RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE - Tébessa

Faculte des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

Présenté par : **SIDHOUM Bariza**

Intitulé :

Étude numérique d'identification d'une frontière d'un système parabolique

Date de soutenance ....

Devant le jury

Elhadj Zeraoulia	Maître de conférence	Université tébessa	Président
Mr Abdelhamid Ayadi	Professeur	Université O.E.B	Rapporteur
Marzoug Djebarni	Maître de conférence	Université O.E.B	Examinateur
Kamel Haouam	Maître de conférence	Université tébessa	Examinateur

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE - Tébessa

Faculte des Sciences

Département de Mathématiques

MÉMOIRE

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

SPÉCIALITÉ : **MATHÉMATIQUES**

Présenté par : **SIDHOUM Bariza**

Intitulé :

Étude numérique d'identification d'une frontière d'un système parabolique

Date de soutenance ....

Devant le jury

Elhadj Zeraoulia	Maître de conférence	Université tébessa	Président
Mr Abdelhamid Ayadi	Professeur	Université O.E.B	Rapporteur
Marzouk Djebarni	Maître de conférence	Université O.E.B	Examinateur
Kamel Haouam	Maître de conférence	Université tébessa	Examinateur

Remerciements

Tout d'abord, je veux profiter de cette occasion pour présenter mes remerciements à Monsieur **AYADI ABDELHAMID**, pour le choix du sujet de ce mémoire, ses suggestions et son aide constant. Je suis très heureuse de cette collaboration sincère et bénéfique.

Je remercie toutes les personnes qui m'ont aidé à la réalisation de ce travail.

Je remercie également les membres du Jury d'avoir accepté d'examiner ce mémoire et de faire partie de mon Jury .

Je salue tous mes amis de leur présence et leur soutien constant qui m'ont permis de réaliser mes rêves. Je dédie ce mémoire à mon père, à ma mère, à mes soeurs, à mes frères et à tous ceux qui comptent pour moi.

Notations

H, U, V, Ω	espace de Hilbert
ω	un sous-domaine non vide de Ω
$H^{'}$	le dual topologique de H
$L(H)$	l'éspace vectoriel des applications linéaires continues de H
A	opérateur
$D(A)$	Domaine de A
$\overline{D(A)}$	L'adhérence de $D(A)$
ImA	L'image de A
$KerA$	le noyau de A
A^{-1}	opérateur inverse de A
$\parallel A \parallel = \sup\limits_{\|x\|_H \leq 1 \|Ax\|_H}$	la norme de A
$\rho(A)$	l'ensemble résolvant de A
$R(.;A)$	la résolvante de A
A^{*}	opérateur adjoint de A
$\{G(t)\}_{t \geq 0}$	une famille d'opérateurs linéaires bornés sur H
$L^1([0,T],H)$	L'espace de Lebesgue
$C^1([0,T],H)$	L'espace des fonctions continuement dérivables.
$W^{1,1}([0,T],H)$	Espace de Sobolev

Introduction

Dans ce travail on s'intéresse à identifier une partie de la frontière d'un domaine sur lequel on a établi une équation parabolique. Cette identification est construite à partir d'une observation sur l'autre partie de la frontière et sur la base de la contrôlabilité du système adjoint de la dérivée par rapport aux paramètres de déformation $\{\alpha_k\}$. Ce travail est est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre on rappele les définitions et théorèmes importants de la théorie des semi-groupes qui seront utilisés dans le développement de la contrôlabilité.

Dans le deuxième chapitre on va développer la notion de la contrôlabilité frontière qui sera employé dans le problèmes de l'identification d'une partie de la frontière.

Alors que le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème d'identification d'une partie de la frontière d'un domaine sur lequel notre système parabolique est établi.

Chapitre 1

Rappels et définitions

1.1 Préliminaires

1.1.1 Préliminaires sur les opérateurs

Dans la suite, nous noterons par H un espace de Hilbert sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, muni de la norme $x \longmapsto \|x\|_H$, et par $L(H)$ l' éspace vectoriel des applications linéaires continues de H en lui même muni de la norme $\|A\| = \sup_{|x|_H \leq 1} |Ax|_H$.

Nous désignerons par I l'unité de $L(H)$.

Pour un opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ nous noterons par :

$$ImA = \{Ax/x \in D(A)\}$$

L'image de A et par :

$$KerA = \{x \in D(A)/Ax = 0\}$$

le noyau de A

L'opérateur $A : D(A) \subset H \longrightarrow ImA$ est **surjectif**.

Si $KerA = \{0\}$; alors A est injectif.

Pour un opérateur bijectif on peut définir l'opérateur **inverse** :$A^{-1} : D(A^{-1}) \subset H \longrightarrow H$.

Lemme 1.1.1 *Si $A \in L(H)$ et $\|A\| < 1$, alors $(I - A)$ est inversible et $(I - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n$ (voir [12]).*

1.1.2 Ensembles et opérateurs résolvants. Spectre de A

Définition 1.1.1 *l'ensemble $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}/(\lambda I - A)^{-1}$ existe dans $L(H)\}$ est appelé l'ensemble* ***résolvant*** *de A.*

Définition 1.1.2 *l'application*

$$R(.; A) : \rho(A) \longrightarrow L(H)$$

où

$$R(\lambda; A) = (\lambda I - A)^{-1}$$

est appelée ***la résolvante*** *de A.*

Définition 1.1.3 *l'ensemble $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$. S'appelle* ***le spectre*** *de A.*

Définition 1.1.4 *Soit $A : D(A) \subset X \longrightarrow Y$, oú X, Y sont deux espaces de Hilbert avec $D(A)$ dense dans X. L'opérateur* ***adjoint*** *A^* de A est défini par :*

$$\langle y; Ax\rangle_Y = \langle A^*y; x\rangle_X . \forall x \in D(A), \forall y \in D(A^*)$$

sur :

$$D(A^*) = \{y \in Y; \exists c \geq 0. \mid \langle y, Ax\rangle_Y \leq c \parallel x \parallel, \forall x \in D(A)\}$$

Définition 1.1.5 *Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$*

A est dit autoadjoint , si $D(A) = D(A^*)$ et $A = A^*$.

A est symétrique , si $\langle y; Ax\rangle = \langle Ay; x\rangle, \forall x; y \in D(A)$.

1.1.3 Les opérateurs maximaux et dissipatifs

Définition 1.1.6 *Soit $(A; D(A))$ un opérateur linéaire dans H, on dit que :*

i) *A est **dissipatif** si $(Ax, x) \leq 0, \forall x \in D(A)$*

ii) *A est **maximal** si $R(I - A) = H$*

Théorème 1.1.1 *$(A; D(A))$ est maximal dissipatif sur l'espace de Hilbert H SSI ([10]) :*

i) *A est fermé à domaine dense.*

ii) *$\forall \lambda > 0, (\lambda I - A)$ est bijectif de $D(A)$ sur H et $(\lambda I - A)^{-1} \in L(H)$,*

avec $\| (\lambda I - A)^{-1} \|_{L(H)} \leq \frac{1}{\lambda}$.

