



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques

Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

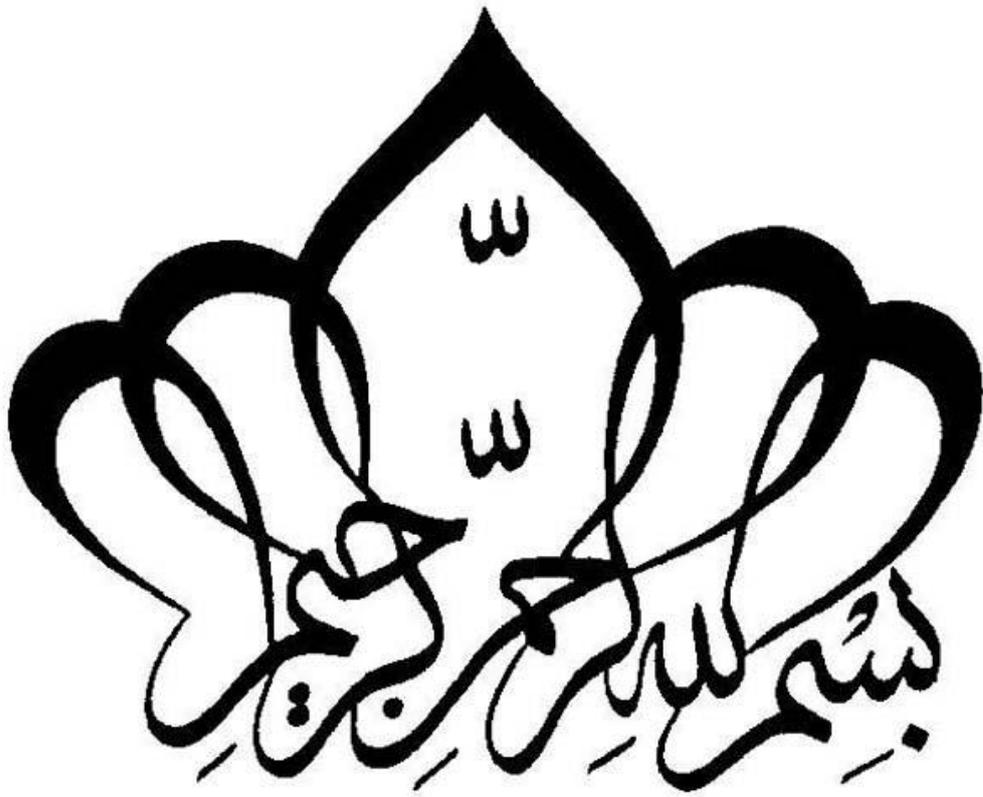
Sur l'analyse des systèmes fractionnaires chaotiques

Présenté Par:
Bousslah Ikram
Maamar Oussama

Devant le jury :

Mr, Dhiab zouhair	MCB Université Larbi Tébessi	Président
Mr, Gasri Ahlam	MCA Université Larbi Tébessi	Examinatrice
Mr, Hannachi Fareh	MCA Université Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 19/06/2021



Remercuments



Nous remercions ALLAH tout puissant pour
la volonté et la patience qu'il nous a donné
tout au long de nos études.

Nos remerciements pour notre encadreur Dr.Hannachi Fareh
pour ses conseils pertinents, et ses orientations sages,
sa patience et vigilance, ainsi pour tous les enseignants
qui ont contribué à ma formation.

Nos remerciements vont aussi à tous les membres du jury qui ont
accepté de juger notre travail.

Enfin, nous voulons exprimer notre reconnaissance à tous nos amis
et collègues pour le soutien moral et matériel...

Je dédie ce modeste travail

♥ A mes parents que j'aime beaucoup : Salah Eddin et Zina Pour leur amour,
sacri.ce et encouragement♥



♥ A ma cher soeur : KOUKA♥

♥ A mes chers frères : ZIKOU ET AYMEN♥

♥ A toute ma famille♥

♥ A ma fidèle amie Kouloud♥

♥ A mes amis♥

♥ A tous ceux que j'aime et je respecte♥

Je dédie ce travail...

À mes parents.



À mes frères et mes sœurs.

À mes amis .

À mes élèves.

Abstract

In this work, we have dealt with the analysis of fractional order chaotic systems, we have seen a description of the main characteristics of fractional chaotic systems and present the basic concepts on fractional systems, followed by examples of fractional chaotic systems, afterwards we are interested in the study of chaotic dynamic sentences such as the search for fixed points and points of stability by finding values for the Lyapunov of the sentence.

On the other hand, the dynamic analysis of these sentences was based on the diagrams and the Lyapunov values or on the maximum value of the Lyapunov values for the dynamic sentence, finally check the results using numerical simulation through Matlab are used for confirmed the results obtained in this memoir.

Resumé

Dans ce travail, nous avons traité l'analyse de système chaotique d'ordre fractionnaire, nous avons vu une description des principales caractéristiques des systèmes chaotiques fractionnaire et présentons les concept de base sur les systèmes fractionnaire ,suivie à des exemples des systèmes chaotiques fractionnaire, après nous intéressons à l'étude des phrases dynamiques chaotiques telles que la recherche des points fixes et de points de stabilité en trouvant des valeurs pour le Lyapunov de la phrase.

D'autre part, l'analyse dynamique de ces phrases était basée sur les diagrammes et les valeurs de Lyapunov ou sur la valeur maximale des valeurs de Lyapunov pour la phrase dynamique, enfin vérifiez les résultats en utilisant une simulation numérique via Matlab sont utilisées pour confirmé les résultats obtenus dans ce memoire.

ملخص

في هذا العمل ، تعاملنا مع تحليل الأنظمة الفوضوية ذات الترتيب الكسري ، ورأينا وصفاً للخصائص الرئيسية لهذه الأنظمة الجزئية وعرض المفاهيم الأساسية للأنظمة الكسرية ، متبوعة بأمثلة للأنظمة الفوضوية الجزئية ، وبعد ذلك نحن مهتمون في دراسة الجمل الديناميكية الفوضوية مثل البحث عن النقاط الثابتة ونقاط الاستقرار من خلال إيجاد قيم ليابونوف للجمل.

من ناحية أخرى ، اعتمد التحليل الديناميكي لهذه الجمل على المخططات وقيم Lyapunov أو على القيمة القصوى لقيم Lyapunov للجمل الديناميكية ، أخيراً تحقق من النتائج باستخدام المحاكاة العددية من خلال Matlab المستخدمة في أكدت النتائج التي تم الحصول عليها في هذه المذكرات

Table des figures

1.1	Illustration d'une trajectoire particulière du système de Rössler	3
1.2	Un espace des phases en trois dimensions(trois variables) . . .	4
1.3	Section de poincarre du système (1.2) pour $c = 1.5$	5
1.4	Section de poincarre du système (1.2) pour $c = 0.8$	5
1.5	L'évolution des trajectoires du système (1.2) pour : $(x_0, y_0, z_0) = (1.5, -2, 1)$	9
1.6	Spectre de fréquence de l'état x de la fonction logistique chaotique.	10
1.7	Attracteur chaotique étrange de Lorenz obtenu pour : $\sigma = 10$, $\rho = 28$ et $\beta = \frac{8}{3}$, $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.1, 0.1, 0.1)$	12
1.8	Attracteur chaotique de Fold pour : $a = -0.1$ et $b = -1.7$, $(x_1, x_2) = (0, 0)$	13
1.9	Un diagramme de bifurcation Hopf	24
2.1	Attracteur chaotique du système (2.1) pour : $(p_1; p_2; p_3) = (0.9, 0.93, 0.96)$ et $(\alpha, \beta) = (2, 1)$	27
2.2	Attracteur chaotique du système (2.1) pour : $a = 1, b = 2.5, c = 5, e = 1, m = 5, k = 4$ et $\alpha = 0.95$	28
2.3	L'évolution au cours du temps des états z du système chaotique fractionnaire à retard de Chen.	29
2.4	L'évolution au cours du temps des états y du système chaotique fractionnaire à retard de Chen.	29
2.5	L'évolution au cours du temps des états x du système chaotique fractionnaire à retard de Chen.	30
2.6	Attracteur chaotique d'ordre fractionnaire du système de Chen à retard	30

TABLE DES FIGURES

2.7	Attracteur chaotique de Lu pour : $a = 36, b = 3, c = 28$ et $\alpha = 0.98$	31
2.8	Attracteur fractionnaire de Lorenz d'ordre commensurable $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.991$	32
2.9	Attracteur fractionnaire de Lorenz d'ordre commensurable $\alpha_1 = 0.89, \alpha_2 = 1.10, \alpha_3 = 0.99$	33
3.1	Evolution de la trajectoire x_1 du système au cours du temps t	35
3.2	Evolution de la trajectoire x_2 du système au cours du temps t	35
3.3	Evolution de la trajectoire x_3 du système au cours du temps t	36
3.4	Le spectre des exposants de Lyapunov du système (3.1)	40
3.5	Portraits de phase du nouveau système chaotique fractionnaire (3.1) dans (a) $x_1 - x_2 - x_3$ plan (b) $x_1 - x_2$ plan (c) $x_2 - x_3$ plan (d) $x_3 - x_1$ plan.	42
3.6	Variation des exposants de Lyapunov du système (3.1) pour $q = 0.8$	44
3.7	Diagram de Bifurcation pour $q = 0.8$	45

Table des matières

1	Généralités sur les systèmes dynamiques chaotique	1
1.1	Introduction	1
1.2	Systèmes Dynamiques	1
1.2.1	Systèmes dynamiques continus	2
1.2.2	Systèmes dynamiques discrets	3
1.3	Espace de Phase	3
1.4	La Section de Poincaré	4
1.5	Théorème de Bifurcation	6
1.5.1	Diagramme de bifurcation	6
1.6	Historique du Chaos	6
1.7	Theorie de Chaos	7
1.7.1	Système chaotique	8
1.8	Propriétés des Systèmes Chaotiques	8
1.8.1	Non périodicité	9
1.8.2	Determinisme	9
1.8.3	Spectre à large bande	10
1.8.4	L'attracteur étrange	10
1.8.5	Exemples des systèmes chaotiques	11
1.8.6	Bornitude des solutions	12
1.9	Dérivée D'ordre Fractionnaire	13
1.9.1	Définition de Riemann-Liouville	13
1.9.2	Définition de Caputo	13
1.9.3	Définition de Grünwald-Leitnikov	14
1.10	Fonctions Spécifiques Pour La Dérivation Fractionnaire	15
1.10.1	La fonction Gamma	15
1.10.2	La fonction Mittag-Leffler	16
1.11	Fonction de Lyapunov	16

1.12	Stabilité au sens de Lyapunov en temps continu	17
1.12.1	Les exposants de Lyapunov	18
1.12.2	Stabilité des systèmes fractionnaires	20
1.13	Bifurcations dans Les Systèmes Fractionnaires	21
1.13.1	Bifurcation fourche	22
1.13.2	Bifurcation transcritique	23
1.13.3	Bifurcation de Hopf	23
1.14	Conclusion	24
2	Exemples des systèmes chaotiques fractionnaires	25
2.1	Système chaotique fractionnaire de dynamos couplé	25
2.2	Système fractionnaire chaotique de <i>Liu</i>	26
2.3	Système fractionnaire chaotique à retard de <i>Chen</i>	27
2.4	Système fractionnaire chaotique à retard de <i>Lu</i>	30
2.5	Système chaotique fractionnaire de Lorenz	31
2.6	Conclusion	32
3	Analyse d'un système chaotique d'ordre fractionnaire	33
3.1	Introduction	33
3.2	Description du système chaotique d'ordre fractionnaire	33
3.3	Etude de la solution du système (3.1)	35
3.3.1	Existence et unicité de la solution	35
3.4	Analyse des points d'équilibre du système	36
3.4.1	Stabilité des points d'équilibres	37
3.5	Symétrie et dissipativité	39
3.5.1	A. Asymétrie	39
3.5.2	B. Dissipativité	39
3.5.3	Ordre fractionnaire minimal pour l'apparition du Chaos dans le système (3.1)	40
3.6	Exposants Lyapunov et dimension Kaplan -Yorke	41
3.6.1	A. Exposants de lyapunove	41
3.6.2	Dimension Kaplan-Yorke	42
3.6.3	Analyse de Bufurcation	43
3.6.4	Conclusion	43

Introduction générale

Une grande partie des systèmes dynamiques non linéaires sont des systèmes chaotiques qui sont sensibles aux conditions initiales. Cette sensibilité est parmi les idées de base du chaos et la signature la plus visible de son comportement. Ce phénomène est ancien mais a été mis en évidence par Lorenz en utilisant l'effet papillon. Le terme "chaos" définit un état particulier d'un système dont le comportement ne se répète jamais qui est très sensible aux conditions initiales et imprédictible à long terme. La théorie du Chaos a vu le jour dans les travaux d'Henri Poincaré à la fin du XIXe siècle et c'est dans les années soixante qu'elle fut redécouverte après la publication d'un article qui allait révolutionner le monde des sciences. Le chaos est devenu un champ d'exploration de la science.

Le chaos en tant que phénomène non linéaire important a été étudié en sciences en mathématiques en ingénierie et dans de nombreuses autres disciplines. Les origines du calcul fractionnaire remontent à la fin du 17ème siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral, mais ce n'est que lors des quatre dernières décennies que le calcul fractionnaire a connu le plus d'intérêt et les applications des dérivées fractionnaires se sont le plus diversifiées.

