont connues pour  $(j + 1)$  et  $(j - 1)$ , c'est pour ça on seulement trois inconnues pour chaque équation.

$$A_N\phi_N + A_S\phi_S + b_\phi = d \quad (III.72)$$

L'équation (III.72) devient :

$$A_P\phi_P = A_E\phi_E + A_W\phi_W + d \quad (III.73)$$

s'écrit sous la forme :

$$A_{i,j}\phi_{i,j} = A_{i+1,j}\phi_{i+1,j} + A_{i-1,j}\phi_{i-1,j} + d_i \quad (III.74)$$

où :

$$-A_{i-1,j}\phi_{i-1,j} + A_{i,j}\phi_{i,j} - A_{i+1,j}\phi_{i+1,j} = d_i \quad (III.75)$$

Posant :

$$a = -A_{i-1,j} \quad , \quad b = A_{i,j} \quad , \quad c = -A_{i+1,j}$$

L'équation (III.75) devient :

$$a_i\phi_{i-1,j} + b_i\phi_{i,j} + c_i\phi_{i+1,j} = d_i \quad (III.76)$$

Ce système peut être exprimé par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ . \\ . \\ \phi_{n-1} \\ \phi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ . \\ . \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix} \quad (III.77)$$

### III.7.2 Méthode de résolution TDMA :

La matrice (III.77) représente une matrice tri-diagonale, alors on va utiliser l'algorithme THOMAS pour la convertir à une matrice bi-diagonale.

De l'équation (III.76) on a :

$$\phi_{i,j} = -\frac{c_i}{b_i} \phi_{i-1,j} - \frac{a_i}{b_i} \phi_{i+1,j} + \frac{d_i}{b_i} \quad (\text{III.78})$$

donc :

$$\phi_{2,j} = -\frac{c_2}{b_2} \phi_{1,j} - \frac{a_2}{b_2} \phi_{3,j} + \frac{d_2}{b_2} \quad (\text{III.79})$$

$$\phi_{3,j} = -\frac{c_3}{b_3} \phi_{2,j} - \frac{a_3}{b_3} \phi_{4,j} + \frac{d_3}{b_3} \quad (\text{III.80})$$

$$\phi_{n-1,j} = -\frac{c_{n-1}}{b_{n-1}} \phi_{n-2,j} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \phi_{n,j} + \frac{d_{n-1}}{b_{n-1}} \quad (\text{III.81})$$

Où  $\phi_1$  est présenté dans les conditions aux limites.

La solution sera comme suit :

$$\phi_2 = -\frac{a_2}{b_2} \phi_3 + \frac{d_2 - c_2 \phi_1}{b_2} \quad (\text{III.82})$$

Posant:

$$M_2 = -\frac{a_2}{b_2} \quad , \quad L_2 = \frac{d_2 - c_2 \phi_1}{b_2}$$

L'équation (III.82) devient :

$$\phi_2 = M_2 \phi_3 + L_2 \quad (\text{III.83})$$

Par la substitution de l'équation (III.83) dans l'équation (III.80), on obtient la valeur de  $\phi_3$  en fonction de  $\phi_4$  :

$$\phi_3 = -\frac{a_3}{b_3 + c_3 M_2} \phi_4 + \frac{d_3 - c_3 L_2}{b_3 + c_3 M_2} \quad (\text{III.84})$$

On pose :

$$M_3 = -\frac{a_3}{b_3 + c_3 M_2} \quad , \quad L_3 = \frac{d_3 - c_3 L_2}{b_3 + c_3 M_2}$$

L'équation (III.84) devient :

$$\phi_3 = M_3 \phi_4 + L_3 \quad (\text{III.85})$$

De la même façon, on trouve la formule des coefficients suivants :

$$\Phi_i = M_i \Phi_{i+1} + L_i \quad (\text{III.86})$$

Où :

$$M_i = -\frac{a_i}{b_i + c_i M_{i-1}} \quad , \quad L_i = \frac{d_i - c_i L_{i-1}}{b_i + c_i M_{i-1}}$$

La valeur  $\Phi_n$  est connue à cause des conditions limites, et par la substitution inverse dans l'équation (III.86) on trouve :

$$\Phi_{n-1} = M_n \cdot \Phi_n + L_n \quad (\text{III.87})$$

Où :

$$M_n = -\frac{a_n}{b_n} \quad , \quad L_n = \frac{d_n}{b_n}$$

### III.8 Critère de convergence :

On obtient la convergence s'il n'y a pas de changements importants sur les variables, où : on utilise le critère de convergence. Pour contrôler la convergence on calcule le résidu de chaque volume étudié dans la maille utilisant la formule suivante :

$$R_{i,j} = A_{v,s} \Phi_{vs} + b_{i,j} - A_{i,j} \Phi_{i,j} \quad (\text{III.88})$$

ou on peut écrire cette équation comme suit :

$$R_{i,j} = A_{i+1,j} \Phi_{i+1,j} + A_{i-1,j} \Phi_{i-1,j} + A_{i,j+1} \Phi_{i,j+1} + A_{i,j-1} \Phi_{i,j-1} + b_{i,j} - A_{i,j} \Phi_{i,j} \quad (\text{III.89})$$

L'équation (III.89) s'écrit de façon générale comme suit :

$$R_\Phi = \sum |R_{i,j}| \quad ; \quad \Phi = u, v, \theta$$

De l'équation (III.69) on calcule  $R_m$  qui est un critère qui vérifié l'équation de continuité :

$$R_m = \sum |b'_{i,j}|$$

### III.9 Méthode de relaxation :

On utilise cette méthode régulièrement dans les problèmes non linéaires pour éviter la divergence. L'expérience numérique a prouvé que les changements très rapides de valeur  $\Phi$  dans une itération à une autre pendant le calcul des problèmes très complexe peuvent provoquer la non-stabilité numérique, et minimiser la probabilité de divergence.

L'écriture de variables se fait en utilisant la méthode de relaxation comme suite :

$$\phi_P = \phi_P + \alpha(\phi'_P + \phi_P) \quad (\text{III.90})$$

Où :

$\phi_P$ : La valeur obtenue de l'itération précédente.

$\phi'_P$ : La valeur obtenue de l'itération courante.

$\alpha$ : Coefficient de relaxation varié de 0 à 1.

Pendant l'exécution du programme, on donne les valeurs du coefficient de relaxation suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\alpha = 0.5) \\ V(\alpha = 0.5) \\ P(\alpha = 0.5) \end{array} \right.$$

### III.10 Conclusion :

Dans ce chapitre on a transformé le système des équations différentielles gouvernantes de l'écoulement, et qui sont obtenues dans le chapitre précédent par sa transformation de la forme différentielle a la forme algébrique en utilisant la méthode des volumes finis qui à nous conduit à une matrice pentadiagonales et qui est transformé a une matrice tri-diagonale par la méthode de balayage ligne par ligne, et puis la résoudre par la méthode TDMA.

# *Chapitre IV*

## *Résultats et Interprétations*

### IV.1 Introduction :

Ce chapitre présente les résultats d'une simulation numérique de la convection forcée laminaire de l'eau dans un échangeur coaxial co-courants. Les résultats obtenus seront discutés en présentant l'effet des paramètres hydrodynamiques et thermiques sur les caractéristiques thermique de l'échangeur (flux échangé, coefficient d'échange global, efficacité). Le calcul est fait par un code FORTRAN principalement basé sur l'algorithme SIMPLE, les simulations ont été effectués sur un maillage uniforme (181\*61), 181 nœuds dans la direction Z et 61 nœuds dans la direction r.

Les résultats obtenus sont présentés comme suit:

- La validation du code de calcul.
- La convergence et la stabilité du programme.
- Champ de vitesse.
- Champ de température.
- Effet de Reynolds sur les caractéristiques thermiques de l'échangeur.
- Effet de la longueur sur les caractéristiques thermiques de l'échangeur.

### IV.2 Validation du code de calcul :

Afin de vérifier la validité du programme de calcul utilisé dans cette étude, nous avons effectués deux comparaisons similaires à notre étude afin d'adapter le programme à ces cas. Ces comparaisons sont les suivantes:

- **Première comparaison:** le profile de vitesse analytique d'un écoulement laminaire, complètement développé dans un canal cylindrique de section annulaire est comparé avec le profile de vitesse numérique obtenu par le présent code de calcul. Nous remarquons un excellent accord entre les deux profiles comme le montre la figure (IV.1).
- **Deuxième comparaison:** cette comparaison est présentée dans le tableau (IV.1) et dans la figure (IV.2). le nombre de Nusselt local interne obtenu par le présent code de calcul pour le cas de la convection forcé d'un écoulement laminaire dans un canal cylindrique de section annulaire pour différentes valeurs du rapport de rayon K est comparé avec le nombre de Nusselt locale interne indiqué dans la référence [12], La comparaison montre que la différence entre notre solution est celle

présenté dans la référence [12] est négligeable où la valeur maximale de l'erreur relative est 4.42%

A partir de ces deux comparaisons, le code de calcul et la présente méthode qui est basée sur l'algorithme SIMPLE, sont valide pour simuler l'écoulement et le transfert de chaleur par convection forcée dans l'échangeur à une large gamme de propriétés hydrodynamiques et thermiques.

