وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي التبسي– تبسة –

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

ميدان التكوين: علوم اقتصادية تسيير وعلوم تجارية

قسم التعليم الأساسي

محاضرات في الإحصاء 2

أمثلة وتمارين محلولة

المستوى: سنة أولى ليسانس

د. عبد الحليم الحمزة

السنة الجامعية: **2023/2022**

بسم الله الرحمن الرحيم

الفهرس

مقدمة

إن علم الإحصاء يعد أحد الأساليب العلمية الشائعة الاستخدام الذي يستعمل كوسيلة فعالة لتحليل المشكلات ومعالجتها في الحياة العملية بشكل موضوعي، ويعد أيضا أداة لخدمة متخذي القرار والعلماء في مختلف مجالات المعرفة عن طريق تزويدهم بالمؤشرات التحليلية التي تساعدهم على اتخاذ القرارات الرشيدة بشأن المشكلات قيد الدراسة.

وعلم الإحصاء كبقية العلوم الأخرى قد شهد تطورا سريعا خلال القرنين التاسع عشر والعشرين، مقترنا بتطور نظرية الاحتمالات، فالعالم الانجليزي (Francis Galton) كان أول من كتب في موضوع الانحدار، وكان رائدا في مجال استخدام هذا الموضوع في الحقول البيولوجية، في حين كان العالم الانجليزي (Karl Pearson) أحد عباقرة علم الإحصاء الذي اكتشف نظرية تحليل الارتباط، أما العالم الإحصائي (Gosset) فقد استطاع صياغة وبناء اختبار (t) الخاص بالعينات الصغيرة ($n < 30$) ، في حين كان العالم الإحصائي (Fisher) يعد رائدا في دراسة موضوع اختبار الفروق بين متوسطات المجموعات باستخدام أسلوب تحليل التباين.

وبهدف إلمام الطلبة بمقياس الإحصاء 2 وتسهيل فهمهم له، تمت صياغة مطبوعة محاضرات في الإحصاء 2 بغرض تخفيف الصعوبات التي يواجهونها وفهم أفضل لهذا المقياس، وهذه المطبوعة هي عبارة عن سلسلة من المحاضرات في الإحصاء الوصفي موجهة لطلبة السنة الأولى في العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير نظام (LMD) نقدم من خلالها دروس مبسطة ومختصرة وسهلة الفهم مدعمة بالعديد من الأمثلة والتمارين التي تعرض بحلول نموذجية.

سعينا إلى تقديم ما هو مقرر دراسته في مقياس الإحصاء 2 لطلبة العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير، لذلك قمنا بتقسيم محتوى هذه المطبوعة إلى ثلاثة فصول، يتضمن الفصل الأول مدخل للاحتمالات، ويتناول الفصل الثاني مفاهيم حول المتغير العشوائي، أما الفصل الثالث تضمن مختلف أنواع التوزيعات الاحتمالية.

الفصل الأول

مدخل للاحتمالات

تمهيد:

لقد درست طرق ترتيب وتلخيص البيانات وعرضها في موضوع الإحصاء، ولكن الهدف الرئيسي لأغلب الأبحاث هو تجاوز عملية التلخيص هذه ووضع استنتاجات للمجتمع من العينة المأخوذة، ولذا فان نظرية الاحتمالات تزودنا بالأساس المنطقي لجعل الإحصاء الاستدلالي يستخدم بيانات العينة في دراسة المجتمع.

إن فكرة الحظ أو عدم التأكد نلاحظها يوميا في الحياة فمثلا من غير المحتمل أو غير المتوقع بان المطر ينزل غدا أو فريق كرة قدم أول يملك قليلا من الحظ للفوز على فريق آخر، في مثل هذه الحالات فان الفرد يعبر بطريقة غير دقيقة عن موقفه حول احتمال أن الحدث سيحصل بشكل أكيد أو لا ،كذلك عندما نقول إن احتمال سحب ورقة من نوع القلب من مجموعة واحدة من ورق اللعب عددها 52 ورقة هو $\frac{1}{4}$، فان ما نعنيه في الحقيقة هو أننا إذا ما سحبنا ورقة واحدة من مجموعة ورق اللعب فإننا نتوقع أن نحصل على ورقة من نوع القلب في $\frac{1}{4}$ مرات السحب وذلك لان عدد أوراق القلب في المجموعة هو 13، إذن فان الاحتمال هو $\frac{1}{4} = \frac{13}{52}$

شهد القرنان السادس عشر والسابع عشر اهتماما بارزا بهذا النوع من الدراسات والبحوث حيث كانت الظروف مواتية لذلك في تلك الفترة، إذ أن العاب المقامرة بورق اللعب ورمي حجر النرد كانت منتشرة في قصور المترفين في أوربا خاصة في فرنسا، وقد شعر المقامرون بحاجتهم إلى أسس علمية تساعدهم على حساب فرصهم في الكسب أو الخسارة، فلجؤوا إلى علماء الرياضيات أمثال كل من العلماء (PASCAL) و (FERMAT) و(BERNOULLI)، وغيرهم وهنا كانت نقطة البدء في إجراء دراسات جدية في علم الاحتمالات، ولذلك نعتبر الاحتمالات التي تدخل فيها فرصة الحدوث قيما كمية وسنتعامل معها على هذا الأساس.

قبل الخوض في موضوع نظرية الاحتمالات (Probability Theory)، لا بد من تسليط الضوء على بعض المفاهيم الأساسية التي لها علاقة وثيقة بنظرية الاحتمال، نذكر منها ما يأتي:

1- مدخل الى نظرية المجموعات

هو فرع من علم المنطق الرياضي تهتم تلك النظرية بدراسة المجموعات والتي هي تجميع لكائنات رياضية مجردة والعمليات المطبقة عليها، وتشكل إحدى أهم ركائز الرياضيات الحديثة.

1-1- العلاقات في نظرية المجموعات

تتمثل تلك العلاقات فيما يأتي:[1]

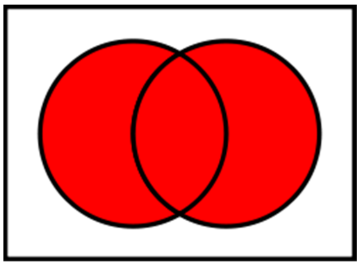
– **علاقة الانتماء:** أحد أهم المصطلحات الاساسية في نظرية المجموعة هي الانتماء، نقول أن الشيء α تابع (ينتمي) للمجموعة A ونرمز لذلك ϵ إذا كان أحد أعضاء المجموعة A وهذا المصطلح هو علاقة ثنائية وقد تكون بين المجموعات كذلك.

– **علاقة الجزئية (الاحتواء):** علاقة ثنائية أخرى بين المجموعات هي علاقة المجموعة الجزئية وهي مشتقة من علاقة الانتماء نقول أن A هي مجموعة جزئية للمجموعة B إذا كل عضو $\alpha \in A$ تابع أيضا للمجموعة B أي $\alpha \in B$

نرمز لهذه العلاقة بالشكل التالي$A \subset B$ ونقول أيضا A محتواة فيB .

– **علاقة الاتحاد:** عملية اتحاد مجموعتين A و B يرمز لها $A \cup B$ ونتيجتها هي مجموعة جديدة تحوي العناصر التي تنتمي لأي واحدة من المجموعتين A أو B أي أن عنصر α ينتمي إلى $A \cup B$ إذا وفقط إذا α ينتمي إلى A أو α ينتمي إلىB .

شكل (01): علاقة اتحاد مجموعتين بيانيا



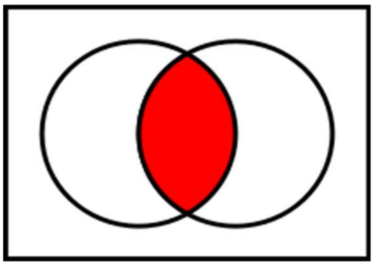
المصدر: من اعداد الباحث.

دائرة واحدة ترمز للمجموعة A ودائرة ثانية ترمز للمجموعة B والمساحة الحمراء ترمز إلى اتحاد المجموعتين

– **علاقة التقاطع:** عملية تقاطع مجموعتين A و B يرمز لها $A \cap B$ ونتيجتها هي مجموعة جديدة تحوي العناصر المشتركة بين A وB أي أن عنصر α ينتمي إلى $A \cap B$ إذا وفقط إذا α ينتمي إلى A وأيضا α ينتمي إلى B

[1]. طرابية أحمد محمد، **مبادئ نظرية الاحتمال**، مكتبة الرشيد، الرياض، 2006، ص 5.

شكل (02): علاقة تقاطع مجموعتين بيانيا



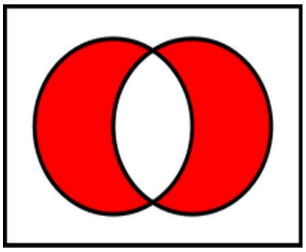
المصدر: من اعداد الباحث.

دائرة واحدة ترمز للمجموعة A ودائرة ثانية ترمز للمجموعة B والمساحة الحمراء ترمز إلى تقاطع المجموعتين $A \cap B$

- **علاقة الفرق:** عملية الفرق بين مجموعتين A و B يرمز لها $A - B$ ونتيجتها هي مجموعة جديدة تحوي العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B أي أن عنصر α ينتمي إلى $A - B$ إذا وفقط إذا α ينتمي إلى A وأيضا α لا ينتمي إلىB

- **علاقة الفرق المتماثل (التناظري):** عملية الفرق المتماثل او التناظري بين مجموعتين A و B يرمز لها $A \Delta B$ ونتيجتها هي مجموعة جديدة تحوي العناصر التي تنتمي إلى مجموعة واحدة فقط أي أن عنصر α ينتمي إلى $A \Delta B$ إذا وفقط إذا α ينتمي إلى A وأيضا α لا ينتمي إلى B أو α ينتمي إلى B وأيضا α لا ينتمي إلى A

شكل (03): علاقة الفرق التناظري بين مجموعتين بيانيا



المصدر: من اعداد الباحث.

دائرة واحدة ترمز للمجموعة A ودائرة ثانية ترمز للمجموعة B والمساحة الحمراء ترمز إلى الفرق المتماثل بين المجموعتين $A \Delta B$

1-2- قوانين أساسية في جبر المجموعات

تجتمع عمليتا الاتحاد والتقاطع على المجموعات مع بعض لتؤلف ما يعرف بجبر المجموعات.

بفرض ان A و B و C ثلاث مجموعات ما والمجموعة M هي المجموعة الشاملة نجد ما يلي:[1]

- قانونا اللانمو:

$$A \cup A = A$$
$$A \cap A = A$$

- القانونان التجميعيان :

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- القانونان التبديليان :

$$A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap B = B \cap A$$

- القانونان التوزيعيان :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

- قوانين المحايد والماص :

$$A \cup \emptyset = A$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset$$
$$A \cup M = M$$
$$A \cap M = A$$

- قوانين المتممة:

$$A \cup \overline{A} = M$$
$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$
$$\overline{M} = \emptyset$$
$$\overline{\emptyset} = M$$

- قانون الارتداد :

$$\overline{\overline{A}} = A$$

- قانونا دي مورغان :

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

[1]. طرابية أحمد محمد، مرجع سابق، ص 7.

1-3- أنواع المجموعات

من المهم عند التعامل مع المجموعات أن نقارن مجموعة بمجموعة أخرى.

وقد أطلق الرياضيون تسميات لأنواع عدة من المجموعات، وهذه التسميات تتعلق بعدد عناصر المجموعة وبطبيعة علاقة المجموعات فيما بينها.

وهناك عشر أنواع رئيسية من المجموعات هي[1]:

- **المجموعات المنتهية:** هي التي تحتوي على عدد محدود من العناصر ويمكن تعريفها بأنها المجموعة التي يمكن تحديد عناصرها، أو التي تحتوي على عدد منتهَ من العناصر.

ولوصف المجموعة المنتهية قليلة العناصر، فإننا نكتب عناصر المجموعة كلها.

- **المجموعات غير المنتهية:** هي التي يكون عدد عناصرها غير محدود. وتعرف بأنها المجموعة التي لا يمكن تحديد عناصرها أوهي التي تحتوي على عدد غير محدود أو غير منته من العناصر، فمجموعة الأعداد التي نستخدمها في العد مثلا تشكِّل مجموعة غير منتهية، ومن المستحيل كتابة عناصر المجموعة غير المنتهية كلها، ولوصف عناصر مجموعة كهذه نكتب العناصر القليلة الأولى، ثم نضع ثلاث نقاط لتوضيح أن عدد العناصر غير محدود.

- **المجموعات الخالية:** هي التي لا تحتوي على أي عناصر، فمثلا إذا كانت المجموعات التالية تمثِل قائمة التلاميذ ذوي العلامات الممتازة في مدرسة معينة، حيث هناك في القسم الثاني أمير وأحمد، وفي القسم الثالث علي، وفي القسم الرابع لم يحصل أحد على علامات ممتازة. نلاحظ أن مجموعة القسم الثاني تحتوي على عنصرين، ومجموعة القسم الثالث تحتوي على عنصر واحد فقط، بينما لا تحتوي مجموعة القسم الرابع على أي عنصر. ولذلك فإن مجموعة القسم الرابع مجموعة خالية. ولكي نوضِح أن مجموعة ما خالية، فإننا نترك فراغا بين قوسيها.

- **المجموعات وحيدة العنصر:** هي التي تحوي عنصرا واحدا فقط. فمجموعة القسم الثالث في المثال السابق مجموعة وحيدة العنصر.

- **المجموعات المتكافئة:** هي المجموعات التي لها نفس العدد من العناصر، بمعنى أن كل مجموعتين تكونان متكافئتين إذا أمكن مقابلة عناصرهما عنصرا لعنصر. مثلا إذا كان عدد الكراسي في أحد الفصول مساويا لعدد الطلاب، فإن مجموعة الكراسي مكافئة لمجموعة الطلاب.

---

[1]. طرابية أحمد محمد، مرجع سابق، ص 10.

زوجان من المجموعات تسمى مجموعات مكافئة إذا كان لديهم نفس عدد العناصر، ولا يهم ماهية عناصر المجموعات، فقد تكون حروفا أو أرقاما أو رموزا أو أي شيء آخر.

- **المجموعات المتساوية:** هي المجموعات لها نفس العناصر.

- **المجموعات المتداخلة:** تسمى مجموعتان لها أعضاء مشتركة فيما بينها، والتي تشتركان في عنصر واحد على الأقل بالمجموعات المتداخلة.

- **المجموعات المنفصلة:** يطلق على مجموعتين منفصلتين إذا لم يكن بينهما عناصر مشتركة.

- **المجموعات الشاملة:** هي المجموعات التي تحتوي على جميع العناصر تحت الاختبار في وقت ومسألة معينين.

- **المجموعات الجزئية:** هي المجموعات المتضمَّنَة في مجموعات أخرى، فمجموعة أفراد المعلمون الذين يعملون أيام السبت، على سبيل المثال، مجموعة جزئية من مجموعة جميع أفراد المعلمون.

2- التحليل التوفيقي (نظرية العد): إن التحليل التوفيقي هو العلم الذي يسمح لنا بتحديد عدد النتائج الممكنة لتجربة معينة دون الحاجة إلى سرد عناصرها.

2-1- المبدأ الأساسي للعد: يعتبر المبدأ الأساسي للعد أمرا بالغ الأهمية في عناصر نظرية الاحتمالات التي سوف نتطرق إليها في هذه المحاور، والذي ينص على أنه إذا كانت النتائج الممكنة لتجربة ما هي n_1 والنتائج الممكنة لتجربة أخرى هي n_2 فان النتائج الممكنة للتجربتين معا هي: [1]

$$n = n_1 \times n_2$$

2-1-1- قاعدة الضرب: إذا كانت هناك عملية أو تجربة مكونة من عدد مقداره r من المراحل بحيث: [2]

- المرحلة رقم 1 تتم بعدد قدره n_1 من الطرق المختلفة.

- المرحلة رقم 2 تتم بعدد قدره n_2 من الطرق المختلفة.

- و هكذا إلى المرحلة الأخيرة رقم r تتم بعدد قدره n_r من الطرق المختلفة.

فان التجربة ككل يمكن إجراؤها بعدد من الطرق المختلفة وقدره

$$n = n_1 \times n_2 \ldots\ldots \times n_r$$

---

[1]. رأفت رياض رزق الله، **مبادئ الاحتمالات**، المكتبة الأكاديمية، القاهرة، 2003، ص 11.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 12.

<u>مثال (01):</u> إذا كانت لدينا تجربة متمثلة في رمي قطعة نقود وحجرة نرد في آن واحد. ما هي عدد الحالات الممكنة ؟

<u>الحل:</u> لدينا قطعة النقود يمكن أن تقع على أحد الوجهين (P , F)

بينما حجرة النرد يمكن أن تقع على أحد الوجوه الستة (1، 2، 3، 4، 5، 6)

عدد الحالات الممكنة لهذه التجربة هي:

$$n = n_1 \times n_2 = 2 \times 6 = 12$$

ويمكن حل المثال (01) من خلال الشجرة البيانية التي تعتبر كطريقة تستخدم لحساب عدد الحالات الممكنة للتجارب عندما يكون عدد النتائج منته أو قليل.

2-1-2- قاعدة الجمع: إذا كان هناك i من التجارب بحيث لا تحدث أي اثنتين منها في نفس الوقت.

و كان عدد الطرق التي تحدث فيها التجربة 1 هو n_1

و عدد الطرق التي تحدث فيها التجربة 2 هو n_2

وهكذا إلى غاية التجربة i فعدد الطرق التي تحدث فيها التجربة i هو n_i

فان عدد الطرق التي تحدث فيها واحدة من هذه التجارب (التجربة الأولى أو الثانية أو...إلى الأخيرة) هو:[1]

$$n = n_1 + n_2 \ldots\ldots + n_i$$

<u>مثال (02):</u> ما هو عدد الحالات الممكنة لتشكيل خانة تحمل إما حرفا أبجديا أو رقما.

<u>الحل:</u> عدد الطرق الممكنة هو:

$$n = n_1 + n_2 = 28 + 10 = 38$$

2-2- التبديلات (Permutations): هناك أنواع مختلفة من التبديلات كما يلي:[2]

2-2-1- التبديلة بتكرار (القائمة): هي كل مجموعة جزئية ذات k عنصر يتم اختيارها من مجموعة كلية ذات n عنصر مختلف مع إمكانية تكرار أي عنصر منها، حيث ترتيب العناصر مهم، يتم اختيارها بعدد طرق يساوي:

---

[1]. رأفت رياض رزق الله، مرجع سابق، ص 13.

[2]. مبارك أسير ديب، **مبادئ في الاحتمالات والاحصاء**، منشورات جامعة تشرين، سوريا، 2005، ص 15.

$$n^k = \underbrace{n \times n \ldots\ldots \times n}_{\boxed{k \text{ مرة}}}$$

مثال (03): تنوي إحدى شركات الاتصال إنشاء خطوط هاتفية جديدة في إحدى الدول، حيث يتكون الخط_الهاتفي من 7 أرقام.

- ما هي عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها من الناحية النظرية ؟

الحل: في هذه الحالة عدد الأرقام هو عشرة: $n = 10$

عدد أرقام الخطوط الهاتفية هو: $k = 7$

عدد الخطوط الهاتفية الممكن تشكيلها هي: $n^k = 10^7$

2-2-2- التبديلة بدون تكرار: هي كل مجموعة جزئية ذات n عنصر يتم اختيارها من مجموعة كلية ذات n عنصر مختلف وبدون تكرار أي عنصر منها، حيث ترتيب العناصر مهم، وتكون على صف واحد، يتم اختيارها بعدد طرق يساوي:

$$P_n = n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots . \times 2 \times 1$$

مثال(04): بكم طريقة يمكن تبديل 5 طلبة فيما بينهم على صف واحد.

الحل: $P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

2-2-3- التبديلات مع مجموعات متشابهة: لتكن مجموعة مكونة من n عنصر حيث n_1 منها متشابهة، n_2 منها متشابهة، إلى غاية n_k منها متشابهة.

عدد تباديل هذه العناصر هو: $P^{n}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times \ldots \times n_k!}$

مثال(05): إذا كان لديك 3 مصابيح حمراء، و4 زرقاء، و3 صفراء.

ما هي عدد الطرق الممكنة لترتيب الأنواع الثلاثة من المصابيح في نشرة ضوئية ؟

الحل: عدد تباديل هذه العناصر هو:

$$P^{10}_{3,4,3} = \frac{10!}{3! \times 4! \times 3!} = 4200$$

2-2-4- التبديلة الدائرية: هي كل مجموعة جزئية ذات n عنصر يتم اختيارها من مجموعة كلية ذات n عنصر مختلف وبدون تكرار أي عنصر منها، حيث ترتيب العناصر مهم، وتكون على صف دائري، ليس لها بداية ثابتة أو مرجعية، يتم اختيارها بعدد طرق يساوي:

$$P_n = (n-1)!$$

مثال (06): بكم طريقة يمكن لخمسة أشخاص الجلوس حول طاولة مستديرة ؟

الحل: يمكن الجلوس بعدة طرق كما يلي:

$$P_5 = (5-1)! = 4! = 24$$

2-3- الترتيبات (Arrangements): هي كل مجموعة جزئية ذات k عنصر يتم اختيارها من مجموعة كلية ذات n عنصر مختلف وبدون تكرار أي عنصر منها، حيث ترتيب العناصر مهم، وتكون على صف واحد، يتم اختيارها بعدد طرق يساوي:[1]

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال (07): يريد 20 ساكن في أحد الأحياء تشكيل لجنة مكونة من رئيس الحي ونائبه والسكرتير.

ما هو عدد اللجان الممكن تشكيلها ؟

الحل: في هذه الحالة الترتيب مهم فأي شخص يمكن أن يكون رئيسا أو نائب أو سكرتير، والتكرار غير موجود لأن الشخص لا يمكنه أن يشغل منصبين وبذلك نكون أمام ترتيبة بدون تكرار.

$$A_3^{20} = \frac{20!}{(20-3)!} = 6840$$

2-4- التوفيقات (Combinaisons): هي كل مجموعة جزئية ذات k عنصر يتم اختيارها من مجموعة كلية ذات n عنصر مختلف وبدون تكرار أي عنصر منها، حيث ترتيب العناصر غير مهم، يتم اختيارها بعدد طرق يساوي:[2]

$$C_k^n = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}$$

مثال (08): ترغب الجامعة في انتقاء 10 طلاب في أحد التخصصات من بين 100 طالب للقيام بدورة تدريبية في إحدى المؤسسات.

ما هي الطرق الممكنة لتشكيل 10 طلاب ؟

الحل: نلاحظ هنا أن ترتيب الطلبة المسحوبين لا يهم ولا يؤثر في المجموعة لأن الهدف هو زيارة المؤسسة والقيام بدورة تدريبية وبالتالي نحن أمام توفيقة، وعدد المجموعات الممكن تشكيلها واختيارها هي:

---

[1]. جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها**، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، 2010، ص 14.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 15.

$$C_{10}^{100} = \frac{100!}{10! \times (100-10)!} = 17310309456440$$

3- مفاهيم حول التجربة العشوائية

3-1- تعريف التجربة العشوائية: هي التجربة التي يمكننا معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ولكننا لا نستطيع تحديد أيا من هذه النتائج سيتحقق فعلا قبل إجراء التجربة، مثل إلقاء قطع نقد معدنية، إلقاء حجر نرد منتظم متماثل، التصويب على هدف.[1]

3-2- تعريف الفضاء العيني (فضاء تجربة عشوائية): هو جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، ويرمز له بالرمز (Ω).[2]

<u>مثال (09)</u>: في تجربة رمي حجر نرد وملاحظة العدد الظاهر، اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة.

<u>الحل</u>: فضاء التجربة حسب ما هو موضح في المجموعة (Ω)

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

3-3- تعريف الحدث (الحادث): هو عبارة عن مجموعة جزئية من الفضاء العيني لتجربة عشوائية، ويرمز للحادث برمز (E).[3]

<u>مثال (10)</u>: في تجربة رمي حجر نرد وملاحظة العدد الظاهر.

اكتب الحوادث التالية وحدد عناصرها.

E_1: حادث ظهور عدد فردي.

E_2: حادث ظهور عدد أولي.

<u>الحل:</u>

أولا تحديد فضاء التجربة حسب ما هو موضح في المجموعة (Ω)

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$E_1 = \{1,3,5\}$$
$$E_2 = \{2,3,5\}$$

---

[1]. جبار عبد مضحي، **الاحصاء والاحتمالات**، الأكاديميون للنشر والتوزيع، عمان، 2016، ص 145.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 146.

[3]. نفس المرجع السابق، ص 147.

3-4- أنواع الحوادث: هناك عدة أنواع من الحوادث هي:[1]

- **الحوادث البسيطة:** هي الحوادث التي تحوي عنصرا واحدا فقط من الفضاء العيني لتجربة عشوائية.

- **الحوادث المركب:** هي الحوادث التي تحوي أكثر من عنصر واحد من الفضاء العيني لتجربة عشوائية.

- **الحوادث المستحيلة:** هي الحوادث التي لا تحوي أي عنصر من الفضاء العيني لتجربة عشوائية، وهو المجموعة الخالية (Ø).

- **الحوادث الأكيدة:** هي الحوادث التي تحوي جميع عناصر الفضاء العيني لتجربة عشوائية.

مثال (11): ألقيت قطعة نقود متجانسة مرتين متتاليتين، ولوحظ الوجه الظاهر عليها عند استقرارها على الأرض.

فضاء التجربة حسب ما هو موضح في المجموعة (Ω)

$$\Omega = \{(H\,,H), (H\,,T), (T\,,H), (T\,,T)\}$$
$$E_1 = \{(H\,,H)\}$$
$$E_2 = \{(H\,,H), (H\,,T)\}$$

(E_1) حادث بسيط وكذلك كل الحوادث التي تحوي نتيجة واحدة.

(E_2) حادث مركب وكذلك كل الحوادث التي تحوي أكثر من نتيجة واحدة.

(Ω) حادث أكيد يقع دوما وهو فضاء التجربة.

(Ø) حادث مستحيل وهو المجموعة الخالية.

- **الحوادث الشاملة:** يطلق على الحوادث ($A_1, A_1,......., A_n$) بأنها حوادث شاملة عند إجراء تجربة عشوائية معينة، إذا كان لا بد من حدوث هذه الحوادث عند إجراء التجربة، مثال ذلك: عند رمي حجر النرد، فإن الحصول على الأوجه الستة (1،2،3،4،5،6) تعد حوادث شاملة.

- **الحوادث المتنافية:** إذا كان لدينا حادثتان (A) و (B)، فإنهما يعرفان بأنهما متنافيتين إذا استحال حدوثهما معا، مثال ذلك عند رمي قطعة نقود مرة واحدة، فإنه يستحيل ظهور الصورة (H) والكتابة (T) في آن واحد.

---

[1]. جبار عبد مضحي، **الاحصاء والاحتمالات**، مرجع سابق، ص 148.

– **الحوادث المستقلة:** إذا كان لدينا حادثتان (A) و (B)، فإنه يقال على الحادثتين بأنهما مستقلتين، إذا كان حدوث احدهما لا يؤثر على حدوث الأخرى أو عدم حدوثها، مثال ذلك عند إلقاء قطعتين من النقود، فإن ظهور الصورة للقطعة الأولى، لا يؤثر على ظهور الصورة أو عدم ظهورها على القطعة الثانية، وكذلك عند أداء الاختبار للطلبة، فإن نجاح محمد لا يؤثر على نجاح علي أو رسوبه.

3-5- العمليات على الحوادث: بما أن الحوادث هي عبارة عن مجموعات جزئية من فضاء العينة (Ω)، لذلك أصبح من الممكن التحدث عن اتحاد حادثين وتقاطعها، ومتممتها والفرق بينهما ومتممة حادثة، وكل ما يتعلق بالعمليات على المجموعات، أي أصبح بإمكاننا الربط بين الحوادث لكي نشكل حوادث جديدة باستعمال العمليات المختلفة الخاصة بالمجموعات.

بفرض أن (Ω) فضاء العينة المرتبط بتجربة ما، وبفرض أن P(Ω) مجموعة الأحداث المرتبطة بتلك التجربة، نعرف العمليات على الأحداث كما يأتي:[1]

– **التقاطع:** يعبر تقاطع الحادثين (A) و (B)، عن وقوع الاثنان في آن واحد (وقوع الحادثين معا)، ويشمل كل النتائج المشتركة بين الحادثين، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A \cap B)$

– **الاتحاد:** يعبر اتحاد الحادثين (A) و (B)، عن وقوع أحدها على الأقل، وبمعنى آخر وقوع الأول أو الثاني أو كلاهما، ويعبر عن ذلك رياضيا $(A \cup B)$

– **الفرق بين حادثتين:** إذا كان الحادثين (A) و (B)، حادثين في (Ω) فإن $(A - B)$ هي المجموعة التي عناصرها تنتمي إلى (A) ولا تنتمي إلى (B)، وعلى ذلك فإن $(A - B)$ يعني: وقوع الحادثة (A) وعدم وقوع (B).

– **الحادث المتمم (العكسي):** الحادث المتمم أو العكسي للحادث (A) هو الذي ينفي وقوعه وبمعنى آخر هو الحادث الذي يشمل كل نتائج التجربة باستثناء النتائج المكونة للحادث (A)، أو بمعنى ثالث الحادثة التي تقع إذا لم تقع (A)، ويرمز لها بالرمز $\overline{A}$

4- قياس الاحتمال: تلعب الاحتمالات دورا كبير في الحياة اليومية وفي كثير من العلوم، فهي تستخدم في قياس حادثة معينة غير مؤكدة الحدوث، فكثيرا ما نتخذ قرارات بناءا على معلومات ناقصة وتساعدنا الاحتمالات على ذلك، فمثلا: قد يهمل الطالب دراسة جزء صغير من البرنامج

[1]. جبار عبد مضحي، **الاحصاء والاحتمالات**، مرجع سابق، ص 150.

لأن احتمال أن يأتي منه سؤال في الامتحان صغير، وقد نلغي رحلة رتبنا لها منذ فترة لأن احتمال أن يكون الجو رديء كبير.

ونظرية الاحتمالات هي فرع من فروع الرياضيات التطبيقية الذي يهتم بدراسة تأثير الصدفة على الظواهر والأشياء، فإذا ألقيت قطعة نرد إلى الأعلى فإنه من المؤكد سقوطها على الأرض، ولكن لا نعلم على أي وجه سوف تسقط أو أي وجه سوف يظهر وهذا يسمى بالصدفة.