Le calcul fractionnaire est un sujet mathématique datant de plus de 300 ans. Il a été introduit le 30 septembre 1695, ce jour-là, Gottfried Wilhelm Leibniz a écrit une lettre à Guillaume François Antoine, marquis de L'Hôpital, évoquant la possibilité de généraliser le sens des dérivées, de dérivée d'ordre entier à dérivée d'ordre non entier. De l'Hôpital voulait connaître le résultat pour la dérivée d'ordre $n = 1/2$. Leibniz a répondu «un jour, des conséquences utiles seront tirées» et, en fait, sa vision est devenue réalité.

Récemment, l'étude des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire est devenue un domaine de recherche actif. Beaucoup de chercheurs ont remarqué que plusieurs systèmes fractionnaires non linéaires peuvent générer des comportements chaotiques. Par exemple le circuit de Chua d'ordre fractionnaire, le système fractionnaire de Lorenz, le système de Chen d'ordre fractionnaire, le système de Rossler d'ordre fractionnaire.

Ce travail de mémoire consiste sur l'analyse des systèmes chaotique fractionnaire :

Le premier chapitre nous avons introduit les définitions sur les systèmes chaotique et leur propriétés fondamentales et les systèmes fractionnaire.

Le deuxième chapitre est contient quelques exemples des systèmes chaotiques fractionnaire

Dans **le troisième chapitre** nous contrerons d'analyse d'un nouveau système chaotique fractionnaire.

Chapitre 1

Généralités sur les systèmes dynamiques chaotique

1.1 Introduction

Ce chapitre sera consacré à l'étude des systèmes dynamique chaotiques, Après un rapelle et des généralités sur les systèmes dynamiques la théorie du chaos sera introduite avec un bref historique, tout en étalant cette étude sur les propriétés fondamentales des système chaotique : espace des phases, point d'équilibres, les exposants des lyapunov, diagramme de bifurcation et section de poincaré et leur influences sur le comportement chaotique des systèmes dynamique.

1.2 Systèmes Dynamiques

Les systèmes dynamiques représentent des phénomènes qui évoluent dans l'espace et/ou de temps. Ils sont développés et spécialisés au cours du dix-neuvième siècle. Ces systèmes viennent de Biologies, Physique, Chimie, ou même des sciences sociales, le système dynamique est le sujet qui fournit des outils mathématiques pour son analyse. Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

- Système dynamique à temps discret.
- Système dynamique à temps continu.

1.2.1 Systèmes dynamiques continus

Un système dynamique dans un temps continu est représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x}_t = k(x.t.p) \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r \quad (1.1)$$

où $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système

Exemple 1.2.1 (*le système de Rossler*)

C'est un système de 3 équations différentielles non linéaires. Ces équations différentielles définissent un système dynamique continu et tridimensionnel qui présente des caractéristiques chaotiques.

Les équations de ce système sont :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \\ \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (1.2)$$

Où x, y et z sont les variables d'état du système a, b et c sont des paramètres réels. Les paramètres et les conditions initiales de l'équation (1.2) ont été choisis de la manière suivante : $a = 0.2, b = 0.2,$ et $c = 5.7,$ avec

$$(x_0, y_0, z_0) = (3, 2, -2)$$

Ce système est autonome car l'équation (1.2) n'a pas de dépendance explicite par rapport au temps t .

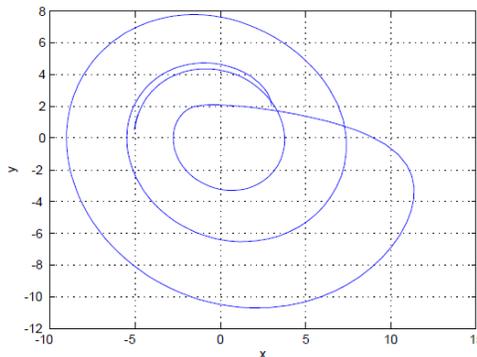


Fig. 1.1 –Illustration d'une trajectoire particulière du système de Rössler

1.2.2 Systèmes dynamiques discrets

Si un système prends ses valeurs uniquement à des instant régulièrement distribués, celui-ci est dit système en temps discret ou tout simplement système discret. Sa représentation mathématique est donnée par le système d'équations suivante :

$$\begin{cases} x(k+1) = f(x(k)) \\ x(k_0) = x(0) \end{cases} \quad (1.3)$$

avec k est l'instant discret, k_0 est l'instant discret initial et $x(0)$ est le vecteur des états initiaux.

Exemple 1.2.2 (*L'application de Hénon*)

L'application de Hénon est défini par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2 \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Dans les deux types de systèmes dynamiques que nous venons de voir jusqu'à maintenant, l'évolution de l'état dépend seulement de l'état actuel (cas continu) ou du cas précédent (cas discret). Il existe toutefois des cas de système où l'évolution d'un état dépend aussi de son passé. Ces systèmes sont dits à retards.

1.3 Espace de Phase

Notre première approche du chaos nous a fait réaliser la difficulté de trouver des solutions exactes ou meme approchées à des équations non linéaires et ceci nous amène à la recherche d'une représentation qui nous permettrait d'accéder plus simplement à des solutions qualiatives. C'est ce qui présente l'espace des phases.

C'est une espace abstrait contenant sous forme géométrique une information concrète, les variables qui sont à la base de la construction de cet espace sont des grandeurs réelles et à chaque point correspond une situation physique bien déterminée. L'espace doit contenir toute l'information sur la dynamique du système étudié.

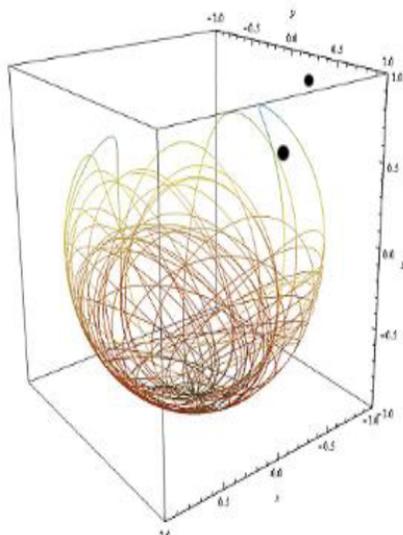


Fig. 1.2 –Un espace des phases en trois dimensions(trois variables)

1.4 La Section de Poincaré

Elle est un outil très fréquemment utilisé pour étudier les systèmes dynamiques et notamment les trajectoires périodiques. Faire une section de Poincaré revient à couper la trajectoire dans l'espace des phases, afin d'étudier les intersections de cette trajectoire (en dimension trois, par exemple), avec un plan. On passe alors d'un système dynamique à temps continu à un système dynamique à temps discret. Les mathématiciens ont bien sûr démontré que les propriétés du système sont conservées après la réalisation d'une section de Poincaré judicieusement choisie. Par le biais de cette méthode, la dimension d du problème initial sous forme de système différentiel est réduite d'une unité avec l'application en dimension $d - 1$.

Exemple 1.4.1 *La section de Poincaré la plus naïve est de couper la trajectoire dans l'espace des phases par un plan (en dimension trois) ou par une droite (en dimension deux).*

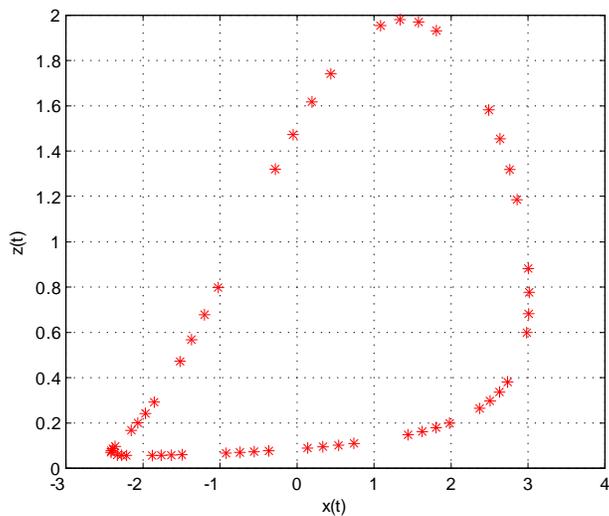


Fig. 1.3 –Section de poincarre du système (1 : 2) pour $c = 1 : 5$.

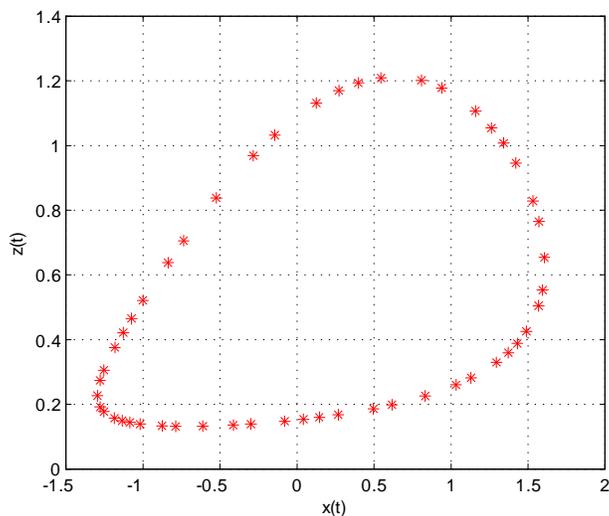


Fig. 1.4 –Section de poincarre du système (1 : 2) pour $c = 0 : 8$.

Remarque 1.4.1 *L'ensemble des points d'intersections, situés sur la surface représente la section de Poincaré. Dans un espace euclidien, le plan de la section doit être choisi de manière à garantir l'existence d'intersections avec la trajectoire Γ et de telle sorte que celle-ci le traverse alternativement dans un sens puis dans l'autre.*

1.5 Théorème de Bifurcation

Un système est dit structurellement stable sur une portion de l'espace de paramètres si une petite perturbation du système ne modifie pas son comportement global sur cette portion. A la valeur particulière du paramètre où la solution change subitement de nature, le système est dit structurellement instable ce qui autorise un brusque changement au niveau de la nature de la solution. Ce phénomène est appelé bifurcation et les points où il se produit sont les points de bifurcation.

1.5.1 Diagramme de bifurcation

Le diagramme de bifurcation est un outil efficace pour évaluer rapidement l'ensemble des solutions possibles d'un système en fonction des variations de l'un de ses paramètres. Il permet de repérer les valeurs particulières du paramètre qui induisent des bifurcations. C'est un diagramme qui porte les valeurs du paramètre en abscisse et les valeurs particulières d'une des variables d'état en ordonnée lorsque le régime permanent est atteint.

1.6 Historique du Chaos

Henri Poincaré fut l'un des premiers à entrevoir la théorie du chaos. Il découvrit la notion de sensibilité aux conditions initiales à travers le problème d'interactions de trois corps célestes, et a écrit «Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir et alors nous disons que cet effet est dû au hasard».

Plus tard, en 1961, Edward Lorenz, météorologue et professeur de mathématique au MIT observa par hasard le phénomène qui s'appellera plus tard la théorie du chaos ou le chaos déterministe, à la suite des calculs visant à prévoir les phénomènes météorologiques. Ces prévisions nécessitaient un grand nombre de calculs d'équations différentielles complexes à très grand nombre de variables impossibles à faire à la main, il a utilisé alors un ordinateur, son Royal Mcbee LGP-300 qui est entrée dans l'histoire de la théorie du chaos, et qui a fait de Lorenz le père officiel de cette théorie puis que les calculs des systèmes chaotiques régissant ces phénomènes étaient difficiles à comprendre et à simuler sans ordinateur. Après plusieurs heures de calculs, Lorenz avait obtenu une série de résultats et a décidé de repasser une

deuxième fois ces résultats dans l'ordinateur pour s'en assurer. Pour gagner du temps, il avait entré les variables avec trois chiffres après la virgule, au lieu de six, il pensait qu'une faible variation dans les variables à la base d'un calcul aurait une incidence du même ordre de grandeur sur le résultat final mais à sa grande surprise, les résultats étaient totalement différents de la première série. Il venait de découvrir le comportement chaotique d'un signal non linéaire, soit, d'infimes différences des conditions initiales d'un système déterministe entraîneraient des résultats complètement différents. Ce phénomène, qui traduit cette sensibilité aux conditions initiales, est connu sous le nom d'effet papillon : «Le simple battement d'aile de papillon au Brésil pourrait déclencher une tornade au Texas».

1.7 Théorie de Chaos

En tant que notion mathématique, le terme chaos a été utilisé pour la première fois en 1975 par Li & Yorke dans leur article, mais avant même qu'elle n'ait été observée que des fonctions très simples peuvent donner lieu à des dynamiques très compliquées. Un de la pierre angulaire du développement de la dynamique chaotique est l'article de 1964 «Coexistence des cycles d'une cartographie continue de la ligne en elle-même » (en russe) par Sarkovskii. Au cours des années soixante-dix et quatre-vingt, l'intérêt pour la dynamique chaotique a explosé et diverses tentatives ont été faites pour donner à la notion de chaos une précision mathématique sens. Les travaux remarquables dans ce contexte sont le livre de 1980 «Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems » de Collet & Eckmann, le livre de 1989 « Dynamics of One-Dimension Mappings » (en russe) par Sarkovskii, Kolyada, Sivak & Fedorenko et les Notes de cours de 1992 «Dynamics in One Dimension» de Block & Coppel. Tandis que jusqu'à la dans les années quatre-vingt, le sujet de la dynamique chaotique se limitait principalement à publications axées sur la recherche, le livre de 1986 «An Introduction to Chaotic Dynamical Systems » de Devaney a marqué le point où le chaos (en tant que notion mathématique) est devenu populaire et a commencé à entrer dans les manuels universitaires tels que «A First Course in Discrete Dynamical Systems » par Holmgren (1994) ou « Discrete Chaos » par Elaydi (1999).