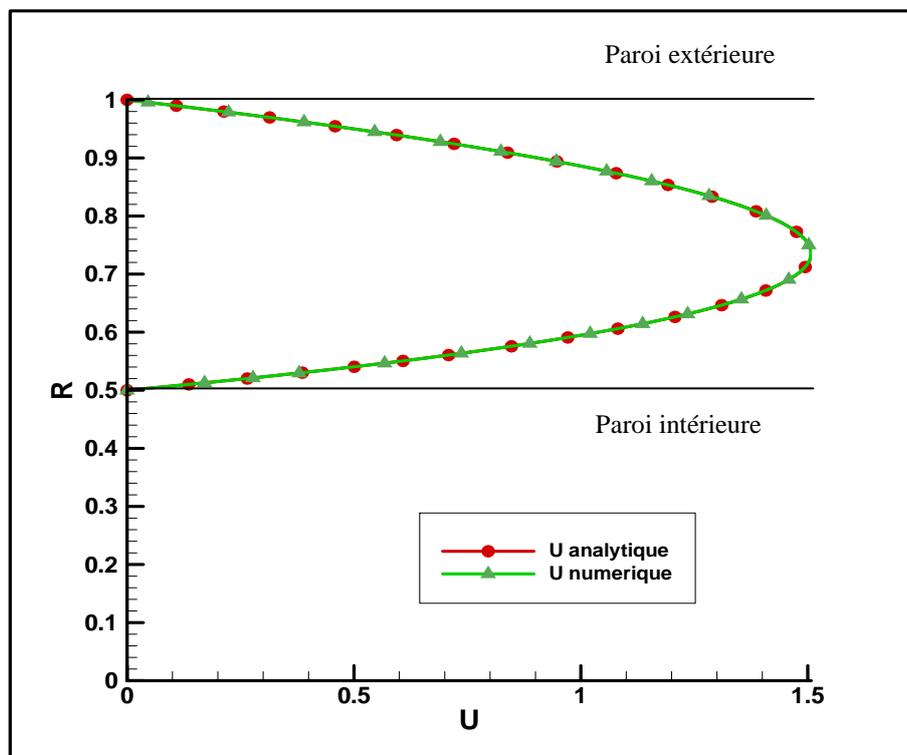
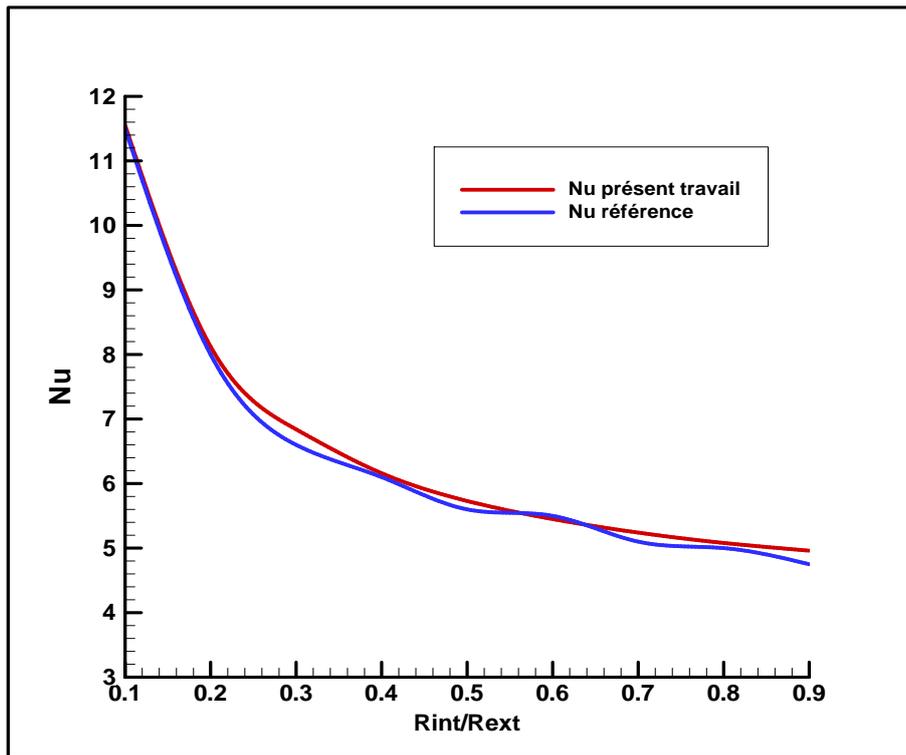


Figure (IV.1) : Comparaison de la solution numérique avec la solution analytique.



**Figure (IV.2) :** Comparaison entre le nombre de Nusselt calculé et les valeurs présentées dans la référence [12].

$K=r_{int}/r_{ext}$	$Nu_{int}$ Numérique	$Nu_{int}$ Référence	Erreur relative %
0.1	11.55	11.50	0.43
0.2	8.12	8.00	1.5
0.3	6.84	6.60	3.63
0.4	6.16	6.10	0.98
0.5	5.73	5.60	2.32
0.6	5.45	5.50	0.90
0.7	5.24	5.10	2.74
0.8	5.08	5.00	1.6
0.9	4.96	4.75	4.42

**Tableau (IV.1) :** Comparaison entre les valeurs du nombre de Nusselt calculé et les valeurs présentées dans la référence [12].

### IV.3 La convergence et la stabilité du programme:

Le test de la convergence de la solution est basé sur le calcul du résidu de pour toutes les équations discrétisées en chaque volume de contrôle et pour chaque itération. La discrétisation des équations différentielles gouvernantes est de la forme algébrique suivante :

$$A_{ij}\phi_{ij} = A_{i-1,j} \phi_{i-1,j} + A_{i+1,j} \phi_{i+1,j} + A_{i,j-1} \phi_{i,j-1} + A_{i,j+1} \phi_{i,j+1} + b \quad (\text{IV.1})$$

A partir de l'équation (IV.1), le résidu sur un seul volume de contrôle est défini comme suit:

$$R_{\phi_{ij}} = A_{ij}\phi_{ij} - A_{i-1,j} \phi_{i-1,j} - A_{i+1,j} \phi_{i+1,j} - A_{i,j-1} \phi_{i,j-1} - A_{i,j+1} \phi_{i,j+1} - b_{ij} \quad (\text{IV.2})$$

Le résidu global  $R_\phi$  sur tout le domaine de calcul (sur tout le maillage) est calculé par l'équation suivante :

$$R_\phi = \sum_{\text{mailles}} |R_{\phi_{ij}}| \quad \text{avec} \quad \phi = U, V, \theta$$

$R_\phi$  : résidu global pour chaque itération sur la maillage de calcul

Dans cette étude la convergence sera atteinte et on pourra arrêter le processus itératif lorsque les conditions suivantes sont vérifiées:

$$R_U < 10^{-4}, \quad R_V < 10^{-4}, \quad R_\theta < 10^{-4}$$

Pour assurer que la convergence est atteinte, la variation des résidus en fonction des itérations est présentée sur les figures (IV. 3), (IV. 4), (IV. 5) pour deux valeurs du nombre de Reynolds ( $Re = 500, 1500$ ), les courbes montrent que les valeurs des résidus tendent vers les valeurs prescrites.

Un autre teste de la convergence, se fait par le calcul du nombre de Nusselt moyen interne et externe à chaque itération. Les figures (IV. 6), (IV. 7) illustrent l'évolution de la valeur de Nusselt moyen en fonction des itérations, la stabilité de la valeur de Nusselt moyen après l'itération 1500, indique que la convergence est atteinte.

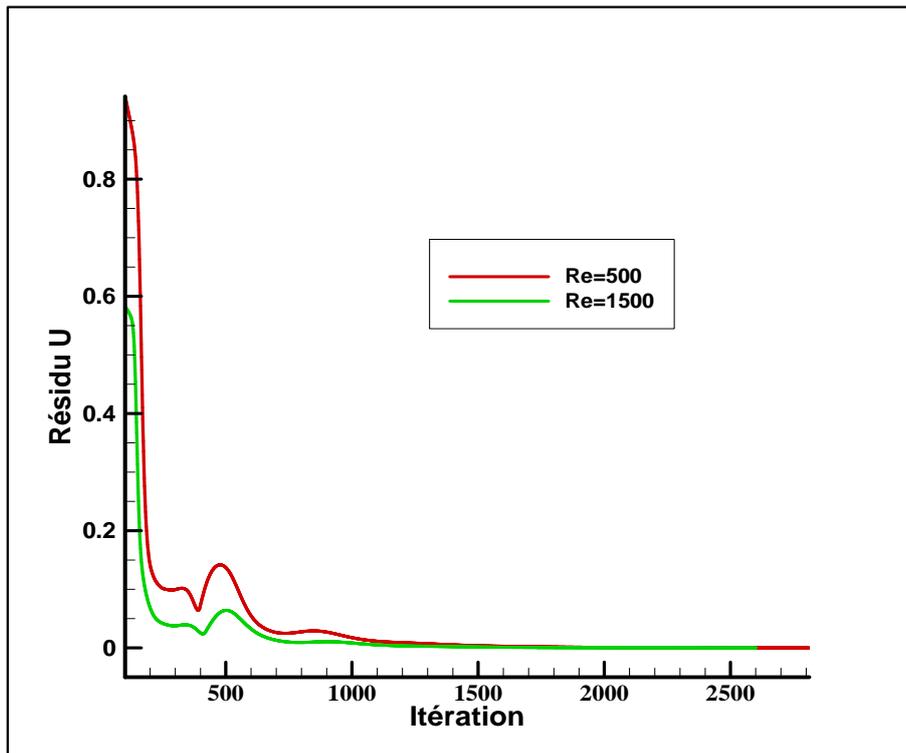


Figure (IV.3) : Variation du résidu  $R_U$  en fonction des itérations.

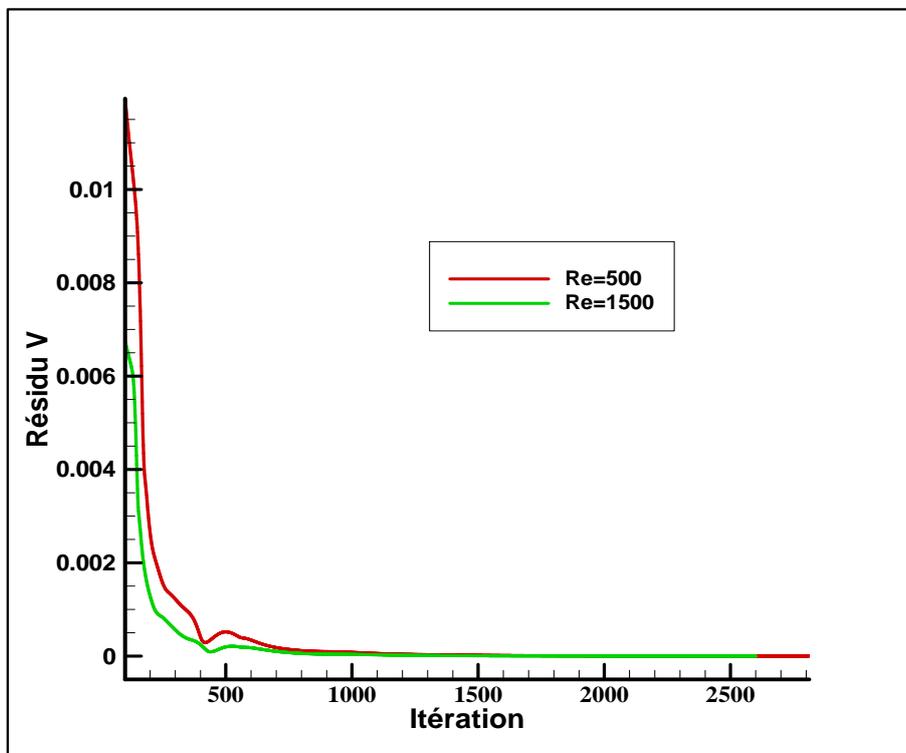


Figure (IV.4) : Variation du résidu  $R_V$  en fonction des itérations.