1.2 C_0-Semi-groupe

1.2.1 Définitions. Propriétés élémentaires

Définition 1.2.1 *Une famille $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés sur H, est dite **Semi-groupe fortement continue**, ou bien C_0**-Semi-groupe**, si elle vérifie :*

i) *$G(0) = I$ (identité dans $L(H)$).*

ii) *$G(t + s) = G(t)G(s)$, pour tout $s, t \geq 0$.*

iii) *$\lim_{t \longrightarrow 0^+} G(t)x = x$, pour tout x dans H*

Remarque 1.2.1 *Comme $t+s = s+t$, on a $G(t+s) = G(s+t) = G(t)G(s) = G(s)G(t)$.*

Définition 1.2.2 *Le semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est appelé semi-groupe **uniformément continu** si*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \|G(t) - I\|_{L(H)} = 0$$

Remarque 1.2.2 *Le semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ dans ce cas $= \exp At$.*

Proposition 1.2.1 *Si $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0-Semi-groupe dans H, alors La famille d'opérateurs adjoints $\{G^*(t)\}_{t > 0}$ est aussi un C_0-Semi-groupe dans H.*

Définition 1.2.3 ***Le générateur infinitésimal*** *$A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ d'un C_0-Semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est défini par :*

$$Ax = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t}$$

pour tout x dans son domaine $D(A) = \{x \in H / \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{G(t)x-x}{t}$ existe$\}$

Remarque 1.2.3
1. *Ax n'est autre que la dérivée en zéro de la fonction continue $t \longmapsto G(t)x$.*
2. *cette définition est valable pour les cas où A est fermé.*
3. *$D(A)$ est un sous-espace dense dans H.*

1.2.2 Propriétés générales des C_0-Semi-groupes

Théorème 1.2.1 ***voir [10]***

soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-Semi-groupe sur H de générateur infinitésimal A alors :

1. *$D(A)$ est dens dans H.*
2. *A est fermé.*
3. *Si $x \in D(A), et : t > 0, alors\ G(A)x \in D(A)$, et :*

$$\frac{d}{dt}(G(t)x) = G(t)Ax = AG(t)x$$

4. *$G(t)x - x = \int_0^t G(s)Ax\ ds, \forall t \geq 0$*

Définition 1.2.4

On dit que le C_0-Semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est ***uniformément borné*** *s'il existe $M \geq 1$,tel que :*

$$\| G(t) \| \leq M; \forall t \geq 0$$

Si $M = 1$ le semi groupe est dit de contraction.

Théorème 1.2.2 ***(unicité de l'engendrement) voir [12]***
Soient deux C_0-Semi-groupes $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ et $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ ayant pour générateur infinitésimal le même opérateur A.
Alors :

$$G(t) = S(t),\ \forall t \geq 0$$

1.2.3 Existence d'un semi-groupe

Le probléme fondamentale de le théorie de semi - groupe est la caracterisation des générateurs de semi - groupe.
Dans la suit, pour $\omega \geq 0$ nous desinerons par Γ_ω l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C}/Re\lambda > \omega\}$

Théorème 1.2.3 ***(Hille -Yosida)voir [12]***
Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est le générateur infinitésimal d'un Semi-groupes $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ si et seulement si :

1. *A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = H$.*
2. *Il existe $\omega \geq 0$ et $M \geq 1$ tel que $\Gamma_\omega \subset \rho(A)$ et pour $\lambda \in \Gamma_\omega$,on a :*

$$\| R(\lambda; A)^n \| \leq \frac{M}{(Re\lambda - \omega)^n}; \quad \forall n \in I\!N^*$$

Un résultat trés utilisé en pratique est le suivant.

Théorème 1.2.4 ***(Lumer - Phillips) voir [12]***
Soit $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire, les propositions suivant sont equivalentes :

1. *$(A, D(A))$ est le générateur infinitésimal d'un semi - groupe de contraction sur H*
2. *A est maximal dissipatif*
3. *A^* est maximal dissipatif*

1.3 C_0-Semi-groupe avec Propriétés spéciales

1.3.1 C_0-Semi-groupe différentiable

Définition 1.3.1 *On dit que $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0-***Semi-groupe différentiable** *si l'application :*

$$t \in]0; +\infty[\longmapsto G(t)x \in H$$

est différentiable pour chaque $x \in H$

Théorème 1.3.1 ***voir [12]*** *Soient $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est $C_0 - Semi - groupe$ différentiable et A son générateur infinitésimal, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est $C_0 - Semi - groupe$ différentiable*

ii) $ImG(t) \subset D(A), \ \forall t > 0$

Proposition 1.3.1 ***voir [12]*** *Soit $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est C_0-Semi-groupe différentiable, alors l'application :*

$$t \in]0; +\infty[\longmapsto G(t) \in L(H)$$

est continue pour la topologie de la convergence uniforme.

Remarques 1.3.1

1. *Si $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est C_0-Semi-groupe différentiable, alors l'application :*

   $$t \in]0; +\infty[\longmapsto G(t) \in L(H)$$

   est de classe $C^{\infty}_{]0,+\infty[}$

2. *Si $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est C_0-Semi-groupe différentiable, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :*

   $$G(t)^{(n)} = A^n G(t) = [AG(\frac{t}{n})]^n, \quad \forall t > 0$$

Théorème 1.3.2 ***voir [12]***

Soient $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est C_0-Semi-groupe différentiable et A son générateur infinitésimal, alors :

i) *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in H$, on a $G(t)x \in D(A^n)$et :*

$$A^n G(t)x = [AG(\frac{t}{n})]^n x \ \ \forall t > 0$$

ii) *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,l'aplication :*

$$t \in]0; +\infty[\longmapsto G(t): \ H \longrightarrow D(A^n)$$

est n fois différentiable pour la topologie de la convergence uniforme et :

$$G(t)^{(n)} = \frac{d^n}{dt^n} G(t) = A^n G(t) \in L(H) \quad ; \forall t > 0$$

iii) *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'application :*

$$t \in]0; +\infty[\longmapsto G(t)^n \in L(H)$$

1.3.2 C_0-Semi-groupes de contractions

Nous présentons quelque problémes cancernant la classe du C_0-Semi-groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ vérifiant la propriété $\| G(t) \| \leq 1$; pour tout $t \geq 0$

Théorème 1.3.3 ***voir [12]***
Soient $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ est un C_0-Semi-groupe ; A sont générateur infinitésimal et :

$$S(t) = e^{-\omega t} G(t), \quad \forall t \geq 0$$

Alors :

i) *$\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est C_0-Semi-groupe de contraction.*

ii) *Le C_0-Semi-groupe $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ a pour générateur infinitésimal l'opérateur $B = A - \omega I$*

Théorème 1.3.4 ***voir [12]***
Un opérateur linéaire $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ est le générateur infinitésimal d'un semi - groupe $\{G(t)\}_{t \geq 0}$ de contraction si seulement si :

i) *A est un opérateur fermé et $\overline{D(A)} = H$.*

ii) $\Gamma_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} / Re\lambda > 0\} \subset \rho(A)$ *et pour* $\lambda \in \Gamma_0$,*on a :* $\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{1}{(Re\lambda)^n}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Proposition 1.3.2 ***voir [12]***

Soit $A \in L(H)$ *tel que* $\| A \| \leq 1$,*alors* $\{e^{t(A-I)}\}_{t\geq 0}$ *est un semi - groupe uniformément continu de contrations.*

1.3.3 C_0-Semi-groupes compacts

Jusqu'ici nous avons classifié les semigroupes aux propriétés de régularité de la famille $\{G(t)\}_{t\geq 0}$, dans cette sous-section on va présenter une propriété du semi - groupe basé sur la régularité de générateur infinitésimal de semi- groupe.