Chaos dans le sens de Devaney

Devaney proposa la définition suivante du chaos : un système dynamique est chaotique si et seulement si :

- il est topologiquement transitif.
- il possède un ensemble dense d'orbites périodiques.
- il présente le phénomène de sensibilité aux conditions initiales.

La transitivité signifie simplement que si l'on considère deux voisinages quelconques de deux états distincts d'un système dynamique, il existe une trajectoire qui passe de l'un à l'autre.

Notons que les deux premières hypothèses impliquent la troisième sans que la réciproque soit vraie.

Chaos dans le sens de Li-Yorke

Li et Yorke ont introduit la première définition mathématique du chaos. Ils ont établi un critère très simple "La présence de trois périodes impliquent le chaos". Ce critère joue un rôle très important dans l'analyse des systèmes dynamiques chaotiques.

1.7.1 Système chaotique

Définition 1.7.1 *Un système dynamique est appelé un système chaotique s'il a au moins un attracteur chaotique.*

1.8 Propriétés des Systèmes Chaotiques

Il existe un ensemble de propriétés qui résument les caractéristiques observées dans les systèmes chaotiques. Elles sont considérées comme des critères mathématiques qui définissent le chaos. Les plus connues sont :

Définition 1.8.1 *Soit un ensemble V . L'application $f : V \rightarrow V$ est dite chaotique sur V si :*

1. f possède une sensibilité aux conditions initiales.
2. f est topologiquement transitive.
3. Les points périodiques sont denses dans V .

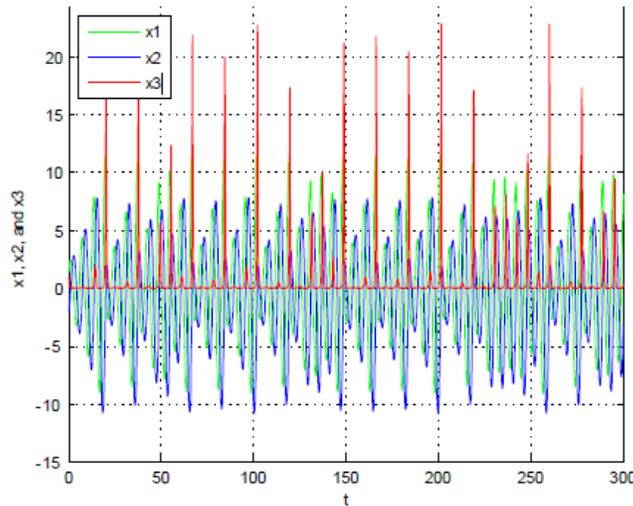
Définition 1.8.2 (Devaney,1989). *L'application $f : J \rightarrow J$ possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour un certain $x \in J$ et un certain voisinage $V \subset J$ de x , il existe $y \in V$ tel que :*
 $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta$

Définition 1.8.3 *$f : V \rightarrow V$ est dite topologiquement transitive si pour n'importe quelles paires d'ensembles ouverts $U, J \subset V$ il existe un nombre entier $k > 0$ tel que : $f^k(U) \cap J \neq \emptyset$*

Définition 1.8.4 *Un sous-ensemble U de V est dense dans V si : $\overline{U} = V$*

Définition 1.8.5 *Un système dynamique a une dépendance sensible aux valeurs initiales si, quand on considère 2 valeurs initiales $x(0)$ et $y(0)$ qui sont proches l'une de l'autre, alors $x(k)$ et $y(k)$ peuvent être éloignés l'une de l'autre, i.e., pour chaque $\varepsilon > 0$, tel que : $|x(0) - y(0)| < \varepsilon$ alors*

$$\limsup |x(k) - y(k)| > \varepsilon$$



*Fig. 1.5 – L'évolution des trajectoires du système (1.2) pour :
 $(x_0; y_0; z_0) = (1.5, -2, 1)$.*

1.8.1 Non périodicité

Un système présentant un comportement chaotique évolue dans une orbite qui ne se répète jamais sur elle-même. C'est à dire, les orbites ne sont jamais périodiques.

1.8.2 Déterminisme

Le déterminisme signifie que le système est non aléatoire et ne possède aucun paramètre ou entrée stochastique. Cette propriété est propre à tous les

systèmes dont l'évolution est définie par un ensemble d'équations différentielles ou d'équations aux différences. Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule.

À l'opposé, et bien qu'ils paraissent, à première vue, aléatoires, les systèmes dynamiques chaotiques sont régis par certaines équations rendant compte du phénomène, mais dont les solutions sont sensibles aux conditions initiales. Le comportement irrégulier observé dans les systèmes chaotiques est dû à la non linéarité intrinsèque du système plutôt qu'au bruit.

1.8.3 Spectre à large bande

Le spectre de Fourier d'un signal chaotique est un spectre à large bande, analogue à celui d'un bruit blanc. La figure (1.6) présente le spectre de la fonction logistique évoluant en régime chaotique.

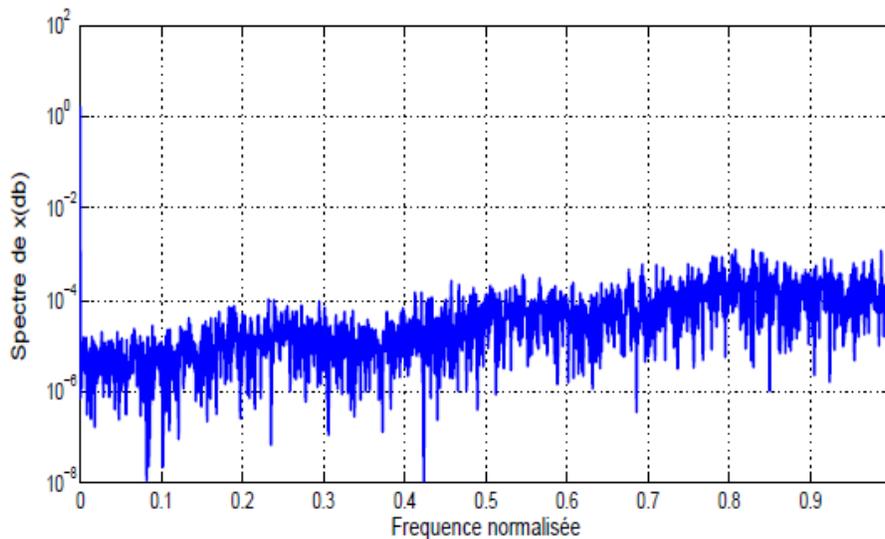


Fig. 1.6 – Spectre de fréquence de l'état x de la fonction logistique chaotique.

1.8.4 L'attracteur étrange

Les trajectoires d'un système dynamique chaotique sont attirées vers un attracteur dit étrange. Ce dernier est caractérisé par :

- a) un volume nul.
- b) une séparation exponentiellement rapide de trajectoires initialement proches.

c) une dimension souvent fractale (non entière).

La naissance d'un attracteur étrange est liée à l'existence de deux processus, à savoir :

- L'étirement, responsable de l'instabilité et de la sensibilité aux conditions initiales.
- Le repliement, responsable du côté étrange et fractal de l'attracteur.

1.8.5 Exemples des systèmes chaotiques

Considérons deux exemples de systèmes chaotiques :

- Le système chaotique continu de Lorenz.
- Le système chaotique discret de Fold.

Le système de Lorenz est un système tridimensionnel présentant un comportement chaotique. Il doit son nom au chercheur et météorologue Édouard Lorenz. Le système de Lorenz est décrit par les équations suivantes.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2(t) - x_1(t)) \\ \dot{x}_2 = x_1(t)(\rho - x_3(t)) - x_2(t) \\ \dot{x}_3 = x_1(t)x_2(t) - \beta x_3(t) \end{cases} \quad (1.5)$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ est le vecteur d'état du système et σ, ρ, β sont les paramètres du système.

Pour les valeurs des paramètres $\sigma = 10$, $\rho = 28$ et $\beta = \frac{8}{3}$ le système de Lorenz présente un comportement chaotique. La figure 1.7 illustre l'attracteur chaotique étrange obtenu en plan de phase des états x_1 et x_3 en considérant les conditions initiales $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.1, 0.1, 0.1)$.

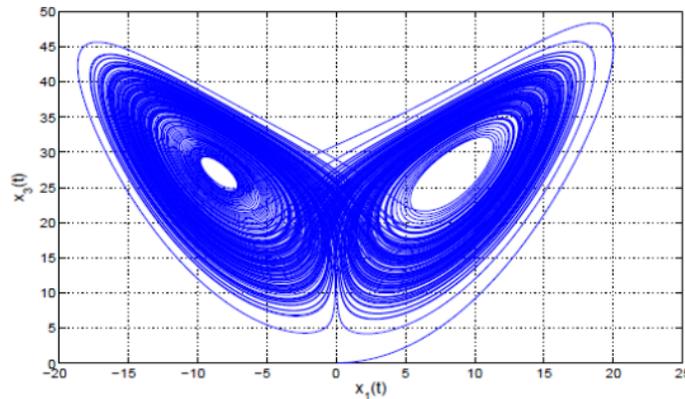


Fig. 1.7 – Attracteur chaotique étrange de Lorenz obtenu pour : $\sigma = 10$,
 $\rho = 28$ et $\beta = \frac{8}{3}$, $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.1, 0.1, 0.1)$.

Le système de Fold est un systèmes discret. Il est défini par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = ax_1(k) + x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_1^2(k) + b \end{cases} \quad (1.6)$$

où $[x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur d'état et a, b sont deux paramètres constants.

Le système discret de Fold donné par (1.6) présente une évolution chaotique pour les valeurs $a = -0.1$ et $b = -1.7$. L'attracteur étrange obtenu en plan de phase des états x_1 et x_2 et pour les valeurs initiales $(x_1, x_2) = (0, 0)$ est représenté dans la figure 1.8.

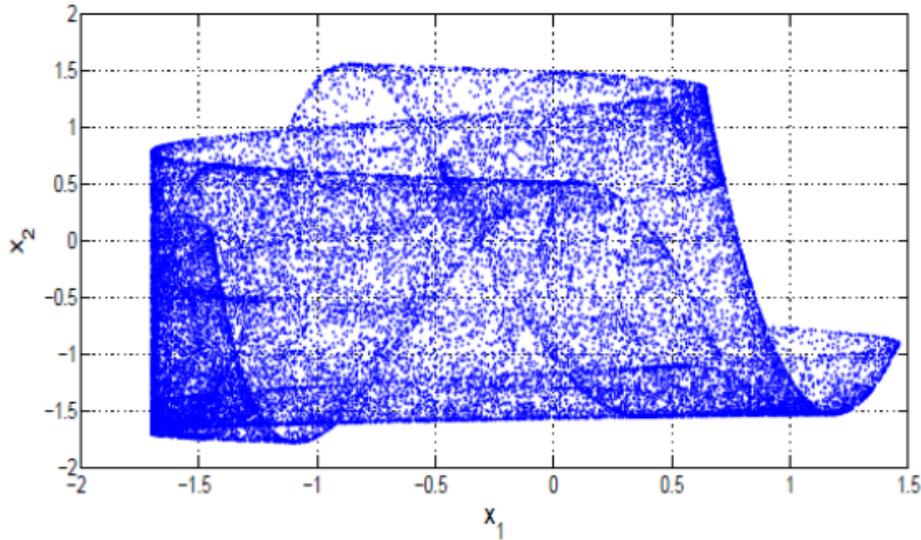


Fig. 1.8 – Attracteur chaotique de Fold pour : $a = -0.1$ et $b = -1.7$,
 $(x_1, x_2) = (0, 0)$

1.8.6 Bornitude des solutions

Toutes les solutions des systèmes chaotiques sont des solutions globalement bornées.

En effet, la trajectoire du système chaotique que l'on observe dans l'espace des phases reste confinée dans une région bien définie (attracteur étrange), après une période transitoire de durée variable.

On peut qualifier les systèmes chaotiques de stables si leurs conditions initiales sont prises dans le bassin d'attraction, c'est à dire que les trajectoires ne divergent pas vers l'infini mais convergent sur l'attracteur étrange.

Dans l'étude des systèmes non linéaires les cas suivants se présentent :

- Stabilité asymptotique : les trajectoires convergent vers un point fixe.
- Limite de stabilité (réponse oscillatoire sinusoïdale) : les trajectoires convergent vers un cycle limite.
- Limite de stabilité (réponse bornée) : les trajectoires convergent vers un attracteur étrange.

1.9 Dérivée D'ordre Fractionnaire

1.9.1 Définition de Riemann-Liouville

La dérivée d'ordre fractionnaire $\alpha > 0$ d'une fonction $f(t)$ dite de Riemann-Liouville est donnée par :

$${}_{Rl}D_{t_0}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

Où le nombre entier n est tel que $(n - 1) < \alpha < n$.