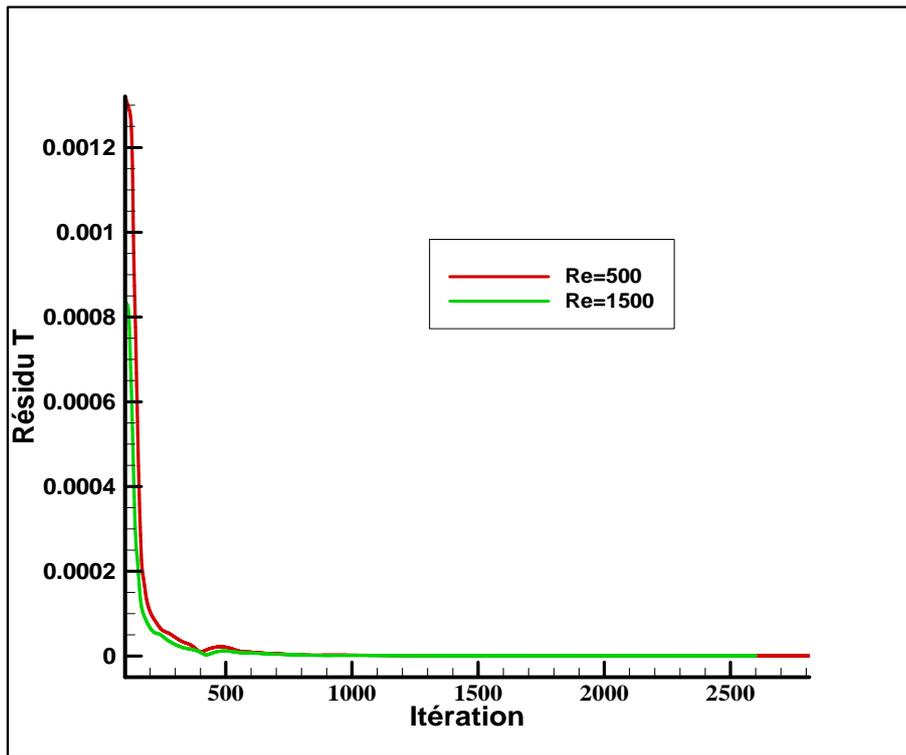


Figure (IV.5) : Variation du résidu  $R_T$  en fonction des itérations.

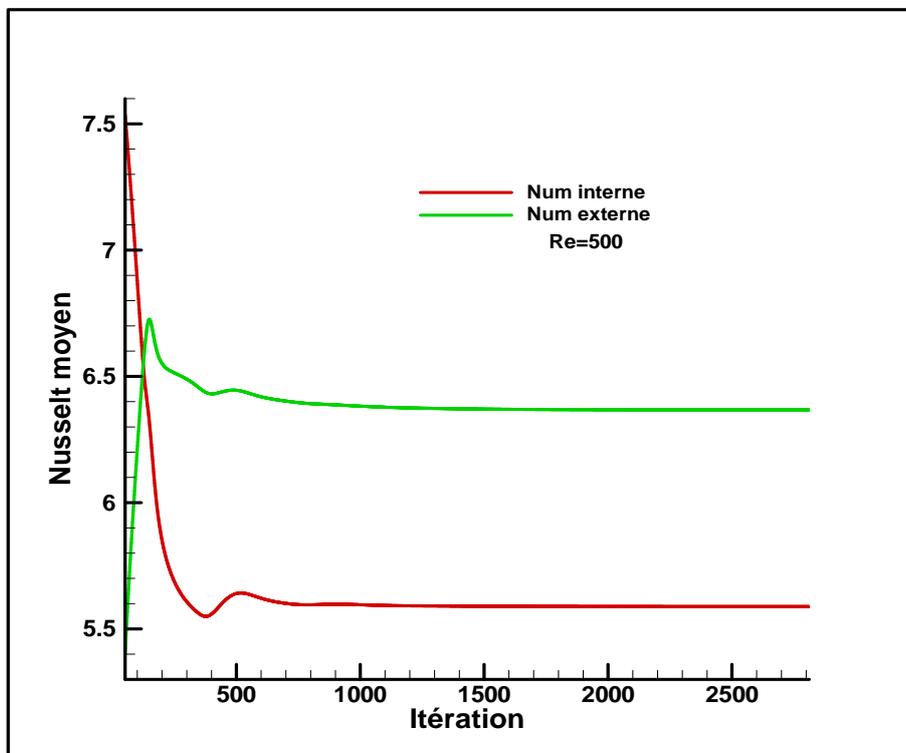


Figure (IV.6): Variation de Nusselt moyen en fonction des itérations.

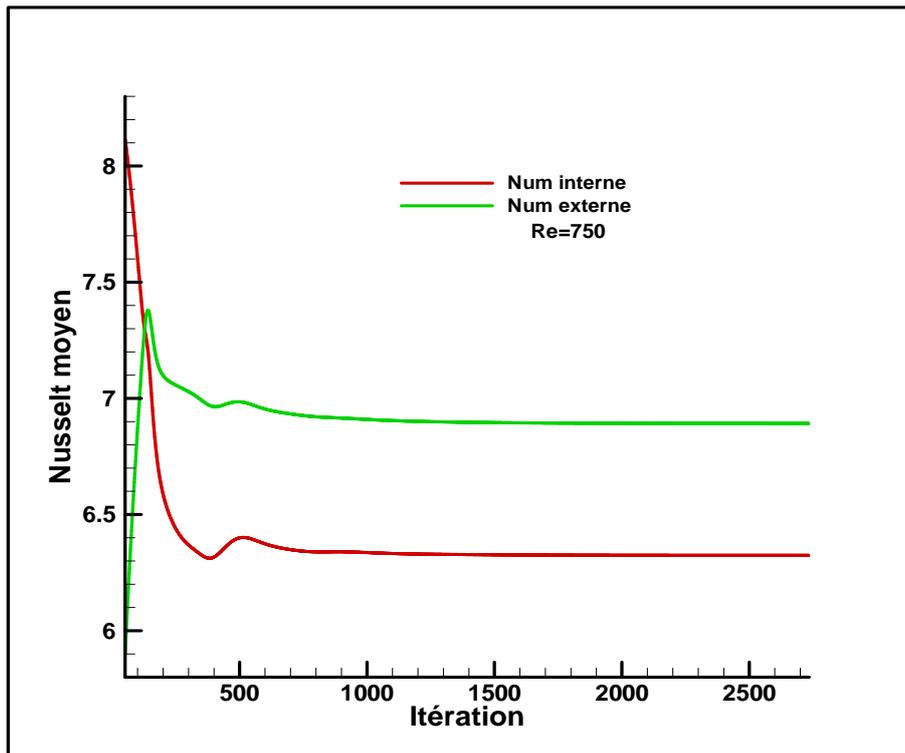
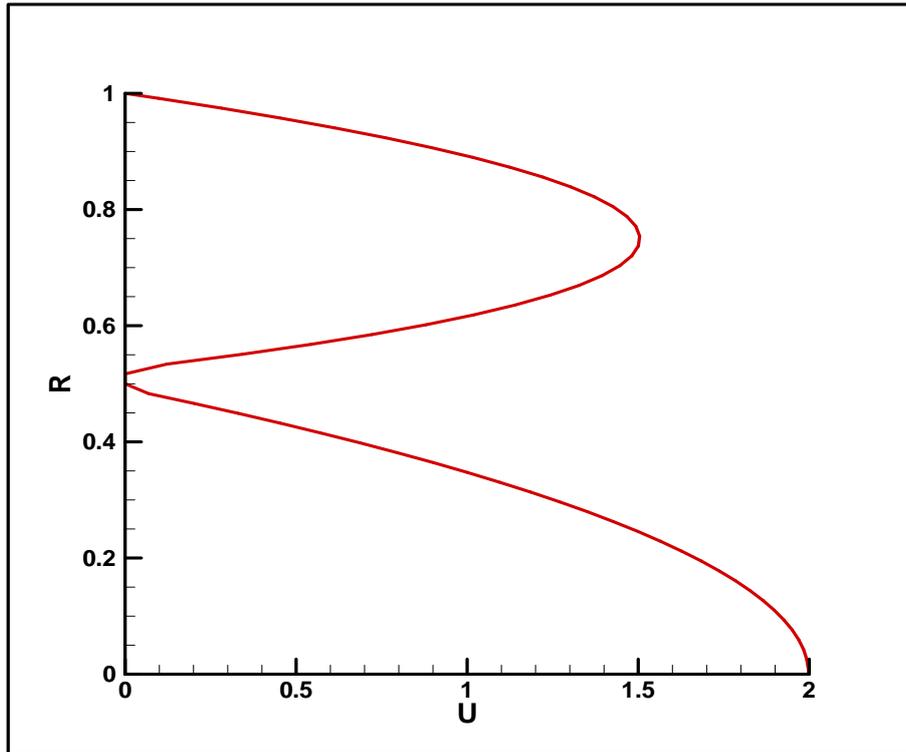


Figure (IV.7) : Variation de Nusselt moyen en fonction des itérations.

#### IV.4 Présentation des résultats :

##### ❖ Profile de vitesse :

Le profile de vitesse en régime établi dans un échangeur co-courant à double tube concentrique est présenté dans la figure (IV.8).



**Figure (IV.8) :** Profil de vitesse en régime établi dans un échangeur co-courant.

❖ **Champ de température :**

Le champ de température pour le cas d'un échangeur de chaleur à double tube concentrique (fluide chaud dans le tube interne et froid dans l'espace annulaire) est présenté dans la figure (IV.9).