Définition 1.3.2 *On dit que* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0***-Semi-groupe compact***,*si* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est compact pour tous* $t > 0$, *et* C_0***-Semi-groupe éventuellement compact*** *s'il existe* $t_0 > 0$ *tel que :*$\{G(t_0)\}$ *est compact.*

Lemme 1.3.1 ***voir [15]***

Soit $\{G(t_0)\}$ *un* C_0*-Semi-groupe éventuellement compact , si* $\{G(t_0)\}$ *est compact pour certains* $t_0 > 0$ *;alors* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est compact pour tous* $t > t_0$,*et continue en norme sur* $[t_0, +\infty[$.

Définition 1.3.3 *Soit* A *un opérateur linéaire , avec* $\rho(A) \neq \emptyset$ *a resolvente compacte, s'il existe un* $\lambda_0 \in \rho(A)$ *tel que* $R(\lambda_0; A)$ *est compact.*

Proposition 1.3.3 ***voir [15]***

Soit $(A; D(A))$ *un opérateur linéaire sur l'espace de Hilbert* H *avec* $\rho(A) \neq \Phi$ *et soit* $H_1 = (D(A), \| . \|_A)$, *avec :*$\| . \|_A$ *étant la norme du graphe, alors les affirmations suivantes sont équivalentes :*

i) *L'opérateur* A *a resolvent compact.*

ii) *L'injection canonique* $\mathfrak{i} : H_1 \hookrightarrow H$ *est compact.*

Théorème 1.3.5 ***voir [15]***

Soient $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est un* C_0*-Semi-groupe, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est compact.*

ii) *Le générateur de* $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ *est a resolvante compacte.*

Chapitre 2

Contrôlabilité des systèmes dynamiques distribués

2.1 Préliminaires

2.1.1 Problèmes d'évolution non homogènes

Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un C_0-Semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert H, on va étudier l'existance et l'unicité de :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + f(t) \text{ , si } t \in]0, T[\\ \\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

où : $f : [0, T] \longrightarrow H$

Définition 2.1.1 *Soit $f \in L^1([0, T], H)$ et $y_0 \in H$,on appelle **solution faible** de (2.2) la fonction $y \in C([0, T], H)$ donnée par :*

$$y(t) = G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)ds, t \in [0, T] \tag{2.2}$$

*On appelle **solution classique** de (2.1) tout fonction $y \in C([0, T], D(A)) \bigcap C^1(]0, T[, H)$ telle que (2.1) est vérifiée sur $[0, T]$.*

Remarques 2.1.1 *Par définition, le problème* (2.1) *admet toujours une unique solution faible.*

Théorème 2.1.1 *Soit* $f \in L^1([0,T],H)$ *et* $y_0 \in H$*, le probléme* (2.1) *admet au plus une solution classique et s'il en existe une alors elle est donnée par la formule* (2.2)

Démonstration Il suffit de démontrer que toute solution classique est donnée par la formule (2.2).
Soit y une solution classique , pour tout $t \in [0,T]$ on considère la fonction :
$z : [0,T] \longrightarrow H$ défini par

$$z(s) = G(t-s)y(s), s \in [0,t]$$

Puisque $y \in D(A)$, la fonction $\tau \longmapsto G(\tau)y(s)$ est dérivable pour tout $\tau > 0$. Par conséquent z est dérivable sur $[0,t]$ et on a :

$$\begin{aligned}
\dot{z}(t) &= -G(t-s)Ay(s) + G(t-s)\dot{y}(s) \\
&= -G(t-s)Ay(s) + G(t-s)[Ay(t) + f(t) \\
&= -G(t-s)Ay(s) + G(t-s)Ay(t) + G(t-s)f(t) \\
&= G(t-s)f(t)
\end{aligned}$$

comme $f \in L^1([0,T],H)$, on en déduit que $\dot{z} \in L^1([0,t],H)$ et en l'intégrant entre 0 et t on obtient :

$$z(t) = z(o) + \int_0^t G(t-s)f(s)ds$$

c'est-ã-dire :

$$y(t) = G(t)y_0 + \int_0^t G(t-s)f(s)ds$$

Théorème 2.1.2 ***voir [10]***

Si $f \in C^1([0,T],H)$*, alors pour tout* $y_0 \in D(A)$*, le problème* (2.1) *admet une solution classique.*

Définition 2.1.2 *Une fonction* $y \in W^{1,1}([0,T],H)$ *est* ***solution forte*** *de* (2.1) *si elle vérifie* $y(0) = y_0$ *et l'équation* ***presque partout*** *dans* $[0,T]$, *où :* $W^{1,1} = \{f \in L^1(0,T;H),\ \dfrac{df}{dt} \in L^1(0,T;H)\}$

Théorème 2.1.3 *Si fonction* $y \in W^{1,1}([0,T],H)$ *alors pour tout* $y_0 \in D(A)$ *le problème* (2.1) *admet une solution forte.*

2.1.2 Position du probléme

Dans ce chapitre on va présenter les principes d'analyse des systémes distribués (notions de contôrlabilité exacte, faible, contôrlabilité frontière...)

Maintenant on cherche un état y solution de :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ , si } t \in]0,T[\\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Oú :

$A \in L(V,H)$

$B \in L(U,H)$

$u \in L^2([0,T];U)$ la fonction u dite contrôle

y l'état du systéme

y_0 l'état initial

Dans l'étude du systéme (2.3),on fait les hypothèses suivantes

$H_1)$ H,U sont des espaces de Hilbert séparables désignant respectivement l'espace d'état de contrôle

$H_2)$ $u \in L^2([0,T],U); B \in L(U,H)$

$H_3)$ A est auto-adjoint à résolvante compacte et engendre un C_0-Semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ sur H.

2.1.3 L'opérateur de controlabilité

On introduit l'opérateur :

$$\begin{cases} L_T & : L^2([0,T],U) \longrightarrow H \\ u & \longmapsto \int_0^T G(t-s)Bu(s)ds \end{cases} \tag{2.4}$$

L_T peut aussi être défini comme : $L_T u = y(t,0,u)$, c'est-ã-dire comme la solution, à l'instant t, du problème correspondant à la donnée initiale 0 et au second membre (contrôle) Bu.