1.9.2 Définition de Caputo

Les problèmes appliqués en viscoélasticité, mécanique des solides et en rhéologie ont poussé plusieurs auteurs y-compris Caputo à rendre compte que la définition de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville doit être révisée malgré le rôle important qu'elle a jouée dans le développement du calcul fractionnaire.

A la fin des années 60, dans le cadre de ces travaux Caputo a introduit une autre définition de la dérivation fractionnaire.

L'expression mathématique de cette définition est :

$${}_C D_{t_0}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \quad (1.8)$$

où n est un entier tel que $(n - 1) < \alpha < n$ et $f^{(n)}(t)$ étant la dérivée d'ordre entier n de la fonction $f(t)$.

1.9.3 Définition de Grünwald-Leitnikov

La définition proposée par Grünwald est plus adéquate pour le calcul numérique de la dérivation fractionnaire.

En effet, partant de la dérivée première et avec une période d'échantillonnage h :

$$D^1 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t - h)}{h} \quad (1.9)$$

La dérivée seconde donne :

$$D^2 f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t - h) + f(t - 2h)}{h^2} \quad (1.10)$$

Le premier niveau de la généralisation à un ordre entier n est donné par :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^n \left((-1)^j \binom{n}{j} f(t - jh) \right) \quad (1.11)$$

n étant un nombre entier, la notation $\binom{n}{j}$ représente la combinaison de j élément parmi n dont l'expression est donnée par :

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n - j)!} \quad (1.12)$$

Pour des valeurs fractionnaires $\alpha \in \mathbb{R}$, l'équation (1.11) peut être écrite comme l'extension :

$$D^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \left((-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t - jh) \right) \quad (1.13)$$

La notation $\binom{\alpha}{j}$ désigne le binôme de Newton généralisé à des ordres réels :

$$\binom{\alpha}{j} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{j! \Gamma(\alpha - j + 1)} \quad (1.14)$$

[16]

1.10 Fonctions Spécifiques Pour La Dérivation Fractionnaire

Dans cette section, nous présentons les fonctions Gamma et Mittag-Leffler, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.[11]

1.10.1 La fonction Gamma

L'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$. La fonction Gamma $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (1.15)$$

avec $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0) = +\infty$, $\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$. Une propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(z)$ est la relation de récurrence suivante :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (1.16)$$

q'en peut démontrer par une intégration par parties :

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [-e^{-t} t^z]_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z) \quad (1.17)$$

La fonction Gamma d'Euler généralise la factorielle car :

$$\Gamma(n + 1) = n!; \forall n \in \mathbb{N} \quad (1.18)$$

1.10.2 La fonction Mittag-Leffler

La fonction exponentielle e^z joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par G.M. Mittag-Leffler et désignée par la fonction suivante :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (1.19)$$

La fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres joue également un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire. Cette dernière a été introduite par Agarwal et elle est définie par le développement en série suivant :

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}; (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (1.20)$$

Pour $\beta = 1$, on retrouve la relation (1.19).

A partir de la relation (1.20) on montre que :

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (1.21)$$

Pour les équations différentielles d'ordre fractionnaire, la fonction de Mittag-Leffler joue le même rôle que la fonction exponentielle.

1.11 Fonction de Lyapunov

Définition 1.11.1 (*Fonction définie positive*)[23]

Une fonction scalaire $V(x)$ continuellement différentiable (par rapport à x) est dite définie positive dans une région autour de l'origine si :

1. $V(0) = 0$
2. $V(x) > 0; \forall x \in \Omega - \{0\}$

Si (2) est remplacé par $V(x) \geq 0$ alors, la fonction est dite définie semi-positive.

Définition 1.11.2 (*Fonction quadratique définie positive*)

La fonction quadratique $V(x) = x^T Q x$, où $Q_{n \times n}$ est une matrice réelle symétrique, est dite définie positive si toutes les valeurs propres de la matrice $Q_{n \times n}$ sont strictement positives. Les fonctions quadratiques sont souvent utilisées dans l'analyse des systèmes dynamiques (fonction de Lyapunov). Notamment : l'énergie cinétique, l'énergie potentielle élastique ou de gravité et l'énergie totale sont des fonctions quadratiques de l'état pour les systèmes mécaniques.

1.12 Stabilité au sens de Lyapunov en temps continu

Considérons une classe des systèmes non linéaires décrit par le système dynamique :[9]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.22)$$

Théorème 1.12.1 *Le point d'équilibre x^* du système(1.22) est stable s'il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

- i) D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x \in D$.
- ii) $V(x) = 0$ et $V(x) > V(x^*)$; $\forall x \neq x^*$ dans D .
- iii) $V'(x) \leq 0$; $\forall x \neq x^*$ dans D .
 - Si de plus pour x ; $\dot{V}(x) < 0$; $\forall x \neq \dot{x}$ dans D , alors x est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov
 - Si on suppose encore que V tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x , tendent vers x (on dit que x est globalement asymptotiquement stable).

Remarque 1.12.1 *Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov.*

Etat stable	Flot	Dimension de Lyapunov	Exposants de Lyapunov
Point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
Périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
Période d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
Période d'ordre k	k -tore	k	$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0 \quad \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique	□	Non entier	$\lambda_1 > 0 \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyperchaotique	□	Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

1.12.1 Les exposants de Lyapunov

C'est une mesure quantitative qui a été développée par Alexander Lyapunov. Cette dernière sert à calculer le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires issues des conditions initiales proches.

Généralement, on peut distinguer trois cas des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapunov :

1. Si $\lambda < 0$, l'orbite est attractive vers un point fixe ou une orbite périodique stable, il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique, plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est grande. Les points fixes et les points périodiques super-stables ont un exposant de Lyapunov λ qui tend vers $-\infty$.
2. Si $\lambda = 0$, l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservatif. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.
3. Si $\lambda > 0$, l'orbite est instable et chaotique. On peut resumer les différents cas dans le tableau suivant :

Exemple 1.12.1 Soit le système de Lorenz :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = cx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (1.23)$$

pour c compris entre 0 et 1, on vérifie que l'origine est un point fixe globalement stable. Sa stabilité globale est étudiée à l'aide d'une fonction de Lyapunov qu'il faut déterminer intuitivement.

On vérifie que la fonction suivante convient :

$$V(x, y, z) = \frac{x^2 + a(y^2 + z^2)}{2}$$

On a $V(0, 0, 0) = 0$ et $V(x, y, z) > 0$ pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$

$$\frac{dV}{dt} = a(y-x)x + ay(cx-y-xz) + az - bz + xy = -a(x^2 + y^2 - (c+1)xy + bz^2)$$

Comme $z^2 > 0$ et $x^2 + y^2 - (c+1)xy > 0$ pour c compris entre 0 et 1, alors on a $\frac{dV}{dt} < 0$ pour $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Par suite le point fixe $(0, 0, 0)$ est globalement asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

Définition 1.12.1 Méthode Indirecte de Lyapunov :

Par un changement de coordonnées, le point fixe de (1.23) se ramène à l'origine ($f(0) = 0$) et le développement de f en série de Taylor autour de $x = 0$ donne :

$$f(x) = Df(0)x + \frac{1}{2!}D^2f(0)(x, x) + \frac{1}{3!}D^3f(0)(x, x, x) + \dots$$

La méthode indirecte de Lyapunov, pour étudier la stabilité autour d'un point d'équilibre a , consiste à étudier le système linéaire

$$\dot{x} = Ax$$

avec $A = Df(0) = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \frac{df_1}{dx_2} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{df_n}{dx_1} & \frac{df_n}{dx_2} & \dots & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix}$ la matrice jacobienne de f en 0.

Qui s'appelle la linéarité du système (1.23) au point d'équilibre 0.

Si A possède n valeurs propres distinctes λ_i avec $i = 1, 2, \dots, n$ (les valeurs propres de A sont appelées exposants caractéristiques de l'équilibre 0) alors la solution de (1.23) est :

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i t} v_i$$

v_i le vecteur propre associé à λ_i D'où le théorème suivant :

Théorème 1.12.2 *Considérons le système (1.26) avec r valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et $a = 0$ point d'équilibre*

- S'il existe $j \in \{1, \dots, r\}$ telle que $Re(\lambda_j) > 0$, alors 0 est instable.
- Si $Re(\lambda_j) < 0$, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, alors 0 est asymptotiquement stable.
- Si $Re(\lambda_j) \leq 0$, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$ et toutes les valeurs propres de partie réelle null sont simples, alors 0 est stable.

Exemple 1.12.2 Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - x \\ \dot{y} = x^3 - 2y - xz \\ \dot{z} = -z + xy \end{cases} \quad (1.24)$$

L'origine 0 est un point fixe. Son linéarisé est :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Les valeurs propres de $Df(0)$ sont $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -1$ toutes négatives d'où l'équilibre 0 est asymptotiquement stable.

1.12.2 Stabilité des systèmes fractionnaires

Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires

Soit le système fractionnaire linéaire suivant

$${}^c D_t^{\alpha_i} x_i(t) = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j(t); i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.26)$$

d'où i est un nombre rationnel entre 0 et 1 et $D_t^{\alpha_i}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre i , pour $i = 1, 2, \dots, n$. Soit M est le multiple commun des dénominateurs de i .

Théorème 1.12.3 Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$ alors le système (1.29) est asymptotiquement stable si $|\arg(\text{spec}(A))| > \alpha \frac{\pi}{2}$

Théorème 1.12.4 Si α_i sont différents nombres rationnels, alors le système (1.29) est asymptotiquement stable si toutes les racines λ de l'équation $\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - A) = 0$; satisfont $|\arg(\lambda)| > \frac{\pi}{2M}$ avec $A = (\alpha_{ij})_{i \leq 1, j \leq n}$.

Stabilité des systèmes fractionnaires non linéaires

Maintenant, considérons un système fractionnaire non linéaire donné par :

$${}^c D_t^{\alpha_i} x_i(t) = f_i(X(t)); i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.27)$$

d'où $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dérivées partielles secondes continues dans une boule centrée sur un point d'équilibre $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ c'est dire $f_i(x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)) = 0$; alors nous avons les résultats suivants :

Théorème 1.12.5 *Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha$; alors le point d'équilibre x^* du système (1.27) est asymptotiquement stable ssi; $|\arg(\text{spec}(J|_{x^*}))| > \alpha \frac{\pi}{2}$ d'où J est la matrice jacobienne du système (1.27).*

Théorème 1.12.6 *Si α_i sont différents nombres rationnels, alors le point d'équilibre x^* du système (1.30) est asymptotiquement stable si toutes les racines λ de l'équation de $\det(\text{diag}(\lambda^{M\alpha_1}, \lambda^{M\alpha_2}, \dots, \lambda^{M\alpha_n}) - A) = 0$; satisfont $|\arg(\lambda)| \succ \frac{\pi}{2M}$*

1.13 Bifurcations dans Les Systèmes Fractionnaires

Dans cette partie on s'intéresse au système fractionnaire avec paramètre de contrôle de la forme suivante :[21]

$$D^\alpha x = f(x, \mu); 0 < \alpha \leq 1; x \in \mathbb{R}^n \quad \mu \in \mathbb{R}^k \quad (1.28)$$

Une **bifurcation** est un **changement qualitatif** d'une certaine solution (point d'équilibre où cycle limite) du système (1.28) lorsqu'on modifié le paramètre de contrôle, c'est à dire la dileur critique μ_0 (appeler valeur de bifurcation) pour laquelle la matrice jacobienne du système possède un érente.

Exemple 1.13.1 *Considérons l'équation fractionnaire scalaire suivante :*

$$D^\alpha x = \mu - x^2 \quad (1.29)$$

Nous allons étudier cette équation selon le paramètre de contrôle μ :

- Si $\mu < 0$ l'équation $f(x, \mu) = 0$ n'admet pas le solution alors on n'est pas des points d'équilibres.
- Si $\mu > 0$ on a : deux points d'équilibres $x = \pm\sqrt{\mu}$. Par conséquent (1.29) admet deux points d'équilibres :

$$\begin{cases} \dot{f}(a) = -2x \text{ avec } x = +\sqrt{\mu} \text{ alors } \dot{f}(a) = -2\sqrt{\mu} < 0 \\ \dot{f}(a) = -2x \text{ avec } x = -\sqrt{\mu} \text{ alors } \dot{f}(a) = +2\sqrt{\mu} < 0 \end{cases}$$

Par suite les points d'équilibres :

$$\begin{cases} a = +\sqrt{\mu} \text{ est stable.} \\ a = -\sqrt{\mu} \text{ est instable.} \end{cases}$$

- Si $\mu = 0$ il ya un seule point d'équilibre $a = 0$ est semi stable.

1.13.1 Bifurcation fourche

La bifurcation fourche aura lieu lorsque le paramètre de contrôle μ prend une valeur critique μ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une **valeur propre** λ_1 nulle. Cette bifurcation est caractériser par un échange de stabilité du point d'équilibre et la naissance de deux autres points d'équilibres de stabilité différente du premier point d'équilibre.

Considérons l'équation fractionnaire scalaire suivante :

$$D^\alpha x = \mu x - x^3 \tag{1.30}$$

Dans le cas d'une bifurcation fourche (sous-critique) on a L'équation générique est : $D^\alpha x = \mu x + x^3$.