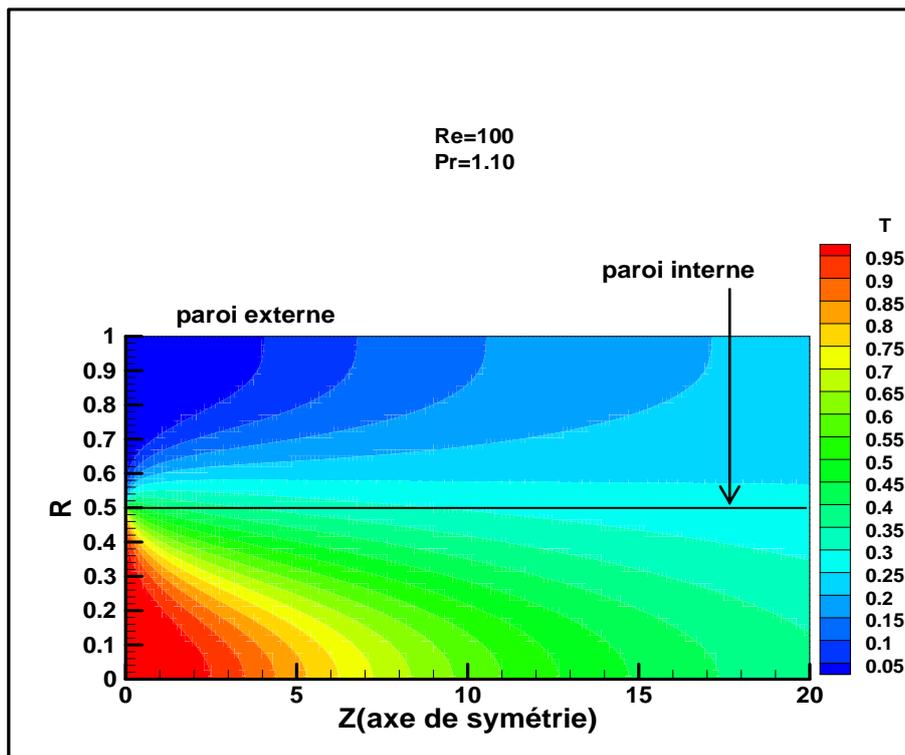


Figure (IV.9) : Contour de la température dans un échangeur co-courant.

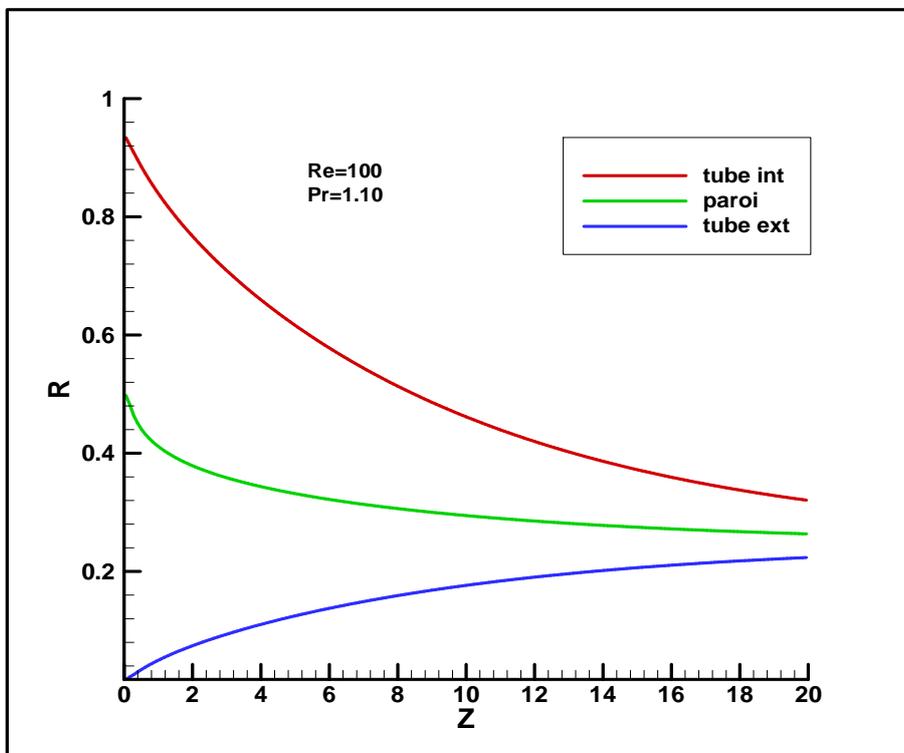


Figure (IV.10): Distribution de température dans un échangeur co-courant.

### IV.4.1 Effet de Reynolds sur les caractéristiques thermiques de l'échangeur :

Afin d'étudier l'effet de Reynolds sur les caractéristiques thermique d'un échangeur de chaleur co-courant, nous avons tracé la variation du flux de chaleur échangé, du coefficient d'échange global, et de l'efficacité en fonction de Reynolds pour trois cas :

- Premier cas :  $Re_1=1000, Re_2=1000$
- Deuxième cas :  $Re_1=1000, 250 \leq Re_2 \leq 2000$
- Troisième cas :  $250 \leq Re_1 \leq 2000, Re_2=1000$

$Re_1, Re_2$  : sont respectivement les nombres de Reynolds dans le tube interne et externe. L'échangeur fonctionne avec l'eau chaude dans le tube interne et l'eau froide dans le tube externe

Les résultats sont présentés dans les figures (IV.11), (IV.12), (IV.13), (IV.14), (IV.15), (IV.16), (IV.17), (IV.18), (IV.19) :

L'analyse des résultats montrent que :

- L'augmentation du nombre de Reynolds augmente le coefficient d'échange global ' $hg$ ' et par conséquent augmente le flux de chaleur échangé ' $Q$ ' entre l'eau chaude et l'eau froide
- Le coefficient d'échange global et le flux échangé augmentent avec l'augmentation de Reynolds cela est dû à l'augmentation de la vitesse de l'eau car le transfert de chaleur par convection s'améliore avec l'augmentation de la vitesse de l'écoulement.
- Le coefficient d'échange global ' $hg$ ' est proportionnel à ' $Q$ ', plus ' $hg$ ' est élevé, plus la puissance thermique échangée est importante. En d'autre terme, cela signifie que pour un échangeur de chaleur de valeur ' $hg$ ' plus élevée générera des temps de fonctionnement plus courts et moins de surface d'échange et par conséquent diminution du volume de l'échangeur.
- L'efficacité est diminuée lorsque le nombre de Reynolds augmente (la vitesse d'écoulement et le débit massique augmentent), ce qui provoque une augmentation

de la différence entre le flux réel échangé et le flux maximal et par conséquent l'efficacité diminue.

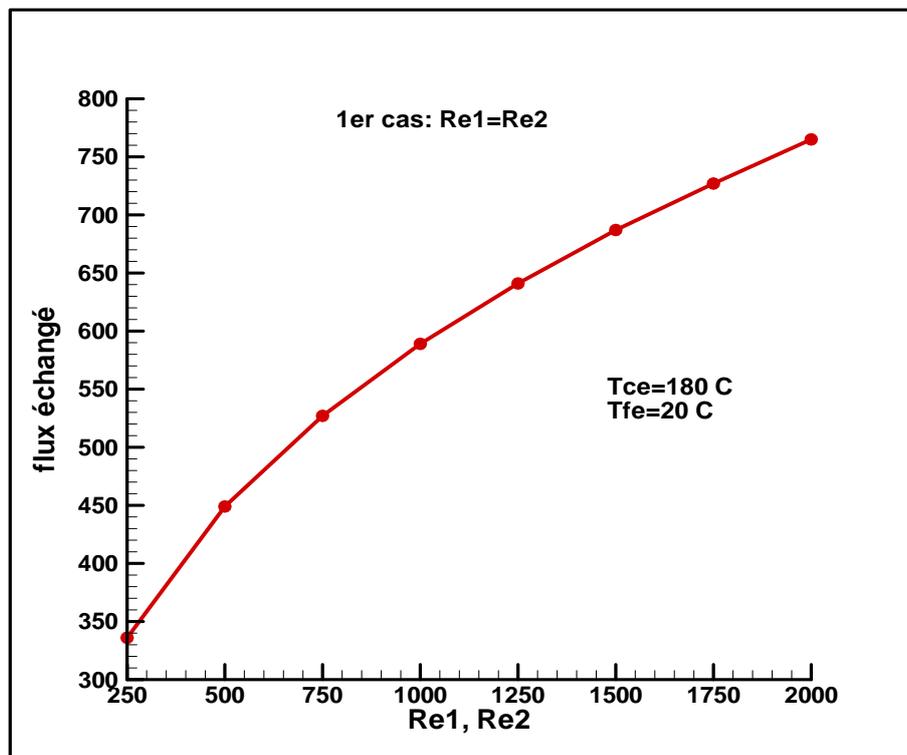


Figure (IV.11) : Variation du flux de chaleur échangé en fonction du Reynolds.

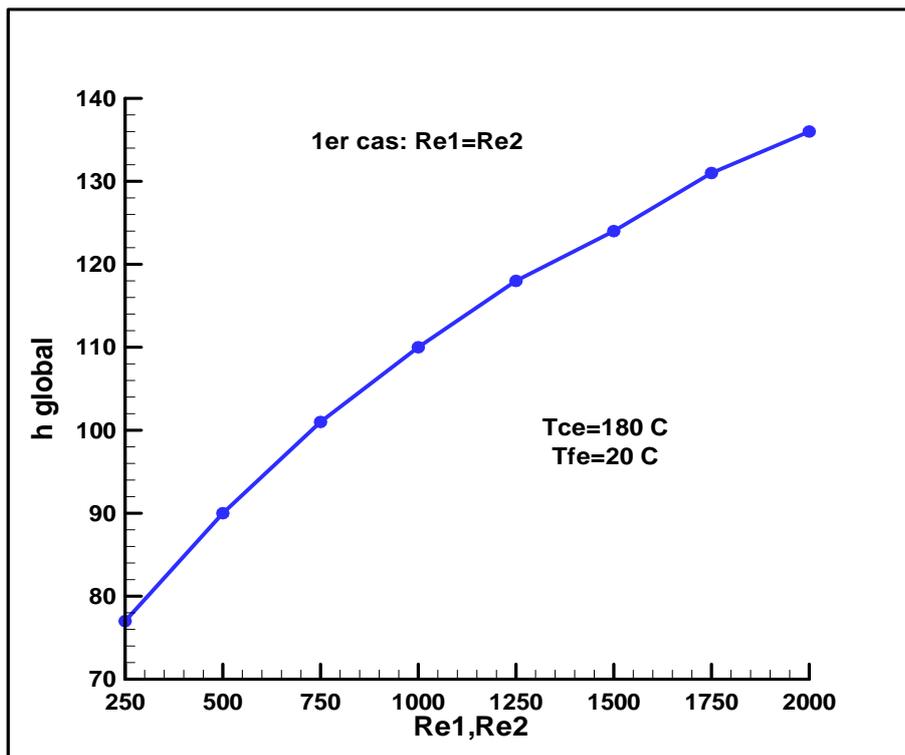


Figure (IV.12) : Variation du coefficient d'échange global en fonction du Reynolds.

