



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Republique Algerienne Democratique Et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة العربي التبسي - تبسة

Université Larbi Tébessi – Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Mécanique



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme de Master Académique**

En : **Génie Mécanique**

Spécialité : Energétiques

Par : Nacer Azzedine

Boudiar Salah

Sujet

Simulation de la convection naturelle dans un milieu anisotrope

Présenté et soutenu publiquement, le 13 / 06 / 2022, devant le jury composé de :

AGGOUN Rabeih

MCB

Président

BELAZIZIA Abdennacer

PROF

Rapporteur

ZAIDI Latifa

MAA

Examineur

Promotion : 2021/2022

Dédicaces

*Grâce à Allah, le tout puissant, nous avons accompli ce travail.
Je dédie ce modeste travail :*

*À mes très chers parents qui ont pour moi le symbole d'amour, source
de courage et de confiance.*

*A la mémoire de mon père qui est décidé « tu resteras toujours au
milieu de mon cœur »*

*A la plus merveilleuse mère, que j'aime du fond du cœur qui m'a tout
donnée depuis mon enfance, que Allah le tout-puissant la protège.*

À mes très chers frères qui sont les plus proches de mon cœur.

À mes très chères sœurs.

Sans oublier ma grande famille.

À mon encadreur : BELAZIZIA ABDENNECER

Nacer Azzedine

Remercîments

A mon père et ma mère qui m'ont soutenu et encouragé durant ces années d'études. Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

A mes frères, mes sœurs, mes amis et ceux qui ont partagé avec moi toutes les émotions lors de la réalisation de ce travail et leurs soutien inconditionnel

Je voudrais remercier notre encadrant pour son effort, sa patience et sa disponibilité, chers membres de jury c'est un honneur de vous voir présent dans ce mémoire.



Sommaire

Dédicaces	I
Remerciements	II
Sommaire	III
Résumé	IV
Liste des figures	V
Liste des tableaux	VI
Nomenclatures	VII
Introduction générale.....	2

Chapitre I : Généralité et bibliographie

I.1 Introduction.....	5
I.2 But de l'étude.....	5
I.3 Différents modes de transfert de chaleur.....	6
I.3.1 Transfert de chaleur par conduction.....	7
I.3.2 Transfert de chaleur par rayonnement.....	8
I.3.3 Transfert de chaleur par convection.....	9
I.4 Types de la convection	10
I.4.1 Convection forcée	11
I.4.2 Convection mixte.....	12
I.4.3 Convection naturelle	13
I.5 Convection naturelle dans les cavités fermées.....	15

I.6	Domaine d'application de la convection naturelle.....	15
I.7	Convection dans les enceintes	16
I.8	Notion sur les milieux poreux.....	16
I.9	Domaines d'applications.....	18
I.10	Paramètres que caractérisent les milieux poreux.....	18
I.10.1	Porosité.....	18
I.10.2	Perméabilité	19
I.11	Modèles d'écoulement en milieu poreux	20
I.11.1	Loi de Darcy.....	20
I.11.2	Formulation de Brinkman.....	21
I.11.3	Formulation de Forchheimer.....	21
I.11.4	Extension de Brinkman-Forchheimer de la loi de Darcy.....	21
I.12	Grandeurs sans dimension	22
I.13	Contenu du mémoire	24
Chapitre II : Formulation mathématique		
II.1	Introduction.....	27
II.2	Géométrie du problème.....	27
II.3	Formulation mathématique du problème.....	28
II.3.1	Equation de continuité.....	28
II.3.2	Equation de quantité de mouvement.....	28
II.3.3	Equation de conservation d'énergie.....	29
II.4	Hypothèses simplificatrices	30

II.5	Approximation de Boussinesq.....	30
II.6	Equations de conservation dans un milieu poreux anisotrope.....	31
II.6.1	Equation de continuité.....	31
II.6.2	Equation de quantité de mouvement.....	31
II.6.3	Equation d'énergie.....	31
II.7	Adimensionnallisation des équations de conservation.....	32
II.7.1	Variables adimensionnelles.....	32
II.7.2	Equations adimensionnelles.....	33
II.7.2.1	Equation de continuité.....	33
II.7.2.2	Equation de quantité de mouvement.....	33
II.7.2.3	Equation d'énergie.....	33
II.8	Conditions initiales et aux limites.....	33
II.9	Transfert de Chaleur	34
II.10	Conclusion	35

Chapitre III : Résolution mathématique

III.1	Introduction.....	37
III.2	Forme générale des équations de conservation.....	37
III.3	Méthode des volumes finis.....	38
III.3.1	Principe.....	39
III.3.2	Schémas numériques.....	39
III.4	Couplage Vitesse-Pression.....	41
III.4.1	Algorithme SIMPLER.....	42
III.5	Résolution du système linéaires des équations discrétisées.....	46
III.5.1	Algorithme de THOMAS (TDMA).....	46
III.5.2	Application de l'algorithme de THOMAS à des problèmes à 2D_ (TDMA).....	47
III.6	Conclusion	49

Chapitre IV : Résultats et discussions

IV .1 Introduction.....	51
IV.2 Effet de Maillage	51
IV.3 Validation.....	52
IV.4 Milieu poreux isotrope.....	53
IV.4.1 Effet de nombre de Rayleigh.....	53
IV.4.2 Effet du nombre de Darcy.....	57
IV.5 Milieu poreux anisotrope.....	59
IV.6 Conclusion.....	61
Conclusion générale	63
Références bibliographiques.....	65

Résumé

La convection naturelle dans une cavité poreuse anisotrope est étudiée numériquement par la méthode des volumes finis. Le phénomène physique dépend des nombres adimensionnels suivant : le nombre de Rayleigh Ra , le nombre de Darcy Da , le nombre de Prandtl Pr et le rapport des conductivités thermique λ_x/λ_y . Les résultats montrent que la vitesse de l'écoulement et le transfert de chaleur augmentent avec l'augmentation du Ra ou la réduction de Da . L'accroissement du rapport λ_x/λ_y améliore le taux du transfert de chaleur et réduit l'intensité de la convection naturelle.

Mots clés : Convection naturelle, milieu poreux anisotrope, volume finis, géométrie cartésienne.

Abstract

Natural convection in a square anisotropic porous cavity is studied numerically with finite volume method. The problem depends on Rayleigh number Ra , Darcy number Da , Prandtl number Pr and conductivity ratio λ_x/λ_y . Results show that both flow velocity and heat transfer increase respectively with increasing Ra or decreasing Da . The increasing of λ_x/λ_y ameliorates the rate of heat transfer and reduces natural convection intensity.

Keywords : Natural convection, anisotrope porous medium, finite volume, Cartesian geometry.

ملخص

نقوم بدراسة عددية بطريقة الحجم المنتهية للحمل الطبيعي داخل وعاء مربع الشكل و بوجود وسط مسامي متباين الخواص. الظاهرة تتعلق بالاعداد اللا بعدية التالية: عدد رابلي Ra, عدد دارسي Da, عدد برانت Pr و نسبة الناقلية الحرارية λ_x/λ_y . تبين النتائج ان كل من سرعة الجريان و انتشار الحرارة تزيد على التوالي بزيادة اونقصان الاعداد Ra و Da. الزيادة في النسبة λ_x/λ_y يحسن من انتقال الحرارة ويقلل من شدة الحمل الحراري الطبيعي.

الكلمات المفتاحية: الحمل الطبيعي, وسط مسامي متباين, طريقة الحجم المنتهية, شكل هندسي ديكارتي.

Listes des figures

Figure (I.1) : Représentation Les trois modes de transfert de chaleur	7
Figure (I.2) : Représentation schématique du phénomène de conduction	8
Figure (I.3) : Représentation du phénomène du rayonnement	9
Figure (I.4) : Schéma de la convection forcée	12
Figure (I.5) : Écoulement de la convection naturelle dans une cavité carré	14
Figure (I.6) : Milieu poreux	17
Figure (I.7) : Porosité d'interstice	19
Figure (I.8) : Porosité de fissure	19
Figure (II.1) : Géométrie du problème de la convection naturelle dans une Géométrie avec gradient horizontal de température	27
Figure (III.1) : Volume de contrôle dans le cas de 2D	39
Figure (III.2) : Algorithme SIMPLER	46
Figure (III.3) : Application ligne par ligne de la méthode TDMA	48
Figure (V.1) : Evolution du transfert de chaleur moyen avec les différents Maillage	52
Figure (IV.2) : Lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh	54
Figure (IV.3) : Lignes isothermes pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh	55
Figure (IV.4) : Profils de vitesse pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh	56
Figure (IV.5) : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh	56
Figure (IV.6) : Lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Darcy	57

Figure (IV.7) : Lignes isothermes pour différentes valeurs du nombre de Darcy	58
Figure (IV.8) : Profils de vitesse pour différentes valeurs du nombre de Darcy	59
Figure (IV.9) : Variation du nombre de Nusselt moyen avec λ_x/λ_y	60
Figure (IV.10) : Profil de vitesse U en fonction du rapport λ_x/λ_y	60
Figure (IV.11) : Profil de vitesse U en fonction du rapport λ_x/λ_y	60

Liste des tableaux

Tableau I.1 : Porosité de quelques matériaux	18
Tableau I.2 : Perméabilité de quelques matériaux poreux	20
Tableau III.1 : Expressions de ϕ et Γ et S_ϕ pour les équations de conservation	38
Tableau III.2: Expressions de la fonction $A(P)$ pour les différents schémas	41
Tableau IV.1 : Effet du maillage sur les valeurs de (Nu) pour $Ra=10^6$ et $Da=0.1$	51
Tableau IV.2 : Variation du nombre de Nusselt avec le nombre de Rayleigh	52
Tableau IV.3 : Variation du nombre de Nusselt avec le nombre de Rayleigh ($\varepsilon = 0.9$)	53
Tableau IV.4 : Variation de nombre de Nusselt en fonction de Rayleigh	56

NOMENCLATURES

A : Rapport d'aspect de la cavité = H/L

C_f : coefficient de Forchheimer

C_p : Chaleur spécifique [$J\ Kg^{-1}\ K^{-1}$]

Da : Nombre de Darcy = K/H^2

Gr : nombre de Grashof

g : Accélération de la pesanteur [$m\ S^{-2}$]

H : Hauteur de la cavité [m]

h : Coefficient d'échange convectif [$Wm^{-1}k^{-1}$]

k : conductivité thermique [$w\ m^{-1}K^{-1}$]

k_{eff} : Conductivité thermique effective = $\varepsilon k_f + (1 - \varepsilon) k_p$ [$wm^{-1}k^{-1}$]

K : perméabilité du milieu poreux [m^2]

L : Largeur de la cavité [m]

Nu : Nombre de Nusselt

Nu_{moy} : Nombre de Nusselt moyen

P : Pression[Pa]

P' : Correction de pression[Pa]

Pr : Nombre de Prandtl

qv : Le débit des sources ou des puits par unité de volume.

Ra : Nombre de Rayleigh

S : Terme source

t : Temps [s]

T : Température dimensionnelle [K]

T_c : Température de la paroi chaude [K]

T_f : Température de la paroi froide [K]

T₀ : Température de référence [K]

u : vitesse dans la direction x [$m.s^{-1}$]

U : Composante adimensionnelle horizontale du vecteur de la Vitesse

U' : Correction de la vitesse U

v : vitesse dans la direction y [$m.s^{-1}$]

V : composante adimensionnelle verticale du vecteur de la vitesse

V' : Correction de la vitesse V

\vec{V} : Vecteur vitesse

X : Coordonnée horizontale adimensionnelle

x, y : Les coordonnées cartésiennes

Y : coordonnée verticale adimensionnelle

Symboles Grecs :

α : Diffusivité thermique = $K_{eff} / (\rho C_p) f$

β_T : Coefficient d'expansion thermique [K^{-1}]

β_S : coefficient d'expansion solutale [K^{-1}]

ϕ : Flux de chaleur [W]

ρ : Masse volumique [$Kg m^{-3}$]

μ : Viscosité dynamique [$Kg m^{-1}S^{-1}$]

Γ : coefficient de diffusion.

$\tilde{\mu}$: Viscosité équivalente dans le modèle de Brinkman [$Kg m^{-1}S^{-1}$]

ϑ : viscosité cinématique [m^2S^{-1}]

ε : Porosité de la couche poreuse

ΔT : Différence de température entre les parois verticales= T_1-T_2 [K]

ΔC : Différence de concentration entre les parois verticales= C_1-C_2 [K]

θ : Température adimensionnelle = $T-(T_1-T_2) / 2 / T$

ϕ : Concentration adimensionnelle= $C-(C_1-C_2) / 2 / C$

Γ : Coefficient de diffusion

$\Delta\tau$: Pas de temps[t]

τ : Temps adimensionnelle= $tH^2\alpha$

λ_x/λ_y : Rapport de conductivité thermique

Indices :

eff : Effective

f : Fluide

c : Chaud

f : Froid

0 : Etat de référence

E,W,N,S : Evalue sur le point correspondant entourant le point P

e,w,n,s : Evalue sur le point correspondant du volume de contrôle entourant le point P

Introduction générale

Introduction générale

Le transfert de chaleur est l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie [21].

C'est un phénomène que l'on trouve dans de nombreux secteurs de l'industrie et dans notre vie quotidienne. Les ingénieurs essaient de maximiser ou de minimiser ce phénomène selon les besoins de l'industrie et dans le souci d'économiser cette énergie qui devient chère. C'est un processus complexe, qui est réalisé sur la base des différents modes fondamentaux à savoir la conduction, la convection et le rayonnement.

Le mécanisme le plus important de transfert d'énergie est représenté par le mode de convection, qui s'effectue par l'action combinée de la conduction, de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu.

Si le milieu comporte des espaces vides qui peuvent être interconnectés ou non, on parlera d'un milieu poreux anisotrope. Les écoulements de fluide à travers un milieu poreux anisotrope sont fréquemment rencontrés aussi bien dans la nature que dans l'industrie. Les domaines d'applications sont nombreux et variés, on peut citer les problèmes de purification de l'eau, d'isolation thermique, d'extraction de pétrole et de gaz..., etc...

Le transfert de chaleur dans les milieux poreux anisotrope s'effectue essentiellement selon deux modes :

- 1) **la conduction** à travers l'ensemble du milieu poreux sous l'effet des gradients de température.
- 2) **la convection** des fluides qui permet le transfert de l'énergie thermique qu'ils contiennent. La transmission de chaleur par la convection est désignée, selon le régime d'écoulement du fluide, par convection libre, convection forcée ou par convection mixte.

L'étude de la convection naturelle en milieu poreux (anisotrope) est particulièrement développée ces dernières années vu son intérêt pour la résolution de certains problèmes technologiques importants.

Pour résoudre les problèmes de transfert thermique, on doit recourir à des méthodes numériques dans le cas où on ne peut pas les résoudre analytiquement. Parmi ces méthodes les plus utilisées, on peut citer les différences finies, les éléments finis et les volumes finis (la méthode adoptée dans cette étude).

La présente étude porte sur une simulation numérique par la méthode des volumes finis de la convection naturelle dans une cavité carrée poreuse (anisotrope). L'étude a pour objectif de déterminer l'influence des principaux paramètres du problème sur le transfert de chaleur.

➤ **Le premier chapitre** est consacré à la présentation du milieu poreux et ses caractéristiques.

➤ **Le second chapitre** détaille la géométrie, les hypothèses simplificatrices, le modèle mathématique dimensionnel, le modèle mathématique adimensionnel et les conditions initiales et aux limites.

➤ **Le troisième chapitre** présente la méthode numérique des volumes finis et les algorithmes SIMPLER et TDMA pour la résolution du système d'équation gouvernant le phénomène physique.

➤ **Le quatrième chapitre** présente les résultats numériques obtenus avec discussion.

En fin nous terminons ce travail par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus.