Proposition 2.1.1 *On a* $L_T \in L(L^2([0,T],U),H)$ *et* $\| L_T \| \leq \sqrt{T} \| G \|_{C([0,T],H)} \| B \|_{L(U,H)}$

2.2 Contrôlabilité

Ceci amène à introduire divers types de Contrôlabilité

2.2.1 Contrôlabilité exacte

Définition 2.2.1 *On dit que le système* (2.3) *est exactement contrôlable au temps* $T > 0$*, si pour tout* $y_d \in H$ *il existe* $u \in L^2([0,T],U)$ *tel que :*$y(T) = y_d$*,c'est à dire*

$$\forall y \in H, \exists u \in L^2([0,T],U) tel\ que : y(T) = y_d$$

Remarques 2.2.1 *La définition précédente est équivalente à* $Im(L_T) = H$

Définition 2.2.2 *Soit* H_1 *un sous-espace vectoriel de* H *le système* (2.3) *est dit exactement contrôlable dans* H_1*, si pour tout* $y_d \in H_1$*, il existe* $u \in L^2([0,T],U)$ *tel que :* $y(T) = y_d$

Proposition 2.2.1 ***voir [14]***

Le système (2.3) *est exactement contrôlable sur* $[0,T]$ *si et seulement si :*

$$\exists c > 0, telque : \| y^* \|_{H^*} \leq c \| B^* G^*(.) y^* \|_{L^2([0,T],U^*)}$$

Proposition 2.2.2 *voir [14]*

Si L_T est compact alors le système (2.3) *n'est pas exactement contrôlable.*

Corollaire 2.2.1 *voir [14]*

Si $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est compacte pour tout $t > 0$, alors le système (2.3) *n'est pas exactement contrôlable.*

Corollaire 2.2.2 *voir [14]*

Si B est compact pour tout $t > 0$, alors le système (2.3) *n'est pas exactement contrôlable.*

2.2.2 Contrôlabilité faible

Définition 2.2.3 *le système* (2.3) *est faiblement contrôlable sur $[0, T]$, si pour tout $y_d \in H$, et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $u \in L^2([0, T], U)$ tel que : $\| y(T) - y_d \| \leq \epsilon$.*

La contrôlabilité faible est caractérisée par :

Proposition 2.2.3 *voir [14]*

Il y a équivalance entre :

1. (2.3) *faiblement contrôlable sur* $[0, T]$.
2. $\overline{Im(L_T)} = H$.
3. $Ker(L_T^*) = Ker(L_T^* L_T) = \{0\}$.
4. $\{\langle y, G(s)Bv\rangle = 0, \forall s \in [0, T] et \forall v \in U\} \Longrightarrow y = 0$
5. *Si le semi-groupe $\{G(t)\}_{t\geq 0}$ est analytique :*
   $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(A^n G(s)B)} = H, pour\, tout\, s\, dans [0, T]$

2.2.3 Contrôlabilité frontière

Les concepts d'état de système sont attachés un certain nombre qui jouent un rôle fondamental dans la théorie de la commande, il s'agit en général d'amener l'état du système à des valeurs désirées sur une partie de Ω.

Soit $y_d \in L^2(\omega)$ un état désiré donné, où ω est une partie de la frontière de Ω, le problème de la contrôlabilité frontière consiste à savoir si l'on peut trouver un contrôle $u \in U$ permettent d'amener l'état du système (2.3) de y_0 à y_d sur une partie de frontière ω.

Définition 2.2.4 *Le système* (2.3) *est dit faiblement frontièrement contrôlable sur ω si :*

$$\forall \epsilon \geq 0, \exists u \in U : \parallel y(T)_{|\omega} - y_d \parallel_{L^2(\omega)} \leq \epsilon$$

Remarques 2.2.2 *Les définition ci-dessus signifient que l'on ne s'intéresse qu'à l'état atteint sur la la partie de la frontière ω.*

Le contrôle u dépend de la variable du temps mais implicitement, il dépend aussi du sous-domaine ω.

l'adjoint de χ_ω est $\chi_\omega^* : L^2(\omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$

défini par :

$$(\chi_\omega^* y)(x) = \begin{cases} y(x), & si\ x \in \omega \\ 0, & si\ x \in \Omega \backslash \omega \end{cases} \tag{2.5}$$

Définition 2.2.5 *La contrôlabilité régionale exacte (contrôlabilité régionale faible) est équivalente à : $Im\chi_\omega L_T = L^2(\omega)$ $(\overline{Im\chi_\omega L_T} = L^2(\omega))$*

La contrôlabilité régionale exacte peut être caractérisée par :

Proposition 2.2.4 *Si $u \in L^2([0,T]; I\!R^P)$, alors le système* (2.3) *est exactement régionalement contrôlable si et seulement si :*

$$\forall y^* \in L^2(\omega), \exists c > 0 : c \parallel B^* G^*(.) \chi_\omega^* y^* \parallel_{L^2([0,T]; I\!R^P)} \geq \parallel y^* \parallel_{L^2(\omega)}$$

Proposition 2.2.5 *1. Le système* (2.3) *est exactement régionalement contrôlable si et seulement si : $Ker\chi_\omega + ImL_T = L^2(\Omega)$*

2. *Le système* (2.3) *est faiblement régionalement contrôlable si et seulement si :* $Ker\chi_\omega + \overline{ImL_T} = L^2(\Omega)$

Démonstration

1. Soit $y \in L^2(\Omega)$ on a $y = y_1 + y_2$, avec $y_1 = 0$ sur ω et $y_2 = 0$ sur $\Omega \backslash \omega$.

   Le système est exactement régionalement contrôlable, donc

$$y_2 \in Im\chi_\omega L_T$$

   autrement :

   dit :

$$\exists u \in U : y_2 = L_T u, et\ y_1 = 0$$

   sur ω donc :

$$y_1 \in Ker\chi_\omega$$

   alors :

$$y \in Ker\chi_\omega + \overline{ImL_T} \Longrightarrow Ker\chi_\omega + \overline{ImL_T} = L^2(\Omega)$$

   Maintenant, soit $y \in L^2(\omega)$ alors :

$$\chi_\omega^* y \in L^2(\Omega) \Longrightarrow \exists y_1 \in Ker\chi_\omega, \exists y_2 \in ImL_T$$

   tel que :

$$\chi_\omega^* y = y_1 + y_2 \Longrightarrow \exists y_1 \in Ker\chi_\omega, \exists y_2 \in ImL_T$$

   tel que :

$$\chi_\omega \chi_\omega^* y = \chi_\omega y_1 + \chi_\omega y_2 \Longrightarrow \exists y_1 \in Ker\chi_\omega, \exists y_2 \in ImL_T$$

   tel que :

$$y = \chi_\omega y_2 \Longrightarrow y \in Im\chi_\omega L_T$$

   donc :

$$Im\chi_\omega L_T = L^2(\omega)$$

   alors le système (2.3) est exactement régionalement contrôlable.

2. Si le système (2.3) est faiblement régionalement contrôlable $y_2 \in \overline{Im\chi_\omega L_T}$
   ou encore $\forall\epsilon > 0$ il existr $u \in U$ tel que : $\| y_2 - \chi_\omega L_T u \|_{L^2(\omega)} \leq \epsilon$
   il vient :
   $$\| y_2 - L_T u \|_{L^2(\omega)} \leq \epsilon$$
   c'est-à-dire :
   $$y_2 \in \overline{ImL_T}$$
   alors :
   $$y \in Ker\chi_\omega + \overline{ImL_T}$$
   donc :
   $$Ker\chi_\omega + \overline{ImL_T} = L^2(\Omega)$$

Remarques 2.2.3

Le système (2.3) *est faiblement régionalement contrôlable sur* ω *si et seulement si :*

$$KerL_T^* \cap Im\chi_\omega^* = \{0\}$$

Corollaire 2.2.3

Le système (2.3) *est faiblement régionalement contrôlable dans* $L^2(\omega)$ *sur* $[0, T]$ *si et seulement si l'une des propriétés suivantes sont satisfaites :*

1. $(\chi_\omega L_T)^*(\chi_\omega L_T)$ *est inversible.*
2. $\overline{Im(\chi_\omega)L_T)} = L^2(\omega)$.
3. $Ker\chi_\omega L_T)^* = Ker(\chi_\omega L_T)^*(\chi_\omega L_T) = \{0\}$.
4. $(B^*G^*(s)\chi_\omega^*)y = 0, \forall \in [0, T]) \Longrightarrow y = o$.
5. *Si le semi-groupe est analytique tel que :*
   $$\overline{\bigcup_{n\geq 0}[Im(\chi_\omega A^n G(s)B)]} = L^2(\omega), \forall s \in]0, T]$$
   .