يمكن قياس الاحتمال وفقا لأحد التعريفين الآتيتين:[1]

4-1- التعريف التقليدي للاحتمال: إذا كان لدينا الحادثة (A)، وإن عدد عناصر هذه الحادثة هو n(A)، وإن n(Ω) تمثل عدد الحالات الممكنة التي لها نفس الفرصة في الظهور، فإن احتمال حدوث الحادثة (A) بمعنى نجاحها، يرمز له بالرمز P(A)، ويعطى بالصيغة الآتية:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

إن التعريف أعلاه، يصلح فقط عندما تكون نتائج التجربة العشوائية متماثلة بمعنى لها نفس الفرصة بالظهور، مثال ذلك:

جنس الإنسان (ذكر ، أنثى)، طبيعة الإنتاج (جيد ، معيب)، قطعة النقود (صورة ، كتابة)، زهرة النرد (1،2،3،4،5،6)

إذا كانت الحالات الكلية جميعها متماثلة أي لها جميعها الفرصة نفسها فإن احتمال الحدث يساوي قسمة عدد الحالات المواتية لهذا الحدث على عدد الحالات الكلية.

__مثال (12):__ إذا كان لدينا كيس بداخله 8 كرات حمراء و3 كرات بيضاء، فما احتمال أن نسحب كرة بيضاء ؟

__الحل:__

A: سحب كرة بيضاء

عدد الحالات المواتية n(A)

$$n(A) = 3$$

عدد الحالات الكلية n(Ω)

$$n(\Omega) = 11$$

---

[1]. طرابية أحمد محمد، مرجع سابق، ص 25.

احتمال سحب كرة بيضاء P(A)

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{11}$$

والمقصود بتماثل الحالات الكلية أن يكون لها جميعا الفرصة نفسها فمثلا قبل رمي قطعة نقود يشترط أن تكون القطعة سليمة ومتوازنة بمعنى أن فرصة الصورة تساوي فرصة الكتابة، وقبل رمي حجر النرد يشترط أن يكون سليم ومتوازن بمعنى أن كل وجه من الوجوه الستة لها الفرصة نفسها، وهكذا على أنه من المهم جدا التنويه على أن محاولة معرفة الاحتمال طبقا للتعريف التقليدي أو الكلاسيكي يبدو أمرا صعبا في الحياة العملية، وذلك بسبب استحالة تماثل الحالات الكلية، ولحساب احتمال أي حدث إذا كانت الحالات الكلية متماثلة نقسم عدد الحالات المواتية أو عدد مرات النجاح على عدد الحالات الكلية.

4-2- التعريف التجريبي للاحتمال: عند إجراء تجربة عشوائية مرات متتالية عددها (n)، وكان عدد مرات ظهور حادثة معينة فيها (E) هو (m)، فإن احتمال حدوث الحادثة (E)، يعطى بالصيغة الآتية:

$$P(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

ويسمى المقدار $\frac{m}{n}$ بالتكرار النسبي.

4-3- التعريف العام للاحتمال: هو قيمة رقمية لتوقعات حدوث حدث معين، وتكون هذه القيمة عبارة عن نسبة حدوث هذا الحدث، إذا تكرر نفس الموقف تحت نفس الظروف لعدد كبير من المرات.

5- خواص (بديهيات) الاحتمال: وتتمثل فيما يلي:[1]

5-1- إن قيمة الاحتمال لأي حادثة ولتكن (E)، تقع ضمن المجال [0 - 1]، أي أن:

$$0 \leq P(E) \leq 1$$

5-2- إن قيمة احتمال المجموعة الشاملة أو فضاء التجربة العشوائية (Ω) (الحادث الأكيد) يساوي الواحد الصحيح، أي أن: $P(\Omega) = 1$

5-3- إن قيمة احتمال المجموعة الخالية $(\emptyset)$ (الحادث المستحيل) يساوي الصفر، أي أن:

$$P(\emptyset) = 0$$

[1]. طرابية أحمد محمد، مرجع سابق، ص 30.

5-4- إذا كان لدينا (A) و (B) حادثين متنافيين، أي أن: $(A \cap B) = \emptyset$ فان احتمال حدوث (A) أو (B) هو: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

6- قوانين عامة في الاحتمالات: نذكر منها ما يلي: [1]

6-1- قانون جمع الاحتمالات: نميز حالتين كما يلي:

- **في حالة الحوادث غير المتنافية:** إذا كان لدينا (A) و (B) حادثين غير متنافيين، أي يمكنهما الوقوع في آن واحد، فان احتمال حدوث (A) أو (B) هو:- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

<u>**مثال (13):**</u> إذا كان احتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم هو 0,4، واحتمال أن يكون الجو عاصفا هو 0,6، واحتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم وعاصفا في نفس الوقت هو 0,2.

ما هو احتمال أن يكون الجو ملبدا بالغيوم أو عاصفا ؟

<u>**الحل:**</u> نفرض ما يلي:

A_1: الجو ملبد بالغيوم

$P(A_1) = 0{,}4$

A_2: الجو عاصف

$P(A_2) = 0{,}6$

$A_1 \cap A_2$: الجو ملبد بالغيوم وعاصف في آن واحد

$P(A_1 \cap A_2) = 0{,}2$

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}2 = 0{,}8$

- **في حالة الحوادث المتنافية:** إذا كان لدينا (A) و (B) حادثين متنافيين، أي لا يمكنهما الوقوع في آن واحد، فان احتمال حدوث (A) أو (B) هو: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

<u>**مثال (14):**</u> عند رمي عملة معدنية متجانسة في تجربة عشوائية.

ما هو احتمال ظهور الصورة (H) أو الكتابة (T) ؟

<u>**الحل:**</u> نفرض ما يلي:

A_1: ظهور الصورة

$P(A_1) = 0{,}5$

---

[1]. طرابية أحمد محمد، مرجع سابق، ص ص:33-35.

A_2: ظهور الكتابة

$P(A_2) = 0,5$

(A_1) و (A_2) حادثين متنافيين أي أن:

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0,5 + 0,5 = 1$

6-2- قانون ضرب الاحتمالات: إذا كان لدينا (A) و (B) حادثين مستقلين، فان احتمال حدوث (A) و(B) أي حدوثهما معا هو: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

__مثال (15):__ عند رمي زهرتي نرد متجانستين في تجربة عشوائية.

ما هو احتمال ظهور الرقم 5 على وجه زهرة النرد الأولى والرقم 3 على وجه زهرة النرد الثانية ؟

__الحل:__ نفرض ما يلي:

A_1: ظهور الرقم 5 على وجه زهرة النرد الأولى

$$P(A_1) = \frac{1}{6}$$

A_2: ظهور الرقم 3 على وجه زهرة النرد الثانية

$$P(A_2) = \frac{1}{6}$$

(A_1) و (A_2) حادثين مستقلين أي أن:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

7- نظريات عامة في الاحتمالات: نذكر منها ما يلي:[1]

- إن احتمال حدوث الحادثة (A) مضافا إليه احتمال حدوث مكملتها يساوي الواحد الصحيح أي أن:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

- إذا كان لدينا (A) و (B) حادثين فان: $P(\overline{A \cap B}) = P(\overline{A} \cup \overline{B})$

[1]. محمد عبد العال النعيمي، **الاحصاء التطبيقي**، دار وائل للنشر، عمان، 2008، ص 70.

8- الاحتمال الشرطي: إذا كان لدينا الحادثين (A) و (B) فان احتمال حدوث الحادث (A) إذا علمنا بحدوث الحادث (بشرط) (B) يسمى الاحتمال الشرطي ويرمز له بالرمز $P(A/B)$ ويعطى بالصيغة التالية:[1]

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\quad \text{if: } P(B)\neq 0$$

يقال عن الحادثين (A) و (B) بأنهما حادثين مستقلين إذا تحققت واحدة من العلاقات التالية:

$$P(A/B)=P(A)$$
$$P(B/A)=P(B)$$
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

<u>مثال (16)</u>: سحبت ورقتان من مجموعة أوراق اللعب من دون إعادة فما احتمال أن تكون عشرتين ؟

<u>الحل</u>: نفرض الحوادث التالية:

A: الحصول على العدد 10 في الورقة الاولى

B: الحصول على العدد 10 في الورقة الثانية

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B/A)\ =\frac{4}{52}\times\frac{3}{51}=\frac{12}{2652}=\frac{1}{221}$$

9- الاحتمال الكلي: إذا كان لدينا (n) من الحوادث المتنافية ($B_1, B_1,\ldots\ldots, B_n$) ضمن فضاء العينة (Ω) بحيث:

$$\forall_i\ , i=1,2,\ldots,n: P(B_i)\neq 0$$

فان احتمال أي حادث وليكن (A) في فضاء العينة (Ω) يكتب بالصيغة التالية:[2]

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)\times P(A/B_i)$$

<u>مثال (17)</u>: شركة تستلم مواد معينة من 3 مجهزين، وكان إنتاجها هو 5 و3 و2، وقد أشارت السجلات القديمة إلى أن نسبة المواد العاطلة من المجهزين الثلاثة هي 2 % و3 % و4 %، على التوالي.

---

1. محمد عبد العال النعيمي، مرجع سابق، ص 72.
2. نفس المرجع السابق، ص 74.

إن جميع المواد المجهزة للشركة تخزن في مخزن مركزي، إذا اختيرت 2 مادة عشوائيا من المخزن فما هو احتمال أن تكون كلا المادتين عاطلة ؟

الحل: نفرض الحوادث التالية:

B_1: المادة المسحوبة من المجهز الأول

$$P(B_1) = \frac{5}{10}$$

B_2: المادة المسحوبة من المجهز الثاني

$$P(B_2) = \frac{3}{10}$$

B_3: المادة المسحوبة من المجهز الثالث

$$P(B_3) = \frac{2}{10}$$

A_1: المادة الأولى المسحوبة من المخزن عاطلة

A_2: المادة الثانية المسحوبة من المخزن عاطلة

وبما أن نسبة المواد العاطلة من المجهزين الثلاثة هي:

$$P(A_1/B_1) = P(A_2/B_1) = 0{,}02$$
$$P(A_1/B_2) = P(A_2/B_2) = 0{,}03$$
$$P(A_1/B_3) = P(A_2/B_3) = 0{,}04$$

وعليه نحسب احتمال المادة الأولى المسحوبة من المخزن عاطلة كما يلي:

$$P(A_1) = P(B_1) \times P(A_1/B_1) + P(B_2) \times P(A_1/B_2) + P(B_3) \times P(A_1/B_3)$$
$$= 0{,}5 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}03 + 0{,}2 \times 0{,}04 = 0{,}027$$

وبنفس الأسلوب نحسب احتمال المادة الثانية المسحوبة من المخزن عاطلة ينتج ما يلي:

$$P(A_2) = 0{,}027$$

وبالتالي احتمال أن تكون كلا المادتين عاطلة كما يلي:

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \times P(A_2/A_1) = 0{,}027 \times 0{,}027 = 0{,}000729$$

10- نظرية بييز (Baye's Theory): إذا كان لدينا (n) من الحوادث المتنافية ($A_1, \ldots\ldots, A_n$) ضمن فضاء العينة (Ω) بحيث: $\forall\, i \neq j;\ i,j = 1,2,\ldots,n:\ A_i \cap A_j = \emptyset$

وفضاء التجربة (Ω) هو: $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n$

وإذا كانت الحادثة (B) معرفة على نفس فضاء التجربة (Ω) وان جميع الاحتمالات الشرطية معلومة

$P(B/A_j)$:$\forall_j , j = 1,2, \dots , n$ فان: $P(A_j/B)$ يعطى بالصيغة التالية:[1]

$$P(A_j/B) = \frac{P(B/A_j) \times P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B/A_i) \times P(A_i)}$$

<u>مثال (18)</u>: في أحد المصانع التي تصنع مصابيح إضاءة كهربائية، فان الآلات (A_1) و (A_2) و (A_3) تصنع على الترتيب 0,3 و0,3 و0,4 من مجموع الإنتاج وإذا كان 0,01 و0,03 و0,02 من إنتاج الآلات الثلاث على الترتيب هو إنتاج معيب.

تم سحب مصباح عشوائيا من إنتاج أحد الأيام ووجد بأنه معيب، فما هو احتمال أن يكون هذا المصباح من صنع الآلة (A_1) ؟ من صنع الآلة (A_2) ؟ من صنع الآلة (A_3) ؟

<u>الحل</u>: نفرض الحوادث التالية:

D: سحب مصباح معيب

A_1: سحب مصباح من انتاج الآلةA_1

$P(A_1) = 0,3$

A_2: سحب مصباح من انتاج الآلةA_2

$P(A_2) = 0,3$

A_3: سحب مصباح من انتاج الآلةA_3

$P(A_3) = 0,4$

نفرض الاحتمالات التالية:

احتمال المصباح معيب علما انه من انتاج الآلةA_1 : $P(D/A_1) = 0,01$

احتمال المصباح معيب علما انه من انتاج الآلةA_2 : $P(D/A_2) = 0,03$

احتمال المصباح معيب علما انه من انتاج الآلةA_3 : $P(D/A_3) = 0,02$

والآن نحسب الاحتمالات التالية:

$$P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P(D/A_1) = 0,3 \times 0,01 = 0,003$$
$$P(A_2 \cap D) = P(A_2) \times P(D/A_2) = 0,3 \times 0,03 = 0,009$$
$$P(A_3 \cap D) = P(A_3) \times P(D/A_3) = 0,4 \times 0,02 = 0,008$$

[1]. حمد عبد العال النعيمي، مرجع سابق، ص 76.

وباستخدام نظرية بييز نحصل على احتمالات المصابيح المعيبة من كل آلة كما يلي:

$$P(A_1/D) = \frac{P(A_1 \cap D)}{P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) + P(A_3 \cap D)}$$
$$= \frac{0,003}{0,003 + 0,009 + 0,008} = \frac{3}{20}$$
$$P(A_2/D) = \frac{P(A_2 \cap D)}{P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) + P(A_3 \cap D)}$$
$$= \frac{0,009}{0,003 + 0,009 + 0,008} = \frac{9}{20}$$
$$P(A_3/D) = \frac{P(A_3 \cap D)}{P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) + P(A_3 \cap D)}$$
$$= \frac{0,008}{0,003 + 0,009 + 0,008} = \frac{8}{20}$$

تمارين محلولة

التمرين (01):

يتكون فوج من ستة طلبة تم استدعاؤهم لحضور اجتماع.

- بكم طريقة يمكنهم الجلوس في صف به ست مقاعد ؟
- بكم طريقة يمكنهم الجلوس حول طاولة مستديرة ؟
- لنفرض أنه طُلب إليهم تكوين لجنة مشكلة من رئيس، مقرّر وأمين عام، فبكم طريقة يمكنهم تكوين هذه اللجنة ؟

الحل:

- **حساب عدد طرق الجلوس في صف به ست مقاعد:**

نستخدم التبديلات المستقيمة كما يلي:

$$P_n = P_6 = 6! = 720$$

- **حساب عدد طرق الجلوس حول طاولة مستديرة:**

نستخدم التبديلات الدائرية كما يلي:

$$P_n = (n-1)! = P_6 = (6-1)! = 5! = 120$$

- **حساب عدد طرق تكوين اللجنة:**

في هذه الحالة الترتيب مهم وعليه نستخدم الترتيبة بدون تكرار

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = A_3^6 = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$$

التمرين (02):

أراد شخص إنشاء كلمة سر لبريده الإلكتروني، ما هو عدد الكلمات الممكن إنشاؤها والمكونة من:

- ثلاثة أرقام، مع إمكانية التكرار ؟
- أربعة أرقام، مع إمكانية التكرار؟
- خمسة أرقام بدون تكرار ؟

الحل:

- **حساب عدد الكلمات الممكن إنشاؤها والمكونة من ثلاثة أرقام مع إمكانية التكرار:**

نستخدم الترتيبية مع التكرار (القائمة)

$n^k = 10^3 = 1000$

– حساب عدد الكلمات الممكن إنشاؤها والمكونة من أربعة أرقام مع إمكانية التكرار:

نستخدم الترتيبية مع التكرار (القائمة)

$n^k = 10^4 = 10000$

– حساب عدد الكلمات الممكن إنشاؤها والمكونة من خمسة أرقام بدون تكرار:

نستخدم الترتيبية بدون تكرار

$$A_5^{10} = \frac{n!}{(n-k)!} = A_5^{10} = \frac{10!}{(10-5)!} = 30240$$

<u>التمرين (03):</u>

بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب ثلاثة برامج: الأول في الإحصاء والثاني في الرياضيات والثالث في الفيزياء إذا علم أن هناك 3 برامج مختلفة للإحصاء و2 برنامجين مختلفين للرياضيات و2 برنامجين مختلفين للفيزياء.

<u>الحل:</u>

العملية هي اختيار 3 برامج وهي مكونه من ثلاث مراحل:

المرحلة الأول هي اختيار برنامج الإحصاء وعدد طرق هذه المرحلة يساوي $n_1 = 3$.

المرحلة الثانية هي اختيار برنامج الرياضيات وعدد طرق هذه المرحلة يساوي $n_2 = 2$.

المرحلة الثالثة هي اختيار برنامج الفيزياء وعدد طرق هذه المرحلة يساوي $n_3 = 2$.

وباستخدام قاعدة الضرب فإن عدد الطريق المختلفة لاختيار البرامج الثلاثة يساوي:

$n = n_1 \times n_2 \times n_3 = 3 \times 2 \times 2 = 12$

<u>التمرين (04):</u>

بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب برنامجا واحدا فقط من الإحصاء أو الرياضيات أو الفيزياء إذا علم أن هناك 3 برامج مختلفة للإحصاء و 2 برنامجين مختلفين للرياضيات و 2 برنامجين مختلفين للفيزياء.

<u>الحل:</u>

العملية الأول هي اختيار برنامج الإحصاء وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_1 = 3$.

العملية الثانية هي اختيار برنامج الرياضيات وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_2 = 2$.

العملية الثالثة هي اختيار برنامج الفيزياء وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_3 = 2$.

وحيث أن العمليات متنافية وباستخدام قاعدة الجمع فإن عدد الطرق المختلفة لاختيار البرنامج يساوي:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 2 + 2 = 7$$

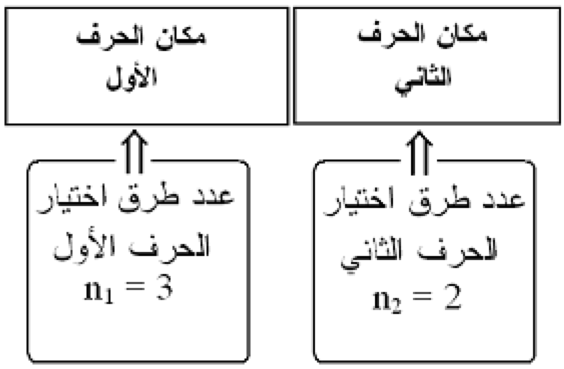
التمرين (05):

– كم عدد تباديل الحروف A, B, C بحيث تحوي كل ترتيبة على حرفين ؟ أو بعبارة أخرى بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف A, B, C ؟

– أوجد التباديل (التراتيب) المختلفة لحرفين من الحروف A, B, C.

الحل:

يمكن إيضاح طريقة إيجاد عدد تباديل الحروف A, B, C بحيث تحوي كل ترتيبة على حرفين بالشكل التوضيحي التالي:

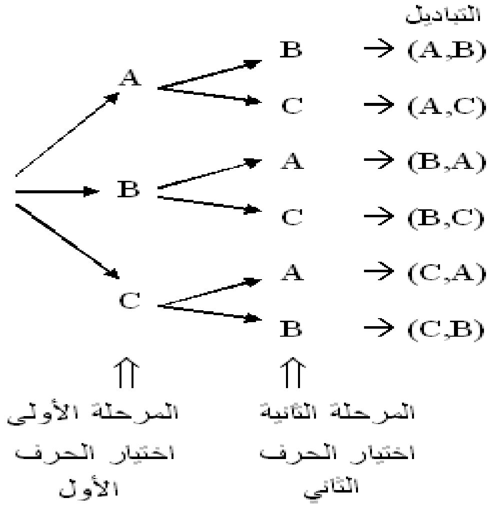


العملية مكونة من مرحلتين وبناء على قاعدة الضرب فإن عدد طريق ترتيب حرفين من الحروف A,B,C يساوي:

$$n = n_1 \times n_2 = 3 \times 2 = 6$$

وعليه فإن عدد التباديل للحروف A,B,C مأخوذا حرفين في كل مرة يساوي 6 تباديل.

يمكن إيجاد التباديل (أو التراتيب) باستخدام شكل الشجرة التالي:



التباديل (التراتيب) هي:

(A,B), (A,C), (B,A), (B,C), (C,A), (C,B)

لاحظ أن التبديلة أو الترتيبة (A,B) تختلف عن التبديلة (B,A).

التمرين (06):

باستخدام قانون التباديل أوجد عدد التباديل المختلفة لحرفين من الحروفA, B, C. أو بعبارة أخرى بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف A, B, C ؟

الحل:

لدينا $n = 3$ و $k = 2$ وعليه فإن عدد طرق ترتيب حرفين من الحروف A, B, C يساوي:

$$A_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = A_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

التمرين (07):

- بكم طريقة يمكن أن نجلس 5 طلاب على 5 مقاعد في صف واحد ؟
- بكم طريقة يمكن أن نجلس 5 طلاب على 3 مقاعد في صف واحد ؟

الحل:

- عدد طرق إجلاس 5 طلاب على 5 مقاعد في صف واحد $(n = 5, k = 5)$ هو:

$$P_5 = 5! = 120$$

والشكل التالي يوضح ذلك.

المقعد رقم 5	المقعد رقم 4	المقعد رقم 3	المقعد رقم 2	المقعد رقم 1
⇑	⇑	⇑	⇑	⇑
1	2	3	4	5

– عدد طرق إجلاس 5 طلاب على 3 مقاعد في صف واحد ($n = 5, k = 3$) هو:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

والشكل التالي يوضح ذلك.

المقعد رقم 3	المقعد رقم 2	المقعد رقم 1
⇑	⇑	⇑
3	4	5

التمرين (08):

بكم طريقة يمكن سحب كرتين بإرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة ؟

الحل:

لدينا $n = 15$ و $k = 2$ وعليه فإن عدد سحب كرتين بإرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة يساوي:

$$n^k = 15^2 = 15 \times 15 = 225$$

التمرين (09):

بكم طريقة يمكن سحب كرتين بدون إرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة ؟

الحل:

لدينا $n = 15$ و $k = 2$ وعليه فإن عدد سحب كرتين بدون إرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة يساوي:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} = P_2^{15} = \frac{15!}{(15-2)!} = 210$$

التمرين (10):

بكم طريقة يمكن اختيار حرفين (بدون مراعاة الترتيب) من مجموعة الحروف A, B, C ؟

الحل:

لدينا $n = 3$ و $k = 2$ وعليه فإن عدد طريقة اختيار حرفين (بدون مراعاة الترتيب) من مجموعة الحروف A, B, C يساوي:

$$C_k^n = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} = C_2^3 = \frac{3!}{2! \times (3-2)!} = 3$$

التمرين (11):

بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كلمة PROBABILITY ؟

الحل:

الحرف	P	R	O	B	A	I	T	Y	المجموع
التكرار	1	1	1	2	1	2	1	1	**11**

عدد تباديل أو عدد طرق ترتيب أحرف كلمة PROBABILITY يساوي:

$$P_{n_1,n_2,\dots,n_k}^n = P_{1,1,2,1,2,1,1,1}^{11} = \frac{11!}{1! \times 1! \times 2! \times 1! \times 2! \times 1! \times 1! \times 1!}$$
$$= 9979200$$

التمرين (12):

بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كلمة STATISTICS ؟

الحل:

الحرف	S	T	A	I	C	المجموع
التكرار	3	3	1	2	1	**10**

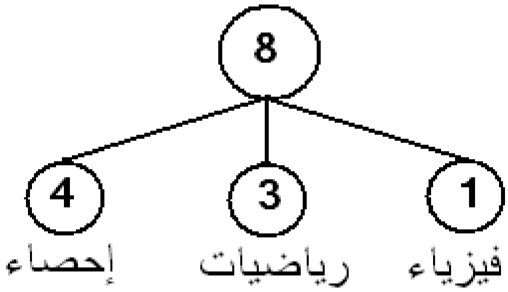
عدد تباديل أو عدد طرق ترتيب أحرف كلمة STATISTICS يساوي:

$$P_{n_1,n_2,\dots,n_k}^n = P_{3,3,2,1,1}^{10} = \frac{10!}{3! \times 3! \times 2! \times 1! \times 1!} = 50400$$

التمرين (13):

بكم طريقة يمكن توزيع 8 طلاب على النحو التالي: 4 طلاب لتخصص الإحصاء و3 طلاب لتخصص الرياضيات وطالب واحد لتخصص الفيزياء.

<u>الحل:</u>



عدد الطرق لتوزيع الطلاب وفق الطريقة المذكورة يساوي:

$$P^{n}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = P^{8}_{4,3,1} = \frac{8!}{4! \times 3! \times 1!} = 280$$

<u>التمرين (14):</u>

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

– تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي.

– تجربة قذف قطعتي نقود معا وتسجيل الرمز الظاهر على الوجه العلوي لكل قطعة.

<u>الحل:</u>

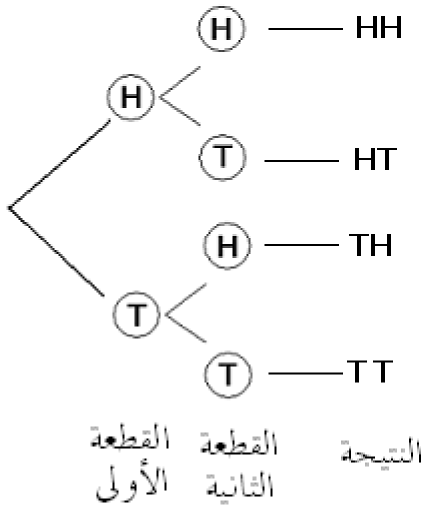
– تجربة قذف قطعة النقود مرة واحدة:

لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T:

إن النتائج الممكنة هي H أو T ولذلك فإن فضاء العينة هو: $\Omega = \{H , T\}$ وعدد عناصره يساوي: $n(\Omega) = 2$.

– تجربة قذف قطعتي النقود معا:

لنرمز للصورة بالرمز H وللكتابة بالرمز T والشكل التالي يوضح النتائج الممكنة للتجربة.



إن النتائج الممكنة هي:

(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)

ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

وعدد عناصره يساوي: $n(\Omega) = 4$

التمرين (15):

أوجد فضاء العينة وعدد عناصره للتجارب التالية:

– تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

– تجربة رمي حجر النرد مرتين متتاليتين وتسجيل الرقم الظاهر على الوجه العلوي لكل رمية.

الحل:

– تجربة قذف حجر النرد مرة واحدة:

إن النتائج الممكنة هي: 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 ولذلك فإن فضاء العينة هو:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ وعدد عناصره يساوي: $n(\Omega) = 6$.

– تجربة رمي حجر النرد مرتين:

يمكن إيجاد فضاء العينة لتجربة رمي حجر النرد مرتين بعدة طرق. نذكر من هذه الطرق: طريقة حاصل الضرب الديكارتي وطريقة الشجرة وطريقة الشبكة (أو الجدول):

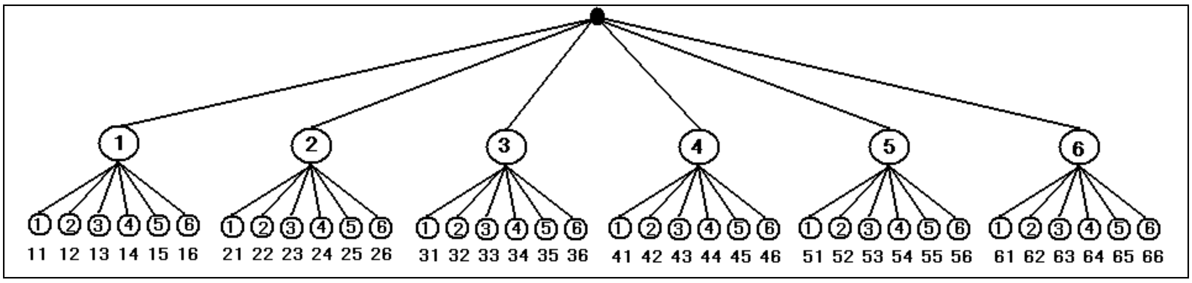
– **إيجاد فضاء العينة باستخدام حاصل الضرب الديكارتي:**

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$

$= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

وعدد عناصر فضاء العينة (باستخدام قاعدة الضرب) يساوي: $n(\Omega)=6\times6=36$

– **إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشجرة:**



– **إيجاد فضاء العينة باستخدام طريقة الشبكة (أو الجدول):**

نتيجة الرمية الثانية

6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
	1	2	3	4	5	6

نتيجة الرمية الأولى

التمرين (16):

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها وذلك في تجربة قذف قطعة النقود مرتين متتاليتين:

A = { الحصول على صورة في الرمية الأولى }

B = { الحصول على كتابة في الرمية الأولى }

C = { الحصول على صورة واحدة على الأقل }

الحل:

نحسب فضاء العينة والحوادث والعدد العناصر كما يلي:

Ω ={(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)}; n(Ω) = 4

A = {(H,H),(H,T)}; n(A) = 2

B = {(T,H),(T,T)}; n(B) = 2

C = {(H,H),(H,T),(T,H)}; n(C) = 3

التمرين (17):

احسب الحوادث التالية وعدد عناصرها وذلك في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتاليتين باعتبار أن (x) يرمز لنتيجة الرمية الأولى و(y) يرمز لنتيجة الرمية الثانية:

A = { (x,y): x + y < 4 }

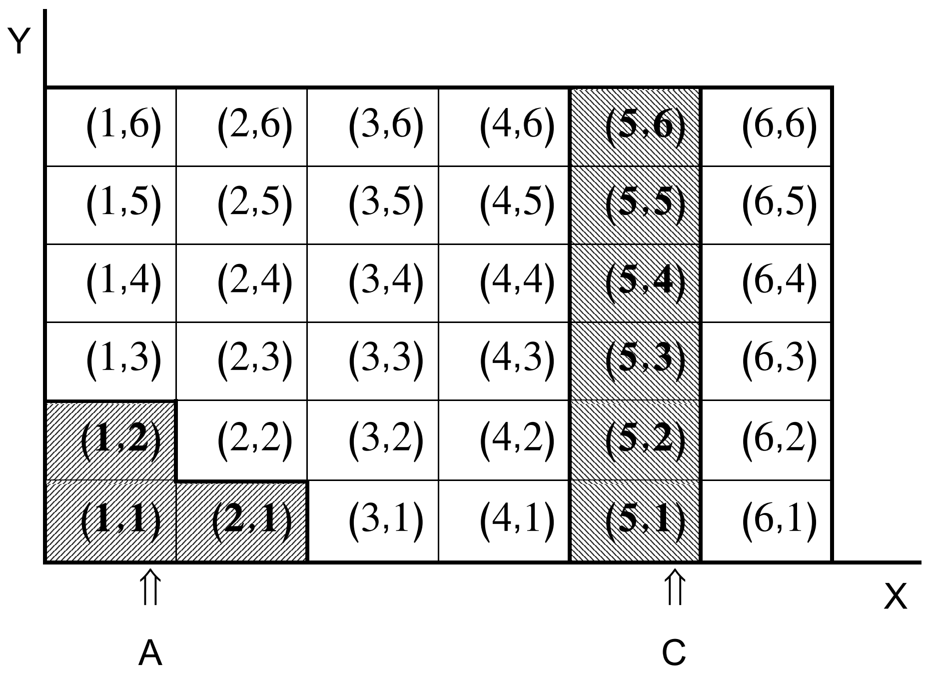
B = { (x,y): x = y }

C = { (x,y): x = 5 }

D = { (x,y): x+y = 1 }

الحل:

نمثل فضاء العينة والحوادث بالشكل التالي:



ومن هذا الشكل نحسب الحوادث وعدد عناصرها كما يلي:

A = { (x,y): x + y < 4 } = {(1,1), (1,2), (2,1)}; n(A) = 3

B = { (x,y): x = y } = {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)} ; n(B) = 6

$C = \{ (x,y):\ x = 5 \} = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}\ ;\ n(C) = 6$

$D = \{ (x,y):\ x + y = 1 \} = \{ \} = \phi;\qquad n(D) = 0$

التمرين (18):

قذفت قطعة نقود ثلاث مرات متتالية.

