



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Université Larbi Tebessi -Tebessa-
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la
Nature et de la Vie*
Département : *Sciences de la Matière*



N d'ordre :.....

Série :.....

Thèse

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
Doctorat 3ème cycle LMD
Option : ***Physique de la Matière Condensée***

Intitulée

Les oscillateurs harmoniques relativistes dans un espace non commutatif en présence d'une longueur minimale

par :

Selama Zina

Devant le jury

Pr. Chemam Faiçal	Président	<i>Université Larbi-Tebessi, Tebessa</i>
Pr. Abdelmalek Boumali	Rapporteur	<i>Université Larbi-Tebessi, Tebessa</i>
Pr. Zaim Slimane	Examineur	<i>Université Batna</i>
Pr. Falek Mokhtar	Examineur	<i>Université Biskra</i>
Dr. Chaouche Yassine	Examineur	<i>Université Larbi-Tebessi, Tebessa</i>
Dr. Aounallah Hocine	Examineur	<i>Université Larbi-Tebessi, Tebessa</i>

Date de Soutenance : 04/Mai/2023

© *Thèse effectuée au*
Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique



*Les oscillateurs harmoniques relativistes dans un
espace non commutatif en présence d'une longueur
minimale*

Selama Zina

9 mai 2023

في هذه الأطروحة، درسنا بنية الزمكان في اتجاهين مختلفين. في الجزء الأول، ركزنا على بناء نماذج رياضية في بنية الزمكان غير تبديلية والتي تكون مشوهة في سياق الطول الأصغري. ثم درسنا السلوك الفيزيائي لهذا النوع من النماذج في مثل هذه المساحات. تم بناء النماذج وفقاً للنهج التالي: لقد قدمنا إجراءً منهجياً لربط الجبر المشوه كيو بالجبر المقابل الذي تم استيفاؤه من خلال المتغيرات القانونية التي تصف الفضاءات غير المتبادلة. هنا، حصلنا على حلول دقيقة للهزات النسبية في فضاء غير متبادل بوجود حد أدنى للطول. أولاً، باعتماد طريقة مباشرة، قمنا بحل الهزات التوافقية في حالة الفضاء اللامتبادل. النتائج التي تم العثور عليها تتماشى مع النتائج المحصل عليها في المراجع. بعد ذلك، أدخلنا الطول الأصغري في المشكلة المعنية. تم تقديم هذه المقدمة على النحو التالي: '1' نكتب إحداثيات فضاء اللامتبادل مع إحداثيات الفضاء التبادلي باستخدام تقريب $D\acute{e}calage$ de Bopp. '2' ثم ندخل الطول الأصغري في هذه المعادلات.

نتيجة لذلك، تمكنا من تحديد الحلول الدقيقة لهذه الهزات النسبية مثل هزات كلاين جوردون وكيمر. تتم دراسة هذه الهزات في فضاء لاتبادلي في سياق ميكانيكا الكم النسبية التي يكون طولها ضئيلاً. يتوافق النظام الأخير مع معادلة شرودنغر داخل كمون من نوع Pöshchl-Teller

Abstract

In this thesis, we studied the structure of space-time in two different directions. In the first part, we focused on the construction of mathematical models in the space-time structure which is not commutative, i.e., q -deformed in the context of the minimum length. We then studied the physical behavior of this type of model in such environments. The models have been constructed using the following approach: we have provided a systematic procedure to link a q -deformed algebra to the corresponding algebra satisfied by canonical variables describing non commutative spaces. Here, we obtained exact solutions of relativistic oscillators in a non-selective space with minimal length. In the first place, by adopting a direct method, we have solved the harmonic oscillators in the case of noncommutative space. The results obtained are in line with those published in the literature. After that, we introduced the minimum length into the problem in question. This introduction was done as follows: (i) We write the coordinates of the NC space with those of the switching space using the Bopp offset approximation. (ii) We then enter the minimum length in these equations.

Consequently, we were able to determine the exact solutions for such relativistic oscillators as the Klein-Gordon and Kemmer oscillators. These oscillators are treated in a non commutative space as part of relativistic quantum mechanics whose length is minimal. The observed system corresponds to the Schrödinger equation with potential Pöschl-Teller.

Résumé

Dans cette thèse, nous avons examiné la structure de l'espace-temps sous deux angles différents. Dans la première partie, nous nous sommes concentrés sur la construction de modèles mathématiques dans la structure espace-temps qui n'est pas commutative. Cet espace est déformée dans le contexte de la longueur minimale. Nous avons ensuite étudié le comportement physique d'un tel modèle dans de tels espaces. Les modèles ont été construits en utilisant l'approche suivante : nous avons fourni une procédure systématique pour relier une algèbre q -déformée à l'algèbre correspondante satisfaite par des variables canoniques décrivant les espaces non commutatifs. On a ainsi obtenu des solutions exactes d'oscillateurs relativistes dans un espace non commutatif en présence d'une longueur minimale. Premièrement, en adoptant une méthode directe, nous avons résolu les oscillateurs harmoniques dans le cas d'un espace non commutatif. Les résultats obtenus sont conformes à ceux de la littérature. Par la suite, nous avons introduit la longueur minimale dans le problème dont nous sommes saisis. Cette introduction a été faite comme suit : (i) Nous écrivons les coordonnées de l'espace NC avec celles de l'espace commutatif en utilisant l'approximation de décalage de Bopp. (ii) Ensuite, nous introduisons la longueur minimale dans ces équations.

Par conséquent, nous avons réussi à déterminer les solutions exactes de ces oscillateurs relativistes tels que les oscillateurs Klein-Gordon et Kemmer. Ces oscillateurs sont traités dans un espace non commutatif dans le contexte de la mécanique quantique relativiste dont la longueur est minimale. Le système observé est celui de l'équation de Schrödinger dans un potentiel Pöschl-Teller.

Dédicace

*À mes parents,
À mes frères,
À mes sœurs,
À ma famille,
À mon mari et mes enfants,
À tout mes collègues,*

Je dédie cet humble travail.

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet de fin d'études, pour obtenir le diplôme de Doctorat LMD en Physique de la Matière Condensée à l'université de Larbi Tébessi-Tébessa-. Avant tout, je remercie ALLAH le tout-puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail. Et d'une façon toute particulière, j'adresse mes sincères remerciements à mes parents qui m'ont soutenu dans toutes les parties de ma vie et m'ont donné la force et le courage d'atteindre tout cela moi-même.

Je tiens à remercier mon encadreur le Professeur **Abdelmalek Boumali** pour m'avoir proposé ce sujet aussi intéressant et riche. Je suis très reconnaissant tout particulièrement pour la confiance qu'il m'a témoignée et la liberté qui m'a laissé.

J'exprime mes remerciements à Monsieur **Chemam Faïçal** Professeur à l'**Université Larbi-Tébessi -Tébessa-**, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de mon mémoire.

Je remercie vivement Monsieur **Zaim Slimane**, Professeur à l'**Université de Batna** d'avoir accepté de participer à ce jury de thèse et de juger ce travail.

Je tiens également à remercier Monsieur **Falek Mokhtar**, Professeur à l'**Université de Biskra**, de l'intérêt qu'il a témoigné pour mon travail, ainsi que d'avoir bien voulu de participer au jury de thèse .

Je remercie vivement Monsieur **Houcine Aounallah** Maître de Conférence A à l'**Université Larbi-Tébessi -Tébessa-**, qui m'a fait l'honneur de participer au Jury de soutenance ; je le remercie profondément.

Je remercie Monsieur **Chaouche Yassine** Maître de Conférence A à l'**Université Larbi-Tébessi -Tébessa-**, qui a accepté d'être examinateur de cette thèse.

Je remercie aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observés, aidés, conseillés et même supportés. Enfin, je souhaite exprimer toute ma gratitude à l'ensemble des personnes, qui bien en marche de ce travail, ont contribué largement à son aboutissement. Que ce soit depuis toujours, depuis plusieurs années ou quelques mois seulement, nombreux sont celles et ceux qui ont participé à notre épanouissement. On les remercie sincèrement.

TABLE DES MATIÈRES

ملخص	i
Abstract	ii
Résumé	iii
Dédicace	iv
Remerciements	v
Liste des Tableaux	vii
Liste des Figures	viii
1 Introduction générale	2
2 Espace-temps non-commutatif et la longueur minimale	8
2.1 La relation d'incertitude de Heisenberg	8
2.2 L'espace-temps non commutatif	10
2.3 La longueur minimale	16
3 L'oscillateur de Klein-Gordon dans un espace non-commutatif en présence d'une longueur minimale	23
3.1 L'oscillateur de KG dans un espace commutatif	23
3.2 L'oscillateur de KG à deux dimensions dans un espace non commutatif (NC)	30

4 L'oscillateur de Kemmer dans un espace non-commutatif en présence d'une longueur minimale	45
4.1 L'oscillateur de Dirac (DO) à deux dimensions dans un espace commutatif	45
4.2 L'oscillateur de Dirac (DO) dans un espace non-commutatif (NC)	54
4.3 L'oscillateur de Kemmer dans un espace commutatif	60
4.4 L'oscillateur de Kemmer dans un espace non commutatif	65
4.5 Conclusion	69
Conclusion générale	71
5 Conclusion générale	71
Bibliographie	75
A Interprétation physique de l'oscillateur de Dirac	81
A.1 L'oscillateur de Dirac à une dimension	81
A.2 L'oscillateur de Dirac à deux dimensions	86
A.3 L'oscillateur de Dirac à trois dimensions	90
A.4 Conclusion	91
B Liste des articles	93

LISTE DES TABLEAUX

Tableau

Page

TABLE DES FIGURES

Figure	Page
2.1 Représentation de la relation d'incertitude d'Heisenberg. La région autorisée est à la droite de la courbe.	10
2.2 La région autorisée par la relation d'incertitude est celle au-dessus de la ligne verte pour le boîtier standard et au-dessus de la ligne rouge pour le boîtier de longueur minimale (2.54)	20
3.1 Le spectre d'énergie E en fonction du nombre quantique n : a,b) variation par rapport à B pour $\theta = 0.005$ et $\beta = 0.005$; c,d) variation par rapport à β pour $B = 0.1$ et $\theta = 0.005$; e,f) variation par rapport à θ pour $B = 0.1$ et $\beta = 0.005$	42
3.2 Le spectre d'énergie E en fonction du champ magnétique externe B pour $n = 0, 1, 2, 3$	43
A.1 Réalisation expérimentale de l'oscillateur de Dirac à une dimension	85
A.2 Spectre d'énergie expérimental de l'oscillateur de Dirac à 1D sans (à gauche) et avec (à droite) masse	86

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'oscillateur harmonique a été un outil de base dans la physique pendant plusieurs siècles. L'importance de l'oscillateur harmonique comme outil de base pour le développement de la physique théorique est sans doute apparue à la naissance de la mécanique quantique. C'était le premier exemple auquel les règles de quantification ont été appliquées, et depuis lors, ses spectres, fonctions d'onde, symétries, etc., ont eu d'innombrables applications non seulement dans les calculs directs, mais aussi comme modèle pour la compréhension d'autres problèmes plus complexes [1]. Les études de la généralisation relativiste de l'oscillateur harmonique ont suscité beaucoup d'intérêt au cours des dernières années [2–10]. Le modèle relativiste connu de l'oscillateur harmonique a été révisé par Moshinsky et Szczepaniak [1, 11, 12]. Ces auteurs lui ont donné le nom d'oscillateur de Dirac (DO) parce que dans la limite non relativiste, il devient un oscillateur harmonique avec un fort terme de couplage spin-orbite.

L'oscillateur relativiste de Dirac peut avoir des implications aussi bien théoriques qu'expérimentales. Il a été étudié pour la première fois par Ito et ses collaborateurs [13]. Moshinsky et al [1, 11, 12] ont considéré une équation de Dirac dans laquelle la quantité de mouvement \mathbf{p} est remplacé par $\mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}$, avec \mathbf{r} est le vecteur de la position, m la masse de la particule et enfin ω la fréquence de l'oscillateur. Physiquement, on peut montrer que cette interaction représente un système physique, qu'on peut interpréter comme l'interaction d'un moment magnétique anomal avec un champ électrique linéaire [14, 15]. Le potentiel électromagnétique associé a été trouvé par Benitez et al [16].

L'oscillateur de Dirac a soulevé beaucoup d'intérêt car il fournit l'un des rares exemples de l'équation de Dirac ayant des solutions exactes et en raison de ses nombreuses appli-

cations physiques [3]. Récemment, Franco-Villafane et ses collègues [17] ont proposé, pour la première fois, une proposition expérimentale pour la création de l'oscillateur de Dirac. L'expérience est basée sur une relation entre l'oscillateur de Dirac et un système de liaison forte correspondante. Les résultats expérimentaux obtenus concordent avec ceux obtenus en théorie.. Par ailleurs, Yang et Piekarewicz [18] font la démonstration de la puissance et de la flexibilité de l'oscillateur de Dirac. Ils proposent d'étendre ce modèle à l'étude des systèmes symétriques nécessaires aux calculs des excitations nucléaires.

La physique moderne a traversé de nombreuses situations et plusieurs changements conceptuels se sont produits dans l'histoire du début du XXe siècle. En particulier, des expériences en physique atomique ont mis en évidence la structure quantique microscopique de la nature. D'autre part, la théorie de la relativité générale d'Einstein a permis de mieux comprendre l'espace et le temps à une échelle macroscopique. La mécanique quantique fut alors couronnée de succès en combinaison avec la relativité restreinte, conduisant à la théorie des champs quantiques et, en dernier ressort, au modèle standard de la physique des particules. Cependant, aux petites échelles de hautes énergies, y compris autour de l'échelle de Planck, les effets de la gravité sont si importants qu'ils perturberaient significativement la structure de l'espace-temps et aboutiraient à la discrétisation de l'espace-temps. En conséquence, la compréhension de l'unification de la relativité générale avec les lois de la mécanique quantique devient indispensable, bien que l'on n'ait pas encore réussi à le comprendre. La gravité quantique reste le champ de recherche le plus exigeant et le plus fascinant au 21ème siècle, dans les domaines de la physique mathématique, des mathématiques et de la phénoménologie.

L'un des principaux objectifs de la physique est de développer une théorie quantique de la gravitation. Bien que la mécanique classique et quantique donnent de bonnes approximations de la nature, il existe des situations physiques dans lesquelles ces théories ne suffisent pas. Les trous noirs, par exemple, ont des densités incroyablement élevées que l'on peut décrire jusqu'à un certain point par la relativité générale. Cependant, à mesure que nous nous approchons du centre, les effets quantiques deviennent pertinents et la théorie classique s'écroule.

La quantification de la gravité est donc d'importance majeure pour nous aider à comprendre notre univers. En ce sens, il existe de nombreuses approches ou tentatives pour développer une théorie quantique de la gravité : théorie quantique des champs, théorie des cordes et la relation d'incertitude. Notons ici que la théorie quantique et la théorie de la relativité générale ne semblent pas compatibles aux très petites échelles de distances

en raison de l'argument suivant : Généralement on s'attend à ce qu'à des échelles de longueurs très courtes, la théorie relativiste générale de la gravité doit devenir une théorie quantique des champs à cause des hautes énergies nécessaires pour examiner la théorie sur de très courtes distances. Cependant, les méthodes de quantification standard ne suffisent pas car la quantification des théories classiques de la gravité conduit à des théories quantiques dépourvues de renormalisabilité qui sont l'une des exigences pour une théorie fondamentale cohérente des champs quantiques. Rappelons que dans la théorie quantique des champs, la renormalisation est une tentative de comprendre les raisons physiques des divergences UV (ultraviolette) à courte distance qui se produit dans l'environnement naturel. Les procédures de renormalisation impliquent bien sûr l'introduction d'une sorte de régulateur, un ensemble de paramètres de régularisation, suivis de l'isolement des contributions finies et purement divergentes.

En résumé, la théorie de la relativité générale et de la mécanique quantique constituent l'un des problèmes majeurs de la physique théorique. Cette unification prédit l'existence d'une longueur minimum quantifiable de l'ordre de la longueur de Planck. Toutes les approches de gravitation quantique montrent que près de l'échelle de Planck, le principe d'incertitude de Heisenberg devrait être reformulé. Le minimum de longueur de la relation d'incertitude est apparue dans le contexte de la théorie des cordes. Elle est une conséquence du fait que le minimum $\hbar\sqrt{\beta}$ ne peut pas dépasser des distances inférieures à l'échelle de la corde $\hbar\sqrt{\beta}$, où β est un paramètre positif appelé le paramètre de déformation. Cette longueur minimale peut être introduite comme une incertitude supplémentaire dans la mesure de la position, de sorte que la relation de commutation canonique usuelle entre la position et les opérateurs de moments devient

$$(1.1) \quad [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar (1 + \beta p^2).$$

Cette relation de commutation conduit à la relation d'incertitude d'Heisenberg suivante

$$(1.2) \quad \Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq i\hbar \{1 + \beta (\Delta p)^2\},$$

ce qui implique clairement l'existence d'un minimum non nul de longueur $\Delta x_{\min} = \hbar\sqrt{\beta} \sim l_p$, où $l_p \simeq 10^{-35}$ mètre est la longueur de Planck. Cette modification de la relation d'incertitude est généralement appelée le principe d'incertitude généralisée (GUP) ou le principe d'incertitude de longueur [19–23].

Pour la relation d'incertitude en particulier, la recherche a été menée par les travaux

de Kempf, Mann et Mangano (KMM) [22]. L'objectif principal de leurs recherches était autour de l'idée de l'existence d'une échelle ayant une longueur minimale. L'une des centrales questions sur une théorie quantique de la gravité est de savoir si la nature de l'espace-temps est continue lorsqu'on va à des distances plus petites. Les travaux expérimentaux à des échelles de basses énergies favorisent un modèle continu de l'espace-temps, malgré l'existence des arguments théoriques en faveur d'un espace-temps discret à des échelles de haute énergie. Les travaux expérimentaux sur les échelles de faible énergie favorisent un modèle continu de l'espace-temps, malgré l'existence d'arguments théoriques en faveur d'un espace-temps discret aux échelles d'énergie élevée. Autrement dit, la question est de savoir s'il y a une longueur minimale observable et comment cela peut influencer les prédictions. Dans le contexte de la théorie KMM, celle-ci est explorée via la relation d'incertitude incluant la modification de commutateur position/moment peut conduire à un minimum de la position positive lié à l'incertitude minimale dans les mesures de position.

Dans cette direction, il a été suggéré très tôt par les pères fondateurs de la mécanique quantique, la plupart notamment Heisenberg, à l'époque pionnière de la théorie quantique des champs, que l'on pourrait utiliser une structure non commutative de coordonnées spatio-temporelles à de très petites échelles de longueur pour introduire la coupure ultraviolette efficace.

Snyder [24] a formalisé cette idée dans un article tout à fait consacré au sujet. Son idée a été plus tard élargi par Yang [25] qui a remplacé l'algèbre des opérateurs non linéaires avec un algèbre des fonctions pour décrire une structure géométrique générale. Cependant, ces propositions ont été largement ignorées à cette époque, peut-être en raison de l'incapacité de faire des expériences précises. Cependant, l'intérêt de cette théorie a refait surface avec Seiberg et Witten [26]. Ces auteurs ont démontré que la théorie des cordes, à faibles énergies, peut être réalisée en tant que théorie quantique des champs dans un espace-temps non commutatif. Connes [27] et Woronowicz [28] ont ravivé le concept, en introduisant une structure différentiable dans un cadre non commutatif. Depuis, ces théories sont devenues un domaine de recherche très actif. Par conséquent, les théories non commutatives sont censées être des voies possibles suggérant de nombreux problèmes physiques de temps en temps. La raison en est que les relations de commutation émergent de ce genre de théories conduisent tout naturellement à un type particulier de relations d'incertitude, qui donnent délibérément l'existence d'une longueur observable minimale. Ceci est assez étonnant parce que toutes les tenta-

tives vers la gravité quantique indiquent l'existence d'une échelle de longueurs minimales mesurables qui devrait être proche, ou identique, à la longueur de Planck [29].

Ainsi, l'étude des espaces non commutatifs (NC) et leurs implications en physique moderne devient un domaine de recherche extrêmement actif. Il a été démontré, à plusieurs reprises, que la non-commutativité doit être considérée comme une caractéristique fondamentale de l'espace-temps dans l'échelle de Planck. D'autre part, l'étude des systèmes quantiques dans un espace NC a fait l'objet de beaucoup d'intérêt, en supposant que la non-commutativité peut être, en fait, le résultat des effets de gravité quantique. Dans ces études, une attention particulière a été accordée aux modèles NCQM (Non-commutative quantum mechanics). L'intérêt de cette approche réside dans le fait que le NCQM est un domaine fructueux où l'on peut obtenir un aperçu des conséquences de la non-commutativité dans la théorie des champs en utilisant les techniques de calcul standard de la mécanique quantique. Différents modèles de théorie des champs non commutatifs ont été abordés, ainsi que de nombreuses extensions de la mécanique quantique. Citons ici, l'étude de l'influence de l'hypothèse de longueur minimum sur le spectre énergétique des systèmes quantiques. Cette étude est devenue une question intéressante pour deux raisons. En premier lieu, il peut aider à définir les limites supérieures de la valeur de la longueur minimale. Dans ce contexte, nous pouvons évoquer certaines études de l'atome d'hydrogène et de l'équation de Dirac dans un champ magnétique externe. En outre, la limite classique a également fourni des informations intéressantes sur certaines problématiques cosmologiques. Deuxièmement, il a été démontré que la mécanique quantique avec une longueur minimale peut également être utile pour décrire des particules non ponctuelles, telles que des quasi-particules et diverses excitations collectives dans les solides, ou des particules composites.

Enfin, des arguments intuitifs impliquant des relations d'incertitude de la mécanique quantique standard suggèrent qu'à des échelles de longueurs proches de la longueur de Planck ($l_p = \text{Longueur de planck} = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 1.616 \times 10^{-35}$ metre), de forts effets de gravité limite la résolution spatiale ainsi que temporelle, comparant à l'échelle de la longueur fondamentale de Planck. Ceci entraîne des incertitudes espace-espace et espace-temps. Il est impossible d'étudier l'espace-temps avec une résolution plus élevée à cette échelle. L'espace-temps s'estompe au-dessous de cette échelle, ce qui conduit à la non-interactivité de l'espace-temps. Il est dès lors important et intéressant d'étudier en détail la structure de ces espaces non commutatifs et leurs propriétés. Parce que ceci nous aide non seulement à améliorer notre compréhension de la physique à l'échelle de Planck,

mais aussi à rapprocher la physique des particules de la physique à l'échelle de Planck.

En ce sens, notre but principal dans cette thèse est d'explorer différentes méthodes de construction de modèles dans ce type d'espace unidimensionnel. Aussi, nous voulons décrire ce genre de comportement de l'espace-temps non commutatif, qui modifie la relation d'incertitude d'Heisenberg pour introduire la relation d'incertitude généralisée et fournit l'existence d'une longueur minimale observable.

Le manuscrit est structuré de la façon suivante :

- Le premier chapitre est une introduction générale à l'utilisation des deux concepts de la non-commutativité et de longueur minimale de Planck et leurs relations avec la gravitation quantique.
- Le deuxième chapitre porte sur les deux concepts d'espace non commutatif et de longueur minimale.
- Dans les chapitres 3 et 4, nous avons étudié les solutions des oscillateurs relativistes en présence de la longueur minimale.
- Pour terminer, nous résumons les résultats globaux comme une conclusion générale.

CHAPITRE 2

ESPACE-TEMPS NON-COMMUTATIF ET LA LONGUEUR MINIMALE

2.1 La relation d'incertitude de Heisenberg

Avant d'entamer la discussion rigoureuse sur les différentes notions de la théorie non commutative, rappelons brièvement quelques résultats fondamentaux de la théorie de la mécanique quantique. Lorsque la théorie de la mécanique quantique a été développée, de nombreuses pensées, croyances et hypothèses de ce qu'on appelle aujourd'hui la physique classique, qui avait jusqu'alors expliqué de manière exhaustive de divers phénomènes ont cependant été intégrés et revisités, voire rejetés. L'une des plus importantes et fondatrices à subir un tel sort fut l'idée que les quantités physiques pourraient, dans des conditions de mesures idéales (instruments adaptés, pas d'erreurs systématiques etc...), toujours être connue avec autant de précision qu'on le souhaite. Dans la théorie quantique de Schrödinger et Heisenberg, plus de précautions doivent être prises lors de la formulation de ce genre d'énoncés : en fait, cela fait une grande différence que nous parlions des mesures d'une seule quantité physique ou plusieurs d'entre eux doivent plutôt être connus en même temps. Alors que dans le premier cas, la mécanique quantique ordinaire ne pose aucune limite formelle à notre capacité à gagner autant beaucoup d'informations que nous pourrions attendre d'une mesure, les choses s'avèrent assez différentes dans la seconde : pour certains ensembles d'observables d'un système physique donné, les mesures simultanées ne peuvent pas être aussi précises que l'on souhaite et leurs incertitudes obéissant à une loi bien définie [30–32].