Chapitre I :
Généralités et étude bibliographique

I.1 Introduction

La chaleur est une forme d'énergie qui s'écoule sous l'effet d'une différence de température des hautes vers les basses températures. La chaleur pénètre, comme la gravité, toutes les substances de l'univers et concourt à tous ses phénomènes. L'unité de la chaleur dans le système international est de joule (J). Le transfert de chaleur représente l'un des modes les plus communs d'échange d'énergie c'est un phénomène que l'on trouve dans de nombreux secteurs de l'industrie et dans notre vie quotidienne. Les ingénieurs et les techniciens se trouvent confrontés à ce genre de problème ; et essayent de maximiser ou de minimiser ce phénomène selon les besoins de l'industrie et dans le souci d'économiser cette énergie qui revient chère. De ce fait, les transferts thermiques ont, aussi bien dans le domaine des sciences pures que dans celui des applications technologiques, un rôle souvent essentiel. Ce rôle devient même déterminant lorsqu'il est à l'origine des techniques utilisées, exemple : (échangeurs, moteurs thermiques, calorifugeage, isolation thermique ...etc.). La connaissance des lois physiques qui régissent ces modes de transferts thermiques est une chose essentielle et très importante, car elles nous permettent de maîtriser la façon et la qualité de cet écoulement de chaleur suivant notre désir [6].

Un transfert de chaleur au sein d'un système ne se produit que s'il existe des gradients de température entre les différentes parties du système, ce qui implique que celui-ci n'est alors pas à l'équilibre thermodynamique (la température n'est pas uniforme dans tout le système). Au cours de la transformation du système vers un état d'équilibre final, la température va évoluer à la fois en temps et en espace. Le but de l'analyse des transferts de chaleur est de déterminer quantitativement comment varie la température en chaque point du système au cours du temps.

I.2 But de l'étude

Cette étude a pour but d'étudier numériquement la convection naturelle dans un milieu poreux anisotrope de géométrie carrée. La méthode des volumes finies est utilisée pour discrétiser le modèle mathématique de notre problème physique. Plus particulièrement nous montrerons l'influence des paramètres de contrôle sur la structure d'écoulement et sur le transfert de chaleur.

I.3 Différents modes de transfert de chaleur

La thermodynamique permet de prévoir la quantité totale d'énergie qu'un système doit échanger avec l'extérieur pour passer d'un état d'équilibre à un autre. La thermique (ou thermocinétique) se propose de décrire quantitativement (dans l'espace et dans le temps) l'évolution des grandeurs caractéristiques du système, en particulier la température, entre l'état d'équilibre initial et l'état d'équilibre final.

Le deuxième principe de la thermodynamique admet que la chaleur (ou énergie thermique) ne peut passer que d'un corps chaud vers un corps froid, c'est-à-dire d'un corps à température donnée vers un autre à température plus basse

Le transfert de chaleur se produit suivant deux modes semblables :

- soit par contact : c'est la conduction thermique.
- soit à distance : c'est le rayonnement thermique.

On considère un troisième mode de transfert d'énergie calorifique qui est la Convection : (Échange de chaleur entre un fluide et un solide). Dans ce cas le phénomène thermique est compliqué par des déplacements de matière et au transfert de chaleur se superpose le transfert de masse [8].

Donc Deux corps à températures différentes échangent de l'énergie sous forme de chaleur jusqu'à disparition complète de leur différence de température. Cet échange peut se faire suivant trois modes de transmission fondamentaux :

- La conduction.
- Le rayonnement.
- La convection.

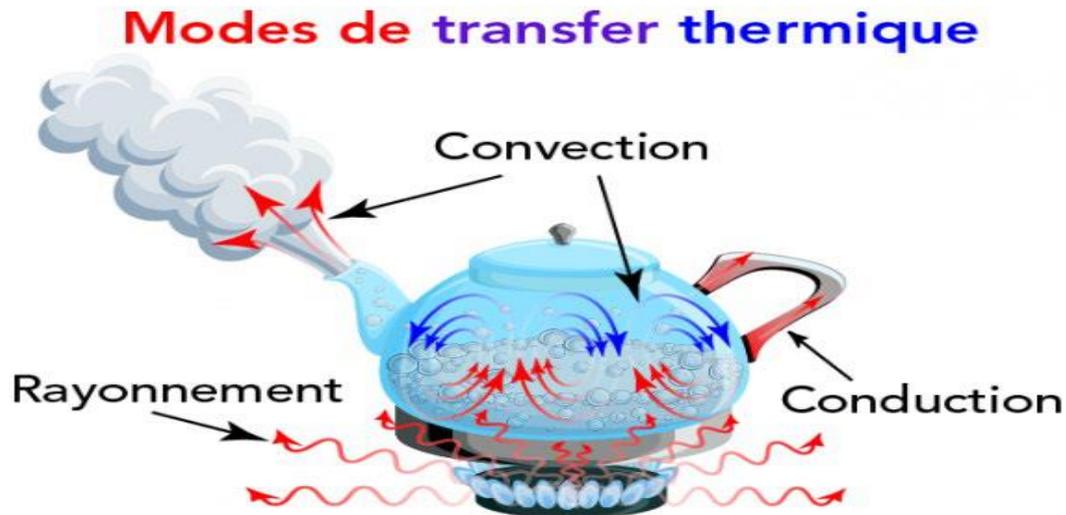


Figure (I.1) : Représentation Les trois modes de transfert de chaleur

I.3.1 Transfert de chaleur par conduction

La conduction est un mode de transfert est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur (ou l'échange d'énergie interne) provoquée par la différence de température entre deux régions d'un milieu solide, liquide ou gazeux ou encore entre deux milieux en contact physique, et se réalisant sans déplacement global de matière. L'énergie diffuse dans un milieu, la température augmente de proche en proche (par exemple, si une cuillère est dans un plat chaud et que sa queue dépasse dehors, la chaleur se transmet à la queue de la cuillère par conduction). Dans un gaz ou un liquide, l'énergie se propage par contact direct entre molécules sans déplacement notable de molécules. Dans un solide, la vibration des atomes autour de leur position se transmet de proche en proche. Dans le cas des cristaux, les vibrations du réseau présentent des hétérogénéités qui forment des « particules », les phonons. Ces phonons interagissent avec les électrons libres, ce qui explique que les conductivités thermique et électrique sont liées (par exemple, les métaux sont des bons conducteurs d'électricité et de chaleur) [9].

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité du flux est Proportionnelle au gradient de température.

La loi de Fourier :

$$\varphi = -\lambda \text{grad}(T) \quad (\text{I.1})$$

Avec :

Φ : Densité du flux thermique (w.m-2)

λ : conductivité thermique du milieu (w.m-1 .c-1)

T : Température (0 C).

Ou sous forme algébrique :

$$\phi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \quad (I.2)$$

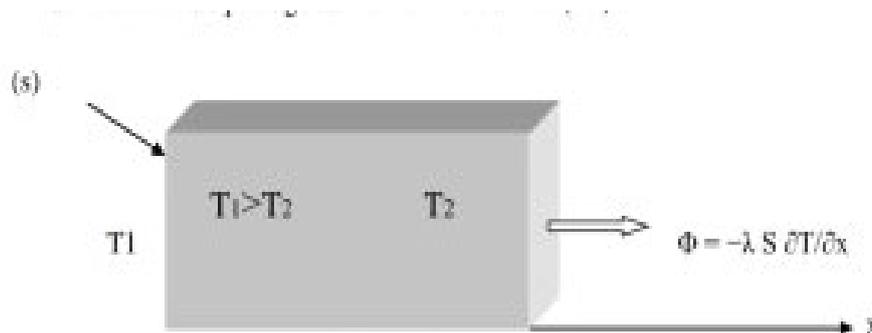


Figure (I.2) : Représentation schématique du phénomène de conduction

I.3.2 Transfert de chaleur par rayonnement

Tout corps matériel émet et absorbe de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique. Le transfert de chaleur par rayonnement entre deux corps séparés par du vide ou un milieu semi transparent se produit par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques, donc sans support matériel. Le phénomène d'émission d'un corps correspond à la conversion d'énergie matérielle (agitation des électrons constituant la matière dont l'intensité dépend de la température) en énergie radiative. Le phénomène d'absorption est la conversion inverse [10].

Le rayonnement thermique est le mode de transmission par lequel la chaleur passe d'un corps à haute température à un autre plus froid sans nécessité de support matériel. C'est donc le seul mode de transfert de chaleur qui peut se propager dans le vide.

Le rayonnement thermique ne diffère des autres ondes électromagnétiques, comme les ondes hertziennes par exemple, que par son origine : la température. En effet tout corps rayonne tant que sa température est différente de 0 K.

Le rayonnement thermique peut être considéré comme un cas particulier du rayonnement électromagnétique. L'exemple le plus simple est celui du rayonnement solaire.

Le flux de chaleur est transporté sans transport de matière, sous forme d'ondes électromagnétiques, (ex : rayonnement solaire)

Le rayonnement thermique est un phénomène de surface, La relation de base du rayonnement est celle de STEFAN- BOLTZMAN selon laquelle la puissance M_o du rayonnement thermique émis par unité de surface d'un corps noir est directement proportionnelle à T^4 .

$$M_o = \sigma T^4 [\text{W. m}^{-2}] \quad (\text{I.3})$$

σ = constante de STEFAN-BOLTZMAN = $5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$

Cette formule se déduit par intégration sur l'ensemble des longueurs d'onde de la relation fondamentale obtenue par PLANK dans sa théorie de quanta [11].

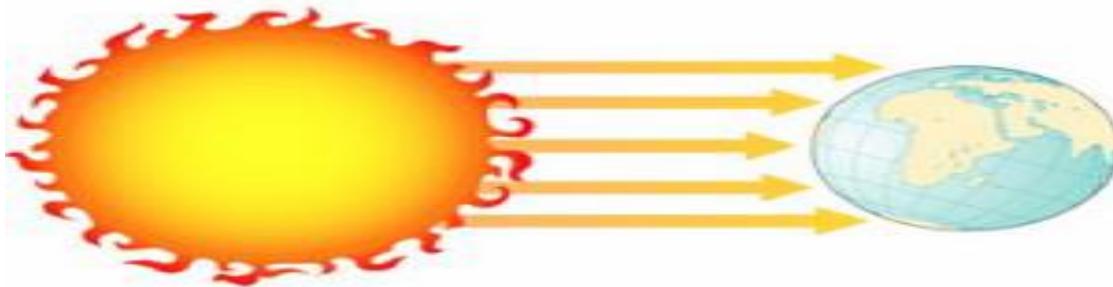


Figure (I.3) : Représentation du phénomène du rayonnement

I.3.3 Transfert de chaleur par convection

La convection est une mode de transport d'énergie par l'action combinée de la conduction de l'accumulation de l'énergie et du mouvement du milieu. La convection est le mécanisme le plus important de transfert d'énergie entre une surface solide et un liquide ou un gaz. Le transfert d'énergie par convection d'une surface dont la température est supérieure à celle du fluide qui l'entoure s'effectue en plusieurs étapes.

Le flux de chaleur est transporté par la matière en déplacement. Ses mouvements sont dits de convection naturelle sous l'influence de variations de densité et de la pesanteur, ou de convection forcée si le fluide est mis en circulation par une pompe ou une différence de pression [12].

D'abord la chaleur s'écoule par conduction de la surface aux particules fluide adjacentes, L'énergie ainsi transmise sert à augmenter la température et l'énergie interne de ces particules.

Ensuite ces dernières vont se mélanger avec d'autres particules situées dans une région à basse température et transférer une partie de leur énergie, celle-ci est à présent emmagasinée dans les particules fluides et elle est transportée sous l'effet de leur mouvement. La quantité de chaleur échangée par unité de temps dépend de plusieurs paramètres :

- la différence de température entre la paroi et le fluide.
- la vitesse du fluide.
- la capacité thermique massique du fluide.
- la surface d'échange.
- l'état de surface du solide.
- sa dimension...etc.

Selon le mécanisme qui génère le mouvement du fluide, on distingue :

- la convection naturelle
- la convection forcée

Une modélisation simplificatrice de ce phénomène peut être trouvée dans la loi de Newton citée ci-dessous :

$$\varphi = hS(T_p - T_f) \quad (I.4)$$

Où

T_p : température de la paroi(K)

T_f : Température du fluide(K)

Φ : Densité de flux thermique ($W \cdot m^{-2}$)

h : coefficient d'échange superficiele ($Wm^{-1}k^{-1}$)

S : Aire de la surface de contact solide/fluide (m^2).

I.4 Types de la convection

La transmission de chaleur par convection est désignée, selon le mode d'écoulement du fluide, par convection libre et convection forcée. Lorsqu' il se produit au sein du fluide des courants dus simplement Aux différences de densité résultant des gradients de température, on dit que la convection est naturelle ou libre. Par contre si le mouvement du fluide est provoqué par une action externe, telle une pompe ou un ventilateur, le processus est appelé convection forcée. Si les deux causes existent simultanément, sans que l'une soit négligeable par rapport à l'autre, la convection est dite mixte.

La différence entre ces deux modes de convection est essentielle dans la mesure où, dans le cas de la convection forcée, la température ou la concentration peuvent être des scalaires passifs, advectés par un écoulement imposé par ailleurs. Dans la convection naturelle au contraire, les gradients de masse volumique sont le terme moteur de l'écoulement du fluide, Qui transfère par ailleurs chaleur ou soluté avec son environnement. Il y a donc fondamentalement couplage entre le champ de vitesse et les différents champs scalaires.

I.4.1 Convection forcée

Comme vu, le refroidissement par air peut être passif ou actif. Étant en convection naturelle c'est la méthode passive et la convection forcée est la méthode active. Cette dernière méthode est la solution de refroidissement la plus répandue. Nous parlons de convection forcée quand l'écoulement est provoqué par des moyens externes, tels qu'un ventilateur, une pompe, ou les vents atmosphériques. Dans les conditions naturelles, la convection est due au vent qui est lui-même la résultante du gradient local de la pression atmosphérique.

Le fluide échange de la chaleur avec des parois, mais son mouvement est pratiquement peu influencé par les différences de températures [13].

Le transfert thermique à partir d'une surface à la température T_s d'un fluide à la température T_p par la convection est exprimé par la loi de Newton de refroidissement :

$$q = hA(T_s - T_\infty) \quad (I.5)$$

Avec :

q : Flux de transfert de chaleur convectif (W)

h : Coefficient convectif de transfert de la chaleur ($W/m^2.k$)

A : Surface d'aire disponible pour la convection (m^2)

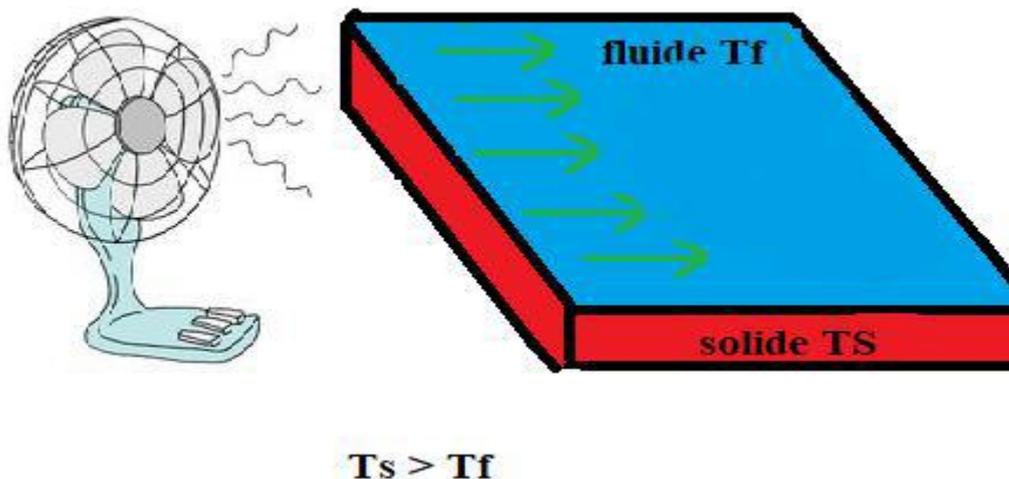


Figure (I.4) : Schéma de la convection forcée

La relation générale pour la convection forcée est $Nu = f(Re, Pr)$. Le nombre du Nusselt obéit à la relation suivante :

$$Nu = cRe^n Pr^m \quad (I.6)$$

Avec :

c, n et m : sont des constantes dépendant des caractéristiques géométriques.