Dans le cas d'une bifurcation fourche sur-critique on a :

$$\begin{aligned} f(x, \mu) = 0 &\iff x(\mu - x^2) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ \mu - x^2 = 0 \iff x^2 = \mu \end{cases} \end{aligned}$$

Si $\mu < 0$ on a un seul point d'équilibre $a = 0$, et si $\mu > 0$ on a trois points d'équilibre qui sont : $a = 0$, $a = -\sqrt{\mu}$, $a = +\sqrt{\mu}$.

Nous étudions la stabilité de ces points d'équilibre :

$$\begin{cases} f'(a) = \mu - 3x^2 \text{ avec } x = 0 \text{ alors } f'(a) = \mu \\ f'(a) = \mu - 3x^2 \text{ avec } x = \pm\sqrt{\mu} \text{ alors } f'(a) = -2\mu \end{cases} \quad (1.31)$$

- Si $\mu < 0$ le seul point d'équilibre $a = 0$ est stable.
- Si $\mu > 0$ le point d'équilibre $a = 0$ est instable, mais $a = \pm\sqrt{\mu}$ sont stables.

1.13.2 Bifurcation transcritique

La bifurcation fourche aura lieu lorsque le paramètre de contrôle μ prend une valeur critique μ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède une **valeur propre** λ_1 nulle. Cette bifurcation est caractérisée par un échange de stabilité entre les deux points d'équilibres existant (les points stables deviennent instables, les points instables deviennent stables).

Considérons l'équation fractionnaire scalaire suivante :

$$D^\alpha x = \mu x - x^2 \quad (1.32)$$

On a :

$$f(x, \mu) = 0 \iff x(\mu - x) = 0 \quad (1.33)$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \mu \end{cases} \quad (1.34)$$

Implie

$$\begin{cases} f'(a) = \mu - 2x \text{ avec } x = 0 \text{ alors } f'(a) = \mu \\ f'(a) = \mu - 2x \text{ avec } x = \mu \text{ alors } f'(a) = -\mu \end{cases}$$

Alors

- Si $\mu < 0$, le point d'équilibre $a = 0$ est stable, mais $a = \mu$ est instable.
- Si $\mu > 0$, le point d'équilibre $a = 0$ est instable, mais $a = \mu$ est stable.

1.13.3 Bifurcation de Hopf

La bifurcation Hopf aura lieu lorsque le paramètre de contrôle μ prend une valeur critique μ_0 pour laquelle la matrice jacobienne du système possède **une** paire de **valeurs propres**

λ_1, λ_2 telles que $|\arg \lambda_{1,2}| = \alpha \frac{\pi}{2}$ et le type de stabilité de l'équilibre existant change avec l'apparaition d'un cycle limite.

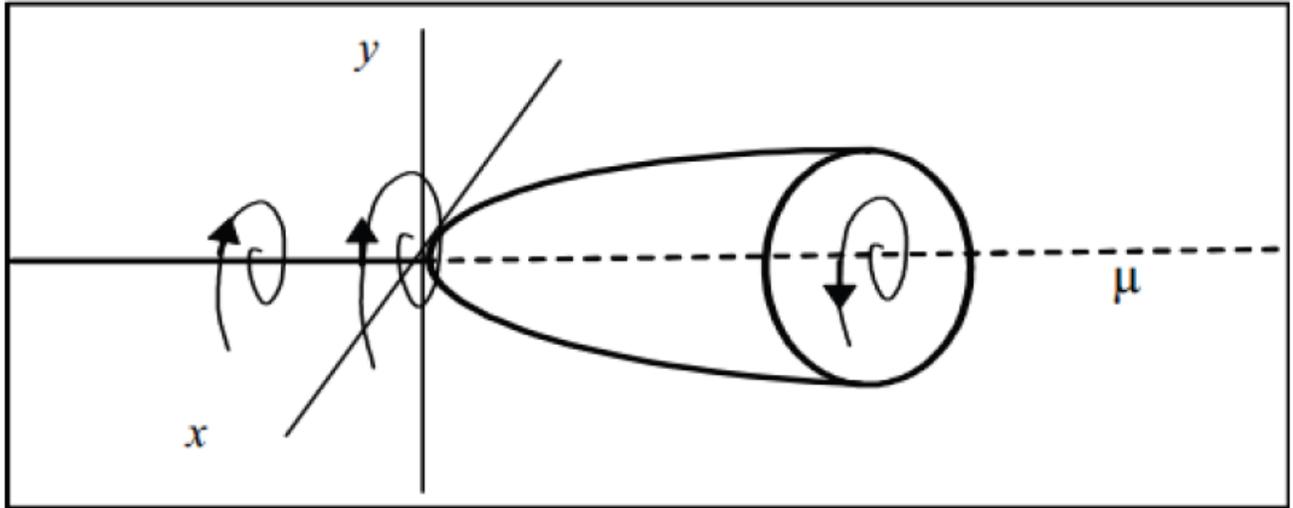


Fig. 1.9 –Un diagramme de bifurcation Hopf.

1.14 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons avancé un rapelle récapitulatif sur les systèmes dynamiques, telles que : définitions des systèmes dynamique et leur différents types et leur propriétés caractéristiques (classifications et comportement) puis nous parlerons sur la théorie du chaos et ces dispositif, Ensuite nous avons donné quelques rappels sur les dérivés d'ordre fractionnaire et la stabilité des systèmes fractionnaire linéaire et non linéaire.

Chapitre 2

Exemples des systèmes chaotiques fractionnaires

Dans ce chapitre nous présentons quelques exemples des systèmes chaotique fractionnaires.

2.1 Système chaotique fractionnaire de dynamos couplé

Le système chaotique fractionnaire de dynamos couplé, est donné comme suit :

$$\begin{cases} D^{p_1} x_1 = -\alpha x_1 + (x_3 + \beta) x_2 \\ D^{p_2} x_2 = -\alpha x_2 + (x_3 - \beta) x_1 \\ D^{p_3} x_3 = x_3 - x_1 x_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Ce système, présente des comportements chaotiques lorsque $(p_1; p_2; p_3) = (0.9, 0.93, 0.96)$ et $(\alpha, \beta) = (2, 1)$. Les attracteurs chaotiques du système de dynamos couplé sont présentés dans la figure (2.1).

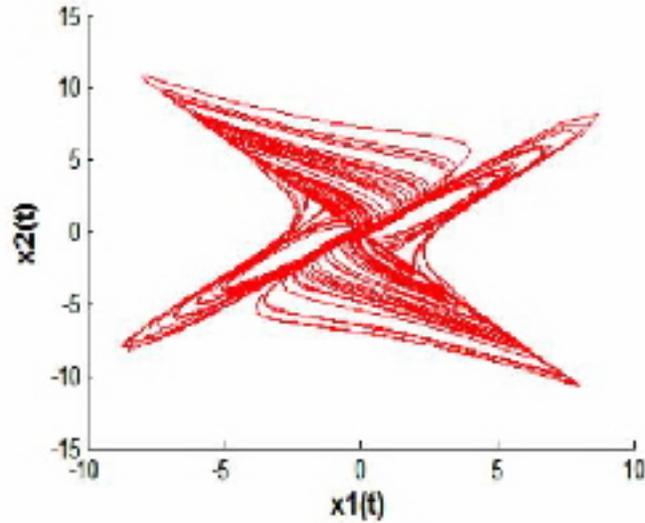


Fig. 2.1 –Attracteur chaotique du système (2.1) pour :
 $(p_1; p_2; p_3) = (0.9, 0.93, 0.96)$ et $(\alpha, \beta) = (2, 1)$.

2.2 Système fractionnaire chaotique de *Liu*

Le système fractionnaire à retard de Liu est défini comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = -ax(t) - ey^2(t) \\ D^\alpha y(t) = by(t) - kx(t)z(t) \\ D^\alpha z(t) = mx(t)y(t) - cz(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

$a = 1, b = 2.5, c = 5, e = 1, m = 5, k = 4$ avec $\alpha = 0.95$

La figure (2.2) montre l'attracteur de *Liu* en trois dimensions $x(t), y(t)$ et $z(t)$

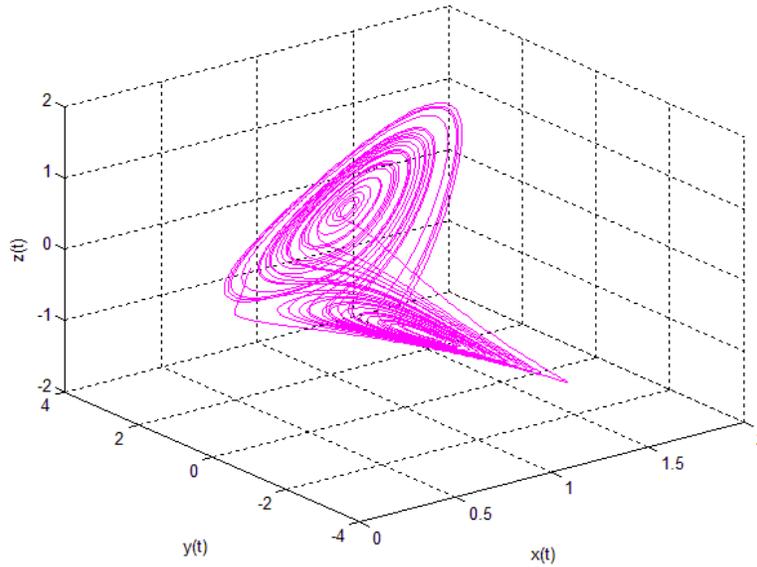


Fig. 2.2 –Attracteur chaotique du système (2.1)
pour : $a = 1, b = 2.5, c = 5, e = 1, m = 5, k = 4$ et $\alpha = 0.95$.

2.3 Système fractionnaire chaotique à retard de *Chen*

Le système chaotique de Chen a été introduit en 1999 par Chen et Ueta. Il est défini comme suit :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = a(y(t) - x(t)) \\ D^\alpha y(t) = (c - a)x(t) + cy(t) - x(t)z(t) \\ D^\alpha z(t) = x(t)y(t) - bz(t - \tau) \end{cases} \quad (2.3)$$

$a = 35, b = 3, c = 28$ avec $\tau = 0.2$ et $\alpha = 0.98$

Les figures ci-après (figure (2.3), figure (2.4), figure (2.5)) démontrent le comportement chaotique du système (2.3).

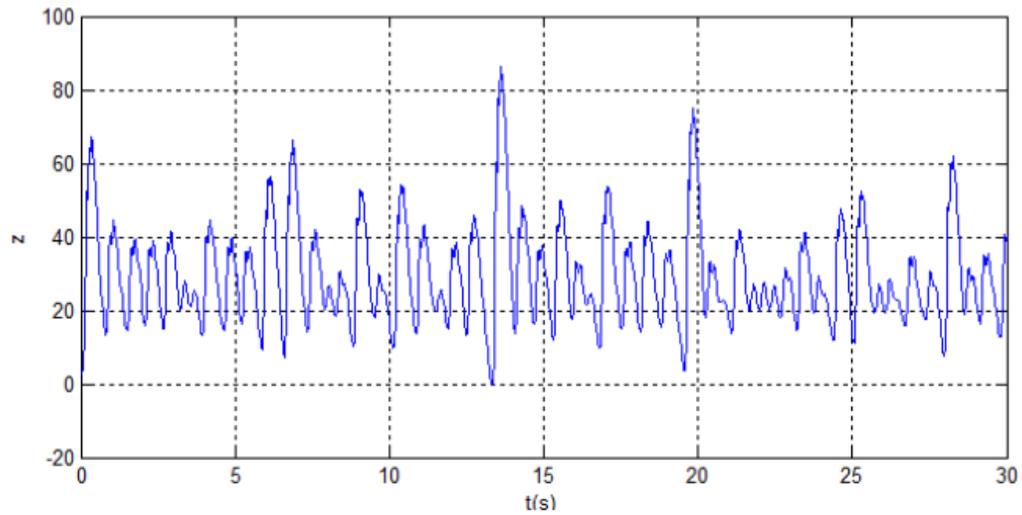


Fig. 2.3 –L'évolution au cours du temps des états z du système chaotique fractionnaire à retard de Chen.

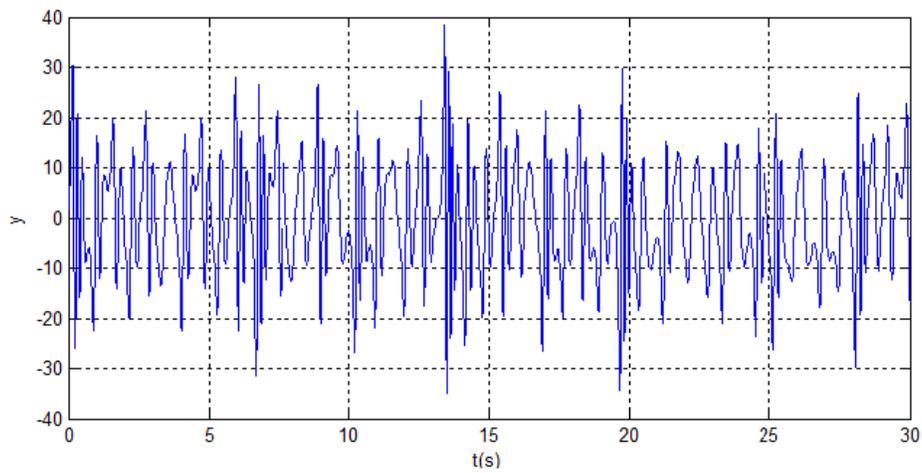


Fig. 2.4 –L'évolution au cours du temps des états y du système chaotique fractionnaire à retard de Chen.