Un espace de phase de la mécanique quantique est défini en remplaçant les variables

canoniques de position et de quantité de mouvement x, p avec des opérateurs dans la mécanique quantique \hat{x}, \hat{p} qui sont par définition hermitiens et obéissent à la relation suivante de l'incertitude d'Heisenberg :

$$(2.1) \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}.$$

L'espace des phases ordinaires est récupéré dans la limite classique où $\hbar \rightarrow 0$ (dans cette limite, cela correspond souvent à de grands nombres quantiques n pour des niveaux d'énergies discrètes). La naissance du principe d'incertitude de Heisenberg a lieu avec l'introduction de la relation de commutation canonique, qui peut être reconnu facilement, en supposant que $|\psi_i\rangle$ est le vecteur propre de la position ainsi que le opérateur moment avec les valeurs propres x_0 et p_0 respectivement, tels que

$$(2.2) \quad [\hat{x}, \hat{p}] |\psi\rangle = (x_0 p_0 - p_0 x_0) |\psi\rangle = 0.$$

Cependant, la relation d'incertitude d'Heisenberg nécessite

$$(2.3) \quad [\hat{x}, \hat{p}] |\psi\rangle = i\hbar \neq 0.$$

Ceci implique qu'aucun état quantique ne peut être simultanément position et quantité de mouvement de l'état propre en même temps. En d'autres termes, les observables de position et d'impulsion ne peuvent pas être mesurée simultanément avec une grande précision. Plus précisément la position d'une particule quantique est mesurée, moins la mesure de la quantité de mouvement devient précise et vice-versa. Le produit des incertitudes est lié par une constante, représentée par la la constante de Planck \hbar

$$(2.4) \quad \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2},$$

avec $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$ et $\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}$ sont la déviation standard des deux observables en question. Ainsi, l'équation(2.1) se déduit directement à partir des représentations des opérateurs canoniques comme suit :

$$(2.5) \quad \hat{x}\psi(x) = x\psi(x), \quad \hat{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{d\psi(x)}{dx},$$

$$(2.6) \quad \hat{x}\phi(p) = i\hbar \frac{d\phi(p)}{dp}, \quad \hat{p}\phi(p) = p\phi(p).$$

La figure 2.1, (2.4) montre que l'on peut diminuer indéfiniment l'indétermination d'une des deux variables au prix de perdre progressivement toutes les informations de l'autre. Il existe une zone interdite entre les axes et la ligne qui était complètement absent de la théorie classique, où le quantum d'action \hbar est considéré comme zéro.

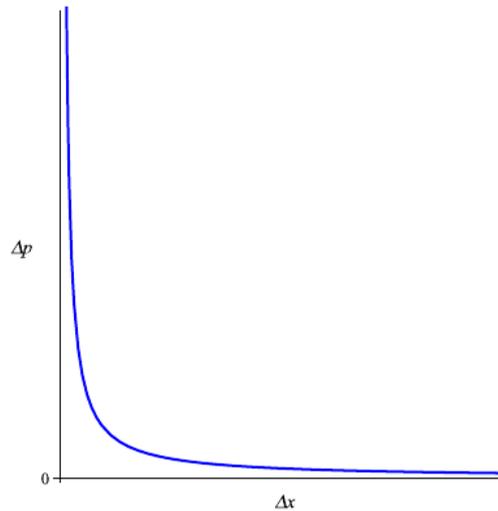


Fig. 2.1 : Représentation de la relation d'incertitude d'Heisenberg. La région autorisée est à la droite de la courbe.

Ainsi, avec l'introduction du principe d'incertitude d'Heisenberg, le concept d'espace de phase de la mécanique quantique est radicalement modifié et la notion de point est remplacée par celle de cellule de Planck. C'était John Von-Neumann [33], qui a été le premier à décrire rigoureusement l'espace de phase quantique, se référant au fait que la notion de point dans un espace de phase quantique a un sens faible à cause du principe d'incertitude d'Heisenberg de la mécanique quantique et avait surnommé son étude comme "pointless geometry".

2.2 L'espace-temps non commutatif

2.2.1 Produit \star de Moyal

De même que la quantification de l'espace des phases classiques, la manière la plus simple d'étudier les espaces non commutatifs est de remplacer l'ensemble des coordonnées qui commutent par des générateurs hermitiens x^μ d'une C^* -algèbre non commutative des fonctions sur l'espace-temps qui satisfont aux relations de commutation

suivantes [29, 34, 35]

$$(2.7) \quad [x^\mu, x^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, [x^\mu, p_\nu] = i\hbar\delta_\nu^\mu, [p_\mu, p_\nu] = 0,$$

avec le paramètre de déformation $\theta^{\mu\nu}$ qui est un tenseur antisymétrique constant, $\mu, \nu = (0, 1, 2, 3)$. Comme les coordonnées spatio-temporelles ne commutent plus dans ce cas, l'espace sous-jacent disparaît et l'espace non commutatif est introduit.

Cependant, il y a des problèmes importants liés à l'utilisation de (2.7) pour des problèmes physiques. Dans la théorie relativiste standard, on peut remarquer que lorsque $\theta^{\mu\nu}$ n'est pas nul cela peut rompre les symétries de Lorentz-Poincaré. En effet, les coordonnées x^μ se transforment comme des vecteurs, alors que $\theta^{\mu\nu}$ est constant dans tous les référentiels. Néanmoins, malgré ce problème bien connu, tous les problèmes fondamentaux comme l'unitarité, la causalité, les divergences UV/IR et les anomalies ont été traités d'une manière formellement invariante de Lorentz en utilisant la représentation de l'algèbre de Poincaré habituelle (Pour plus de détails voir [29]). Ces résultats ont été obtenus en utilisant la correspondance de Weyl-Moyal, qui associe une théorie ordinaire à une théorie non commutative en remplaçant les champs ordinaires par des champs non commutatifs et les produits ordinaires par des produits étoile (product \star –Moyal) de Moyal

$$(2.8) \quad \phi(x) \psi(x) \rightarrow \phi(x) \star \psi(x),$$

où le produit \star de Moyal a été introduit par Moyal [36] pour faciliter la formulation de l'espace de phase de Wigner de la mécanique quantique [37], qui a été utilisée dans un large domaine de recherche, comme la théorie M [38] non commutative, la théorie des cordes [26], etc. Il est défini par la relation suivante

$$(2.9) \quad \phi(x) \star \psi(x) = \phi(x) e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu} \psi(y) |_{x=y},$$

où dans une version plus utile et symétrique

$$(2.10) \quad \phi(x) \star \psi(x) = \phi(x) e^{\frac{i}{4}\theta^{\mu\nu}(\overleftarrow{\partial}_\mu\overrightarrow{\partial}_\nu - \overleftarrow{\partial}_\nu\overrightarrow{\partial}_\mu)} \psi(y) |_{x=y}.$$

Au premier ordre par rapport à θ , ce produit s'écrit par

$$(2.11) \quad \phi(x) \star \psi(x) = \phi(x) \psi(y) + \frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \psi(y) + \mathcal{O}(\theta^2).$$

Si on considère la non-commutativité dans l'espace de phase, (2.10) se généralise comme suit

$$\begin{aligned}
 (\phi \star \psi)(x, p) &= \phi(x, p) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu^x \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu^x + \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu^p \bar{\theta}^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu^p} \psi(x, p) \\
 &= \phi(x, p) \psi(x, p) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu^x \phi(x, p) \partial_\nu^x \psi(x, p) \\
 &\quad + \frac{i}{2} \bar{\theta}^{\mu\nu} \partial_\mu^p \phi(x, p) \partial_\nu^p \psi(x, p) + \mathcal{O}(\theta^2).
 \end{aligned}
 \tag{2.12}$$

Par conséquent, les commutateurs d'opérateurs sont remplacés par des crochets de Moyal comme suit

$$[x^\mu, x^\nu] \rightarrow [x^\mu, x^\nu]_\star = x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\theta^{\mu\nu}
 \tag{2.13}$$

A partir de (2.11) et (2.13), le calcul de commutateur $[\phi, \psi]_\star$ conduit à :

$$\begin{aligned}
 [\phi, \psi]_\star &= \phi \star \psi - \psi \star \phi \\
 &= \phi(x) \psi(y) - \psi(x) \phi(y) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \psi(y) - \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi(x) \partial_\nu \phi(y) \\
 &= [\phi, \psi] + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi(x) \partial_\nu \psi(y) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_\nu \psi(x) \partial_\mu \phi(y) \\
 &= [\phi, \psi] + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \phi(x), \partial_\nu \psi(y) \}.
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

Dans le cas où $[\phi, \psi] = 0$ (jauge abélienne), nous obtenons

$$[\phi, \psi]_\star = \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \phi(x), \partial_\nu \psi(y) \}.
 \tag{2.15}$$

Finissons cette section par l'introduction du décalage de Bopp "Bopp-shift" : supposons que la non-commutativité par rapport au temps est nulle, ainsi (2.13) se réduit à

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = i\bar{\theta}_{ij}, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}, \quad (i, j) = 1, 2, 3,
 \tag{2.16}$$

dont

$$[\hat{x}_0, \hat{x}_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3.
 \tag{2.17}$$

Le décalage de Bopp consiste à exprimer les opérateurs d'espace-temps non commutatifs en fonction des opérateurs ordinaires des positions comme suit :

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{\theta_{ij}}{2} p_j, \quad \hat{p}_i = p_i + \frac{\bar{\theta}_{ij}}{2} x_j.
 \tag{2.18}$$

Ainsi,

$$(2.19) \quad \phi(x, p) \star \psi(x, p) = f\left(x_i - \frac{\theta_{ij}}{2} p_j, p_i + \frac{\bar{\theta}_{ij}}{2} x_j\right) \psi(x, p).$$

Partons de l'identité suivante :

$$(2.20) \quad e^{\hat{A}\partial_x} \phi(x) = \phi\left(x + \hat{A}\right).$$

L'équation (2.20) est l'identité de base derrière le décalage de Bopp. C'est une expansion de Taylor, qui équivaut à un décalage.

A partir de (2.20), nous avons

$$(2.21) \quad \begin{aligned} (\phi \star \psi)(x, p) &= \phi(x, p) e^{\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \theta^{ij} \overrightarrow{\partial}_j + \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_i \bar{\theta}^{ij} \overrightarrow{\partial}_j} \psi(x, p) \\ &= \phi\left(x_i - \frac{\theta_{ij}}{2} p_j, p_i + \frac{\bar{\theta}_{ij}}{2} x_j\right) \psi(x, p). \end{aligned}$$

Une autre façon d'utiliser le produit star de Moyal pour résoudre certains problèmes de mécanique quantique est le décalage de Bopp. Ce décalage permet de transformer l'équation de Schrödinger dans l'espace des phases en une équation dans un espace commutatif. Pour cela, il faut remplacer le produit star dans l'équation de Schrödinger par un décalage de Bopp généralisé selon (2.21).

2.2.2 Les équations relativistes non commutatives via les cartes de Seiberg-Witten dans un espace plat

L'espace-temps canonique non commutatif est caractérisés par les relations de commutation satisfaisant la relation (2.7). Pour conserver cette relation, la transformation de jauge infinitésimale est généralisée par la relation suivante :

$$(2.22) \quad \hat{\phi}^A(A) + \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{\phi}^A(A) = \hat{\phi}^A(A + \delta_{\lambda} A),$$

dont $\hat{\phi}^A = (\hat{A}^{\mu}, \hat{\psi})$ est un corps générique non commutatif, \hat{A}^{μ} et $\hat{\psi}$ sont les jagues et les champs de la matière respectivement, λ est le paramètre de transformation infinitésimale, δ est la transformation de jauge ordinaire et enfin $\hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \square$ est une transformation de jauge non commutative définie par :

$$(2.23) \quad \delta_{\lambda} \psi = i\lambda \psi \rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\lambda}} \hat{\psi} = i\hat{\lambda} \star \hat{\psi},$$

$$(2.24) \quad \delta_\lambda A = \partial_\mu \lambda \rightarrow \hat{\delta}_\lambda \hat{A} = \partial_\mu \lambda + i \left[\hat{\lambda}, \hat{A}_\mu \right]_\star.$$

Maintenant, en utilisant ces transformations, on peut obtenir au second ordre par rapport à $\theta^{\mu\nu}$, les cartes de Seiberg-Witten suivantes [26, 39–44]

$$(2.25) \quad \hat{\psi} = \psi + \psi^1 + O(\theta^2),$$

$$(2.26) \quad \hat{\lambda} = \lambda + \lambda^1(\lambda, A_\mu) + O(\theta^2),$$

$$(2.27) \quad \hat{A}_\xi = A_\xi + A_\xi^1(A_\xi) + O(\theta^2),$$

$$(2.28) \quad \hat{F}_{\mu\xi} = F_{\mu\xi}(A_\xi) + F_{\mu\xi}^1(A_\xi) + O(\theta^2),$$

avec

$$(2.29) \quad \psi^1 = -\frac{i}{2}\theta^{\alpha\beta} \left(\{A_\alpha, \partial_\beta \psi\} + \frac{1}{2} \{[\psi, A_\alpha], A_\beta\} \right),$$

$$(2.30) \quad \lambda^1 = \theta^{\alpha\beta} \partial \lambda A_\beta,$$

$$(2.31) \quad A_\xi^1 = \frac{1}{2}\theta^{\alpha\beta} A_\alpha (\partial_\xi A_\beta - 2\partial_\beta A_\xi),$$

$$(2.32) \quad F_{\mu\xi}^1 = -\theta^{\alpha\beta} (A_\alpha \partial_\beta F_{\mu\xi} + F_{\mu\alpha} F_{\beta\xi}),$$

dont

$$(2.33) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Ces cartes permettent la liaison entre la théorie de jauge commutative et non commutative, qui sont compatibles avec des transformations de jauge.

Pour ce faire, considérons l'action pour les champs de bosons et de fermions libres en présence d'un champ de jauge électrodynamique dans un espace-temps non commutatif.

Nous proposons l'action suivante

$$(2.34) \quad S = \int d^4x \left(\mathcal{L}_{\text{MB}} + \mathcal{L}_{\text{MF}} - \frac{1}{4} \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu} \right),$$

avec

$$(2.35) \quad \mathcal{L}_{\text{MB}} = \eta^{\mu\nu} \left(\hat{D}_\mu \hat{\phi} \right)^\dagger \star \hat{D}_\nu \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^\dagger \star \hat{\phi},$$

$$(2.36) \quad \mathcal{L}_{\text{MF}} = \bar{\hat{\psi}} \star \left(i\gamma^\nu \hat{D}_\nu - m \right) \star \hat{\psi},$$

sont les densités de boson et de fermion dans l'espace-temps non commutatif et $\hat{D}_\nu = \partial_\nu + ie\hat{A}_\nu$ la dérivée covariante.

Les équations de mouvement sont ainsi obtenues via l'équation de Euler-Lagrange modifiée jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\theta^2)$ s'écrivant par

$$(2.37) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\phi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \hat{\phi})} \right) - \partial_\mu \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \hat{\phi})} \right) = 0,$$

dont la densité lagrangienne totale est donnée par

$$(2.38) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{MB}} + \mathcal{L}_{\text{MF}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{EM}}}_{-\frac{1}{4} \hat{F}^{\mu\nu} \star \hat{F}_{\mu\nu}}.$$

En utilisant l'équation d'Euler-Lagrange modifiée jusqu'à l'ordre $\mathcal{O}(\theta^2)$ (2.37), on trouve ce qui suit [39–43] :

- Pour le cas de l'équation de Klein-Gordon, on obtient

$$(2.39) \quad \left(\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu - m^2 \right) \hat{\phi} + \left(i\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \hat{A}_\nu - e^2 \eta^{\mu\nu} \hat{A}_\mu \star \hat{A}_\nu + 2i\eta^{\mu\nu} \hat{A}_\mu \partial_\nu \right) \hat{\phi} = 0.$$

- Pour le cas de l'équation de Dirac, on trouve

$$(2.40) \quad \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \hat{\psi} - e\gamma^\mu A_\mu \hat{\psi} - e\gamma^\mu A_\mu^1 \hat{\psi} + \frac{ie}{2} \theta^{\alpha\beta} \gamma^\mu \partial_\alpha A_\mu \partial_\beta \hat{\psi}.$$

- Enfin, dans le cas de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau libre, nous avons

$$(2.41) \quad \left(i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \hat{\psi} - \frac{1}{2} \theta^{\alpha\beta} (\partial_\alpha \beta^\mu) \left(\partial_\mu \partial_\beta \hat{\psi} \right) = 0.$$

2.3 La longueur minimale

2.3.1 Motivation

En mécanique quantique habituelle, les observables physiques sont décrits par des opérateurs agissant sur l'espace d'états d'Hilbert. Les plus fondamentaux, tels que l'opérateur de position x et la quantité de mouvement l'opérateur p satisfait la relation de commutation canonique

$$(2.42) \quad [x, p] = xp - px = i\hbar.$$

Comme conséquence de (2.42), pour des incertitudes de position et de quantité de mouvement Δx et Δp d'un état donné, la relation d'incertitude d'Heisenberg vaut :

$$(2.43) \quad \Delta x \geq \frac{\hbar}{2 \Delta p}.$$

On peut en déduire que pour explorer des distances de plus en plus petites, il faut utiliser des énergies de plus en plus grandes et donc des quantités de mouvement plus importantes. La gravité peut être ignorée, mais il semble qu'elle devienne pertinente aux hautes énergies, ce qui limite la recherche des petites distances. En effet, si on augmente l'énergie d'une collision au-delà de l'échelle de Planck, on crée un trou noir qui cache une partie de l'information derrière son horizon des événements. On peut penser que c'est une indication que la nature a une longueur minimale intrinsèque. Le trou noir se dissipe par le rayonnement de Hawking. Par ailleurs, plus la collision est énergétique, plus le trou noir est massif et moins il rayonne. Il y a donc une correspondance entre les hautes énergies (ultraviolets) et les basses (infrarouges).

Pour être plus précis, on peut envisager d'explorer la distance de Planck d avec une énergie de l'ordre de $E \sim \hbar/d$. On forme alors un trou noir avec un rayon d'horizon $R_S \sim EG \sim G/d$ et une température $T \sim 1/R_S \sim d/G$. Le rayonnement thermique qui s'en dégage a donc une longueur d'onde principale qui croît avec l'énergie de la particule utilisée, et pour les énergies de Planck, l'échelle testée n'est plus la classique $d \sim 1/E$, mais plutôt $d \sim EG$. Il y a donc probablement une longueur observable minimale entre ces deux régimes.

La gravité quantique pose des difficultés, car la théorie quantique relativiste des champs donne des infinis quand on considère des distances de plus en plus petites [37, 45]. Une longueur minimale hypothétique pourrait éviter ces infinis et régulariser

la gravité quantique. De plus, la recherche indique que les opérateurs de position ne seraient plus commutatifs dans une théorie quantique cohérente de la gravité, contrairement à la mécanique quantique habituelle. Il faut remarquer que tous les arguments prévoient une longueur minimale de l'ordre de la longueur de Planck, et que les énergies nécessaires pour la tester sont inaccessibles avec les moyens actuels. Cependant, il est possible que la nature ait des dimensions supplémentaires grandes. Dans ces scénarios, l'échelle de Planck et la longueur minimale pourraient être testées dans les futurs accélérateurs, comme le Grand collisionneur de hadrons, en construction au CERN à Genève, en Suisse, ou l'international collisionneur linéaire. Même si ces dimensions supplémentaires ne sont pas confirmées prochainement et même sans une théorie complète de la gravité quantique, on peut apprendre beaucoup en étudiant une théorie à basse énergie incorporant une longueur minimale [30, 46–51].

2.3.1.1 Espace non commutatif q-déformé

L'idée de la q-déformation vient de l'étude du problème inverse quantique et des solutions de l'équation de Yang-Baxter. Le sujet suscite un intérêt croissant car les groupes quantiques et les algèbres ont des propriétés similaires aux algèbres de Lie en ce qui concerne les théories des représentations et leurs applications. La q-déformation des algèbres de Lie a été trouvée par Jimbo [52, 53] et Drinfeld [54]. Par la suite, ces idées ont été utilisées par de nombreux auteurs (voir les références [55–57]) pour construire l'oscillateur harmonique q-déformé.

On peut se demander pourquoi les groupes quantiques doivent être déformés dans ce cadre. La réponse est simple et tient au fait que les structures de l'espace-temps à l'échelle de Planck ne sont pas ordinaires, mais déformées, ce qui donne lieu à une structure de l'espace-temps non commutative. C'est pourquoi la déformation de la structure des groupes de Lie et des algèbres de Lie devient nécessaire pour décrire divers aspects de ces espaces. Il existe bien sûr plusieurs façons de déformer les relations de commutation classiques entre les variables dynamiques X et P .

Par exemple, on peut déformer les relations de commutation canoniques d'Heisenberg suivantes :

$$(2.44) \quad PX - qXP = i\hbar.$$

Cependant, nous supposerons plutôt la q-déformation de la relation de commutation cor-

respondante entre l'opérateur de création et d'annihilation q-bosons A^\dagger et A , respectivement, sous la forme [58, 59]

$$(2.45) \quad AA^\dagger - q^2 A^\dagger A = 1,$$

et analyser systématiquement comment la relation déformée (2.45) conduit à la relation de la structure de l'espace-temps non commutative.

Nous supposons en outre que les représentations pour les opérateurs de position x et d'impulsion p doivent être linéaires en A et A^\dagger

$$(2.46) \quad X = \alpha (A^\dagger + A),$$

$$(2.47) \quad P = i\beta' (A^\dagger - A),$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$. Par la suite en utilisant les deux équations (2.46) et (2.47), la relation de commutation des opérateurs de position x et d'impulsion p est calculée comme suit

$$(2.48) \quad [X, P] = 2i\alpha\beta' \left\{ 1 + (q^2 - 1) A^\dagger A \right\}.$$

En utilisant (2.46) et (2.47), le produit de la création et de l'annihilation peut être exprimer par

$$(2.49) \quad A^\dagger A = 2i\alpha\beta' \left[1 + \frac{q^2 - 1}{4} \left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{p^2}{\beta'^2} + \frac{i}{\alpha\beta'} [X, P] \right) \right].$$

Insérons (2.49) dans (2.48), on obtient

$$(2.50) \quad [X, P] = \frac{4i\alpha\beta'}{1 + q^2} \left[1 + \frac{q^2 - 1}{4} \left(\frac{X^2}{\alpha^2} + \frac{P^2}{\beta'^2} \right) \right].$$

Posons que

$$(2.51) \quad \alpha\beta' = \frac{\hbar}{2}, \quad q = e^{2\beta'^2\tau},$$

alors

$$(2.52) \quad [X, P] = i\hbar (1 + \beta P^2).$$

Il est d'usage de regarder la limite triviale $\beta \rightarrow 0$, c'est-à-dire $q \rightarrow 1$, pour laquelle la relation de commutation devient la relation de commutation canonique usuelle. Cepen-

nant, ayant obtenu une version simple de la relation de commutation non commutative (2.52), il est préférable de trouver une représentation pour X et P , qui reproduira le commutateur (2.52). Par exemple, nous pouvons sélectionner les opérateurs de position X et de moment P en termes des observables non déformées x et p , c'est-à-dire $[x, p] = i\hbar$, comme suit

$$(2.53) \quad X = \left(1 + \beta P^2\right), \quad P = p.$$

2.3.2 La relation d'incertitude de longueur minimale à une dimension

Nous étudierons principalement les conséquences de la relation de la longueur minimale suivante :

$$(2.54) \quad [X, P] = i\hbar \left(1 + \beta P^2\right),$$

où τ est un petit paramètre de dimension de l'impulsion inverse au carré. Bien que nous supposons que cette forme est exacte, elle peut également être interprétée comme un développement du premier ordre d'une relation de la forme [46, 47]

$$(2.55) \quad [X, P] = i\hbar f(P),$$

où $f(P)$ est une fonction positive dont la condition suivante $\lim_{P \rightarrow 0} f(P) = 1$ est remplie (la relation de commutation habituelle dans la limite de basse énergie). Selon ces hypothèses, f aura son expansion Taylor autour de $P = 0$ comme suit :

$$(2.56) \quad f(P) = 1 + \beta P^2 + O(P^4).$$

Ainsi (2.54) décrira au premier ordre la classe la plus naturelle de modifications possibles des relations de commutation standard.