Chapitre 3

Identification d'une partie de la frontière

3.1 Introduction

L'identification de certains paramètres de systèmes dynamiques distribués est un problème d'importance capital dans les problèmes inverses. Les questions d'identification et de contrôle optimal gouvernés par des des équation aux dérivées partielles ont des nombreuses applications aux sciences physiques.

Soit X un espace de Hilbert de dimension infinie et A un opérateur différentiel de second ordre, défini sur un sous-espace dense $D(A) \subset X$, non borné dans X. On suppose que A engendre un C_0-Semi-groupe d'opérateurs linéaires et bornés agissant sur X,satisfaisant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = Ay(t) + Bu(t) \text{ , si } t \in]0, T[\\ y(0) = y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

Des systèmes de ce type apparaissent naturellement dans des problèmes de contrôle et d'observation des systèmes vibrants (comme l'équation des ondes), dans l'électromagnétisme (équation de maxwell), dans la mécanique quantique (équation de Schrödinger) ou des phénomènes thermiques (l'équation de la chaleur).

3.2 Identification

Il s'agit donc d'identifier une partie de la frontière par une technique de la théorie de la sentinelle.

Soit Ω_0 un ouvert borné de $I\!R^n$ $(n = 1, 2, 3)$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega_0$ assez régulière,On suppose que Γ est union de deux partie disjointes Γ_* et Γ_0 de mesure de Lebesgue non nulle, et soit $]0;T[$ l'intervalle du temps. On note $Q_\alpha = \Omega_\alpha \times]0;T[$ et $\Sigma_\alpha = \Gamma_\alpha \times]0;T[$ et $\Sigma_* = \Gamma_* \times]0;T[$ avec $0 < T < +\infty$.

Avec

$$\Gamma_\alpha = \{x + \alpha(x)V(x); x \in \Gamma_0\}$$

où V est une fonction vecteur orienté vers l'extérieur du domaine et α est une fonction suffisamment régulière.

On note $\Sigma_\alpha = \Gamma_\alpha \times]0,T[$ et $Q_\alpha = \Omega_\alpha \times]0;T[$.

Considérons le système autonome décrit par :

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t}(x,t;\alpha) = Ay(x,t;\alpha) & dans \quad Q_\alpha \\ y(x,0;\alpha) = 0 & dans \quad \Omega_\alpha \\ y(x,t;\alpha) = 0 & sur \quad \Sigma_\alpha \\ \frac{\partial y}{\partial n}(x,t;\alpha) = g & sur \quad \Sigma_* \end{cases} \tag{3.2}$$

Où l'opérateur A est générateur d'un semi-groupe fortement continu sur l'espace d'état.

On considère la fonction de restriction :

$$\chi_{\Gamma_\alpha} : L^2(\Gamma)) \longrightarrow L^2(\Gamma_\alpha)$$

$$y \longmapsto \chi_{\Gamma_\alpha} y = y|_{\Gamma\alpha}$$

Son l'adjoint

$$\chi^*_{\Gamma\alpha} : L^2(\Gamma_\alpha) \longrightarrow L^2(\Gamma)$$

est défini par :

$$(\chi^*_{\Gamma_\alpha} y)(x) = \begin{cases} y(x), \text{ si } x \in \Gamma_\alpha \\ 0, \text{ si } x \in \Gamma_* \end{cases} \tag{3.3}$$

On va écrire $\alpha(x)$ sur une base $(b_i(x))_{i=1,\infty}$ de $\mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$,

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i b_i(x)$$

où $\alpha \in l^2(R)$ On note $y_{\alpha_i}(x,t) = \frac{\partial y}{\partial \alpha_i}(x,t;\alpha)$

La dérivée du système (3.2) par rapport à α_i est :

$$\begin{cases} \frac{\partial y_{\alpha_i}}{\partial t}(x,t) = Ay_{\alpha_i}(x,t) & dans \quad Q_\alpha \\ y_{\alpha_i}(x,0) = 0 & dans \quad \Omega_\alpha \\ y_{\alpha_i}(x,t) = -b_i(x)\nabla y_\alpha(x).V(x) & sur \quad \Sigma_\alpha \\ \frac{\partial y_{\alpha_i}}{\partial n}(x,t) = 0 & sur \quad \Sigma_* \end{cases} \tag{3.4}$$

et son adjoint est :

$$\begin{cases} \frac{\partial q_j}{\partial t}(x,t) = -Aq_j(x,t) & dans \quad Q_\alpha \\ q_j(x,T) = 0 & dans \quad \Omega_\alpha \\ q_j(x,t) = 0 & sur \quad \Sigma_\alpha \\ \frac{\partial q_j}{\partial n}(x,t) = u_j(x,t) & sur \quad \Sigma_* \end{cases} \tag{3.5}$$

où u_j est une suite de contrôle dans $L^2(\Sigma^*)$

Soit ω une région de Γ_* de mesure non nulle, on définit la sentinelle

$$S : l^2(R) \times l^2(R) \Longrightarrow l^2(R)$$

par

$$S(\alpha\tilde{}, \alpha) = (\int_{\mathcal{O}} u_j(x,t;\alpha\tilde{}).y(x,t;\alpha)dxdt)_{j=1,\infty}$$

où $\mathcal{O} = \omega \times]0,T[$. tel que :

$$D_\alpha S(\alpha\tilde{}, \alpha\tilde{}) = ID + M \ \ \forall \alpha\tilde{} \in l^2(R)$$

où $I\!D$ est une matrice d'identité et $M \in \pounds(l^2(R)$ tel que

$$\mid M_i \mid_{l^2(R)} = \frac{\epsilon}{i},\ pour\ \ i = 1, \infty$$

et M_i est la ième ligne de M. Alors que $D_\alpha S(\alpha\tilde{}, \alpha\tilde{})$ présente la dérivé de S par rapport au second paramètre en $(\tilde{\alpha,}\alpha\tilde{})$.