Pr : nombre de Prandtl

Re : nombre de Reynolds

I.4.2 Convection mixte

La convection mixte correspond au couplage des deux phénomènes précédents quand les vitesses d'écoulement, fictives dues aux deux types de convection sont considérées séparément, du même ordre de grandeur convection naturelle, les mouvements du fluide sont provoqués par des gradients de densité due au non-uniformité du champ de température. Les couches chaudes, donc de poids spécifique plus faible, sont soumises à des forces dirigées vers le haut, suivant un mécanisme analogue à celui de la poussée d'Archimède. Dans la région à température élevée, le fluide prend donc un mouvement ascendant. Le phénomène inverse de courants descendants se produits pour les parties du fluide dont la température est inférieure à celle du fluide chaud.

Les courants de convection naturelle sont alors dus à des différences de poids spécifique et par conséquent le phénomène se produit en raison de l'existence du champ de pesanteur terrestre.

L'intervention du poids a pour effet de donner à la verticale un rôle privilégié. La définition de la géométrie d'un système convectif doit donc faire intervenir la forme et les dimensions ainsi que la disposition par rapport à la verticale.

Les effets de de convection naturelle son familiers. On peut les observer quotidiennement dans l'eau que l'on chauffe dans un récipient, dans les panaches de certaines cheminées d'usines, la circulation atmosphérique, les vents, les tempêtes sont aussi des effets de la convection naturelle [14].

I.4.3 Convection naturelle

Lorsque deux corps (surface solide/fluide) de températures différentes, sont mis en contact prolongé dans un champ de pesanteur le gradient de température imposé entraîne une différence de densité au sein du fluide ce qui donne naissance à une force de flottabilité (poussée d'Archimède) qui à son tour ne fait que déclencher des mouvements de particules. Ceux-ci, dits mouvements de convection, s'accompagnent par un transport d'énergie (chaleur et quantité de mouvement) au sein du fluide dont les particules (molécules) agitées se déplacent, aléatoirement, entre des points du domaine considéré. Si aucun dispositif externe tel qu'une pompe ou un ventilateur n'intervient dans son déclenchement, ce phénomène

physique se fait “naturellement” d’où vient le nom « convection naturelle » : seul l’effet de l’interaction entre le gradient de la densité et la gravité en est la cause. Le transfert de chaleur est plus actif lorsque les paramètres suivants à savoir : vitesse d’écoulement du fluide, sa masse volumique, sa conductivité thermique (ou sa diffusivité thermique), sa chaleur spécifique sont plus grandes. Cependant, il est d’autant plus actif que la viscosité cinématique est plus faible. Cela peut également dépendre des dimensions de la surface d’échange, de sa nature, de sa forme géométrique et de son orientation. Or la nature de l’écoulement du fluide (laminaire ou turbulent) a beaucoup d’influence sur le transfert de chaleur [15].

La relation générale pour la convection naturelle est $Nu = f(Gr, Pr)$. Le transfert de Chaleur qui s’effectue suivant ce type de convection, obéit donc à la relation suivante (Écoulement laminaire ou turbulent) :

$$Nu = c(GrPr)^n = n(Ra) \quad (I.7)$$

Avec :

c et n : sont des constantes dépendant des caractéristiques géométriques

Gr : nombre de Grashof

Pr : nombre de Prandtl

Ra : nombre de Rayleigh

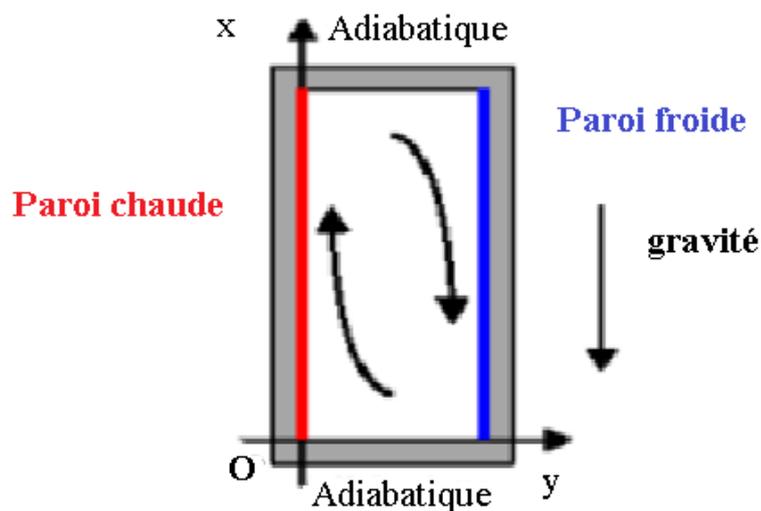


Figure (I.5) : Écoulement de la convection naturelle dans une cavité carrée.

En ce qui concerne la mécanique des écoulements de la convection naturelle, on remarque que, puisque les gradients de masse volumique sont à l’origine du mouvement sont eux-

mêmes dus à des gradients de température, il y a là un couplage structurel entre bilan de quantité de mouvement et bilan d'énergie, c'est-à-dire entre champ de vitesse et champ de température. En outre, l'écoulement de la convection naturelle peut passer d'un régime laminaire à la turbulence après une phase de transition (laminaire/turbulent). En général, on peut distinguer :

- Les écoulements externes (sont le plus souvent de régime turbulent).
- Les écoulements internes : ceux sont les écoulements (généralement laminaire ou transitoire) qui se produisent dans des régions fermées tel est le cas des enceintes dont on trouve plusieurs configurations dans la littérature, le domaine physique d'écoulement peut être partiellement fermé (avec des ouvertures à travers lesquelles l'échange du fluide avec le milieu ambiant pourrait avoir lieu). Ou complètement fermé par des frontières solides. Par ailleurs, ces frontières solides peuvent être : isothermes ou adiabatiques et peuvent également subir un flux de chaleur.

I.5 Convection naturelle dans les cavités fermées

La convection naturelle est le mouvement de fluide dû à une force motrice volumique (Archimède) résultant, par exemple, de la présence simultanée, dans le fluide, d'un gradient de température et d'une force de gravité. Ce couplage fort entre la thermique et la dynamique fait de ce type d'écoulement un sujet d'étude particulièrement intéressant.

La convection naturelle dans les enceintes fermées de différentes formes occupe une grande partie de la littérature des transferts de chaleur. Le carré, le rectangle, le triangle, la géométrie cylindrique, elliptique et sphérique ont été étudiées dans de nombreuses recherches.

La convection naturelle en espace confiné avec comme principale illustration, une cavité parallélépipédique remplie d'air possédant deux parois opposées soumises à un écart de température constant (une paroi chauffée et la paroi opposée refroidie) est le siège d'écoulement qui a fait l'objet de nombreuses études tant expérimentales que numériques. On peut distinguer deux principales configurations :

- Les parois différentiellement chauffées (parois actives) sont horizontales et donc le gradient thermique est parallèle au champ de gravité ; si la paroi chauffée est en dessous, on parle alors de convection de Rayleigh-Bénard.
- Les parois actives sont verticales et donc le gradient thermique est perpendiculaire au champ de gravité, il s'agit ici de la convection naturelle en cavité différentiellement chauffée.

I.6 Domaine d'application de la convection naturelle

Les applications de transfert thermique sont variées, dans lesquelles la convection naturelle est le phénomène le plus dominant, Le phénomène de la convection naturelle faire l'objet de maintes différentes applications à savoir : les problèmes océanographiques et atmosphériques tels que les effets de serre, les changements extrêmes de climat, ainsi que les problèmes technologiques, à savoir les équipements électriques et les réacteurs nucléaires, les capteurs solaires, le stockage des fluides, l'écoulement d'air dans les pièces d'habitation, les appareils ménagers, les réfrigérateurs et les échangeurs de chaleur sont tous des problèmes, qui ont donné un intérêt particulier à cette science[16].

I.7 Convection dans les enceintes

L'étude de la convection naturelle dans les enceintes a fait l'objet d'un très grand nombre de travaux tant théoriques qu'expérimentaux. L'intérêt de telles études réside dans son implication dans de nombreuses applications industrielles. L'enceinte rectangulaire continue à être la géométrie, qui présente le plus d'intérêt.

Dans ce type d'enceintes, généralement deux parois sont maintenues à des températures différentes, tandis que les autres sont isolées. On distingue principalement deux configurations, la première est celle d'une enceinte contenant un fluide et soumise à un gradient vertical de température (convection de Rayleigh Bénard), la seconde étant celle d'une cavité avec un gradient de température horizontal [17].

I.8 Notion sur les milieux poreux

On appelle un milieu poreux toutes matrices solides comportant des vides ou cavités au travers desquelles un fluide peut s'écouler. Ces espaces vides qui peuvent être connectés sont appelés pores.

Définition :

On désigne communément par milieu poreux un solide de forme compliquée délimitant et englobant des espaces vides interconnectés remplis avec un ou plusieurs fluides. [3]

On distingue deux catégories de milieux poreux :

-Les milieux hétérogènes poreux alvéolaires ou cellulaires considérés comme

Des espaces solides pleins de trous.

-Les milieux hétérogènes poreux granulaires ou pulvérulents considérés comme des espaces vides remplis de grains solides.

D'un point de vue général, un matériau poreux, à l'état naturel, est un milieu hétérogène triphasique constitué d'une phase solide, d'une phase liquide et d'une phase gazeuse.

Un milieu poreux est un milieu continu, cohésif ou non, qui présente intérieurement une fraction de volume accessible à un fluide. Cette, fraction de volume non solide, composée de cavernes, de crevasses, de pores etc. constitue ce que l'on appelle la porosité du milieu poreux.

La porosité est évidemment un élément descriptif essentiel du milieu, toutefois, deux milieux poreux présentant la même porosité peuvent avoir des propriétés très différentes. On peut trouver dans un milieu poreux des pores ne débouchant pas (pores aveugles) ou occlus ; un milieu poreux contenant à la fois des pores aveugles et des pores ouverts plus ou moins interconnectés, pourra grâce à ces pores ouverts laisser s'écouler le fluide.

Dans la réalité complexe que constitue un milieu poreux, des paramètres comme le diamètre de capillaire ou la porosité, ne constituent que des valeurs globales moyennes, incapables de traduire exactement la topologie complexe de l'écoulement réel à travers le milieu



Figure (1.6) : Milieu poreux

I.9 Domaines d'application

Les milieux poreux jouent un rôle important dans de nombreux secteurs industriels et phénomènes naturels. Comme exemples :

- Le génie pétrolier
- Le génie chimique
- L'hydrogéologie
- La géothermie
- Le génie thermique
- Médecine
- Le génie civil.

I.10 Paramètres que caractérisent les milieux poreux

I.10.1 Porosité

La porosité d'un milieu poreux notée ε , est la fraction du volume moyen du milieu poreux occupé par les espaces vides. L'espace vide est égale au rapport du volume total du milieu poreux V duquel on soustrait le volume de la matrice solide V_s par le volume total du milieu poreux V_T . [1]

$$\varepsilon = \frac{(V_T - V_S)}{V_T} \quad (I.8)$$

On a des mesures expérimentales faites par Kaviany sur tableau (I.1) ci-dessous

Tableau I.1: Porosité de quelques matériaux

Matériaux	Porosité
Matériaumousseux	0.98
Fibre de verre	0.88-0.93
Fil à tisser	0.68-0.76
Grains de silice	0.65
Cuir	0.56-0.59
Catalyseur	0.45
Sphère bien empilée	0.36-0.43
Terre	0.43-0.54
Sable	0.37-0.50
Briques	0.12-0.34

Les formes de porosité : on a peut-être de deux formes de porosité :

- La porosité d'interstice (figure1.7).
- La porosité de fissure (figure1.8).

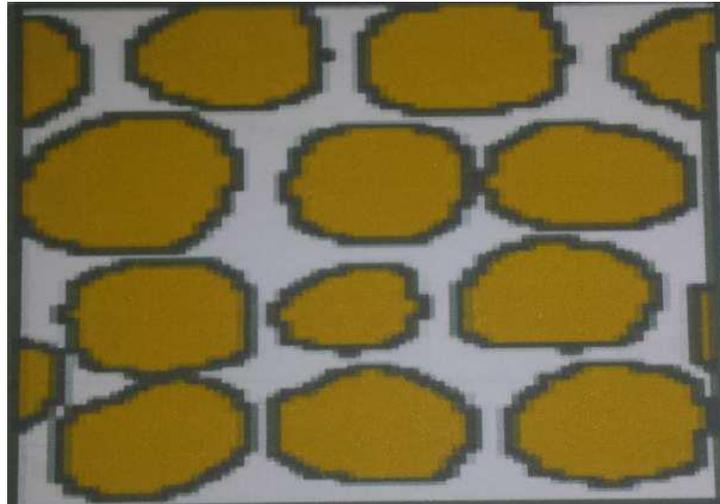


Figure (1.7) : Porosité d'interstice



Figure (1.8) : Porosité de fissure

I.10.2 Perméabilité

La perméabilité traduit la facilité avec laquelle le fluide s'écoule dans le milieu poreux sous l'effet d'un gradient de pression. La perméabilité notée K dépend uniquement de la porosité et de la géométrie de la matrice solide. La relation de Kozeny-Carmen (1937), donne une estimation de la perméabilité K pour un milieu poreux non consolidé constitué d'éléments identiques de géométrie simple [2].

$$K = \frac{d^2 \varepsilon^2}{36 C_0 (1 - \varepsilon)^2} \quad (I.9)$$

Où d désigne une dimension caractéristique des éléments constituant la matrice poreuse et C_0 une constante dépendant de la forme des grains ($3.6 < C_0 < 5$). Ergun [4].

Le tableau ci-dessous représente la perméabilité de quelques matériaux poreux définis d'après Sheidegger [5].

Tableau I.2 : Perméabilité de quelques matériaux poreux

Matrice	Perméabilité
Briques	4.8.10 ⁻¹⁵ -2.2.10 ⁻¹³
Cuir	9.5.10 ⁻¹⁴ -1.2.10 ⁻¹³
Terre	2.9.10 ⁻¹³ -1.4.10 ⁻¹¹
Sable	2.0.10 ⁻¹¹ -1.8.10 ⁻¹⁰
Fibres de verre	2.4.10 ⁻¹¹ -5.1.10 ⁻¹¹
Plaque de liège	3.3.10 ⁻¹⁰ -1.5.10 ⁻⁹

I.11 Modèles d'écoulement en milieu poreux

I.11.1 Loi de Darcy

La dynamique des fluides homogènes dans, les milieux poreux, est décrite par la loi de Darcy, établie en 1856 sur des fondements expérimentaux. Cette loi, établie à partir d'écoulements unidirectionnels sur des colonnes de sables, a mis en évidence la proportionnalité du gradient de pression appliqué et le débit d'eau traversant la colonne de sable. Depuis, les sciences hydrogéologiques sont basées sur la loi de Darcy même pour les écoulements multidirectionnels. Elle s'écrit :

$$\vec{V}_p = - \frac{\mu}{K} \vec{V} \quad (I.10)$$

Où V est la vitesse de filtration, μ est la viscosité dynamique du fluide, K est la perméabilité du milieu poreux et P le gradient de pression appliqué. μ est insuffisances réside dans le fait qu'elle ne peut pas traduire l'influence de la nature du fluide sur l'écoulement notamment près des parois.

En effet, avec ce modèle, la condition de non-glissement aux parois est retenue quel que soit le fluide considéré.

Cette équation ne tient pas compte non plus d'éventuels effets inertiels.

I.11.2 Formulation de Brinkman

Dans le cadre du calcul de la force visqueuse exercée par un fluide sur des particules sphériques composant un milieu poreux, Brinkman (1947) a étendu la loi de Darcy en introduisant un terme équivalent au terme de diffusion visqueuse dans la loi de Stokes :

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + \mu_{\text{eff}}\vec{\nabla}^2\vec{V} \quad (\text{I.11})$$

Cette loi empirique est connue sous le nom de la formulation de Darcy-Brinkman. Le premier terme de droite de l'équation est le terme de Darcy et le deuxième et appelé le terme de Brinkman. Brinkman justifie cette loi empirique par le fait que, pour les faibles valeurs de la perméabilité K , l'équation dégénère en loi de Darcy, et lorsque la perméabilité tend vers l'infini, on retrouve l'équation de Stokes. La difficulté dans l'utilisation de ce modèle réside dans l'évaluation de la viscosité équivalente μ_{eff} .