La forme de la relation de la longueur minimale choisie est motivée a posteriori par la relation d'incertitude qui en est déduite. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Bunyakovski-Schwartz pour un état quantique, la relation d'incertitude sera

$$(2.57) \quad \begin{aligned} \Delta X \Delta P &\geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \beta (\Delta P)^2 + \beta \langle P \rangle^2\right] \\ &\geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \beta (\Delta P)^2\right]. \end{aligned}$$

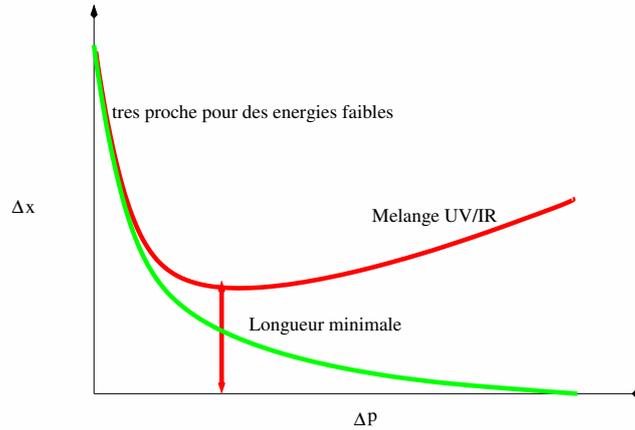


Fig. 2.2 : La région autorisée par la relation d'incertitude est celle au-dessus de la ligne verte pour le boîtier standard et au-dessus de la ligne rouge pour le boîtier de longueur minimale (2.54)

Les valeurs admises pour les couples ΔX , ΔP sont celles situées au-dessus de la courbe rouge tracée sur la figure. 2.2. On voit que pour les petites impulsions $\Delta P \sim \langle P \rangle \sim 0$, les termes impliquant τ peuvent être négligés, et l'incertitude sur la position a le comportement habituel

$$(2.58) \quad \Delta X \gtrsim \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta P}.$$

Pour de grandes valeurs de ΔP , l'incertitude sur la position satisfera

$$(2.59) \quad \Delta X \gtrsim \frac{\hbar\beta}{2} \Delta P,$$

en concordance avec le mélange UV/IR mentionné ci-dessus. De plus, il s'avère que nous avons une incertitude minimale sur la position minimale

$$(2.60) \quad \Delta X \geq \hbar\sqrt{\beta} \left(1 + \beta P^2\right),$$

et un minimum absolu d'incertitude comme suit

$$(2.61) \quad \Delta X \geq \Delta X_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}.$$

On peut justifier l'équation (2.60) par différentes approches : théorie des cordes ; la création de trous noirs par des collisions à haute énergie ; des arguments sur l'effet de la gravité sur le principe d'incertitude d'Heisenberg. Par exemple, le terme $\tau\Delta p^2$ dans (2.55) n'est pas choisi au hasard et peut être motivé de la façon suivante : quand on

veut explorer des distances plus petites avec des collisions à plus haute énergie/impulsion, il arrive un moment où l'énergie du centre de masse est assez grande pour courber l'espace-temps et former un micro trou noir. Ce trou noir a un rayon de Schwarzschild proportionnel à la masse-énergie de la collision, c'est-à-dire $\Delta x \sim R_{\text{Sch}} \sim E$. En poursuivant cette logique, si on augmente encore l'énergie/impulsion de la collision, le rayon de Schwarzschild résultant augmente aussi linéairement, ce qui empêche de sonder des distances plus petites.

2.3.3 La relation d'incertitude de longueur minimale multi-dimensionnelle

Lorsqu'il s'agit de plus d'une dimension $D > 1$, (2.52) peut être généraliser sous la forme [30]

$$(2.62) \quad [X_i, P_j] = i\hbar \left\{ \left(1 + \beta P^2\right) \delta_{ij} + \beta'' P_i P_j \right\},$$

Le paramètre supplémentaire β'' , avec une unité d'impulsion inverse au carré, est à nouveau supposé petit. Avec de telles relations de commutation, nous ne pouvons plus supposer que les deux opérateurs de position d'une part, et les opérateurs du moment d'autre part, commutent entre eux. La raison en est que les positions et les impulsions doivent satisfaire l'identité de Jacobi

$$(2.63) \quad [[A, B], C] + [[C, A], B] + [[B, C], A] = 0,$$

ce qui est nécessaire pour l'existence d'une représentation des observables sous forme d'opérateurs différentiels linéaires agissant sur un espace fonctionnel. Comme le second membre de (2.62) dépend explicitement des opérateurs de quantité de mouvement P_i , il convient de supposer qu'ils commutent

$$(2.64) \quad [P_i, P_j] = 0.$$

Alors les identités de Jacobi suivantes impliquant au moins 2 moments

$$(2.65) \quad [[P_i, P_j], P_k] + \text{circu. perm} = 0,$$

$$(2.66) \quad [[P_i, P_j], X_k] + \text{circu. perm} = 0,$$

sont satisfaits. Aussi, à partir de la relation suivante

$$(2.67) \quad [[X_i, X_j], P_k] + \text{circu. permu} = 0,$$

on peut obtenir le commutateur de positions jusqu'à un terme dépendant uniquement des impulsions. Il est donné par :

$$(2.68) \quad [X_i, X_j] = \frac{(2\beta' - \beta'') + (2\beta' + \beta'')\beta P^2}{1 + \beta' P^2} \{P_i X_j - P_j X_i\} + f(P_1 \cdots P_D).$$

En résumé, l'ensemble complet des relations de commutation s'écrivent comme suit

$$(2.69) \quad [X_i, P_j] = i\hbar \left\{ (1 + \beta P^2) \delta_{ij} + \beta'' P_i P_j \right\},$$

$$(2.70) \quad [P_i, P_j] = 0,$$

$$(2.71) \quad [X_i, X_j] = \frac{(2\beta' - \beta'') + (2\beta' + \beta'')\beta' P^2}{1 + \beta' P^2} \{P_i X_j - P_j X_i\}.$$

La modification considérée ici ne détruit pas l'invariance par rotation. Plus exactement, les opérateurs

$$(2.72) \quad L_{ij} = \frac{1}{1 + \beta' P^2} \{X_i P_j - X_j P_i\},$$

sont des générateurs de rotation. C'est-à-dire qu'ils satisfont

$$(2.73) \quad [X_i, L_{jk}] = i\hbar (\delta_{ik} X_j - \delta_{ij} X_k),$$

$$(2.74) \quad [P_i, L_{jk}] = i\hbar (\delta_{ik} P_j - \delta_{ij} P_k),$$

$$(2.75) \quad [L_{ij}, L_{kl}] = i\hbar (\delta_{ik} L_{jl} + \delta_{jl} L_{ik} - \delta_{ik} L_{jk} - \delta_{jk} L_{il}).$$

Ceci est très utile lorsqu'il s'agit de systèmes ayant une symétrie de rotation.

CHAPITRE 3

L'OSCILLATEUR DE KLEIN-GORDON DANS UN ESPACE NON-COMMUTATIF EN PRÉSENCE D'UNE LONGUEUR MINIMALE

3.1 L'oscillateur de KG dans un espace commutatif

3.1.1 Les solutions propres

L'oscillateur de Klein-Gordon à deux dimension est écrit par [4, 60–64] :

$$(3.1) \quad \left(\underbrace{(\widehat{p}_x + im_0\omega\widehat{x})(\widehat{p}_x - im_0\omega\widehat{x})}_U + \underbrace{(\widehat{p}_y + im_0\omega\widehat{y})(\widehat{p}_y - im_0\omega\widehat{y})}_\cap - \frac{(E^2 - m_0^2c^4)}{c^2} \right) \psi = 0,$$

dont

$$(3.2) \quad U = \widehat{p}_x^2 + m_0^2\omega^2\widehat{x}^2 - m_0\omega\hbar,$$

$$(3.3) \quad \cap = \widehat{p}_y^2 + m_0^2\omega^2\widehat{y}^2 - m_0\omega\hbar.$$

En cherchant la simplicité, nous introduisons le problème dans la représentation $\{\vec{p}\}$ comme suit; soit

$$(3.4) \quad \widehat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}, \widehat{y} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y},$$

$$(3.5) \quad \widehat{p}_x = p_x, \widehat{p}_y = p_y.$$

Le passage aux coordonnées polaires se fait suivant la définition suivante :

$$(3.6) \quad p_x = p \cos \vartheta, p_y = p \sin \vartheta, \text{ avec } p^2 = p_x^2 + p_y^2,$$

$$(3.7) \quad \hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} = i\hbar \left(\cos \vartheta \frac{d}{dp} - \frac{\sin \vartheta}{p} \frac{d}{d\vartheta} \right),$$

$$(3.8) \quad \hat{y} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y} = i\hbar \left(\sin \vartheta \frac{d}{dp} + \frac{\cos \vartheta}{p} \frac{d}{d\vartheta} \right).$$

Dans ce cas, les deux équations (3.2) et (3.3) se transformer en

$$(3.9) \quad \cup = p^2 \cos^2 \vartheta - m_0^2 \omega^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} - \hbar m_0 \omega,$$

$$(3.10) \quad \cap = p^2 \sin^2 \vartheta - m_0^2 \omega^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} - \hbar m_0 \omega.$$

En injectant les deux dernières équations, (3.1) devient ;

$$(3.11) \quad \left(p^2 - m_0^2 \omega^2 \hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} \right) - 2\hbar m_0 \omega - \varsigma \right) \psi = 0.$$

En utilisant, les équations (3.6), (3.7) et (3.8), avec la relation suivante

$$(3.12) \quad \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} = \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p},$$

nous obtenons

$$(3.13) \quad \left(p^2 - \lambda^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) - 2\lambda - \varsigma \right) \psi = 0,$$

dont

$$(3.14) \quad \varsigma = \frac{(E^2 - m_0^2 c^4)}{c^2}, \quad \lambda = m_0 \omega \hbar$$

Ici, nous avons utilisé ce qui suit

$$(3.15) \quad \frac{\partial}{\partial p_x} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial p_x} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial p_x} = \cos \vartheta \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sin \vartheta}{p} \frac{\partial}{\partial \vartheta},$$

$$(3.16) \quad \frac{\partial}{\partial p_y} = \frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial p_y} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial p_y} = \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\cos \vartheta}{p} \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

Soit le changement sur la fonction d'onde

$$(3.17) \quad \psi_{KG}(p, \vartheta) = f(p) \cdot e^{i|j|\vartheta},$$

Alors, (3.13) se transforme en

$$(3.18) \quad \left[\frac{d^2}{dp^2} f(p) + \frac{1}{p} \frac{df(p)}{dp} - \frac{j^2}{p^2} f(p) \right] + (\kappa^2 - k^2 p^2) f(p) = 0,$$

avec

$$(3.19) \quad \kappa^2 = \frac{(2\lambda + \zeta)}{\lambda^2}, \quad k^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Posons que

$$(3.20) \quad f(p) = p^{|j|} \cdot e^{\frac{-k}{2} p^2} F(p).$$

L'injection de (3.20) dans (3.18) donne

$$(3.21) \quad F'' + \left(\frac{2|j|+1}{p} - 2kp \right) F' - [2k(|j|+1) - \kappa^2] F = 0.$$

Dans le but de simplifier cette dernière équation, en utilise, au lieu de la variable p , la variable $t = kp^2$. Nous obtenons alors une équation de Kummer [65–68]

$$(3.22) \quad t \frac{d^2 F}{dt^2} + \{|j|+1-t\} \frac{dF}{dt} - \frac{1}{2} \left((|j|+1) - \frac{\kappa^2}{4k} \right) F = 0,$$

dont la solution est une série hypergéométrique confluent ${}_1F_1(a; |j|+1; t)$, avec

$$(3.23) \quad a = \frac{1}{2} (|j|+1) - \frac{\kappa^2}{4k}$$

Cette série devient un polynôme si et seulement si $a = -n$, ($n = 0, 1, 3$).

On aura alors les solutions suivantes :

$$(3.24) \quad \psi(p, \vartheta) = C_{n,|j|} p^{|j|} \cdot e^{\frac{-k}{2} p^2} {}_1F_1 \left(-n; |j|+1; kp^2 \right) e^{i|j|\vartheta}$$

$$(3.25) \quad E_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 2rN}$$

avec $N = 2n + |j|$ est le nombre quantique principale et $r = (\hbar\omega/m_0c^2)$ le paramètre

qui contrôle le non-relativiste limite. Cette forme d'énergie est en bon accord avec celle obtenue dans la littérature [69]

3.1.2 Les solutions en présence d'une longueur minimale

Dans le formalisme de la longueur minimale, l'algèbre de Heisenberg est donnée par

$$(3.26) \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} (1 + \beta p^2),$$

où $\beta > 0$ est le paramètre de la longueur minimale.

Pour résoudre le problème, nous utilisons la représentation des deux opérateurs \hat{x}_i et \hat{p}_j écrite comme suit :

$$(3.27) \quad \hat{x} = i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{d}{dp_x}, \quad \hat{p}_x = p_x,$$

$$(3.28) \quad \hat{y} = i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{d}{dp_y}, \quad \hat{p}_y = p_y.$$

Dans ce cas, l'équation de l'oscillateur de Klein-Gordon sera

$$(3.29) \quad \left(p_x^2 + p_y^2 + m_0^2 \omega^2 (x^2 + y^2) + im_0 \omega [x, p_x] + im_0 \omega [y, p_y] - \varsigma \right) \psi_{KG} = 0$$

En utilisant les équations (3.27) et (3.28), alors l'équation (3.29) devient

$$(3.30) \quad \left(p^2 - \lambda^2 (1 + \beta p^2)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - 2\beta \lambda^2 (1 + \beta p^2) p \frac{\partial}{\partial p} - 2\lambda (1 + \beta p^2) - \varsigma \right) \psi_{KG} = 0$$

Posons que

$$(3.31) \quad \psi_{KG} = h(p) e^{i|j|\theta}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

alors l'équation (3.30) prend la forme suivante

$$(3.32) \quad \left(-a(p) \frac{\partial^2}{\partial p^2} + b(p) \frac{\partial}{\partial p} + c(p) - \varsigma \right) h(p) = 0,$$

avec

$$(3.33) \quad a(p) = \lambda^2 (1 + \beta p^2)^2,$$

$$(3.34) \quad b(p) = -\frac{\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2}{p} - 2\beta\lambda^2 (1 + \beta p^2) p = -\frac{a}{p} - 2\beta\lambda\sqrt{a}p,$$

$$(3.35) \quad c(p) = p^2 + \frac{j^2\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2}{p^2} - 2\lambda (1 + \beta p^2) = p^2 + j^2\frac{a}{p^2} - 2\sqrt{a}.$$

Soit maintenant la substitution suivante

$$(3.36) \quad h(p) = \rho(p)\varphi(p), \quad q = \int \frac{1}{\sqrt{a(p)}} dp,$$

$$(3.37) \quad \rho(p) = \exp\left(\int \chi(p) dp\right), \quad \chi(p) = \frac{2b + a'}{4a} = -\frac{1}{2p}, \quad \rho(p) = p^{-\frac{1}{2}}$$

dans ce cas, (3.30) devient

$$(3.38) \quad \left[-\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + V(p)\right] \varphi(p) = \varsigma\varphi(p),$$

dont le nouveau potentiel a la forme

$$(3.39) \quad V(p) = p^2 - 2\lambda (1 + \beta p^2) + \beta\lambda^2 (1 + \beta p^2) + \frac{\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2}{p^2} \left(j^2 - \frac{1}{4}\right).$$

Faisons un changement de variable comme suit :

$$(3.40) \quad p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(q\lambda\sqrt{\beta}).$$

Le potentiel $V(p)$ devient

$$(3.41) \quad V(q) = -\frac{1}{\beta} + \underbrace{\beta\lambda^2}_{U_0} \left(\frac{j^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{\beta\lambda} + \frac{1}{\beta^2\lambda^2}}{\cos^2 \alpha q} + \frac{j^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \alpha q} \right).$$

La forme finale de l'équation différentielle (3.38) se transforme en

$$(3.42) \quad \left\{ -\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + \frac{U_0}{2} \left(\frac{j^2 + \frac{3}{4} - \frac{2}{\beta\lambda} + \frac{1}{\beta^2\lambda^2}}{\cos^2 \alpha q} + \frac{j^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \alpha q} \right) \right\} \varphi(q) = \bar{\varsigma}\varphi(q), \text{ avec } \bar{\varsigma} = \varsigma + \frac{1}{\beta}$$

L'équation (3.42) peut-être aussi reformuler sous une forme condensée comme suit

$$(3.43) \quad \left\{ -\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + \frac{U_0}{2} \left(\frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2 \alpha q} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2 \alpha q} \right) \right\} \varphi(q) = \bar{\varsigma}\varphi(q),$$

dont

$$(3.44) \quad V(p) = -\frac{1}{\beta} + \beta\lambda^2 \left\{ \frac{\zeta_1 (\zeta_1 - 1)}{\sin^2 \alpha q} + \frac{\zeta_2 (\zeta_2 - 1)}{\cos^2 \alpha q} \right\},$$

avec

$$(3.45) \quad \zeta_1 (\zeta_1 - 1) = j^2 - \frac{1}{4},$$

$$(3.46) \quad \zeta_2 (\zeta_2 - 1) = j^2 + \frac{3}{4} - \frac{2}{\beta\lambda} + \frac{1}{\beta^2\lambda^2}.$$

Ainsi, nous avons

$$(3.47) \quad \left(-\frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}U_0 \left\{ \frac{\zeta_1 (\zeta_1 - 1)}{\sin^2 \alpha q} + \frac{\zeta_2 (\zeta_2 - 1)}{\cos^2 \alpha q} \right\} \right) \varphi(q) = \bar{\zeta} \varphi(q), \quad U_0 = \alpha^2, \quad \alpha = \lambda\sqrt{\beta}.$$

l'équation (3.47) est l'équation de Schrödinger dans un potentiel de Pöschl-Teller U [68]

dont

$$(3.48) \quad U = \frac{1}{2}U_0 \left\{ \frac{\zeta_1 (\zeta_1 - 1)}{\sin^2 \alpha q} + \frac{\zeta_2 (\zeta_2 - 1)}{\cos^2 \alpha q} \right\}, \quad \zeta_1 > 1 \text{ et } \zeta_2 > 1.$$

En comparant l'équation (3.42) avec l'équation (3.47), nous obtenons

$$(3.49) \quad \zeta_1 = |j| \pm \frac{1}{2},$$

$$(3.50) \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{\beta\lambda} - 1 \right) \sqrt{1 + \frac{j^2}{\left(\frac{1}{\beta\lambda} - 1 \right)^2}}.$$

Maintenant, dans le but de résoudre l'équation (3.42), nous introduisons les substitutions suivantes :

$$(3.51) \quad z = \sin^2(\alpha q),$$

$$(3.52) \quad \varphi = z^{\frac{\zeta_1}{2}} (1-z)^{\frac{\zeta_2}{2}} \Psi(z).$$

Dans ce cas, l'équation (3.42) prendra la forme suivante

$$(3.53) \quad z(1-z) \Psi'' + \left[\left(\zeta_1 + \frac{1}{2} \right) - z(\zeta_1 + \zeta_2 + 1) \right] \Psi' + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\bar{\zeta}^2}{\alpha^2} - (\zeta_1 + \zeta_2)^2 \right\} \Psi = 0$$

Les solutions générales sont

$$(3.54) \quad \Psi = C_1 {}_2F_1(a'; b'; c'; z) + C_2 z^{1-c'} {}_2F_1(a' + 1 - c'; b' + 1 - c'; 2 - c'; z),$$

dont

$$(3.55) \quad a' = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \frac{\bar{\zeta}}{\alpha} \right), b' = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 - \frac{\bar{\zeta}}{\alpha} \right), c' = \zeta_1 + \frac{1}{2}$$

La condition de quantification

$$(3.56) \quad a' = -n,$$

donne

$$(3.57) \quad \bar{\zeta}^2 = \alpha^2 (\zeta_1 + \zeta_2 + 2n)^2.$$

Aussi, la forme exacte des deux paramètres ζ_1 et ζ_2 est

$$(3.58) \quad \zeta_1 = |j| + \frac{1}{2},$$

$$(3.59) \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\beta\lambda} - 1 \right) \sqrt{1 + \frac{j^2}{\left(\frac{1}{\beta\lambda} - 1 \right)^2}}.$$

A l'aide des équations (3.57), (3.58) et (3.59), la forme finale du spectre d'énergie est donc

$$(3.60) \quad \frac{E}{m_0 c^2} = \pm \sqrt{1 - 2r + 2\Sigma r (N + 1) + \frac{\beta}{\beta_0} r^2 \{N^2 - 2\Sigma (N + 1) + j^2\}},$$

avec,

$$(3.61) \quad \beta_0 = \frac{1}{\lambda}, \Sigma = \sqrt{1 + \frac{j^2}{\left(\frac{1}{\beta\lambda} - 1 \right)^2}}.$$

La fonction d'onde correspondante est

$$(3.62) \quad \psi = N e^{i|j|\vartheta} p^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{\zeta_1}{2}} (1 - z)^{\frac{\zeta_1}{2}} {}_2F_1(-n; b'; c'; z).$$

Ici $N = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/20} \sqrt{\frac{2n!}{\Gamma(n+4/2)}}$ est la constante de normalisation.

3.2 L'oscillateur de KG à deux dimensions dans un espace non commutatif (NC)

3.2.1 Les solutions propres

Pour commencer, notons que l'espace des phases non commutatif se caractérise par le fait que leurs opérateurs de coordonnées satisfont à l'équation suivante :

$$(3.63) \quad \left[x_\nu^{(NC)}, x_\mu^{(NC)} \right] = i\Theta_{\mu\nu}, \left[p_\nu^{(NC)}, p_\mu^{(NC)} \right] = 0, \left[x_\mu^{(NC)}, x_\nu^{(NC)} \right] = i\hbar\delta_{\mu\nu},$$

où $\Theta_{\mu\nu}$ est un tenseur antisymétrique. Afin d'obtenir une théorie qui inclut les aspects d'être unitaire et causal, nous choisissons $\Theta_{0\nu} = 0$ ce qui implique que le temps reste comme paramètre et la non commutativité n'affecte que l'espace physique.

Puisque le système dans lequel nous étudions est bidimensionnel, nous limitons notre analyse au plan xy . On aura alors

$$(3.64) \quad \left[x_i^{(NC)}, x_j^{(NC)} \right] = i\Theta\epsilon_{ij}, \left[p_i^{(NC)}, p_j^{(NC)} \right] = 0,$$

$$(3.65) \quad \left[x_i^{(NC)}, p_j^{(NC)} \right] = i\hbar\delta_{ij}, (i, j = 1, 2),$$

où ϵ_{ij} est le tenseur de Levi-Civita à deux dimensions. Notons ici que la résolution de notre problème se fait par le biais de la méthode de décalage de Bopp: dans ce cas, nous avons

$$(3.66) \quad x_i^{(NC)} = x_i - \frac{1}{2\hbar}\Theta_{\mu\nu}\epsilon_{ij}p_j, \quad p_i^{(NC)} = p_i.$$

En conséquent, l'équation.(3.66) devient

$$(3.67) \quad x^{(NC)} = x - \frac{1}{2\hbar}p_y, \quad y^{(NC)} = y + \frac{\Theta}{2\hbar}p_x, \quad p_x^{(NC)} = p_x, \quad p_y^{(NC)} = p_y.$$

Enfin, l'oscillateur bidimensionnel de Klein-Gordon dans l'espace non commutatif s'écrit par :

$$(3.68) \quad \left\{ \underbrace{(\widehat{p}_x + im_0\omega\widehat{x}) (\widehat{p}_x - im_0\omega\widehat{x})}_u + \underbrace{(\widehat{p}_y + im_0\omega\widehat{y}) (\widehat{p}_y - im_0\omega\widehat{y})}_n - \frac{(E^2 - m_0^2c^4)}{c^2} \right\} \psi = 0,$$

avec

$$(3.69) \quad \cup = p_x^2 + m_0^2 \omega^2 x^2 + im_0 \omega (xp_x - p_x x) - m_0^2 \omega^2 \left(\frac{\Theta}{\hbar} \right) x p_y,$$

$$(3.70) \quad \cap = p_y^2 + m_0^2 \omega^2 y^2 + im_0 \omega (yp_y - p_y y) + m_0^2 \omega^2 \left(\frac{\Theta}{\hbar} \right) y p_x.$$

Ici, nous avons utilisé que

$$(3.71) \quad \hat{x} = x - \frac{\Theta}{2\hbar} p_y, \quad \hat{y} = y - \frac{\Theta}{2\hbar} p_x,$$

$$(3.72) \quad \hat{p}_x = p_x, \quad \hat{p}_y = p_y.$$

Dans la littérature (voir Réf [5] et références de celle-ci), le borne supérieure de $\Theta \leq 4 \times 10^{-40} m^2$. Donc, par approximation, tous les termes avec un carré de ce dernier sera négligé.