La différentiabilité de $S(\tilde{\alpha,}\alpha)$ par rapport à α au point $(\tilde{\alpha,}\alpha\tilde{})$ donne

$$S(\tilde{\alpha,}\alpha) = S(\tilde{\alpha,}\alpha\tilde{}) + D_\alpha S(\alpha\tilde{}, \alpha\tilde{}).(\alpha - \alpha\tilde{}) + o(\mid \alpha - \alpha\tilde{} \mid).$$

On se donne y_{obs} dans $L^2(\Sigma_*)$ et on cherche un $\bar{\alpha}$ dans $l^2(R)$ tel que

$$j(\bar{\alpha}) = \inf_{\alpha \in l^2(I\!R)} j(\alpha) = inf \mid y_\alpha - y_{obs} \mid$$

Dans le cas où $\alpha = \bar{\alpha}$ nous avons

$$S(\tilde{\alpha,}\bar{\alpha}) = S(\tilde{\alpha,}\alpha\tilde{}) + \bar{\alpha} - \alpha\tilde{} + M(\bar{\alpha} - \alpha\tilde{}) + o(\mid \alpha - \alpha\tilde{} \mid).$$

et par conséquent on peut proposer l'itération suivante :

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + S(\alpha^k, \bar{\alpha}) - S(\alpha^k, \alpha^k).$$

avec

$$S(\alpha^k, \bar{\alpha}) = (\int_O w_i(\alpha^k) y_{obs} dxdt)_{i=1,\infty}$$

et

$$S(\alpha^k, \alpha^k) = (\int_O w_i(\alpha^k) y(\alpha^k) dxdt)_{i=1,\infty}$$

où $y(\alpha^k) = y(x, t; \alpha^k)$ solution de (3.2) avec la donnée α^k

On définit maintenant un opérateur linéaire continu :

$$I\!B \in \left(L^2\left(I\!D\right), l^2\left(I\!R\right)\right)$$

Par

$$[I\!B : \left| \begin{array}{ccc} L^2\left(I\!D\right) & \longrightarrow & l^2\left(I\!R\right) \\ u_i\left(\widetilde{\alpha}\right) & \longmapsto & \left(Bu_i\left(\widetilde{\alpha}\right)\right)_j = \left(\int_{\Sigma_{\widetilde{\alpha}}} b_j\left(\nabla y\left(\widetilde{\alpha}\right)V\right)\frac{\partial q_i}{\partial \nu} d\Sigma\right)_j \end{array} \right. \quad]$$

Donc on a :

$$\begin{aligned}\left(D_\alpha S\left(\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}\right)\right)_{ij} &= \int_{D} u_i\left(\widetilde{\alpha}\right) y_{\alpha_j} dxdt \\ &= \left(\int_{\Sigma_{\widetilde{\alpha}}} b_j\left(\nabla y\left(\widetilde{\alpha}\right)V\right)\frac{\partial q_i}{\partial \nu} d\Sigma\right)_j \\ &= \left(\mathbb{B}u_i\left(\widetilde{\alpha}\right)\right)_j\end{aligned}$$

Alors

$$\left(D_\alpha S\left(\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}\right)\right)_{ij} = \left(\mathbb{B}u_i\left(\widetilde{\alpha}\right)\right)_j \tag{3.6}$$

C'est un problème de contrôle ; c'est-à-dire trouver $u_i\left(\widetilde{\alpha}\right) \in L^2\left(D\right)$ de la norme minimal tels que $\mathcal{B}u_i\left(\widetilde{\alpha}\right) = z$ avec $z \in l^2\left(\mathbb{R}\right)$.

On va montrer que $\overline{Im\left(\mathbb{B}\right)} = l^2\left(\mathbb{R}\right)$ (on peut montrer que B^* "adjoint de B" est injective).

C'est-à-dire $\ker\left(\mathcal{B}^*\right) = \{0\}$.

L'opérateur adjoint $\mathbb{B}^* \in \left(l^2\left(\mathbb{R}\right), L^2\left(D\right)\right)$ est donné par :

$$\mathbb{B}^* : \left| \begin{array}{ccc} l^2\left(\mathbb{R}\right) & \longrightarrow & L^2\left(D\right) \\ \left(\sigma_j\right) & \longmapsto & \mathbb{B}^*\left(\sigma_j\right) = \chi_{D}\Phi \end{array}\right.$$

Où Φ est la solution du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} \frac{\partial}{\partial t}\Phi + A\Phi &=& 0 & \text{dans } Q_{\widetilde{\alpha}} \\ \frac{\partial}{\partial \nu}\Phi &=& 0 & \text{sur } \Sigma^* \\ \Phi &=& -\left(\nabla y\left(\widetilde{\alpha}\right)V\right)\sum_j \sigma_j b_j & \text{sur } \Sigma_{\widetilde{\alpha}} \\ \Phi\left(.,0\right) &=& 0 & \text{dans } \Omega_{\widetilde{\alpha}} \end{array}\right. \tag{3.7}$$

En effet d'après (3.5) on a :

$$\begin{aligned}\left(u_i,\Phi\right)_{L^2(D)} &= \sum_j \sigma_j \int_{\Sigma_{\widetilde{\alpha}}} b_j\left(\nabla y\left(\widetilde{\alpha}\right)V\right)\frac{\partial q_i}{\partial \nu} d\,\Sigma \\ &= \left(\sigma, \mathbb{B}u_i\right)_{l^2(\mathbb{R})} = \left(\mathbb{B}^*\sigma, u_i\right)_{L^2(D)}\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$[\chi_{\mathcal{O}}\Phi = I\!B^{*}\sigma]$$

On Suppose maintenant que $I\!B^{*}\sigma = \chi_{I\!D}\Phi = 0$. C'est-à-dire $\Phi = 0$ dans $I\!D$.

Alors :

$$\Phi = 0 \Leftrightarrow (\nabla y(\widetilde{\alpha}) V) \sum_{j} \sigma_j b_j = 0$$

Puisque $(b_j)_j$ est une base de $l^2(I\!R)$, alors :

$$\{\nabla y(\widetilde{\alpha}) V = 0\} \text{ ou } \{\sigma_j = 0\ \}$$

On décompose le vecteur V suivant la normale $\nu_{\widetilde{\alpha}}$ et les vecteurs tangents $\tau_{\widetilde{\alpha}}$ sur $\Gamma_{\widetilde{\alpha}}$ c'est à dire : $v(x) = a\nu_{\widetilde{\alpha}} + \bar{a}\tau_{\widetilde{\alpha}},\ \bar{a} \in I\!R^n$

$$\nabla y(\widetilde{\alpha}) V(x) = \nabla y(\widetilde{\alpha})(a\nu_{\widetilde{\alpha}}(x)) + \nabla y(\widetilde{\alpha})(b\tau_{\widetilde{\alpha}}(x))\,; \forall x \in \Gamma_{\widetilde{\alpha}}$$

Puisque $\nabla y(\widetilde{\alpha}).\tau_{\widetilde{\alpha}} = 0$ sur $\Gamma_{\widetilde{\alpha}}$, on a :

$\nabla y(\widetilde{\alpha}) V(x) = a\frac{\partial y(\widetilde{\alpha})}{\partial \nu_{\widetilde{\alpha}}}(x)\,; \forall x \in \Gamma_{\widetilde{\alpha}}$

$$D'aprsl'unicitdeCauchy :$$

$$\frac{\partial y(\widetilde{\alpha})}{\partial \nu_{\widetilde{\alpha}}} \neq 0(\text{ sinon } y(\widetilde{\alpha}) = 0 \text{ dans } Q_{\widetilde{\alpha}}.\ )$$

Donc :

$$\sigma_j = 0,\ j = 0, \infty$$

et donc

$\overline{Im(B)} = l^2(I\!R)$ C'est à dire :

$$\forall \rho > 0, \forall z \in l^2(\mathbb{R}), \exists u_i(\widetilde{\alpha}) \in L^2(\mathcal{O})\,; \|I\!B u_i(\widetilde{\alpha}) - z\|_{l^2(I\!R)} \leq \rho \tag{3.8}$$

Pour construire $u_i(\widetilde{\alpha})$ comme fonction de la norme minimale.