– أكتب فراغ العينة وعدد عناصره.

– أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

A = الحادثة الدالة على ظهور صورة في الرمية الأولى

B = الحادثة الدالة على ظهور صورة واحدة على الأقل

C = الحادثة الدالة على ظهور كتابة في الرمية الأولى وصورة في الرمية الثالثة.

– أكتب الحوادث التالية وعدد عناصرها:

$A \cap B,\ \ A \cup C,\ \ \bar{A} \cup \bar{B},\ \ \overline{(A \cap B)},\ \ A - B = A \cap \bar{B}$

الحل:

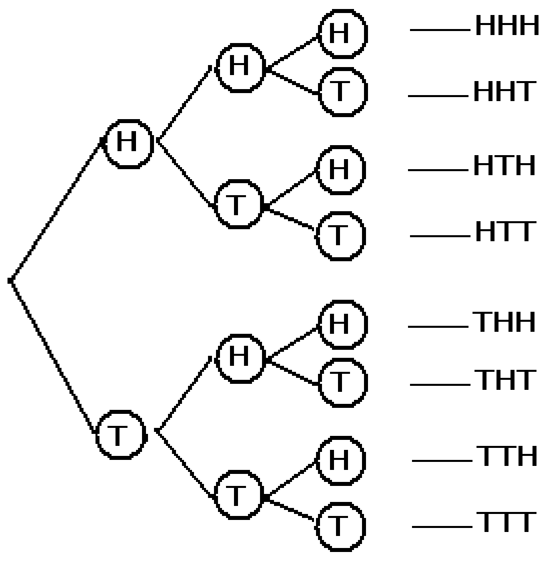
فراغ العينة لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

عدد عناصر فراغ العينة يساوي:

$$n(\Omega) = 2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$$

وشكل الشجرة التالي يوضح فراغ العينة:



- وأما الحوادث A و B و C فهي:

$A = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)\}, \quad n(A) = 4$

$B = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H)\}, \quad n(B) = 7$

$C = \{(T,H,H), (T,T,H)\}, \ n(C) = 2$

- الآن نسحب الحوادث المطلوبة بملاحظة أن:

$A = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T)\}$

$B = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(H,T,T),(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H)\}$

$C = \{(T,H,H), (T,T,H)\}$

$\overline{A} = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

$\overline{B} = \{(T,T,T)\}$

والحوادث هي:

$A \cap B = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T)\}; \quad n(A \cap B) = 4$

$A \cup C = \{(H,H,H), (H,H,T), (H,T,H), (H,T,T), (T,H,H), (T,T,H)\}; \ n(A \cup C) = 6$

$\overline{A} \cup \overline{B} = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \cup \{(T,T,T)\}$

$\qquad = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \ ; \ n(\overline{A} \cup \overline{B}) = 4$

$\overline{(A \cap B)} = \{(T,H,H),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \ ; \ n(\overline{(A \cap B)}) = 4$

$A \cap \overline{B} = A - B = \phi \quad ; \ n(A \cap \overline{B}) = 0$

التمرين (19):

إذا كان احتمال نجاح محمد في مادة الإحصاء يساوي 0.6 فأوجد احتمال رسوبه.

الحل:

لنعرف الحوادث التالية:

A= {نجاح محمد في برنامج الإحصاء}

$\overline{A}$ = {رسوب محمد في مقرر الإحصاء} = {عدم نجاح محمد في برنامج الإحصاء}

$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.6 = 0.4$

<u>التمرين (20):</u>

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.6 واحتمال نجاح محمد وأحمد معًا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد.

<u>الحل:</u>

لنعرف الحوادث التالية:

A= {نجاح محمد في الاختبار}

B = { نجاح أحمد في الاختبار}

$A\cap B$ = { نجاح محمد وأحمد معًا في الاختبار}

$\bar{B}$ = { رسوب أحمد في الاختبار}

$A\cap \bar{B}$ = { نجاح محمد ورسوب أحمد في الاختبار}

$P(A\cap \bar{B}) = P(A) - P(A\cap B) = 0.6 - 0.1 = 0.5$

<u>التمرين (21):</u>

إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0.25 واحتمال رسوب أحمد في هذا الاختبار يساوي 0.3 واحتمال نجاح محمد وأحمد معًا في هذا الاختبار يساوي 0.1 فأوجد احتمال نجاح أحدهما على الأقل.

<u>الحل:</u>

لنعرف الحوادث التالية:

A= {نجاح محمد في الاختبار}

B = { نجاح أحمد في الاختبار}

$A\cap B$ = { نجاح محمد وأحمد معًا في الاختبار}

$\bar{B}$ = { رسوب أحمد في الاختبار}

$A\cup B$ = { نجاح محمد أو نجاح أحمد في الاختبار} = { نجاح أحدهما على الأقل }

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0.25 + 0.7 - 0.1 = 0.85$

التمرين (22):

الجدول التالي يصنف أربعمائة شخصًا حسب عادة التدخين ومستوى ضغط الدم على النحو التالي:

عادة التدخين

مستوى ضغط الدم	يدخن D	لا يدخن $\overline{D}$	المجموع
A مرتفع	40	10	50
B متوسط	70	130	200
C منخفض	55	95	150
المجموع	165	235	400

ولتكن التجربة هي اختيار أحد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي. ولنعرف الحوادث التالية:

A : حادثة اختيار شخص ضغط دمه مرتفع

D : حادثة اختيار شخص مدخن

اوجد احتمال أن الشخص المختار:

- ضغط دمه مرتفع.
- مدخن.
- ضغط دمه مرتفع ويدخن.
- ضغط دمه مرتفع علمًا بأنه مدخن.

الحل:

عدد نتائج التجربة وهي متساوية الفرص.

$$n(\Omega) = C_1^{400} = 400$$

$P(A) = n(A)/n(\Omega) = 50/400 = 0.125$

$P(D) = n(D)/n(\Omega) = 165/400 = 0.4125$

$P(A \cap D) = n(A \cap D)/n(\Omega) = 40/400 = 0.1$

$P(A \mid D) = P(A \cap D) / P(D) = 0.1 / 0.4125 = 0.2424$

$P(A \mid D) = n(A \cap D)/n(D) = 40/165 = 0.2424$

إن الحادثتين A و D غير مستقلتين وذلك لأن (يكفي التحقق من أحد الشروط):

$P(A) = 0.125 \neq P(A|D) = 0.2424$

$P(A \cap D) = 0.1 \neq P(A)\,P(D) = 0.125 \times 0.4125 = 0.0516$

$P(D) = 0.4125 \neq P(D|A) = 0.8$

تمارين غير محلولة

التمرين (01):

لقيمة $n = 3$ أحسب عدد الطرق التي يمكن وضع n رسالة في مظاريف بحيث تكون كل رسالة وضعت في المظروف الخطأ. أعد الحسابات في حالة $n = 4 , 5$.

التمرين (02):

يحوي وعاء 4 كرات، حمراء وصفراء وخضراء وزرقاء. كم عدد طرق اختيار 3 كرات ؟

- الترتيب مهم وبدون إرجاع.
- الترتيب غير مهم وبدون إرجاع.

التمرين (03):

كم كلمة يمكن تكوينها من حروف الكلمة " الرحالة ".

التمرين (04):

بكم طريقة يمكن ملئ n فراغ بحرفي " ر" و " ك" مع التكرار لقيم $n = 3, 4, 5$.

التمرين (05):

كم عدد لوحات السيارات التي تتكون من n حرف و m رقم لقيم $n = 2, 3, 4$ و $m = 2, 3, 4$. خذ كل التراتيب الممكنة (مثلا 2 حرف و3 أرقام أو 4 أحرف و2 رقم وهكذا).

التمرين (06):

تستخدم في هيئة الأمم المتحدة 20 لغة رسمية. عند إلقاء خطاب مهم يجب أن تتم ترجمة لحظية من أي من هذه اللغات إلى أي لغة أخرى منها.

- كم عدد المترجمين الذين نحتاج إليهم لإنجاز هذه المهمة ؟
- في الشهر القادم سوف تضيف الهيئة 3 لغات جديدة. كم عدد المترجمين الجدد الذين يجب تعيينهم ؟
- ما هي نسبة الزيادة في عدد المترجمين ؟

التمرين (07):

وعاء يحوي 12 كرة متشابهة. 3 حمراء و4 خضراء و 5 زرقاء. سحبت 4 كرات معا. كم عدد الكرات الحمراء التي يمكن أن نحصل عليها ؟

التمرين (08):

محل مثلجات لديه 21 نكهة من المثلجات. يريد أحد الزبائن شراء 5 طلبات كل منها يتكون من 3 نكهات لأصدقائه.

- كم عدد الاختيارات بحيث لا تتكرر النكهة الواحدة لصديق.
- كم عدد الاختيارات بحيث لا يحصل أكثر من صديقين على نفس النكهات.

التمرين (09):

شكلت كلمة من 3 أحرف لا يتكرر فيها أي حرف. كم عدد الطرق الممكنة التي يمكن سحب مثل هذه الكلمة بحيث تكون الحروف في ترتيب أبجدي متتابع ؟ (أي مثل أ ب ت أو ب ت ث الخ).

التمرين (10):

وعاء يحوي 6 كرات مرقمة 0 و 0 و 0 و 0 و 10 و 20 يقوم متسابق بسحب كرة فإذا كانت 10 أو 20 يعيدها ويسحب كرة أخرى وهكذا. أما إذا كانت 0 فيخرج من المسابقة. في الحالة الأولى يجمع المتسابق الأرقام التي تحصل عليها حتى يسحب 0 ومن ثم يربح جائزة على حسب المجموع النهائي الذي يتحصل عليه. بعد 6 محاولات:

- ما هو أقصى مجموع يمكن لمتسابق الحصول علية ؟
- ما هي نسبة عدد المرات التي يحصل فيها المتسابق على 90 نقطة، على 100 نقطة، على 120 نقطة.

التمرين (11):

عائلة لديها 5 أطفال. كم عدد الحالات التي يكون فيها عدد الأطفال الذكور أكثر من عدد الأطفال الإناث. ما هي نسبة العائلات التي لديها 2 إناث و 3 ذكور في جميع العائلات التي لديها 5 أطفال.

التمرين (12):

للحروف: ي ف ف ل و ر ي س ث ي ن ث ي

- بكم طريقة مختلفة يمكن ترتيب هذه الحروف ؟
- كم من التراتيب يبدأ وينتهي بالحرف ف ؟
- في كم من التراتيب يأتي الحرف ف متتابع ؟

التمرين (13):

قررت إحدى الشركات بعث 12 شخصا لحضور اجتماع تنسيقي جهوي، فوضعت تحت تصرفهم ثلاث سيارات؛ إحداها بست مقاعد، والأخرى بأربع مقاعد، والثالثة بمقعدين.

بكم طريقة يمكن أن يركب هؤلاء بفرض أن:

- أي شخص منهم يمكنه القيادة (الجميع يحمل رخصة سياقة) ؟
- أربعة أشخاص فقط لديهم رخصة سياقة ؟

التمرين (14):

يراد تكوين لجنة طلابية ذات 5 طلاب من بين 10 طلبة في مستوى السنة الثالثة، و 15 طالبا في مستوى السنة الثانية.

أحسب عدد الحالات الملائمة لاحتواء اللجنة على طالبين من مستوى السنة الثالثة، وثلاثة طلاب من مستوى السنة الثانية.

التمرين (15):

أحسب عدد المجموعات المكونة من ثلاثة طلبة، والتي يمكن سحبها مع الإرجاع من فوج يحوي ستة طلبة.

التمرين (16):

قرر صاحب مصنع ترقية خمسة عمال، فتم ترشيح عشرين عاملا، منهم اثنا عشر رجلا وثمانية نساء، بشرط أن يترقى رجلان وامرأتان على الأقل.

بكم طريقة يمكن اختيار العمال الخمسة في كل من الحالات الآتية:

- كل المرشحين يمكن اختيارهم ؟
- استبعاد رجلين تم الطعن في استحقاقهما للترقية ؟
- تم تحويل رجل وامرأة من المرشحين إلى فرع آخر ؟

التمرين (17):

يتنافس طلبة أحد الأفواج على المراتب الثلاث الأولى في مادة الإحصاء، بفرض أن الفوج مكون من تسعة طلاب وأن معدلاتهم مختلفة.

ما هو عدد الحالات الممكنة ليحقق طلبة الفوج ذلك ؟

<u>التمرين (18):</u>

يتألف المجلس العلمي للكلية من 15 عضوا، ولكي يجتمع هذا المجلس لابد من حضور النصاب القانوني والبالغ 10 أعضاء.

- بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني بالضبط ؟
- بكم طريقة يمكن تأمين النصاب القانوني على الأقل ؟

الفصل الثاني

المتغير العشوائي

تمهيد:

سبق وان تم عرض وتوضيح بعض القواعد الاحتمالية في الفصل السابق، فهذه القواعد ترتبط بنتائج تجربة عشوائية معينة، وفي هذا الفصل سيتم التعبير عن نتائج التجربة العشوائية بمقياس عددي يطلق عليه اسم المتغير (Variable)، وبما أن القيمة العددية لهذا المتغير غير مؤكدة مما سيشار إليه بالمتغير العشوائي (Random Variable)، إذ إن القيم المختلفة للمتغير العشوائي ترتبط بقيم احتمالية معينة، مما ستشكل معا ما يسمى بالتوزيع الاحتمالي (Probability Distribution).

1- تعريف المتغير العشوائي: المتغير العشوائي قد يكون هو نتيجة التجربة العشوائية ذاتها، مثل نتيجة رمي حجر النرد، فنتيجة الرمية تكون متغيرا لأنها تتغير من محاولة إلى أخرى، فهي ليست شيئا ثابتا، وهذا التغير من محاولة إلى أخرى يكون عشوائيا لأنه يخضع في تغيره لعوامل العشوائية أو الصدفة البحتة، حيث لا يستطيع أحد أن يحدد نتيجة الرمية مسبقا.[1]

كذلك فإن المتغير العشوائي قد يكون رقما مرتبطا بنتيجة التجربة العشوائية كأن نقول أنه عند رمي قطعتي نقود فإن المتغير العشوائي هو عدد الصور التي تظهر، في هذه الحالة فإن قيم المتغير (عدد الصور)، إما صفر أي لا تظهر صورة، وإما تساوي واحد أي تظهر صورة واحدة، وإما تساوي اثنان أي تظهر صورتين، كذلك دخل دولة ما هو متغير عشوائي، لأنه يتغير من سنة لأخرى طبقا لعوامل كثيرة لا يمكن التحكم بها مثل الطلب على الصادرات، وقيمة العملة، وإمكانية وجود بدائل لصادراتها وهكذا، وتأسيسا على ما تقدم، يمكن تعريف المتغير العشوائي بأنه عبارة عن قيمة عددية لكل نتيجة من نتائج التجربة العشوائية، ويرمز له عادة بالرمز (X).

2- أنواع المتغير العشوائي: تنقسم المتغيرات العشوائية إلى قسمين هما:

2-1- المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) (Discrete Random Variable)

2-1-1- تعريف المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل): هو المتغير الذي يكون المجال المقابل له منتهيا أو غير منته ويكون قابلا للعد، إذ يمكن كتابة قيمته المميزة بالشكل الآتي:[2]

$X: x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots, x_n$

---

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، **أساليب الاحصاء للعلوم الاقتصادية وادارة الاعمال مع استخدام برنامج spss**، دار وائل للنشر، عمان، 2009، ص 135.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 136.

ومن أمثلة هذا النوع من المتغيرات، ما يأتي:

- عدد الأساتذة في جامعة ما لسنة معينة.
- عدد الحوادث المرورية في مدينة ما خلال شهر معين.
- عدد المصابيح التالفة في إنتاج شركة ما لشهر معين.
- عدد مرات ظهور الكتابة (T) عند رمي قطعة نقود معدنية (n) من المرات.
- الأرقام التي تظهر على وجه زهرة نرد متجانسة.

2-1-2- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع: إن لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي المتقطع، قيمة احتمالية مرافقة، فعلى سبيل المثال القيمة (x_i)، يكون الاحتمال المرافق لها هو $P(X = x_i)$، عليه فان:[1]

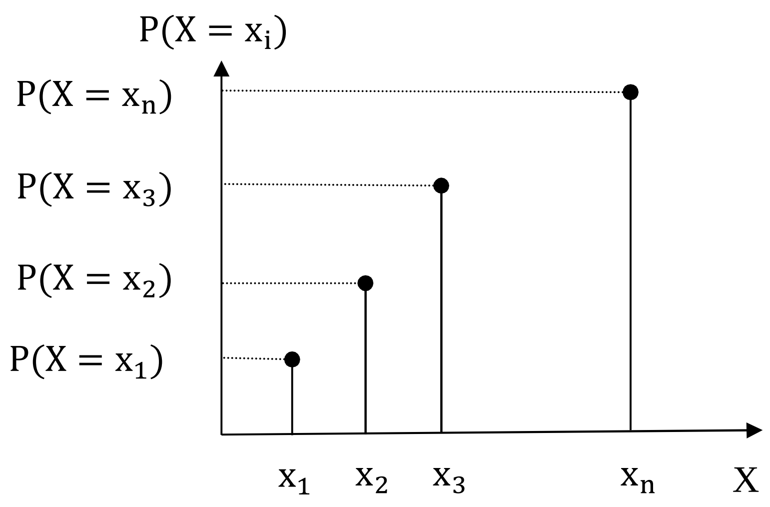
$$\mathbf{X}: x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots.., x_n$$
$$\mathbf{P(X)}: P(X = x_1), P(X = x_2), P(X = x_3), \dots\dots\dots.., P(X = x_n)$$

وتسمى الاحتمالات أعلاه، بدالة التوزيع الاحتمالي وتدعى أحيانا بدالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع (X) ، وتتصف هذه الدالة بالخاصيتين الآتيتين:

$$0 \leq P(X = x_i) \leq 1$$
$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = 1$$

والشكل البياني التالي، يوضح دالة التوزيع الاحتمالي الخاصة بالمتغير العشوائي المتقطع.

شكل رقم (01): منحنى دالة التوزيع الاحتمالي الخاصة بالمتغير العشوائي المتقطع



[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 137.

مثال (01): عند رمي قطعة نقود متجانسة مرتين متتاليتين في تجربة عشوائية.

المطلوب:

- عرف المتغير العشوائي (X) بأنه عدد مرات ظهور الصورة (H).
- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) .
- رسم دالة التوزيع الاحتمالي $P(X = x_i)$.

الحل:

- **تعريف المتغير العشوائي:**

يمكن تعريف المتغير العشوائي المتقطع (X) ، على أنه عدد مرات ظهور الصورة (H) ، أي إن:

X: عدد مرات ظهور الصورة

عليه فان قيم المتغير العشوائي المتقطع (X) على فضاء العينة (S) ، تكتب كالآتي:

S	(HH)	(HT)	(TH)	(TT)
X	2	1	1	0

أي إن قيم المتغير العشوائي المتقطع (X) ، هي:

$X = 0,1,2$

وبالتالي فان المجال المقابل للمتغير العشوائي المتقطع (X) على فضاء العينة (S)، يكتب كالآتي:

$X(S) = \{0,1,2\}$

- **إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:**

بالرجوع إلى فضاء العينة (S)، يمكن كتابة قيم دالة التوزيع الاحتمالي$P(X = x_i)$ لعناصر المجال المقابل للمتغير العشوائي على النحو الآتي:

$$P(X = 0) = P(TT) = \frac{1}{4}$$

$$P(X = 1) = P\{(HT), (TH)\} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(HH) = \frac{1}{4}$$

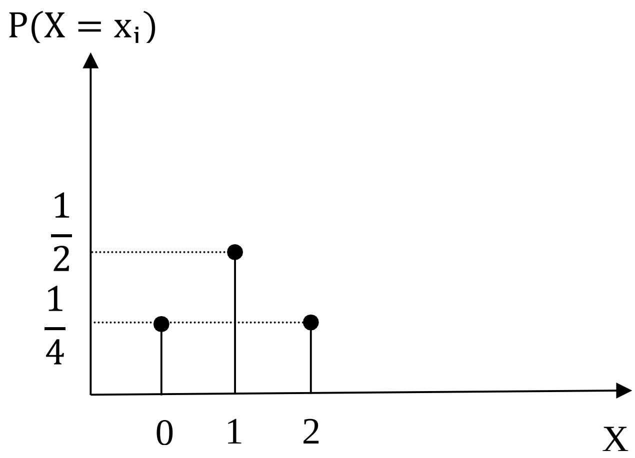
والجدول التالي، يوضح قيم المتغير العشوائي (X) وقيم دالة التوزيع الاحتمالي المرافقة لقيم المتغير (X)

X	0	1	2
$\mathbf{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

وأخيرا، يمكن كتابة صيغة دالة التوزيع الاحتمالي $P(X = x_i)$ على الوجه الآتي:

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{4} & si: x_i = 0,2 \\ \frac{1}{2} & si: x_i = 1 \\ 0 & sinon \end{cases}$$

- رسم دالة التوزيع الاحتمالي:



2-1-3- دالة التوزيع (الدالة التجميعية) للمتغير العشوائي المتقطع: تعرف دالة التوزيع أو الدالة التجميعية كما يلي:[1]

$$F(x_i) = P(X \leq x_i)$$

ويمكن استنتاج دالة التوزيع من دالة الكتلة الاحتمالية $P(X = x_i)$ كما يلي:

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \sum_{u \leq x_i} P(u)$$

تأخذ دالة التوزيع للمتغير العشوائي المتقطع شكلا سلميا، وهي لا تكون متناقصة في أي مجال، وأكبر قيمة ممكنة لها هي 1.

مثال (02): ليكن لديك جدول التوزيع الاحتمال أدناه.

---

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 139.

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

المطلوب:

أوجد قيم دالة التوزيع $F(x_i)$

الحل:

X	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$F(x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

2-1-4- التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) والتباين للمتغير العشوائي المتقطع: إذا كان لدينا متغير عشوائي متقطع، وليكن (X) يأخذ القيم التالية:[1]

$\mathbf{X}: x_1, x_2, x_3, \dots\dots\dots.., x_n$

وأن قيم دالة التوزيع الاحتمالي المرافقة لقيم المتغير العشوائي (X)

$\mathbf{P(X)}: P(X = x_1), P(X = x_2), P(X = x_3), \dots\dots\dots.., P(X = x_n)$

عليه يكون التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) للمتغير العشوائي (X) والذي يرمز له بالرمز $E(X)$ يكتب بالشكل التالي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(x_i) = x_1 \times P(x_1) + x_2 \times P(x_2) + \cdots + x_n \times P(x_n)$$

وتباين المتغير العشوائي (X) والذي يرمز له بالرمز σ_x^2 يكتب بالشكل التالي:

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} x^2{}_i \times [P(x_i) - E(X)^2]$$

والانحراف المعياري للمتغير العشوائي (X) والذي يرمز له بالرمز σ_x يكتب بالشكل التالي:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

[1]. دلال القاضي، **الاحصاء للإداريين والاقتصاديين**، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2005، ص 156.

مثال (04): عند رمي قطعة نقود متجانسة مرتين متتاليتين في تجربة عشوائية.

المطلوب:

جد قيمة التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي.

الحل:

من نتائج حل المثال رقم (01) حصلنا على قيم المتغير العشوائي (X)، وقيم دالة التوزيع الاحتمالي $P(X = x_i)$ المرافقة لقيم المتغير المذكور، كما هي موضحة بالجدول الآتي:

X	0	1	2
$\mathbf{P(X = x_i)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(x_i) = 0 \times \left(\frac{1}{4}\right) + 1 \times \left(\frac{1}{2}\right) + \cdots + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \left[(0)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right) + (1)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right) + (2)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)\right] = \frac{1}{2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0,5} = 0,71$$

2-2- المتغير العشوائي المستمر (المتصل) (Continuous Random Variable)

2-2-1- تعريف المتغير العشوائي المستمر (المتصل): هو المتغير الذي يكون المجال المقابل له غير قابل للعد، أي إن قيم المتغير العشوائي (X) [1]، تأخذ الشكل الآتي: $x \in [a - b] \subset R$

ومن أمثلة هذا النوع من المتغيرات، ما يأتي:

- أطوال مجموعة من الطلبة.
- كمية الأمطار الساقطة على مدينة ما في شهر معين.
- درجات الحرارة في مدينة ما لشهر معين.
- أعمار الأزواج في مجموعة من الأسر.
- الدخل الشهري لمجموعة من الأسر.
- أسعار سلعة معينة.
- أوزان عدد من أعضاء هيئة التدريس.

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 159.

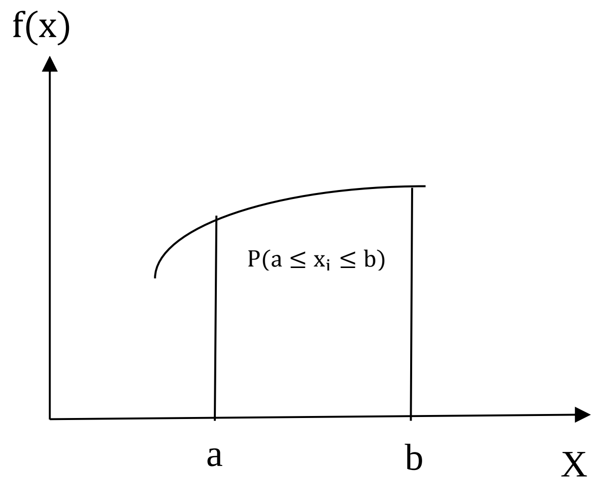
2-2-2- التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر: إن التوزيع الاحتمالي لهذا النوع من المتغيرات لا يمكن تمثيله على غرار حالة المتغير العشوائي المتقطع، بل يعبر عن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر بدالة احتمال مستمرة، تدعى بدالة الكثافة الاحتمالية وتتصف هذه الدالة بالخاصيتين الآتيتين:[1]

$$f(x_i) \geq 0 \qquad \forall x_i \;, x_i \in [a-b]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d(x) = 1$$

ولإيجاد الاحتمال الواقع ضمن المجال $[a-b]$ نقوم بحساب المساحة تحت المنحنى، والتي تسمى $P(a \leq x_i \leq b)$ ، والموضحة بالشكل البياني الآتي:

شكل رقم (02): حساب الاحتمال عن طريق المساحة



إذ أن:

$$P(a \leq x_i \leq b) = \int_a^b f(x_i)d(x)$$

مثال (05): لديك الدالة الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si: } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>**المطلوب:**</u> جد ما يأتي:

- اثبت أن الدالة $f(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية.
- احسب قيمة الاحتمال $P\left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 161.

<u>الحل:</u>

- إثبات أن الدالة $f(x)$ تمثل دالة كثافة احتمالية:

لإثبات أن الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية ينبغي أن تحقق الخاصيتين الآتيتين:

$$f(x_i) \geq 0 \qquad \forall x_i \ , x_i \in [a-b]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d(x) = 1$$

الخاصية الأولى تم تحقيقها حيث أن:

$$f(x_i) = 3x_i^2 \geq 0 \qquad \forall x_i \ , x_i \in [0-1]$$

الخاصية الثانية تم تحقيقها حيث أن:

$$\int_0^1 3x^2 d(x) = [x^3]_0^1 = 1$$

الدالة $f(x)$ هي دالة كثافة احتمالية.

- حساب قيمة الاحتمال $P\left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$:

$$P\left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2 d(x) = [x^3]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

2-2-3- دالة التوزيع (الدالة التجميعية) للمتغير العشوائي المستمر: لدالة التوزيع أهمية أكبر بالنسبة للمتغير العشوائي المستمر، والسبب في ذلك أننا نهتم في حالة المتغير العشوائي المستمر باحتمال مجال وليس باحتمال نقطة.

تعرف دالة التوزيع أو الدالة التجميعية كما يلي:[1]

$$F(x_i) = P(X \leq x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(u)d(u)$$

مثال (06): لتكن لديك دالة الكثافة الاحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2 & \text{si: } 0 < x < 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>المطلوب:</u>

أوجد دالة التوزيع للمتغير العشوائي المذكور.

[1]. عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، مرجع سابق، ص 163.