Injectons les deux équations (3.69) et (3.70) dans (3.68), on obtient

$$(3.73) \quad \left\{ p_x^2 + p_y^2 + m_0^2 \omega^2 (x^2 + y^2) + im_0 \omega [x, p_x] + im_0 \omega [y, p_y] - m_0^2 \omega^2 \frac{\Theta}{\hbar} (xp_y - yp_x) - \frac{(E^2 - (m_0 c^2)^2)}{c^2} \right\} \psi_{KG} = 0.$$

Afin de solutionner cette dernière équation, nous amenons le problème dans la configuration de l'espace de moment. Rappelons que

$$(3.74) \quad \hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{p}_x}, \quad \hat{y} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \hat{p}_y},$$

$$(3.75) \quad \hat{p}_x = p_x, \quad \hat{p}_y = p_y$$

Lors du passage aux coordonnées polaires [19, 49]

$$(3.76) \quad p_x = p \cos \vartheta, \quad p_y = p \sin \vartheta, \quad \text{avec } p^2 = p_x^2 + p_y^2$$

les deux équations (3.74) et (3.75) deviennent

$$(3.77) \quad x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} = i\hbar \left(\cos \vartheta \frac{d}{dp} - \frac{\sin \vartheta}{p} \frac{d}{d\vartheta} \right)$$

$$(3.78) \quad y = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y} = i\hbar \left(\sin \vartheta \frac{d}{dp} + \frac{\cos \vartheta}{p} \frac{d}{d\vartheta} \right)$$

En injectant (3.77) et (3.78) dans (3.73), la dernière équation peut être écrite explicitement en coordonnées polaires par

$$(3.79) \quad \left(p^2 - \lambda^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) + m_0^2 \omega^2 \Theta \left(i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) - 2\lambda - \varsigma \right) \psi_{KG} = 0$$

avec

$$(3.80) \quad \varsigma = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2}, \quad \lambda = m_0 \omega \hbar$$

A l'aide de la relation suivante [70]

$$(3.81) \quad \psi_{KG}(p, \vartheta) = f(p) e^{i|j|\vartheta},$$

l'équation (3.79) se transforme en

$$(3.82) \quad \left[\frac{d^2 f(p)}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{df(p)}{dp} - \frac{j^2}{p^2} f(p) \right] + (\kappa^2 - k^2 p^2) f(p) = 0,$$

dont

$$(3.83) \quad \kappa^2 = \frac{m_0^2 \omega^2 \Theta j + 2\lambda + \varsigma}{\lambda^2}, \quad k^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Posons que [70]

$$(3.84) \quad f(p) = p^{|j|} \cdot e^{\frac{-k}{2} p^2} F(p),$$

alors (3.82) devient

$$(3.85) \quad F'' + \left(\frac{2|j|+1}{p} - 2kp \right) F' - [2k(|j|+1) - \kappa^2] F = 0,$$

En utilisant, au lieu de p , la variable $t = kp^2$, (3.85) se transforme en l'équation de Kummer [65, 67, 71]

$$(3.86) \quad t \frac{d^2 F}{dt^2} + \{|j|+1-t\} \frac{dF}{dt} - \frac{1}{2} \left((|j|+1) - \frac{\kappa^2}{4k} \right) F = 0,$$

Les solutions de cette équation sont les fonctions hypergéométriques confluentes ${}_1F_1(a; |j|+1; t)$,

avec

$$(3.87) \quad a = \frac{1}{2} (|j|+1) - \frac{\kappa^2}{4k}$$

Cette série devient un polynôme si et seulement si $a = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Ainsi, nous avons

$$(3.88) \quad \psi(p, \vartheta) = C_{n,|j|} p^{|j|} \cdot e^{\frac{-k}{2} p^2} {}_1F_1\left(-n; |j| + 1; k p^2\right) e^{i|j|\vartheta},$$

$$(3.89) \quad E_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 2rN - \frac{\omega^2 \Theta}{c^2} |j|},$$

avec $N = 2n + |j|$ est le nombre quantique principale, et $r = \hbar\omega/m_0c^2$ le paramètre qui contrôle le non-relativiste limite.

On voit que la présence du paramètre Θ , dans le spectre d'énergie, lève la dégénérescence des niveaux d'énergie. De plus, en prenant que $\Theta = 0$, on atteint l'exact résultat de l'oscillateur de Klein-Gordon bidimensionnel dont

$$(3.90) \quad E_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 2rN}.$$

Cette forme d'énergie est en bon accord avec celle obtenue dans la littérature (voir Réf. [72, 73]).

3.2.2 Les solutions en présence d'une longueur minimale

3.2.2.1 Les solutions en absence du champ magnétique

Dans le formalisme de la longueur minimale, l'algèbre de Heisenberg est donné par la relation suivante [20–23, 49, 74–77]

$$(3.91) \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij} (1 + \beta p^2),$$

où $0 < \beta \leq 1$ est la longueur minimale. Une représentation de \hat{x}_i , et \hat{p}_j qui satisfait l'équation (3.91), peut être considéré comme

$$(3.92) \quad \hat{x} = i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{d}{dp_x}, \quad \hat{p}_x = p_x,$$

$$(3.93) \quad \hat{y} = i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{d}{dp_y}, \quad \hat{p}_y = p_y.$$

En utilisant les équations. (3.92) et (3.93), l'équation (3.30) devient

$$(3.94) \quad \left(p^2 - \lambda^2 (1 + \beta p^2)^2 + \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) - 2\beta\lambda^2 (1 + \beta p^2) p \frac{\partial}{\partial p} - 2\lambda (1 + \beta p^2) + (1 + \beta p^2) m_0^2 \omega^2 \Theta \left(i \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) - \varsigma \right) \psi_{KG} = 0.$$

Posons que

$$(3.95) \quad \psi_{KG} = h(p)e^{i|j|\vartheta}, \text{ avec } j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

l'équation (3.95) se transforme en

$$(3.96) \quad \left\{ -a(p) \frac{\partial^2}{\partial p^2} + b(p) \frac{\partial}{\partial p} + c(p) - \varsigma \right\} h(p) = 0,$$

avec

$$(3.97) \quad a(p) = \lambda^2 (1 + \beta p^2)^2,$$

$$(3.98) \quad b(p) = -\frac{\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2}{p} - 2\beta\lambda^2 (1 + \beta p^2) p,$$

$$(3.99) \quad c(p) = p^2 + \frac{\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2 j^2}{p^2} - 2\lambda (1 + \beta p^2) - (1 + \beta p^2) m_0^2 \omega^2 \Theta j.$$

En adoptant les substitutions [70]

$$(3.100) \quad h(p) = \rho(p)\varphi(p), \quad q = \int \frac{1}{\sqrt{a(p)}} dp,$$

$$(3.101) \quad \rho(p) = \exp\left(\int \chi(p) dp\right), \quad \chi(p) = \frac{2b + a'}{4a} = -\frac{1}{2p}, \quad \rho(p) = p^{-\frac{1}{2}}..$$

l'équation (3.96) devient

$$(3.102) \quad \left[-\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + V(p) \right] \varphi(p) = \varsigma\varphi(p),$$

dont

$$(3.103) \quad V(p) = p^2 - 2\lambda (1 + \beta p^2) + \beta\lambda^2 (1 + \beta p^2) + \frac{\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2}{p^2} \left(j^2 - \frac{1}{4} \right) - (1 + \beta p^2) m_0^2 \omega^2 \Theta j,$$

L' utilisation du nouveau variable

$$(3.104) \quad p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(q\lambda\sqrt{\beta}),$$

permet de réécrire le potentiel $V(p)$ avec la nouvelle variable comme suit :

$$(3.105) \quad V(q) = -\frac{1}{\beta} + \underbrace{\beta\lambda^2}_{U_0} \times \left(\frac{j^2 + \frac{3}{4} - \frac{2}{\beta\lambda} + \frac{1}{\beta^2\lambda^2} - m_0^2\omega^2\Theta\frac{j}{\beta\lambda^2}}{\cos^2 \alpha q} + \frac{j^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \alpha q} \right).$$

Injectons cette forme dans (3.102), on trouve

$$(3.106) \quad \left\{ -\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + \frac{U_0}{2} \left(\frac{j^2 + \frac{3}{4} - \frac{2}{\beta\lambda} + \frac{1}{\beta^2\lambda^2} - m_0^2\omega^2\Theta\frac{j}{\beta\lambda^2}}{\cos^2 \alpha q} + \frac{j^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \alpha q} \right) \right\} \varphi(q) = \bar{\varsigma}\varphi(q),$$

avec

$$(3.107) \quad \bar{\varsigma} = \varsigma + \frac{1}{\beta}$$

Enfin, (3.106) se transforme à

$$(3.108) \quad \left\{ -\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + \frac{U_0}{2} \left(\frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2 \alpha q} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2 \alpha q} \right) \right\} \varphi(q) = \bar{\varsigma}\varphi(q), \quad U_0 = \alpha^2 \text{ et } \alpha = \lambda\sqrt{\beta}.$$

dont

$$(3.109) \quad V(p) = -\frac{1}{\beta} + \beta\lambda^2 \left\{ \frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)} \right\},$$

avec

$$(3.110) \quad \zeta_1(\zeta_1 - 1) = j^2 - \frac{1}{4},$$

$$(3.111) \quad \zeta_2(\zeta_2 - 1) = \frac{1}{\beta^2\lambda^2} - \frac{2}{\beta\lambda} + j^2 + \frac{3}{4} - m_0^2\omega^2\Theta\frac{j}{\beta\lambda^2}.$$

Enfin, nous avons

$$(3.112) \quad \left(-\frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}U_0 \left\{ \frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)} \right\} \right) \varphi(q) = \bar{\varsigma}\varphi(q)$$

L'équation (3.112) est l'équation de Schrödinger dans un potentiel de Pöschl-Teller définit par le potentiel suivant [68]

$$(3.113) \quad U = \frac{1}{2}U_0 \left\{ \frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)} \right\}, \quad (\zeta_1, \zeta_2) > 1$$

En comparant (3.106) avec (3.112), on trouve

$$(3.114) \quad \zeta_1 = |j| \pm \frac{1}{2}$$

$$(3.115) \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\beta^2 \lambda^2} - \frac{2}{\beta \lambda} + j^2 - m_0^2 \omega^2 \Theta \frac{j}{\beta \lambda^2}\right)}$$

Afin de solutionner l'équation (3.106), nous allons introduire les changement suivants

$$(3.116) \quad \varphi = z^{\frac{\zeta_1}{2}} (1-z)^{\frac{\zeta_2}{2}} \Psi(z), \quad z = \sin^2(\alpha q)$$

Dans ce cas, l'équation (3.106) peut être écrit par

$$(3.117) \quad z(1-z)\varphi'' + \left(\frac{1}{2} - z\right)\varphi' + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\bar{S}}{\alpha^2} - \frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{z} - \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{1-z} \right\} \varphi = 0$$

où

$$(3.118) \quad z(1-z)\Psi'' + \left[\left(\zeta_1 + \frac{1}{2}\right) - z(\zeta_1 + \zeta_2 + 1) \right] \Psi' + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\bar{S}}{\alpha^2} - (\zeta_1 + \zeta_2)^2 \right\} \Psi = 0$$

dont la solution générale est

$$(3.119) \quad \Psi = C_{12} F_1(a'; b'; c'; z) + C_{22} z^{1-c'} {}_2F_1(a' + 1 - c'; b' + 1 - c'; 2 - c'; z),$$

avec

$$(3.120) \quad a' = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \frac{\bar{S}}{\alpha} \right), \quad b' = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 - \frac{\bar{S}}{\alpha} \right), \quad c' = \zeta_1 + \frac{1}{2}.$$

Soit la condition de quantification $a' = -n$, alors

$$(3.121) \quad \bar{\xi}^2 = \alpha^2 (\zeta_1 + \zeta_2 + 2n)^2$$

Les formes exactes de ζ_1 et ζ_2 sont

$$(3.122) \quad \zeta_1 = |j| \pm \frac{1}{2}$$

$$(3.123) \quad \zeta_2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\beta^2 \lambda^2} - \frac{2}{\beta \lambda} + j^2 - m_0^2 \omega^2 \Theta \frac{j}{\beta \lambda^2}\right)}$$

A l'aide des équations (3.114), (3.115) et (3.121), la forme finale du spectre d'énergie est exprimé par

$$(3.124) \quad E^2 = m_0^2 c^4 \left\{ 1 - \frac{1}{(m_0 c)^2 \beta} + \frac{\beta \lambda^2}{(m_0 c)^2} \left(|j| + 1 + 2n + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\beta^2 \lambda^2} - \frac{2}{\beta \lambda} + j^2 - m_0^2 \omega^2 \Theta \frac{j}{\beta \lambda^2} \right)^2} \right) \right\}$$

De l'équation (3.124), la présence à la fois des deux paramètres β et Θ lève la dégénérescence de notre spectre d'énergie. De plus, la présence dans le spectre d'énergie du paramètre β , contrairement au cas de Θ , conduit à la dépendance des niveaux d'énergie sur n^2 : comme mentionné par Nouicer [74–76], cette dépendance à n^2 est une caractéristique d'un confinement dur.

Enfin, à la limite où $\beta \rightarrow 0$, nous atteindre l'équation suivante

$$(3.125) \quad E_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 2rN - \frac{\omega^2 \Theta}{c^2} |j|}.$$

Ce dernier spectre possède la même forme que l'équation (3.89).

La fonction d'onde correspondante est

$$(3.126) \quad \psi = N e^{i|j|\theta} p^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{\xi_1}{2}} (1-z)^{\frac{\xi_2}{2}} {}_2F_1(-n; b'; c'; z).$$

avec N est la constante de normalisation.

3.2.2.2 Les solutions en présence d'un champ magnétique externe

En présence d'un champ magnétique externe, le potentiel vecteur symétrique \mathbf{A} associé à ce champ est donné par

$$(3.127) \quad \mathbf{A} = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0 \right).$$

L'oscillateur de Klein-Gordon dans un espace non commutatif, dans ce cas, suit l'équation suivante

$$(3.128) \quad \left\{ \underbrace{\left(\hat{p}_x + \frac{eB}{2c} \hat{y} + im_0 \omega \hat{x} \right) \left(\hat{p}_x + \frac{eB}{2c} \hat{y} - im_0 \omega \hat{x} \right)}_u + \underbrace{\left(\hat{p}_y - \frac{eB}{2c} \hat{x} + im_0 \omega \hat{y} \right) \left(\hat{p}_y - \frac{eB}{2c} \hat{x} - im_0 \omega \hat{y} \right)}_v - \frac{E^2 - (m_0 c^2)^2}{c^2} \right\} \psi = 0,$$

En utilisant la méthode de décalage de Bopp, l'équation. (3.128) se transforme en

$$(3.129) \quad \left\{ \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c} \right)^2 (p_x^2 + p_y^2) + \left(m_0^2 \omega^2 + \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 \right) (x^2 + y^2) + im_0 \omega \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c} \right) [x, p_x] \right\} \psi$$

$$+ \left\{ im_0 \omega \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c} \right) [y, p_y] - \left\{ \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c} \right) \frac{eB}{c} + m_0^2 \omega^2 \frac{\Theta}{\hbar} \right\} \underbrace{(xp_y - yp_x)}_{L_z} - \frac{E^2 - (m_0 c^2)^2}{c^2} \right\} \psi_{KG} \psi = 0,$$

Injectons les équations. (3.92), (3.93) et (3.95) dans (3.129), on obtient

$$(3.130) \quad \left\{ \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c} \right)^2 p^2 - \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 \right) (1 + \beta p^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{j^2}{p^2} \right) - 2 \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 \right) (1 + \beta p^2) \beta p \frac{\partial}{\partial p} \right\} \psi$$

$$+ \left\{ -2\lambda (1 + \beta p^2) \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c} \right) - (1 + \beta p^2) \left\{ \hbar \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c} \right) \frac{eB}{2c} + m_0^2 \omega^2 \Theta \right\} |j| - \varsigma^2 \right\} \psi = 0$$

avec

$$(3.131) \quad \varsigma^2 = \frac{E^2 - (m_0 c^2)^2}{c^2}.$$

En suivant les mêmes procédure pour le cas commutatif, nous arrivons

$$(3.132) \quad \left[-\frac{d^2 \varphi(p)}{dq^2} + V(p) \right] \varphi(p) = \varsigma' \varphi(p),$$

ou avec la nouvelle variable q ,

$$(3.133) \quad \left\{ -\frac{d^2}{dq^2} + \frac{U_0}{2} \left\{ \frac{\zeta'_1 (\zeta'_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta'_2 (\zeta'_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)} \right\} \right\} \varphi(p) = \bar{\varsigma}' \varphi(p)$$

Ici, la forme du potentiel V devient

$$(3.134) \quad V(p) = \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c} \right)^2 p^2 + \left\{ \lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 \right\} (1 + \beta p^2)^2 \frac{1}{p^2} \left(j^2 - \frac{1}{4} \right) - 2\lambda (1 + \beta p^2) \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c} \right)$$

$$- \hbar (1 + \beta p^2) \left\{ \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c} \right) \frac{eB}{2c} + m_0^2 \omega^2 \Theta \right\} |j| + \left\{ \lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 \right\} (1 + \beta p^2) \beta,$$

Ce même potentiel se réécrit en fonction de la variable q comme suit

$$(3.135) \quad V(q) = -\frac{1}{\beta} + \beta \lambda^2 \left\{ \frac{\zeta'_1 (\zeta'_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta'_2 (\zeta'_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)} \right\},$$

dont

$$(3.136) \quad \zeta'_1 (\zeta'_1 - 1) = j^2 - \frac{1}{4},$$

(3.137)

$$\zeta'_2 (\zeta'_2 - 1) = \frac{\left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)^2}{\beta^2 \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} + \left(j^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{2\lambda \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} - \frac{\left\{\hbar \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right) \frac{eB}{2c} + m_0^2 \omega^2 \Theta\right\} |j|}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)}.$$

Enfin, (3.133) aura la forme finale suivante :

(3.138)

$$\left\{-\frac{d^2}{dq^2} + \frac{U_0}{2} \left\{\frac{\zeta'_1 (\zeta'_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta'_2 (\zeta'_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)}\right\}\right\} \varphi(p) = \bar{\xi}^2 \varphi(p), \quad U_0 = \alpha^2 \text{ avec } \alpha = \sqrt{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 [eB/2c]^2\right)}$$

Ici,

$$(3.139) \quad \bar{\xi}^2 = \zeta'^2 + \frac{(1 + [eB\Theta/4\hbar c])^2}{\beta}, \text{ avec } (\zeta'_1, \zeta'_2) > 1$$

Dans ce stage, on constate que l'équation. (3.138) est l'équation de Schrödinger dans un potentiel de Pöschl-Teller [68].

La forme exacte des deux paramètres ζ'_1 et ζ'_2 sont

$$(3.140) \quad \zeta'_1 = j^2 - \frac{1}{4}$$

(3.141)

$$\zeta'_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{\left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)^2}{\beta^2 \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} + j^2 - \frac{2\lambda \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} - \frac{\left\{\hbar \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right) \frac{eB}{2c} + m_0^2 \omega^2 \Theta\right\} |j|}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)}}.$$

La solution générale de l'équation (3.138) est

(3.142)

$$\Psi = C_1 {}_2F_1(a'; b'; c'; z) + C_2 z^{1-c'} {}_2F_1(a' + 1 - c'; b' + 1 - c'; 2 - c'; z), \quad z = \sin^2(\alpha q)$$

dont

$$(3.143) \quad a' = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \frac{\bar{\xi}}{\alpha}\right), \quad b' = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 - \frac{\bar{\xi}}{\alpha}\right), \quad c' = \zeta_1 + \frac{1}{2}.$$

La condition de quantification $a = -n$ conduit à

$$(3.144) \quad \bar{\xi}^2 = \beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right) (\zeta_1 + \zeta_2 + 2n)^2 = \frac{E^2 - (m_0 c^2)^2}{c^2} + \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)^2 \frac{1}{\beta}.$$

Enfin, la forme finale du spectre d'énergie est

$$(3.145) \quad E^2 = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{\left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)^2}{(m_0 c)^2 \beta} + \frac{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)}{(m_0 c)^2} \{|j| + 1 + 2n + \mathcal{E}'\}^2},$$

avec

$$(3.146) \quad \mathcal{E}' = \sqrt{\left(1 - \frac{\left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)^2}{\beta^2 \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} + j^2 - \frac{2\lambda \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c}\right)}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} - \frac{\left\{\hbar \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right) \frac{eB}{2c} + m_0^2 \omega^2 \Theta\right\} |j|}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)}\right)}$$

La fonction d'onde correspondante est

$$(3.147) \quad \psi = N \cdot e^{i|j|\vartheta} p^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{\xi_1}{2}} (1-z)^{\frac{\xi_2}{2}} {}_2F_1(-n; b'; c'; z).$$

avec N la constante de normalisation.

Ici, nous pouvons voir que la présence des deux paramètres β et Θ brise la dégénérescence du spectre d'énergie. De plus, la présence d'un terme sur n^2 montre l'existence d'un confinement dur. Cette dépendance n'est claire que lorsque nous avons introduit le concept de la longueur minimale dans notre problème en question.

Maintenant pour une meilleure compréhension du spectre énergétique présenté par l'équation (3.145), nous avons tracé la variation de l'énergie positive E en fonction du nombre quantique n et du champ magnétique B pour diverses situations. Comme le spectre d'énergie est symétrique, tout commentaire sur le cas de l'énergie positive peut être étendue au cas de l'énergie négative.

La Figure 3.1 montre le comportement du spectre d'énergie par rapport à n en modifiant les trois paramètres apparaissant dans l'expression du spectre d'énergie, c'est-à-dire le champ magnétique B , le paramètre de la non-commutativité ϑ et enfin la longueur minimale β . Cette figure a été présentée pour deux cas : $j = 0$ et $j = 1$. Ici, trois des remarques peuvent être faites

- En faisant varier uniquement le champ magnétique, on observe que l'allure du spectre de l'énergie tend à devenir linéaire dans le régime de champ magnétique élevé.
- La variation de la variable β seulement nous conduit à l'existence de deux régions : on constate que les valeurs de l'énergie sont zéros jusqu'à un nombre spécifique

où le spectre commence à croître: ce nombre dépend inversement de β .

- Enfin, en faisant varier ϑ , nous voyons que toutes les courbes coïncident.

La Figure. 3.2 indique le changement d'énergie positive en fonction du champ magnétique pour quatre niveaux $n = 0, 1, 2, 3$. Pour chaque niveau d'énergie, nous avons choisi $j = 0, 1, 2, 3$. A l'exception au cas $j = 0$, chaque courbe montre approximativement une forme linéaire avec un champ magnétique B.

Enfin, afin de montrer que le problème en question est pertinent d'un point de vue physique, nous faisons les remarques suivantes. Premièrement, on peut mentionner certaines études qui ont démontré l'existence d'une relation étroite entre le graphène et le modèle de l'oscillateur de Dirac [78–82].

Bastos et al [83–86] considèrent une description non commutative de graphène. Cette description consiste en une équation de Dirac pour fermions de Dirac sans masse avec des corrections non commutatives, qui sont traitées en présence d'un champ magnétique extérieur. Ils font valoir qu'étant un système Dirac, graphène est particulièrement intéressant pour tester la non-commutativité. Ils constatent que la non-commutabilité affecte les niveaux d'énergie du graphène. Ils obtiennent une limite sur le paramètre de la non commutativité. Leurs résultats montrent que la non-commutativité donne des résultats intéressants également à basse énergie et que ses implications ne sont pas limitées à la cosmologie quantique et à la physique des trous noirs.

Dans le même contexte, Falomir et al [79, 87] emploient un modèle simple non relativiste pour décrire l'excitation de basse énergie de graphène. Le modèle est basé sur une déformation de l'algèbre d'Heisenberg qui fait que le commutateur des moments est proportionnel au pseudo-spin. En conséquence, le résultat la conductivité de l'effet de Hall est cohérente avec l'entier anomal de l'effet de Hall quantique trouvée dans le graphène.

Jallel [81] décrits la déformation du réseau dans le graphène sous l'effet d'une déformation en considérant que les coordonnées du moment spatiales ne commutent pas. Dans ce cadre, il (i) construit un nouveau modèle décrivant les fermions de Dirac interagissant avec une source externe qui est un paramètre non commutatif dépendant, et (ii) les valeurs propres montrent les niveaux de Landau d'une manière similaire au cas d'un champ magnétique réel appliqué au graphène.