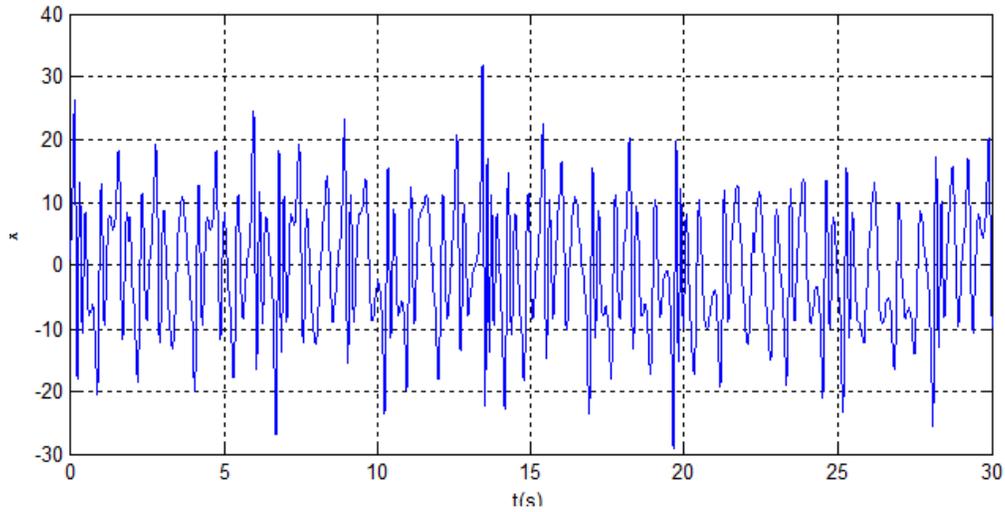


Fig. 2.5 –L'évolution au cours du temps des états x du système chaotique fractionnaire à retard de Chen.

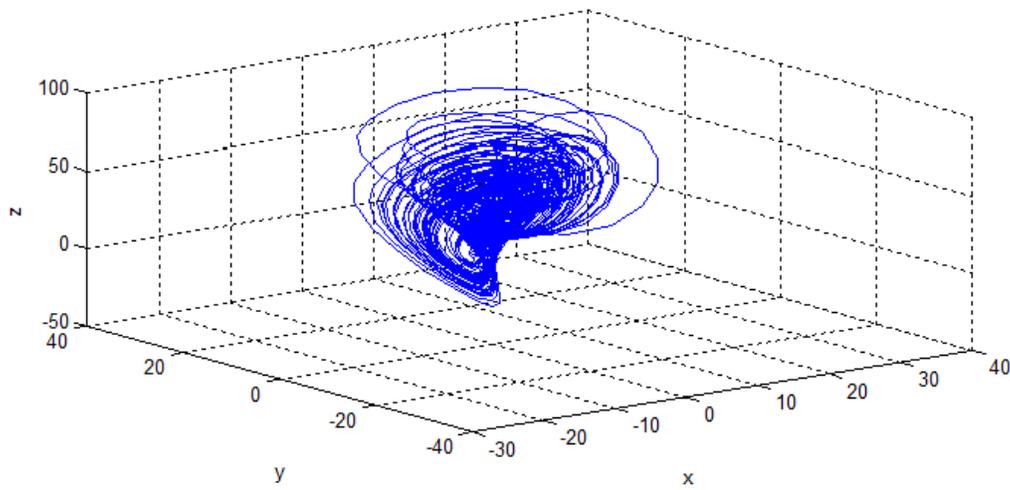


Fig. 2.6 –Attracteur chaotique d'ordre fractionnaire du système de Chen à retard

2.4 Système fractionnaire chaotique à retard de Lu

En 2014 Jianeng Tanga a ajouté le terme du retard au système fractionnaire chaotique de Lu, d'où le système est devenu comme suit :

$$\begin{cases} D_t^\alpha x(t) = a(y(t) - x(t)) \\ D_t^\alpha y(t) = cx(t) - x(t)z(t) \\ D_t^\alpha z(t) = x(t)y(t) - bz(t) \end{cases} \quad (2.4)$$

$a = 36$, $b = 3$, $c = 28$ et $\alpha = 0.98$

La figure ci-après (figure (2.7)) démontrent le comportement chaotique du système (2.4).

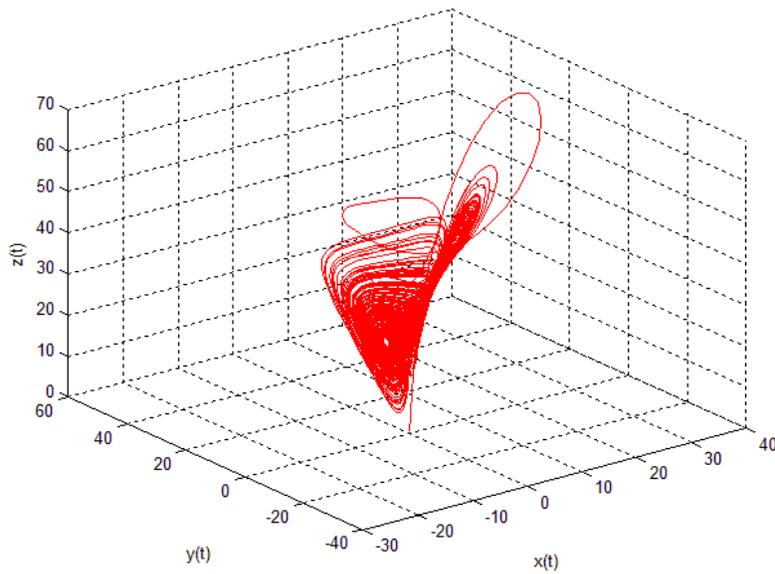


Fig. 2.7 –Attracteur chaotique de Lu pour : $a = 36$, $b = 3$, $c = 28$ et $\alpha = 0.98$

2.5 Système chaotique fractionnaire de Lorenz

$$\begin{cases} D_t^{\alpha_1} x(t) = \sigma(y(t) - x(t)) \\ D_t^{\alpha_2} y(t) = x(t)(\rho - z(t)) - y(t) \\ D_t^{\alpha_3} z(t) = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

Les attracteurs fractionnaires commensurables et non commensurables de Lorenz sont tracés, respectivement, sur les figures (2.8) et (2.9), les paramètres étant fixés aux valeurs suivantes : $\sigma = 10$, $\rho = 28$, $\beta = \frac{8}{3}$ et les conditions initiales sont $x_0 = (0.1 \ 0.1 \ 0.1)$.

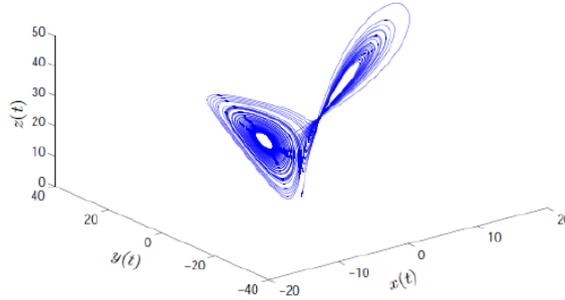


Fig. 2.8 –Attracteur fractionnaire de Lorenz d’ordre commensurable
 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.991$

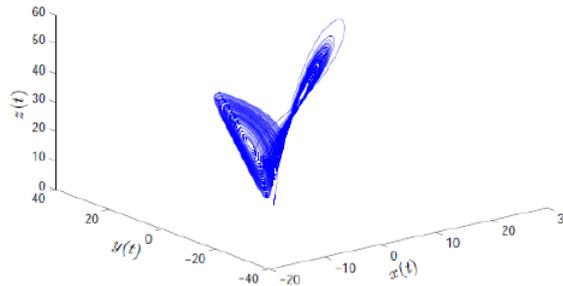


Fig. 2.9 –Attracteur fractionnaire de Lorenz d’ordre commensurable
 $\alpha_1 = 0.89$, $\alpha_2 = 1.10$, $\alpha_3 = 0.99$

2.6 Conclusion

Ce chapitre contient quelques exemples des systèmes fractionnaires chaotiques dont les attracteurs chaotiques de ces systèmes sont représentés dans des figures obtenu par simulation en matlab.

Chapitre 3

Analyse d'un système chaotique d'ordre fractionnaire

3.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif principale d'introduire l'analyse et la dynamique d'un système fractionnaire tridimensionnel qui possède des comportements dynamiques extrêmes.

complexes pouvant générer un attracteur chaotiques par analyse théorique et simulation numérique détaillée. Nous analysons ce système au moyen de portraits de phase, du spectre des exposants de Lyapunov et du diagramme de bifurcation du système.

3.2 Description du système chaotique d'ordre fractionnaire

Nous considérons le système chaotique d'ordre fractionnaire donné par :

$$\begin{cases} D^q x_1 = ax_1 - x_2 x_3 \\ D^q x_2 = -bx_2 + x_1 x_3 \\ D^q x_3 = c - x_3 + x_1 x_2 + dx_3 x_2 \end{cases} \quad (3.1)$$

pour les valeurs de paramètre $a = 0.7$, $b = 0.1$, $c = 0.001$, $d = 0.1$ et les conditions initiales $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (0.1, 0.2, 0.3)$ avec un ordre fractionnaire $q = 0.95$, le système affiche les attracteurs chaotiques suivants comme illustré sur les figures (3.1), (3.2), (3.3).

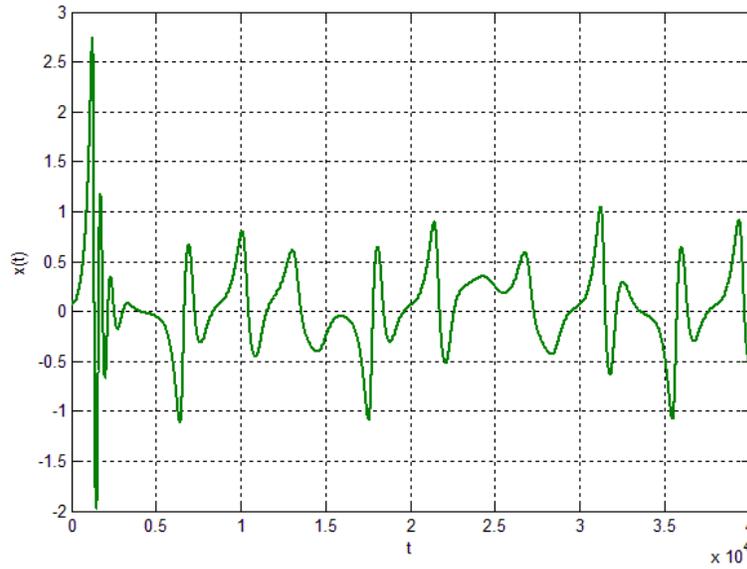


Fig. 3.1 –Evolution de la trajectoire x_1 du système au cours du temps t

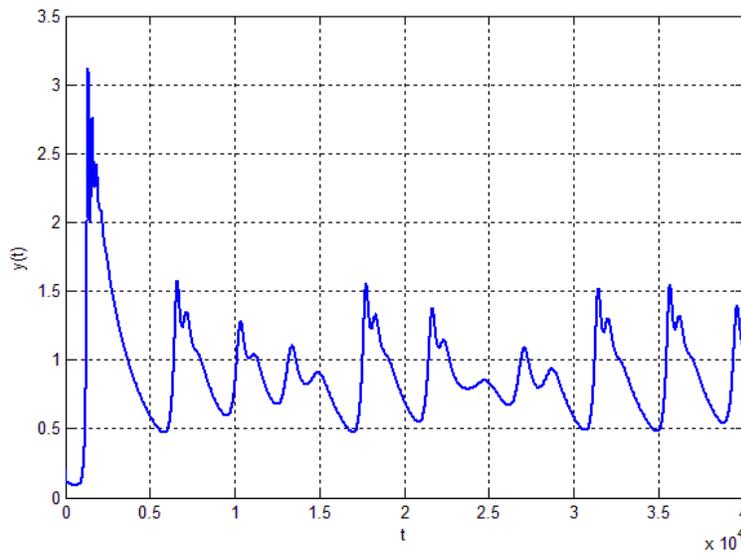


Fig. 3.2 –Evolution de la trajectoire x_2 du système au cours du temps t

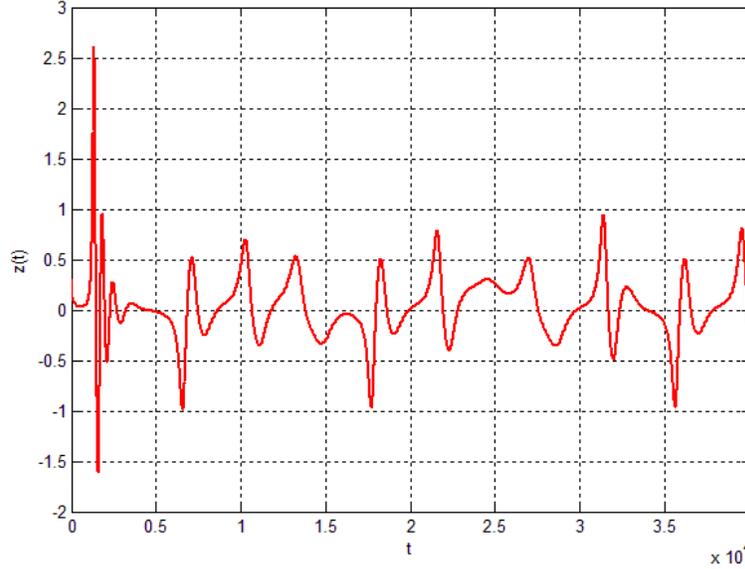


Fig. 3.3 –Evolution de la trajectoire x_3 du système au cours du temps t

3.3 Etude de la solution du système (3.1)

3.3.1 Existence et unicité de la solution

Théorème 3.3.1 *Le système d'ordre fractionnaire (3.1) peut être écrit comme :*

$$\begin{cases} D^q x(t) = G_1 x(t) + x_1(t) G_2 x(t) + x_2(t) G_3 x(t) + G_4 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Où $0 < t \leq \tau$, $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T \in \mathbb{R}^3$, $x_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})^T$, $q = (q_1, q_2, q_3)^T$, $0 < q_i < 1$ pour $i = 1, 2, 3$

$$G_1 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}, G_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

pour certains $\tau > 0$, ensuite, il atteint une solution unique.