الحل:

$$x \leq 0: \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)d(u) = \int_{-\infty}^{0} 0d(u) = 0$$

$$0 < x < 3: \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)d(u) = \int_{-\infty}^{0} 0d(u) + \int_{0}^{x} \frac{1}{9}u^2 d(u) = \frac{x^3}{27}$$

$$x \geq 3: \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)d(u) = \int_{-\infty}^{0} 0d(u) + \int_{0}^{3} \frac{1}{9}u^2 d(u) + \int_{3}^{x} 0d(u)$$
$$= 1$$

إذن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المذكور تكتب كما يلي:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si: } x \leq 0 \\ \dfrac{x^3}{27} & \text{si: } 0 < x < 3 \\ 1 & \text{si: } x > 3 \end{cases}$$

2-2-4- قاعدة لايبنيز العامة (Règle de LEIBNITZ)

في علم التفاضل والتكامل تعمل قاعدة لايبنيز العامة والتي أعطيت اسمها تيمنا بمؤسسها غوتفريد لايبنيز على تعميم قاعدة الضرب (والتي تُعرف أيضا باسم قاعدة لايبنيز). حيث تلعب مشتقات الدوال دورا أساسيا في حساب التفاضل والتكامل وتطبيقاتها على وجه الخصوص، ويمكن استخدامها لدراسة هندسة المنحنيات، وإيجاد القيم المُثلى للدوال، وصياغة المعادلات التفاضلية التي توفر نماذج رياضية في مجالات عدة، مثل: الفيزياء، والكيمياء، والبيولوجيا، والتمويل.

وتنص القاعدة على أنه إذا كان كل من f و g دوال قابلة للاشتقاق مرفوعة بقوة n فإن الناتج f g هو أيضا مرفوع بقوة n، ومشتقته النونية تُعطَى بالشكل التالي:

$$(fg)^n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_k^n \, f^{(n-k)}(x) g^k(x)$$

يمكن برهنة هذا من خلال قاعدة الضرب والاستقراء الرياضي.

2-2-5- التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) والتباين للمتغير العشوائي المستمر: إذا كان لدينا متغير عشوائي مستمر، وليكن (X) وله دالة كثافة احتمالية الدالة ولتكن $f(x)$.

عليه يكون التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) للمتغير العشوائي (X) والذي يرمز له بالرمز $E(X)$ يكتب بالشكل التالي:[1]

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)d(x)$$

وتباين المتغير العشوائي (X) والذي يرمز له بالرمز σ_x^2 يكتب بالشكل التالي:

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)d(x) - [E(X)]^2$$

والانحراف المعياري للمتغير العشوائي (X) والذي يرمز له بالرمز σ_x يكتب بالشكل التالي:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

مثال (07): لديك دالة الكثافة الاحتمالية الآتية:

$$f(x_i) = \begin{cases} \dfrac{x_i}{2} & \text{si: } 0 \leq x_i \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>المطلوب:</u>

– احسب التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

<u>الحل:</u>

– **حساب التوقع الرياضي:**

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)d(x) = \int_{0}^{2} x\left(\frac{x}{2}\right)d(x) = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

– **حساب قيمة الانحراف المعياري:**

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = \int_{0}^{2} x^2\left(\frac{x}{2}\right)d(x) - [E(X)]^2 = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2$$
$$= 2 - \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

عليه تكون قيمة الانحراف المعياري كما يلي:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{2}{9}} = 0,471$$

---

[1]. دلال القاضي، مرجع سابق، ص 166.

تمارين محلولة

التمرين (01):

لتكن التجربة هي قذف قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين بشكل مستقل. ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهرة في الرميتين.

- عبر عن المتغير العشوائي X كدالة.
- أوجد مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.
- عبر عن الحوادث التالية باستخدام المتغير العشوائي X :

$\{(T,T)\}, \{(H,T), (T,H)\}, \{(H,H)\}, \{(H,H), (H,T), (T,H)\}$

- عبر عن الحوادث التالية باستخدام نقاط العينة:

$\{X=0\}, \{X=1\}, \{X=2\}, \{X<1\}, \{X\leq1\}, \{X>5\}$

- أوجد الاحتمالات التالية:

$P(X=0), P(X=1), P(X=2), P(X<1), P(X\leq1), P(X>5)$

الحل:

فضاء العينة لهذه التجربة هو $\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

المتغير العشوائي هو: X هو عدد الصور

إن المتغير العشوائي X يعطي كل عنصر من عناصر Ω قيمة حقيقية وحيدة في R كما يلي:

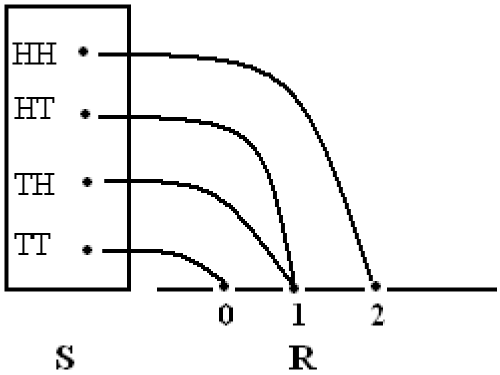
$X(H,H) = 2$

$X(H,T) = 1$

$X(T,H) = 1$

$X(T,T) = 0$

والشكل التالي يوضح صور نقاط العينة تحت تأثير المتغير العشوائي X.



كما يمكن التعبير عن المتغير العشوائي X كدالة في الجدول التالي:

نقطة العينة	قيمة المتغير العشوائي
HH	2
HT	1
TH	1
TT	0

مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي:

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$$

التعبير عن الحوادث باستخدام المتغير العشوائي:

$\{(T,T)\} = \{X=0\} =$ {عدم ظهور صورة}

$\{(H,T), (T,H)\} = \{X=1\} =$ {ظهور صورة واحدة فقط}

$\{(H,H)\} = \{X=2\} =$ {ظهور صورتين}

$\{(H,H), (H,T), (T,H)\} = \{X\geq 1\} =$ {ظهور صورة واحدة على الأقل}

التعبير عن الحوادث باستخدام نقاط العينة:

$\{X=0\} = \{(T,T)\}$

$\{X=1\} = \{(H,T), (T,H)\}$

$\{X=2\} = \{(H,H)\}$

$\{X<1\} = \{X=0\} = \{(T,T)\}$

$\{X\leq 1\} = \{X=0\} \cup \{X=1\} = \{(H,T), (T,H), (T,T)\}$

$\{X>5\} = \{\ \} = \phi$

إيجاد الاحتمالات:

بما أن العملة متزنة فإن التجربة متساوية الفرص، أي أن:

$$P(\{(H,H)\}) = P(\{(H,T)\}) = P(\{(T,H)\}) = P(\{(T,T)\}) = 1/4 = 0.25$$

وباستخدام هذه الحقيقة فإننا نوجد الاحتمالات المطلوبة فيما يلي:

$$P(X=0) = P(\{(T,T)\}) = 0.25$$

$$P(X=1) = P(\{(H,T), (T,H)\}) = P(\{(H,T)\})+P(\{(T,H)\}) = 0.25 + 0.25 =0.5$$

$$P(X=2) = P(\{(H,H)\}) = 0.25$$

$$P(X<1) = P(\{(T,T)\}) = 0.25$$

$$P(X\leq 1) = P(\{(H,T), (T,H), (T,T)\}) = P(\{(H,T)\})+ P(\{(T,H)\}) + P(\{(T,T)\})$$

$$= 0.25 + 0.25 + 0.25 = 0.75$$

$$P(X>5) = P(\phi) = 0$$

<u>التمرين (02):</u>

في تجربة قذف قطعة نقود متزنة مرتين متتاليتين أوجد مجموعة القيم الممكنة للمتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:

- المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الصور.
- المتغير العشوائي Y الذي يمثل مربع عدد الصور.
- المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الصور مطروحًا منه عدد الكتابات.

<u>الحل:</u>

الجدول التالي يبين القيم الممكنة لكل متغير من المتغيرات الثلاثة:

نقطة العينة	قيمة المتغير العشوائي X	قيمة المتغير العشوائي Y	قيمة المتغير العشوائي Z
HH	2	4	2
HT	1	1	0
TH	1	1	0
TT	0	0	-2

والجدول التالي يبين مجموعة القيم الممكنة لكل متغير ونوعها وكذلك نوع المتغير:

المتغير العشوائي	مجموعة القيم الممكنة	نوع المتغير العشوائي
X	$X(\Omega) = \{0,1,2\}$	متقطع
Y	$Y(\Omega) = \{0,1,4\}$	متقطع
Z	$Z(\Omega) = \{-2,0,2\}$	متقطع

التمرين (03):

لتكن التجربة هي قذف قطعة نقود غير متزنة مرتين متتاليتين بشكل مستقل. ولنفرض أن هذه العملة غير متزنة بحيث أن $P(H)=\frac{1}{3}$ و $P(T)=\frac{2}{3}$. ولنعرف المتغير العشوائي X على أنه عدد الصور الظاهرة في الرميتين.

– أوجد الاحتمالات التالية ثم لخصها في جدول:

$P(X=0)\ ,\ P(X=1)\ ,\ P(X=2)$

– باستخدام الفقرة السابقة أوجد الاحتمالات التالية:

$P(0<X<2)\ ,\ P(X\le 1)\ ,\ P(X\ge 2)\ ,\ P(X\ge 5),\ P(X<5)$

– أوجد دالة التوزيع الاحتمالي $P(X=x)$ للمتغير العشوائي X

الحل:

فضاء العينة لهذه التجربة هو: $\Omega = \{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$

المتغير العشوائي هو: X هو عدد الصور الظاهرة في الرميتين.

مجموعة القيم الممكنة المتغير العشوائي X هي: $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

نلخص حل هذا التمرين في الجداول التالية:

نقطة العينة	احتمال نقطة العينة	قيمة المتغير العشوائي X
HH	$P(HH)=P(H)\times P(H)= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$	2
HT	$P(HT)=P(H)\times P(T)= \frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$	1
TH	$P(TH)=P(T)\times P(H)= \frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$	1
TT	$P(TT)=P(T)\times P(T)= \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$	0

نوجد الاحتمالات $P(X=2)$, $P(X=1)$, $P(X=0)$ في الجدول التالي:

الحادثة	عناصر الحادثة	احتمال الحادثة
$(X=0)$	$\{(T,T)\}$	$P(X=0) = P(TT) = \frac{4}{9}$
$(X=1)$	$\{(H,T), (T,H)\}$	$P(X=1) = P(HT)+P(TH)= \frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$
$(X=2)$	$\{(H,H)\}$	$P(X=2) = P(HH)= \frac{1}{9}$

من الجدول السابق نجد أن:

$$P(X=0) = \frac{4}{9}$$

$$P(X=1) = \frac{4}{9}$$

$P(X=2) = \frac{1}{9}$

نستطيع حساب جميع احتمالات الحوادث المعبر عنها باستخدام المتغير العشوائي X كما يلي:

$P(0<X<2) = P(X=1) = \frac{4}{9}$

$P(X\leq 1) = P(X=0) + P(X=1) = \frac{4}{9}+\frac{4}{9}= \frac{8}{9}$

$P(X\geq 2) = P(X=2) = \frac{1}{9}$

$P(X\geq 5) = P(\phi) = 0$

$P(X<5) = P(X=0) + P(X=1) +P(X=2) = \frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9} = \frac{9}{9} = 1$

ويمكن تنظيم هذه المعلومات السابقة في الجدول التالي والذي يمثل ما يسمى بدالة أو جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X:

x	P(X=x)
0	4/9
1	4/9
2	1/9
المجموع	**1**

التمرين (04):

أوجد التوقع الرياضي للمتغير العشوائي X الذي دالة توزيعه الاحتمالية معطاة في الجدول التالي:

x	P(X = x)
0	4/9
1	4/9
2	1/9

الحل:

القيمة المتوقعة أو التوقع الرياضي المتغير العشوائي X هي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(x_i) = 0 \times \left(\frac{4}{9}\right) + 1 \times \left(\frac{4}{9}\right) + 2 \times \left(\frac{1}{9}\right) = \frac{6}{9}$$

ويمكن تلخيص الحل في الجدول التالي:

x	$\mathbf{P(x)}$	**x P(x)**
0	4/9	$0 \times 4/9 = 0$
1	4/9	$1 \times 4/9 = 4/9$
2	1/9	$2 \times 1/9 = 2/9$
المجموع	**1**	**6/9**

التمرين (05):

أحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X الذي دالة توزيعه الاحتمالية معطاة في الجدول أدناه:

x	$\mathbf{P(x)}$
0	0.6
1	0.3
2	0.1

الحل:

نلخص الحل في الجدول التالي:

x	$\mathbf{P(x)}$	**x P(x)**	$\mathbf{(x - E(X))^2}$	$\mathbf{(x - E(X))^2 P(x)}$	$\mathbf{x^2}$	$\mathbf{x^2\ P(x)}$
0	0.6	0.0	0.25	0.150	0	0.0
1	0.3	0.3	0.25	0.075	1	0.3
2	0.1	0.2	2.25	0.225	4	0.4
المجموع	**1**	**0.5**		**0.45**		**0.7**

حساب التوقع الرياضي:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(x_i) = 0,5$$

حساب التباين:

$$\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0,45$$

حساب الانحراف المعياري:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{0,45} = 0,6708$$

التمرين (06):

ليكن X متغيرا عشوائيا مستمرا دالة كثافته الاحتمالية معطاة كما يلي:

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{3} x_i^2 & \text{si: } -1 \le x_i \le 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

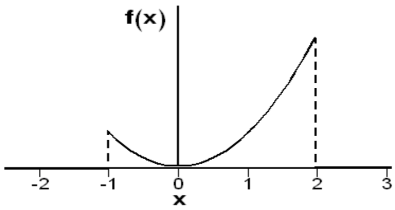
– أوجد دالة التوزيع التراكمية للمتغير العشوائي X.

– باستخدام دالة التوزيع التراكمية، أوجد الاحتمال $P(0 < x \le 1)$.

$$P\left(0 \le x \le \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2 d(x) = [x^3]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$$

الحل:

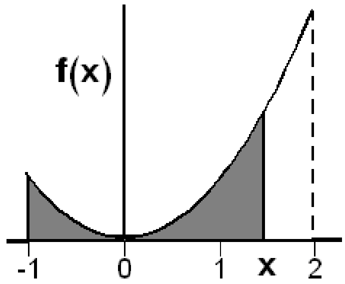
شكل دالة الكثافة الاحتمالية كما يلي:



إيجاد دالة التوزيع التراكمية:

لابد أن نوجد قيمة دالة التوزيع التراكمية لكل قيمة حقيقية x باستخدام تعريف دالة التوزيع التراكمية:

$$F(x_i) = P(X \le x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(u) d(u)$$



$$x \leq -1 : \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)d(u) = \int_{-\infty}^{0} 0d(u) = 0$$

$$-1 < x < 2 : \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)d(u) = \int_{-\infty}^{-1} 0d(u) + \int_{-1}^{x} \frac{1}{3}\, u^2 d(u)$$

$$= \frac{1}{9}(x^3 + 1)$$

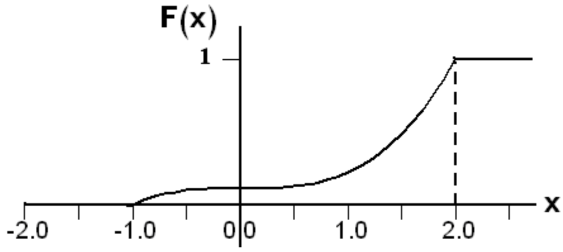
$$x \geq 2 : \; F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)d(u) = \int_{-\infty}^{-1} 0d(u) + \int_{-1}^{2} \frac{1}{3}\, u^2 d(u) + \int_{2}^{x} 0d(u)$$

$$= 1$$

إذن دالة التوزيع للمتغير العشوائي المذكور تكتب كما يلي:

$$F(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si: } x < -1 \\ \frac{1}{9}(x^3 + 1) & \text{si: } -1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si: } x \geq 2 \end{array} \right\}$$

ويمكن تمثيل هذه الدالة بالشكل التالي:



إيجاد الاحتمال $P(0 < x \leq 1)$:

$$P(0 < x \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{1}{9}(1^3 + 1) - \frac{1}{9}(0^3 + 1) = \frac{1}{9}$$

تمارين غير محلولة

التمرين (01):

أي من الدوال التالية يمكن أن تكون دوال توزيع احتمالي (دالة كتلة احتمالية) للمتغير العشوائي X والذي يأخذ القيم الممكنة 1, 2, 3, 4 ، وعلل ذلك .

$a)\quad f(1)=0.26\ ;\ f(2)=0.26\ ;\ f(3)=0.26\ ;\ f(4)=0.26$

$b)\quad f(1)=\frac{1}{9}\ ;\ f(2)=\frac{2}{9}\ ;\ f(3)=\frac{1}{3}\ ;\ f(4)=\frac{1}{3}$

$c)\quad f(1)=0.15\ ;\ f(2)=0.28\ ;\ f(3)=0.29\ ;\ f(4)=0.28$

$d)\quad f(1)=0.33\ ;\ f(2)=0.37\ ;\ f(3)=-0.3\ ;\ f(4)=0.33$

$e)\quad f(1)=\frac{1}{4}\ ;\ f(2)=\frac{1}{8}\ ;\ f(3)=\frac{1}{6}\ ;\ f(4)=\frac{1}{32}$

التمرين (02):

أوجد قيم الثابت c في الدوال التالية والتي تجعل هذه الدوال دوال كتلة احتمالية :

$a)\quad f(x)=cx,\qquad x=1,2,3,4,5$ حيث :

$b)\quad f(x)=c\binom{5}{x},\qquad x=1,2,3,4,5$ حيث :

التمرين (03):

عند دخولك إلى الجامعة تواجه إشارتين ضوئيتين تعملان مستقلتين عن بعضهما البعض واحتمال أن تكون كلتاهما حمراء عند وصولك إليها هو 0.5 . لنرمز بالرمز R للإشارة الحمراء وبالرمز G للإشارة الخضراء.

– أكتب فضاء العينة وأحسب الاحتمالات المرافقة لكل نقطة عينة.

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الإشارات الحمراء التي تواجهها فما هو قيمة X عند كل نقطة عينة ثم أكتب دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X.

التمرين (04):

صنعت قطعة نقود بحيث كان $P(T)=\frac{1}{4}$ و $P(H)=\frac{3}{4}$. ألقيت هذه القطعة 4 مرات بشكل مستقل وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور. أوجد دالة الكتلة الاحتمالية $f(x)$ وكذلك التوقع الرياضي E(X) والتباين σ^2.

التمرين (05):

لوحظ في إحدى الألعاب الرياضية التي نتيجتها إما فوز أو خسارة أن احتمال فوز لاعب ما ثابت في أي مباراة ويساوي 0.6 فإن علم أن هذا اللاعب سوف يلعب 5 مباريات مع أشخاص مختلفين خلال الموسم القادم وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات الفوز. أوجد:

- عدد المباريات المتوقع أن يفوز بها اللاعب.
- أحسب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.
- احتمال أن يفوز بأربع مباريات على الأكثر.
- احتمال أن يخسر مباراتين على الأكثر.

التمرين (06):

رميت 3 عملات متزنة معا. يعرف المتغير العشوائي X بأنه عدد الصور الظاهرة.

- حدد فضاء العينة. هل المتغير العشوائي X مستمر أم متقطع وما هي القيم الممكنة ؟
- أوجد $P(X=3)$ ؟
- أوجد $P(X\geq 1)$ ؟
- ما هو $P(X\leq 1)$ ؟
- أوجد دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X ومنها أوجد التوقع والتباين.

التمرين (07):

يحوي صندوق 6 كرات حمراء و 6 كرات خضراء مرقمة بالأرقام 1، 2، ...، 6. سحبت كرة حمراء وأخرى خضراء. عرف المتغيرات العشوائية، X: مجموع الأرقام الظاهرة و Y: الفرق بين الرقمين الظاهرين.

- حدد فضاء العينة. أي من المتغيرات العشوائية المعرفة سابقا مستمر وأيها متقطع.
- حدد القيم الممكنة لكل متغير عشوائي وأوجد دالة الكتلة الاحتمالية.
- أوجد التوقع والتباين لكل متغير عشوائي.

التمرين (08):

يحوي صندوق 12 مصباحا متشابهة تماما يوجد 4 منها معيبة. سحب 3 مصابيح.

يعرف المتغير العشوائي X: عدد المصابيح المعيبة في العينة.

– ما هي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X. أوجد دالة الكتلة الاحتمالية والتوقع والتباين.

– عبر عن الأحداث التالية باستخدام المتغير العشوائي X:

المصابيح الثلاثة كلها معيبة.

على الأقل اثنان معيبة.

على الأكثر اثنان معيبة.

التمرين (09):

وعاء يحتوي على 4 كرات مرقمة بالأرقام 4 ,3 ,2 ,1 على التوالي سحبت كرتان من الوعاء بدون إرجاع يعرف المتغير العشوائي X على أنه مجموع ما يظهر على الكرتين المسحوبتين.

– أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X والاحتمال المناظر لهذه القيم. ثم أوجد التوقع وتباين المتغير العشوائي X .

– أحسب المطلوب السابق إن كان السحب بإرجاع .

التمرين (10):

سحبت كرتان على التوالي بدون إرجاع من وعاء يحتوي على 4 كرات حمراء و 3 كرات سوداء، فإن كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات الحمراء في العينة المسحوبة. أوجد دالة التوزيع الاحتمالي (دالة الكتلة الاحتمالية) للمتغير العشوائي X . وإن كان السحب بإرجاع، أحسب دالة الكتلة الاحتمالية في هذه الحالة أيضا.

التمرين (11):

احتمال إصابة قنّاص لهدف هو 0.3. فإن صوب نحو الهدف 5 مرات متتالية بشكل مستقل، وإن عرفنا المتغير العشوائي X بأنه عدد مرات الإصابة .

– أوجد دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X .

– أوجد توقع وتباين المتغير العشوائي X .

– أوجد احتمال أن يصيب الشخص الهدف مرة واحدة على الأكثر .

التمرين (12):

اختبار متعدد الاختيارات مكون من 6 أسئلة كل سؤال له 3 إجابات واحدة فقط منها صحيحة. إن أجاب أحد الطلبة بالطريقة التالية:

رمي زهرة نرد متزنة، ثم يختار الجواب الأول إن ظهر له 1 أو 2 . ويختار الجواب الثاني إن ظهر له 3 أو 4 . ويختار الجواب الثالث إن ظهر له 5 أو 6. ما هو احتمال أن يجيب الطالب على:

- ثلاث إجابات صحيحة .
- ولا إجابة صحيحة .
- على الأكثر خمس إجابات صحيحة .
- أوجد التوقع وتباين توزيع المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الإجابات الصحيحة.

التمرين (13):

إن كان من بين 16 متنافسا لوظيفة ما، عشرة لهم درجات جامعية، اختير 3 متنافسين عشوائيا للمعاينة. أوجد الاحتمالات التالية:

- لا يوجد بينهم من يحمل درجة جامعية .
- واحد فقط يحمل درجة جامعية .
- اثنان يحملان درجة جامعية .
- المتنافسون الثلاثة يحملون درجات جامعية .

التمرين (14):

إن كانت نسبة المعيب في الإنتاج تمثل 10 %، سحبت عينة مكونة من 5 وحدات . فأوجد الاحتمالات التالية:

- لا يوجد في العينة وحدات معيبة .
- توجد وحدة واحدة معيبة .
- يوجد على الأكثر وحدة معيبة .
- يوجد على الأقل وحدتان معيبتان .

الفصل الثالث

التوزيعات الاحتمالية

تمهيد:

بعد دراسة مفهوم المتغير العشوائي والتوزيع الاحتمالي سوف نتعرض إلى دراسة عدد من التوزيعات الاحتمالية الشهيرة، تستخدم هذه التوزيعات في حل العديد من المسائل في مجال الإدارة، وهناك الكثير من التوزيعات الشائعة سواء المتقطعة أو المستمرة لكل واحد منها قوانينه الخاصة وخصائصه الأساسية.

1- التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل: إن المتغيرات العشوائية المنفصلة لها تطبيقات متعددة في الحياة العملية، وقد استخدم لهذا النوع من المتغيرات عدد من التوزيعات الاحتمالية التي تساهم في معالجة هذه التطبيقات، وتكون هذه التوزيعات على عدة أنواع، نذكر منها ما يأتي:

- التوزيع المنتظم المنفصل (Uniform distribution)
- توزيع برنولي (Bernoulli Distribution)
- توزيع ذي الحدين (Binomial Distribution)
- توزيع بواسون (Poisson Distribution)
- التوزيع الهندسي (Geometric Distribution)
- التوزيع فوق الهندسي (Hypergeometric Distribution)

وسوف نتعرض لكل من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة (المنفصلة) بالشرح.

1-1- التوزيع المنتظم المنفصل: نفرض X متغيرا عشوائيا متقطعا يأخذ القيم التالية: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بالاحتمالات المتساوية التالية: $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

عندها تكون دالة التوزيع الاحتمالي له:

$$f(x) = P(X = x_i) = P_i = \frac{1}{n}$$

وجدول التوزيع الاحتمالي له هو:

X	x_1	x_2	....	x_n
P_i	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	....	$\frac{1}{n}$

- **الأمل الرياضي والتباين للتوزيع المنتظم:** إن الأمل الرياضي E(X) والتباين V(X) والانحراف المعياري (σ_x) لتوزيع برنولي، هي كالآتي:[1]

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} x_i$$

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} P_i (x_i - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} (x_i - E(X))^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} (x_i - E(X))^2}$$

مثال:

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظمة لمرة واحدة نجد X يأخذ القيم 6 ,5 ,4 ,3 ,2 ,1 بالاحتمالات المتساوية والمساوية $\frac{1}{6}$ نحصل على الجدول:

X	1	2	3	4	5	6
P_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1-2- توزيع برنولي: سمي هذا التوزيع باسم مكتشفه (جيمس برنولي) في نهاية القرن السابع عشر، ويعد توزيع برنولي أو ما يسمى بمحاولات برنولي، الأساس لبناء توزيع ذي الحدين الذي سيأتي ذكره، وتعرف تجربة برنولي بأنها تجربة تكون نتيجتها إما (نجاحا) وتحدث باحتمال (p)، أو (فشلا) وتحدث باحتمال $(q = 1 - p)$.[2]

إن المتغير العشوائي (X) لتجربة برنولي يأخذ قيمتين فقط هما: (0 ، 1)، القيمة (1) تمثل حالة (النجاح)، أما القيمة (0) تمثل حالة (الفشل)، ويكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X)، على النحو الآتي:

$$P(X = x) = \begin{cases} p & \text{si: } x = 1 \\ 1 - p & \text{si: } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

[1]. عادل مفلح الوديان، **الإحصاء والاحتمالات**، مكتبة الرشيد، الرياض، 2007، ص 42.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 44.

- **خصائص توزيع برنولي:** إن أي تجربة إحصائية تحقق الشروط التالية تسمى تجربة برنولي:[1]

- لكل محاولة من المحاولات نتيجتين فقط هما (نجاح) أو (فشل).

- إن نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة المحاولات الأخرى.

- إن احتمال (النجاح) ثابت لجميع المحاولات وليكن (p)، لذا فان احتمال (الفشل) سيكون هو الآخر ثابت وهو $(1-p)$.

إن دالة التوزيع الاحتمالي لتجربة برنولي تدعى بدالة الكتلة الاحتمالية كونها تتميز بالخصائص الآتية:[2]

- إنها دالة وحيدة القيمة، بمعنى إن كل قيمة من القيم المعرفة للمتغير (X) هناك قيمة واحدة فقط للدالة $P(X = x)$.

- إنها دالة موجبة، وتتراوح قيمتها بين الصفر والواحد، أي أن:

$$0 < P(X = x) < 1$$

- إن مجموع القيم الاحتمالية $P(X = x)$ المقابلة لقيم المتغير (X) يساوي الواحد الصحيح.

- **الأمل الرياضي والتباين لتوزيع برنولي:** إن الأمل الرياضي $E(X)$ والتباين $V(X)$ والانحراف المعياري (σ_x) لتوزيع برنولي، هي كالآتي:[3]

$$E(X) = p$$
$$V(X) = p \times q$$
$$\sigma_x = \sqrt{p \times q}$$

__مثال (01):__ عند رمي قطعة نقود متجانسة مرة واحدة في تجربة عشوائية، وكان المتغير العشوائي (X) يمثل ظهور الصورة (H).

__المطلوب:__

- أكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير (X).

- أحسب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري للتوزيع.

[1]. عادل مفلح الوديان، مرجع سابق، ص 43.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 44.

[3]. نفس المرجع السابق، ص 45.

الحل:

- **كتابة دالة التوزيع الاحتمالي:**

نكتب فضاء التجربة (Ω)

$$\Omega = \{H, T\}$$

$$P(H) = \frac{1}{2}$$

دالة التوزيع الاحتمالي تكتب كما يلي:

$$P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si: } x = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si: } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **حساب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري للتوزيع:**

$$E(X) = p = \frac{1}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

1-3- توزيع ذو الحدين: تكون النتائج الممكنة لكثير من الظواهر في الحياة العملية واحدة من نتيجتين، أحد هذه النتائج يسمى (نجاحا) وتحدث باحتمال (p) ، أما النتيجة الثانية تسمى (فشلا) وتحدث باحتمال $(q = 1 - p)$، وهذا النوع من التجارب يطلق عليها بتجربة برنولي، وعند تكرار تجربة برنولي عددا ثابتا من المحاولات المستقلة وليكن (n)، فإننا في هذه الحالة نحصل في كل مرة إما على حالة (نجاح) باحتمال (p) أو حالة (فشل) باحتمال $(q = 1 - p)$.[1]

وعليه فان المتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد مرات (النجاح) لهذا النوع من التجارب، يقال بأنه يتوزع وفق توزيع ذي الحدين، إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:[2]

$$P(X = x) = \begin{cases} C_x^n p^x (1-p)^{n-x} & \text{si: } x = 1,2,3,\dots, n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

---

[1]. عبد الناصر سالم، **مدخل في نظرية الاحتمالات**، مكتبة الرشيد، الرياض، 2007، ص 39.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 40.