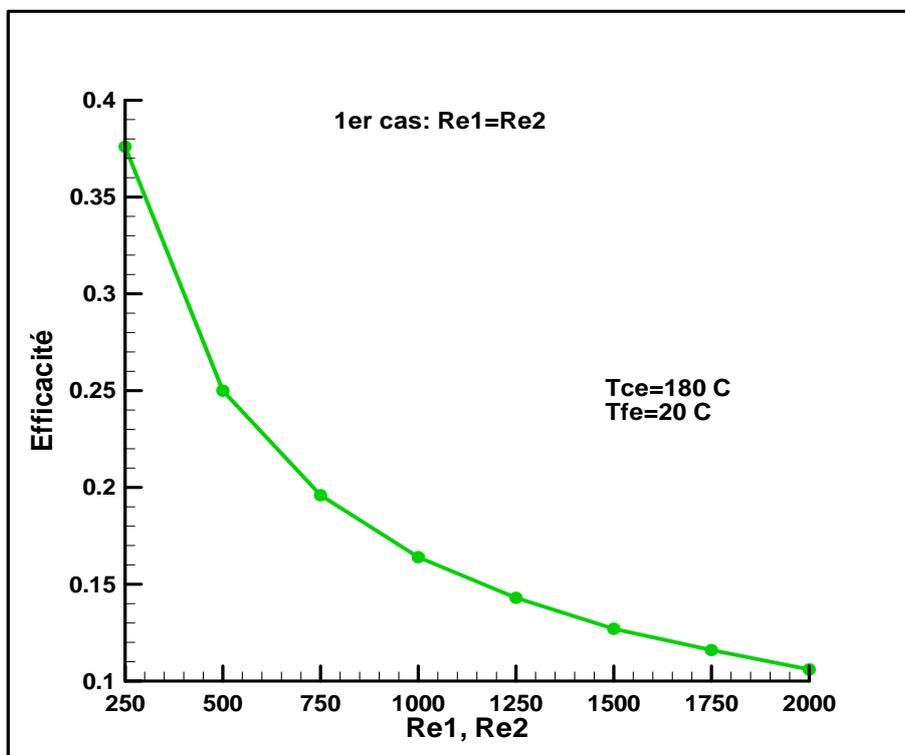


Figure (IV.13) : Variation de l'efficacité en fonction du Reynolds.

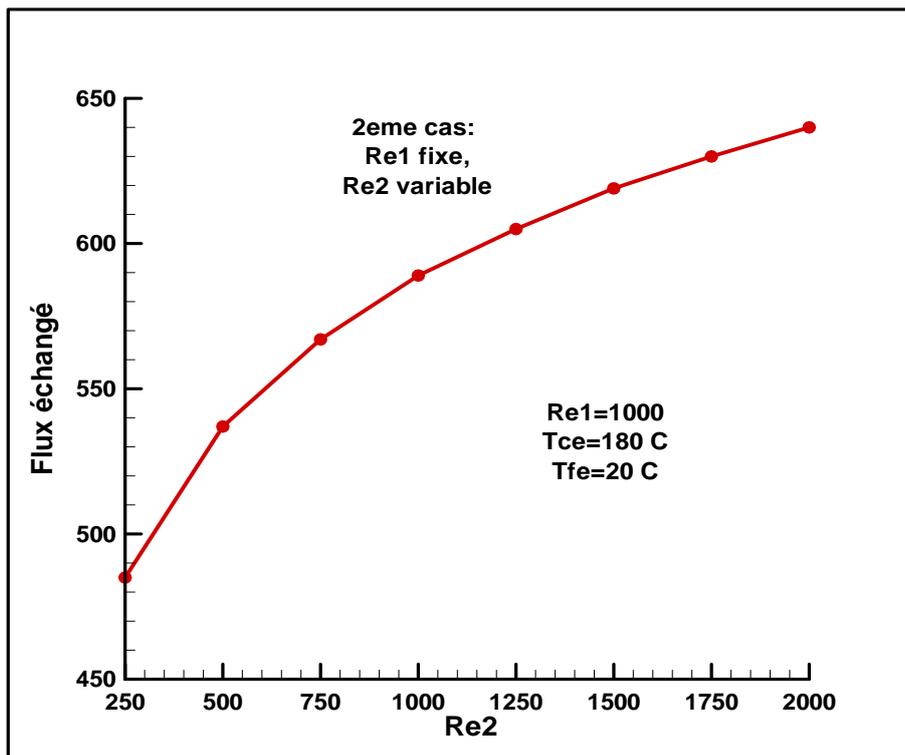


Figure (IV.14) : Variation du flux de chaleur échangé en fonction du Reynolds.

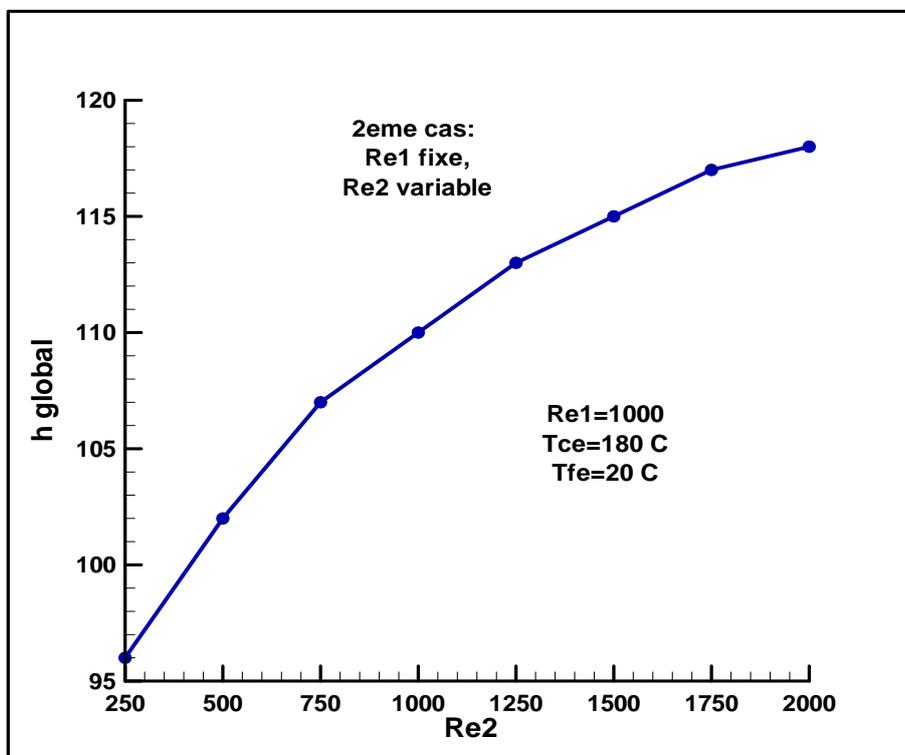


Figure (IV.15) : Variation du coefficient d'échange global en fonction du Reynolds.

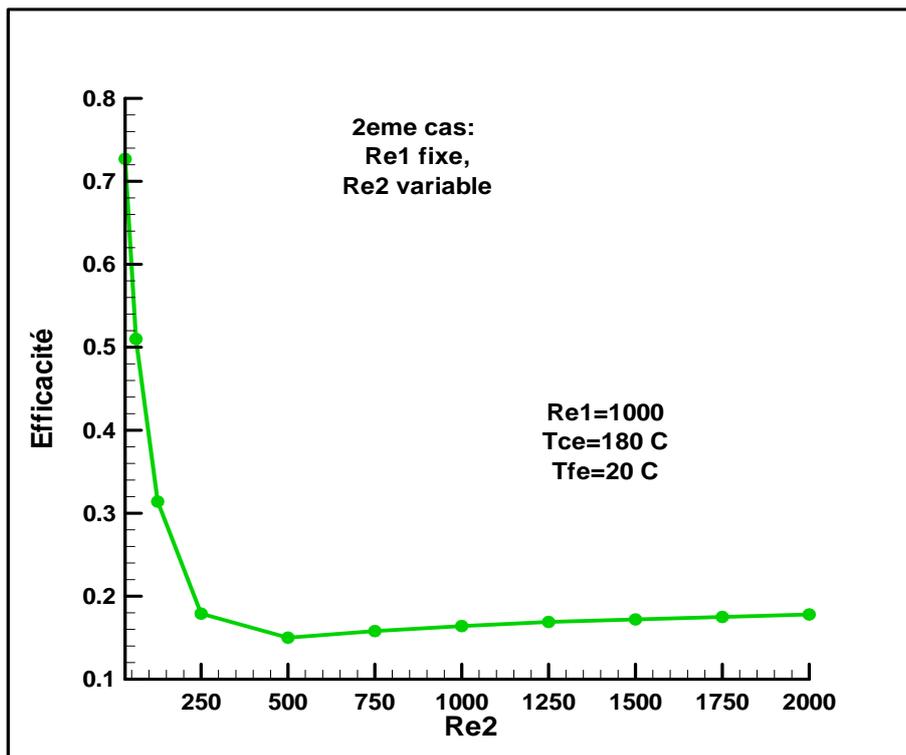


Figure (IV.16) : Variation de l'efficacité en fonction du Reynolds.