Preuve. Comme

$$F(x) = G_1 x(t) + x_1 G_2 x(t) + x_2 G_3 x(t) + G_4$$

et continu sur \mathbb{R}^3 , donc borné sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ pour un $\delta > 0$. D'où la continuité de Lipschitz sur $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ serait suffisant pour avoir le théorème d'existence et d'unicité applicable

ici :

$$|F(x) - F(y)| = \left| \begin{array}{l} Gx(t) + x_1(t)G_2x(t) + x_2(t)G_3x(t) + G_4 \\ -G_1y(t) - y_1(t)G_2y(t) - y_2(t)G_3y(t) - G_4 \end{array} \right|$$

comme :

$$|x_1 - y_1| \leq |x - y| \text{ et } |x_2 - y_2| \leq |x - y|$$

par conséquent

$$\begin{aligned} |x_1G_2x - y_1G_2y| &= |G_2[x_1 - y_1]x + G_2[y_1[x - y]]| \\ &\leq \|G_2\| \cdot [|x| + |y_1|] (|x - y|) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |x_2G_3x - y_2G_3y| &= |G_3[x_2 - y_2]x + G_3[y_2[x - y]]| \\ &\leq \|G_3\| \cdot [|x| + |y_2|] (|x - y|) \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq \|G_1\| \cdot |x - y| + \|G_2\| [2|x_0| + 2\delta] (|x - y|) + \|G_3\| [2|x_0| + 2\delta] (|x - y|) \\ &\leq (\|G_1\| + \|G_2\| [2|x_0| + 2\delta]) |x - y| \leq P |y - x| \end{aligned}$$

où

$$P = \|G_1\| + (\|G_2\| + \|G_3\|) [2|x_0| + 2\delta]$$

Ici $y(t) \in \mathbb{R}^3$, $\|\cdot\|$ est la norme de la matrice et $|\cdot|$ est la norme vectorielle. Cela implique que $F(x)$ satisfait la condition de Lipschitz et donc d'après le théorème d'existence et d'unicité, le système a une solution unique. ■

3.4 Analyse des points d'équilibre du système

Les points d'équilibre système sont par définition tel que $D^q x_i = 0$, pour $i = 1, 2, 3$.

i.e,

$$\begin{cases} ax_1 - x_2x_3 = 0 \\ -bx_2 + x_1x_3 = 0 \\ c - x_3 + x_1x_2 + dx_2x_3 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour $a = 0.7$, $b = 0.1$, $c = 0.001$, $d = 0.1$, cinq points d'équilibre sont trouvés :

$$\begin{aligned} E_1 &= (0.33033, -0.87397, -0.264575), E_2 = (-0.303872, 0.80397, -0.264575), \\ E_3 &= (0.302678, 0.800811, 0.264575), \\ E_4 &= (-0.329135, -0.870811, 0.264575), E_5 = (0, 0, 0.001). \end{aligned}$$

3.4.1 Stabilité des points d'équilibres

Afin de vérifier la stabilité des points d'équilibre, nous dérivons la matrice Jacobienne en un point $E(x; y; z)$ du système (3.1).

La matrice jacobienne du système (3.1) est donnée par :

$$J = \begin{bmatrix} 0.7 & -x_3 & -x_2 \\ x_3 & -0.1 & x_1 \\ x_2 & x_1 + 0.1x_3 & -1 + 0.1x_2 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Pour $E_1(0.33033, -0.87397, -0.264575)$, J simplifier à :

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.264575 & 0.87397 \\ -0.264575 & -0.1 & 0.33033 \\ -0.87397 & 0.3038725 & -1.087397 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Les valeurs propres de la matrice J pour E_1 sont :

$$\mu_1 = -0,775578, \mu_2 = 0,227988 + 0,543962i, \mu_3 = 0.227988 - 0.543962i \quad (3.7)$$

impliquant que E_2 est un point d'équilibre hyperbolique instable.

Pour $E_1(0.33033, -0.87397, -0.264575)$, J simplifier à :

$$\begin{bmatrix} 0.7 & 0.264575 & 0.87397 \\ -0.264575 & -0.1 & 0.33033 \\ -0.87397 & 0.3038725 & -1.087397 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Les valeurs propres de la matrice J pour E_1 sont :

$$\mu_1 = -0,775578, \mu_2 = 0,227988 + 0,543962i, \mu_3 = 0.227988 - 0.543962i \quad (3.9)$$

impliquant que E_2 est un point d'équilibre hyperbolique instable.
Pour $E_3(0.302678, 0.800811, 0.264575)$, J simplifier à :

$$\begin{bmatrix} 0.7 & -0.264575 & -0.800811 \\ 0.264575 & -0.1 & 0.302678 \\ 0.800811 & 0.3291355 & -0.9199189 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Les valeurs propres de la matrice J pour E_3 sont :

$$\mu_1 = -0.776817, \mu_2 = 0.228449 + 0,540797i, \mu_3 = 0,228449 - 0,540797i \quad (3.11)$$

impliquant que E_3 est un point d'équilibre hyperbolique instable.
Pour $E_4(-0.329135, -0.870811, 0.264575)$, J simplifier à

$$\begin{bmatrix} 0.7 & -0.264575 & 0.870811 \\ 0.264575 & -0.1 & -0.329135 \\ -0.870811 & -0.3026775 & -1.0870811 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Les valeurs propres de la matrice J pour E_4 sont :

$$\mu_1 = -0.866977, \mu_2 = 0.189948 + 0.547469i, \mu_3 = 0.189948 - 0.547469i \quad (3.13)$$

Alors E_4 est un point d'équilibre hyperbolique instable.

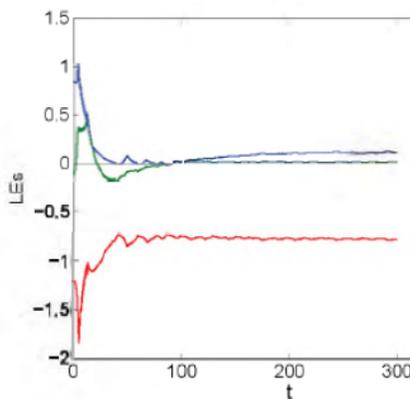


Fig. 3.4 –Le spectre des exposants de Lyapunov du système (3.1)

Pour $E_5(0, 0, 0.001)$, on a :

$$\begin{bmatrix} 0.7 & -0.001 & 0 \\ 0.001 & -0.1 & 0 \\ 0 & -0.001 & -1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Les valeurs propres sont :

$$\mu_1 = -1, \mu_2 = 0.699999, \mu_3 = -0.0999987 \quad (3.15)$$

Alors E_5 est un point d'équilibre hyperbolique instable.

3.5 Symétrie et dissipativité

3.5.1 A. Asymétrie

Le nouveau système chaotique d'ordre fractionnaire (3.1) montre comportement asymétrique autour de tous les axes impliquant une nature très complexe du système

3.5.2 B. Dissipativité

Le système (3.1) peut être exprimé comme

$$D^q x = F(x) \quad (3.16)$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)^T$

i.e.

$$\begin{bmatrix} D^q x_1 \\ D^q x_2 \\ D^q x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1(x_1, x_2, x_3) \\ F_2(x_1, x_2, x_3) \\ F_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

où

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, x_3) = ax_1 - x_2x_3 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) = -bx_2 + x_1x_3 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) = c - x_3 + x_1x_2 + dx_2x_3 \end{cases} \quad (3.18)$$

Considérez une région Ω dans \mathbb{R}^3 avec une frontière uniforme telle que $x(t) \in w(t)$, où $w(t)$ est le flux de G .

En désignant le volume par $\mathbf{V}(\mathbf{t})$ et en utilisant le théorème de Liouville,

$$\mathbf{V}(\mathbf{t}) = \int_{w(t)} (\nabla F) dx_1 dx_2 dx_3 \quad (3.19)$$

La divergence du champ vectoriel G par :

$$\begin{aligned} \nabla F &= \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \\ &= a - b - 1 + dx_2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Lorsque $\nabla F < 0$, le système (3.1) sera dissipatif, en substituant les valeurs des paramètres $a = 0.7$, $b = 0.1$, $c = 0.001$, $d = 0.1$ on obtient $x_2 < 4$ donc le système (3.1) sera dissipatif pour les valeurs considérées des paramètres et $x_2 < 4$.

Dans ce cas on peut écrire ;

$$\begin{cases} \mathbf{V}(\mathbf{t}) = \int_{w(t)} (-p) dx_1 dx_2 dx_3 \\ = -pV(t) \end{cases} \quad (3.21)$$

avec $p > 0$.

Intégrant (3.21), il devient :

$$V(t) = \exp(-pt)V_0, \text{ où } V(0) = V_0 \quad (3.22)$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, $V(t) \rightarrow 0$, c'est-à-dire que chaque région contenant la trajectoire du système (3.1) converge vers zéro, c'est-à-dire que toutes les trajectoires du système (3.1) convergent vers un attracteur avec le temps.

3.5.3 Ordre fractionnaire minimal pour l'apparition du Chaos dans le système (3.1)

Pour le système d'ordre fractionnaire, la condition nécessaire pour que le système reste chaotique[19] est donnée par

$$\alpha > \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{|\operatorname{Im}(\mu)|}{\operatorname{Re}(\mu)} \right)$$

Par conséquent, l'ordre fractionnaire minimum pour que le système (2) reste chaotique selon ses quatre premiers cas est donnée respectivement par 0.789, 0.747, 0.745, 0.787. Les portraits de phase du nouveau système pour divers ordres fractionnaires ont été affichés sur la figure suivante :

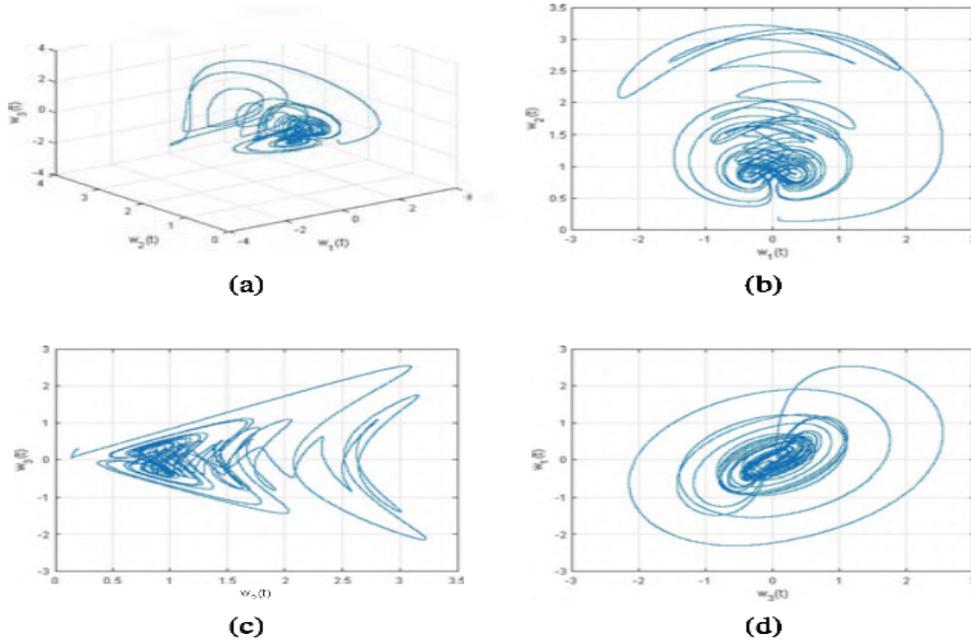


Fig. 3.5 –Portraits de phase du nouveau système chaotique fractionnaire (3.1) dans (a) $x_1 - x_2 - x_3$ plan (b) $x_1 - x_2$ plan (c) $x_2 - x_3$ plan (d) $x_3 - x_1$ plan.

3.6 Exposants Lyapunov et dimension Kaplan-Yorke

3.6.1 A. Exposants de lyapunove

Les exposants lyapunov du système d'ordre fractionnaire aident à déterminer le chaos dans le système. Les exposants de Lyapunov déterminent le taux de convergence et de divergence des trajectoires proches infinitésimales dans l'espace des phases, l'exposant lyapunov indique le chaos dans le système.