إن دالة التوزيع الاحتمالي لتوزيع ذي الحدين، هي عبارة عن الحد العام لمفكوك ثنائي الحدين $(p+q)^n$، مما يجعل توزيع ذي الحدين من بين عائلة توزيعات ثنائية الحدين، ومن هنا جاءت تسمية هذا التوزيع بتوزيع ثنائي الحدين أو توزيع ذي الحدين، ويطلق على كل من (n) و (p) بمعلمات التوزيع (Parameters).

وغالبا ما يعبر عن توزيع ذي الحدين اختصارا بالاصطلاح الآتي: **X ~ B(n, p)**

وهذا يعني بأن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع ذي الحدين بالمعلمتين (n) و (P).

– **خصائص توزيع ذي الحدين:** إن أي تجربة إحصائية تحقق الشروط التالية تسمى توزيع ذي الحدين:[1]

– لكل محاولة من المحاولات نتيجتين فقط، هما (نجاح) أو (فشل).

– إن نتيجة كل محاولة مستقلة عن نتيجة المحاولات الأخرى في التجربة.

– إن احتمال النجاح ثابت لجميع المحاولات وليكن (p)، لذا فان احتمال الفشل سيكون هو الآخر ثابت وهو $(1-p)$.

– تتضمن تجربة ذي الحدين على عدد من المحاولات وليكن (n) ، وإن (n) عبارة عن حجم العينة.

– **الأمل الرياضي والتباين لتوزيع ذي الحدين:** إن الأمل الرياضي E(X) والتباين V(X) والانحراف المعياري (σ_x) لتوزيع ذي الحدين، هي كالآتي:[2]

$$E(X) = n \times p$$
$$V(X) = n \times p \times q$$
$$\sigma_x = \sqrt{n \times p \times q}$$

– **استخدامات تجربة ذي الحدين:** أمثلة تطبيقية على بعض تجارب ذي الحدين:[3]

– طبيعة الإنتاج معيب أو جيد.

– نتيجة رمي عملة معدنية صورة أو كتابة.

– إسقاط طائرة أو عدم إسقاطها.

---

[1]. عبد الناصر سالم، مرجع سابق، ص 41.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 42.

[3]. نفس المرجع السابق، ص 43.

- إصابة هدف معين أو عدم إصابته.
- نتيجة مباراة في كرة السلة خسارة أو فوز.
- التدخين لمجموعة من الطلاب أو عدم التدخين.
- نتيجة الامتحان النهائي لمادة معينة رسوب أو نجاح.

__مثال (02):__ عند رمي قطعة نقود معدنية متجانسة 5 مرات، وكان المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الصور (H) التي تظهر.

__المطلوب:__

- اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X).
- أوجد احتمال ظهور 4 صور.
- أحسب قيمة الاحتمال $P(1 < X \leq 3)$

__الحل:__

- **كتابة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:**

$$P(H) = \frac{1}{2}$$
$$n = 5$$
$$X \sim B(5, \frac{1}{2})$$
$$P(X = x) = \begin{cases} C_x^5 \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} & \text{si: } x = 1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **حساب احتمال ظهور 4 صور:**

$$P(X = 4) = C_4^5 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32}$$

- **حساب قيمة الاحتمال $P(1 < X \leq 3)$:**

$$P(1 < X \leq 3) = P(X = 2) + P(X = 3) = C_2^5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^5 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{10}{36}$$

1-4- توزيع بواسون: سمي هذا التوزيع باسم مكتشفه (سايمون بواسون) عام 1837، ولتوزيع بواسون أهمية كبيرة في التطبيقات الإحصائية المتعددة، إذ يستخدم على نطاق واسع في المجالات

الإدارية وفي بحوث العمليات كونه يعد الأساس في بناء نماذج نظرية صفوف الانتظار، ويطلق أحيانا على هذا التوزيع تسمية (توزيع الحوادث النادرة الوقوع) كونه يتعامل مع كثير من الحالات التطبيقية التي تتصف بأن احتمال نجاح المحاولة يكون صغير جدا، بحيث تكون قيمة ($q = 1 - p$) تؤول إلى الواحد مساوية تقريبا الصحيح، مما يجعل وقوع الحدث نادر جدا، مثال ذلك عدد المرضى المصابين بسرطان الدم في بلد ما، وحوادث سقوط الطائرات.[1]

وبافتراض لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن (X)، يمثل عدد محاولات النجاح في فترة زمنية معينة كأن تكون (ثانية، دقيقة، ساعة، يوم، أسبوع ...الخ)، ففي هذه الحالة يقال بأن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع بواسون، إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:[2]

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda} \times \lambda^{x}}{x!} & \text{si: } x = 0,1,2, \dots, \infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

حيث أن:

e: تمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي، وقيمتها مساوية إلى (2,71828).

λ: تمثل معلمة توزيع بواسون، وتكون موجبة دائما.

!x: تمثل مضروب (مفكوك) العدد (x).

ويمكن إيجاد قيمة المقدار ($e^{-\lambda}$)، بعد معرفة قيمة المعلمة (λ) من جداول خاصة وضعت لهذا الغرض.

وغالبا ما يعبر عن توزيع بواسون، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $\mathbf{X \sim P(\lambda)}$

وهذا يعني بأن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع بواسون بالمعلمة (λ).

- **الأمل الرياضي والتباين لتوزيع بواسون:** إن الأمل الرياضي E(X) والتباين V(X) والانحراف المعياري (σ_x) لتوزيع بواسون، هي كالآتي:[3]

$$E(X) = \lambda$$
$$V(X) = \lambda$$
$$\sigma_x = \sqrt{\lambda}$$

[1]. محمد محمد، **مبادئ الإحصاء والاحتمالات للعلوم الإدارية والتطبيقية**، جامعة صنعاء، 2008، ص 75.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 77.

[3]. نفس المرجع السابق، ص 79.

– **استخدامات توزيع بواسون:** فيما يلي بعض الأمثلة الشائعة حول تجارب بواسون، نذكر منها ما يأتي:[1]

– عدد الزبائن الذين يدخلون إلى احد البنوك خلال 10 دقائق.

– عدد الركاب الذين يصلون إلى محطة الحافلات خلال 5 دقائق.

– عدد الأخطاء المطبعية التي يتم اكتشافها في صفحة من صفحات كتاب معين.

– عدد المكالمات الهاتفية المستلمة خلال ساعة واحدة.

– عدد الحوادث المرورية التي تحدث على الطرق الخارجية خلال يوم واحد.

<u>مثال (03):</u> إذا كان متوسط عدد الحوادث المرورية اليومية التي تحدث على الطرق الوطنية هو حادث واحد.

<u>المطلوب:</u>

– اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X).

– ما هو احتمال أن يحدث حادثان في يوم ما ؟

<u>الحل:</u>

– **كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:**

نفرض المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الحوادث المرورية اليومية، عليه فان:

$$\lambda = 1$$

$$X \sim P(1)$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-1} \times 1^{x}}{x!} & \text{si: } x = 0,1,2,\dots,\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

– **حساب احتمال أن يحدث حادثان في يوم ما:**

$$P(X = 2) = \frac{e^{-1} \times 1^{2}}{2!} = \frac{e^{-1}}{2}$$

من الجداول الخاصة، نحصل على ($e^{-1} = 0,368$) عليه فإن:

$$P(X = 2) = \frac{e^{-1}}{2} = 0,184$$

---

[1]. محمد محمد، مرجع سابق، ص 80.

- **العلاقة بين توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون:** يعد توزيع بواسون حالة خاصة من توزيع ذي الحدين ومشتق منه، عندما يكون احتمال نجاح المحاولة (p) صغير جدا، يقترب من الصفر، وإن عدد المحاولات (n) كبير جدا يقترب من اللانهاية، عليه فان:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ p\to 0}}(np) = \lambda$$

مما يجعل حساب الاحتمالات باستخدام توزيع ذي الحدين في الحالة المذكورة أعلاه، شاقا ومضنيا، إلا انه بالإمكان من حساب الاحتمالات بواسطة توزيع بواسون، عندما تكون: $p \to 0$ و $n \to \infty$ مما يجعل القيمة $\lambda = (np)$ معتدلة.

<u>مثال (04):</u> لوحظ أن احتمال إصابة الشخص بأحد الأمراض المعدية في منطقة معينة كان (0,003)، قامت إحدى الفرق الطبية بإجراء فحص طبي لعينة عشوائية عددها (1000)_شخص، يتوقع أنهم يعانون من الإصابة بهذا المرض.

<u>المطلوب:</u>

- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X).
- أحسب قيمة الاحتمالات الآتية: $P(X = 4)$، $P(X \leq 2)$ ، $P(1 \leq X \leq 2)$

<u>الحل:</u>

- **كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:**

بما إن احتمال نجاح المحاولة (p) صغير جدا، وأن عدد المحاولات (n) كبير جدا، عليه فان:

$$\lambda = (np) = 1000 \times 0{,}003 =$$

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-3} \times 3^x}{x!} & \text{si: } x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **حساب قيمة الاحتمالات:**

$$P(X = 4) = \frac{e^{-3} \times 3^4}{4!} = \frac{e^{-3} \times 81}{24}$$

من الجداول الخاصة، نحصل على $(e^{-3} = 0{,}05)$ عليه فإن:

$$P(X = 4) = \frac{0{,}05 \times 81}{24} = 0{,}169$$

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$
$$= \frac{e^{-3} \times 3^0}{0!} + \frac{e^{-3} \times 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} \times 3^2}{2!} = \frac{17}{2} e^{-3} = \frac{17}{2}(0{,}05)$$
$$= 0{,}425$$
$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = P(X=1) + P(X=2)$$
$$= \frac{e^{-3} \times 3^1}{1!} + \frac{e^{-3} \times 3^2}{2!} = \frac{15}{2} e^{-3} = \frac{15}{2}(0{,}05) = 0{,}375$$

1–5– التوزيع الهندسي: تعد تجارب التوزيع الهندسي مشابهة إلى حد كبير لتجارب توزيع برنولي، التي تفترض بأن نتيجة كل تجربة إما نجاح المحاولة باحتمال (p) أو فشلها باحتمال (1–p)، كما وإن عدد المحاولات في تجارب التوزيع الهندسي لم تكن محددة من البداية كما هو الحال في تجارب توزيع ذي الحدين، وعلى هذا الأساس فان المتغير العشوائي المنفصل (X) في حالة تجارب التوزيع الهندسي، هو عبارة عن عدد محاولات إجراء التجربة دون توقف حتى يتم الحصول على أول نجاح، وبذلك فان أول نجاح سيتم الحصول عليه بالمحاولة (X)، تسبقه عدد من المحاولات الفاشلة وقدرها (X–1).[1]

وبافتراض لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن (X)، يمثل عدد المحاولات اللازمة للحصول على أول نجاح، ففي هذه الحالة يقال بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الهندسي، إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل الآتي:[2]

$$P(X=x) = \begin{Bmatrix} p(1-p)^{x-1} & \text{si: } x = 1,2,\dots,\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{Bmatrix}$$

وغالبا ما يعبر عن التوزيع الهندسي، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $\mathbf{X \sim G(p)}$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الهندسي بالمعلمة (p).

– **الأمل الرياضي والتباين للتوزيع الهندسي:** إن الأمل الرياضي E(X) والتباين V(X) والانحراف المعياري (σ_x) للتوزيع الهندسي، هي كالآتي:[3]

$$E(X) = \frac{1}{p}$$
$$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

---

[1]. رأفت رياض رزق الله، مرجع سابق، ص 82.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 83.

[3]. نفس المرجع السابق، ص 85.

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

<u>مثال (05):</u> رميت زهرة نرد متجانسة في تجربة عشوائية، حتى يتم الحصول على أحد الأوجه.

<u>المطلوب:</u>

- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X).

- ما احتمال أن تحتاج إلى 4 محاولات على الأقل، حتى تحصل على العدد 5 على وجه زهرة النرد ؟

- كم هو معدل عدد المحاولات التي تحتاجها ؟

<u>الحل:</u>

- **كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:**

بما إن احتمال الحصول على احد الأوجه الستة في الرمية الواحدة يساوي $(\frac{1}{6})$ عليه فان:

$$P(X) = \frac{1}{6}$$

$$P(X = x) = \begin{cases} (\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^{x-1} & \text{si: } x = 1,2, \dots, \infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **حساب احتمال أن تحتاج إلى 4 محاولات على الأقل، حتى تحصل على العدد 5 على وجه زهرة النرد:**

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - [P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)]$$
$$= 1 - \left[(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^0 + (\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^1 + (\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^2\right] = 1 - \frac{91}{216} = 0{,}579$$

- **حساب معدل عدد المحاولات:**

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

1-6- التوزيع فوق الهندسي: تعد تجارب التوزيع فوق الهندسي من التجارب المتكررة غير المستقلة، وإن هذا النوع من التجارب مبني على أساس مفهوم السحب بدون إرجاع، مما يجعل احتمال الحصول على صفة معينة غير ثابت، أي أن الاحتمال يتغير من محاولة إلى أخرى، على

عكس تجارب توزيع برنولي وتوزيع ذي الحدين التي يكون فيها الاحتمال ثابت من محاولة إلى أخرى كونهما من التجارب المستقلة، وإن السحب بموجبهما يتم بإرجاع.

فعلى سبيل المثال، لو كان لدينا مجتمع يحتوى على (N) من العناصر، فيه (N_1) لنوع معين من العناصر نسميها (نجاحا)، أما المتبقي منه هو ($N-N_1$) لنوع آخر من العناصر نسميها (فشلا)، وتم اختيار عينة عشوائية بحجم (n) منه بدون إرجاع، فان عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها هي (N_1)، وإن عدد حالات الفشل هي ($N-N_1$) عليه فان:[1]

عدد طرق اختيار (x) من (N_1) هو ($C_x^{N_1}$) ويعبر عنه$\binom{N_1}{x}$

عدد طرق اختيار (n−x) من ($N-N_1$) هو ($C_{n-x}^{N-N_1}$) ويعبر عنه$\binom{N-N_1}{n-x}$

وبالتالي فان عدد الطرق الممكنة لاختيار (x) و (n−x) من (N_1) و ($N-N_1$) على الترتيب هو:

$$\binom{N-N_1}{n-x}\binom{N_1}{x}$$

وعدد الطرق الكلية لاختيار (n) من (N) هو: (C_n^N) ويعبر عنه $\binom{N}{n}$

وبافتراض لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن (X)، يمثل عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها من تجربة التوزيع فوق الهندسي، ففي هذه الحالة يقال بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي، إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:[2]

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{N-N_1}{n-x}\binom{N_1}{x}}{\binom{N}{n}} & \text{si: } x=0,1,2,\dots,n\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

وغالبا ما يعبر عن التوزيع فوق الهندسي، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $\mathbf{X \sim H(N_1, N-N_1)}$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي بالمعلمتين $(\mathbf{N_1})$ و$(\mathbf{N-N_1})$

– **الأمل الرياضي والتباين للتوزيع فوق الهندسي:** إن الأمل الرياضي E(X) والتباين V(X) والانحراف المعياري (σ_x) للتوزيع فوق الهندسي، هي كالآتي:[3]

---

[1]. مبارك أسير ديب، مرجع سابق، ص 52.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 54.

[3]. نفس المرجع السابق، ص 56.

$$E(X) = n\frac{N_1}{N}$$

$$V(X) = n\frac{N_1}{N}(1-\frac{N_1}{N})(\frac{N-n}{N-1})$$

$$\sigma_x = \sqrt{n\frac{N_1}{N}(1-\frac{N_1}{N})(\frac{N-n}{N-1})}$$

حيث أن:$(\frac{N-n}{N-1})$ يمثل معامل التصحيح (خاص بالمجتمعات المحدودة).

<u>مثال (06):</u> يتوفر في احد معارض بيع الأجهزة الكهربائية 15 مكواة بخارية، من بينها ثلاثة أجهزة فيها عطل (معيبة)، قام أحد الوكلاء بشراء ستة مكواة دون فحصها.

<u>المطلوب:</u>

- اكتب دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد الأجهزة العاطلة (المعيبة).
- ما هو احتمال أن يكون من ضمن ما اشتراه الوكيل 2 مكواة فيها عطل ؟

<u>الحل:</u>

- **كتابة دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي:**

$N - N_1 = 12$ ، $n = 6$ $N_1 = 3$ ، $N = 15$

$$P(X=x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{12}{6-x}\binom{3}{x}}{\binom{15}{6}} & \text{si: } x = 0,1,2,\ldots,6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- **حساب احتمال أن يكون من ضمن ما اشتراه الوكيل 2 مكواة فيها عطل:**

$$P(X=2) = \frac{\binom{12}{4}\binom{3}{2}}{\binom{15}{6}} = 0,297$$

2- التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المستمر: تعد التوزيعات الاحتمالية المستمرة ذات أهمية كبيرة على مستوى استخدامها في المجالات الإدارية والاقتصادية والاجتماعية والتربوية من الناحيتين النظرية والتطبيقية، إذ يتم من خلال هذه التوزيعات، تحديد شكل دالة التوزيع الاحتمالي ونوعها، وحساب الاحتمالات التي يحتاجها الباحث في الحياة العملية، وتكون المتغيرات العشوائية لهذا النوع من التوزيعات متمثلة بجميع القيم في فترة ما ولتكن $(a \le x \le b)$ ، مما يجعل عدم

إمكانية عد هذه القيم وإنما يتم قياسها بشكل تقريبي، مثال ذلك: أطوال الطلبة أو أوزانهم، أجور العمال، أسعار السلع وغيرها.

وتكون التوزيعات الاحتمالية المستمرة على عدة أنواع، نذكر منها ما يأتي:

- التوزيع المنتظم المستمر (Uniform continuos distribution)
- التوزيع الطبيعي (Normal Distribution)
- التوزيع الطبيعي المعياري (Standard Normal Distribution)
- توزيع قاما (Gamma Distribution)
- التوزيع الأسي (Exponential Distribution)
- توزيع بيتا (Beta Distribution)

وسوف نتعرض لكل من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة (المنفصلة) بالشرح.

2-1- التوزيع المنتظم المستمر: بافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن (X)، معرفا على المجال $[a-b]$ فان دالة الكثافة الاحتمالية له، تأخذ الشكل الآتي:[1]

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad a \leq x \leq b$$

إن المتوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ)، للتوزيع المنتظم المستمر، تكتب على النحو الآتي:

$$\mu = \int_a^b x f(x)\, d(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x\, d(x) = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{a+b}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$$

2-2- التوزيع الطبيعي: يعود الفضل باكتشاف هذا التوزيع إلى العالم الرياضي الانجليزي (دي مويفر) عام 1733، وكان أول من استخدم التوزيع الطبيعي في دراسة الأخطاء المحتملة في القياس، كل من العالمين الرياضيين (لابلاس) و(غوس) عام 1809، ويعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة من الناحيتين النظرية والتطبيقية، إذ إنه يستخدم على نطاق

---

[1]. جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها**، مرجع سابق، ص 65.

واسع في وصف عدد كبير من الظواهر الطبيعية، منها على سبيل المثال لا الحصر، وصف متغيرات الأوزان والأطوال، قياس مستوى الذكاء، ضبط جودة الإنتاج وغيرها.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن (X)، يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2)، فان دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:[1]

$$f(X) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2} & \text{si: } -\infty \leq X \leq +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

حيث إن:

(μ) و(σ^2)، تمثل معلمات التوزيع الطبيعي.

π تمثل النسبة التقريبية الثابتة $\pi = 3,14159$.

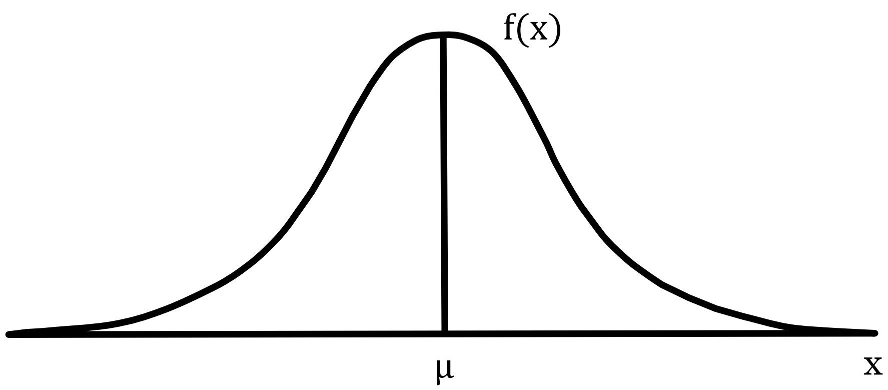
وغالبا ما يعبر عن التوزيع الطبيعي، اختصارا بالاصطلاح الآتي: ($\mathbf{X \sim N(\mu, \sigma^2)}$)

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بالمعلمتين (μ) و(σ^2).

ويتصف التوزيع الطبيعي بالخصائص الآتية:[2]

– إن منحنى دالة الكثافة الاحتمالية f(X) للتوزيع الطبيعي يشبه شكل الجرس، ويكون متماثلا حول المحور العمودي المار بالنقطة $x = \mu$ ، والشكل التالي يوضح ذلك:

شكل رقم (01): منحنى دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي



– يتقارب طرفا منحنى دالة الكثافة الاحتمالية f(X) من الصفر، أي أن:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x) = 0$$

[1]. جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها**، مرجع سابق، ص 68.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 70.

- إن المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد صحيح، أي أن:

$$P(-\infty \leq x \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, d(x) = 1$$

- المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للتوزيع الطبيعي متساوية القيمة.

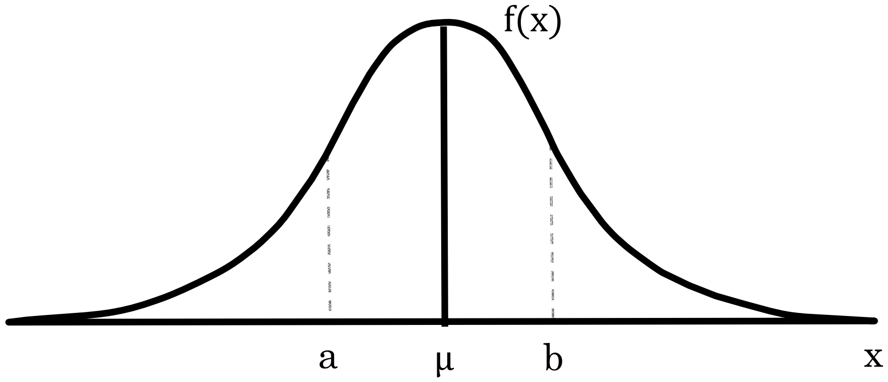
- يعتبر التوزيع الطبيعي مفيدا للعديد من التوزيعات المتقطعة وغير المتقطعة مثل توزيع ذي الحدين وتوزيع بواسون وتوزيع فوق الهندسي وغيرها.

- يعتبر التوزيع الطبيعي حجر الزاوية في الاستدلال الإحصائي حيث تتوزع معالم المجتمع المقدرة من العينة مثل المتوسط وفق التوزيع الطبيعي.

- يمكن حساب المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي بين النقطتين $[a, b]$ مثلا على النحو الآتي:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\, d(x) = P(x \leq b) - P(x \leq a)$$

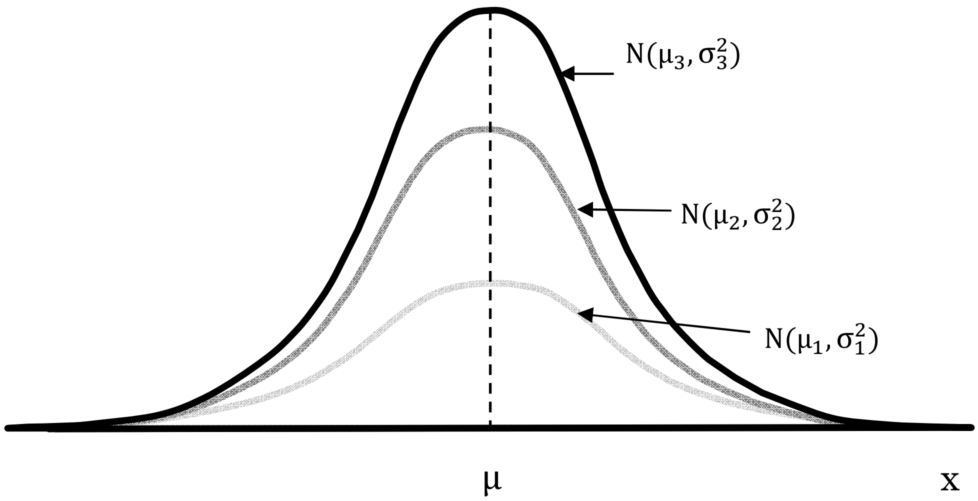
شكل رقم (02): المساحة تحت المنحنى بين نقطتين



يتحدد شكل منحنى دالة التوزيع الطبيعي من خلال المتوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) وذلك على النحو الآتي:

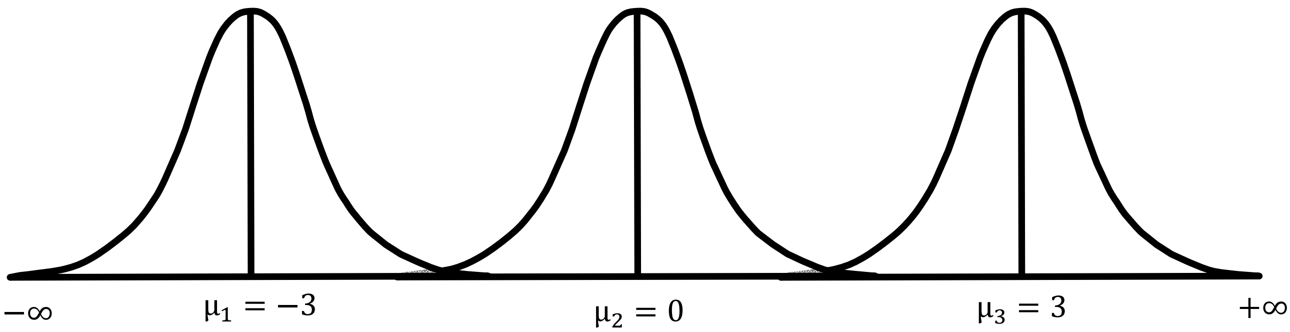
- عند ثبات قيمة المتوسط الحسابي وتغير قيمة التباين نحو الصغر أو الكبر، فان ذلك يحدد درجة تفلطح منحنى الدالة، كما موضح بالشكل الآتي:

شكل رقم (03): تغير منحنى التوزيع الطبيعي حسب تغير قيمة التباين



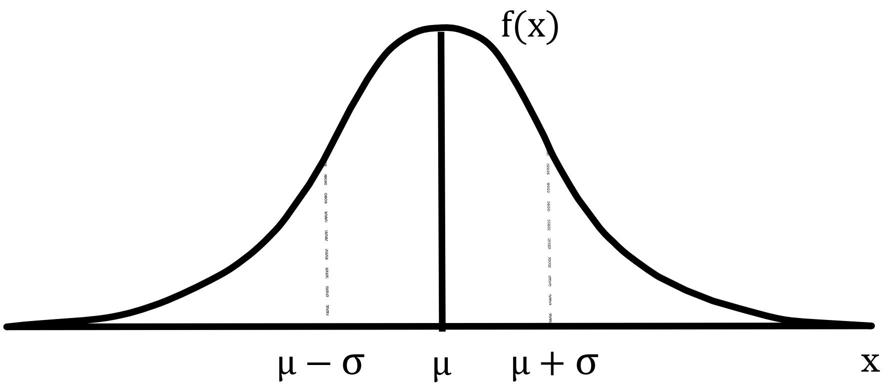
- عند تغير قيمة المتوسط الحسابي (μ)، وثبات قيمة التباين (σ^2)، فان ذلك لا يؤثر على شكل منحنى الدالة، كما موضح بالشكل الآتي:

شكل رقم (04): تغير منحنى التوزيع الطبيعي حسب تغير قيمة المتوسط الحسابي



- تمتلك دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ للتوزيع الطبيعي، نقطتي انقلاب عند النقطتين $[x = \mu - \sigma, x = \mu + \sigma]$، والشكل التالي يوضح ذلك:

شكل رقم (05): نقاط انقلاب منحنى التوزيع الطبيعي



وتأسيسا على ما تقدم، تكون قيم الاحتمالات التالية مساوية إلى الآتي:

$$P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma) = 0{,}6826$$
$$P(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) = 0{,}9544$$
$$P(\mu - 3\sigma \leq x \leq \mu + 3\sigma) = 0{,}9974$$

هذه القيم وغيرها متوفرة في الجداول الإحصائية التي نجدها في الكثير من المراجع، كما يمكن حسابها باستخدام الحاسوب.

حيث أن استخدام دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي لحساب الاحتمالات المختلفة تكتنفه صعوبات رياضية كثيرة تعتمد بالدرجة الأولى على معرفة تامة بعلم التكامل، علاوة على أنه كما ذكرنا يوجد عدد لا نهائي من التوزيعات الطبيعية والتي تحدد كل منها قيم المعلمتين المتوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2)، فإنه لحسن الحظ يمكن تحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري له جداول خاصة تعرف باسم جداول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متى علم متوسطه وانحرافه المعياري.

2-3- التوزيع الطبيعي المعياري: إذا كان لدينا المتغير العشوائي المستمر (X)، يتوزع وفق التوزيع الطبيعي، بمتوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2)، أي أن: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

فان المتغير العشوائي (Z)، يمكن الحصول عليه من خلال إجراء التحويل الآتي: $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

وتسمى (Z) أيضا بالقيمة المعيارية أو الدرجة المعيارية وهي تساعد على إيجاد المساحة أو الاحتمال المطلوب أسفل أي منحنى توزيع طبيعي وذلك باستخدام جدول المساحات تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

عليه فان المتغير العشوائي (Z)، يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري، وله دالة كثافة احتمالية تعطى بالشكل الآتي:[1]

$$f(z) = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} & \text{si: } -\infty \leq z \leq +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{Bmatrix}$$

وغالبا ما يعبر عن التوزيع الطبيعي المعياري، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $\mathbf{Z \sim N(0, 1)}$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (Z) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري بالمعلمتين $(\mu = 0)$ و $(\sigma^2 = 1)$.

---

[1]. جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها**، مرجع سابق، ص 78.

إن المتوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ)، للتوزيع الطبيعي المعياري، تكتب على النحو الآتي:

$$\mu = 0$$
$$\sigma^2 = 1$$
$$\sigma = 1$$

حيث يتم الحصول على قيم الاحتمالات من الجداول الخاصة بالتوزيع الطبيعي المعياري.