I.11.3 Formulation de Forchheimer

Dans le cas d'un écoulement de faible intensité, l'équation de Darcy suffit pour décrire l'écoulement. En revanche, avec l'augmentation de la vitesse, l'effet inertiel, non linéaire devient important et l'équation de Darcy devient insuffisante pour décrire l'écoulement. Ward propose dans ce cas de remplacer l'équation de Darcy par l'équation :

$$\vec{\nabla}p = -\frac{\mu}{K}\vec{V} + bK^{-1/2}\rho|\vec{V}|\vec{V} \quad (\text{I.12})$$

Le premier terme du second membre est le terme de Darcy et le second terme est connu sous le nom de terme de Forchheimer, b étant une constante adimensionnelle.

I.11.4 Extension de Brinkman-Forchheimer de la loi de Darcy

Brinkman a ajouté un terme à l'équation de Darcy pour prendre en compte les effets des contraintes visqueuse, Forchheimer, de sa part, a ajouté un terme pour tenir compte des effets d'inertie pour des écoulements à grande vitesse (grand nombre de Reynolds). Pour tenir compte des effets des parois et d'inertie simultanés, on a ajouté les deux termes à la loi de Darcy pour élargir le domaine de validité de cette loi, et par analogie avec l'équation de

U : vitesse caractéristique du fluide [m/s]

L : dimension caractéristique [m]

ϑ : viscosité cinématique du fluide [m²/s]

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{Avec} \quad \rho : \text{masse volumique du fluide [kg/m}^3\text{]}$$

μ : viscosité dynamique du fluide [Kg/ (m.s)]

Nombre de Prandtl Pr :

Qui est le rapport de la viscosité cinématique ν et diffusivité thermique α , il caractérise l'importance relative des effets thermiques et visqueux, Ce nombre porte le nom de Ludwig Prandtl, physicien allemand :

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k} \quad (I.15)$$

Le nombre de Prandtl compare la rapidité des phénomènes thermiques et des phénomènes hydrodynamiques dans un fluide. Un nombre de Prandtl élevé indique que le profil de température dans le fluide sera fortement influencé par le profil de vitesse. Un nombre de Prandtl faible indique que la conduction thermique est tellement rapide que le profil de vitesse a peu d'effet sur le profil de température.

Nombre de Rayleigh Ra :

Est un nombre sans dimension utilisé en mécanique des fluides et caractérisant le transfert de chaleur au sein d'un fluide : inférieur à une valeur critique de 2000, le transfert s'opère essentiellement par conduction, tandis qu'au-delà de cette valeur c'est la convection naturelle qui devient importante. On peut la définir comme le produit du nombre de Grashof, reliant les effets de la force gravifique à la viscosité du fluide, et du nombre de Prandtl. Ce nombre porte le nom de lord Rayleigh, physicien anglais. On le définit de la manière suivante.

$$Ra = Gr Pr = \frac{g\beta}{\nu\alpha} (T_s - T_\infty) L_c^3 \quad (I.16)$$

Nombre de Nusselt Nu :

Est un nombre adimensionnel utilisé dans les opérations de transfert thermique. Il représente le rapport entre le transfert thermique convectif et le transfert thermique conductif à travers une interface (souvent fluide/solide). Si la conduction est le principal mode de transfert, alors le nombre de Nusselt sera de l'ordre de l'unité. En cas de présence de convection (due par exemple au déplacement du fluide) aura pour conséquence de faire tendre le nombre de Nusselt vers l'infinie.

On le définit de la manière suivante :

$$\text{Nu} = \frac{hD}{K} \quad (\text{I.17})$$

h : coefficient de transfert thermique

D : diamètre hydraulique (m).

K : conductivité thermique du fluide.

Nombre de Darcy :

C'est un nombre adimensionnel. Il représente le rapport entre la perméabilité du milieu et l'aire de section transversale (généralement le diamètre de pore au carré) :

$$\text{Da} = \frac{K}{L^2} \quad (\text{I.18})$$

I.13 Contenu du mémoire

Le contenu de ce mémoire est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre nous définissons le phénomène de transferts de chaleur, les caractéristiques des milieux poreux, et nous exposons les travaux expérimentaux, théoriques et numériques antérieurs.

Le deuxième chapitre nous définit la géométrie du problème étudié, la mise sous forme adimensionnelle des équations gouvernantes et des conditions aux limites et la mise en évidence des grandeurs caractéristiques qui servent de paramètres de contrôle.

Le troisième chapitre est consacré à la méthode des volumes finis utilisée pour la discrétisation des équations du problème et l'algorithme SIMPLER employé pour la résolution du système

d'équations résultant de cette discrétisation. Dans le quatrième chapitre nous présenterons les résultats obtenus et leurs discussions. De l'influence de différents paramètres de contrôles à savoir, le nombre de Darcy, nombre de Rayleigh, nombre de Nusselt et le nombre de Prandtl de la cavité sur le transfert de chaleur, la structure de l'écoulement, température et concentration.

Enfin, une conclusion générale retraçant les principaux résultats trouve le long de cette étude ainsi que les perspectives futures.

Chapitre II :
Formulation mathématique

II.1 Introduction

Chaque phénomène physique est souvent formulé par des équations mathématiques (équations différentielles) qui représentent une modélisation de ce phénomène.

Dans ce chapitre, nous proposons la mise en équation du problème physique considéré, en nous basant sur les équations de :

- 1- Conservation de masse.
- 2- conservation quantité de mouvement.
- 3- Conservation d'énergie.

II.2 Géométrie du problème

La géométrie considérée (représenté sur la **Figure II.1**) est une enceinte carrée différentiellement chauffée dans un milieu poreux anisotrope. Cette cavité est composée de deux parois verticales en vis-à-vis dites parois actives, maintenues à des températures différentiellement (T_c , T_f), la paroi verticale gauche est portée à une température constante chaude (T_c), la paroi verticale droite de la géométrie est maintenue isotherme à une température inférieure à celle de la paroi gauche (T_f), Les parois horizontales sont considérées adiabatiques (thermiquement isolées).

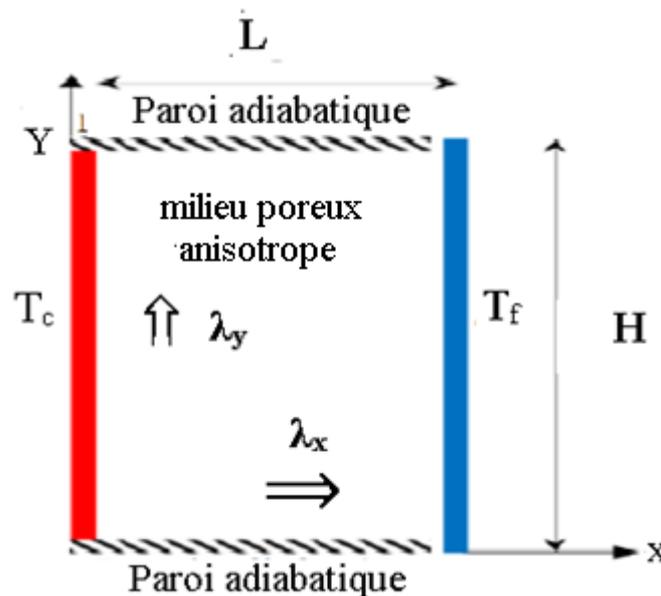


Figure (II.1) : Géométrie du problème de la convection naturelle dans une géométrie avec gradient horizontal de température.

II.3 Formulation mathématique du problème

La convection naturelle engendrée par des transferts de chaleur au voisinage des surfaces chauffées a été largement étudiée tant au niveau théorique qu'expérimental. La formulation mathématique des phénomènes de la convection est basée sur des équations qui relient les différents paramètres : pression, température et vitesse.

En mécanique des fluides, en supposant que le fluide est un milieu continue, on peut utiliser les lois classiques de conservation suivantes :

Principe de conservation de la masse pour établir l'équation de continuité.

Deuxième loi de Newton (principe de conservation de la quantité de mouvement) pour établir les équations de quantité de mouvement.

La loi de conservation de l'énergie (premier principe de la thermodynamique) pour établir l'équation de l'énergie.

Dans le cas laminaire, les problèmes d'écoulement de fluide peuvent être traités par la résolution des équations de quantité de mouvement, de continuité et d'énergie.

II.3.1 Equation de continuité

L'équation de conservation de masse atteste que la masse totale est conservée, ou autrement dit, la masse totale d'un système de fluide est totalement prise en compte. Afin de découler une conservation générale de l'équation de masse, l'augmentation de la masse de fluide, contenue dans un volume donné pendant un certain temps, doit être égal à la somme des masses du fluide qui y entrent diminuée de celle qui sort. Le plus souvent il n'y a ni diminution, ni augmentation de masse de fluide au cours du mouvement.

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = \rho \cdot q_v \quad (\text{II.1})$$

q_v : Le débit des sources ou des puits par unité de volume.

Pour un fluide incompressible sans sources ni puits on a : $\operatorname{div} \vec{V} = 0$

II.3.2 Equation de quantité de mouvement

L'équation de conservation de quantité de mouvement peut être obtenue d'une façon similaire à l'équation de conservation de masse. Ici, les équations de quantité de mouvement sont dérivées sur la base du principe de conservation de quantité de mouvement. A savoir, la force totale générée par le transfert de quantité de mouvement dans les deux directions est composé (égale) par le taux de variation de quantité de mouvement dans chaque direction.

L'équation de quantité de mouvement comporte des composantes dans chaque direction et est donc une équation vectorielle. En fin d'en tirer l'équation de conservation de quantité de mouvement, considérons le volume de contrôle.

L'application de la deuxième loi fondamentale de la mécanique à une particule fluide en mouvement mène aux équations de conservation de la quantité de mouvement.

Pour un écoulement incompressible ($\rho = \text{const}$) à viscosité constante ($\mu = \text{const}$), les équations de Navier-Stokes s'écrivent comme suit :

$$\rho \cdot \frac{dv}{dt} = \rho' \vec{F} - \overline{\text{grad}} P + \mu \Delta \vec{V} \quad (\text{II.2})$$

Avec :

\vec{F} : Les forces massiques

ρ' : Variation de masse volumique due à la convection naturelle

$\mu \cdot \Delta \vec{V}$: Forces de viscosité (contraintes)

$\overline{\text{grad}} P$: Force de pression.

II.3.3 Equation de conservation d'énergie

L'équation de conservation d'énergie peut être obtenue en suivant une procédure similaire à la dérivation de l'équation de quantité de mouvement. Cependant, la différence ici est que l'équation la température ou énergie, est une *équation scalaire*. Afin d'obtenir cette équation, considérons le volume contrôle.

L'équation de conservation d'énergie est obtenue à partir du premier principe de la thermodynamique. Ce principe met en relation les différentes formes d'énergie, soit :

$$\frac{D}{Dt}(\rho C_p T) = \Delta(K.T) + q + \beta T \frac{DP}{DT} + \mu \quad (\text{II.3})$$

Avec :

$\frac{D}{Dt}(\rho C_p T)$: La variation totale d'énergie (par accumulation et convection).

q : Puissance volumique dissipée

$\beta T \frac{DP}{DT}$: La variation d'énergie due à la compressibilité

$\mu\phi$: La dissipation irréversible due au frottement visqueux.

II.4 Hypothèses simplificatrices

Les hypothèses simplificatrices appliquées dans notre étude sont les suivantes :

- 1- L'écoulement est de type convection naturelle.
- 2- Fluide est incompressible.
- 3- Régime d'écoulement laminaire et permanent.
- 4- L'écoulement est considéré 2D en coordonnées cartésiennes.
- 5- Le transfert de chaleur par radiation est négligeable.
- 6- Absence de source interne de chaleur, de source de masse ou de réaction chimique.
- 7- Le travail, induit par les forces visqueuses, est négligeable.
- 8- L'hypothèse de Boussinesq suppose que la densité du fluide dans le terme des forces de volume, varie linéairement avec la température.

II.5 Approximation de Boussinesq

Le milieu poreux est complètement disposé avec le fluide et est supposé être macroscopiquement anisotrope, homogène et en équilibre thermique local.

Le fluide est supposé satisfaire les hypothèses classiques d'un fluide newtonien incompressible. L'approximation de Boussinesq est satisfaite en supposant que la densité du fluide est une constante, sauf dans le terme déterminant de l'équation quantité de mouvement où elle varie linéairement avec les deux températures

$$\rho(T) = \rho_0[1 - \beta_T(T - T_0)] \quad (\text{II.6})$$

$$\text{Où :} \quad \beta_T = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{II.7})$$

Avec l'hypothèse de Boussinesq :

$$\rho_{ref} = \rho - \rho_0 = -\beta_t (T - T_0) \quad (\text{II.8})$$

L'approximation de Boussinesq est valable à condition que les changements de la masse volumique $\Delta\rho$ reste faible par rapport à ρ_0 dans toute a région de l'écoulement et à condition que les variations de température sont insuffisantes pour provoquer les différentes propriétés du milieu (liquide et solide) pour faire varier de façon significative de leurs valeurs moyennes. [20]

II.6 Equations de conservation dans un milieu poreux anisotrope

Le problème de la convection naturelle dans un milieu poreux anisotrope est modélisé par les équations mathématiques suivantes :

II.6.1 Equation de continuité

L'équation de continuité dans un écoulement bidimensionnel et incompressible s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II.9})$$

II.6.2 Equation de quantité de mouvement

Suivant x :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{v} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu_{eff}}{\rho \varepsilon} \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\mu_f u}{k} - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\rho_f}{\sqrt{k}} \frac{|\vec{V}|}{\varepsilon^{3/2}} \quad (\text{II.10})$$

Suivant y :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon^2} \mathbf{v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu_{eff}}{\rho \varepsilon} \nabla^2 \mathbf{v} + \beta_t (T - T_0) g - \frac{\mu_f v}{k} - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\rho_f}{\sqrt{k}} \frac{|\vec{V}|}{\varepsilon^{3/2}} \mathbf{v} \quad (\text{II.19})$$

3

Où :

- 1) Terme de Brinkman.

- 2) Terme de Darcy.
- 3) Terme de Forchheimer.

II.6.3 Equation d'énergie

$$(\rho C_p)_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C_p)_f \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \left(k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{II.11})$$

Avec :

$$(\rho C_p)_{\text{eff}} = \varepsilon \cdot (\rho C_p)_f + (1-\varepsilon) \cdot (\rho C_p)_s \quad (\text{II.12})$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2} \quad (\text{II-13})$$

II.7 Adimensionnallisation des équations de conservation

L'adimensionnallisation ou normalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions, c'est-à-dire qu'elles seront normalisées par rapport à certaines dimensions caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre restreint de paramètres de façon à rendre la solution plus générale.