Soit :

$$u_{ad} = \left\{ u \in L^2(\mathbb{D}) \text{ telle que } \|\mathbb{B}u - z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho, z \in l^2(\mathbb{R}) \right\}$$

D'après (3.8) u_{ad} est un ensemble admissible (non vide, convexe et fermé) dans $L^2(\mathbb{D})$. Ainsi il existe $u_i(\widetilde{\alpha})$ unique satisfaisant (3.8) et solution du problème de minimisation suivant :

$$\min_{u \in u_{ad}} \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(\mathbb{D})^2} \tag{3.9}$$

Soit F et G deux fonctions définies par

$$F(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{D})} \text{ et } G(\mu) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|\mu - z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut écrire la formule (3.9) sous la forme :

$$\min_{u \in L^2(\mathbb{D})} F(u) + G(\mathbb{B}u)$$

En appliquant le théorème de dualité de Fenchel-Rockafellar on obtient :

$$u_i(\widetilde{\alpha}) = \mathbb{B}^* \sigma^* \tag{3.10}$$

Où σ^* est la solution du problème dual de minimisation suivant :

$$\min_{\sigma \in l^2(\mathbb{R})} F^*(\mathbb{B}^* \sigma) + G^*(-\sigma) \tag{3.11}$$

Avec F^* et G^* étant les conjugues de Fenchel de F et G.

$F^* = F$ et G^* définie par :

$$\begin{aligned} G^*(\sigma) &= \sup_{\mu \in l^2(\mathbb{R})} (\mu, \sigma) - G(\mu) \\ &= \sup_{\mu \in \overline{B}(0,\rho)} (z + \mu, \sigma)_{l^2(\mathbb{R})} \\ &= (z, \sigma)_{l^2(\mathbb{R})} + \rho \|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Où $\overline{B(0,\rho)}$ boule fermé du centre 0 et du rayon ρ.

Alors la formule (3.10) devient

$$\min_{\sigma\in l^2(\mathbb{R})} J(\sigma) = F(\Phi) + \rho\,\|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})} - (z,\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} \tag{3.12}$$

Où Φ est la solution de (3.7).

Lemme 3.2.1 $\sigma^* = 0$ *est la solution de (3.12) si et seulement si* $\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho$.

Démonstration

Puisque $\sigma^* = 0$**, alors d'après (3.10) on a** $u_i(\widetilde{\alpha}) = 0$ **et**

$$\mathbb{B}u_i(\widetilde{\alpha}) - z = -z$$

Donc

$$\|\mathbb{B}u_i(\widetilde{\alpha}) - z\|_{l^2(\mathbb{R})} = \|z\|_{l^2(\mathbb{R})}$$

D'après (3.8) on a :

$$\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho$$

Réciproquement, si $\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} \leq \rho$ **donc**

$$u_i(\widetilde{\alpha}) = 0$$

Et par concéquence :

$u_i(\widetilde{\alpha}) = 0$ **est solution de (3.9). Puisque** $\mathbb{B}^*$ **est injective l'équation (3.10) implique**$\sigma^* = 0$.

Dans le cas où $\sigma^* \neq 0$**, alors**

$$\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} > \rho.$$

Maintenant on va analyser la dérivée de J **par rapport** σ

Soient $\delta\sigma \in l^2(\mathbb{R})$ **et** $\sigma \neq 0$**, on a :**

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial J}{\partial \sigma}, \delta\sigma\right)_{l^2(\mathbb{R})} &= (\mathbb{B}^*\sigma, \mathbb{B}^*\delta\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} + \rho\left(\frac{\sigma}{\|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})}}, \delta\sigma\right) - (z, \delta\sigma)_{l^2(\mathbb{R})} \\ &= \left(\mathcal{B}\mathcal{B}^*\sigma + \rho\frac{\sigma}{\|\sigma\|_{l^2(\mathbb{R})}} - z, \delta\sigma\right)_{l^2(\mathbb{R})}\end{aligned}$$

Alors en particulier pour $\sigma = \sigma^*$on a :

$$[\mathcal{B}\mathcal{B}^*\sigma^* + \rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} - z = 0]$$

Alors :

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^*\sigma^* - z = -\rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} \tag{3.13}$$

Puisque $u_i(\widetilde{\alpha}) = \mathbb{B}^*\sigma^*$ alors on a :

$$\mathbb{B}u_i(\widetilde{\alpha}) - z = -\rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}$$

Donc :

$$\|\mathbb{B}u_i(\widetilde{\alpha}) - z\| = \rho$$

On choisis $(z)_j = \delta_{ij}$ et :

$$\rho = \frac{\varepsilon}{i} \text{ ; } \textbf{telle que } \varepsilon > 0 \textbf{ suffisamment petits}$$

D'après (3.13) :

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^*\sigma^* - z = -\rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}$$

Puisque $\|z\|_{l^2(\mathbb{R})} > \rho$ alors on a :

$$\mathcal{B}\mathcal{B}^*\sigma^* = z - \rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} \Leftrightarrow \mathbb{B}u_i(\widetilde{\alpha}) = z - \rho\frac{\sigma^*}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}}$$

Donc :

$$\left(\mathbb{B}u_i\left(\widetilde{\alpha}\right)\right)_j = (z)_j - \rho\frac{\left(\sigma^*\right)_j}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} = \delta_{ij} - \frac{\varepsilon}{i}\frac{\left(\sigma^*\right)_j}{\|\sigma^*\|_{l^2(\mathbb{R})}} \tag{3.14}$$

Et combinant (3.10) par (3.6) on obtient :

$$\left(\mathbb{B}u_i\left(\widetilde{\alpha}\right)\right)_j = \left(D_\alpha\mathcal{S}\left(\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}\right)\right)_{ij} = \delta_{ij} - \frac{\varepsilon}{i}\frac{\left(\sigma^*\right)_j}{\|\sigma^*\|}$$

Alors :

$$D_\alpha\mathcal{S}\left(\widetilde{\alpha},\widetilde{\alpha}\right) = Id + M; \forall\widetilde{\alpha} \in l^2\left(\mathbb{R}\right).$$

Donc on a la démonstration de l'existence et l'unicité d'une famille des fonctions $u_i\left(\widetilde{\alpha}\right)$ solution permettant de construire la sentinelle.

Pour $\widetilde{\alpha}$ fixé, $\mathcal{S}_{\widetilde{\alpha}}\left(\alpha\right) = \mathcal{S}\left(\widetilde{\alpha},\alpha\right)$ est une sentinelle au sens J.L.Lions (voir [?]). En effet

$$\mathcal{S}_{\widetilde{\alpha}}\left(\alpha\right) = \mathcal{S}\left(\widetilde{\alpha},\alpha\right) \simeq \mathcal{S}\left(\widetilde{\alpha},0\right) + \alpha D_\alpha\mathcal{S}\left(\widetilde{\alpha},0\right)$$

Théorème 3.2.1 ***La suite*** $\left(\alpha^k\right)$

$$\left|\begin{array}{l}\alpha^0 \in l^2\left(\mathbb{R}\right)\\ \alpha^{k+1} = \alpha^k + \mathbb{S}\left(\alpha^k,\alpha\right) - \mathbb{S}\left(\alpha^k,\alpha^k\right)\end{array}\right. \tag{3.15}$$

Converge vers α ***dans*** $l^2\left(\mathbb{R}\right)$.