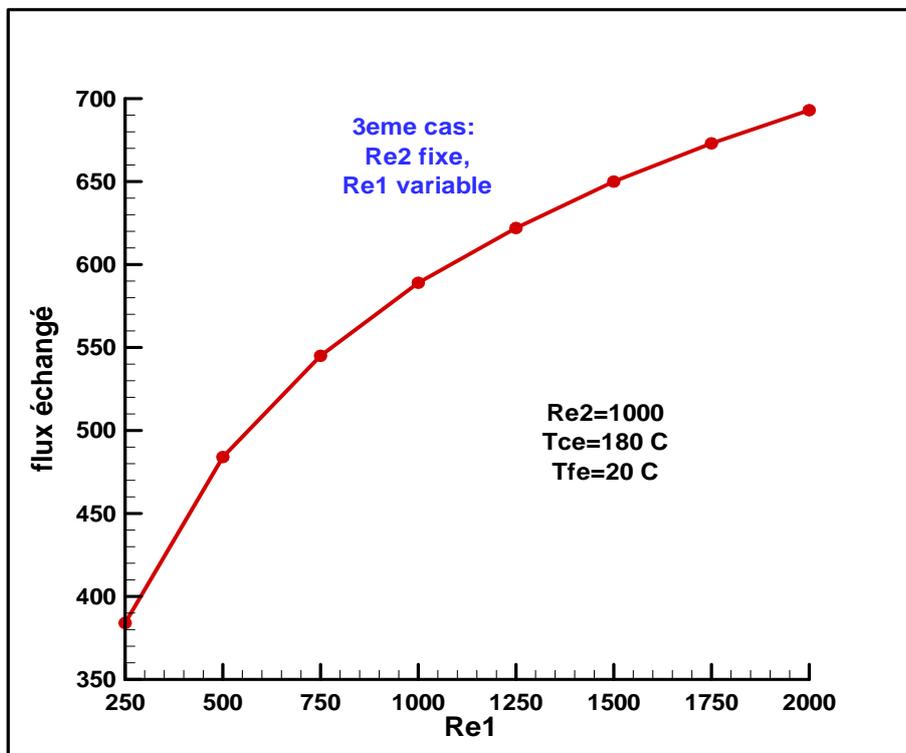


Figure (IV.17) : Variation du flux de chaleur échangé en fonction du Reynolds.

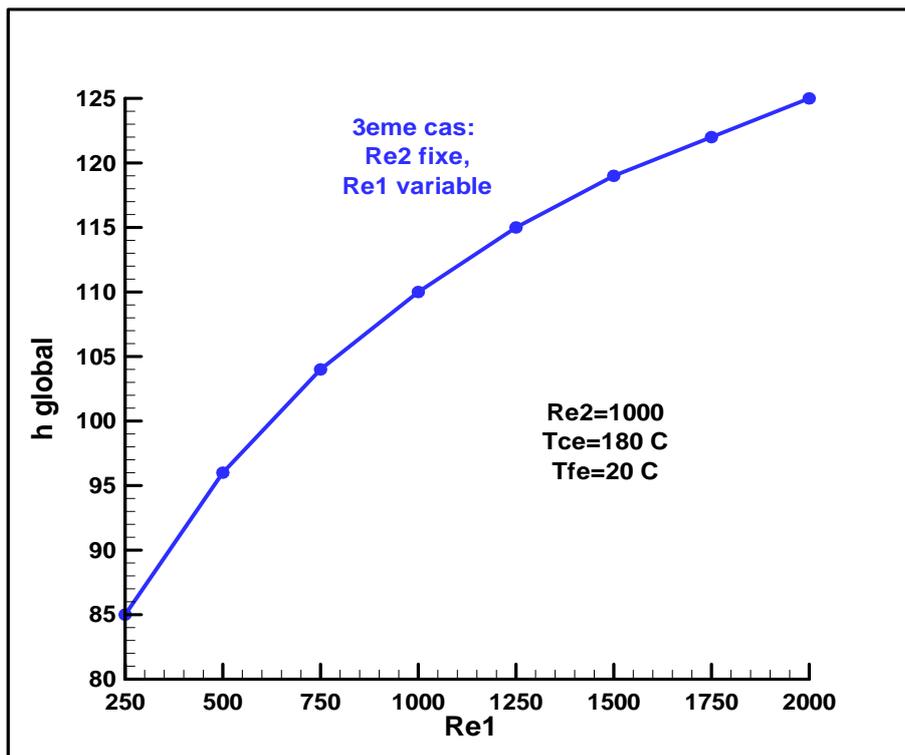


Figure (IV.18) : Variation du coefficient d'échange global en fonction du Reynolds.

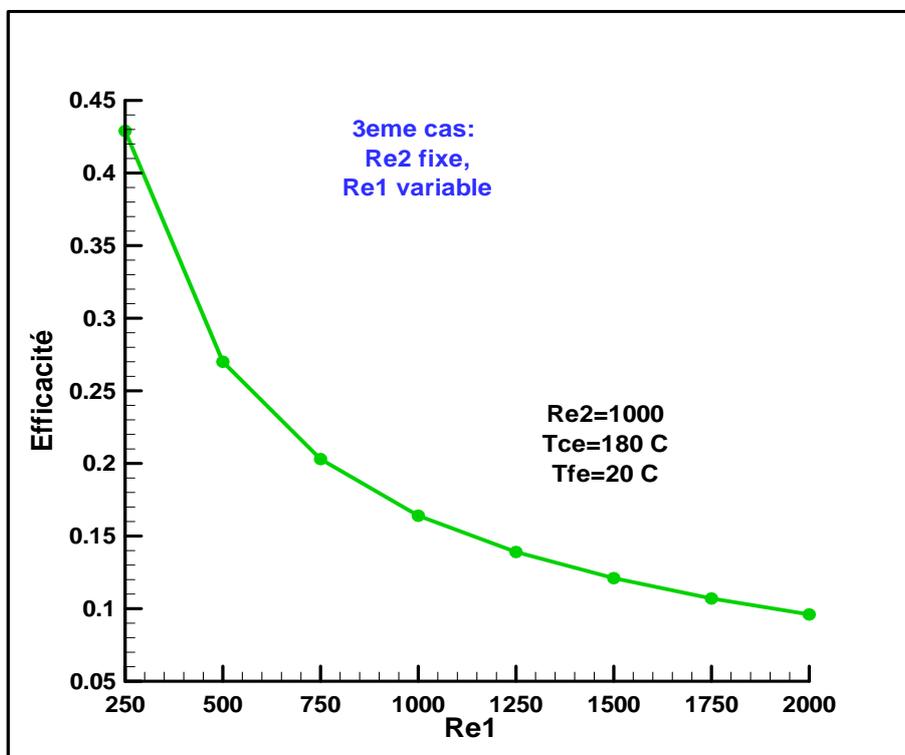


Figure (IV.19) : Variation de l'efficacité en fonction du Reynolds.

#### IV.4.2 Comparaison entre les trois cas :

La comparaison entre les trois cas étudiés, montrent que l'influence du nombre de Reynolds sur les caractéristiques thermiques peut être divisée en deux zones :

- Zone1 ( $Re \leq 1000$ ) : on remarque que le deuxième cas ou ( $Re_1=1000, 250 \leq Re_2 \leq 1000$ ) présente meilleur flux échangé et meilleur coefficient d'échange global.
- Zone2 ( $Re \geq 1000$ ) : on constate que le premier cas ou ( $Re_1=Re_2$ ) donne meilleur flux échangé et meilleur coefficient d'échange global.

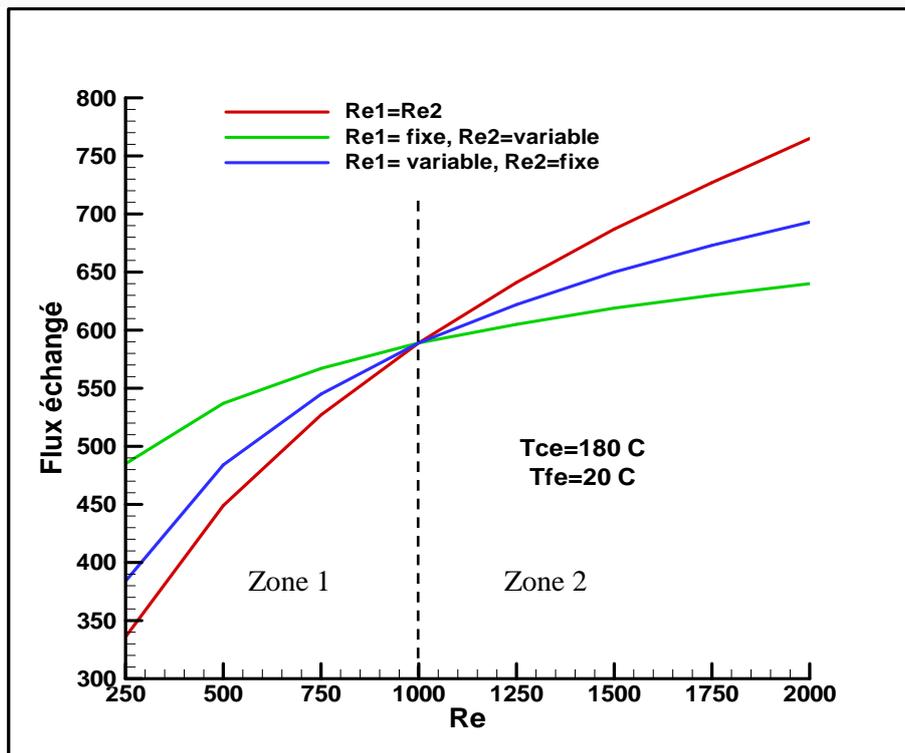


Figure (IV.20) : Comparaison de flux échangé entre les trois cas.