II.7.1 Variables adimensionnelles

Pour mettre le système d'équations précédent sous une forme adimensionnelle, nous avons choisi comme longueur de référence la longueur L de l'enceinte. Ainsi, nous avons introduit les variables adimensionnelles suivantes :

a. $\tau = \frac{t}{H^2 / \alpha_{eff}}$

b. $X = \frac{x}{H}$,

c. $Y = \frac{y}{H}$,

d. $U = \frac{uH}{\alpha_{eff}}$,

e. $V = \frac{vH}{\alpha_{eff}}$

$$f. P = \frac{\varepsilon^2 p H^2}{\rho \alpha_{eff}^2},$$

$$g. \theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}$$

II.7.2 Equations adimensionnelles

Les équations qui régissent l'écoulement de convection naturelle bidimensionnelle instable dans la cavité poreuse anisotrope en utilisant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie peuvent s'écrire comme suit :

II.7.2.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (II.14)$$

II.7.2.2 Equation de quantité de mouvement

Suivant x :

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial p}{\partial X} + \text{pr} \varepsilon \nabla^2 U - \frac{\text{Pr}}{\text{Da}} \varepsilon^2 U - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\text{Da}}} |\sqrt{U^2 + V^2}| U \quad (II.15)$$

Suivant y :

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = - \frac{\partial p}{\partial Y} + \text{pr} \varepsilon \nabla^2 V - \frac{\text{Pr}}{\text{Da}} \varepsilon^2 V + \text{Ra} \varepsilon^2 \text{pr} \theta - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{\text{Da}}} |\sqrt{U^2 + V^2}| V \quad (II.16)$$

II.7.2.3 Equation d'énergie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \left(U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right) = \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_y} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (II.17)$$

Les nombres adimensionnels obtenus sont : Prandtl Pr, Darcy Da, Rayleigh Ra, la porosité ε et le rapport des conductivités thermiques $\frac{\lambda_x}{\lambda_y}$

II.8 Conditions initiales et aux limites

La résolution du système d'équations obtenu précédemment nécessite l'incorporation des conditions aux limites pour chaque variable.

$$U = V = 0, \theta = \theta_i \quad \text{pour } \tau = 0$$

$$U=V=0, \theta = \theta_C = 0 \quad \text{pour } 0 \leq Y \leq 1 \text{ à } X = 0$$

$$U=V=0, \theta = \theta_H = 1 \quad \text{pour } 0 \leq Y \leq 1 \text{ à } X = 1$$

$$U=V=0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq X \leq 1 \text{ à } Y = 0$$

$$U=V=0, \frac{\partial \theta}{\partial Y} = 0 \quad \text{pour } 0 \leq X \leq 1 \text{ à } Y = 1$$

II.9 Transfert de Chaleur

Le taux du transfert de la chaleur par convection est décrit par le nombre de Nusselt qui est le rapport entre la chaleur transférée par convection par rapport à la chaleur transférée par conduction.

Le nombre de Nusselt mesure l'efficacité de la convection. C'est le rapport adimensionné entre le flux de chaleur vertical en surface du fluide et le flux que l'on mesurerait s'il n'y avait pas de convection dans la couche de ce fluide.

$$\mathbf{Nu} = \frac{q_{\text{mesuré}}}{q_{\text{conductif}}} \quad (\text{II.18})$$

Si Nu=1 pas de convection. Plus le nombre de Nusselt est grand, plus le refroidissement par convection est efficace. En d'autres termes, le nombre de Nusselt peut être calculé par la formule suivante :

$$\mathbf{Nu} = \frac{hL}{K} \quad (\text{II.19})$$

Avec :

h : est le coefficient de transfert de chaleur par convection.

L : est longueur de la cavité.

K : est la conductivité thermique du fluide.

Pour une cavité chauffée différentiellement, le nombre de Nusselt moyen peut être calculé en moyennant les nombres de Nusselt locaux calculés au niveau de tous les nœuds de la paroi froide ou chaude. Le nombre de Nusselt local se calcule sur une paroi isotherme par l'expression suivante :

$$Nu_{Local} = \left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{x=1} \quad (\text{II.20})$$

Le nombre de Nusselt moyen est alors donné par la relation suivante :

$$Nu_{moy} = \frac{\sum_{\text{noeuds}} Nu_{Local}}{n} \quad (\text{II.21})$$

II.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté la géométrie du problème étudié et le modèle physique de notre problème en coordonnées cartésiennes, les hypothèses simplificatrices, les équations différentielles de conservation (continuité, quantité de mouvement et d'énergie) ainsi que les conditions aux limites de notre problème physique.

Chapitre III :
Résolution numérique :

III.1 Introduction

Les équations d'un problème de mécanique des fluides sont des équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires, elliptiques et couplées. En raison de leur complexité, elles ne peuvent être résolues analytiquement. Ces équations sont résolues à l'aide de méthodes numériques. Plusieurs techniques numériques sont disponibles dans la littérature. On peut distinguer les méthodes des différences finies, méthodes des éléments finis, méthodes des volumes finis et méthodes spectrales. La méthode des volumes finis, sans doute la plus employée actuellement, et celle que nous allons décrire, pour les différents avantages qu'elle offre, en particulier :

- les équations aux différences traduisent la conservation de bilan de quantité de mouvement et d'énergie. Cela signifie que l'extension du principe de conservation écrit sous une forme discrétisée pour un volume de contrôle typique fini est vérifiée pour l'ensemble du domaine numérique ;
- sa robustesse numérique, sa maniabilité et son formalisme très proche de la réalité physique (conservation des bilans d'énergie et de quantité de mouvement).

III.2 Forme générale des équations de conservation

Pour simplifier la présentation, les équations de conservation sont traduites mathématiquement par des équations de transport de fonctions scalaires qui prennent la Forme générale d'une équation de convection-diffusion de ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\phi) + \nabla(\rho\vec{V}\phi) = \nabla(\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (\text{III.1})$$

Le premier terme de cette équation : terme transitoire, $\frac{\partial}{\partial \tau}(\rho\phi)$, représente

L'accumulation de ϕ dans le temps. Le second, $\nabla(\rho\vec{V}\phi)$, représente le transport de ϕ par Convection. Dans le second membre, le premier terme, $\nabla(\Gamma\nabla\phi)$, correspond au transport de ϕ par diffusion, et le dernier, S_ϕ , terme source, la production locale de ϕ . Les termes :

ϕ , Γ et S_ϕ sont expliqués en détail dans le tableau

Tableau III. 1 : Expressions de ϕ et Γ et S_ϕ pour les équations de conservation.

Equation	ϕ	Γ	S_ϕ
Continuité	1	0	0
Quantité de mouvement suivant X	U	Pr ε	$-\frac{Pr}{Da} \varepsilon^2 U - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{Da}} \sqrt{U^2 + V^2} U$
Quantité de mouvement suivant Y	V	Pr ε	$-\frac{Pr}{Da} \varepsilon^2 V + Ra \varepsilon^2 pr \theta - \frac{1.75}{\sqrt{150}} \frac{\varepsilon^{1/2}}{\sqrt{Da}} \sqrt{U^2 + V^2} V$
Energie	θ	1	0

III.3 Méthode des volumes finis

III.3.1 Principe

Les formulations conservatrices des équations aux dérivées partielles offrent l'avantage de pouvoir être reformulées de façon intégrale à l'aide du théorème de la divergence. Le principe de conservation est la loi fondamentale de la méthode des volumes finis. Il stipule que la variation d'une propriété dépend du flux net traversant la frontière S qui enveloppe le volume Ω . La méthode des volumes de contrôle est, donc, une technique de discrétisation pour la résolution des équations s'écrivant sous la forme conservatrice. Son principe est très simple, initialement développé dans le cas des écoulements compressibles par Godounov et Glimm, puis répandu dans la communauté scientifique des mécaniciens par Patankar & Spalding dans les années 70 et est discuté en détail par Patankar en 1980. Le principe de la méthode des volumes finis consiste à intégrer l'équation à résoudre sur chacun des volumes de contrôle.

Comme il est montré dans la figure III.1, le domaine est discrétisé à l'aide d'une grille dimensionnelle (uniforme ou non) dans les deux directions et orienté positivement vers la droite (Est) et vers le haut (Nord) respectivement. Pour écrire le schéma de discrétisation en un point P , on choisit une nomenclature adaptée au principe de la méthode de volumes finis pour le stockage des variables dans notre maillage et tout cela dans le but de rendre les choses

plus faciles dans la suite de la discrétisation. On considère, donc, l'élément P comme indiqué sur la figure III.1, et on note que les indices majuscules (E, W, N, S) caractérisent les variables ayant trait aux centres voisins de P , et les minuscules (e, w, n, s) sont ceux qui nous ramènent aux faces de l'élément.

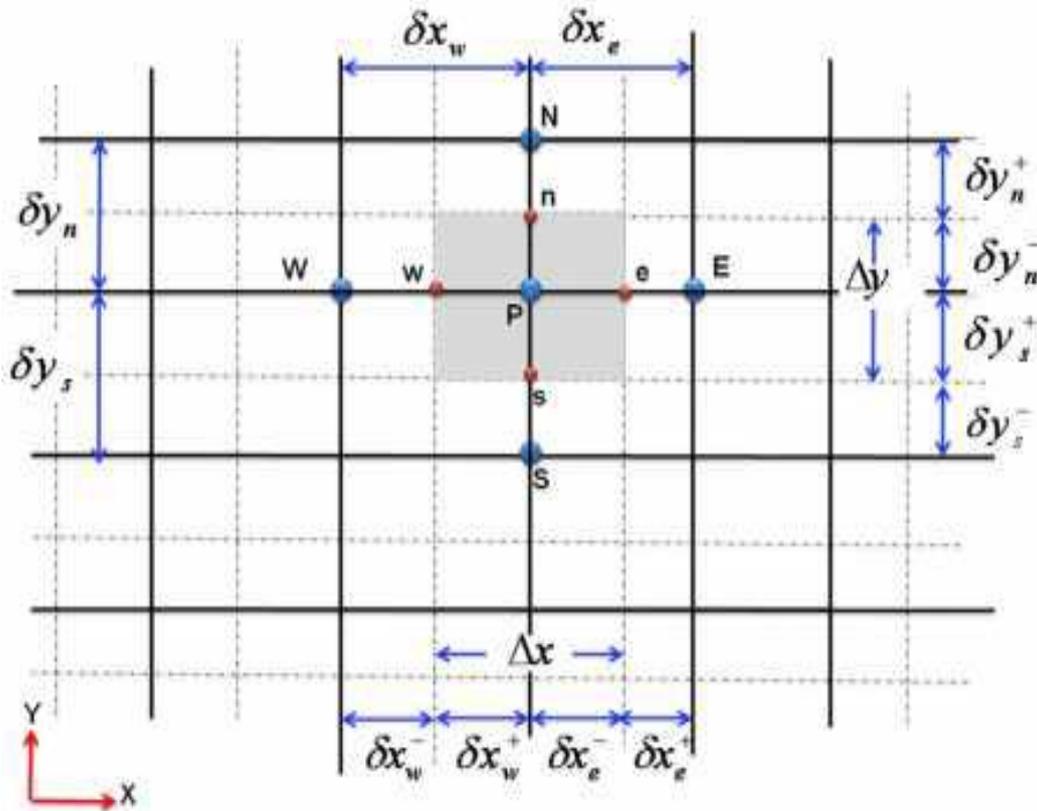


Figure III.1: Volume de contrôle dans le cas de 2D.

III.3.2 Schémas numériques

Soit l'équation de transport

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \phi) + \nabla(\rho \vec{V} \phi) = \nabla(\Gamma \nabla \phi) + S_\phi \quad (\text{III.2})$$

Cette équation, une fois discrétisée implicitement en temps, en tenant compte de la discrétisation l'équation de continuité :

$$(\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} = F_w - F_e + F_s - F_n \quad (\text{III.3})$$

Prend la forme :

$$\begin{aligned} & \left\{ \rho_p^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} + F_w - F_e + F_s - F_n - S_p \Delta\Omega \right\} \phi_p + \{ F_e \phi_e - F_w \phi_w + F_n \phi_n - \\ & F_s \phi_s \} - (D_e \phi_E - D_e \phi_P - D_w \phi_p + D_w \phi_W + D_n \phi_N - D_n \phi_P - D_s \phi_p + \\ & D_s \phi_S) = S_C \Delta\Omega + \rho_p^0 \phi_p^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Dans cette équation, l'inconnue ϕ_i , $i = e, w, n, s$ n'est pas encore exprimée sur son domaine de définition (E, W, N, S). L'interpolation assurant cette opération dépendra du choix du schéma de discrétisation spatiale. Il existe plusieurs schémas donnant la valeur de ϕ sur son domaine tel que : schéma CDS, upwind, exponentiel, hybride, puissance, et qui sont détaillés ci-après.

Bilan :

Si on pose $Pe = \frac{F}{D}$ qui désigne le nombre de Péclet de maille, l'équation de conservation une fois discrétisée implicitement en temps, est de la forme :

$$a_p^{n+1} \phi_p^{n+1} = a_E^{n+1} \phi_E^{n+1} + a_W^{n+1} \phi_W^{n+1} + a_N^{n+1} \phi_N^{n+1} + a_S^{n+1} \phi_S^{n+1} + \mathbf{b} \quad (\text{III.5})$$

Où les coefficients de l'équation (III.28) sont exprimés sous la forme générale suivante :

$$a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad (\text{III.6})$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [F_w, 0] \quad (\text{III.7})$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + [-F_n, 0] \quad (\text{III.8})$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + [F_s, 0] \quad (\text{III.9})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_p \quad (\text{III.10})$$

$$a_p^0 = \rho_p^0 \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.11})$$

$$\mathbf{b} = S_C \Delta\Omega + a_p^0 \phi_p^0 \quad (\text{III.12})$$

L'expression entre crochets représente le maximum entre les quantités et $A(|\mathbf{p}|)$ est une fonction caractéristique du schéma choisi (Tableau III.2).

Tableau III.2: Expressions de la fonction $A(|P|)$ pour les différents schémas

Schéma	$A(p)$
CDS	$1 - 0.5 p $
Upwind	1
Exponentiel	$ p / (\exp(p) - 1)$
Hybride	$[0, 1 - 0.5 p]$
Power Law	$[0, (1 - 0.1 p)^5]$

Le schéma exponentiel discrétise l'ensemble des termes convectifs et diffusifs, contrairement aux schémas habituels tels que les schémas décentré et amont. Cette discrétisation concerne l'expression des coefficients J aux faces des volumes de contrôle. Ceux-ci sont interpolés entre les deux nœuds que sépare la face de telle sorte que l'équation stationnaire 1D de convection-diffusion soit vérifiée entre ces deux points, et ce, indépendamment du problème que l'on résout.

-Le schéma hybride et le schéma puissance utilisé dans cette étude, sont dérivés directement du schéma exponentiel. Ils reposent tous deux sur l'approximation des coefficients où apparaît l'exponentiel, qui est coûteuse en temps de calcul. En fonction du nombre de Péclet, le schéma hybride effectue une approximation linéaire par morceaux de la fonction $A(P)$ et le schéma puissance une approximation polynomiale.

III.4 Couplage Vitesse-Pression

La difficulté principale pour la résolution mathématique des équations de la MDF provient du rôle particulier d'une des variables principales la pression, les équations de quantité de

mouvement sont couplées par la pression, qui agit par les composantes de son gradient. Mais il n'y a pas d'équation propre pour cette variable.

Il existe plusieurs méthodes que l'on peut classer en deux familles : l'une où l'on se débarrasse du problème de la pression en prenant le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes et l'autre où l'on compose avec la pression en établissant une équation spécifique. Dans le premier cas on parle de formulation en Vorticité-Potentiel Vecteur en 3D ou Vorticité-Fonction de Courant en 2D (Ω_Psi) et dans le second cas on a une formulation en variables primitives Vitesse-Pression (P, V). L'équation de l'énergie peut être aussi couplée pour certaines applications (convection naturelle par exemple).

III.4.1 Algorithme SIMPLER

L'algorithme SIMPLER (Semi Implicit Method for Pressure Linked Revised) de Patankar a été utilisé dans ce travail pour la résolution des équations régissant l'écoulement. Il présente une extension de l'algorithme SIMPLE (Semi Implicit Method for Pressure Linked). Le choix de développer SIMPLER provient des difficultés que présente SIMPLE. Ce dernier est basé sur l'approximation de l'omission des termes qui présentent l'influence des vitesses des voisins, ce qui risque d'exagérer la pression, et ensuite il y aura tendance vers la divergence sans l'utilisation des relaxations appropriées. À partir de cette difficulté l'algorithme SIMPLER est basé sur le fait que l'équation de correction de pression est employée seule pour corriger la vitesse et une autre procédure est utilisée pour obtenir le champ de pression.