Iorio et Paix [88] dans leur article « Generalized uncertainty principle in graphene », ont montré qu'en allant au-delà de l'approximation à basse énergie pour laquelle

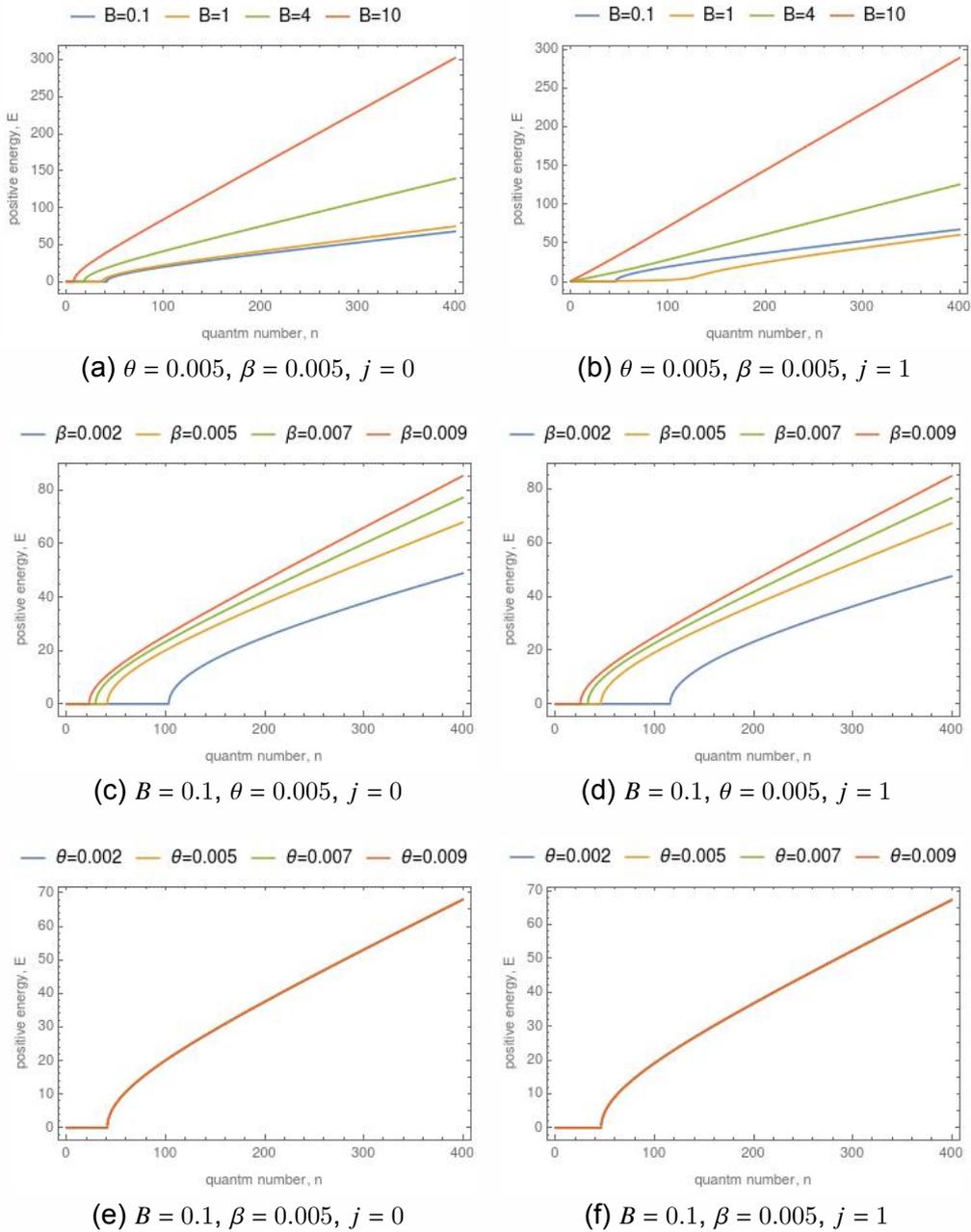


Figure 3.1: Le spectre d'énergie E en fonction du nombre quantique n : a,b) variation par rapport à B pour $\theta = 0.005$ et $\beta = 0.005$; c,d) variation par rapport à β pour $B = 0.1$ et $\theta = 0.005$; e,f) variation par rapport à θ pour $B = 0.1$ et $\beta = 0.005$.

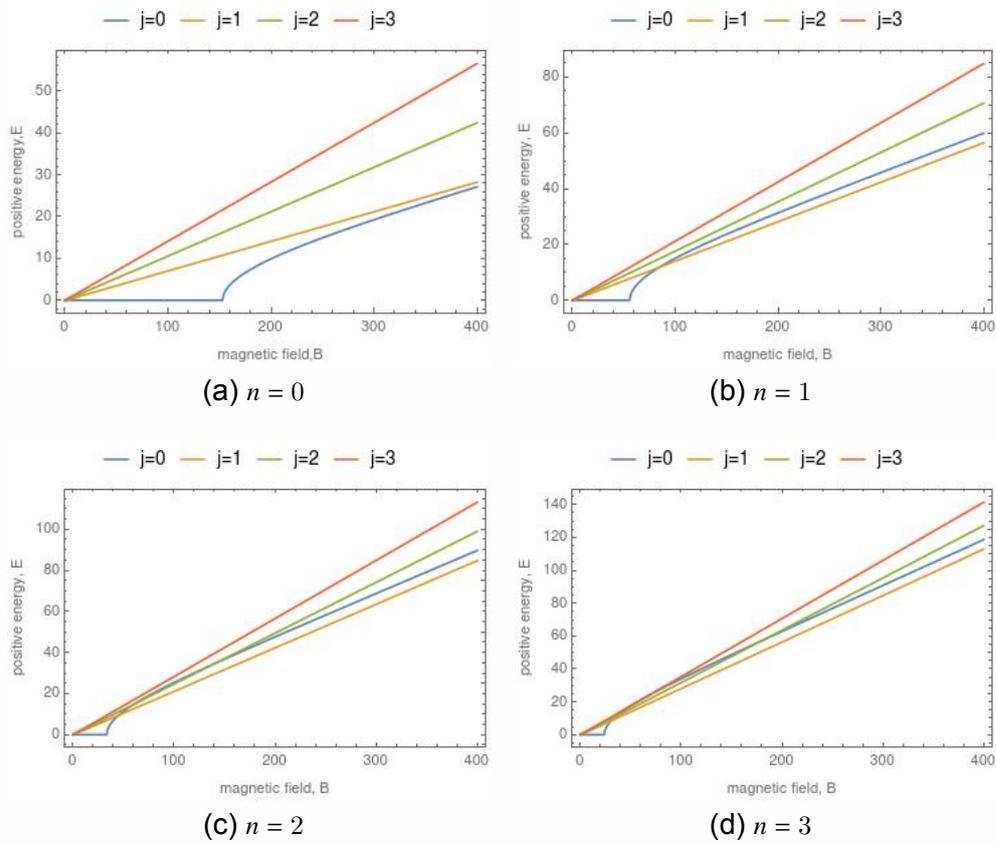


Figure 3.2: Le spectre d'énergie E en fonction du champ magnétique externe B pour $n = 0, 1, 2, 3$

les relations de dispersion du graphène sont linéaires, la théorie correspondante du champ émergent est une généralisation d'une théorie de champ Dirac. Les Hamiltoniens généralisés qu'on obtient sont ceux compatibles avec des généralisations spécifiques du principe d'incertitude. Ils commentent également la compatibilité de ces derniers avec des positions non mobiles ainsi que sur leur physique possible réalisation.

Ainsi, à la suite de ces travaux et peut-être d'autres qui sont non cités ici, nous pouvons nous attendre à ce que notre étude puisse être considérée comme contribution au cas du graphène en introduisant la longueur minimale. Cela se fait par la modification des règles de commutations d'Heisenberg.

CHAPITRE 4

L'OSCILLATEUR DE KEMMER DANS UN ESPACE NON-COMMUTATIF EN PRÉSENCE D'UNE LONGUEUR MINIMALE

4.1 L'oscillateur de Dirac (DO) à deux dimensions dans un espace commutatif

4.1.1 Les solutions en absence de la longueur minimale

L'oscillateur de Dirac bidimensionnel est donné par :

$$(4.1) \quad \{c\alpha_x (\widehat{p}_x - im_0\omega\hat{\gamma}_0\hat{x}) + c\alpha_y (\widehat{p}_y - im_0\omega\hat{\gamma}_0\hat{y}) + \hat{\gamma}_0 m_0 c^2\} \psi_D = E\psi_D$$

En utilisant les matrices de Dirac suivantes [89, 90] :

$$(4.2) \quad \alpha_x = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_y = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \hat{\gamma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

dont $\psi_D = (\psi_1 \ \psi_2)^T$, l'équation (4.1) devient :

$$(4.3) \quad \begin{pmatrix} m_0 c^2 & c\widehat{p}_- \\ c\widehat{p}_+ & -m_0 c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne un système d'équations suivants :

$$(4.4) \quad m_0 c^2 \psi_1 + c\widehat{p}_- \psi_2 = E\psi_1,$$

$$(4.5) \quad c\widehat{p}_+ \psi_1 - m_0 c^2 \psi_2 = E\psi_2,$$

avec

$$(4.6) \quad \widehat{p}_- = \widehat{p}_x - i\widehat{p}_y + im_0\omega (\hat{x} - i\hat{y})$$

$$(4.7) \quad \widehat{p}_+ = \widehat{p}_x + i\widehat{p}_y - im_0\omega (\hat{x} + i\hat{y}).$$

A partir des deux équations (4.4) et (4.5), nous obtenons

$$(4.8) \quad \left\{ c^2 \widehat{p}_- \widehat{p}_+ - \left(E^2 - m_0^2 c^4 \right) \right\} \psi_1 = 0.$$

Maintenant, par souci de simplicité, nous apportons notre problème en espace dynamique.

Rappelons que

$$(4.9) \quad \hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}, \hat{y} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y},$$

$$(4.10) \quad \widehat{p}_x = p_x, \widehat{p}_y = p_y,$$

En passant aux coordonnées polaires dont :

$$(4.11) \quad p_x = p \cos \vartheta, p_y = p \sin \vartheta, \text{ avec } p^2 = p_x^2 + p_y^2,$$

alors

$$(4.12) \quad \hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} = i\hbar \left(\cos \vartheta \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sin \vartheta}{p} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right),$$

$$(4.13) \quad \hat{y} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y} = i\hbar \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\cos \vartheta}{p} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right).$$

Ces transformations permettent aux équations (4.6) et (4.6) de prendre les deux formes suivantes :

$$(4.14) \quad \widehat{p}_- = e^{-i\vartheta} \left\{ p - \lambda \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right\},$$

$$(4.15) \quad \widehat{p}_+ = e^{i\vartheta} \left\{ p + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right\},$$

où $\lambda = m_0 \omega \hbar$. À l'aide de ces expressions, le terme $\widehat{p}_- \widehat{p}_+$, apparaît dans l'équation (4.8) se transforme comme suit :

$$(4.16) \quad \widehat{p}_- \widehat{p}_+ = p^2 - 2\lambda - \lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial p^2} - \frac{\lambda^2}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} - \frac{\lambda^2}{p} \frac{\partial}{\partial p} + 2i\lambda \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

Enfin, nous trouvons l'équation différentielle suivante :

$$(4.17) \quad \left\{ p^2 - \lambda^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) + 2i\lambda \frac{\partial}{\partial \vartheta} - 2\lambda - \varsigma \right\} \psi_1 = 0$$

où

$$(4.18) \quad \varsigma = \frac{(E^2 - m_0^2 c^4)}{c^2}$$

Le choix suivant sur la fonction d'onde

$$(4.19) \quad \psi_1(p, \vartheta) = f(p) e^{i|l|\vartheta},$$

conduit à

$$(4.20) \quad \left[\frac{d^2 f(p)}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{df(p)}{dp} - \frac{l^2}{p^2} f(p) \right] + (\kappa^2 - k^2 p^2) f(p) = 0$$

avec

$$(4.21) \quad \kappa^2 = \frac{(2\lambda + \varsigma)}{\lambda^2}, \quad k^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Maintenant, posons que

$$(4.22) \quad f(p) = p^{|l|} e^{-\frac{k}{2} p^2} F(p),$$

alors (4.20) devient

$$(4.23) \quad F'' + \left(\frac{2|l|+1}{p} - 2kp \right) F' - [2k(l+1) - \kappa^2] F = 0.$$

dont $F(p)$ est obtenue en utilisant, au lieu de p , la variable $t = kp^2$. L'équation (4.23) est l'équation de Kummer [65–67, 90] donnée par

$$(4.24) \quad t \frac{d^2 F}{dt^2} + \left\{ \frac{(2|l|+1)}{2} - t \right\} \frac{dF}{dt} - \left(\frac{1}{2} (|l|+1) - \frac{\kappa^2}{4k} \right) F = 0.$$

Les solutions générales sont écrit comme une série confluent ${}_1F_1(a; |l| + 1; t)$ avec

$$(4.25) \quad a = \frac{1}{2} (|l| + 1) - \frac{\kappa^2}{4k}.$$

Cette série devient un polynôme si et seulement si $a = -n$, ($n = 0, 1, 3$). Alors on trouve

$$(4.26) \quad (\psi_1)_{n,|l|}(p, \vartheta) = C_{n,|l|} p^{|l|} \cdot e^{\frac{-k}{2} p^2} {}_1F_1\left(-n; |l| + 1; k p^2\right) e^{i|l|\vartheta}$$

$$(4.27) \quad E_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 4 \frac{\hbar \omega}{m_0 c^2} n}.$$

La forme du spectre d'énergie est bien connue dans la littérature [6, 60–63].

Enfin, la fonction d'onde totale associée est

$$(4.28) \quad \psi_{n,|l|}(p, \vartheta) = \left(\frac{1}{\frac{c \hat{p}_+}{E + m_0 c^2}} \right) \psi_1.$$

4.1.2 Les solutions en présence d'une longueur minimale

En présence d'une longueur minimale, l'algèbre de Heisenberg à l'échelle de Planck se déforme comme suit :

$$(4.29) \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i\hbar \delta_{ij} (1 + \beta p^2),$$

où $\beta > 0$ est le paramètre de la longueur minimale et dont

$$(4.30) \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 2i\hbar \beta (\hat{p}_i \hat{x}_j - \hat{p}_j \hat{x}_i).$$

est vérifiée. Une représentation des deux opérateurs \hat{x}_i et \hat{p}_i , satisfaisant l'équation

(4.29), peut être prise comme

$$(4.31) \quad \hat{x} = i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_x}, \hat{p}_x = p_x,$$

$$(4.32) \quad \hat{y} = i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_y}, \hat{p}_y = p_y.$$

Dans ce cas, (4.3) devient

$$(4.33) \quad \begin{pmatrix} m_0 c^2 & c \hat{p}_- \\ c \hat{p}_+ & -m_0 c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, l'équation (4.8) se transforme à

$$(4.34) \quad \left\{ c^2 \widehat{p}_- \widehat{p}_+ - (\epsilon^2 - m_0^2 c^4) \right\} \psi_1 = 0.$$

Ici

$$(4.35) \quad \tilde{P}_- = \widehat{p}_x - i\widehat{p}_y - \lambda \left(1 + \beta p^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial p_x} - i \frac{\partial}{\partial p_y} \right),$$

$$(4.36) \quad \tilde{P}_+ = \widehat{p}_x + i\widehat{p}_y + \lambda \left(1 + \beta p^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial p_x} + i \frac{\partial}{\partial p_y} \right).$$

Avec la même stratégie utilisée au-dessus, les équations (4.35) et (4.36) deviennent

$$(4.37) \quad \hat{p}_- = e^{-i\vartheta} \left\{ p - \lambda \left(1 + \beta p^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right\},$$

$$(4.38) \quad \hat{p}_+ = e^{i\vartheta} \left\{ p + \lambda \left(1 + \beta p^2 \right) \left(\frac{\partial}{\partial p} + \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right\}.$$

Dans ce stade, une remarque importante peut être faite concernant l'opérateur du moment angulaire L_z dans le scénario de longueur minimale. Cet opérateur est défini par [29]

$$(4.39) \quad \hat{L}_z = \frac{\hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x}{1 + \beta p^2} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \vartheta}.$$

Il satisfait les relations de commutation suivantes avec \hat{P}_\pm comme suit :

$$(4.40) \quad [\hat{P}_\pm, \hat{L}_z] = \pm \hbar \hat{P}_\pm.$$

Ainsi, il peut être facilement vérifié que l'opérateur \hat{J}_z commute avec l'hamiltonien de notre système (voir l'équation (4.33)), de sorte que même en présence d'une longueur minimale, on a un moment cinétique total conservé. A la limite $\beta \rightarrow 0$, la définition de \hat{L}_z donne la forme bien connue de la mécanique quantique standard. Ainsi, si l est le nombre quantique associé à l'opérateur \hat{L}_z (qui est associé aux fonctions propres $e^{il\vartheta}$ de \hat{L}_z), ce nombre quantique conserve sa signification habituelle comme un nombre quantique du moment angulaire orbital.

L'évaluation du terme $\hat{p}_- \hat{p}_+$ conduit à l'équation différentielle suivante :

$$(4.41) \quad \hat{p}_- \hat{p}_+ = p^2 + 2 \left(1 + \beta p^2 \right) \left\{ \lambda \left(i \frac{\partial}{\partial \vartheta} - 1 \right) - \beta \lambda^2 \left(p \frac{\partial}{\partial p} + \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right\} - \lambda^2 \left(1 + \beta p^2 \right)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right).$$

Ainsi, l'équation (4.34) devient

$$(4.42) \quad \left[p^2 + 2(1 + \beta p^2) \left\{ \lambda \left(i \frac{\partial}{\partial \vartheta} - 1 \right) - \beta \lambda^2 \left(p \frac{\partial}{\partial p} + \frac{i}{p} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) \right\} - \lambda^2 (1 + \beta p^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right) - \xi^2 \right] \psi_1 = 0,$$

avec

$$(4.43) \quad \xi^2 = \frac{\epsilon^2 - m_0^2 c^4}{c^2}.$$

Posons que

$$(4.44) \quad \psi_1 = h(p) e^{i|l|\vartheta},$$

alors, (4.42) prend la forme suivante :

$$(4.45) \quad \left[p^2 - 2(1 + \beta p^2) \left\{ \lambda(l + 1) + \beta \lambda^2 \left(p \frac{d}{dp} - l \right) \right\} - \lambda^2 (1 + \beta p^2)^2 \left(\frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{d}{dp} - \frac{l^2}{p^2} \right) - \xi^2 \right] h(p) = 0.$$

Cette équation peut être écrite sous une forme condensée par :

$$(4.46) \quad \left\{ -a(p) \frac{d^2}{dp^2} + b(p) \frac{d}{dp} + c(p) - \xi \right\} = h(p) = 0,$$

Les différents termes apparents dans cette équation sont donnés par :

$$(4.47) \quad a(p) = \lambda^2 (1 + \beta p^2)^2,$$

$$(4.48) \quad b(p) = -2\beta \lambda^2 (1 + \beta p^2) p - \frac{\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2}{p},$$

$$(4.49) \quad c(p) = p^2 - 2\lambda(l + 1)(1 + \beta p^2) + 2\beta \lambda^2 l (1 + \beta p^2) + \frac{\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2 l^2}{p^2}.$$

L'équation (4.46) peut être résolu en effectuant les transformations suivantes :

$$(4.50) \quad h(p) = \rho(p) \varphi(p), \quad q = \int \frac{1}{\sqrt{a(p)}} dp,$$

où

$$(4.51) \quad \rho(p) = e^{\int \chi(p) dp}, \quad \chi(p) = \frac{2b + a'}{4a} = -\frac{1}{2p}.$$

L(application de ces transformations sur l'équation (4.46) donne

$$(4.52) \quad \left(-\frac{d^2}{dp^2} + V(q) \right) \varphi(p) = \xi \varphi(p).$$

Le potentiel effectif $V(q)$ s'écrit par

$$(4.53) \quad V(q) = p^2 - 2\lambda(l+1)(1+\beta p^2) + 2\beta\lambda^2 l(1+\beta p^2) + \beta\lambda^2(1+\beta p^2) + \frac{\lambda^2(1+\beta p^2)}{p^2} \left(l^2 - \frac{1}{4} \right).$$

L'emploi de la nouvelle variable p avec

$$(4.54) \quad p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(q\lambda\sqrt{\beta}),$$

transforme l'équation (4.53) à

$$(4.55) \quad V(p) = -\frac{1}{\beta} + \beta\lambda^2 \left\{ \frac{\xi_1(\xi_1-1)}{\sin^2(q\lambda\sqrt{\beta})} + \frac{\xi_2(\xi_2-1)}{\cos^2(q\lambda\sqrt{\beta})} \right\},$$

avec

$$(4.56) \quad \xi_1(\xi_1-1) = l^2 - \frac{1}{4},$$

$$(4.57) \quad \xi_2(\xi_2-1) = \left(l - \frac{1}{\beta\lambda} + \frac{1}{2} \right) \left(l - \frac{1}{\beta\lambda} + \frac{3}{2} \right).$$

Enfin, nous avons

$$(4.58) \quad \left(-\frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}U_0 \left\{ \frac{\xi_1(\xi_1-1)}{\sin^2(q\lambda\sqrt{\beta})} + \frac{\xi_2(\xi_2-1)}{\cos^2(q\lambda\sqrt{\beta})} \right\} \right) \varphi(p) = \bar{\xi}^2 \varphi(p),$$

avec

$$(4.59) \quad \bar{\xi}^2 = \xi^2 + \frac{1}{\beta}, \quad U_0 = \alpha^2$$

avec $\alpha = \lambda\sqrt{\beta}$. L'équation (4.58) est une équation de Schrödinger dans un potentiel de Pöschl–Teller [68] défini comme suit

$$(4.60) \quad U = \frac{1}{2}U_0 \left\{ \frac{\xi_1(\xi_1-1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\xi_2(\xi_2-1)}{\cos^2(\alpha q)} \right\},$$

dont $\xi_1 > 1$ et $\xi_2 > 1$. Les solutions des deux équations (4.56) est (4.57) sont

$$(4.61) \quad \xi_1 = l \pm \frac{1}{2},$$

$$(4.62) \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \pm \left(l + 1 - \frac{1}{\beta\lambda} \right).$$

Afin de résoudre l'équation (4.58), on introduit la nouvelle variable

$$(4.63) \quad z = \sin^2(\alpha q).$$

Dans ce cas, (4.58) devient

$$(4.64) \quad z(1-z)\varphi'' + \left(\frac{1}{2} - z\right)\varphi' + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\bar{\xi}^2}{\alpha^2} - \frac{\xi_1(\xi_1 - 1)}{z} - \frac{\xi_2(\xi_2 - 1)}{1-z} \right\} \varphi = 0.$$

dont la nouvelle fonction d'onde φ est

$$(4.65) \quad \varphi = z^{\frac{\xi_1}{2}} (1-z)^{\frac{\xi_2}{2}} \Psi(z).$$

Nous arrivons alors à l'équation différentielle finale

$$(4.66) \quad z(1-z)\Psi'' + \left[\left(\xi_1 + \frac{1}{2} \right) - z(\xi_1 + \xi_2 + 1) \right] \Psi' + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\bar{\xi}^2}{\alpha^2} - (\xi_1 + \xi_2)^2 \right\} \Psi = 0.$$

Les solutions générales sont

$$(4.67) \quad \Psi = C_{12} F_1(a; b; c; z) + C_2 z^{1-c} {}_2F_1(a+1-c; b+1-c; 2-c; z),$$

avec

$$(4.68) \quad a = \frac{1}{2} \left(\xi_1 + \xi_2 + \frac{\bar{\xi}}{\alpha^2} \right), b = \frac{1}{2} \left(\xi_1 + \xi_2 - \frac{\bar{\xi}}{\alpha^2} \right), c = \xi_1 + \frac{1}{2}.$$

La condition $a = -n$ donne

$$(4.69) \quad \bar{\xi}^2 = \alpha^2 (\xi_1 + \xi_2 + 2n)^2.$$

l'obtention du spectre d'énergie exige que à limite $\beta \rightarrow 0$, on recouvre bien le spectre d'énergie connu du cas non-GUP.

La forme exacte de ξ_1 et ξ_2 sont

$$(4.70) \quad \xi_1 = l + \frac{1}{2},$$

$$(4.71) \quad \xi_2 = \frac{1}{2} - \left(l + 1 - \frac{1}{\beta\lambda} \right).$$

A l'aide de (4.69), (4.70) et (4.71), la forme finale du spectre d'énergie est donné par

$$(4.72) \quad \epsilon_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 4 \frac{\hbar\omega}{m_0 c^2} n + 4\beta \frac{\hbar^2 \omega^2}{c^2} n^2},$$

où

$$(4.73) \quad \beta < \beta_0, \beta_0 = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{\left(l + \frac{3}{2}\right)}, \text{ avec } l > 0.$$

La longueur minimale non nulle est donc

$$(4.74) \quad \Delta x_{min} = \hbar \sqrt{\beta} < (\Delta x_{min})_0 = \sqrt{\frac{1}{l + \frac{3}{2}}} L_{min},$$

avec $L_{min} = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0 \omega}}$ est la longueur caractéristique de l'oscillateur de Dirac, et $(\Delta x_{min})_0$ est la longueur admissible ; au-dessus de cette limite, la physique devient expérimentalement inaccessible.

L'expansion de (4.72) au premier ordre de β donne

$$(4.75) \quad \epsilon_n \simeq \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 4 \frac{\hbar\omega}{m_0 c^2} n} \left(1 + \frac{2\beta \hbar^2 \omega^2}{c^2} \frac{n^2}{1 + 4 \frac{\hbar\omega}{m_0 c^2} n} \right).$$

Le premier terme est le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac bidimensionnel habituel par contre le deuxième terme représente la correction pour la longueur minimale. Nouicer [74–76] montre que la dépendance en n^2 est une caractéristique d'un enfermement solide. Pour les valeurs grandes de n (4.75) donne

$$(4.76) \quad \epsilon_n = \hbar \tilde{\omega} n.$$

Cela signifie, que pour les grandes valeurs de n , le comportement de l'oscillateur de Dirac

peut être décrit par un oscillateur harmonique non relativiste de fréquence

$$(4.77) \quad \tilde{\omega} = 2\omega mc\sqrt{\beta}.$$

D'après les équations (4.44), (4.50) et (4.65), la composante ψ_1 a la forme suivante

$$(4.78) \quad (\psi_1)_{n,l}(p, \theta, z) = (C_1)_{n,l} p^{-\frac{1}{2}} e^{il\theta} z^{\frac{\xi_1}{2}} (1-z)^{\frac{\xi_2}{2}} {}_2F_1(-n; b; |l|+1; z).$$

Dans ce cas, la fonction propre totale associée est donnée par

$$(4.79) \quad \psi_{n,l}(p, \theta, z) = \left(\frac{1}{\frac{c\tilde{p}_+}{\epsilon+m_0c^2}} \right) \psi_1.$$

4.2 L'oscillateur de Dirac (DO) dans un espace non-commutatif (NC)

4.2.1 Les solutions propres

L'espace des phases non-commutatif (NC) est caractérisé par le fait que leurs opérateurs de coordonnées vérifient l'équation suivante [83–86, 91, 92] :

$$(4.80) \quad [x_\nu^{(NC)}, x_\mu^{(NC)}] = i\tilde{\theta}_{\mu\nu}, \quad [p_\mu^{(NC)}, p_\nu^{(NC)}] = i\bar{\theta}_{\mu\nu}, \quad [x_\mu^{(NC)}, p_\nu^{(NC)}] = i\hbar\delta_{\mu\nu},$$

où $\tilde{\theta}_{\mu\nu}$ et $\bar{\theta}_{\mu\nu}$ sont des tenseurs antisymétriques.