Pour les valeurs de paramètre $a = 0.7$, $b = 0.1$, $c = 0.001$, $d = 0.1$ et la condition initiale $(0.1, 0.2, 0.3)$, le système a les exposants de lyapunov

suivant :

$$\begin{aligned} L.E._1 &= -0.782 \\ L.E._2 &= 0.0049 \\ L.E._3 &= 0.1159 \end{aligned}$$

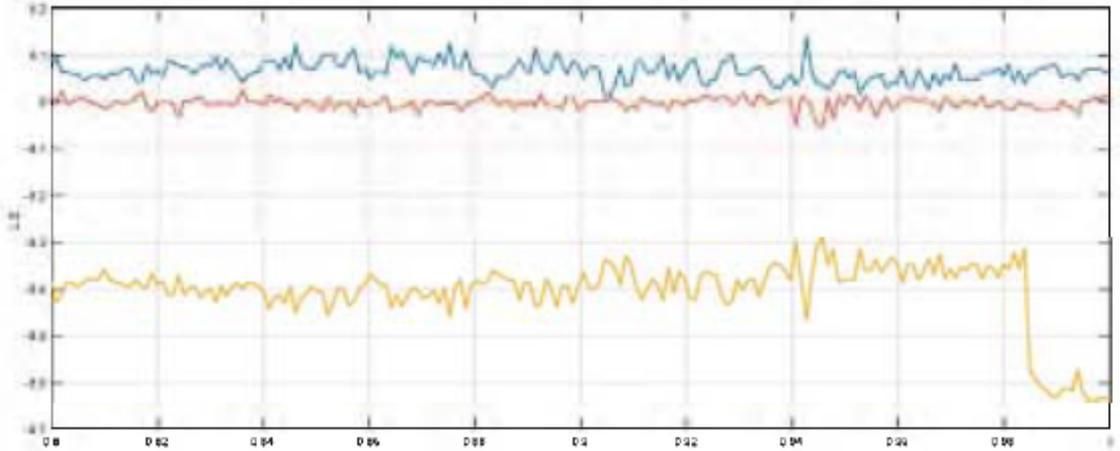


Fig. 3.6 –Variation des exposants de Lyapunov du système (3.1) pour $q = 0.8$

3.6.2 Dimension Kaplan-Yorke

La dimension Kaplan-Yorke est donnée par :

$$D_{YK} = q + \frac{\sum_{K=1}^q L.E._K}{|L.E._{q+1}| + |L.E._{q+2}|} \quad (3.23)$$

où q est le plus grand nombre satisfaisant > 0 et $\sum_{K=1}^{q+1} L.E._K$.

En utilisant les valeurs de exposants de Lyapunov obtenu, la dimension K.Y est 2.154436. Ceci étant une valeur non entière signifie un comportement complexe.

3.6.3 Analyse de Bifurcation

Les valeurs des paramètres jouent un rôle important dans déterminer le comportement chaotique du système, conduire l'analyse de bifurcation du système (3.1) en faisant varier un paramètre et garder les autres fixes est important. Pour $a = 0.7$, $b = 0.1$, $c = 0.001$, $d = 0.1$ et conditions initiales $(0.1, 0.2, 0.3)$, le diagramme de bifurcation pour des paramètres variables a, b, c et d sont respectivement affichés sur la figure 5.

La figure (b) affiche la route vers le chaos et Fig.5 (c), (d) affiche chaos durable sur toute la gamme des paramètres $a \in (0, 1)$, $b \in (0, 0.5)$, $c \in (0, 0.001)$, $d \in (0, 0.05)$

Remarque 3.6.1 la figure (3.6) montre la dynamique changeante du système (3.1) pour faire varier l'ordre fractionnaire dans la plage de 0,8 à 1 au moyen de dynamique des exposants de Lyapunov et diagramme de bifurcation.

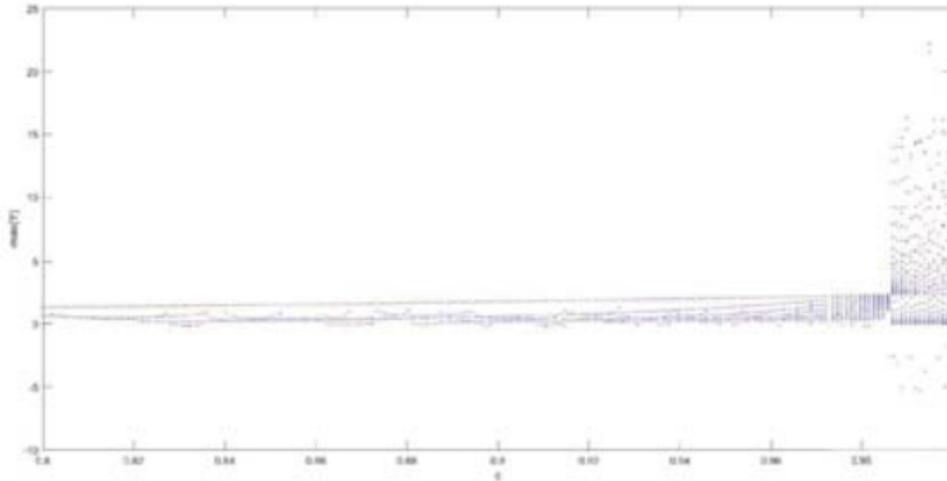


Fig. 3.7 –Diagram de Bifurcation pour $q = 0.8$

3.6.4 Conclusion

Dans ce chapitre une idée générale sur l'étude et l'analyse des systèmes tri-dimensionnel fractionnaire chaotiques. L'analyse a été fait en détail à des outils mathématiques fréquents : a l'aide d'exposants se Lyapunov, diagramme

de bifurcation, points d'équilibre, dissipativité etc. Les résultats confirmés par des figures obtenus par matlab.

Conclusion générale

un système chaotique est un système dynamique déterministe non linéaire qui se distingue par son imprévisibilité due à son extrême sensibilité aux conditions initiales. L'objectif de ce mémoire est de présenter l'étude et l'analyse des systèmes fractionnaires chaotiques, ce mémoire contient 3 chapitres dont le premier contient quelques notions sur les systèmes dynamiques chaotiques et leurs propriétés fondamentales, puis, dans le deuxième chapitre, nous considérons quelques exemples de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire et dans le troisième chapitre, nous étudions l'analyse d'un nouveau système chaotique fractionnaire. L'étude est faite sur la base des outils mathématiques fréquents comme : la recherche des points d'équilibre du système et leur stabilité, l'étude de la dissipativité du système, le spectre des exposants de Lyapunov et le diagramme de bifurcation.

Bibliographie

- [1] G.Assael, L.Blaizot et G.Huizing, "la théorie du chaos", Saint Eloi, 2013.
- [2] H.S. Ahn and Y.Q Chen. Necessary and sufficient stability condition of fractional-order interval linear systems. *Automatica*, 44 :2985–2988, 2008.
- [3] H.S. Ahn, Y.Q. Chen, and I Podlubny. Robust stability test of a class of linear time-invariant interval fractional-order system using Lyapunov inequality. *Applied Mathematics and Computation*, 187 :27–34, 2007.
- [4] Ayub Khan et al. Increased and reduced order synchronisations between 5d and 6d hyperchaotic systems. *Indian Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 8(1) : 118-131, 2017.
- [5] Ayub Khan and Pushali Trikha. Compound difference antisynchronization between chaotic systems of integer and fractional order . *SN Appl.Sci.*, 2019.
- [6] Ayub Khan, Dinesh Khattar, and Nitish Prajapati. Multiswitching compound antisynchronization of four chaotic systems. *Pramana*, 89(6) :90, 2017.
- [7] M. Chilali. Méthodes LMI pour l'Analyse et la Synthèse Multi-critère. PhD thesis, Université Paris Dauphine, 1996
- [8] Gamal M Mahmoud and Emad E Mahmoud. Phase and antiphase synchronization of two identical hyperchaotic complex nonlinear systems. *Nonlinear Dynamics*, 61(1-2) :141-152, 2010.
- [9] Gasri Ahlem, Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiquesn Différentielles Fractionnaires,UNIVERSITE FRERES MENTOURI-Constantine-1. 2018

- [10] HAOUES MOUSSA, ETUDE QUALITATIVE D'UN SYSTEME DYNAMIQUE DE FINANCE, Université Larbi Ben M'hidi Oum El Bouaghi. 2017
- [11] HOUMOR Tarek, Analyse du Chaos dans un Système d'Équations, DOCTORAT EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ CONSTANTINE 1. 2014
- [12] Huaguang Zhang, Derong Liu, and Zhiliang Wang. Controlling chaos : suppression, synchronization and chaotification. Springer Science & Business Media, 2009.
- [13] Ju H Park. Adaptive synchronization of hyperchaotic chen system with uncertain parameters. Chaos, Solitons & Fractals, 26(3) :959-964, 2005.
- [14] Junwei Sun, Yi Shen, and Guangzhao Cui. Compound synchronization of four chaotic complex systems. Advances in Mathematical Physics, 2015, 2015.
- [15] Kai Diethelm and Neville J Ford. Analysis of fractional differential equations. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 265(2) :229-248, 2002.
- [16] Mme.Karima RABAH,Contribution à la Modélisation et la Commande des Systèmes Chaotiques d'Ordre Fractionnaire,UNIVERSITÉ DU 20 AOÛT 1955 SKIKDA.2018.
- [17] Karthikeyan Rajagopal, Akif Akgul, Sajad Jafari, Anitha Karthikeyan, Unal Cavusoglu, and Sezgin Kacar. An exponential jerk system, its fractional-order form with dynamical analysis and engineering application. Soft Computing, pages 1-11, 2019.
- [18] Malihe Molaie, Sajad Jafari, Julien Clinton Sprott, and S Mohammad Reza Hashemi Golpayegani. Simple chaotic flows with one stable equilibrium. International Journal of Bifurcation and Chaos, 23(11) : 1350188, 2013.
- [19] D. Matignon. Recent results in fractional differential systems theory. Technical Report 96C004, École Nationale Supérieure des Télécommunications,France, 1996.
- [20] D. Matignon. Stability results for fractional differential equations with applications to control processing. In Proc. IEEE-IMACS Syst. Man Cyber.Conf., Lille, France, 1996.
- [21] Menacer Rihab, Sur certains aspects des systèmes différentiels d'ordre fractionnaire,UNIVERSITÉ MOHAMED KHIDER, BISKRA.2019

- [22] MOHAMMED MEDKOUR, Détermination des Systèmes Quadratiques en 3D Synchronisables avec le Système de Lorenz, Université Larbi Ben M'Hidi Oum El Bouaghi .2012
- [23] Mohammad Saleh Tavazoei and Mohammad Haeri. A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems. *Physics Letters A*, 367(1-2) :102-113, 2007. Authorized
- [24] Moez Feaptive chaos synchronization scheme applied to secure communication. *Chaos, Solitons & Fractals*, 18(1) : 141—148, 2003.
- [25] M. Moze, J. Sabatier, and A. Oustaloup. LMI tools for stability analysis of fractional systems. In *Proc. ASME IDET/CIE conferences*, Long-Beach,USA, 2005.
- [26] D.Peltier, T Nguyen Hoang, D.P.Tran, O. Abdelmalk, K. Alaoui et K.Leroux, "Etude d'un système physique non dissipatif <<chaotique>>", *Projet de physique P6-3 STPI/P6-3/2009*.
- [27] Sajad Jafari and JC Sprott. Simple chaotic flows with a line equilibrium. *Chaos, Solitons & Fractals*, 57 :79-84, 2013.
- [28] J. Sabatier, M. Moze, and C. Farges. On stability of fractional order systems. In *Proc. IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Application*, Ankara, Turkey, 2008.
- [29] Viet-Thanh Pham, Christos Volos, Sajad Jafari, Zhouchao Wei, and Xiong Wang. Constructing a novel no-equilibrium chaotic system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 24(05) : 1450073, 2014.
- [30] Wang MJ, Wang XY (2010) Dynamic analysis of the fractional order Newton-Leipnik system. *ACTA PHYS SIN* 59(3) :01583-7.
- [31] Xiaoyang Zhang, Simin Yu, Ping Chen, Jinhu Lii, Jianbin He, and Zhuosheng Lin. Design and arm-embedded implementation of a chaotic secure communication scheme based on h. 264 selective encryption. *Nonlinear Dynamics*, 89(3) : 1949-1965, 2017. Authorized licensed
- [32] Yan-Xia Tang, Abdul Jalil M Khalaf, Karthikeyan Rajagopal, Viet-Thanh Pham, Sajad Jafari, and Ye Tian. A new nonlinear oscillator with infinite number of coexisting hidden and self-excited attractors. *Chinese Physics B*, 27(4) :040502, 2018.
- [33] Yue Wu, Joseph P Noonan, Gelan Yang, and Huixia Jin. Image encryption using the two-dimensional logistic chaotic map. *Journal of Electronic Imaging*, 21(1) :013014, 2012.

- [34] Zhengze Wu, Xiaohong Zhang, and Xiaoyong Zhong. Generalized chaos synchronization circuit simulation and asymmetric image encryption. *IEEE Access*, 7 :37989-38008, 2019.
- [35] Zhouchao Wei, JC Sprott, and Huai Chen. Elementary quadratic chaotic flows with a single non-hyperbolic equilibrium. *Physics Letters A*, 379(37) :2184—2187, 2015.