Les équations de conservation de la quantité de mouvement discrétisées sont écrites sous la forme suivante, en considérant une estimation du champ de vitesse :

$$a_n v_n = \sum a_{nb} v_{nb} + (P_P - P_N)A_n + b_v \quad (III.13)$$

$$a_e u_e = \sum a_{nb} u_{nb} + (p_P - p_E)A_e + b_u \quad (III.14)$$

Les équations peuvent s'écrire :

$$u_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} + (p_P - p_E)d_e \quad (III.15)$$

$$v_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_n} + (p_P - p_N)d_n \quad (III.16)$$

Avec :

$$d_e = \frac{A_e}{a_e} \text{ et } d_n = \frac{A_n}{a_n} \quad (\text{III.17})$$

Lorsqu'on initialise le champ de vitesse, le champ de pression est inconnu. On annule donc le terme qui représente la pression et on introduit les pseudo-vitesses définies comme suit :

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb} + b_u}{a_e} \quad (\text{III.18})$$

$$\hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb} + b_v}{a_n} \quad (\text{III.19})$$

Ainsi les équations de quantité de mouvement s'écrivent :

$$u_e = \hat{u}_e + (p_P - p_E)d_e \quad (\text{III.20})$$

$$v_n = \hat{v}_n + (p_P - p_N)d_n \quad (\text{III.21})$$

En reportant les expressions précédentes (III.13 et III.14) dans l'équation discrète de conservation de la masse (III.21) on obtient directement une équation en pression :

$$a_p p_p = a_E p_E + a_W p_W + a_N p_N + a_S p_S + b \quad (\text{III.22})$$

Avec :

$$a_E = (\rho A d)_e ; a_W = (\rho A d)_w \quad (\text{III.23})$$

$$a_N = (\rho A d)_n ; a_S = (\rho A d)_s \quad (\text{III.24})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.25})$$

$$b = (\rho A \hat{u})_w - (\rho A \hat{u})_e + (\rho A \hat{v})_s - (\rho A \hat{v})_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.26})$$

Considérons maintenant une estimation du champ de pression : $P^* = P$

À partir du champ de pression obtenu P^* , on résout les équations de quantité de mouvement pour obtenir u^* et v^* :

$$a_e u_e^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* + (P_P^* - P_E^*)A_e + b_u \quad (\text{III.27})$$

$$a_n v_n^* = \sum a_{nb} v_{nb}^* + (P_P^* - P_N^*)A_n + b_v \quad (\text{III.28})$$

Où :

$$u_e^* = \hat{u}_e + d_e (P_P^* - P_E^*) \quad (\text{III.29})$$

$$v_n^* = \hat{v}_n + d_n (P_P^* - P_N^*) \quad (\text{III.30})$$

On utilise ce champ de vitesse dans la résolution de l'équation de continuité pour obtenir les équations de correction de pression P' (comme dans SIMPLE).

L'équation de cette dernière s'écrit sous la même forme que l'équation de la pression. En conservant l'équation de correction de vitesse de SIMPLE, on écrit :

$$u_e = u_e^* + d_e(P'_P - P'_E) \quad (\text{III.31})$$

$$v_n = v_n^* + d_n(P'_P - P'_N) \quad (\text{III.32})$$

Ce qui donne l'équation de correction de pression :

$$a_p p'_p = a_E p'_E + a_W p'_W + a_N p'_N + a_S p'_S + b \quad (\text{III.33})$$

$$a_E = (\rho A d)_e ; a_W = (\rho A d)_w \quad (\text{III.34})$$

$$a_N = (\rho A d)_n ; a_S = (\rho A d)_s \quad (\text{III.35})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S \quad (\text{III.36})$$

$$b = (\rho A u^*)_w - (\rho A u^*)_e + (\rho A v^*)_s - (\rho A v^*)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t} \quad (\text{III.37})$$

On en déduit la vitesse mais on ne corrige pas la pression. Cette démarche représente l'algorithme SIMPLE Révisé (SIMPLER).

Lorsque la convergence est atteinte, les valeurs de b s'annulent dans tous les volumes de contrôle.

Le fait que le terme source b soit nul partout est une preuve que nous avons obtenu le champ de pression correct, et que la solution actuelle de p' n'est pas demandée durant l'itération finale. Ainsi le terme source b est employé comme un indicateur utile pour la convergence de la solution du problème.

Les étapes à suivre dans l'algorithme de SIMPLER sont résumées comme suit :

1- Choisir un champ de vitesse (initialisé par des valeurs : u^* , v^*)

2- Calculer les coefficients des équations de quantité de mouvement et déduire les « pseudo vitesse » (Eq. III.18, III.19)

$$\hat{u}_e = \frac{\sum a_{nb} u_{nb}^* + b_u}{a_e}$$

$$\hat{v}_n = \frac{\sum a_{nb} v_{nb}^* + b_v}{a_n}$$

3- Evaluer le terme source de la masse de l'équation (III.26)

$$\mathbf{b} = (\rho A \hat{u})_w - (\rho A \hat{u})_e + (\rho A \hat{v})_s - (\rho A \hat{v})_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

Et résoudre l'équation de pression (III.22)

$$\mathbf{a}_p \mathbf{p}_p = \mathbf{a}_{Ep} \mathbf{p}_E + \mathbf{a}_{Wp} \mathbf{p}_W + \mathbf{a}_{Np} \mathbf{p}_N + \mathbf{a}_{Sp} \mathbf{p}_S + \mathbf{b}$$

4- Utiliser le champ de pression ($\mathbf{P}^* = P$) pour résoudre les équations de quantité de mouvement u^*, v^* (III.27, 28), (ne pas corriger la pression).

$$\mathbf{a}_e u_e^* = \sum \mathbf{a}_{nb} u_{nb}^* + (P_P^* - P_E^*) A_e + b_u$$

$$\mathbf{a}_n v_n^* = \sum \mathbf{a}_{nb} v_{nb}^* + (P_P - P_N) A_n + b_v$$

5- Calculer le terme source de la masse b , (III.37)

$$\mathbf{b} = (\rho A u^*)_w - (\rho A u^*)_e + (\rho A v^*)_s - (\rho A v^*)_n - (\rho_p - \rho_p^0) \frac{\Delta \Omega}{\Delta t}$$

De l'équation (III.37) et résoudre les équations (III.33) de correction de pression (comme dans SIMPLE).

$$\mathbf{a}_p \mathbf{p}'_p = \mathbf{a}_{Ep}' \mathbf{p}'_E + \mathbf{a}_{Wp}' \mathbf{p}'_W + \mathbf{a}_{Np}' \mathbf{p}'_N + \mathbf{a}_{Sp}' \mathbf{p}'_S + \mathbf{b}$$

6- Corriger le champ de vitesse via l'équation (III.31 et 32), mais ne pas corriger la pression.

$$u_e = u_e^* + d_e (P'_P - P'_E)$$

$$v_n = v_n^* + d_n (P'_P - P'_N)$$

7- Résoudre les autres équations de transport (énergie, masse,).

8- Retourner à l'étape 2, avec les nouveaux champs de (vitesse, température, pression).

Répéter les calculs jusqu'à convergence de toutes les variables.

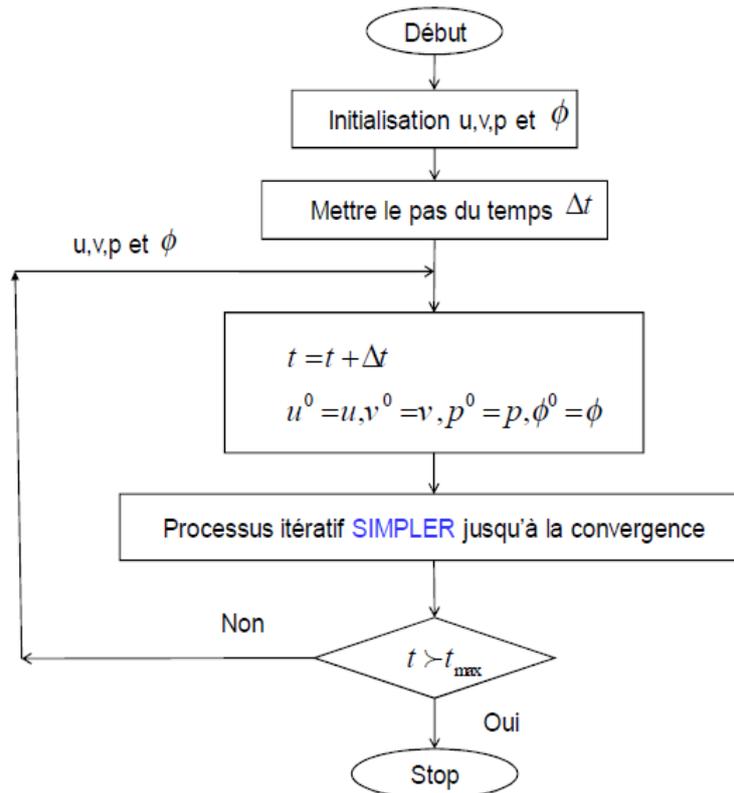


Figure III.2: Algorithme SIMPLER

III.5 Résolutions du système linéaire des équations discrétisées

III.5.1 Algorithme de THOMAS (TDMA)

C'est un algorithme développé par Thomas, c'est une méthode directe pour la situation unidimensionnelle (1D), mais peut être utilisée d'une manière itérative ligne par ligne (line by line) pour la résolution des problèmes bidimensionnels (2D).

La discrétisation par volumes finis donne un système tri diagonal pour le cas 1D, un système penta-diagonal pour le cas 2D et un système septa-diagonal pour le cas 3D. D'autres schémas de discrétisation donnent plusieurs diagonal, par exemple le schéma QUICK donne sept diagonal dans le cas 2D. Dans ce cas on pose deux diagonal dans le terme source. Un système tri diagonal peut s'écrire sous la forme générale :

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i \quad (\text{III.38})$$

Sous forme d'une matrice, ce système s'écrit :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & & 0 \\ & a_2 b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 b_3 & c_3 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ 0 & & & & c_{n-1} & \\ & & & & a_n b_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \phi_n \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \\ \cdot \end{bmatrix} \quad (\text{III.39})$$

Le calcul se fait de la manière suivante :

- Pour $i=2$, on utilise les équations :

$$p_1 = \frac{b_2}{a_1}, Q_1 = \frac{d_2 + c_2}{a_2} \quad (\text{III.40})$$

- Pour i variant de 3 à $N-1$, on utilise les équations :

$$p_i = \frac{b_i}{a_i - c_{i-1} p_{i-1}}, Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_{i-1} p_{i-1}} \quad (\text{III.41})$$

Avec $p_N = 0$ et $Q_N = \phi_N$ (où ϕ_N est une condition aux limites).

- La dernière étape détermine les inconnues, pour i variant de $N-1$ à 1, on utilise l'équation :

$$\phi_i = p_i \phi_{i+1} + Q_i$$

ϕ_1 et ϕ_N sont des valeurs aux limites du domaine.

III.5.2 Application de l'algorithme de THOMAS à des problèmes à 2D

(TDMA)

L'algorithme de Thomas (TDMA) peut être appliqué itérativement pour résoudre un problème d'un système d'équations bidimensionnel. Considérons le maillage et une équation générale de transport discrétisée sous la forme :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (\text{III.42})$$

$$-a_S \phi_S + a_p \phi_p - a_N \phi_N = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b \quad (\text{III.43})$$

Le membre droit de l'équation (III.43) est supposé temporairement connu. L'équation (III.43) est de la même forme que l'équation (III.38) avec :

$$a_i \phi_{i-1} + b_i \phi_i + c_i \phi_{i+1} = d_i$$

$$a_i = -a_S$$

$$b_i = a_p$$

$$c_i = -a_N$$

$$d_i = a_E \phi_E + a_W \phi_W + b$$

On peut maintenant résoudre le système le long de la direction (**N-S**) de la ligne choisie pour des valeurs $j = 2, 3, 4, \dots, n$ comme indiqué sur la figure (III.3).

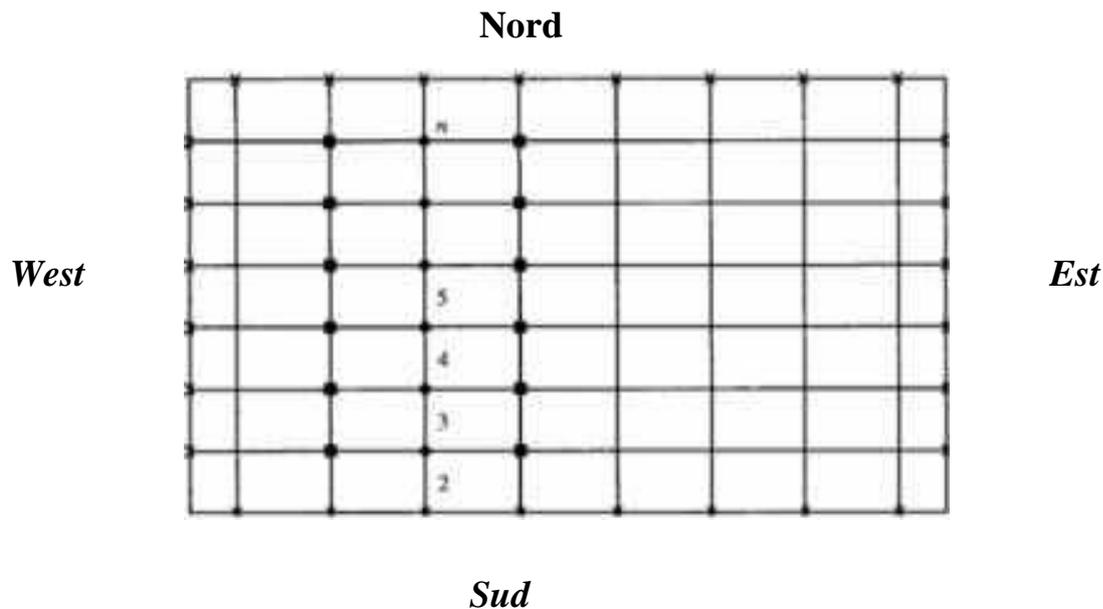


Figure III.3: Application ligne par ligne de la méthode TDMA

- Points auxquels les valeurs sont calculées
- Points auxquels les valeurs sont considérées être temporairement connues Valeurs connues à la frontière

A gauche de l'équation (III.43) il n'y a que le système tri diagonal qui peut être résolu efficacement par l'algorithme de Thomas. La solution est d'abord calculée sur la deuxième ligne des volumes de contrôle, on suppose que les valeurs de la première ligne sont connues (valeurs connues à la frontière) et les valeurs de la troisième ligne sont considérées être temporairement connues. Après que le vecteur $[\phi_2]$ ait été calculé avec l'algorithme de Thomas, on passe au vecteur $[\phi_3]$ et on suppose que la deuxième ligne est déjà calculée (à l'itération précédente) et les valeurs de la quatrième ligne sont supposées temporairement connues, puis plus généralement au vecteur $[\phi_j]$ où l'ensemble de la zone de résolution est ainsi balayé.

La procédure de calcul ligne par ligne est répétée jusqu'à atteindre la convergence de la solution.

III.6 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons présenté brièvement la méthode de volume fini pour la résolution du modèle mathématique avec l'algorithme SIMPLER, les étapes de discrétisation de modèle mathématique et de la résolution des équations algébriques, et quelques schémas de discrétisation.

Dans le prochain chapitre, nous présentons le choix du Maillage et la validation du programme de calcul sont également discuté, les résultats obtenus et leurs discussions.

Chapitre IV

Résultats et discussions

IV .1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'effet des paramètres de contrôle du problème qui sont : le nombre de Darcy qui caractérise la perméabilité du milieu poreux $10^{-1} < Da < 10^{-4}$, le nombre de Prandtl 0.71, et le nombre de Rayleigh $10^3 < Ra < 10^6$ et le coefficient de Forchheimer est 0.55.

On suppose que la porosité du milieu poreux est $\varepsilon=0.7$, et le rapport de forme $A=1$.

Les résultats obtenus sont caractérisés par la visualisation graphique des contours de la fonction de courant, des lignes isothermes, et des profils de vitesse horizontales au milieu de l'enceinte.

IV.2 Effet de Maillage

La précision des résultats et leurs temps de calcul ont une forte relation avec le choix du maillage. Un maillage non uniforme dans les deux directions est adopté. Il est plus raffiné dans les régions où les variations de températures sont relativement importantes. Dans le but d'examiner l'effet du maillage sur la solution numérique, six maillages ont été considérés : 20x20 nœuds, 30 x 30 nœuds, 40x40 nœuds 50x50 nœuds, 60x60 nœuds et 70x70 nœuds (voir figure 4.1 et tableau 4.1).