Afin d'obtenir une théorie qui inclut les deux aspects d'unitarité et de causalité, nous choisissons $\tilde{\theta}_{0\nu} = 0$ et $\bar{\theta}_{0\nu} = 0$, ce qui implique que le temps reste un paramètre et que la non-commutativité n'affecte que l'espace physique.

En remplaçant le produit normal par le produit en étoile, l'équation de Dirac dans l'espace commutant se transformera en l'équation de Dirac dans l'espace (NC) :

$$(4.81) \quad \hat{H}_D(p, x) \star \psi_D(x) = E\psi_D(x),$$

où le \star produit Moyal entre deux fonctions est défini par (voir Chapitre 2) :

$$(4.82) \quad (f \star g)(x) = \exp\left[\frac{i}{2}\tilde{\theta}_{ab}\partial_{x_a}\partial_{x_b}\right] f(x)g(x)|_{x=y}.$$

Au lieu de résoudre l'équation de Dirac dans l'espace (NC) en utilisant la procédure du

produit- \star , nous utilisons la méthode de décalage de Bopp dont nous avons

$$(4.83) \quad x_i^{(NC)} = x_i - \frac{1}{2\hbar} \tilde{\theta} \epsilon_{ij} p_j, p_i^{(NC)} = p_i + \frac{1}{2\hbar} \bar{\theta} \epsilon_{ij} x_j.$$

Par conséquent, l'équation (4.83) devient

$$(4.84) \quad x^{(NC)} = x - \frac{\tilde{\theta}}{2\hbar} p_y, y^{(NC)} = y + \frac{\tilde{\theta}}{2\hbar} p_x, p_x^{(NC)} = p_x + \frac{\bar{\theta}}{2\hbar} y, p_y^{(NC)} = p_y + \frac{\bar{\theta}}{2\hbar} x.$$

Dans ce cas, l'équation l'oscillateur de Dirac s'écrira alors comme suit :

$$(4.85) \quad \left\{ c\alpha_x \left(p_x^{(NC)} - im_0\omega \tilde{\beta} x^{(NC)} \right) + c\alpha_y \left(p_y^{(NC)} - im_0\omega \tilde{\beta} y^{(NC)} \right) + \tilde{\beta} m_0 c^2 \right\} \psi_D = E_{(NC)} \psi_D.$$

En utilisant les matrices de Dirac suivantes

$$(4.86) \quad \alpha_x = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha_y = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

l'équation (4.85) devient :

$$(4.87) \quad \begin{pmatrix} m_0 c^2 & c p_- \\ c p_+ & -m_0 c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = E_{(NC)} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix},$$

avec $\psi_D = (\psi_1, \psi_2)^T$. Après un calcul direct, on trouve le système d'équation suivant :

$$(4.88) \quad m_0 c^2 \psi_1 + c p_- \psi_2 = E_{(NC)} \psi_1,$$

$$(4.89) \quad c p_+ \psi_1 - m_0 c^2 \psi_2 = E_{(NC)} \psi_2,$$

où

$$(4.90) \quad p_- = p_x^{(NC)} - i p_y^{(NC)} + im_0\omega \left(x^{(NC)} - i y^{(NC)} \right) = \varrho_1 (p_x - i p_y) + im_0\omega \varrho_2 (x - i y),$$

$$(4.91) \quad p_+ = p_x^{(NC)} + i p_y^{(NC)} - im_0\omega \left(x^{(NC)} + i y^{(NC)} \right) = \varrho_1 (p_x + i p_y) - im_0\omega \varrho_2 (x + i y).$$

Ici,

$$(4.92) \quad \varrho_1 = 1 + \frac{m_0\omega}{2\hbar} \tilde{\theta}, \varrho_2 = 1 + \frac{\bar{\theta}}{2m_0\omega\hbar}.$$

D'après l'équation (4.88) et (4.89), on a

$$(4.93) \quad \left\{ c^2 p_- p_+ - \left(E_{(NC)}^2 - m_0^2 c^4 \right) \right\} \psi_1 = 0.$$

Maintenant, afin de résoudre la dernière équation, et par souci de simplicité, nous amenons le problème dans l'espace du moment.

Par la même méthode utilisé au-dessous, on arrive à l'équation suivante [49]

$$(4.94) \quad \left\{ \varrho_1^2 p^2 - \lambda^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + 2i\lambda\varrho_1 \frac{\partial}{\partial \theta} - 2\varrho_1\lambda - \varsigma \right\} \psi_1 = 0,$$

avec

$$(4.95) \quad \varsigma = \frac{E_{(NC)}^2 - m_0^2 c^4}{c^2}, \quad \lambda = \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{2m_0\omega\hbar} \right) m_0\hbar\omega$$

A l'aide de la relation suivante [70]

$$(4.96) \quad \psi_1(p, \theta) = f(p).e^{i|l|\theta},$$

L'équation (4.94) se transforme en

$$(4.97) \quad \left[\frac{d^2 f(p)}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{df(p)}{dp} - \frac{l^2}{p^2} f(p) \right] + \left(\kappa^2 - k^2 p^2 \right) f(p) = 0$$

avec

$$(4.98) \quad \kappa^2 = \frac{(2\lambda\varrho_1 (|l| + 1) + \varsigma)}{\lambda^2}, \quad k^2 = \frac{\varrho_1^2}{\lambda^2}.$$

Posons que

$$(4.99) \quad f(p) = p^{|l|}.e^{-\frac{k^2}{2}p^2} F(p),$$

puis l'équation différentielle

$$(4.100) \quad F'' + \left(\frac{2|l| + 1}{p} - 2kp \right) F' - [2k(|l| + 1) - \kappa^2] F = 0,$$

est obtenu pour $F(p)$ qui en utilisant, au lieu de p , la variable $t = kp^2$, est transformée en l'équation de Kummer [65, 67] :

$$(4.101) \quad t \frac{d^2 F}{dt^2} + \{|l| + 1 - t\} \frac{dF}{dt} - \frac{1}{2} \left((|l| + 1) - \frac{\kappa^2}{4k} \right) F = 0,$$

dont la solution est une série hypergéométrique confluent ${}_1F_1(a; |l| + 1; t)$, avec

$$(4.102) \quad a = \frac{1}{2} (|l| + 1) - \frac{\kappa^2}{4k}.$$

Cette série devient un polynôme si et seulement si $a = -n$, ($n = 0, 1, 2$).

Ainsi, nous avons [65]

$$(4.103) \quad \psi_1(p, \theta) = C_{n,|l|} p^{|l|} \cdot e^{\frac{-k}{2} p^2} {}_1F_1(-n; |l| + 1; k p^2) e^{i|l|\theta},$$

$$(4.104) \quad (E_{NC})_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 4 \left(1 + \frac{m_0 \omega}{2\hbar} \tilde{\theta}\right) \left(1 + \frac{\tilde{\theta}}{2m_0 \omega \hbar}\right) n}.$$

La fonction d'onde totale associée est :

$$(4.105) \quad \psi_{n,l}(p, \theta) = \left(\frac{1}{\frac{c p_+}{E_{NC} + m_0 c^2}} \right) \psi_1.$$

4.2.2 Les solutions en présence d'une longueur minimale

L, algèbre de Heisenberg est donnée par

$$(4.106) \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} (1 + \beta p^2).$$

Dans la représentation suivante,

$$(4.107) \quad \hat{x} = i\hbar \left(1 + \beta p^2\right) \frac{d}{dp_x}, \hat{y} = i\hbar \left(1 + \beta p^2\right) \frac{d}{dp_y},$$

$$(4.108) \quad \hat{p}_y = p_y \cdot \hat{p}_x = p_x,$$

on trouve (par les démarches au-dessus)

$$(4.109) \quad \left[\varrho_1^2 p^2 - 2 \left(1 + \beta p^2\right) \left\{ \lambda \varrho_1 (l + 1) + \beta \lambda^2 \left(p \frac{d}{dp} - l\right) \right\} - \lambda^2 \left(1 + \beta p^2\right)^2 \left(\frac{d^2}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{d}{dp} + \frac{l^2}{p^2} \right) - \xi^2 \right] h(p) = 0.$$

Cette équation peut s'écrire sous une autre forme comme suit :

$$(4.110) \quad \left\{ -a(p) \frac{d^2}{dp^2} + b(p) \frac{d}{dp} + c(p) - \xi^2 \right\} h(p) = 0,$$

dont

$$(4.111) \quad a(p) = \lambda^2 \left(1 + \beta p^2\right)^2,$$

$$(4.112) \quad b(p) = -\frac{\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2}{p} - 2\beta\lambda^2 (1 + \beta p^2) p,$$

$$(4.113) \quad c(p) = \varrho_1^2 p^2 - 2\lambda\varrho_1 (l + 1) (1 + \beta p^2) + \beta\lambda^2 l (1 + \beta p^2) + \frac{\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2 l^2}{p^2}.$$

Les solutions de (4.110) peuvent être trouvées en utilisant les transformations suivantes [70] :

$$(4.114) \quad h(p) = \rho(p)\varphi(p), \quad q = \int \frac{1}{\sqrt{a(p)}} dp, \quad \rho(p) = e^{\int \chi(p) dp}, \quad \chi(p) = \frac{2b + a'}{4a} = -\frac{1}{2p},$$

alors nous obtenons l'équation différentielle suivante

$$(4.115) \quad \left[-\frac{d^2}{dq^2} + V(p) \right] \varphi(p) = \xi \varphi(p),$$

dont

$$(4.116) \quad V(p) = \varrho_1^2 p^2 - 2\lambda\varrho_1 (l + 1) (1 + \beta p^2) + \beta\lambda^2 l (1 + \beta p^2) + \beta\lambda^2 (1 + \beta p^2) + \frac{\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2}{p^2} \left(l^2 - \frac{1}{4} \right).$$

En utilisant que

$$(4.117) \quad p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan \left(q\lambda\sqrt{\beta} \right), \quad z = \sin^2(\alpha q),$$

on trouve

$$(4.118) \quad z(1-z)\varphi'' + \left(\frac{1}{2} - z \right) \varphi' + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{z} - \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{1-z} \right\} \varphi = 0.$$

Maintenant, en mettant que

$$(4.119) \quad \varphi = z^{\frac{\zeta_1}{2}} (1-z)^{\frac{\zeta_2}{2}} \Psi(z),$$

nous arrivons à

$$(4.120) \quad z(1-z)\Psi'' + \left[\left(\zeta_1 + \frac{1}{2} \right) - z(\zeta_1 + \zeta_2 + 1) \right] \Psi' + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\bar{\xi}^2}{\alpha^2} - (\zeta_1 + \zeta_2)^2 \right\} \Psi = 0.$$

Les solutions générales de cette équation sont [65, 67, 71]

$$(4.121) \quad \Psi = C_1 {}_2F_1(a; b; c; z) + C_2 z^{1-c} {}_2F_1(a+1-c; b+1-c; 2-c; z),$$

dont

$$(4.122) \quad a = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \frac{\bar{\xi}}{\alpha^2} \right), b = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 - \frac{\bar{\xi}}{\alpha^2} \right), c = \zeta_1 + \frac{1}{2}.$$

Avec la condition $a = -n$, on obtient

$$(4.123) \quad \bar{\xi}^2 = \alpha^2 (\zeta_1 + \zeta_2 + 2n)^2.$$

Enfin, aboutissons à la forme finale du spectre d'énergie

$$(4.124) \quad \epsilon_n = \pm \sqrt{m_0^2 c^4 + 4c^2 \left(1 + \frac{m_0 \omega}{2\hbar} \tilde{\theta} \right) \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{2m_0 \omega \hbar} \right) n + 4c^2 \beta \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{2m_0 \omega \hbar} \right)^2 n^2}$$

où

$$(4.125) \quad \beta < \beta_0, \beta_0 = \frac{1}{l + \frac{3}{2}} \frac{\left(1 + \frac{m_0 \omega}{2\hbar} \tilde{\theta} \right)}{\left(1 + \frac{\bar{\theta}}{2m_0 \omega \hbar} \right) m_0 \omega \hbar} \text{ with } (l > 0).$$

Ainsi, la longueur minimale non nulle est

$$(4.126) \quad \Delta x_{\min} = \hbar \sqrt{\beta} < (\Delta x_{\min})_0 = \sqrt{\frac{1}{l + \frac{3}{2}} \frac{\left(1 + \frac{m_0 \omega}{2\hbar} \tilde{\theta} \right)}{\left(1 + \frac{\bar{\theta}}{2m_0 \omega \hbar} \right)}} l_{\min}$$

avec $l_{\min} = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0 \omega}}$ est la longueur caractéristique du DO, est $(\Delta x_{\min})_0$ la longueur admissible au-dessus de laquelle la physique devient expérimentalement inaccessible. Nous pouvons voir que l'influence des paramètres de la NC sur $(\Delta x_{\min})_0$ est lisible et bien claire.

Maintenant, en développant au premier ordre en fonction de la variable β on trouve

$$(4.127) \quad \epsilon_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + \frac{4}{m_0^2 c^2} \left(1 + \frac{m_0 \omega}{2\hbar} \tilde{\theta}\right) \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{2m_0 \omega \hbar}\right) n} \\ \times \left(1 + \frac{2\beta \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{2m_0 \omega \hbar}\right)}{m_0^2 c^2} \frac{n^2}{1 + \frac{4}{m_0^2 c^2} \left(1 + \frac{m_0 \omega}{2\hbar} \tilde{\theta}\right) \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{2m_0 \omega \hbar}\right) n}\right).$$

Le premier terme est le spectre d'énergie du DO bidimensionnel usuel. Le second terme caractérise la correction due à la présence de la longueur minimale. La dépendance à n^2 est une caractéristique d'un confinement solide.

Pour les valeurs grandes de n , on a

$$(4.128) \quad \epsilon_n = \hbar \bar{\omega} n.$$

c'est-à-dire le comportement du DO peut être décrit par un oscillateur harmonique non relativiste possédant une fréquence $\bar{\omega} = \frac{2c\sqrt{\beta}}{\hbar} \left(1 + \frac{\bar{\theta}}{2m_0 \omega \hbar}\right)$.

La composante ψ_1 a la forme suivante :

$$(4.129) \quad (\psi_1)_{n,l}(p, \theta, z) = (C_1)_{n,l} p^{-\frac{1}{2}} e^{i l \theta} z^{\frac{\xi_1}{2}} (1-z)^{\frac{\xi_2}{2}} {}_2F_1(-n; b; |l| + 1; z)$$

Enfin, la fonction propre totale associée est déterminée par

$$(4.130) \quad \psi_{n,l}(p, \theta, z) = \left(\frac{1}{\frac{c p_+}{\epsilon + m_0 c^2}} \right) \psi_1.$$

4.3 L'oscillateur de Kemmer dans un espace commutatif

L'équation relativiste libre de Kemmer (Duffin-Kemmer-Petiau) est donnée par [3, 93–100] :

$$(4.131) \quad (\beta^\mu p_\mu - M) \psi_k = 0,$$

où M est la masse totale des deux particules de spin $\frac{1}{2}$ et β sont les matrices de Kemmer satisfaisant à la relation de commutation suivante :

$$(4.132) \quad \beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\mu,$$

avec

$$(4.133) \quad \beta^\mu = \gamma^\mu \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^\mu,$$

où \hat{I} : est une matrice identité (4×4), γ^μ la matrice de Dirac et \otimes le produit tensoriel. L'état stationnaire ψ_k de l'équation (4.131) est une fonction d'onde à quatre composantes s'écrivant sous la forme :

$$(4.134) \quad \psi_k = \psi_D \otimes \psi_D = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 \right)^T.$$

où ψ_D est la solution de l'équation de Dirac.

Pour l'oscillateur de Kemmer, l'opérateur d'impulsion \vec{p} , dans l'équation libre de Kemmer, pourrait être remplacé par $\vec{p} - iMB\omega\vec{x}$ avec B est choisi comme $B = \gamma^0 \otimes \gamma^0, (B^2 = \hat{I})$. Ainsi, on obtient

$$(4.135) \quad \{\beta^0 \xi - \beta^1 (p_x - iMB\omega x) - \beta^2 (p_y - iMB\omega y) - M\} \psi_k = 0,$$

avec

$$(4.136) \quad \beta^0 = \gamma^0 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^0, \beta^1 = \gamma^1 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^1, \beta^2 = \gamma^2 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^2.$$

En utilisant les relations suivantes

$$(4.137) \quad \beta^1 = \gamma^1 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^1 = \hat{I} \otimes \gamma^0 \sigma_x + \gamma^0 \sigma_x \otimes \hat{I},$$

$$(4.138) \quad \beta^2 = \hat{I} \otimes \gamma^0 \sigma_y + \gamma^0 \sigma_y \otimes \hat{I}.$$

Multipliant à gauche l'équation (4.135) par $(\gamma^0 \otimes \gamma^0)$, nous obtenons :

$$(4.139) \quad \{(\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^0 \xi - (\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^1 (p_x - iMB\omega x) - (\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^2 (p_y - iMB\omega y) - M (\gamma^0 \otimes \gamma^0)\} \psi_k = 0,$$

avec

$$(4.140) \quad (\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^0 = (\gamma^0 \otimes \gamma^0) (I \otimes \gamma^0 + \gamma^0 \otimes I) = (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0),$$

$$(4.141) \quad (\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^1 = (\gamma^0 \otimes \gamma^0) (I \otimes \gamma^0 \sigma_x + \gamma^0 \sigma_x \otimes I) = (\gamma^0 \otimes \sigma_x + \sigma_x \otimes \gamma^0),$$

$$(4.142) \quad (\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^2 = (\gamma^0 \otimes \gamma^0) (I \otimes \gamma^0 \sigma_y + \gamma^0 \sigma_y \otimes I) = (\gamma^0 \otimes \sigma_y + \sigma_y \otimes \gamma^0).$$

Soit

$$(4.143) \quad \left\{ (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) \xi - \sqcup - \sqcap - M (\gamma^0 \otimes \gamma^0) \right\} \psi_k = 0,$$

où

$$(4.144) \quad \sqcup = (\gamma^0 \otimes \sigma_x + \sigma_x \otimes \gamma^0) (p_x - iMB\omega x),$$

$$(4.145) \quad \sqcap = (\gamma^0 \otimes \sigma_x + \sigma_x \otimes \gamma^0) (p_y - iMB\omega y).$$

En calculant tous les termes comme suit

$$(4.146) \quad \gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0 \xi = \begin{pmatrix} 2\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\xi \end{pmatrix}, \quad (\gamma^0 \otimes \sigma_x + \sigma_x \otimes \gamma^0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(4.147) \quad \gamma^0 \otimes \sigma_y + \sigma_y \otimes \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i & -i & 0 \\ i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & i \\ 0 & -i & -i & 0 \end{pmatrix}, \quad M (\gamma^0 \otimes \gamma^0) = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix},$$

$$(4.148) \quad (p_x - iMB\omega x) I = \begin{pmatrix} p_x - iM\omega x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_x + iM\omega x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_x + iM\omega x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_x - iM\omega x \end{pmatrix},$$

$$(4.149) \quad (p_y - iMB\omega y) I = \begin{pmatrix} p_y - iM\omega y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_y + iM\omega y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_y + iM\omega y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_y - iM\omega y \end{pmatrix}.$$

Avec I est la matrice d'identité, définie par

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3.1 Cas à une dimension

Dans le cas à une dimension, on se contente de la variable x , et on aura

$$(4.150) \quad \left\{ \left(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0 \right) \xi - \square - M \left(\gamma^0 \otimes \gamma^0 \right) \right\} \psi_k = 0.$$

L'équation prend alors la forme suivant

$$(4.151) \quad \begin{pmatrix} 2\xi - M & -p_x + iM\omega x & -p_x + iM\omega x & 0 \\ -p_x - iM\omega x & M & 0 & p_x - iM\omega x \\ -p_x - iM\omega x & 0 & M & p_x - iM\omega x \\ 0 & p_x + iM\omega x & p_x + iM\omega x & -(2\xi + M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Reportons ψ_k , défini par (4.134), dans (4.150), nous obtenons, alors quatre équations algébriques

$$(4.152) \quad (2\xi - M) \psi_1 - (p_x + iM\omega x) \psi_2 - (p_x + iM\omega x) \psi_3 = 0,$$

$$(4.153) \quad -(p_x - iM\omega x) \psi_1 + M\psi_2 + (p_x - iM\omega x) \psi_4 = 0,$$

$$(4.154) \quad -(p_x - iM\omega x) \psi_1 + M\psi_3 + (p_x - iM\omega x) \psi_4 = 0,$$

$$(4.155) \quad (p_x + iM\omega x) \psi_2 + (p_x + iM\omega x) \psi_3 - (2\xi + M) \psi_4 = 0.$$

D'après ces équations, nous avons

$$(4.156) \quad \psi_2 = \psi_3, \psi_1 = \frac{2(p_x + iM\omega x)}{2\xi - M} \psi_2, \psi_4 = \frac{2(p_x - iM\omega x)}{2\xi + M} \psi_2.$$

Éliminons ψ_1, ψ_3, ψ_4 en faveur de ψ_2 ,

$$(4.157) \quad \left[\frac{-2(p_x - iM\omega x)(p_x + iM\omega x)}{2\xi - M} + M + \frac{2(p_x - iM\omega x)(p_x + iM\omega x)}{2\xi + M} \right] \psi_2 = 0.$$

Après un simple calcul, on a :

$$(4.158) \quad 4M \left(p_x^2 + M^2 \omega^2 x^2 + M\omega \right) \psi_2 = M \left(4\xi^2 - M^2 \right) \psi_2.$$

Par un calcul simple, l'équation (4.158) se transforme

$$(4.159) \quad \left(\frac{p_x^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 x^2 \right) \psi_2 = \bar{\xi} \psi_2,$$

où

$$(4.160) \quad \bar{\xi} = \frac{4\xi^2 - M^2}{8M} - \frac{\omega}{2}.$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique dont les solutions sont bien connues.