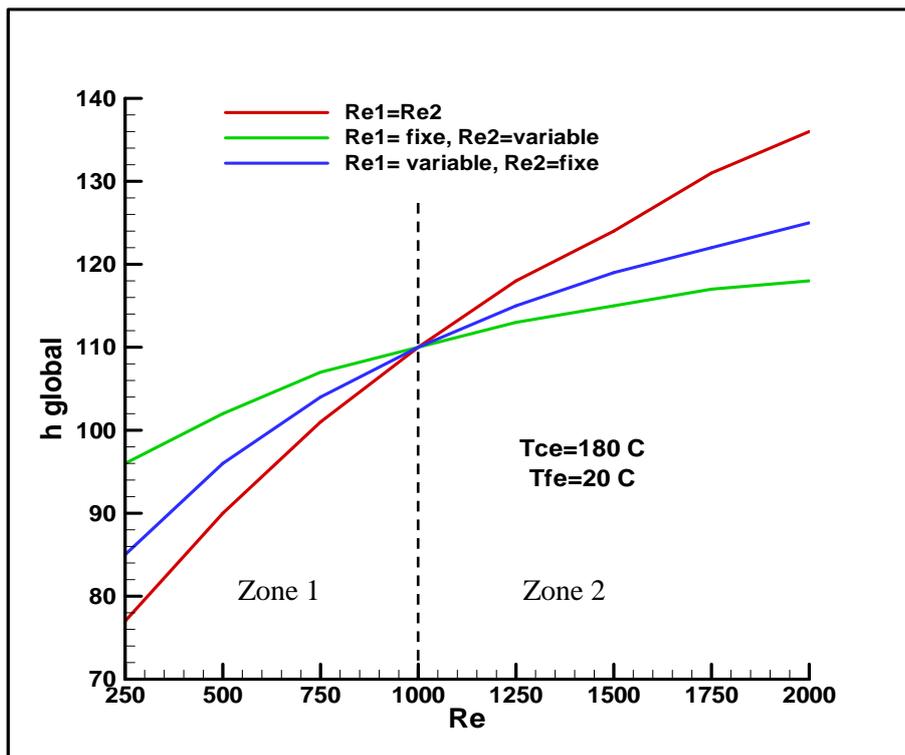


Figure (IV.21) : Comparaison du coefficient d'échange global entre les trois cas.

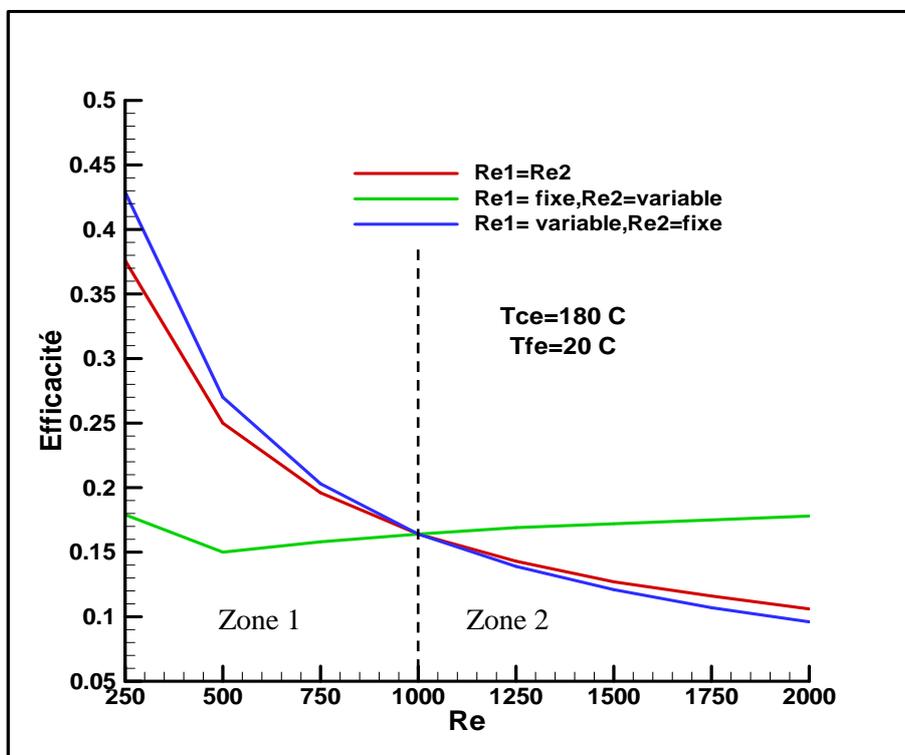


Figure (IV.22) : Comparaison de l'efficacité entre les trois cas.

### IV.4.3 Influence de la longueur sur les caractéristiques thermique de l'échangeur :

Afin d'étudier l'effet de la longueur sur les caractéristiques thermique d'un échangeur de chaleur co-courant, nous avons présentés sur les figures (IV.23), (IV.24), (IV.25) et (IV.26) le flux de chaleur échangé, flux maximal, coefficient d'échange global, l'efficacité et de la différence de température à la sortie ( $\Delta T_S$ ) pour différentes longueurs de l'échangeur de chaleur avec  $(L/D_h)$  varie entre 5 et 40.

- La figure (IV.23) représente la variation du flux de chaleur échangé et le flux maximal en fonction de la longueur de l'échangeur. On remarque clairement que le flux de chaleur échangé augmente avec l'augmentation de la longueur, cela est dû à l'augmentation de la surface d'échange entre les deux fluides. On remarque aussi que le flux maximal ne dépend pas de la longueur comme illustré dans l'équation (II.51).
- La figure (IV.24) représente la variation du coefficient d'échange global moyen en fonction de la longueur de l'échangeur. On voit bien que plus la longueur de l'échangeur augmente, le coefficient d'échange global ' $hg$ ' diminue car l'augmentation de la longueur fait passer l'écoulement du régime non établi au régime établi. Le coefficient d'échange global dans la zone non établie est plus élevé que celui dans la zone établie. Donc, toute augmentation de la longueur de l'échangeur est accompagnée par la diminution de la valeur ' $hg$ '
- La figure (IV.25) représente la variation de l'efficacité en fonction de la longueur. On remarque clairement que l'efficacité augmente avec l'augmentation la longueur de l'échangeur. L'augmentation de l'efficacité est justifiée par la diminution de la différence entre le flux maximal et le flux réel échangé comme le montre la figure (IV.23). On remarque aussi que la diminution de la différence de température à la sortie ( $\Delta T_S$ ) est une conséquence de l'augmentation de l'efficacité comme illustre la figure (IV.26).

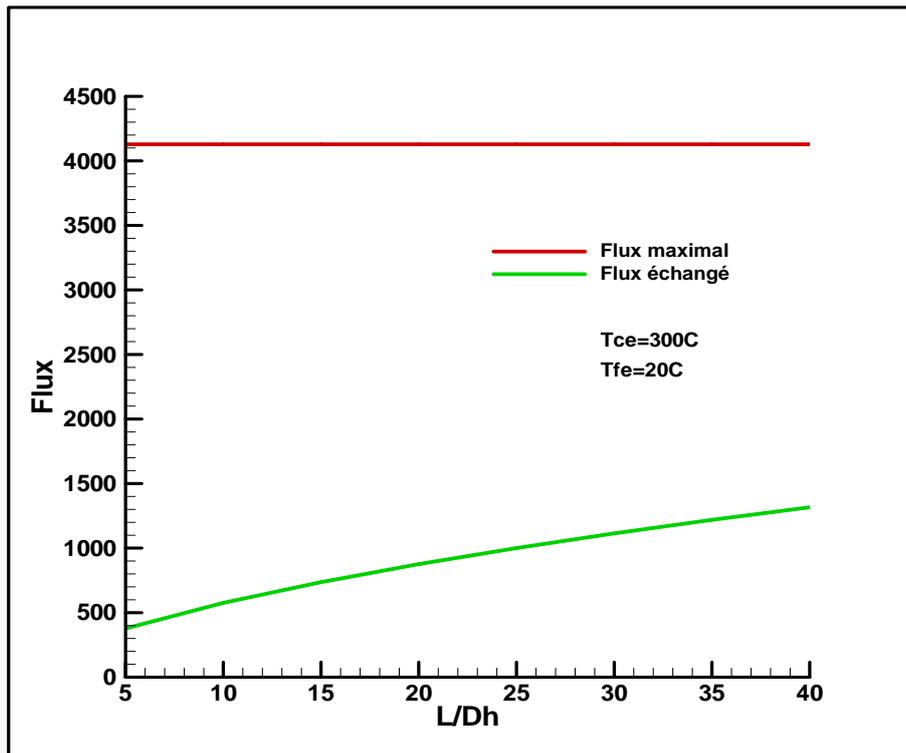


Figure (IV.23) : Variation du flux de chaleur échangé et le flux maximal en fonction de longueur.

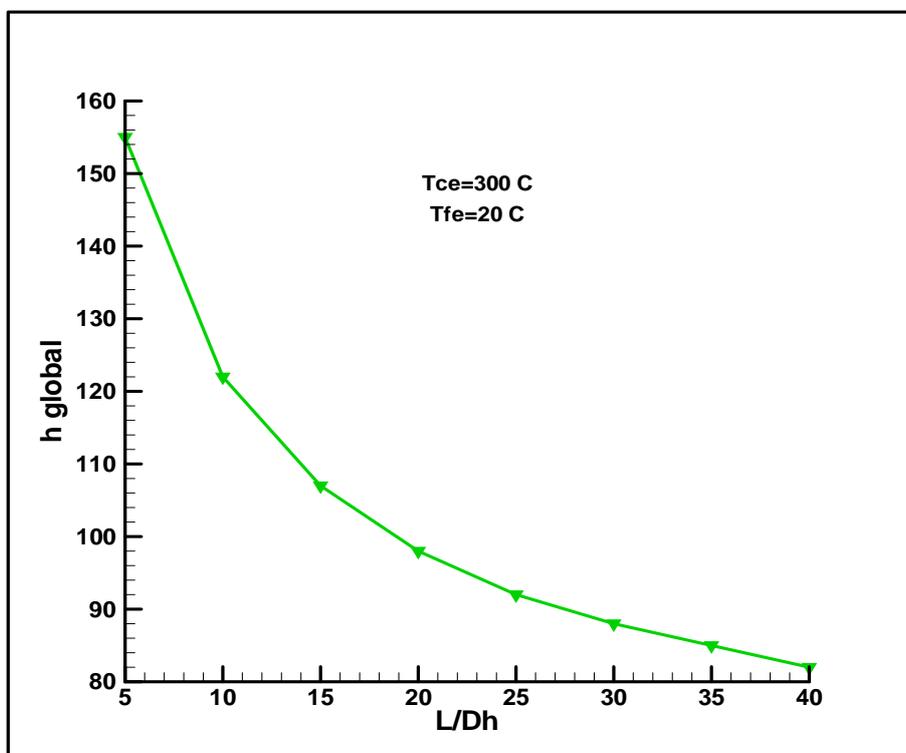


Figure (IV.24) : Variation du coefficient d'échange global en fonction de longueur.