Proof

Le schéma numérique (3.15) peut être regardé comme méthode pour résoudre un problème de point fixe

$$\left|\begin{array}{l}\alpha^0 \in l^2\left(\mathbb{R}\right)\\ \alpha^{k+1} = \alpha^k + \mathcal{S}\left(\alpha^k,\alpha\right) - \mathcal{S}\left(\alpha^k,\alpha^k\right)\end{array}\right.$$

On pose :

$$h\left(\alpha^k\right) = \alpha^k + \mathcal{S}\left(\alpha^k,\alpha\right) - \mathcal{S}\left(\alpha^k,\alpha^k\right)$$

Alors : $\alpha^{k+1} = h\left(\alpha^k\right)$

Où h **est un opérateur de** $l^2(\mathbb{R})$ **à lui même et défini par les formules précédentes.**

On va calculer $h'(\mu)$ **pour** $\mu \in l^2(\mathbb{R})$; **on a :**

$$[h(\mu) = \mu + \mathcal{S}(\mu, \alpha) - \mathcal{S}(\mu, \mu)]$$

Alors $h'(\mu) = Id + D_\alpha \mathcal{S}(\mu, \alpha) - 2D_\alpha \mathcal{S}(\mu, \mu)$

Alors en particulier pour $\mu = \alpha$ **on a :**

$$h'(\alpha) = Id + D_\alpha \mathcal{S}(\alpha, \alpha) - 2D_\alpha \mathcal{S}(\alpha, \alpha)$$

Donc $h'(\alpha) = Id - D_\alpha \mathcal{S}(\alpha, \alpha)$

Donc $D_\alpha \mathcal{S}(\alpha, \alpha) = Id - h'(\alpha)$

Alors d'après (4) on a $Id + M = Id - h'(\alpha)$

Alors $h'(\alpha) = -M$

Où

$$[M \in \left(l^2(\mathbb{R})\right) \quad \textbf{telle que} \ \ \|(M_i)\| = \frac{\varepsilon}{i}]$$

Maintenant calculons la norme de Hilbert-Schmidt de $h'(\alpha)$

$$\begin{aligned} \|h'(\alpha)\|_{HS}^2 &= \sum_j \sum_i (h'(\alpha))_{ij}^2 = \sum_i \sum_j (h'(\alpha))_{ij}^2 \\ &= \sum_i \|M_i\|_{l^2(\mathbb{R})}^2 = \epsilon^2 \sum_i \frac{1}{i^2} \end{aligned} \tag{3.16}$$

La valeur de la série (3.16) peut être placée en choisissant une valeur appropriée pour ε.

Notamment que nous pouvons prendre à ε **tels que** $\|h'(\alpha)\|_{HS} < 1$

Alors le processus (3.15) d'itérations est localement convergent dans $l^2(\mathbb{R})$.

C'est-à-dire la suite $\left(\alpha^k\right)$ **convergent localement vers** α. **que ceci donnera une approximation de la forme de** Γ_α.

3.3 Conclusion

3.3.1 Conclusion : Français

Dans ce travail nous avons appliqué les techniques de la méthode de sentinelle introduite par J. L. Lions [8] et A. Ayadi [1] et [2] pour identifier une partie inconnue de la frontière d'un domaine. Cette technique a permis de construire un processus itératif convergent de déformation de du domaine Ω_0 et de sa frontière Γ_0. La partie de la frontière inconnue a été identifiée par ce processus à partir d'une observation placée sur la partie connue de la fronitère.

3.3.2 Conclusion : Anglais

In this work we applied the techniques of sentinel method introduced by J. L. Lions [8] and A. Ayadi [1] and [2] to identify an unknown part of the boundary of a domain. This technique allowed the construction of a convergent iterative process of deformation of the domain ω_0 and its boundary γ_0. The unknown part of the border was identified by this process from an observation placed on the known part of the boundary.

3.3.3 Conclusion : Arabe

في هذا العمل قمنا بتطبيق تقنيات طريقة الحارس الذي عرضه ج. ل. ليونس [8] وع. عيادي [1] و [2]
للتعرف على جزء غير معروف من حدود المنطقة.
سمح هذا الأسلوب في بناء متتالية متقاربة لتشوهات المنطقة وحدودها .
تم التعرف على الجزء غير المعروف من هذا الاخير عبر ملاحظة الجزء المعروف منه.

Bibliographie

[1] A.AYADI,M.DJEBARNI, *Pollution terms estimaion in parabolic system wih incomplete data*, Far east Math.Sci. (FJMS), Publishing House 2005.

[2] A.AYADI, A.BERAHAIL, *Système parabôlique F- controlable et les actionneurs frontières* , Tech. AN22, Déc 2004pp13-16 univ Mentouri Constantine.

[3] A. BOUTOULOUT, *Contrôlabilité régionale, Cible frontière et contrôlabilité du gradient dans les Systèmes distribues.* Thèse de doctorat L' université Moulay Ismail 2000.

[4] E.H.ZERRIK, *Analyse régionale des systèmes distribues* . Thèse Univ. Mohammed V.Maroc.1993.

[5] JERZY KLAMKA, *Controlability of dynamical system*, Kluwer Academic Publishers 1990.

[6] J.L.LIONS, *Contrôlabilité exacte, stabilisation et perturbations des systèmes distribués*, Masson.Vol.1.1988.

[7] S.BARNETT,R.G.CAMERON, *Introduction to mathematical conrol Theory*, Second edition calendon press, OXFORD, 1984.

[8] J.L.LIONS, *Problèmes optimal des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod authier,Villars, Paris1968.

[9] A.PAZY, *Smigroups of linear operators and applications to partial differential equation*, Springer, Applied Mathematical Sciences,1983.

[10] **F.A.KHODJA,A.BENABDALLAH** ***Une inroduction à la théorie du contrôle*****, Univ de France,13453 Marseille Cedex 13 ;2005.**

[11] **M.JAZAR,** ***Problèmes d'évolutions linéaires*****, Univ. Libanaise 2001.**

[12] **L.DAN LEMLE,** ***La formule de lie trotter pour les semi-groupes fortement continus*****, Univ Claude Bernard Lyon 1, 2001.**

[13] **S.BENHADID,** ***Observabilite regionale des systemes hyperboliques approches e simulations.*** **Thèse de doctorat en sciences Univ Mentouri de Constantine2008 .**

[14] **A.EL JAI,A.J.PRITCHARD,** ***Cateurs et aconneurs dans l'analyse des systèmes disribués*****, Masson 1986.**

[15] **K.JOCHEN ENGEL, R.NAGEL,** ***One - parameer Semi-groupe for linear Evolution Equaion*** **, Springer,Mathematics Subjec Calassificaion 1991.**

[16] **A.EL JAI,** ***Éléments d'analyse et de contrôle des système*****, 2004.**