Le spectre final sera alors :

$$(4.161) \quad \xi_n = \pm \sqrt{\frac{M^2}{4} + 2M\omega(n+1)}.$$

La fonction d'onde finale s'écrit alors par

$$(4.162) \quad \psi_K(x) = N_{norm} \begin{pmatrix} \frac{2(p_x + iM\omega x)}{2\xi - M} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2(p_x + iM\omega x)}{2\xi + M} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2}} H_n \left[(m\omega)^{\frac{1}{2}} x \right].$$

4.3.2 Cas à deux dimensions

Dans le cas à deux dimensions, L'équation (4.150) devient :

$$(4.163) \quad \left\{ (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) \xi - \square - \square - M (\gamma^0 \otimes \gamma^0) \right\} \psi_k = 0,$$

Injectons ψ_k dans (4.163), nous obtenons les quatre équations algébriques suivantes :

$$(4.164) \quad (2\xi - M) \psi_1 - \{(p_x + iM\omega x) - i(p_y + iM\omega y)\} \psi_2 - \{(p_x + iM\omega x) - i(p_y - iM\omega y)\} \psi_3 = 0,$$

$$(4.165) \quad M\psi_2 - \{(p_x - iM\omega x) + i(p_y - iM\omega y)\} \psi_1 + \{(p_x - iM\omega x) - i(p_y - iM\omega y)\} \psi_4 = 0,$$

$$(4.166) \quad M\psi_3 - \{(p_x - iM\omega x) + i(p_y - iM\omega y)\} \psi_1 + \{(p_x - iM\omega x) - i(p_y - iM\omega y)\} \psi_4 = 0,$$

$$(4.167) \quad -(2\xi + M) \psi_4 + \{(p_x + iM\omega x) + i(p_y + iM\omega y)\} \psi_2 + \{(p_x + iM\omega x) + i(p_y + iM\omega y)\} \psi_3 = 0,$$

dont les solutions sont :

$$(4.168) \quad \psi_2 = \psi_3,$$

$$(4.169) \quad \psi_1 = \frac{2 \{(p_x + iM\omega x) - i(p_y + iM\omega y)\}}{2\xi - M} \psi_2, \psi_4 = \frac{2 \{(p_x + iM\omega x) + i(p_y + iM\omega y)\}}{2\xi + M} \psi_2.$$

Éliminons ψ_1, ψ_4 en faveur de ψ_2 , on trouve :

$$(4.170) \quad \left\{ p_x^2 + p_y^2 + M^2 \omega^2 (x^2 + y^2) \right\} \psi_2 = \left(\frac{4\xi^2 - M^2}{4} + 4\xi\omega L_z - 2M\omega \right) \psi_2.$$

On divisons par $2M$, nous obtenons l'équation suivante :

$$(4.171) \quad \left\{ \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 (x^2 + y^2) \right\} \psi_2 = \tilde{\xi} \psi_2,$$

$$(4.172) \quad \tilde{\xi} = \frac{4\xi^2 - M}{8M} + \frac{2\xi\omega}{M} L_z - \omega.$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique dont les solutions sont bien connues. Ainsi, le spectre d'énergie s'écrit par la forme suivante

$$(4.173) \quad \xi_{n_x, n_y, M_l} = 2M \left(-\frac{\omega M_l}{M} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2} (n_x + n_y + 2) \frac{\omega}{M} + \left(\frac{M_l \omega}{M} \right)^2} \right).$$

La fonction d'onde finale est alors

$$(4.174) \quad \psi_K(x, y) = N_{norm} \begin{pmatrix} \frac{2[(p_x + iM\omega x) - i(p_y + iM\omega y)]}{2\xi - M} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2[(p_x + iM\omega x) + i(p_y + iM\omega y)]}{2\xi + M} \end{pmatrix} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} H_{n_x}(\sqrt{m\omega}x) H_{n_y}(\sqrt{m\omega}y) e^{-\frac{m\omega}{2}(x^2 + y^2)}.$$

4.4 L'oscillateur de Kemmer dans un espace non commutatif

Dans ce cas, les équations (4.164), (4.165), (4.166) et (4.167) deviennent

$$(4.175) \quad (2\xi - M) \psi_1 - \underbrace{\left\{ (\hat{p}_x + iM\omega\hat{x}) - i(\hat{p}_y + iM\omega\hat{y}) \right\}}_{\cup} \psi_2 - \underbrace{\left\{ (\hat{p}_x + iM\omega\hat{x}) - i(\hat{p}_y - iM\omega\hat{y}) \right\}}_{\cup} \psi_3 = 0,$$

$$(4.176) \quad M\psi_2 - \underbrace{\left\{ (\hat{p}_x - iM\omega\hat{x}) + i(\hat{p}_y - iM\omega\hat{y}) \right\}}_{\cap} \psi_1 + \underbrace{\left\{ (\hat{p}_x - iM\omega\hat{x}) - i(\hat{p}_y - iM\omega\hat{y}) \right\}}_{\sqcup} \psi_4 = 0,$$

$$(4.177) \quad M\psi_3 - \left\{ (\hat{p}_x - iM\omega\hat{x}) + i(\hat{p}_y - iM\omega\hat{y}) \right\} \psi_1 + \left\{ (\hat{p}_x - iM\omega\hat{x}) - i(\hat{p}_y - iM\omega\hat{y}) \right\} \psi_4 = 0,$$

$$(4.178) \quad - (2\xi + M) \psi_4 + \underbrace{\{(\hat{p}_x + im\omega\hat{x}) + i(\hat{p}_y + im\omega\hat{y})\}}_{\sqcap} \psi_2 + \underbrace{\{(\hat{p}_x + im\omega\hat{x}) + i(\hat{p}_y + im\omega\hat{y})\}}_{\sqcap} \psi_3 = 0$$

En utilisant maintenant la méthode de décalage de Bopp ,dont

$$(4.179) \quad \hat{x} = x - \frac{1}{2}\Theta p_y, \hat{p}_x = p_x,$$

$$(4.180) \quad \hat{y} = y + \frac{1}{2}\Theta p_x, \hat{p}_y = p_y.$$

Les termes \sqcap et \sqcup se modifient et se transforment à

$$(4.181) \quad \sqcup = \Omega (p_x - ip_y) + iM\omega (x - iy),$$

$$(4.182) \quad \sqcap = \Omega (p_x + ip_y) - iM\omega (x + iy),$$

dont

$$(4.183) \quad \Omega = \left(1 + \frac{M\omega\Theta}{2}\right).$$

Le calcul des termes \sqcup, \sqcap donne

$$(4.184) \quad \sqcup = \left(1 - \frac{M\omega\Theta}{2}\right) p_x - i \left(1 - \frac{M\omega\Theta}{2}\right) p_y - iM\omega (x - iy),$$

$$(4.185) \quad \sqcap = \left(1 - \frac{M\omega\Theta}{2}\right) p_x + i \left(1 - \frac{M\omega\Theta}{2}\right) p_y + iM\omega (x + iy),$$

avec

$$(4.186) \quad \bar{\Omega} = \left(1 - \frac{M\omega\Theta}{2}\right),$$

et

$$(4.187) \quad \sqcup = \bar{\Omega} (p_x - ip_y) - iM\omega (x - iy),$$

$$(4.188) \quad \sqcap = \bar{\Omega} (p_x + ip_y) + iM\omega (x + iy).$$

Les équations (4.164), (4.165), (4.166) et (4.167) deviennent :

$$(4.189) \quad (2\xi - M) \psi_1 - \{\Omega (p_x - ip_y) + iM\omega (x - iy)\} \psi_2 - \{\Omega (p_x - ip_y) + iM\omega (x - iy)\} \psi_3 = 0 ,$$

$$(4.190) \quad M\psi_2 - \{\Omega(p_x + ip_y) - iM\omega(x + iy)\}\psi_1 + \{\bar{\Omega}(p_x - ip_y) - iM\omega(x - iy)\}\psi_4 = 0 ,$$

$$(4.191) \quad M\psi_3 - \{\Omega(p_x + ip_y) - iM\omega(x + iy)\}\psi_1 + \{\bar{\Omega}(p_x - ip_y) - iM\omega(x - iy)\}\psi_4 = 0 ,$$

$$(4.192) \quad - (2\xi + M)\psi_4 + \{\bar{\Omega}(p_x + ip_y) + iM\omega(x + iy)\}\psi_2 + \{\bar{\Omega}(p_x + ip_y) + iM\omega(x + iy)\}\psi_3 = 0 .$$

D'après ces équations, on trouve les résultats suivants :

$$(4.193) \quad \psi_2 = \psi_3, \psi_1 = \frac{2\cup}{2\xi - M}\psi_2, \psi_4 = \frac{2\cap}{2\xi + M}\psi_2.$$

Nous éliminons ψ_1, ψ_4 en faveur de ψ_2

$$(4.194) \quad \left(M - \frac{2\cap\cup}{2\xi - M} + \frac{2\sqcup\cap}{2\xi + M} \right) \psi_2 = 0.$$

$$(4.195) \quad \cap\cup = \Omega^2(p_x^2 + p_y^2) + M^2\omega^2(x^2 + y^2) + 2M\omega\Omega - 2M\omega\Omega L_z,$$

$$(4.196) \quad \sqcup\cap = \bar{\Omega}^2(p_x^2 + p_y^2) + M^2\omega^2(x^2 + y^2) + 2M\omega\bar{\Omega} + 2M\omega\bar{\Omega}L_z,$$

ainsi nous trouvons l'équation suivante :

$$(4.197) \quad \left\{ M - 2 \left(\frac{\Omega^2}{2\xi - M} - \frac{\bar{\Omega}^2}{2\xi + M} \right) (p_x^2 + p_y^2) - 2 \left(\frac{1}{2\xi - M} - \frac{1}{2\xi + M} \right) M^2\omega^2 (x^2 + y^2) \right\} \psi_2 \\ = \left\{ 2 \left(\frac{\Omega}{2\xi - M} - \frac{\bar{\Omega}}{2\xi + M} \right) 2M\omega + 2 \left(\frac{\Omega}{2\xi - M} + \frac{\bar{\Omega}}{2\xi + M} \right) 2M\omega L_z \right\} \psi_2$$

Posons maintenant que :

$$(4.198) \quad \delta = \frac{\Omega^2}{2\xi - M} - \frac{\bar{\Omega}^2}{2\xi + M}, \alpha = \frac{1}{2\xi - M} - \frac{1}{2\xi + M},$$

$$(4.199) \quad \beta = \frac{\Omega}{2\xi - M} - \frac{\bar{\Omega}}{2\xi + M}, \gamma = \frac{\Omega}{2\xi - M} + \frac{\bar{\Omega}}{2\xi + M},$$

on trouve

$$(4.200) \quad \left\{ \delta (p_x^2 + p_y^2) + M^2\omega^2\alpha (x^2 + y^2) + 2M\omega\beta - 2M\omega L_z\gamma - \frac{M}{2} \right\} \psi_2 = 0.$$

Si on divise par $2M\delta$, on a

$$(4.201) \quad \left\{ \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2M} + \frac{1}{2} M \underbrace{\left(\frac{\alpha}{\delta} \omega^2 \right)}_{\omega'^2} (x^2 + y^2) + \omega \frac{\beta}{\delta} - \omega L_z \frac{\gamma}{\delta} - \frac{1}{4\delta} \right\} \psi_2 = 0,$$

dont

$$(4.202) \quad \delta = \frac{(2\xi + M) \Omega^2 - (2\xi - M) \bar{\Omega}^2}{(2\xi)^2 - M^2}, \alpha = \frac{2M}{(2\xi)^2 - M^2},$$

$$(4.203) \quad \beta = \frac{(2\xi + M) \Omega - (2\xi - M) \bar{\Omega}}{(2\xi)^2 - M^2}, \gamma = \frac{(2\xi + M) \Omega + (2\xi - M) \bar{\Omega}}{(2\xi)^2 - M^2}.$$

Le calcul des rapports suivants donne

$$(4.204) \quad \frac{\alpha}{\delta} = \frac{2M}{(2\xi + M) \Omega^2 - (2\xi - M) \bar{\Omega}^2}, \frac{\beta}{\delta} = \frac{(2\xi + M) \Omega - (2\xi - M) \bar{\Omega}}{(2\xi + M) \Omega^2 - (2\xi - M) \bar{\Omega}^2},$$

$$(4.205) \quad \frac{\gamma}{\delta} = \frac{(2\xi + M) \Omega + (2\xi - M) \bar{\Omega}}{(2\xi + M) \Omega^2 - (2\xi - M) \bar{\Omega}^2}, \frac{1}{\delta} = \frac{(2\xi)^2 - M^2}{(2\xi + M) \Omega^2 - (2\xi - M) \bar{\Omega}^2}.$$

avec

$$(4.206) \quad \omega' = \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}} \omega = \sqrt{\frac{2M}{(2\xi + M) \Omega^2 - (2\xi - M) \bar{\Omega}^2}} \omega,$$

ou

$$(4.207) \quad \omega' = \sqrt{\frac{1}{1 + 2\omega\Theta\xi}} \omega.$$

On remarque bien que la nouvelle fréquence dépend de l'énergie.

Pour trouver les solutions propres de notre système, on procède de la même façon qu'au-dessus, on obtient cette équation :

$$(4.208) \quad \left\{ \frac{(p_x^2 + p_y^2)}{2M} + \frac{1}{2} M \omega' (x^2 + y^2) \right\} \psi_2 = \tilde{\xi} \psi_2,$$

avec

$$(4.209) \quad \tilde{\xi} = -\omega \frac{\beta}{\delta} + \omega M_l \frac{\gamma}{\delta} + \frac{1}{4\delta} = (n_x + n_y + 1) \omega',$$

est le spectre d'énergie d'un oscillateur à deux dimensions. Un calcul simple montre que le spectre d'énergie suit la relation suivante

(4.210)

$$\left[(4\omega M_l - 2M\omega^2\Theta) \xi + M^2\omega^2 M_l \Theta - 2M\omega + \frac{(2\xi)^2 - M^2}{4} \right] = (n_x + n_y + 1) \omega \sqrt{4M^2 + (8M^2\omega^2\Theta) \xi}.$$

Cette dernière expression requiert un calcul numérique afin d'accéder aux valeurs : la limite commutative est bien recouvert si on pose $\Theta = 0$.

La fonction d'onde finale est alors :

(4.211)

$$\hat{\psi}_K(x, y) = N_{norm} \begin{pmatrix} \frac{\Omega(p_x - ip_y) + iM\omega(x - iy)}{2\xi - M} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{\bar{\Omega}(p_x + ip_y) + iM\omega(x + iy)}{2\xi + M} \end{pmatrix} \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{m\omega'}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} H_{n_x}(\sqrt{m\omega'}x) H_{n_y}(\sqrt{m\omega'}y) e^{-\frac{m\omega'}{2}(x^2 + y^2)}.$$

4.5 Conclusion

Dans cette section nous avons en premier lieu discuté le cas de l'oscillateur de Dirac dans un espace non commutatif en présence d'une longueur minimale [49]. Les solutions sont exactes et l'influence de tous les paramètres entrant en jeu dans cette étude sont bien observés. Le spectre d'énergie montre une dépendance en n^2 ce que veut dire que les confinements des fermions sont durs.

Ensuite, nous avons solutionné le cas de l'oscillateur de Kemmer à 2D pour les deux types d'espace : espace commutatif et espace non commutatif. Pour les deux cas, les solutions propres ont été bien déterminées par la correspondance de notre problème en question avec celui d'un oscillateur harmonique habituel à 1D et 2D dont les solutions sont bien connues dans la littérature [2, 3, 69].

Pour le cas de l'espace commutatif, les solutions propres de notre système sont bien déterminées. Ils sont en bon accord avec ceux trouvés par différents auteurs. Le spectre d'énergie est non dégénéré pour le cas à 1D, contrairement pour le cas à 2D ou le spectre montre une dégénérescence forte.

Pour le cas de l'espace non commutatif, nous avons traité trois cas concernant les relations de commutation de l'espace non commutatif par l'utilisation de la méthode de décalage de Bopp. Pour les trois cas, on distingue que

- La non-commutativité peut être assimilée à un champ magnétique constant dans l'espace commutatif
- La fréquence de notre oscillateur est bien modifiée, et étrangement, elle dépend de l'énergie, contrairement au récente étude concernant l'oscillateur de Kemmer.

Ce résultat nous permis de dire que l'oscillateur de Kemmer, pour une particule composite, est un système dont le potentiel dépend de l'énergie.

Conclusion

Notons ici, comme perspective, nous traitons le cas d'un oscillateur de Kemmer dans un espace non commutatif en présence d'une longueur minimale.

CHAPITRE 5

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans cette thèse, nous avons étudié la structure de l'espace-temps non commutatif dans deux directions différentes. Dans la première partie, nous nous sommes intéressés à la construction de modèles mathématiques dans la structure q -déformée de l'espace-temps commutatif dans le contexte de la longueur minimale. On a ensuite étudié le comportement physique de ce type de modèle dans de tels espaces. Les modèles ont été construits selon l'approche suivante : nous avons fourni une procédure systématique pour relier une algèbre q -déformée à l'algèbre correspondante satisfaite par les variables canoniques décrivant des espaces non commutatifs.

Cette méthode nous a permis d'obtenir les solutions exactes des oscillateurs relativistes dans un espace non commutatif avec une longueur minimale. Ces solutions sont déterminées comme suit : en premier lieu, en suivant la procédure utilisée par Menculini et al [19], nous avons résolu le problème dans le cas de l'espace NC. On a ensuite tenu compte de la longueur minimale du problème qu'on envisageait. Cette introduction a été faite comme suit (i) Nous avons écrit les coordonnées de l'espace NC avec celles de l'espace commutatif au moyen de l'approximation du décalage de Bopp. (ii) Par la suite, On a introduit la longueur minimale dans notre équation trouvée. Les résultats obtenus sont conformes à ceux de la littérature. Elles sont récapitulées comme suit :

1. Pour le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon, nous avons ce qui suit
 - (a) Premièrement, nous avons résolu exactement le problème de l'oscillateur de Klein-Gordon bidimensionnel dans le contexte de la mécanique quantique relativiste en présence d'une longueur minimale. Les solutions propres ont été

obtenues à l'aide d'une méthode élaborée dans [19,70]. Nous avons d'abord considéré le cas de l'oscillateur Klein-Gordon en mécanique quantique ordinaire : nos résultats sont conformes à ceux obtenus dans la Ref. [101]. Ensuite, nous l'avons prolongé dans le cas de la longueur minimale. Les niveaux d'énergie, dans les deux cas, font apparaître une dépendance à n^2 en présence de cette longueur. Ce comportement décrit un confinement dur. Dans la limite où $\beta \rightarrow 0$, on recouvre le spectre d'énergie bien connu en l'absence de la longueur minimale.

- (b) Deuxièmement, nous avons étendu le premier point au cas de l'espace non commutatif. En adoptant la même méthode que celui dans les Refs. [19, 70], nous avons traité le problème uniquement dans le cas de l'espace non commutatif. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux obtenus dans la littérature. Ensuite, nous avons introduit la longueur minimale dans le problème en question. Cette introduction a été faite comme suit : (i) nous écrivons les coordonnées de l'espace non commutatif avec ceux dans l'espace commutatif en utilisant l'approximation de décalage de Bopp, et (ii) puis nous introduisons la longueur minimale dans notre équation trouvée. Par ceux-ci, le problème en question est identifié à un problème de l'équation Schrödinger dans un potentiel de Pöschl-Teller. Les solutions propres du problème en question dans un champ magnétique sont obtenus en présence d'une longueur minimale dans l'espace non commutatif. La dépendance vis-à-vis de ces solutions avec la longueur minimale et le paramètre de la non commutativité est très claire. Cette dépendance brise la dégénérescence du spectre d'énergie. En outre, la présence d'un terme sur n^2 dans la forme du spectre d'énergie montre l'existence d'un confinement dur. Cette dépendance est due à l'introduction d'une longueur minimale dans le problème en question. Enfin, lorsque $\beta \rightarrow 0$ on récupère le spectre d'énergie bien connu en l'absence de la longueur minimale.
2. Dans la même direction que celle de l'oscillateur de Klein-Gordon, nous avons traité le cas de l'oscillateur de Kemmer dans un espace non commutatif tout en adoptant l'approche utilisée pour le cas de l'oscillateur de Dirac dans un espace non commutatif en présence d'une longueur minimale. Cette adoption peut se comprendre par le fait que la particule de spin-1 est considérée comme une particule composée

de deux particules de spin-1/2. En conséquence, nous avons trouvé que les solutions pour l'oscillateur de Kemmer ont une fréquence dépendant de l'énergie. Pour cette raison, notre problème peut être considéré comme un problème dépendant de l'énergie. La présence de la longueur minimale a été laissée en perspective de cette étude compte tenu de la complexité de la résolution des équations qui en ressortent.

Enfin, notons que l'oscillateur harmonique non relativiste est utilisé comme modèle pour décrire le confinement des quarks dans les mésons et les baryons, tandis que l'oscillateur de Dirac est censé donner une bonne description du confinement dans les systèmes de quarks lourds.

Quimby et Strange [78] ont suggéré que le modèle DO bidimensionnel peut décrire certaines propriétés des électrons dans le graphène. De plus, Boumali [80, 102] a été montré que l'on peut modéliser le système du graphène sous un champ magnétique avec un modèle basé sur l'oscillateur de Dirac. Ce modèle est basé sur l'introduction de la masse effective. A partir de ce modèle, toutes les propriétés thermodynamique de ce système en utilisant la fonction thermique zêta ont été déterminées [103]. Aussi, une application possible est la détermination de la limite supérieure de la longueur par rapport aux données trouvées expérimentalement pour le cas du graphène : cette idée a été reprise par Menculini et al [19] afin d'obtenir un maximum sur la longueur minimale apparaissant dans le cadre de la théorie GUP.

Bastos et al [83–86] considèrent une description non commutative de graphène. Cette description consiste en une équation de Dirac pour fermions de Dirac sans masse avec des corrections non commutatives, qui sont traitées en présence d'un champ magnétique extérieur. Ils font valoir qu'étant un système Dirac, graphène est particulièrement intéressant pour tester la non-commutativité. Ils constatent que la non-commutativité affecte les niveaux d'énergie du graphène. Ils obtiennent une limite sur le paramètre de la non commutativité.

Dans le même contexte, Falomir et al [79, 87] emploient un modèle simple non relativiste pour décrire l'excitation de basse énergie de graphène. Le modèle est basé sur une déformation de l'algèbre d'Heisenberg qui fait que le commutateur des moments est proportionnel au pseudo-spin. En conséquence, le résultat la conductivité de l'effet de Hall est cohérent avec l'effet de Hall quantique trouvée dans le graphène.

Jallel [81] décrit la déformation du réseau dans le graphène sous l'effet d'une dé-

formation en considérant que les coordonnées du moment spatiales ne commutent pas. Dans ce cadre, il (i) construit un nouveau modèle décrivant les fermions de Dirac interagissant avec une source externe qui est un paramètre non commutatif dépendant, et (ii) les valeurs propres montrent les niveaux de Landau d'une manière similaire au cas d'un champ magnétique réel appliqué au graphène.

Iorio et Paix [88] dans leur article « Generalized uncertainty principle in graphene », ont montré qu'en allant au-delà de l'approximation à basse énergie pour laquelle les relations de dispersion du graphène sont linéaires, la théorie correspondante du champ émergent est une généralisation d'une théorie de champ de Dirac. Les Hamiltoniens généralisés qu'on obtient sont ceux compatibles avec des généralisations spécifiques du principe d'incertitude. Ils commentent également la compatibilité de ces derniers avec des positions non mobiles ainsi que sur leur physique possible réalisation.

Enfin, selon ces études et peut-être d'autres existant dans la littérature et non cités ici, les résultats montrent que la non-commutativité donne des résultats intéressants également à basse énergie et que ses implications ne sont pas limitées à la cosmologie quantique et à la physique des trous noirs. Aussi, suite à des travaux sur le graphène, nous pouvons nous attendre à ce que notre étude puisse être considérée comme contribution en introduisant la longueur minimale. Cela se fait par la modification des règles de commutations d'Heisenberg.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Moshinsky, Y. F. Smirnov, *The harmonic oscillator in modern physics*, Harwood academic publishers, **1996**.
- [2] A. Boumali, L. Chetouani, *Physics Letters A* **2005**, *346*, 261–268.
- [3] A. Boumali, *Solutions de l'Equation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) pour certaines formes d'interactions*, U. of Annaba (Ed.), Department of physics, **2006**.
- [4] A. Boumali, A. Hafdallah, A. Toumi, *Phys.Scr* **2011**, *84*, 1–2.
- [5] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur Phys. J Plus.* **2013**, *128*, 124.
- [6] A. Boumali, *EJTP.* **2015**, *12*, 121–130.
- [7] C. Quesne, M. Moshinsky, *J. Phys. A : Math. Gen* **1990**, *23*, 2263–2272.
- [8] P. Rozmej, R. Arvieu, *J. Phys. A : Math. Gen* **1999**, *32*, 5367–5382.
- [9] E. Sadurni, J. M. Torres, T. H. Seligman, *J. Phys. A : Math. Theor* **2010**, *43*, 285204.
- [10] E. S. Santos, G. R. deMelo, *Int. J. Theor. Phys* **2011**, *50*, 332–338.
- [11] M. Moshinsky, A. J. Szczepaniak, *J. Phys.A : Math.Gen* **1989**, *22*.
- [12] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen.* **1989**, *22*, L817.
- [13] D. Itô, K. Mori, E. Carriere, *Nuovo. Cimento. A* **1967**, *51*, 1119.

- [14] R. P. Martinez-Romero, A. L. Salas-Brito, *J. Math. Phys.* **1992**, *33*, 1831.
- [15] R. P. MartinezyRomero, H. N. Nunez-Yepeez, A. L. Salas-Brito, *Eur. J. Phys* **1995**, *16*, 135–141.
- [16] J. Benitez, P. R. M. Romero, H. N. Nunez-Yepeez, A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett.* **1990**, *64*, 1643.
- [17] J. A. Franco-Villafane, E. Sadurni, S. Barkhofen, U. kuhl, F. Mortessagne, T. H. Selig-man, *Phys. Rev. Lett.* **2013**, *111*, 170405.
- [18] J. Yang, J. Piekarewicz, *Phys. Rev. C* **2020**, *102*, 954308.
- [19] L. Menculini, O. Panella, P. Roy, *Phys. Rev.* **2013**, *87*, 065017.
- [20] H. Hinrichsen, A. Kempf, *J. Math. Phys.* **1996**, *37*, 2121.
- [21] A. Kempf, *J. Mah. Phys.* **1994**, *35*, 4483.
- [22] A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann, *Phys. Rev. D.* **1995**, *52*, 1108.
- [23] A. Kempf, *J. Phys. A : Math. Gen.* **1997**, *30*, 2093.
- [24] H. S. Snyder, *Phys. Rev.* **1947**, *71*, 38–41.
- [25] C. N. Yang, *Phys. Rev.* **1947**, *72*, 874.
- [26] N. Seiberg, E. Witten, *JHEP.* **1999**, *1999*, 032.
- [27] A. Connes, *Pub. Math. de l'IHES.* **1985**, *62*, 41–144.
- [28] S. L. Woronowicz, *Comm. Math. Phys.* **1987**, *111*, 613–665.
- [29] S. Dey, *Solvable Models on Noncommutative Spaces with Minimal Length Uncertainty Relations*, C. U. of London (Ed.), Department of Mathematics, **2014**.
- [30] S. Z. Benczik, *Investigations on the Minimal-Length Uncertainty Relation*, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, **2007**.
- [31] G. S. Lewis, H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **1999**, *59*, 5457.