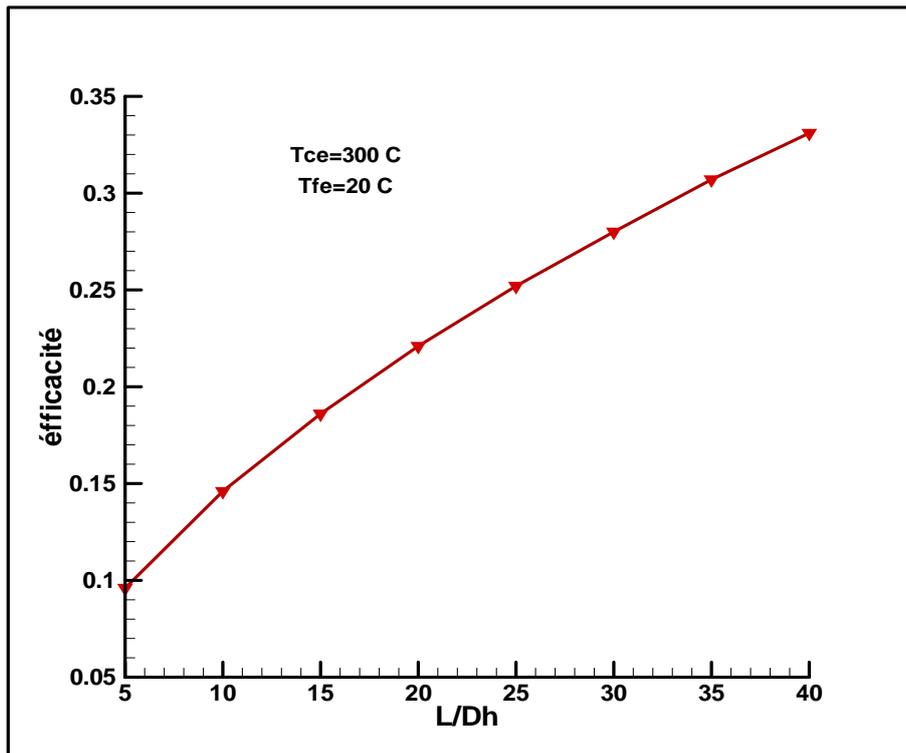


Figure (IV.25) : Variation de l'efficacité en fonction de longueur.

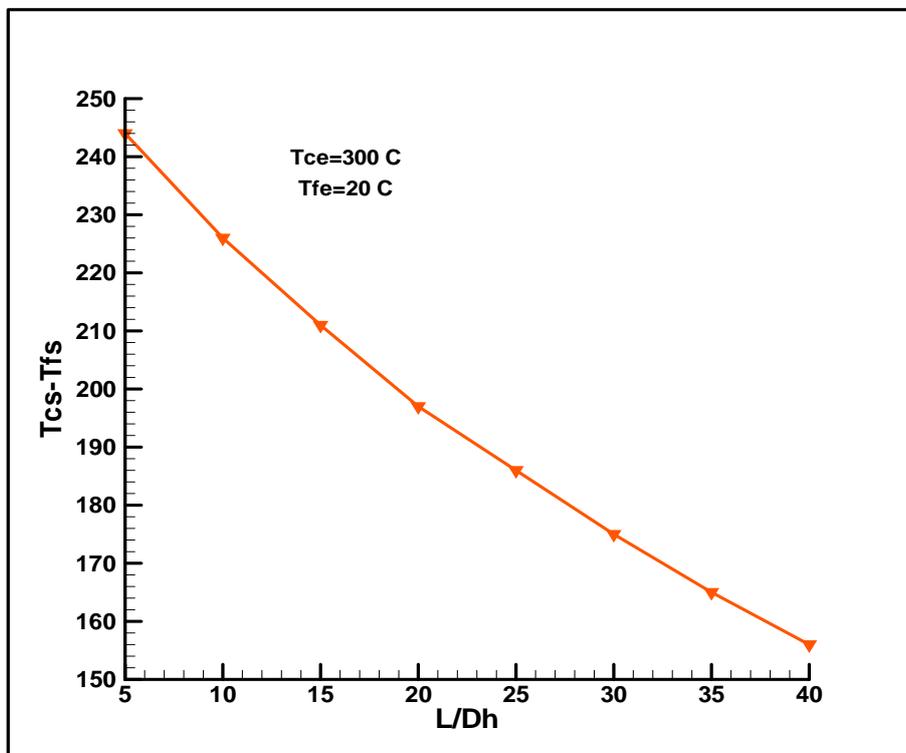


Figure (IV.26) : Variation de  $(\Delta T_s)$  en fonction de longueur.

# *Conclusion général*

## Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons présenté une étude numérique bidimensionnelle de la convection forcée laminaire stationnaire dans un échangeur de chaleur à double tube concentrique à courant parallèle. La forme finale des équations gouvernantes ont été écrits sous forme adimensionnelle. Ces équations ont été discrétisées par la méthode des volumes et résolues itérativement par la méthode de balayage ligne par ligne avec la conjonction de l'algorithme de Thomas (TDMA). Le code de calcul a été validé avec d'autres résultats analytiques et numériques

La première partie de la simulation consiste à examiner l'effet de la variation du nombre de Reynolds sur le coefficient d'échange global, la puissance thermique transférée et l'efficacité. L'analyse des résultats révèle que :

- le coefficient d'échange global, la puissance thermique transférée sont proportionnelles au nombre de Reynolds.
- L'effet du nombre de Reynolds sur le coefficient d'échange global et la puissance thermique transférée peut être divisé en deux zones :
  - ✓ Zone1 ( $Re \leq 1000$ ) : on remarque que le deuxième cas ou ( $Re_1=1000$ ,  $250 \leq Re_2 \leq 1000$ ) présente meilleur flux échangé et meilleur coefficient d'échange global.
  - ✓ Zone2 ( $Re \geq 1000$ ) : on constate que le premier cas ou ( $Re_1= Re_2$ ) donne meilleur flux échangé et meilleur coefficient d'échange global.

La deuxième partie de la simulation consiste à étudier l'effet de la variation de la longueur des tubes sur le coefficient d'échange global, la puissance thermique transférée et l'efficacité. Après l'analyse des résultats on peut conclure ce qui suit:

- L'augmentation de la longueur de l'échangeur de chaleur fait croître le flux de chaleur échangé.
- La valeur du coefficient d'échange global moyen est inversement proportionnelle à la longueur de l'échangeur.
- La croissance de la longueur fait augmenter l'efficacité de l'échangeur.



# *Bibliographie*



## *Bibliographie*

- [1]: **ALI NEHARI Amine**, Étude thermo-énergétique d'un échangeur de chaleur à plaques et joints : Application aux fluides géothermiques, Master université de Tlemcen (2011).
- [2]: **V.Peremiatheikine** "appareils d'échange de chaleur des unités pétrochimiques /construction.  
Entretien. Calcul mécanique" INHC édition 1985.
- [3]: **P.Writhier**, "Pétrole-raffinage et génie chimique", édition technique Paris 1965.
- [4]: **DECLAYE Sébastien, GENDEBIEN Samuel, LEMORT Vincent**. P 31 les échangeurs de chaleur. <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/a/a8/Liege-by-night.jpg>
- [5]: **TAOURIT Farida**, Étude du comportement dynamique et thermique de deux écoulements du fluide dans un échangeur de chaleur (comparaison entre le cas simple et le cas avec ailettes), Master université Abou Bakr Belkaid-TLEMEN- Énergétique (2013).
- [6]: **ELLABED Nadia**, Etude de dimensionnement d'un échangeur de chaleur dans un milieu cryogénique, Magister Ecole Nationale Polytechnique d'Oran, optimisation des systèmes énergétiques (2012).
- [7]: **Mr. YOUNSI Toufik**, Percement des tubes dans les échangeurs de chaleur, Magister université Abdelhamid Ibn Badis -MOSTAGANEM-matériaux et environnement (2012).
- [8]: **Yves Jannot**. Transfert Thermique, (2003).
- [9]: **BOUKECHA Sarah, TEMMAR Mohamed**, Optimisation et redimensionnement d'un échangeur tubulaire E102 A~F dans l'unité de traitement de gaz, Master université M'hamed Bougara Boumerdès (2017).
- [10]: **Gauthier, Villas**, L weil élément des échanges thermiques (1965).
- [11]: **Docteur Fateh Mebark-Oudina**. (2014). Cours échangeurs de chaleur. Boulahdour (Algérie) : éditions Al-Djazair.
- [12]: **William S. Janna**, Engineering Heat Transfer, (1986).
- [13]: **Touatit Achour**, Eude technico-économique des échangeurs de chaleur a triple tube concentrique, Magister université de Batna énergétique (2014).
- [14]: **BENSLIMANE Syphax, AROUF Mahdi**, Simulation numérique de l'étalement d'un film mince sur un substrat plat par la technique centrifugation (spin coating) et sur un substrat courbe (cylindre) sous l'effet de gravite– application aux revêtements, Master université de Bejaia énergétique (2017).



## *Bibliographie*

- [15]: **SASSANE Nadjette**, Modélisation du transfert de chaleur lors de l'écoulement d'un fluide à l'intérieur d'une paroi poreuse, Magister université Skikda énergétique (2008).
- [16]: **BAHLOUL Redhouane**, Etude d'un écoulement turbulent entre deux cylindres coaxiaux en rotation, Master université Abderrahmane mira Bejaïa énergétique (2018).
- [17]: **Hemaizia Abd el Kader, Benazouz Amel**, Optimisation des échanges de chaleur par convection libre au niveau d'un échangeur à ailettes, Master université de Tébessa énergétique (2017).
- [18]: **MOKRANI Sofiane, DAOUDI Halim**, Simulation numérique d'un écoulement de fluide newtonien dans une conduite cylindrique avec propagation d'onde de pression, Master université Abderrahmane mira Bejaïa énergétique (2017).
- [19]: **S.V. Patankar**, Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, Series in computational methods in mechanics and thermal sciences, (1980).