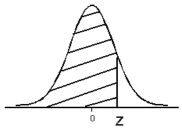
ويتميز المنحنى الطبيعي المعياري بالخصائص التالية:[1]

- المساحة الكلية تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تساوى الواحد الصحيح.
- منحنى التوزيع الطبيعي المعياري متماثل حول متوسطه، وبالتالي فإن التواءه يساوى صفر وتفرطحه يساوى 3.
- تكون قيم الاحتمالات التالية مساوية إلى الآتي:

$$P(-1 \leq z \leq 1) = 0,6826$$
$$P(-2 \leq z \leq 2) = 0,9544$$
$$P(-3 \leq z \leq 3) = 0,9974$$

[1]. جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها**، مرجع سابق، ص 80.

شكل رقم (06): جدول التوزيع الطبيعي المعياري



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

مثال (07): لدينا المتغير العشوائي (Z) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي المعياري.

المطلوب:

أحسب قيمة الاحتمالات الآتية: $P(Z < 2,58)$ ، $P(Z \geq 1,96)$ ، $P(0,68 \leq Z < 3)$

<u>**الحل:**</u>

- **حساب قيمة الاحتمالات:**

من الجداول الخاصة بالتوزيع الطبيعي المعياري نحصل على:

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} < 2{,}58) = 0{,}9951$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{Z} \geq 1{,}96) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 1{,}96) = 1 - 0{,}975 = 0{,}025$$
$$\mathrm{P}(0{,}68 \leq \mathrm{Z} < 3) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 3) - P(Z < 0{,}68) = 0{,}9987 - 0{,}7517$$
$$= 0{,}247$$

- **أسلوب حساب قيمة الاحتمالات للمتغيرات العشوائية ذات التوزيع الطبيعي:** على افتراض لدينا المتغير العشوائي المستمر (X) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2)، أي أن: $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$

فعند حساب قيم الاحتمالات لهذا النوع من التوزيعات، نقوم بتحويل المتغير العشوائي (X) إلى درجات معيارية (Z) وفقا للصيغة الآتية: $\mathrm{Z} = \frac{\mathrm{X}-\mu}{\sigma}$

فعلى سبيل المثال عند إيجاد قيمة الاحتمال التالي للمتغير العشوائي (X) بمتوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2)، فان:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 10) = \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X} - \mu}{\sigma} \leq \frac{10 - \mu}{\sigma}\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} \leq \frac{10 - \mu}{\sigma}\right)$$

<u>**مثال (08):**</u> لدينا المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي، كما يلي: $\mathrm{X} \sim \mathrm{N}(16{,}9)$

<u>**المطلوب:**</u>

أحسب قيمة الاحتمالات الآتية: $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 10)$ ، $\mathrm{P}(\mathrm{X} < 15)$

<u>**الحل:**</u>

- **حساب قيمة الاحتمالات:**

$$\mu = 16$$
$$\sigma^2 = 9$$
$$\sigma = 3$$
$$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geq 10) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{X} < 10) = 1 - \mathrm{P}\left(\frac{\mathrm{X} - 16}{3} < \frac{10 - 16}{3}\right)$$
$$= 1 - \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} < \frac{10 - 16}{3}\right) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} < -2) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} < 2)$$
$$= 0{,}9772$$

$$P(X<15)=P\left(\frac{X-16}{3}<\frac{15-16}{3}\right)=P\left(Z<\frac{-1}{3}\right)=1-P\left(Z<\frac{1}{3}\right)$$
$$=0,3707$$

2-4- توزيع قاما: يعد توزيع قاما من التوزيعات الشائعة الاستخدام في بعض التطبيقات الإحصائية، نذكر منها على سبيل المثال لا الحصر، تقدير دالة المعولية، وتقدير دالة البقاء كما ويعد هذا التوزيع الأساس النظري لتوليد بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة، كالتوزيع الأسي مثلا، من جانب آخر يعالج توزيع قاما عادة المتغيرات العشوائية التي تكون قيمها موجبة دائما، والأمثلة على هذا النوع من المتغيرات كثيرة، نذكر منها مثلا: الفترة الزمنية لبقاء إنسان على قيد الحياة مصاب بمرض عضال، الفترة الزمنية المستغرقة بفحص مريض في إحدى العيادات الطبية، الفترة الزمنية بين وصول باخرتين متتاليتين لأحد الأرصفة وغيرها.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن (X)، يتوزع وفق توزيع قاما، فان دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:[1]

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^{\alpha}\,\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{\frac{-x}{\beta}} & \text{si: } X\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

حيث إن:

α ،β تمثل معلمات توزيع قاما، وإن $[\alpha,\beta>0]$

$\Gamma(\alpha)$ تمثل دالة قاما وتأخذ دالة قاما، الشكل الآتي:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}d(x)$$

وبصورة عامة، إذا كان لدينا العدد (n)، عدد صحيحا موجبا، فان دالة قاما، تأخذ الشكل الآتي:

$$\Gamma n=(n-1)!$$

وفيما يلي، بعض الحالات الخاصة لدالة قاما:

$$\Gamma 1=1$$
$$\Gamma_{\frac{1}{2}}=\pi=3,14159$$

وغالبا ما يعبر عن توزيع قاما، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $\mathbf{X\sim G(\alpha,\beta)}$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع قاما بالمعلمتين (α) و(β).

[1]. جبار عبد مضحي، **الاحصاء والاحتمالات**، مرجع سابق، ص 185.

إن المتوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ) لتوزيع قاما ، تكتب على النحو الآتي:

$$\mu = \alpha\beta$$
$$\sigma^2 = \alpha\beta^2$$
$$\sigma = \beta\sqrt{\alpha}$$

مثال (09): إذا كان لديك المتغير العشوائي المستمر (X)، يمثل الفترة الزمنية لعمل آلة إنتاجية بالسنوات، وله دالة التوزيع الاحتمالي الآتية:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} e^{\frac{-x}{2}} & \text{si: } X \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

المطلوب:

- ما هو احتمال أن تستمر الآلة بالعمل مدة 10 سنوات أخرى على الأكثر ؟
- أحسب متوسط عمر الآلة والتباين.

الحل:

- **حساب احتمال أن تستمر الآلة بالعمل مدة 10 سنوات أخرى على الأكثر:**

$$P(X \leq 10) = \int_0^{10} f(x)\, d(x) = \frac{1}{4}\int_0^{10} x\, e^{\frac{-x}{2}} d(x)$$
$$= \frac{1}{4}[(-0{,}14) - 4(0{,}007 - 1)] = 0{,}958$$

- **حساب متوسط عمر الآلة والتباين:**

$$\mu = \alpha\beta = 2 \times 2 = 4$$
$$\sigma^2 = \alpha\beta^2 = 2 \times 2^2 = 8$$

2-5- التوزيع الأسي: يعد التوزيع الأسي حالة خاصة من توزيع قاما عندما ($\alpha = 1$)، ويستخدم هذا التوزيع لمعالجة بعض التطبيقات الإحصائية الخاصة بالمتغيرات العشوائية، مثال ذلك تقدير دالة معولية الآلات، مدة البقاء لبعض الأجزاء الالكترونية، طول فترة الانتظار في صف انتظار عند الإشارة الضوئية، طبيعة البيانات المتعلقة بدرجات الحرارة العظمى والصغرى المسجلة من قبل دائرة الأحوال الجوية.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن (X)، يتوزع وفق التوزيع الأسي، فان دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:[1]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{\frac{-x}{\beta}} & \text{si: } X \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

وغالبا ما يعبر عن التوزيع الأسي، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $\mathbf{X \sim Exp(\beta)}$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الأسي بالمعلمة (β).

إن المتوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ) التوزيع الأسي، تكتب على النحو الآتي:

$$\mu = \beta$$
$$\sigma^2 = \beta^2$$
$$\sigma = \beta$$

<u>مثال (10):</u> إذا كان لديك المتغير العشوائي المستمر (X) ، يمثل مدة البقاء (ساعة) لجزء الكتروني يستخدم في أجهزة التلفاز، وله دالة كثافة احتمالية، تأخذ الشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{500} e^{\frac{-x}{500}} & \text{si: } X \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>المطلوب:</u>

- ما هو احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة 600 ساعة على الأكثر ؟
- ما هو احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة بين 400 و600 ساعة ؟
- أحسب متوسط عمر الجزء الالكتروني والتباين.

<u>الحل:</u>

- **حساب احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة 600 ساعة على الأكثر:**

$$P(X \leq 600) = 1 - e^{\frac{-600}{500}} = 1 - 0{,}301 = 0{,}699$$

- **حساب احتمال أن يعمر هذا الجزء مدة بين 400 و600 ساعة:**

$$P(400 \leq X \leq 600) = P(X \leq 600) - P(X \leq 400)$$
$$= \left[1 - e^{\frac{-600}{500}}\right] - \left[1 - e^{\frac{-400}{500}}\right] = 0{,}449 - 0{,}301 = 0{,}148$$

---

[1]. جبار عبد مضحي، **الاحصاء والاحتمالات**، مرجع سابق ص 188.

- **حساب متوسط عمر الجزء الالكتروني والتباين:**

$$\mu = \beta = 500$$
$$\sigma^2 = \beta^2 = 250000$$

2-6- توزيع بيتا: يعد توزيع بيتا من التوزيعات الإحصائية المهمة على مستوى كثير من التطبيقات في الحياة العملية، ويستخدم بشكل واسع في دراسة سلوك بعض المتغيرات العشوائية، مثال ذلك: دراسة طبيعة البيانات المسجلة من قبل دائرة الأحوال الجوية والمتعلقة بنسب الرطوبة، أو دراسة معولية الأجهزة والمعدات.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي مستمر وليكن (X) يتوزع وفق توزيع بيتا، فان دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:[1]

$$f(x) = \begin{Bmatrix} \dfrac{\Gamma(\alpha)+\beta}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & \text{si: } 0 \le X \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{Bmatrix}$$

وغالبا ما يعبر عن التوزيع بيتا، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $\mathbf{X \sim \beta(\alpha, \beta)}$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع بيتا بالمعلمتين (α) و(β).

إن المتوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ) لتوزيع بيتا، تكتب على النحو الآتي:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$
$$\sigma^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$
$$\sigma = \frac{1}{(\alpha+\beta)}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1}}$$

<u>**مثال (11):**</u> إذا كان لديك المتغير العشوائي (X)، يمثل نسبة الرطوبة في مدينة ما، وله دالة التوزيع الاحتمالي الآتية:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 30x^2(1-x)^2 & \text{si: } 0 \le X \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{Bmatrix}$$

<u>**المطلوب:**</u>

- ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدنية 40 % على الأكثر ؟

---

[1]. جبار عبد مضحي، **الاحصاء والاحتمالات**، مرجع سابق ص 192.

– ما هو احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدنية 30 % على الأقل ؟

– أحسب القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري.

الحل:

– **حساب احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدنية 40 % على الأكثر:**

$$P(X \leq 0{,}4) = \int_0^{0{,}4} f(x)\, d(x) = \int_0^{0{,}4} (30x^2(1-x)^2)\, d(x)$$

$$= 30\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{0{,}4} = 30[0{,}021 - 0{,}013 + 0{,}002] = 0{,}3$$

– **حساب احتمال أن تكون نسبة الرطوبة في المدنية 30 % على الأقل:**

$$P(X \geq 0{,}3) = 1 - P(X < 0{,}3) = 1 - \int_0^{0{,}3} f(x)\, d(x) =$$

$$1 - \int_0^{0{,}3} (30x^2(1-x)^2)\, d(x) = 1 - 30\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_0^{0{,}3}$$

$$= 1 - 30[0{,}0054] = 0{,}838$$

– **حساب القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري:**

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{3}{3+3} = \frac{1}{2}$$

$$\sigma^2 = \frac{(3)(3)}{(3+3)^2(3+3+1)} = \frac{1}{28} = 0{,}036$$

$$\sigma = \frac{1}{(\alpha+\beta)}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1}} = \sqrt{0{,}036} = 0{,}1897$$

3- متراجحة تشيبيشيف

متراجحة تشيبيشيف هي متراجحة مشهورة ترجع إلى عالم الرياضيات الروسي بافنوتي تشيبيشيف تلعب دورا مهما في نظرية الاحتمالات والإحصاء. كما أنها تعطي وسيلة للفهم الدقيق لكيفية أن التباين يقيس التغير حول المتوسط للمتغير العشوائي .

نعلم أنه إذا عرفنا الدالة الاحتمالية أو دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي x فإننا نستطيع حساب كلا من $V(X)=\sigma^2$ و $E(X)=\mu$ ولكن العكس غير صحيح، بمعنى أنه إذا كنا نعرف $V(X)$و $E(X)$ فإننا لا نستطيع معرفة أو بناء التوزيع الاحتمالي للمتغير X وعلى ذلك لا نستطيع حساب أي احتمالات مثل:

$$P(|x-u| \leq c)$$

والتي تصف احتمال ظهور المتغير العشوائي X ضمن المنطقة المحدودة بـ $\mu+c$ و $\mu-c$ وتحسب عادة بإجراء التكامل على دالة الكثافة الاحتمالية .

على أي حال فإنه إذا كنا لا نستطيع حساب مثل هذه الاحتمالات بمعرفة فقط $V(X)$ و $E(X)$ إلا أننا نستطيع حساب حد أعلى (أو حد أدنى) لهذه الاحتمالات وذلك باستخدام متراجحة تشيبيشيف.

قبل دراسة متراجحة تشيبيشيف ندرس المتراجحة الآتية[1] :

إذا كان X متغيرا عشوائيا غير سالب بحيث أن $E(X) < \infty$ فإنه لأي عدد موجب a تكون:

$$P(x \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

سميت هذه المتراجحة هكذا نسبة إلى عالم الرياضيات الروسي بافنوتي تشيبيشيف، رغم أن أول من أشار إليها هو صديقه وزميله أيريني جول بيانيمي، قدم بيانيمي هذه المبرهنة بدون برهان في عام 1853 وبرهن عليها في عام 1867، أعطى تلميذه آندريه ماركوف برهانا آخر لها في أطروحته للدكتوراه كان ذلك عام 1884 .

إذا كان X متغيرا عشوائيا وسطه μ وتباينه σ^2 فإنه لأي عدد موجب k تكون:[2]

$$P(|X-u| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

[1]. عبدالله بن عبدالكريم الشيحة، **مقدمة في الإحصاء والاحتمالات وتطبيقاتها باستخدام إكسل**، مكتبة الشقرى، الرياض، 2013، ص 256.

[2]. نفس المرجع السابق، ص 257.

مثال:

إذا كان أطوال طلاب الجامعة يتبع توزيعا طبيعياً وسطه 170 سم مع انحراف معياري 8 سم استخدم متراجحة تشيبيشيف لإيجاد حدا أعلى لاحتمال أن يكون أحد الطلاب أطول أو أقصر بـ 12 سم من المتوسط .

الحل :

من المتراجحة نعلم أن:

$$P(|X-u| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} = P(|X-170| \geq 8k) \leq \frac{1}{k^2}$$

باختيار k=1,5 فإن المعادلة السابقة تصبح :

$$P(|X-170| \geq 12) \leq \frac{1}{(1,5)^2} \leq \frac{1}{2,25} \leq 0,44$$

إن القيمة المضبوطة لهذا الاحتمال يمكن حسابها من جدول التوزيع الطبيعي وسنجد أنها تساوي 0.13 وواضح أن هناك فرقا كبيرا بين القيمة التقريبية والقيمة المضبوطة ، ولكن في كثير من الظروف العملية عندما يكون التوزيع الاحتمالي مجهولا يكون الحد الاعلى المحسوب من متراجحة تشيبيشيف (وربما يكون غير دقيق) مفيدا جدا.

4- قانون الأعداد الكبيرة

يقول قانون الأعداد الكبيرة بأن التردد النسبي لحادثة عشوائية يقترب أكثر فأكثر من احتمالها النظري مع ازدياد عدد مرات إعادة التجربة العشوائية.

مثال: تجربة رمي قطعة نقد

نسبة		عدد مرات ظهور الصورة		عدد الرميات
تطبيقي (مشاهد)	نظري	تطبيقي (مشاهد)	نظري	
0،480	0،500	48	50	100
0،491	0،500	491	500	1000
0،497	0،500	4970	5000	10000

5- العزوم والدالة المتجددة للعزوم

5-1- العزوم

كما التباين يعتبر العزم من تطبيقات توقع دالة. نميز بين نوعين من العزوم، العزم المركزي والعزم المرتبط بالأصل، تستخدم العزوم في حساب عدد من المقاييس مثل معامل التماثل، ومعامل التفلطح.

- العزم المركزي μ_r

يعرف العزم المركزي من الدرجة r للمتغير العشوائي X كما يلي:[1]

$$\mu_r = E\left((X-\mu)^r\right), \qquad r = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mu_0 = E\left[(X-\mu)^0\right] = E(1) = 1 \qquad \mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = E\left[(X-\mu)^1\right] = E(X) - E(\mu) = 0 \qquad \mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = E\left[(X-\mu)^2\right] = V(X) \qquad \mu_2 = \sigma^2$$

يحسب العزم المركزي حسب طبيعة المتغير متقطع أو مستمر كما يلي:

$$\mu_r = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x)dx \qquad \mu_r = \sum_i (x_i - \mu)^r f(x)$$

مثال: أحسب العزوم المركزية من الدرجة 0، 1، 2 و3 للمتغير العشوائي ذو دالة الكثافة:

$$f(x) = \begin{cases} x/2 & , \quad 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^0 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 f(x)dx = 1$$

$$\mu_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu) f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx - \mu\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \mu - \mu(1) = 0$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \sigma^2 = \frac{4}{9}$$

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3 f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} \left(x-\frac{4}{3}\right)^3 (0)dx + \int_{0}^{2} \left(x-\frac{4}{3}\right)^3 \frac{x}{2}dx + \int_{2}^{+\infty} \left(x-\frac{4}{3}\right)^3 (0)dx = \frac{16(67)}{27(5)}$$

مثال: أحسب العزوم المركزية من الدرجة 0، 1، 2 و3 للمتغير العشوائي المتقطع الذي يمثل عدد مرات الحصول على صورة في رميتين لقطعة نقدية.

---

[1]. عبدالله بن عبدالكريم الشيحة، مرجع سابق، 281.

– العزم المرتبط بالأصل μ'_r

يعرف العزم المرتبط بالأصل كما يلي:[1]

$$\boxed{\mu'_r = E(X^r), \quad r = 0,1,2,...}$$

$$\mu'_0 = E(X^0) = E(1) = 1 \qquad \mu'_0 = 1$$
$$\mu'_1 = E(X^1) = E(X) = \mu \qquad \mu'_1 = \mu$$
$$\mu'_2 = \mu^2 - \sigma^2 = \mu^2 - \mu_2 \qquad \mu'_2 = \mu^2 - \mu_2$$

مثال: أحسب العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة 0، 1، 2، 3 و4 للمتغير العشوائي المستمر ذو دالة الكثافة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mu'_0 = 1, \qquad \mu'_1 = \mu = 4/3, \qquad \mu'_2 = \mu^2 - \mu_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} = \frac{12}{9},$$
$$\mu'_3 = \int_0^2 x^3 (\frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{16}{5}, \qquad \mu'_4 = \int_0^2 x^4 (\frac{x}{2}) dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

مثال: أحسب العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة 0، 1، 2، 3 و4 للمتغير العشوائي المتقطع الذي يمثل عدد مرات الحصول على صورة في رميتين لقطعة نقدية.

– العلاقة بين العزم المركزي والعزم المرتبط بالأصل

$$\mu_r = \mu'_r - C_r^1 \cdot \mu'_{r-1} \cdot \mu^1 + ... + (-1)^i C_r^i \cdot \mu'_{r-i} \cdot \mu^i + ... + (-1)^r \cdot \mu'_0 \cdot \mu^r$$

يمكن أيضا الحصول على العزوم المرتبطة بالأصل من الدرجة r من خلال اشتقاق الدالة المتجددة للعزوم r مرة.

5-2- الدالة المتجددة للعزوم $M_x(t)$

الدالة المتجددة للعزوم هي دالة مرتبطة بمتغير (معلمة) t بالإضافة إلى ارتباطها ب X، والدالة المتجددة للعزوم كما يلي:[2]

$$M_x(t) = E(e^{tx})$$

في حالة متغير عشوائي متقطع: $M_x(t) = \sum_x e^{tx} f(x)$

[1]. عبدالله بن عبدالكريم الشيحة، مرجع سابق، ص 284.

[2]. نفس المرجع السابق، 289.

في حالة متغير عشوائي مستمر: $M_x(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f(x)dx$

مثال: أكتب الدالة المتجددة للعزوم من أجل $t \neq 0$ للمتغير العشوائي المعرف كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & 0<x<2\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$$M_x(t)=\int_{-\infty}^{0}e^{tx}(0)dx+\int_{0}^{2}e^{tx}f(x)dx+\int_{2}^{+\infty}e^{tx}(0)dx=0+\frac{1}{2}\int_{0}^{2}xe^{tx}dx+0$$

$$M_x(t)=\frac{1}{2}\int_{0}^{2}UdV=\ \frac{1}{2}\left[[UV]_0^2-\int_0^2 VdU\right].\quad U=x\Rightarrow dU=dx,\ dV=e^{tx}dx\Rightarrow V=\frac{e^{tx}}{t}$$

$$M_x(t)=\frac{1}{2}\left(\left[x\frac{e^{tx}}{t}\right]_0^2-\int_0^2\frac{e^{tx}}{t}dx\right)=\frac{1}{2}\left(\left[2\frac{e^{2t}}{t}\right]-\frac{1}{t}\left[\frac{e^{2t}}{t}\right]\right)=\frac{e^{2t}}{t}-\frac{e^{2t}}{2t^2}$$

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لحساب العزم المركزي من درجة r:

$$\boxed{\mu_r'=\frac{d^rM_x(t)}{dt^r}\ \ avec\ t=0}$$

كما تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لإثبات تساوي توزيعين احتماليين، مثلا عند تحقق شروط معينة، ونحتاج ذلك خاصة عند دراسة التقارب بين التوزيعات الاحتمالية.

النظرية التي نستعملها في ذلك هي كالآتي:

ليكن المتغيرات العشوائية X وY لهما الدوال المتجددة للعزوم $M_x(t)$ و $M_y(t)$؛ نقول أن المتغيرات العشوائية X وY لهما نفس التوزيع الاحتمالي إذا:[1]

$$M_x(t) = M_y(t)$$

كما تستخدم الدوال المتجددة للعزوم لإثبات استقلال توزيعين احتماليين.

النظرية التي نستعملها في ذلك هي كالآتي:

إذا كان X وY متغيرات عشوائية مستقلة، لهما الدوال المتجددة للعزوم $M_x(t)$ و $M_y(t)$؛ فإن:

$$M_{x+y}(t) = M_x(t)\ .\ M_y(t)$$

العزوم والدالة المتجدد للعزوم هي عبارة عن توقعات دوال، يدخل العزم في حساب بعض المؤشرات مثل التباين والتوقع الرياضي، معامل التفلطح ومعامل التماثل.

تستخدم الدالة المتجددة للعزوم لإثبات التقارب بين توزيعات احتمالية.

---

[1]. عبدالله بن عبدالكريم الشيحة، مرجع سابق، 292.

تمارين محلولة

التمرين (01):

لنفرض أن لدينا عملة غير متزنة بحيث أن $P(H)=0.4$ و $P(T)=0.6$. رميت هذه العملة ثلاث مرات بشكل مستقل. ليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاث.

- أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- أوجد التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X.
- أوجد الاحتمالات التالية:

الحصول على صورتين

الحصول على صورتين على الأقل

الحصول على صورة واحدة على الأكثر

الحصول على ثلاث كتابات

الحل:

تجربة برنولي هي رمي العملة:

- نتيجة النجاح = ظهور الصورة (H) $\Leftarrow$ احتمال النجاح = $P(H) = p = 0.4$
- نتيجة الفشل = ظهور الكتابة (T) $\Leftarrow$ احتمال الفشل = $P(T) = 1-p = 0.6$

التجربة هي رمي العملة ثلاث مرات بشكل مستقل:

- عدد المحاولات $n=3$ (عدد الرميات)
- المحاولات مستقلة (لأن الرميات مستقلة)
- احتمال النجاح $p=0.4$ ثابت (لأننا نستخدم نفس العملة)

لنعرف المتغير العشوائي:

X = عدد مرات النجاح في المحاولات الثلاث

= عدد مرات ظهور الصورة في الرميات الثلاث

إن المتغير العشوائي X يتوزع وفق توزيع ذو الحدين بالمعلمتين $n=3$ و $p=0.4$، أي أن:

$X \sim B\,(3, 0.4)$

- دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي:

$$P(X=x)=\begin{cases} C_x^3(0.4)^x(0.6)^{3-x} & \text{si: } x=0,1,2,3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ويمكن تمثيل دالة التوزيع الاحتمالي بالجدول التالي:

x	**P(X = x)**
0	$C_0^3(0.4)^0(0.6)^{3-0}=0.216$
1	$C_1^3(0.4)^1(0.6)^{3-1}=0.432$
2	$C_2^3(0.4)^2(0.6)^{3-2}=0.288$
3	$C_3^3(0.4)^3(0.6)^{3-3}=0.064$

أي أن دالة التوزيع الاحتمالي هي:

x	**P(X=x)**
0	0.216
1	0.432
2	0.288
3	0.064

- التوقع الرياضي والتباين للمتغير العشوائي X هما على التوالي:

$E(X) = np = 3 \times 0.4 = 1.2$

$\sigma_X^2 = Var(X) = np(1-p) = 3 \times 0.4 \times 0.6 = 0.72$

- إيجاد الاحتمالات:

P({الحصول على صورتين }) = $P(X=2) = 0.288$

P({الحصول على صورتين على الأقل }) = $P(X\geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$

$= 0.288 + 0.064$

$= 0.352$

P({الحصول على صورة واحدة على الأكثر}) = $P(X\leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$

$= 0.216 + 0.432$

$= 0.648$

P({الحصول على ثلاث كتابات}) = $P(X=0) = 0.216$

التمرين (02):

نسبة الإنتاج التالف لأحد مصانع المصابيح هي 10%. إذا أخذت عينة مكونة من 5 مصابيح بشكل عشوائي من إنتاج هذا المصنع، فأوجد ما يلي:

– أوجد الاحتمالات التالية:

الحصول على مصباح واحد تالف

الحصول على جميع المصابيح تالفة

الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر

الحصول على مصباح واحد تالف على الأقل

– أوجد العدد المتوقع للمصابيح التالفة في العينة.

الحل:

تجربة برنولي هي فحص المصباح:

- نتيجة النجاح = الحصول على مصباح تالف ⇐ احتمال النجاح = $p = 0.1$
- نتيجة الفشل = الحصول على مصباح سليم ⇐ احتمال الفشل = $1-p = 0.9$

التجربة هي فحص 5 مصابيح بشكل مستقل:

- عدد المحاولات $n=5$ (عدد المصابيح)
- المحاولات مستقلة (لأن العينة أخذت بشكل عشوائي)
- احتمال النجاح $p=0.1$ ثابت (لأن المصابيح أخذت من نفس المصنع)

لنعرف المتغير العشوائي:

X = عدد مرات النجاح في المحاولات الخمس

= عدد المصابيح التالفة عند فحص 5 مصابيح

إن المتغير العشوائي X يتوزع وفق توزيع ذات الحدين بالمعلمتين $n=5$ و $p=0.1$، أي أن:

$X \sim B(5, 0.1)$

إن دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X هي:

$$P(X=x)=\begin{cases} C_x^5(0.1)^x(0.9)^{5-x} & \text{si: } x=0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ويمكن تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية بالجدول التالي:

x	P(X = x)
0	$C_0^5(0.1)^0(0.9)^{5-0}=0.59049$
1	$C_1^5(0.1)^1(0.9)^{5-1}=0.32805$
2	$C_2^5(0.1)^2(0.9)^{5-2}=0.07290$
3	$C_3^5(0.1)^3(0.9)^{5-3}=0.00810$
4	$C_4^5(0.1)^4(0.9)^{5-4}=0.00045$
5	$C_5^5(0.1)^5(0.9)^{5-5}=0.00001$

- إيجاد الاحتمالات:

P({الحصول على مصباح واحد تالف}) = P(X=1) = 0.32805

P({الحصول على جميع المصابيح تالفة}) = P(X=5) = 0.00001

P({الحصول على مصباح واحد تالف على الأكثر}) = P(X≤1)

= P(X=0) + P(X=1)

= 0.59049+ 0.32805

= 0.91854

P({الحصول على مصباح واحد تالف على الأقل}) = P(X≥1)

= 1 – P(X = 0)

= 1 – 0.59049

= 0.409510

- العدد المتوقع للمصابيح التالفة في العينة (متوسط عدد المصابيح التالفة) هو:

$E(X) = np = 5 \times 0.1 = 0.5$

وأما تباين عدد المصابيح التالفة فهو:

$\sigma_X^2 = np(1-p) = 5 \times 0.1 \times 0.9 = 0.45$

التمرين (03):

تم إرسال شحنة مكونة من ثلاثين جهازا كهربائيا إلى أحد المتاجر، وقد كانت الشحنة تتضمن أربعة أجهزة تالفة. قام أحد الزبائن بشراء ستة أجهزة باختيارها عشوائيا من هذه الشحنة.

وليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد الأجهزة التالفة التي اشتراها هذا الزبون.

- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- ما هو العدد المتوقع للأجهزة التالفة في المجموعة التي اشتراها هذا الزبون.
- أوجد تباين للمتغير العشوائي X.
- ما هو احتمال أن يكون الزبون قد اشترى ثلاثة أجهزة تالفة من ضمن المجموعة التي اشتراها.
- ما هو احتمال أن تكون جميع الأجهزة التي اشتراها الزبون تالفة.