Tableau IV.1: Effet du maillage sur les valeurs de (Nu) pour $Ra=10^6$ et $Da=0.1$

Maillage	20*20	30*30	40*40	50*50	60*60	70*70
Nu	8.9946	8.5175	8.1807	8.0112	7.9173	7.8605

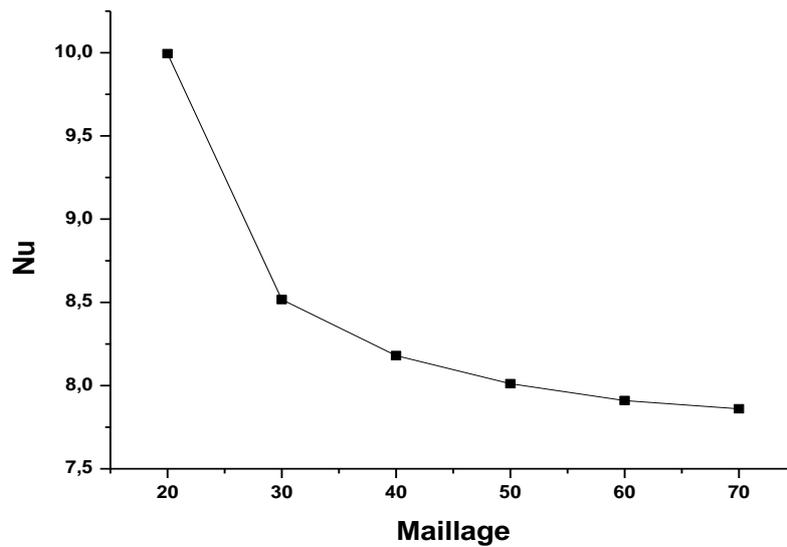


Figure IV.1 Evolution du transfert de chaleur moyen avec les différents Maillages

IV.3 Validation

Une validation de notre simulation numérique a été faite par une comparaison quantitative entre nos résultats obtenus et des différentes solutions de références disponibles dans la littérature. Le tableau IV.2 et IV.3 montre les comparaisons du nombre de Nusselt en fonction de nombre de Rayleigh.

Les comparaisons ont été faites pour un rapport d'aspect $Ar = 1$, le milieu poreux a un nombre de Darcy $Da = 0.01$ et le fluide circulant à un nombre de Prandtl $Pr = 1$. Nos résultats ont été effectués pour des nombres de Rayleigh $Ra = 10^3, 10^4, 10^5$ et pour de porosités $\epsilon = 0.6$.

1^{er} Cas :

Tableau IV.2: Variation du nombre de Nusselt avec le nombre de Rayleigh.

Ra	Nu	Nu [18]
10^3	1.016	1.021
10^4	1.525	1.53
10^5	3.585	3.51

2eme Cas :

$\epsilon = 0.9$; $Pr = 0.72$ et $Da = 10^7$

Tableau IV.3: Variation du nombre de Nusselt avec le nombre de Rayleigh

Ra	Nu	Nu [19]
10^3	1.06	1.116
10^4	2.10	1.238
10^5	4.28	3.509

IV.4 Milieu poreux isotrope

IV.4.1 Effet de nombre de Rayleigh

Dans ce cas on suppose que $Pr = 0.71$, $Da = 0.1$ et $10^3 < Ra < 10^6$

Les figure IV.2-5 montre l'effet de Ra sur les lignes de courant, les lignes isotherme, les profils des vitesses et le nombre de Nusselt.

Pour Ra faible l'intensité et la vitesse de l'écoulement sont faibles. La convection est plus grande pour la valeur $Ra=10^6$.

Pour $Ra=10^3$ le régime conductif est dominant.

Pour $Ra > 10^5$ le régime convectif est dominant.

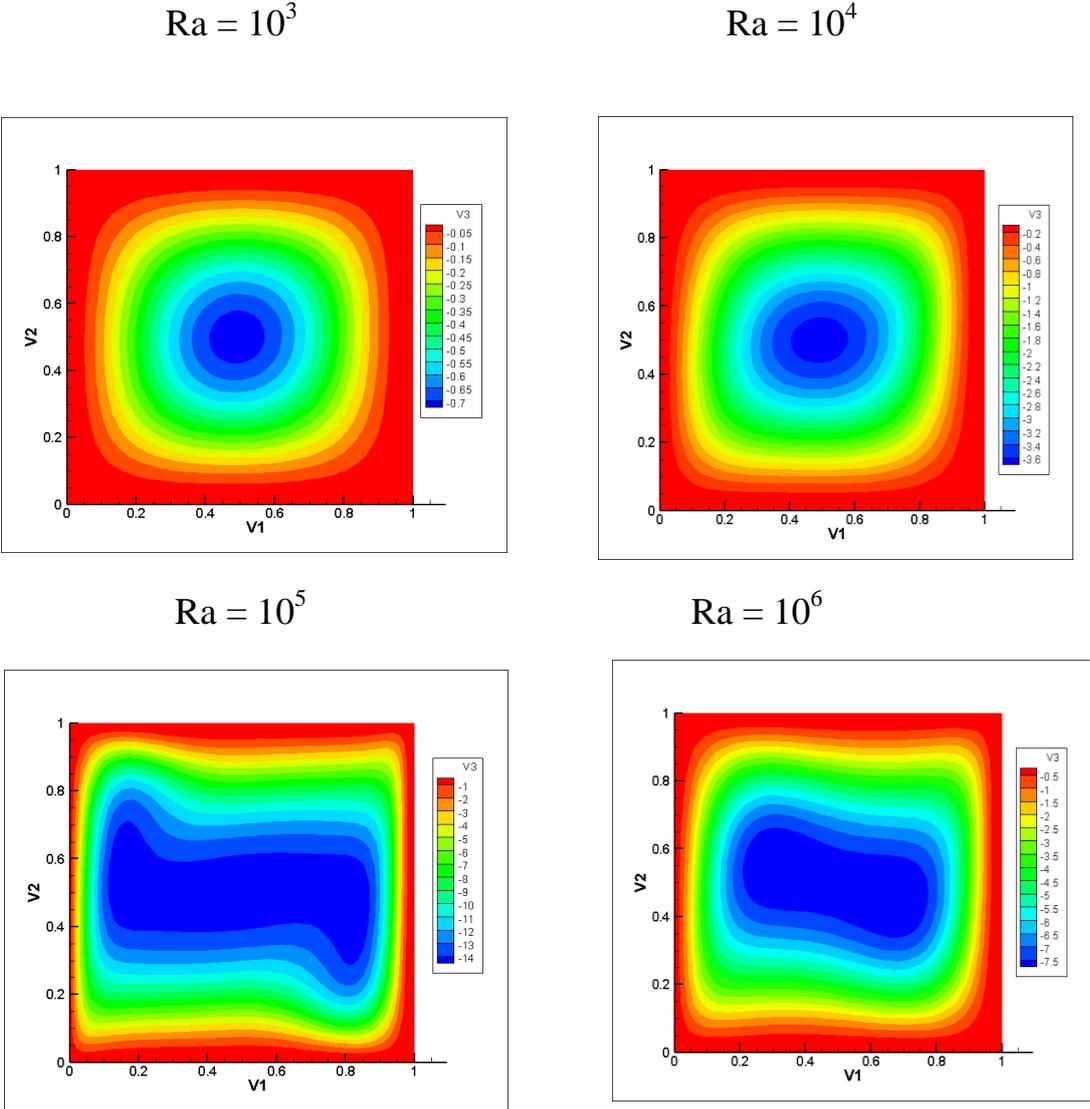


Figure.IV.2 : Lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

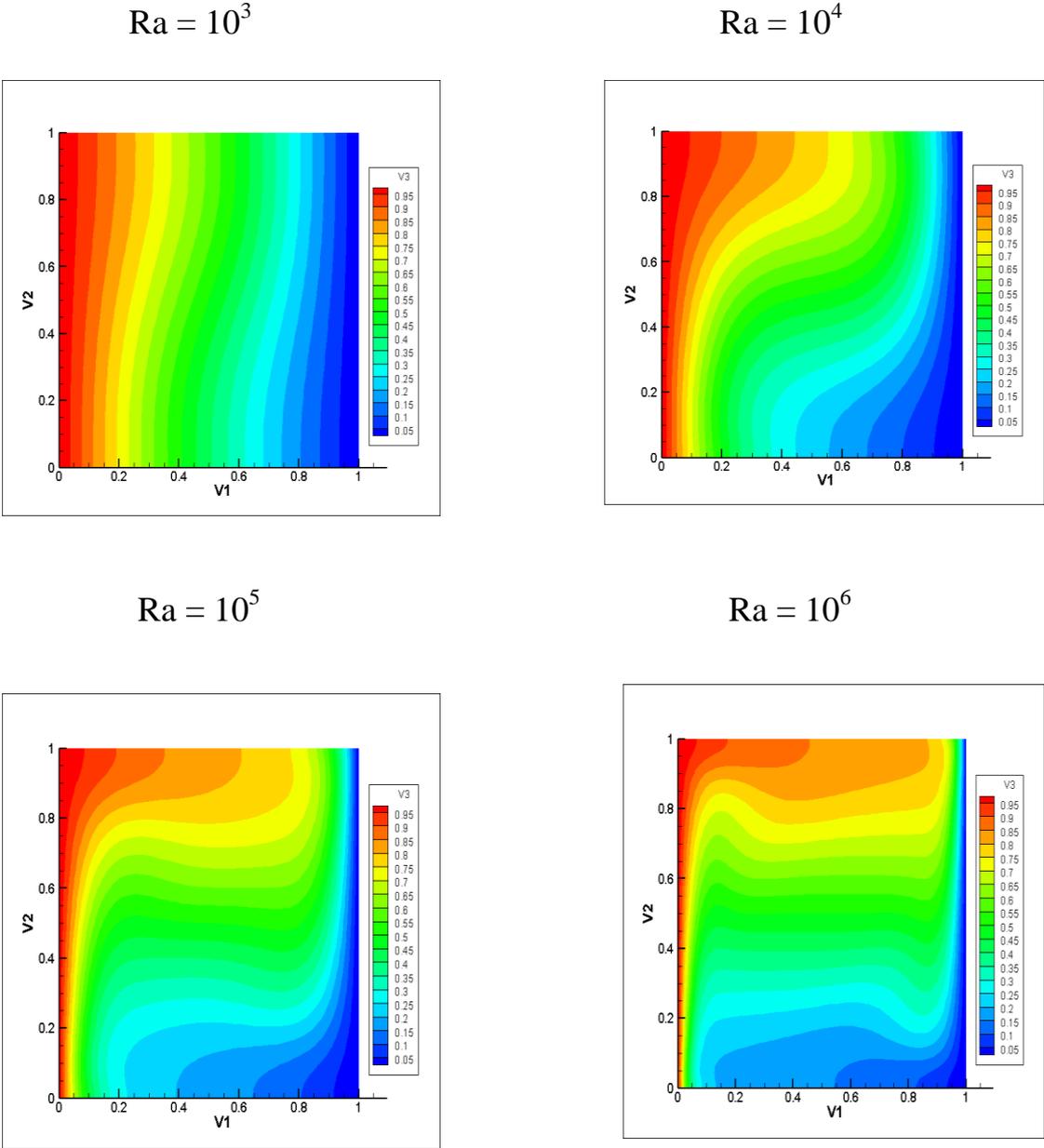


Figure IV.3 Lignes isothermes pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

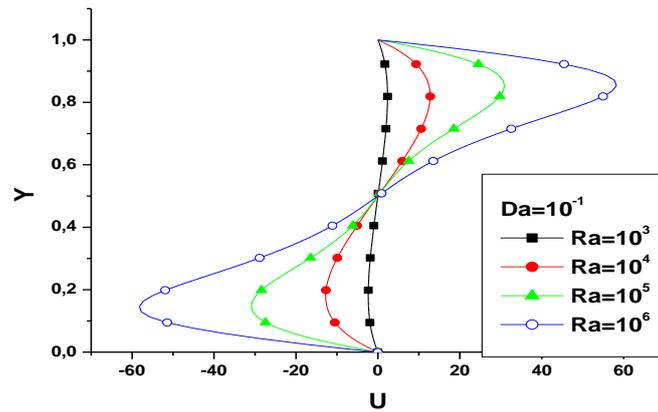


Figure IV.4 Profils de vitesse pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

Tableau IV.4: Variation de nombre de Nusselt en fonction de Rayleigh

Ra	10³	10⁴	10⁵	10⁶
Nu	1.04	1.86	3.91	7.91

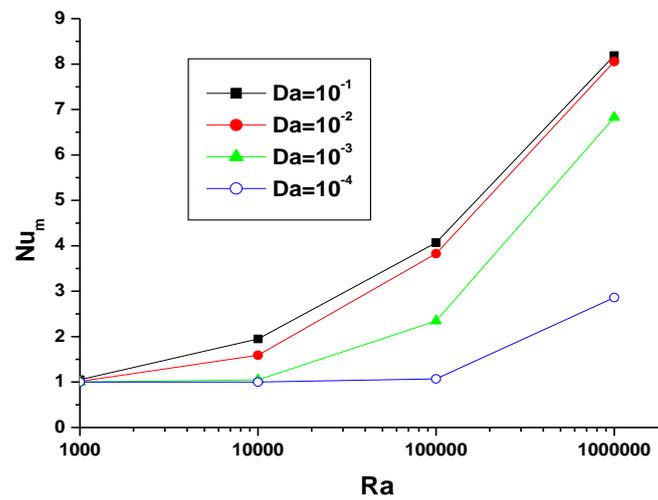


Figure IV.5 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh.

IV.4.2 Effet du nombre de Darcy

Dans ce cas on suppose que $Pr = 0.71$, $Ra = 10^6$ et $10^{-1} < Da < 10^{-4}$.

Les figures IV.6 et 7 montrent l'effet de Da sur les lignes de courant et les lignes isothermes. Nous remarquons que la convection devient de plus en plus faible avec la diminution du nombre de Darcy car le milieu poreux devient moins perméable.

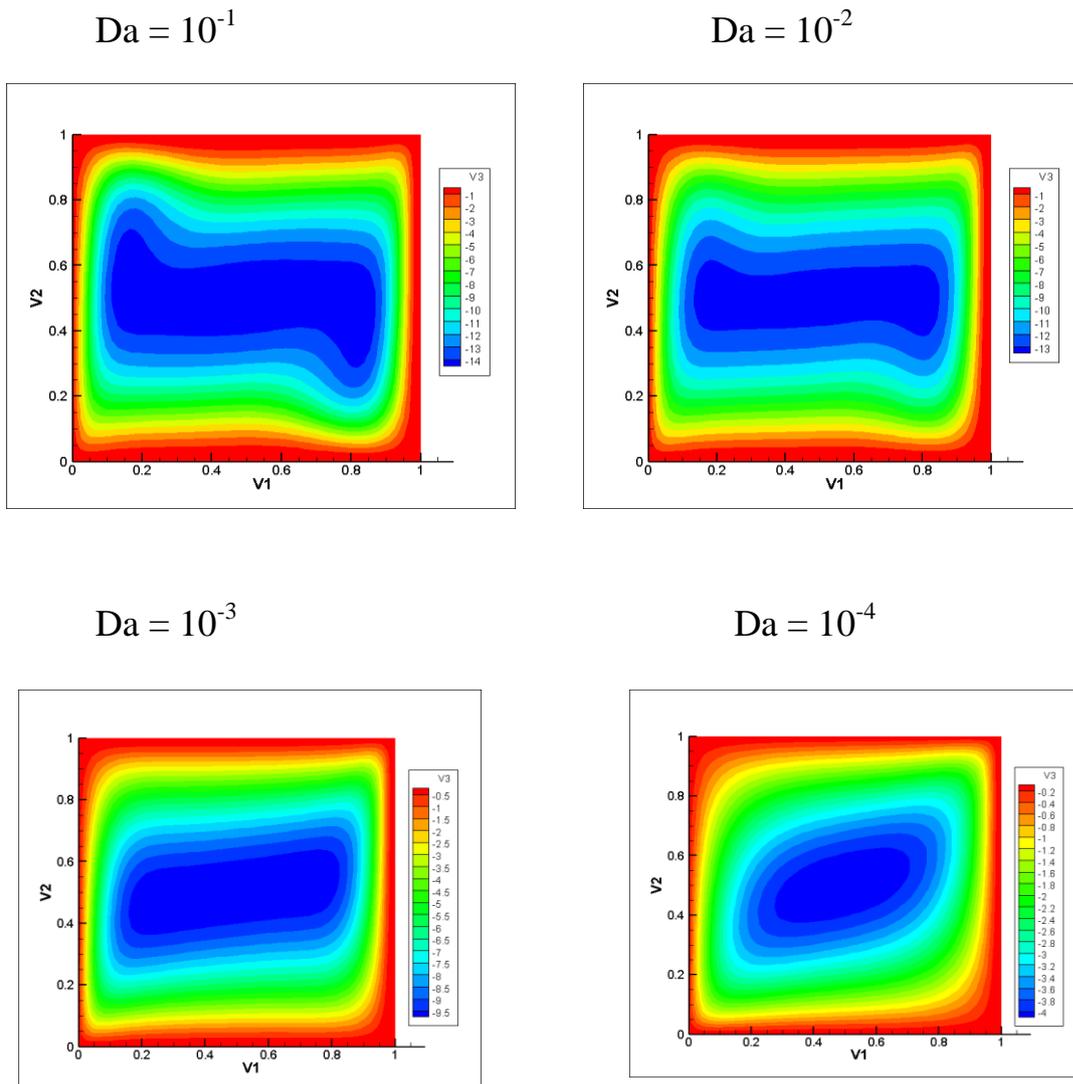


Figure.IV.6 : Lignes de courant pour différentes valeurs du nombre de Darcy.