الحل:

نظرا لقيام الزبون باختيار وشراء ستة أجهزة من ضمن ثلاثين جهازا، فإن عملية الاختيار أو السحب تكون بدون إرجاع. ولذلك فإن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي بالمعالم N=30 و $N_1=4$ و n=6، أي أن: $X \sim H(4,26)$. وتعطى دالة توزيعه الاحتمالية بالصيغة الآتية:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{26}{6-x}\binom{4}{x}}{\binom{30}{6}} & \text{si: } x=0,1,2,3,4\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

العدد المتوقع للأجهزة التالفة التي اشتراها هذا الزبون يساوي:

$$E(X)=n\frac{N_1}{N}=6\frac{4}{30}=0.8$$

تباين للمتغير العشوائي X يساوي:

$$V(X)=n\frac{N_1}{N}(1-\frac{N_1}{N})(\frac{N-n}{N-1})=6\frac{4}{30}\frac{26}{30}\frac{24}{29}=0.5738$$

احتمال أن يكون الزبون قد اشترى ثلاثة أجهزة تالفة يساوي:

$$P(X=3)=\frac{\binom{26}{3}\binom{4}{3}}{\binom{30}{6}}=0.0175$$

احتمال أن تكون جميع الأجهزة التي اشتراها الزبون تالفة يساوي $P(X=6)=0$ وذلك نظرا لأن القيمة 6 ليست من ضمن القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.

التمرين (04):

تم إرسال شحنة مكونة من خمسة آلاف إطار إلى إحدى وكالات السيارات، وقد كانت الشحنة تتضمن ألف إطار تالف. قام أحد الزبائن بشراء عشرة إطارات تم اختيارها بشكل عشوائي من هذه الشحنة. أوجد احتمال وجود ثلاثة إطارات تالفة من ضمن المجموعة التي اشتراها هذا الزبون.

الحل:

ليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد الإطارات التالفة التي اشتراها هذا الزبون. نظرا لقيام الزبون باختيار وشراء عشرة إطارات بشكل عشوائي من هذه الشحنة، فإن عملية الاختيار أو السحب تكون بدون إرجاع. ولذلك فإن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي بالمعالم $N=5000$ و $N_1=1000$ و $n=10$، أي أن: $X\sim H(1000,4000)$.

وتعطى دالة كتلته الاحتمالية بالصيغة الآتية:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{\binom{4000}{10-x}\binom{1000}{x}}{\binom{5000}{10}} & \text{si: } x=0,1,2,3,4,\ldots\ldots,10\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

وفيما يأتي سوف نوجد احتمال أن يكون الزبون قد اشترى ثلاثة إطارات تالفة كما يلي:

$$P(X=3)=\frac{\binom{4000}{7}\binom{1000}{3}}{\binom{5000}{10}}=0.20148$$

التمرين (05):

يستقبل جهاز الرادار الإشارات اللاسلكية في أحد المراصد بشكل متكرر ومستقل. وفي هذه العملية يتم استقبال إشارة مشوشة باحتمال 0.1. لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الإشارات اللازمة لاستقبال أول إشارة مشوشة.

– أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

– ما هو العدد المتوقع للإشارات اللازمة لاستقبال أول إشارة مشوشة.

– أوجد تباين للمتغير العشوائي X.

– ما هو احتمال أن تكون الإشارة الخامسة هي أول إشارة مشوشة يتم استقبالها.

الحل:

يتوزع المتغير العشوائي X وفق التوزيع الهندسي بالمعلمة p=0.1 ، أي أن: $X \sim G(0.1)$

دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X = x) = \begin{cases} 0.1(0.9)^{x-1} & \text{si: } x = 1,2, \dots, \infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

العدد المتوقع للإشارات اللازمة لاستقبال أول إشارة مشوشة يساوي متوسط المتغير العشوائي X، أي أن:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10$$

تباين المتغير العشوائي X يساوي:

$$V(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.9}{0.1^2} = 90$$

احتمال أن تكون الإشارة الخامسة هي أول إشارة مشوشة يتم استقبالها يساوي:

$$P(X = 5) = 0.1(0.9)^4 = 0.0656$$

التمرين (06):

قام أحد المتدربين على الطباعة بطباعة كتاب. ولنفرض أن عدد الأخطاء المطبعية لكل صفحة في هذا الكتاب يتوزع وفق توزيع بواسون بمتوسط 6 أخطاء لكل صفحة.

إذا اخترنا أحد الصفحات من هذا الكتاب بشكل عشوائي، فما هو احتمال:

– أن يوجد 7 أخطاء مطبعية في هذه الصفحة ؟

– أن يوجد ما لا يقل عن خطأين مطبعيين في هذه الصفحة ؟

إذا اخترنا صفحتين اثنتين من صفحات هذا الكتاب بشكل عشوائي، فما هو احتمال أن يوجد 10 أخطاء مطبعية فيهما ؟

إذا اخترنا نصف صفحة من صفحات هذا الكتاب بشكل عشوائي، فما هو احتمال أن لا يوجد فيها أخطاء مطبعية ؟

ما هو متوسط عدد الأخطاء المطبعية لكل سطر من أسطر هذا الكتاب بافتراض أن كل صفحة

تحوي 32 سطرا ؟

ما هو توزيع ومتوسط وتباين المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأخطاء المطبعية لكل 10 صفحات ؟

<u>الحل:</u>

لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الأخطاء المطبعية لكل صفحة. إن X يتوزع وفق توزيع بواسون بالمعلمة $\lambda = 6$، أي أن $X\sim P(6)$

دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-6} \times 6^{x}}{x!} & si: x = 0,1,2, \dots, \infty \\ 0 & sinon \end{cases}$$

احتمال أن يوجد 7 أخطاء مطبعية في الصفحة الواحدة هو:

$$P(X = x) = \frac{e^{-6} \times 6^{7}}{7!} = 0.13768$$

احتمال أن يوجد ما لا يقل عن خطأين مطبعيين في الصفحة الواحدة هو:

$$P(X\geq 2) = P(X=2)+ P(X=3)+ \dots = \sum_{x=2}^{\infty} P(X = x)$$

ولكن من الأسهل حساب الاحتمال السابق باستخدام قانون المتممة كما يلي:

$$P(X\geq 2) = 1- P(X<2) = 1 - [P(X=0)+ P(X=1)]$$

$$=1 - [P(X=0)+ P(X=1)] = 1 - [\frac{e^{-6}6^{0}}{0!} + \frac{e^{-6}6^{1}}{1!}]$$

$$= 1 - (0.00248+0.01487)$$

$$= 1 - 0.01735 = 0.982650$$

لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الأخطاء المطبعية لكل صفحتين. إن X يتوزع وفق توزيع بواسون

بالمعلمة $\lambda = 12$، أي أن $X\sim P(12)$

دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-12} \times 12^{x}}{x!} & si: x = 0,1,2, \dots, \infty \\ 0 & sinon \end{cases}$$

إن احتمال وجود 10 أخطاء مطبعية في صفحتين هو:

$$P(X = 10) = \frac{e^{-12} \times 12^{10}}{10!} = 0.1048$$

لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الأخطاء المطبعية لكل نصف صفحة. إن X يتوزع وفق توزيع بواسون بالمعلمة $\lambda = 3$، أي أن $X \sim P(3)$

دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-3} \times 3^{x}}{x!} & \text{si: } x = 0,1,2,\ldots,\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

إن احتمال عدم وجود أخطاء مطبعية في نصف صفحة هو:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-3} \times 3^{0}}{0!} = 0.0497871$$

متوسط عدد الأخطاء المطبعية لكل سطر من أسطر هذا الكتاب بافتراض أن الصفحة تحوي 32 سطرا هو:

$$E(X) = \lambda t = 6\frac{1}{32} = 0.1875$$

لاحظ هنا أن $t=1/32$ و $\lambda=6$.

توزيع المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الأخطاء المطبعية لكل 10 صفحات هو توزيع بواسون بالمعلمة

بالمعلمة $\lambda = 60$، أي أن $X \sim P(60)$

وأما متوسط وتباين هذا المتغير العشوائي فهما على التوالي:

$$E(X) = \lambda = 60$$
$$Var(X) = \lambda = 60$$

التمرين (07):

إذا كان المتغير العشوائي X الذي يمثل الطول في أحد المجتمعات البشرية يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 165 سم وانحراف معياري 5 سم. فأوجد ما يلي:

- القيمة المعيارية للقيمة $x=172$.
- القيمة x إذا كانت القيمة المعيارية هي $z=-0.52$.

الحل:

المتغير العشوائي X والذي يمثل الطول يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu=165$ سم وانحراف معياري $\sigma=5$ سم (التباين هو $\sigma^2=25$)، أي أن $X \sim N(165,25)$.

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}=\frac{172-165}{5}=1.4$$

إن $x=\mu+\sigma z \Leftrightarrow z=\frac{x-\mu}{\sigma}$، وبالتالي فإن:

$$x=\mu+\sigma z=165+5\times(-0.52)=162.5$$

التمرين (08):

لنفرض أن وزن الحيوان الذكر البالغ لإحدى سلالات الخراف يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 16 كغ وانحراف معياري 0.9 كغ.

- إذا اخترنا أحد الخراف من هذه السلالة بشكل عشوائي فما هو احتمال أن يزيد وزنه عن 14 كغ.
- ما هي النسبة المئوية للخراف من هذه السلالة التي يزيد وزنها عن 14 كغ.
- ما هي النسبة المئوية للخراف من هذه السلالة التي تتراوح أوزانها من 14 إلى 18 كغ.

الحل:

لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل وزن الخروف الذكر البالغ لهذه السلالة. إن المتغير العشوائي X يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu=16$ و تباين $\sigma^2=0.81$، أي أن $X \sim N(16,0.81)$.

احتمال أن يزيد وزن الخروف عن 14 كغ هو:

$$P(X>14)=1-P(X<14)=1-P(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{14-\mu}{\sigma})=1-P(Z<\frac{14-16}{0.91})$$

$$=1-P(Z<-2.22)=1-0.0132=0.9868$$

النسبة المئوية للخراف من هذه السلالة التي يزيد وزنها عن 14 كغ:

$$P(X>14)\times 100\% = 0.9868\times 100\% = 98.68\%$$

لحساب النسبة المئوية للخراف من هذه السلالة التي تتراوح أوزانها من 14 إلى 18 كغ لابد أن نحسب أولا $P(14<X<18)$ كما يلي:

$$P(14<X<18)=P(X<18)-P(X<14)$$

$$= P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{18-\mu}{\sigma}) - P(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{14-\mu}{\sigma})$$

$$= P(Z < \frac{18-16}{0.9}) - P(Z < \frac{14-16}{0.9})$$

$$= P(Z < 2.22) - P(Z < -2.22)$$

$$= 0.9868 - 0.0132$$

$$= 0.9736$$

وعليه فإن النسبة المئوية للخراف التي تتراوح أوزانها من 14 إلى 18 كغ هي %97.36.

التمرين (09):

لنفرض أن المتغير العشوائي T يمثل العمر الزمني بالسنة (الزمن حتى الفشل) لنوع معين من الأجهزة. ولنفرض أن المتغير العشوائي T يتوزع وفق التوزيع الأسي بالمعلمة 5. إذا قمنا بتشغيل أربعة أجهزة من هذا النوع في نفس الوقت وبشكل مستقل، فما هو احتمال أن يستمر الجهاز الأول بالعمل أكثر من ثمان سنوات ؟

الحل:

من المعطيات المتغير العشوائي مستمر (T)، يتوزع وفق التوزيع الأسي، فان دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل الآتي:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{\frac{-t}{5}} & \text{si: } X \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

يعبر عن التوزيع الأسي، اختصارا بالاصطلاح الآتي: $T \sim Exp(5)$

وهذا يعني بان المتغير العشوائي (T) يتوزع وفق التوزيع الأسي بالمعلمة (5).

إن المتوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) والانحراف المعياري (σ) التوزيع الأسي، تكتب على النحو الآتي:

$$\mu = \beta$$
$$\sigma^2 = \beta^2$$
$$\sigma = \beta$$

احتمال أن يستمر الجهاز الأول بالعمل أكثر من ثمان سنوات هو:

$$P(T > 8) = \int_8^\infty f(t)dt = \int_8^\infty \frac{1}{5} e^{\frac{-t}{5}} dt = e^{\frac{-8}{5}} = 0.2$$

تمارين غير محلولة

التمرين (01):

إذا كانت نسبة المصابين بمرض ما في بلد معين هو 0.003 فما هو احتمال عدم وجود أي إصابة في حي يسكنه 6000 نسمة ؟

التمرين (02):

إذا كان هناك 300 خطأ مطبعيا موزعة على صفحات كتاب به 600 صفحة، اختيرت صفحة بطريقة عشوائية. أوجد احتمال أن تحتوي هذه الصفحة على:

- على الأكثر خطأ واحد مطبعي .
- تحتوي على ثلاثة أخطاء فقط .

التمرين (03):

إذا كانت أطوال 500 ورقة من أوراق نبات معين لها توزيع طبيعي بمتوسط 132 مليمترا وانحراف معياري 10 مليمترا . أوجد عدد الأوراق التالية :

- ما بين 130 ملم ، 140 ملم .
- أكبر من 150 ملم .
- أقل من 130 ملم .

التمرين (04):

وجد أن الفترة الزمنية الضرورية لإنجاز اختبار للذكاء يخص طلبة إحدى الكليات يتوزع احتماليا وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 70 دقيقة وانحراف معياري يساوي 12 دقيقة . كم يجب أن نحدد زمن الاختبار إن أردنا إتاحة وقت كافٍ لـ 95% من الطلاب لإتمام الاختبار .

التمرين (05):

يحتوي أحد الرفوف في إحدى المكتبات على عشرة كتب من ضمنها سبعة كتب في الإحصاء. قام أحد القراء باختيار أربعة كتب من هذا الرف بشكل عشوائي.

- ما هو احتمال حصول القارئ على أربعة كتب في الإحصاء.
- ما هو احتمال حصول القارئ على كتاب واحد في الإحصاء.
- ما هو العدد المتوقع لكتب الإحصاء التي يحصل عليها القارئ ؟

التمرين (06):

تحتوي إحدى المكتبات على ألف كتاب من ضمنها ستمائة كتاب في الإحصاء. قام أحد القراء باختيار خمسة كتب من هذه المكتبة بشكل عشوائي. أوجد احتمال حصول القارئ على ثلاثة كتب في الإحصاء.

التمرين (07):

احتمال أن يتأخر إقلاع الرحلة لإحدى شركات الطيران يساوي 0.3. ولغرض وضع خطة للتغلب على مشكلة التأخر، قام منسق الرحلات بمتابعة عملية إقلاع رحلات هذه الشركة، وقرر متابعة ورصد عدد الرحلات التي ينتج عنها أول خمس عمليات إقلاع متأخرة. لنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الرحلات التي ينتج عنها أول خمس عمليات إقلاع متأخرة.

- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- ما هو العدد المتوقع للرحلات التي ينتج عنها أول خمس عمليات إقلاع متأخرة.
- أوجد تباين للمتغير العشوائي X.
- ما هو احتمال أن تكون الرحلة العاشرة هي الرحلة التي حدث لها عملية إقلاع متأخرة للمرة الخامسة.

التمرين (08):

يقوم أحد المعاهد التقنية بتقديم دوراته التدريبية الشهرية في خمسة برامج هي: (سكرتارية، إدخال بيانات، تقنية معلومات، تصميم رقمي، شبكات حاسب). وفي أحد الأشهر تم توزيع المتدربين على البرامج الخمسة حسب النسب التالية على التوالي: (30 %، 20 %، 25 %، 10 %، 15 %). قام المشرف على المعهد باختيار عينة مكونة من 10 متدربين بشكل عشوائي خلال ذلك الشهر لتقديم منحة مجانية لهم كنوع من الدعاية للمعهد. أوجد ما يلي:

- احتمال أن العينة تحوي ثلاثة متدربين في السكرتارية وثلاثة متدربين في إدخال البيانات ومتدربين اثنين في تقنية المعلومات ومتدرب واحد في التصميم الرقمي ومتدرب واحد في شبكات الحاسب.
- احتمال أن العينة تحوي متدربين اثنين من كل برنامج.
- العدد المتوقع للمتدربين في برنامج تقنية المعلومات في العينة.

التمرين (09):

أي من الدوال التالية يمكن أن تكون دوال توزيع احتمالي (دالة كتلة احتمالية) للمتغير العشوائي X والذي يأخذ القيم الممكنة 1, 2, 3, 4 ، وعلل ذلك .

$a)\quad f(1)=0.26\ ;\ f(2)=0.26\ ;\ f(3)=0.26\ ;\ f(4)=0.26$

$b)\quad f(1)=\dfrac{1}{9}\ ;\ f(2)=\dfrac{2}{9}\ ;\ f(3)=\dfrac{1}{3}\ ;\ f(4)=\dfrac{1}{3}$

$c)\quad f(1)=0.15\ ;\ f(2)=0.28\ ;\ f(3)=0.29\ ;\ f(4)=0.28$

$d)\quad f(1)=0.33\ ;\ f(2)=0.37\ ;\ f(3)=-0.3\ ;\ f(4)=0.33$

$e)\quad f(1)=\dfrac{1}{4}\ ;\ f(2)=\dfrac{1}{8}\ ;\ f(3)=\dfrac{1}{6}\ ;\ f(4)=\dfrac{1}{32}$

التمرين (10):

أوجد قيم الثابت c في الدوال التالية والتي تجعل هذه الدوال دوال كتلة احتمالية:

$a)\quad f(x)=cx,\qquad x=1,2,3,4,5$ حيث :

$b)\quad f(x)=c\dbinom{5}{x},\qquad x=1,2,3,4,5$ حيث :

التمرين (11):

عند دخولك إلى الجامعة تواجه إشارتين ضوئيتين تعملان مستقلتين عن بعضهما البعض واحتمال أن تكون كلتاهما حمراء عند وصولك إليها هو 0.5 . لنرمز بالرمز R للإشارة الحمراء وبالرمز G للإشارة الخضراء.

– أكتب فضاء العينة وأحسب الاحتمالات المرافقة لكل نقطة عينة .

– إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الإشارات الحمراء التي تواجهها فما هو قيمة X عند كل نقطة عينة ثم أكتب دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X .

التمرين (12):

صنعت قطعة نقود بحيث كان $P(T)=\dfrac{1}{4}$ و $P(H)=\dfrac{3}{4}$. ألقيت هذه القطعة 4 مرات بشكل مستقل وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد الصور . أوجد دالة الكتلة الاحتمالية $f(x)$ وكذلك المتوسط μ والتباين σ^2 .

التمرين (13):

لوحظ في إحدى الألعاب الرياضية التي نتيجتها إما فوز أو خسارة أن احتمال فوز لاعب ما ثابت في أي مباراة ويساوي 0.6 فإن علم أن هذا اللاعب سوف يلعب 5 مباريات مع أشخاص مختلفين خلال الموسم القادم وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات الفوز أوجد :

- عدد المباريات المتوقع أن يفوز بها اللاعب .
- أحسب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X .
- احتمال أن يفوز بأربع مباريات على الأكثر .
- احتمال أن يخسر مباراتين على الأكثر .

التمرين (14):

رميت 3 عملات متزنة معا. عرف المتغير العشوائي X: عدد الصور الظاهرة.

- حدد فضاء العينة. هل المتغير العشوائي X مستمر ام متقطع وماهي القيم الممكنة ؟
- أوجد $P(X=3)$ ؟
- أوجد $P(X\geq 1)$ ؟
- ما هو $P(X\leq 1)$ ؟
- أوجد دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X ومنها أوجد التوقع والتباين.

التمرين (15):

يحوي صندوق 6 كرات حمراء و6 كرات خضراء مرقمة بالأرقام 1، 2، ...، 6. سحبت كرة حمراء واخرى خضراء. عرف المتغيرات العشوائية X: مجموع الأرقام الظاهرة و Y: الفرق بين الرقمين الظاهرين.

- حدد فضاء العينة. أي من المتغيرات العشوائية المعرفة سابقا مستمر وأيها متقطع.
- حدد القيم الممكنة لكل متغير عشوائي وأوجد دالة الكتلة الاحتمالية.
- أوجد التوقع والتباين لكل متغير عشوائي.

التمرين (16):

يحوي صندوق 12 مصباحا متشابهة تماما يوجد 4 منها معيبة. سحب 3 مصابيح.

عرف المتغير العشوائي X: عدد المصابيح المعيبة في العينة.

– ماهي القيم الممكنة للمتغير العشوائي X. أوجد دالة الكتلة الاحتمالية والتوقع والتباين.

– عبر عن الأحداث التالية باستخدام المتغير العشوائي X:

المصابيح الـ 3 كلها معيبة ؟

على الأقل 2 معيبة ؟

على الأكثر 2 معيبة ؟

التمرين (17):

وعاء يحتوي على 4 كرات مرقمة بالأرقام 4 ,3 ,2 ,1 على التوالي سحبت كرتان من الوعاء بدون إرجاع نعرف المتغير العشوائي X على أنه مجموع ما يظهر على الكرتين المسحوبتين .

– أوجد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X والاحتمال المناظر لهذه القيم .

– أوجد متوسط وتباين المتغير العشوائي X .

التمرين (18):

سحبت كرتان على التوالي بدون إرجاع من وعاء يحتوي على 4 كرات حمراء و 3 كرات سوداء ، فإن كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات الحمراء في العينة المسحوبة . أوجد دالة التوزيع الاحتمالي (دالة الكتلة الاحتمالية) للمتغير العشوائي X وإن كان السحب بإرجاع، أحسب دالة الكتلة الاحتمالية في هذه الحالة أيضا.

التمرين (19):

احتمال إصابة قنّاص لهدف هو 0.3 فإن صوب نحو الهدف 5 مرات متتالية بشكل مستقل، وإن عرفنا المتغير العشوائي X بأنه عدد مرات الإصابة .

– أوجد دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X .

– أوجد توقع وتباين المتغير العشوائي X .

– أوجد احتمال أن يصيب الشخص الهدف مرة واحدة على الأكثر .

التمرين (20):

اختبار متعدد الاختيارات مكون من 6 أسئلة كل سؤال له 3 إجابات واحدة فقط منها صحيحة . إن أجاب أحد الطلبة بالطريقة التالية :

رمي زهرة نرد متزنة، ثم يختار الجواب الأول إن ظهر له 1 أو 2 . ويختار الجواب الثاني إن ظهر له 3 أو 4 . ويختار الجواب الثالث إن ظهر له 5 أو 6. ما هو احتمال أن يجيب الطالب على :

- ثلاث إجابات صحيحة .
- ولا إجابة صحيحة .
- على الأكثر خمس إجابات صحيحة .
- أوجد متوسط وتباين توزيع المتغير العشوائي X، الذي يمثل عدد الإجابات الصحيحة.

<u>التمرين (21):</u>

إن كان من بين 16 متنافساً لوظيفة ما، عشرة لهم درجات جامعية، اختير 3 متنافسين عشوائياً للمعاينة أوجد الاحتمالات التالية :

- لا يوجد بينهم من يحمل درجة جامعية .
- واحد فقط يحمل درجة جامعية .
- اثنان يحملان درجة جامعية .
- المتنافسون الثلاثة يحملون درجات جامعية .

<u>التمرين (22):</u>

إن كانت نسبة المعيب في الإنتاج تمثل % 10 ، سحبت عينة مكونة من 5 وحدات . فأوجد الاحتمالات التالية :

- لا يوجد في العينة وحدات معيبة .
- توجد وحدة واحدة معيبة .
- يوجد على الأكثر وحدة معيبة .
- يوجد على الأقل وحدتان معيبتان .

<u>التمرين (23):</u>

إن كان توزيع بواسون يعطي بالدالة $f(x,\lambda)$ كالتالي :

$$f(x,\lambda)=\frac{\lambda^{x}}{x!}e^{-\lambda},\quad \lambda>0,\quad x=0,1,2,...$$

أوجد :

$f(3,\frac{1}{5})$, $f(5,2)$, $f(6,1)$

التمرين (24):

إن كانت نسبة المصابين بمرض ما في بلد معين هو 0.003 فما هو احتمال عدم وجود أي إصابة في حي يسكنه 6000 نسمة ؟

التمرين (25):

إن كان هناك 300 خطأً مطبعيًا موزعة على صفحات كتاب به 600 صفحة ، اختيرت صفحة بطريقة عشوائية . أوجد احتمال أن تحتوي هذه الصفحة على :

- على الأكثر خطأ واحد مطبعي .
- تحتوي على ثلاثة أخطاء فقط .

التمرين (26):

إن كان المتغير العشوائي Z له توزيع طبيعي معياري، فأوجد التالي :

- $\phi(0.32)$; $P(Z<1.8)$
- $\phi(1.25)$; $P(Z>-0.5)$
- $\phi(-0.82)$; $P(-0.2<Z<0.5)$

التمرين (27):

إن كانت أطوال 500 ورقة من أوراق نبات معين لها توزيع طبيعي بمتوسط 132 مليمتراً وانحراف معياري 10 مليمتراً . أوجد عدد الأوراق التالية :

- ما بين 130 ملم ، 140 ملم .
- أكبر من 150 ملم .
- أقل من 130 ملم .

التمرين (28):

أوجد المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري التي تقع :

- بين Z= 0.87, Z=0
- بين Z=0 , Z= -1.66
- على اليمين من Z = 0.48

- على اليسار من $Z = 1.3$
- على اليسار من $Z = -0.79$
- بين $Z = 0.55$ و $Z = 1.12$
- بين $Z = -1.05$ و $Z = -1.75$

التمرين (29):

إن كان متوسط المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الطبيعي يساوي 80 وانحرافه المعياري يساوي 4.8 أوجد الاحتمالات التي يأخذها المتغير العشوائي للقيم التالية :

- أقل من 87.2
- أكبر من 76.4
- بين 81.2 و 86.0
- بين 71.6 و 88.4

التمرين (30):

إن كان متوسط المتغير العشوائي الموزع توزيعاً طبيعياً هو 62.4 . أوجد الانحراف المعياري له إن علم أن 20 % من المساحة تحت المنحنى تقع على يمين 79.2 .

التمرين (31):

إن كان الانحراف المعياري σ للمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي يساوي 5، أوجد متوسطه إن علم أنه يأخذ قيمة أقل من 52.5 باحتمال يساوي 0.8264 .

التمرين (32):

إن كانت القيمة $Z_{a/2}$ هي القيمة للمتغير العشوائي Z التي تقع على يمينها مساحة تساوي $\frac{a}{2}$ مع ملاحظة أن :

$$P(-z_{a/2} < Z < z_{a/2}) = 1 - a$$

- حدد قيم $Z_{a/2}$ عندما a تأخذ القيم التالية :

$$i) \quad a = 0.01 \ , \ ii) \quad a = 0.1 \ , \ iii) \quad a = 0.05$$

التمرين (33):

وجد أن الفترة الزمنية الضرورية لإنجاز اختبار للذكاء يخص طلبة إحدى الكليات يتوزع احتمالياً وفق التوزيع الطبيعي بمتوسط 70 دقيقة وانحراف معياري يساوي 12 دقيقة . كم يجب أن نحدد زمن الاختبار إن أردنا إتاحة وقت كافٍ لـ 95% من الطلاب لإتمام الاختبار .

التمرين (34):

إن علم أن درجات طلاب السنة الأولى بكلية ما هو متغير عشوائي X يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط

($\mu = 67$) وتباين ($\sigma^2 = 64$) . اختير طالب بشكل عشوائي .

– ما احتمال أن تكون درجته بين 75 و 65 .

– إن كان عدد الطلاب المسجلين بكلية العلوم للسنة الأولى يساوي 600 طالبًا، أوجد عدد الطلاب الذين تزيد درجاتهم عن 60 .

التمرين (35):

يحتوي أحد الرفوف في إحدى المكتبات على عشرة كتب من ضمنها سبعة كتب في الإحصاء. قام أحد القراء باختيار أربعة كتب من هذا الرف بشكل عشوائي.

– ما هو احتمال حصول القارئ على أربعة كتب في الإحصاء.

– ما هو احتمال حصول القارئ على كتاب واحد في الإحصاء.

– ما هو العدد المتوقع لكتب الإحصاء التي يحصل عليها القارئ ؟

التمرين (36):

تحتوي إحدى المكتبات على ألف كتاب من ضمنها ستمئة كتاب في الإحصاء. قام أحد القراء باختيار خمسة كتب من هذه المكتبة بشكل عشوائي. أوجد احتمال حصول القارئ على ثلاثة كتب في الإحصاء مستخدمًا التوزيع فوق الهندسي.

التمرين (37):

احتمال أن يتأخر إقلاع الرحلة لإحدى شركات الطيران يساوي 0.3. ولغرض وضع خطة للتغلب على مشكلة التأخر، قام منسق الرحلات بمتابعة عملية إقلاع رحلات هذه الشركة، وقرر متابعة ورصد عدد الرحلات التي ينتج عنها أول خمس عمليات إقلاع متأخرة. لنفرض أن المتغير

العشوائي X يمثل عدد الرحلات التي ينتج عنها أول خمس عمليات إقلاع متأخرة.

- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- ما هو العدد المتوقع للرحلات التي ينتج عنها أول خمس عمليات إقلاع متأخرة.
- أوجد تباين للمتغير العشوائي X.
- ما هو احتمال أن تكون الرحلة العاشرة هي الرحلة التي حدث لها عملية إقلاع متأخرة للمرة الخامسة.

<u>التمرين (38):</u>

في التمرين السابق، لنفرض أن المنسق قد قرر متابعة ورصد عدد الرحلات التي ينتج عنها أول عملية إقلاع متأخرة. ولنفرض أن المتغير العشوائي X يمثل عدد الرحلات التي ينتج عنها أول عملية إقلاع متأخرة.

- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.
- ما هو العدد المتوقع للرحلات التي ينتج عنها أول عملية إقلاع متأخرة.
- أوجد تباين للمتغير العشوائي X.
- ما هو احتمال أن تكون الرحلة العاشرة هي الرحلة التي حدث لها أول عملية إقلاع متأخرة.

<u>التمرين (39):</u>

تبلغ نسبة الإناث من المرضى الذين يراجعون إحدى المستشفيات 55 %. ولغرض إجراء بعض الدراسات الطبية حول هؤلاء المرضى قام أحد الباحثين باختيار عينة عشوائية مكونة من ستين مريضًا ($n=60$). وليكن المتغير العشوائي X يمثل عدد الإناث في العينة. أوجد الاحتمالات التالية باستخدام توزيع ذات الحدين.

(أ) $P(25 \le X \le 35)$، (ب) $P(X \le 10)$، (ج) $P(X \ge 50)$.

<u>التمرين (40):</u>

يقوم أحد المعاهد التقنية بتقديم دوراته التدريبية الشهرية في خمسة برامج هي: (سكرتارية، إدخال بيانات، تقنية معلومات، تصميم رقمي، شبكات). وفي أحد الأشهر تم توزيع المتدربين على البرامج الخمسة حسب النسب التالية على التوالي:(30 %، 20 %، 25 %، 10 %، 15%). قام المشرف على المعهد باختيار عينة مكونة من 10 متدربين بشكل عشوائي خلال ذلك الشهر لتقديم

منحة مجانية لهم كنوع من الدعاية للمعهد. أوجد ما يلي:

- احتمال أن العينة تحوي ثلاثة متدربين في السكرتارية وثلاثة متدربين في إدخال البيانات ومتدربين اثنين في تقنية المعلومات ومتدرب واحد في التصميم الرقمي ومتدرب واحد في شبكات الحاسب.

- احتمال أن العينة تحوي متدربين اثنين من كل برنامج.

- العدد المتوقع للمتدربين في برنامج تقنية المعلومات في العينة.

خاتمة

في نهاية هذه المطبوعة البيداغوجية يجدر التوضيح الى اهمية دراسة علم الاحتمالات، لكون الاحتمالات موجود في حياتنا اليومية، فأغلب هذه الحوادث لا تعرف نتيجتها بشكل محسومة، ولكن من الممكن توقع المرجح حدوثها من خلال المعطيات والظروف الموجودة، ففي الأعمال التجارية اليومية تتجلى الاحتمالات من خلال التنبؤ بالطلب والتنبؤ بالإنتاج، من خلال عرض البائع لسلع يرجح احتمالية الطلب عليها أكثر من غيرها، وفي مجال التنبؤ بالطقس تتجلى الاحتمالات من خلال توقع حالة الطقس، وفي سوق الأسهم الذي يعتمد بمجمله على توقعات مستقبلية، وأيضا في المجالات الطبية واختبار العقاقير فعند تطبيق علاج معين يعتمد على الاحتمالية أيضا.

كان ولا يزال علم الاحتمالات يدرس في مختلف المعاهد والجامعات، وبسبب أهميته والحاجة الماسة إليه من قبل طلبتنا الأعزاء، لذا قمت بوضع هذه المطبوعة بين أيدي طلبتنا، في محاولة مني لإثراء هذا الموضوع من بعض المصادر المهمة، حيث تناولت أمثلة كثيرة في كل فصل لتعزيز وتوضيح ما ورد من تعاريف أو قوانين أو نظريات. كما وضعت في نهاية كل فصل عدد من التمارين وذلك للمساعدة في التدريب على المواضيع ولتحسين قدرة القارئ على فهم هذه المادة.

قائمة المراجع

قائمة المراجع

1- جبار عبد مضحي، **الاحصاء والاحتمالات**، الاكاديميون للنشر والتوزيع، عمان، 2016.

2- جبار عبد مضحي، **مقدمة في نظرية الاحتمالات وتطبيقاتها**، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، 2010.

3- دلال القاضي، **الاحصاء للإداريين والاقتصاديين**، دار الحامد للنشر والتوزيع، عمان، 2005.

4- طرابية أحمد محمد، **مبادئ نظرية الاحتمال**، مكتبة الرشيد، الرياض، 2006.

5- رأفت رياض رزق الله، **مبادئ الاحتمالات**، المكتبة الأكاديمية، القاهرة، 2003.

6- عادل مفلح الوديان، **الإحصاء والاحتمالات**، مكتبة الرشيد، الرياض، 2007.

7- عبد الحميد عبد المجيد البلداوي، **أساليب الاحصاء للعلوم الاقتصادية وادارة الاعمال مع استخدام برنامج spss** ، دار وائل للنشر، عمان، 2009.

8- عبد الناصر سالم، **مدخل في نظرية الاحتمالات**، مكتبة الرشيد، الرياض، 2007.

9- عبدالله بن عبدالكريم الشيحة، **مقدمة في الإحصاء والاحتمالات وتطبيقاتها باستخدام إكسل**، مكتبة الشقرى، الرياض، 2013.

10- مبارك أسير ديب، **مبادئ في الاحتمالات والاحصاء**، منشورات جامعة تشرين، سوريا، 2005.

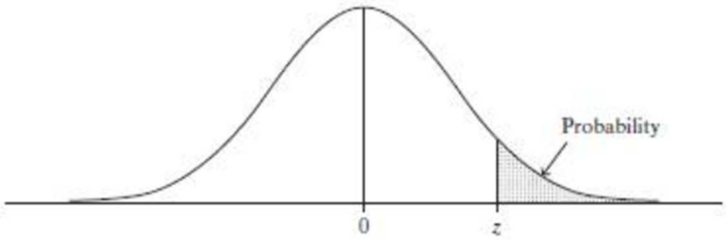
11- محمد عبد العال النعيمي، **الاحصاء التطبيقي**، دار وائل للنشر، عمان، 2008.

12- محمد محمد، **مبادئ الإحصاء والاحتمالات للعلوم الإدارية والتطبيقية**، جامعة صنعاء، 2008.

قائمة الملاحق

الملحق رقم (01): جدول التوزيع الطبيعي المعياري

TABLE A: Normal curve tail probabilities. Standard normal probability in right-hand tail (for negative values of *z*, probabilities are found by symmetry).



z	Second Decimal Place of z									
	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.00135									
3.5	.000233									
4.0	.0000317									
4.5	.00000340									
5.0	.000000287									

Source: R. E. Walpole, *Introduction to Statistics* (New York: Macmillan, 1968).

الملحق رقم (02): القيمة الاحتمالية للتوزيع الثنائي

N	r	p 0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
1	0	0.9500	0.9000	0.8500	0.8000	0.7500	0.7000	0.6500	0.6000	0.5500	0.5000
	1	0.0500	0.1000	0.1500	0.2000	0.2500	0.3000	0.3500	0.4000	0.4500	0.5000
2	0	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.0950	0.1800	0.2550	0.3200	0.3750	0.4200	0.4550	0.4800	0.4950	0.5000
	2	0.0025	0.0100	0.0225	0.0400	0.0625	0.0900	0.1225	0.1600	0.2025	0.2500
3	0	0.8574	0.7290	0.6141	0.5120	0.4219	0.3430	0.2746	0.2160	0.1664	0.1250
	1	0.1354	0.2430	0.3251	0.3840	0.4219	0.4410	0.4436	0.4320	0.4084	0.3750
	2	0.0071	0.0270	0.0574	0.0960	0.1406	0.1890	0.2389	0.2880	0.3341	0.3750
	3	0.0001	0.0010	0.0034	0.0080	0.0156	0.0270	0.0429	0.0640	0.0911	0.1250
4	0	0.8145	0.6561	0.5220	0.4096	0.3164	0.2401	0.1785	0.1296	0.0915	0.0625
	1	0.1715	0.2916	0.3685	0.4096	0.4219	0.4116	0.3845	0.3456	0.2995	0.2500
	2	0.0135	0.0486	0.0975	0.1536	0.2109	0.2646	0.3105	0.3456	0.3675	0.3750
	3	0.0005	0.0036	0.0115	0.0256	0.0469	0.0756	0.1115	0.1536	0.2005	0.2500
	4	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0039	0.0081	0.0150	0.0256	0.0410	0.0625
5	0	0.7738	0.5905	0.4437	0.3277	0.2373	0.1681	0.1160	0.0778	0.0503	0.0313
	1	0.2036	0.3281	0.3915	0.4096	0.3955	0.3602	0.3124	0.2592	0.2059	0.1563
	2	0.0214	0.0729	0.1382	0.2048	0.2637	0.3087	0.3364	0.3456	0.3369	0.3125
	3	0.0011	0.0081	0.0244	0.0512	0.0879	0.1323	0.1811	0.2304	0.2757	0.3125
	4	0.0000	0.0005	0.0022	0.0064	0.0146	0.0284	0.0488	0.0768	0.1128	0.1563
	5	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0024	0.0053	0.0102	0.0185	0.0313
6	0	0.7351	0.5314	0.3771	0.2621	0.1780	0.1176	0.0754	0.0467	0.0277	0.0156
	1	0.2321	0.3543	0.3993	0.3932	0.3560	0.3025	0.2437	0.1866	0.1359	0.0938
	2	0.0305	0.0984	0.1762	0.2458	0.2966	0.3241	0.3280	0.3110	0.2780	0.2344
	3	0.0021	0.0146	0.0415	0.0819	0.1318	0.1852	0.2355	0.2765	0.3032	0.3125
	4	0.0001	0.0012	0.0055	0.0154	0.0330	0.0595	0.0951	0.1382	0.1861	0.2344
	5	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0044	0.0102	0.0205	0.0369	0.0609	0.0938
	6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0018	0.0041	0.0083	0.0156
7	0	0.6983	0.4783	0.3206	0.2097	0.1335	0.0824	0.0490	0.0280	0.0152	0.0078
	1	0.2573	0.3720	0.3960	0.3670	0.3115	0.2471	0.1848	0.1306	0.0872	0.0547
	2	0.0406	0.1240	0.2097	0.2753	0.3115	0.3177	0.2985	0.2613	0.2140	0.1641
	3	0.0036	0.0230	0.0617	0.1147	0.1730	0.2269	0.2679	0.2903	0.2918	0.2734
	4	0.0002	0.0026	0.0109	0.0287	0.0577	0.0972	0.1442	0.1935	0.2388	0.2734
	5	0.0000	0.0002	0.0012	0.0043	0.0115	0.0250	0.0466	0.0774	0.1172	0.1641
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0036	0.0084	0.0172	0.0320	0.0547
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0006	0.0016	0.0037	0.0078
8	0	0.6634	0.4305	0.2725	0.1678	0.1001	0.0576	0.0319	0.0168	0.0084	0.0039
	1	0.2793	0.3826	0.3847	0.3355	0.2670	0.1977	0.1373	0.0896	0.0548	0.0313
	2	0.0515	0.1488	0.2376	0.2936	0.3115	0.2965	0.2587	0.2090	0.1569	0.1094
	3	0.0054	0.0331	0.0839	0.1468	0.2076	0.2541	0.2786	0.2787	0.2568	0.2188
	4	0.0004	0.0046	0.0185	0.0459	0.0865	0.1361	0.1875	0.2322	0.2627	0.2734
	5	0.0000	0.0004	0.0026	0.0092	0.0231	0.0467	0.0808	0.1239	0.1719	0.2188
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0038	0.0100	0.0217	0.0413	0.0703	0.1094
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0033	0.0079	0.0164	0.0313
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0017	0.0039

N	r	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
						p					
9	0	0.6302	0.3874	0.2316	0.1342	0.0751	0.0404	0.0207	0.0101	0.0046	0.0020
	1	0.2985	0.3874	0.3679	0.3020	0.2253	0.1556	0.1004	0.0605	0.0339	0.0176
	2	0.0629	0.1722	0.2597	0.3020	0.3003	0.2668	0.2162	0.1612	0.1110	0.0703
	3	0.0077	0.0446	0.1069	0.1762	0.2336	0.2668	0.2716	0.2508	0.2119	0.1641
	4	0.0006	0.0074	0.0283	0.0661	0.1168	0.1715	0.2194	0.2508	0.2600	0.2461
	5	0.0000	0.0008	0.0050	0.0165	0.0389	0.0735	0.1181	0.1672	0.2128	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0006	0.0028	0.0087	0.0210	0.0424	0.0743	0.1160	0.1641
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0098	0.0212	0.0407	0.0703
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0013	0.0035	0.0083	0.0176
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0020
10	0	0.5987	0.3487	0.1969	0.1074	0.0563	0.0282	0.0135	0.0060	0.0025	0.0010
	1	0.3151	0.3874	0.3474	0.2684	0.1877	0.1211	0.0725	0.0403	0.0207	0.0098
	2	0.0746	0.1937	0.2759	0.3020	0.2816	0.2335	0.1757	0.1209	0.0763	0.0439
	3	0.0105	0.0574	0.1298	0.2013	0.2503	0.2668	0.2522	0.2150	0.1665	0.1172
	4	0.0010	0.0112	0.0401	0.0881	0.1460	0.2001	0.2377	0.2508	0.2384	0.2051
	5	0.0001	0.0015	0.0085	0.0264	0.0584	0.1029	0.1536	0.2007	0.2340	0.2461
	6	0.0000	0.0001	0.0012	0.0055	0.0162	0.0368	0.0689	0.1115	0.1596	0.2051
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0031	0.0090	0.0212	0.0425	0.0746	0.1172
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0043	0.0106	0.0229	0.0439
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016	0.0042	0.0098
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
11	0	0.5688	0.3138	0.1673	0.0859	0.0422	0.0198	0.0088	0.0036	0.0014	0.0005
	1	0.3293	0.3835	0.3248	0.2362	0.1549	0.0932	0.0518	0.0266	0.0125	0.0054
	2	0.0867	0.2131	0.2866	0.2953	0.2581	0.1998	0.1395	0.0887	0.0513	0.0269
	3	0.0137	0.0710	0.1517	0.2215	0.2581	0.2568	0.2254	0.1774	0.1259	0.0806
	4	0.0014	0.0158	0.0536	0.1107	0.1721	0.2201	0.2428	0.2365	0.2060	0.1611
	5	0.0001	0.0025	0.0132	0.0388	0.0803	0.1321	0.1830	0.2207	0.2360	0.2256
	6	0.0000	0.0003	0.0023	0.0097	0.0268	0.0566	0.0985	0.1471	0.1931	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0003	0.0017	0.0064	0.0173	0.0379	0.0701	0.1128	0.1611
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0037	0.0102	0.0234	0.0462	0.0806
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018	0.0052	0.0126	0.0269
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0007	0.0021	0.0054
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0005
12	0	0.5404	0.2824	0.1422	0.0687	0.0317	0.0138	0.0057	0.0022	0.0008	0.0002
	1	0.3413	0.3766	0.3012	0.2062	0.1267	0.0712	0.0368	0.0174	0.0075	0.0029
	2	0.0988	0.2301	0.2924	0.2835	0.2323	0.1678	0.1088	0.0639	0.0339	0.0161
	3	0.0173	0.0852	0.1720	0.2362	0.2581	0.2397	0.1954	0.1419	0.0923	0.0537
	4	0.0021	0.0213	0.0683	0.1329	0.1936	0.2311	0.2367	0.2128	0.1700	0.1208
	5	0.0002	0.0038	0.0193	0.0532	0.1032	0.1585	0.2039	0.2270	0.2225	0.1934
	6	0.0000	0.0005	0.0040	0.0155	0.0401	0.0792	0.1281	0.1766	0.2124	0.2256
	7	0.0000	0.0000	0.0006	0.0033	0.0115	0.0291	0.0591	0.1009	0.1489	0.1934
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0078	0.0199	0.0420	0.0762	0.1208
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0015	0.0048	0.0125	0.0277	0.0537
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0025	0.0068	0.0161
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0029
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
13	0	0.5133	0.2542	0.1209	0.0550	0.0238	0.0097	0.0037	0.0013	0.0004	0.0001
	1	0.3512	0.3672	0.2774	0.1787	0.1029	0.0540	0.0259	0.0113	0.0045	0.0016
	2	0.1109	0.2448	0.2937	0.2680	0.2059	0.1388	0.0836	0.0453	0.0220	0.0095
	3	0.0214	0.0997	0.1900	0.2457	0.2517	0.2181	0.1651	0.1107	0.0660	0.0349
	4	0.0028	0.0277	0.0838	0.1535	0.2097	0.2337	0.2222	0.1845	0.1350	0.0873
	5	0.0003	0.0055	0.0266	0.0691	0.1258	0.1803	0.2154	0.2214	0.1989	0.1571
	6	0.0000	0.0008	0.0063	0.0230	0.0559	0.1030	0.1546	0.1968	0.2169	0.2095
	7	0.0000	0.0001	0.0011	0.0058	0.0186	0.0442	0.0833	0.1312	0.1775	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0011	0.0047	0.0142	0.0336	0.0656	0.1089	0.1571
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0034	0.0101	0.0243	0.0495	0.0873
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0022	0.0065	0.0162	0.0349
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0012	0.0036	0.0095
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0016
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

N	r	p 0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
14	0	0.4877	0.2288	0.1028	0.0440	0.0178	0.0068	0.0024	0.0008	0.0002	0.0001
	1	0.3593	0.3559	0.2539	0.1539	0.0832	0.0407	0.0181	0.0073	0.0027	0.0009
	2	0.1229	0.2570	0.2912	0.2501	0.1802	0.1134	0.0634	0.0317	0.0141	0.0056
	3	0.0259	0.1142	0.2056	0.2501	0.2402	0.1943	0.1366	0.0845	0.0462	0.0222
	4	0.0037	0.0349	0.0998	0.1720	0.2202	0.2290	0.2022	0.1549	0.1040	0.0611
	5	0.0004	0.0078	0.0352	0.0860	0.1468	0.1963	0.2178	0.2066	0.1701	0.1222
	6	0.0000	0.0013	0.0093	0.0322	0.0734	0.1262	0.1759	0.2066	0.2088	0.1833
	7	0.0000	0.0002	0.0019	0.0092	0.0280	0.0618	0.1082	0.1574	0.1952	0.2095
	8	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0082	0.0232	0.0510	0.0918	0.1398	0.1833
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0066	0.0183	0.0408	0.0762	0.1222
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0014	0.0049	0.0136	0.0312	0.0611
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0033	0.0093	0.0222
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0019	0.0056
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0009
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
15	0	0.4633	0.2059	0.0874	0.0352	0.0134	0.0047	0.0016	0.0005	0.0001	0.0000
	1	0.3658	0.3432	0.2312	0.1319	0.0668	0.0305	0.0126	0.0047	0.0016	0.0005
	2	0.1348	0.2669	0.2856	0.2309	0.1559	0.0916	0.0476	0.0219	0.0090	0.0032
	3	0.0307	0.1285	0.2184	0.2501	0.2252	0.1700	0.1110	0.0634	0.0318	0.0139
	4	0.0049	0.0428	0.1156	0.1876	0.2252	0.2186	0.1792	0.1268	0.0780	0.0417
	5	0.0006	0.0105	0.0449	0.1032	0.1651	0.2061	0.2123	0.1859	0.1404	0.0916
	6	0.0000	0.0019	0.0132	0.0430	0.0917	0.1472	0.1906	0.2066	0.1914	0.1527
	7	0.0000	0.0003	0.0030	0.0138	0.0393	0.0811	0.1319	0.1771	0.2013	0.1964
	8	0.0000	0.0000	0.0005	0.0035	0.0131	0.0348	0.0710	0.1181	0.1647	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0034	0.0116	0.0298	0.0612	0.1048	0.1527
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0030	0.0096	0.0245	0.0515	0.0916
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0074	0.0191	0.0417
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052	0.0139
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010	0.0032
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
16	0	0.4401	0.1853	0.0743	0.0281	0.0100	0.0033	0.0010	0.0003	0.0001	0.0000
	1	0.3706	0.3294	0.2097	0.1126	0.0535	0.0228	0.0087	0.0030	0.0009	0.0002
	2	0.1463	0.2745	0.2775	0.2111	0.1336	0.0732	0.0353	0.0150	0.0056	0.0018
	3	0.0359	0.1423	0.2285	0.2463	0.2079	0.1465	0.0888	0.0468	0.0215	0.0085
	4	0.0061	0.0514	0.1311	0.2001	0.2252	0.2040	0.1553	0.1014	0.0572	0.0278
	5	0.0008	0.0137	0.0555	0.1201	0.1802	0.2099	0.2008	0.1623	0.1123	0.0667
	6	0.0001	0.0028	0.0180	0.0550	0.1101	0.1649	0.1982	0.1983	0.1684	0.1222
	7	0.0000	0.0004	0.0045	0.0197	0.0524	0.1010	0.1524	0.1889	0.1969	0.1746
	8	0.0000	0.0001	0.0009	0.0055	0.0197	0.0487	0.0923	0.1417	0.1812	0.1964
	9	0.0000	0.0000	0.0001	0.0012	0.0058	0.0185	0.0442	0.0840	0.1318	0.1746
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0014	0.0056	0.0167	0.0392	0.0755	0.1222
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0013	0.0049	0.0142	0.0337	0.0667
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0040	0.0115	0.0278
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0008	0.0029	0.0085
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
17	0	0.4181	0.1668	0.0631	0.0225	0.0075	0.0023	0.0007	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.3741	0.3150	0.1893	0.0957	0.0426	0.0169	0.0060	0.0019	0.0005	0.0001
	2	0.1575	0.2800	0.2673	0.1914	0.1136	0.0581	0.0260	0.0102	0.0035	0.0010
	3	0.0415	0.1556	0.2359	0.2393	0.1893	0.1245	0.0701	0.0341	0.0144	0.0052
	4	0.0076	0.0605	0.1457	0.2093	0.2209	0.1868	0.1320	0.0796	0.0411	0.0182
	5	0.0010	0.0175	0.0668	0.1361	0.1914	0.2081	0.1849	0.1379	0.0875	0.0472
	6	0.0001	0.0039	0.0236	0.0680	0.1276	0.1784	0.1991	0.1839	0.1432	0.0944
	7	0.0000	0.0007	0.0065	0.0267	0.0668	0.1201	0.1685	0.1927	0.1841	0.1484
	8	0.0000	0.0001	0.0014	0.0084	0.0279	0.0644	0.1134	0.1606	0.1883	0.1855
	9	0.0000	0.0000	0.0003	0.0021	0.0093	0.0276	0.0611	0.1070	0.1540	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0025	0.0095	0.0263	0.0571	0.1008	0.1484
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0026	0.0090	0.0242	0.0525	0.0944
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0081	0.0215	0.0472
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0021	0.0068	0.0182
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0016	0.0052

		p									
N	r	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
17	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003	0.0010
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
18	0	0.3972	0.1501	0.0536	0.0180	0.0056	0.0016	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3763	0.3002	0.1704	0.0811	0.0338	0.0126	0.0042	0.0012	0.0003	0.0001
	2	0.1683	0.2835	0.2556	0.1723	0.0958	0.0458	0.0190	0.0069	0.0022	0.0006
	3	0.0473	0.1680	0.2406	0.2297	0.1704	0.1046	0.0547	0.0246	0.0095	0.0031
	4	0.0093	0.0700	0.1592	0.2153	0.2130	0.1681	0.1104	0.0614	0.0291	0.0117
	5	0.0014	0.0218	0.0787	0.1507	0.1988	0.2017	0.1664	0.1146	0.0666	0.0327
	6	0.0002	0.0052	0.0301	0.0816	0.1436	0.1873	0.1941	0.1655	0.1181	0.0708
	7	0.0000	0.0010	0.0091	0.0350	0.0820	0.1376	0.1792	0.1892	0.1657	0.1214
	8	0.0000	0.0002	0.0022	0.0120	0.0376	0.0811	0.1327	0.1734	0.1864	0.1669
	9	0.0000	0.0000	0.0004	0.0033	0.0139	0.0386	0.0794	0.1284	0.1694	0.1855
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0042	0.0149	0.0385	0.0771	0.1248	0.1669
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0046	0.0151	0.0374	0.0742	0.1214
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0047	0.0145	0.0354	0.0708
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0045	0.0134	0.0327
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011	0.0039	0.0117
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0009	0.0031
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
19	0	0.3774	0.1351	0.0456	0.0144	0.0042	0.0011	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2852	0.1529	0.0685	0.0268	0.0093	0.0029	0.0008	0.0002	0.0000
	2	0.1787	0.2852	0.2428	0.1540	0.0803	0.0358	0.0138	0.0046	0.0013	0.0003
	3	0.0533	0.1796	0.2428	0.2182	0.1517	0.0869	0.0422	0.0175	0.0062	0.0018
	4	0.0112	0.0798	0.1714	0.2182	0.2023	0.1491	0.0909	0.0467	0.0203	0.0074
	5	0.0018	0.0266	0.0907	0.1636	0.2023	0.1916	0.1468	0.0933	0.0497	0.0222
	6	0.0002	0.0069	0.0374	0.0955	0.1574	0.1916	0.1844	0.1451	0.0949	0.0518
	7	0.0000	0.0014	0.0122	0.0443	0.0974	0.1525	0.1844	0.1797	0.1443	0.0961
	8	0.0000	0.0002	0.0032	0.0166	0.0487	0.0981	0.1489	0.1797	0.1771	0.1442
	9	0.0000	0.0000	0.0007	0.0051	0.0198	0.0514	0.0980	0.1464	0.1771	0.1762
	10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0066	0.0220	0.0528	0.0976	0.1449	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0018	0.0077	0.0233	0.0532	0.0970	0.1442
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0004	0.0022	0.0083	0.0237	0.0529	0.0961
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0024	0.0085	0.0233	0.0518
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0006	0.0024	0.0082	0.0222
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0022	0.0074
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0005	0.0018
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0003
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
20	0	0.3585	0.1216	0.0388	0.0115	0.0032	0.0008	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3774	0.2702	0.1368	0.0576	0.0211	0.0068	0.0020	0.0005	0.0001	0.0000
	2	0.1887	0.2852	0.2293	0.1369	0.0669	0.0278	0.0100	0.0031	0.0008	0.0002
	3	0.0596	0.1901	0.2428	0.2054	0.1339	0.0716	0.0323	0.0123	0.0040	0.0011
	4	0.0133	0.0898	0.1821	0.2182	0.1897	0.1304	0.0738	0.0350	0.0139	0.0046
	5	0.0022	0.0319	0.1028	0.1746	0.2023	0.1789	0.1272	0.0746	0.0365	0.0148
	6	0.0003	0.0089	0.0454	0.1091	0.1686	0.1916	0.1712	0.1244	0.0746	0.0370
	7	0.0000	0.0020	0.0160	0.0545	0.1124	0.1643	0.1844	0.1659	0.1221	0.0739
	8	0.0000	0.0004	0.0046	0.0222	0.0609	0.1144	0.1614	0.1797	0.1623	0.1201
	9	0.0000	0.0001	0.0011	0.0074	0.0271	0.0654	0.1158	0.1597	0.1771	0.1602
	10	0.0000	0.0000	0.0002	0.0020	0.0099	0.0308	0.0686	0.1171	0.1593	0.1762
	11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0005	0.0030	0.0120	0.0336	0.0710	0.1185	0.1602
	12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0008	0.0039	0.0136	0.0355	0.0727	0.1201
	13	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0010	0.0045	0.0146	0.0366	0.0739
	14	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0012	0.0049	0.0150	0.0370
	15	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0049	0.0148
	16	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0013	0.0046
	17	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0011
	18	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002
	19	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	20	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

الملحق رقم (03): القيمة الاحتمالية لتوزيع بواسون

	λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
r	0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
	1	0,0905	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
	2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647	0,1839
	3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
	4		0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
	5			0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
	6					0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
	7							0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	8										0,0000

	λ	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
r	0	0,3329	0,3012	0,2725	0,2466	0,2231	0,2019	0,1827	0,1653	0,1496	0,1353
	1	0,3662	0,3614	0,3543	0,3452	0,3347	0,3230	0,3106	0,2975	0,2842	0,2707
	2	0,2014	0,2169	0,2303	0,2417	0,2510	0,2584	0,2640	0,2678	0,2700	0,2707
	3	0,0738	0,0867	0,0998	0,1128	0,1255	0,1378	0,1496	0,1607	0,1710	0,1804
	4	0,0203	0,0260	0,0324	0,0395	0,0471	0,0551	0,0636	0,0723	0,0812	0,0902
	5	0,0045	0,0062	0,0084	0,0111	0,0141	0,0176	0,0216	0,0260	0,0309	0,0361
	6	0,0008	0,0012	0,0018	0,0026	0,0035	0,0047	0,0061	0,0078	0,0098	0,0120
	7	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0008	0,0011	0,0015	0,0020	0,0027	0,0034
	8	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005	0,0006	0,0009
	9			0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0002
	10						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	11									0,0000	0,0000

	λ	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3
r	0	0,1225	0,1108	0,1003	0,0907	0,0821	0,0743	0,0672	0,0608	0,0550	0,0498
	1	0,1083	0,2438	0,2306	0,2177	0,2052	0,1931	0,1815	0,1703	0,1596	0,1494
	2	0,0053	0,2681	0,2652	0,2613	0,2565	0,2510	0,2450	0,2384	0,2314	0,2240
	3	0,0000	0,1966	0,2033	0,2090	0,2138	0,2176	0,2205	0,2225	0,2237	0,2240
	4	0,0000	0,1082	0,1169	0,1254	0,1336	0,1414	0,1488	0,1557	0,1622	0,1680
	5	0,0000	0,0476	0,0538	0,0602	0,0668	0,0735	0,0804	0,0872	0,0940	0,1008
	6	0,0000	0,0174	0,0206	0,0241	0,0278	0,0319	0,0362	0,0407	0,0455	0,0504
	7	0,0000	0,0055	0,0068	0,0083	0,0099	0,0118	0,0139	0,0163	0,0188	0,0216
	8	0,0000	0,0015	0,0019	0,0025	0,0031	0,0038	0,0047	0,0057	0,0068	0,0081
	9			0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0014	0,0018	0,0022	0,0027
	10						0,0003	0,0004	0,0005	0,0006	0,0008
	11						0,0001	0,0001	0,0001	0,0002	0,0002
	12						0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
	13									0,0000	0,0000

	λ	2,5	3	4	4,5	5	5,5	6	7	8	9
r	0	0,0821	0,0498	0,0183	0,0111	0,0067	0,0041	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001
	1	0,2052	0,1494	0,0733	0,0500	0,0337	0,0225	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011
	2	0,2565	0,2240	0,1465	0,1125	0,0842	0,0618	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050
	3	0,2138	0,2240	0,1954	0,1687	0,1404	0,1133	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150
	4	0,1336	0,1680	0,1954	0,1898	0,1755	0,1558	0,1339	0,0912	0,0573	0,0337
	5	0,0668	0,1008	0,1563	0,1708	0,1755	0,1714	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607
	6	0,0278	0,0504	0,1042	0,1281	0,1462	0,1571	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911
	7	0,0099	0,0216	0,0595	0,0824	0,1044	0,1234	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171
	8	0,0031	0,0081	0,0298	0,0463	0,0653	0,0849	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318
	9	0,0009	0,0027	0,0132	0,0232	0,0363	0,0519	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318
	10	0,0002	0,0008	0,0053	0,0104	0,0181	0,0285	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186
	11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0043	0,0082	0,0143	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970
	12		0,0001	0,0006	0,0016	0,0034	0,0065	0,0113	0,0263	0,0481	0,0728
	13		0,0000	0,0002	0,0006	0,0013	0,0028	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504