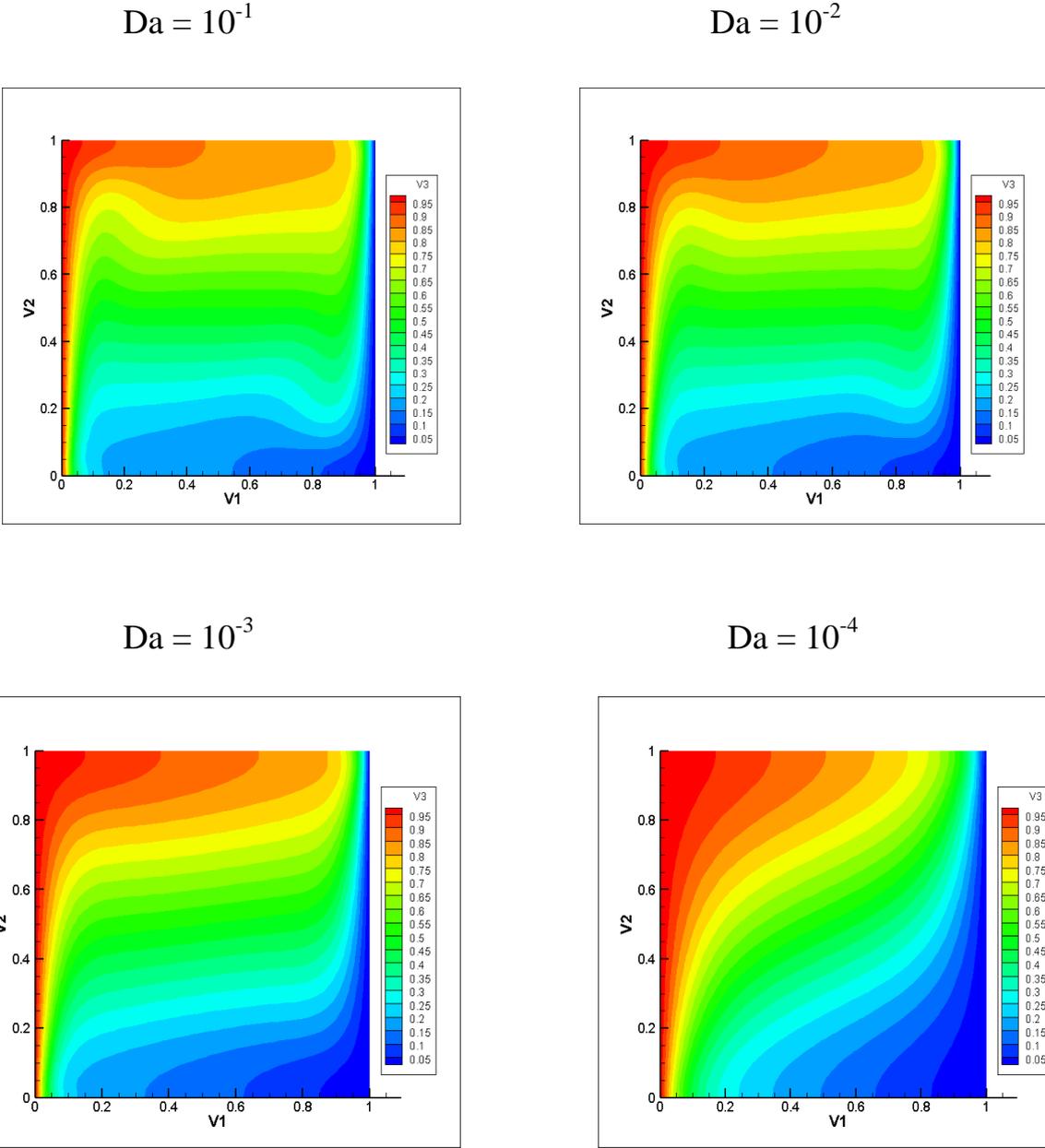


Figure IV.7: Lignes isothermes pour différentes valeurs du nombre de Darcy.

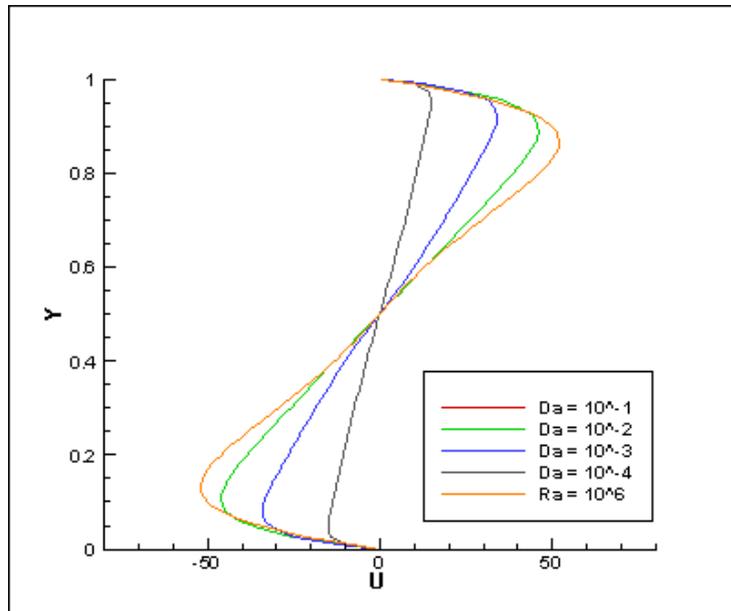


Figure IV.8: Profiles de vitesse pour différentes valeurs du nombre de Darcy.

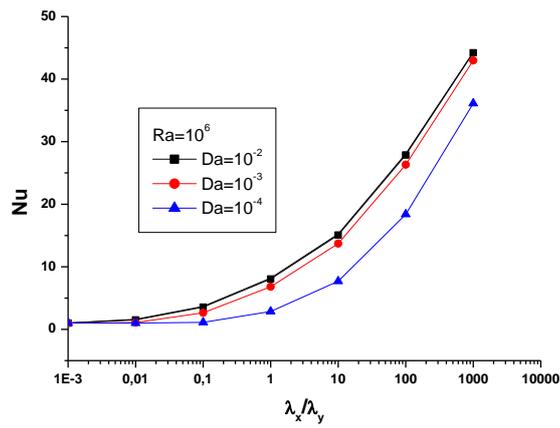
IV.5 Milieu poreux anisotrope

Dans cette partie nous montrons l'effet du rapport (λ_x/λ_y) sur le nombre de Nusselt moyen Nu et sur les composantes vitesse U et V . (λ_x/λ_y) varie de 10^{-3} à 10^3 , $Ra=10^6$ et $10^{-4} \leq Da \leq 10^{-1}$. Les résultats obtenus sont montrés sur les figures. Nous pouvons remarqué le suivant :

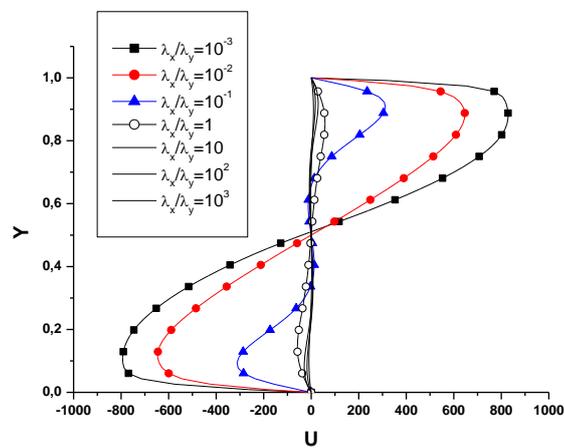
Comme il a été constaté dans la première partie, le nombre de Nusselt moyen est moins important pour la faible perméabilité du milieu poreux.

En fixant Da , le nombre de Nusselt est presque constant pour un rapport d'anisotropie inférieur à 10^{-2} ensuite il devient proportionnel avec (λ_x/λ_y) . Dans ce cas la conductivité thermique dans la direction horizontale est de plus en plus grande par rapport à celle dans la direction verticale.

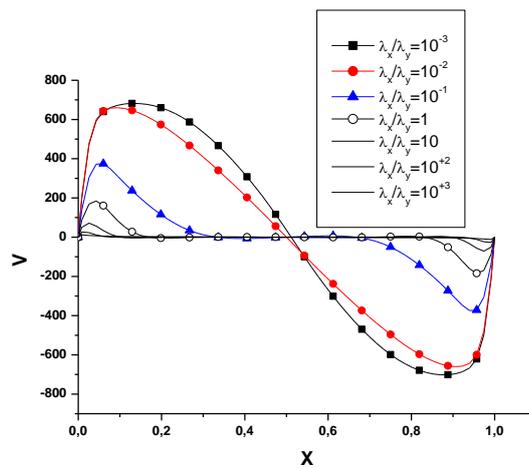
Les composantes vitesses U et V sont par contre plus grandes pour le faible rapport (λ_x/λ_y) et presque nulles pour $(\lambda_x/\lambda_y) = 10^3$.



FigureIV.9 Variation du nombre de Nusselt moyen avec λ_x/λ_y .



FigureIV.10 Profil de vitesse U en fonction du rapport λ_x/λ_y .



FigureIV.11 Profil de vitesse V en fonction du rapport λ_x/λ_y .

IV.6 CONCLUSION

Les résultats obtenus ont montré que dans le cas de d'un milieu isotrope la convection naturelle dépend du nombre de Rayleigh et du nombre de Darcy. Ainsi le transfert de chaleur et la vitesse de l'écoulement au sein de la cavité sont plus importants pour les grandes valeurs de Ra et les faibles valeurs de Da. La présence d'un milieu poreux anisotrope en conductivité thermique modifie le transfert de chaleur et la vitesse de l'écoulement convectif. L'augmentation du rapport (λ_x/λ_y) améliore le taux du transfert de chaleur et réduit l'intensité de la convection naturelle.

Conclusion générale

Conclusion générale

L'étude présentée dans ce mémoire porte sur la convection naturelle dans une enceinte poreuse anisotrope fermée. Les parois gauche et droite sont maintenues respectivement à une température chaude et une température froide. Les parois supérieure et inférieure sont adiabatiques. L'équilibre local entre les deux milieux est pris en considération.

En se basant sur les approximations de Boussinesq, l'algorithme SIMPLER a été adopté pour résoudre les équations adimensionnelles basé sur la méthode des volumes finis. Les résultats sont présentés sous forme des lignes de courant, des lignes isothermes, des profils des composantes vitesses et des variations du nombre de Nusselt moyen en fonction des nombres adimensionnels : le nombre de Rayleigh Ra , le nombre de Darcy Da et le rapport des conductivités thermiques $\frac{\lambda_x}{\lambda_y}$.

Les résultats obtenus montrent:

- Dans le cas de d'un milieu isotrope la convection naturelle dépend du nombre de Rayleigh et du nombre de Darcy. Ainsi le transfert de chaleur et la vitesse de l'écoulement au sein de la cavité sont plus importants pour les grandes valeurs de Ra et de Da .
- La présence d'un milieu poreux anisotrope en conductivité thermique modifie le transfert de chaleur et la vitesse de l'écoulement convectif. L'augmentation du rapport λ_x/λ_y améliore le taux du transfert de chaleur et réduit l'intensité de la convection naturelle.

Références bibliographiques

Références bibliographiques

- [1] - **Ramadan Younsi** ; Simulation numérique du transfert de chaleur et de masse en milieux fluides et poreux. Thèse de doctorat (2002) Université des sciences et de la technologie. Houari Boumediene, Alger.
- [2] - **Boumaraf Assia** ; Etude de la convection naturelle thermosolutale dans une enceinte rectangulaire inclinée. Mémoire de magistère (2010) Université Mentouri – Constantine.
- [3]- **M. Kaviany**, Principles of heat transfer in porous media. Springer, (1995).
- [4] **S.V. Patankar**, Numerical heat Transfer and Fluid flow, Hemisphere, Washington, DC,1980
- [5] – **E. Scheidegger**, The Physics of flow through porous media. 3rd Edition, University of Toronto Press, (1974).
- [6] - **Sliman Boughali** ; Transfert de chaleur par conduction en 2013/2014.
- [7] – **Salhi Hicham** ; mémoire étude numérique de la convection naturelle dans les enceintes nano fluide en 2015. Université de Batna.
- [8] **G. Abd Alghani**, « convection naturelle dans une cavité carrée différentiellement chauffée » Mémoire de Master. Univ-Badji Mokhtar Annaba 2014.
- [9] **José-Philippe Pérez et A. M. Romulus**, (1993) Thermodynamique. Fundaments et applications, Paris, Masson.
- [10] **S. J. M. Linthorst, W. M. M. Schinkel, and C. J. Hoogendoorn**, Flow structure with natural convection in inclined air-filled enclosures, ASME J. Heat Transfer, Vol.103, pp. 535-539. (1981).
- [11] **S. Moukram, G. Ridha**, « Simulation de la convection naturelle thermosolutale dans une cavité poreuse » Mémoire de Master. Univ-Larbi Tébéssi Tébessa 2017
- [12] **Ali**. "Thèse de Magister, Modélisation d'une installation a plasma inductif basse fréquence". Université de Biskra.

- [13] SAIDIA L M, « Simulation numérique de la convection forcée dans un conduit a rangées de plaques chauffées », Mémoire de Magister, Univ. Hassiba Benbouali–Chlef, 2009.
- [14] A. Bejan et A. Krauss, Heat transfer handbook, chapter 7 natural convection, (2003)525-556.
- [15] J. H. Lee, W. H. Park, and M. Daguinet, Theoretical study o\ the natural convection flows in a partially filled vertical cylinder subjected to a constant wall temperature, 2nd ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference, Mars 22-27, Honolulu, Hawaii, pp. 1-6. (1984).
- [16 et 17] T. Amel, « Etude de l'échange thermique dans une cavité rectangulaire avec deux côtés partiellement actifs » Mémoire de Magister Univ-Ouargla, 2011.
- [18] : HASSINET Liamena « Simulation numerique de la convection naturelle laminaire dans une cavité porreuse ». Mémoire de Master Université de Batna 02.
- [19] : G. D. Vahl Davis. « Natural convection of air in a square cavity »; a benchmark numerical solution, Int. J. Numer. Mesh. Fluids 3, pp. 249-264 (1983).
- [20]: A. Nield et A. Bejan. « Convection in Porous Media», Third Edition. Springer, United States of America (2006).
- [21] : BOUGHALI. « Transfert de chaleur ». Cours, physique énergétique, Université Kasdi Merbah Ouargla (2013).