- [32] Z. E. Lewis, *A Study of Modifications to Quantum Mechanics*, Virginia Polytechnic Institute and State University, **2013**.
- [33] G. Birkhoff, J. V. Neumann, *Ann. of Math.* **1936**, *37*, 823–843.
- [34] O. . Micu, *Non-commutative effects in physical processes*, U. of Alabama (Ed.), Departement of Physics and Astronomy, **2007**.
- [35] A. C. Millard, *Non-Commutative Methods in Quantum Mechanics*, F. of Princeton University (Ed.), Department of Physics, , Faculty of Princeton University, **1997**.
- [36] J. E. Moyal, *In Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* **1949**, *45*, 99–124.
- [37] J. Contreras, *Determining a minimal length scale for quantum gravity via commutators and modified operators*, C. of Science, Mathematics (Eds.), California State University, Fresno, **2022**.
- [38] D. B. Fairlie, *Mod. Phys. Lett. A.* **1998**, *13*, 263–274.
- [39] S. Zaim, L. Khodja, *Phys. Scr.* **2010**, *81*, 055103.
- [40] S. Zaim, H. Guelmamene, Y. Delenda, *Int. J. Geom. Methods. M. Phys* **2017**, *14*, 1750141.
- [41] M. Achour, L. Khodja, S. Zaim, *Int. J. Modern Phys. A.* **2019**, *34*, 1950082.
- [42] L. Khodja, S. Zaim, *Int. J. Modern Phys. A.* **2012**, *27*, 1250100.
- [43] N. Mebarki, S. Zaim, L. Khodja, H. Aisaoui, *Phys. Scr.* **2008**, *78*, 045101.
- [44] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **1981**, *185*, 513–554.
- [45] A. Gomberoff, D. Marolf, *Lectures on quantum gravity*, A. Gomberoff, D. Marolf (Eds.), Claudio Teitelboim Centro de Estudios Cientificos Valdivia, Chile, **2005**.
- [46] P. Bosso, *Generalized uncertainty principle and quantum gravity phenomenology*, U. degli Studi di Napoli “Federico II” (Ed.), **2017**.
- [47] P. Bosso, L. Petruzzello, F. Wagner, *Phys. Lett. B.* **2022**, *834*, 137415.
- [48] A. F. Ali, I. Elmashada, J. Mureika, *Phys. Nucl. B.* **2022**, *831*, 137182.
- [49] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Z. Naturforsch.* **2015**, *70*, 619–627.

- [50] V. N. Todorinov, *Relativistic Generalized Uncertainty Principle And Its Implications*, S. K. O. Sofia University (Ed.), **2015**.
- [51] S. Deb, phdthesis, Bachelor of Science, University of Calcutta, **2015**.
- [52] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.* **1985**, *10*, 63–69.
- [53] M. Jimbo, *Lett. Math. Phys.* **1986**, *11*, 247–252.
- [54] V. G. Drinfeld, *Proc. ICM (Berkeley)* **1986**, 798–819.
- [55] C. Sun, H. Fu, *J. Phys. A : Math. Gen.* **1989**, *22*, L983.
- [56] A. J. Macfarlane, *J. Phys. A : Math. Gen.* **1989**, *22*, 4581.
- [57] L. C. Biedenharn, *J. Phys. A : Math. Gen.* **1989**, *22*, L873.
- [58] B. Bagchi, A. Fring, *Phys. Lett. A.* **2009**, *373*, 4307–4310.
- [59] B. Bagchi, P. S. Gorain, C. Quesne, *Mod. Phys. Lett. A* **2006**, *21*, 2703.
- [60] B. Mirza, M. Zarei, *Eur. Phys. J C* **2004**, *32*, 583.
- [61] B. Mirza, M. Mohadesi, *Commun. Theor. Phys.* **2004**, *42*, 664.
- [62] B. Mirza, R. Narimani, M. Zarei, *Eur. Phys. J C* **2006**, *48*, 641.
- [63] B. Mirza, R. Narimani, S. Zare, *Comm. Theor. Phys* **2011**, *55*, 405–409.
- [64] N. A. Rao, B. A. Kagali, *Phys. Scr* **2008**, *77*, 1–4.
- [65] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, **1965**.
- [66] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, **2001**.
- [67] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier (Ed.), Academic Press., **1995**.
- [68] S. Flugge, *American Journal of Physics* **1973**, *41*, 140–140.
- [69] A. Boumali, L. Chetouani, H. Hassanabadi, *Can. J. Phys* **2013**, *91*, 1–11.

- [70] T. K. Jana, P. Roy, *Phys. Lett. A.* **2009**, 373, 1239–1241.
- [71] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge : Cambridge University Press, **1999**.
- [72] N. Messai, A. Boumali, *Eur. Phys. J. Plus.* **2015**, 130, 140.
- [73] N. m. Abdelmalek Boumali, *Can J Phys* **2014**, 92, 1460–1463.
- [74] K. Nouicer, *J. Phys. A : Math. Gen.* **2005**, 38, 10027.
- [75] K. Nouicer, *J. Phys. A : Math. Gen.* **2006**, 39, 5125.
- [76] K. Nouicer, *J. Phys. A : Math. Theor.* **2007**, 40, 2125.
- [77] Z. Selama, A. Boumali, *Rev. Mex. Fis.* **2021**, 67, 226–237.
- [78] C. Quimbay, P. Strange, *arXiv* **2013**, 1311–2021.
- [79] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, M. Nieto, *J. Phys. A : Math. Theor* **2012**, 45, 135308.
- [80] A. Boumali, *Phys.Scr.* **2015**, 90, 045702.
- [81] A. Jellal, *Phys. Lett. A.* **2021**, 385, 126964.
- [82] A. Iorio, P. Pais, *J. Phys.: Conf. Ser.* **2019**, 1275, 012061.
- [83] C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata, *J. Math. Phys* **2008**, 49, 072101.
- [84] C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata, *Phys. Rev D* **2008**, 78, 023516.
- [85] C. Bastos, N. C. Dias, J. N. Prata, *Comm. Math. Phys.* **2010**, 299, 709.
- [86] C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata, *Int. J. Mod.Phys.* **2013**, 28, 1350064.
- [87] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Mendez, J. C. Rojas, *Phys. Rev D* **2002**, 66, 045018.
- [88] A. Iorio, P. Pais, *J. Phys.: Conf. Ser.* **2019**, 1275, 012061.
- [89] W. Greiner, *Relativistic quntum mechanics*,, **1990**.

- [90] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics wave equations*, Springer-Verlag, **2000**.
- [91] O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. deArago, P. Castorina, D. Zappala, *Phys. Rev D* **2005**, 72, 025010.
- [92] A. D. Natha, P. Roy, *Phys. Lett. A* **2014**, 351, 13–21.
- [93] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. London.* **1939**, 173, 91–116.
- [94] G. Petiau, *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect.* **1936**.
- [95] R. J. Duffin, *Phys. Rev.* **1938**, 54, 1114.
- [96] Y. Nadjadi, R. C. Barrett, *J. Phys. A : Math. Gen* **1994**, 27, 4301.
- [97] Y. Nadjadi, R. C. Barrett, *J. Phys. A : Math. Gen.* **1998**, 31, 6717–6724.
- [98] A. Boumali, *Turk. J. Phys.* **2007**, 31, 307–316.
- [99] A. Boumali, *Phys. Scr.* **2007**, 76, 669.
- [100] A. Boumali, *J. Phys. A : Math. Theor.* **2009**, 42, 235301.
- [101] H. Benzair, Merad, T. Boudjedaa, M. Makhlouf., *Z. Naturforsch.* **2012**, 67, 77.
- [102] A. Boumali, *Phys. Scr.* **2015**, 90, 109501.
- [103] E. Elizalde, *Ten physical applications of spectral zeta functions*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **1995**.
- [104] J. S. Moyano, J. C. Herrera, *arXiv.2005.09061* **2020**.
- [105] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Theory*, McGraw-Hill inc, **1964**.

ANNEXE A

INTERPRÉTATION PHYSIQUE DE L'OSCILLATEUR DE DIRAC

A.1 L'oscillateur de Dirac à une dimension

Pour comprendre la signification physique de l'oscillateur de Dirac à une dimensions, considérons le cas d'une particule de masse m et de charge électrique q en présence d'un champ électrique linéaire E dans la direction x .

L'équation de mouvement pour cette particule est donnée par [104]

$$(A.1) \quad ma = qE,$$

où a est l'accélération de la particule en raison de son interaction avec le champ électrique. Prenons en compte que la particule se déplace avec un mouvement uniformément accéléré dont son accélération peut être écrite comme suit

$$(A.2) \quad x(t) = \frac{a}{2}t^2 \implies a = \frac{2}{t^2}x(t).$$

Ainsi, nous obtenons la relation suivante concernant le champ électrique

$$(A.3) \quad E = \frac{m}{q} \left(\frac{2x}{t^2} \right).$$

Aussi, en tenant compte du fait que la vitesse de la particule dans un mouvement accéléré peut être écrite par

$$(A.4) \quad v = at \implies t = \frac{v}{a},$$

alors, Eq. (A.3) devient

$$(A.5) \quad E = \frac{m a^2}{q v^2} x.$$

Ainsi, nous avons

$$(A.6) \quad \mathbf{E} = -\zeta x \mathbf{x},$$

avec le champ magnétique est nul dans tout l'espace, c'est à dire

$$(A.7) \quad \mathbf{B} = 0.$$

Considérons que la source du champ électrique est à l'infini afin de négliger les effets de bord. Dans le cadre de référence externe de la charge, le 4-potential électromagnétique peut être écrit par

$$(A.8) \quad A^\mu = \zeta (0, tx).$$

Ce choix est bien justifié, car il recouvre les deux relations données par les deux équations (A.6) et (A.7).

Pour faire le lien avec le cas de l'oscillateur de Dirac à 1D, l'idée est d'exprimer ces résultats dans une forme covariante. Pour cette raison, nous profitons du fait que les champs électromagnétiques sont invariants par changement de jauge et, par conséquent, nous choisissons la fonction de jauge

$$(A.9) \quad \Lambda = -\frac{\zeta}{4} \left(tx^2 + \frac{t^3}{3} \right).$$

Ainsi, le nouveau potentiel $A'_{\text{Lab}}{}^\mu$ sera alors

$$(A.10) \quad A'_{\text{Lab}}{}^\mu = A^\mu - \partial^\mu \Lambda.$$

A partir de ce potentiel, nous avons

$$(A.11) \quad \begin{aligned} A'_{\text{Lab}}{}^0 &= A^0 - \partial_t \Lambda \\ &= \frac{\zeta}{4} (x^2 + t^2), \end{aligned}$$

$$(A.12) \quad \begin{aligned} A_{\text{Lab}}^{1'} &= A^1 - \partial_x \Lambda \\ &= \frac{\zeta}{2} x t. \end{aligned}$$

De cette façon, le 4-potential électromagnétique du système est

$$(A.13) \quad A'^{\mu} = \frac{\zeta}{4} \left((x^2 + t^2), 2tx \right).$$

Cette forme donne ce qui suit

$$(A.14) \quad \mathbf{E}' = -\zeta x \mathbf{x}, \mathbf{B}' = 0.$$

Ainsi, nous obtenons le même résultat que celui du potentiel (A.8).

Maintenant, nous prenons la définition (A.13) pour réécrire le 4-potential électromagnétique sous une forme covariante de Lorentz :

$$(A.15) \quad A'^{\mu} = \frac{\zeta}{4} \left[2 (U \cdot x) x^{\mu} - x^2 U^{\mu} \right],$$

ou

$$(A.16) \quad A'^{\mu} = \frac{\zeta}{4} \left[2tx^{\mu} - (t^2 - x^2) U^{\mu} \right],$$

Ainsi, l'expression covariante explicite de Lorentz du tenseur du champ électromagnétique peut être écrite par

$$(A.17) \quad F_{\mu\nu} = \zeta (U_{\mu} x_{\nu} - U_{\nu} x_{\mu}),$$

dont les composants non nuls sont

$$(A.18) \quad F_{10} = -F_{01} = \zeta x,$$

En comparant (A.18) avec (A.5) nous pouvons facilement conclure que

$$(A.19) \quad \zeta = \frac{2ma^2}{qv^2}.$$

Maintenant, nous allons étudier le comportement du fermion de Dirac se déplaçant à travers l'axe x . Pour cela, nous prenons le terme suivant de l'interaction [105]

$$(A.20) \quad \frac{1}{2} m \omega \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{eB}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

A partir de cette dernière expression, on peut identifier que $\zeta = m\omega$ donc $\omega = \frac{2a^2}{qv^2}$ qui correspond à la fréquence de Larmor. Cela implique que l'oscillateur de Dirac à une dimension représente une particule chargée en présence d'un champ magnétique perpendiculaire à cette particule.

En utilisant le résultat (A.20), la densité lagrangienne du système est donnée par

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{DO} &= \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I \\
 &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} \beta \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi, \\
 &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} \beta (2i\alpha_i x_i) \psi, \\
 &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} (2i\alpha_i x_i) \psi, \\
 &= \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^j \partial_j - m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} (2i\beta\alpha_i x_i) \psi, \\
 &= \psi^\dagger (i\partial_t + i\gamma^0 \gamma^j \partial_j - \gamma^0 m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} (2i\beta\alpha_i x_i) \psi, \\
 &= \psi^\dagger (i\partial_t + i\alpha_j \partial_j - \beta m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} (2i\beta\alpha_i x_i) \psi, \\
 &= i\psi^\dagger \dot{\psi} + i\psi^\dagger \alpha_j \partial_j \psi - \psi^\dagger \beta m \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} (2i\beta\alpha_i x_i) \psi. \\
 (A.21) \quad &= i\psi^\dagger \dot{\psi} + i\psi^\dagger \alpha_1 \partial_x \psi - \psi^\dagger \beta m \psi + i \frac{eB}{m} \psi^\dagger \beta \alpha_1 x \psi.
 \end{aligned}$$

Cette densité (A.21) conduit aux équations de mouvement via les deux équations d'Euler-Lagrange pour les champs ψ et ψ^\dagger comme suit :

$$(A.22) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \right) = 0,$$

$$(A.23) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^\dagger} \right) = 0$$

Ainsi,

- Les solutions pour le cas du champ ψ sont

$$(A.24) \quad i\dot{\psi}^\dagger = m\psi^\dagger \beta - im\omega \psi^\dagger \beta \alpha_1 x.$$

- Par contre pour le champ conjugué ψ^\dagger on obtient

$$(A.25) \quad i\dot{\psi} = [\alpha_x (p_1 - im\omega \beta x) + m\beta] \psi$$

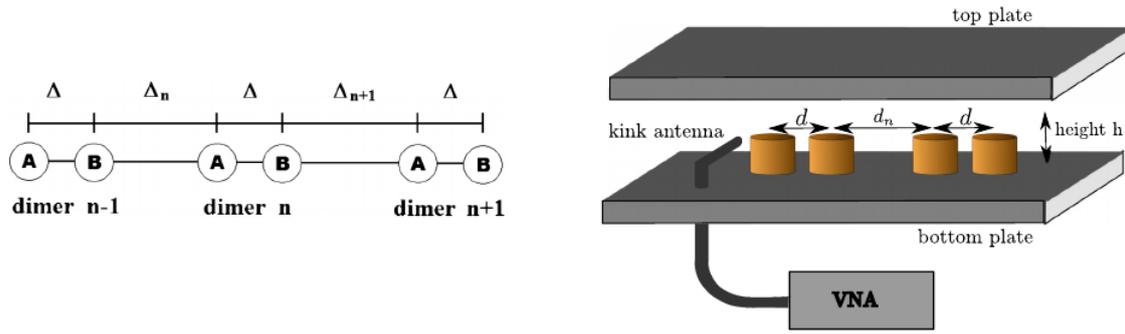


Fig. A.1 : Réalisation expérimentale de l'oscillateur de Dirac à une dimension

L'expression (A.25) correspond à l'oscillateur uni-dimensionnel. L'oscillateur de Dirac dans ce cas représente une particule se déplaçant en ligne droite en présence d'un champ électrique linéaire suivant x , où $\zeta = -\frac{2m}{q} \frac{a^2}{v^2}$. Il peut agir aussi dans le sens opposé au déplacement de la particule. Cependant, si nous voulons voir plus clair le sens physique de ζ dans ce contexte, nous pouvons prendre F_{01} de (A.18) et le dériver en respectant sa coordonnée spatiale x et nous avons

$$(A.26) \quad \zeta = -\frac{dE}{dx},$$

Ainsi, l'oscillateur de Dirac à 1D représente physiquement une particule chargée se déplaçant dans un champ électrique linéaire.

A ce stade, une importante remarque peut être faite : Nous savons aussi que l'oscillateur de Dirac est sorti de son champ de recherche purement théorique pour devenir une réalité comme il l'a été montré par Franco-Villafane et al [17] (Voir Figures. A.1. A.2). Ces auteurs ont présenté pour la première fois la réalisation expérimentale de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel qui peut être considéré comme un paradigme pour les systèmes relativistes exactement résolubles. L'expérience repose sur une relation entre l'oscillateur de Dirac et un système de liaisons fortes. Ce système de liaison serrée est mis en œuvre comme un système hyperfréquence par une chaîne de disques diélectriques couplés, où le couplage est évanescent et peut être ajusté de manière appropriée. Les résonances du système micro-ondes fini donnent le spectre de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel avec et sans terme de masse. La forme du spectre de la dernière figure est bien similaire à la forme du spectre trouvé théoriquement dans la littérature.

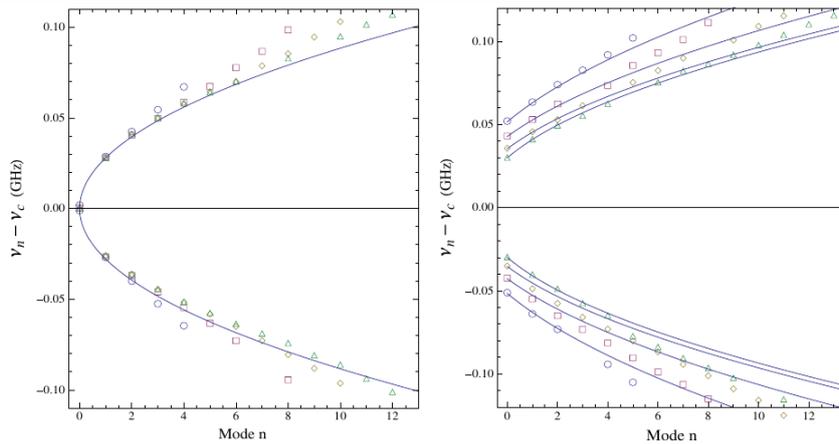


Fig. A.2 : Spectre d'énergie expérimental de l'oscillateur de Dirac à 1D sans (à gauche) et avec (à droite) masse

A.2 L'oscillateur de Dirac à deux dimensions

Pour connaître la représentation physique de l'oscillateur de Dirac à deux dimensions, nous supposons une particule possédant une masse m se déplaçant dans une orbite circulaire de rayon R et dont la vitesse tangentielle est v . Son accélération centripète est donnée par $\frac{mv^2}{R}$ qui est toujours dirigé vers le centre de l'orbite. On sait aussi que la force exercée par un champ magnétique sur une particule chargée est toujours perpendiculaire à la vitesse instantanée de la particule. En tenant compte des informations précédentes, nous considérons une particule de charge électrique q . Cette particule se déplace dans un plan perpendiculaire à un champ magnétique uniforme B . La force magnétique qui agit sur la particule a une magnitude $f = qvB$, se dirige vers le centre de son orbite, c-à-d

$$(A.27) \quad qvB = \frac{mv^2}{R}.$$

Ainsi le champ magnétique a une magnitude donnée par

$$(A.28) \quad B = \frac{mv}{qR}.$$

En tenant compte du fait que la fréquence angulaire d'une particule avec un mouvement circulaire uniforme peut être écrite comme $\omega = v/R$ alors nous pouvons réécrire l'expression (A.28) comme suit

$$(A.29) \quad B = \frac{m\omega}{q}.$$

En utilisant (A.29), il est possible de vérifier que le champ magnétique est uniforme, puisque toutes les variables impliquées sont des paramètres. Considérons maintenant une plaque conductrice uniforme interagissant avec un champ magnétique perpendiculaire à elle, c-à-d

$$(A.30) \quad \mathbf{B} = -Bz,$$

alors le champ électrique dans tout l'espace est nul, en d'autres termes

$$(A.31) \quad \mathbf{E} = 0.$$

Supposons que le cercle est assez grand pour négliger les effets de bord. Alors, nous montrerons que le fermion de Dirac interagissant avec le champ électromagnétique produit par le plan nous conduit à un Hamiltonien de l'oscillateur (2+1) de Dirac à deux dimensions.

Étudions le fermion de Dirac à partir d'un référentiel propre de la plaque, que nous appelons le référentiel du laboratoire. Ainsi, nous pouvons calculer les champs électriques et magnétiques en utilisant le 4-potentiel électromagnétique associé A_μ . Une expression qui pourrait décrire cette situation est donnée par

$$(A.32) \quad A^\mu = \rho (0, y, -x),$$

où ρ est une constante. Rappelant que les expressions classiques pour le potentiel scalaire et vectoriel sont donnés par

$$(A.33) \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A},$$

$$(A.34) \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Un calcul simple montre que le 4-potentiel électromagnétique (A.32) nous mène aux deux expressions du champs électrique (A.30) et magnétique (A.31).

Notons ici que l'expression (A.32) doit avoir une forme covariante de Lorentz. Dans ce sens, nous utilisons l'invariance de jauge des champs électromagnétiques pour réécrire le 4-potentiel électromagnétique 4 (A.32) en termes de fonction de jauge qui ont la forme

suivante

$$(A.35) \quad \Lambda = -\frac{\rho}{4}tx^2 - \frac{\rho}{4}ty^2 - \frac{\rho}{12}t^3.$$

Dans ce cas, nous réécrivons le 4-potential en termes de la fonction de jauge Λ comme suit

$$(A.36) \quad A_{\text{lab}}^{\mu\nu} = A_{\text{lab}}^{\mu} - \partial_{\mu}\Lambda.$$

Nous obtenons alors

$$(A.37) \quad A_{\text{lab}}^{0'} = \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2 + t^2),$$

$$(A.38) \quad A_{\text{lab}}^{1'} = \rho y + \frac{1}{2}\rho tx,$$

$$(A.39) \quad A_{\text{lab}}^{2'} = -\rho x + \frac{1}{2}\rho ty.$$

Enfin, (A.36) devient

$$(A.40) \quad A_{\text{lab}}^{\mu\nu} = \rho \left[-\frac{1}{4}(x^2 + y^2 + t^2), y + \frac{1}{2}tx, -x + \frac{1}{2}ty \right].$$

Ce nouveau potentiel donne les résultats suivant

$$(A.41) \quad \mathbf{E} = 0, \mathbf{B}' = -Bz$$

En faisant une transformation des coordonnées du référentiel du laboratoire au référentiel attaché à la particule via le 4-vitesse, $U_{\mu} = (1, 0)$, alors

$$(A.42) \quad A^{\mu\nu} = \frac{\rho}{4} [2(U \cdot x)x^{\mu} - x^2 U^{\mu}].$$

Ce potentiel se transforme à

$$(A.43) \quad A^{\mu\nu} = \frac{\rho}{4} [2tx^{\mu} - (t^2 - x^2 - y^2)U^{\mu}]$$

dont

$$(A.44) \quad A^{0'} = \frac{\rho}{4}(x^2 + y^2 + t^2); A^{1'} = \frac{1}{2}\rho xt; A^{2'} = \frac{1}{2}\rho ty.$$

Ainsi le tenseur de champ électromagnétique produit par la plaque peut être écrit comme

$$(A.45) \quad F_{\mu\nu} = \rho (U^\mu x^\nu - U^\nu x^\mu),$$

où

$$(A.46) \quad F_{01} = \rho x; \quad F_{10} = -\rho x; \quad F_{02} = \rho y; \quad F_{20} = -\rho y.$$

Maintenant, nous allons étudier le comportement de la particule fermionique de Dirac se déplaçant à travers la plaque. Pour atteindre ce but, nous prenons le terme d'interaction [105]

$$(A.47) \quad \frac{1}{2} m \omega \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{eB}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.$$

A partir de la dernière expression, on peut identifier le terme $\omega = eB/m$ qui correspond à la fréquence de Larmor. Cela signifie que l'oscillateur de Dirac à deux dimensions représente une particule chargée se déplaçant dans une plaque en présence d'un champ magnétique perpendiculaire à cette particule.

En utilisant le résultat (A.47), la densité lagrangienne du système est donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{DO} &= \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_I \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} \beta \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \psi, \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} \beta (2i\alpha_i x_i) \psi, \\ &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} (2i\alpha_i x_i) \psi, \\ (A.48) \quad &= \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^j \partial_j - m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} (2i\beta\alpha_i x_i) \psi, \\ &= \psi^\dagger (i\partial_t + i\gamma^0 \gamma^j \partial_j - \gamma^0 m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} (2i\beta\alpha_i x_i) \psi, \\ &= \psi^\dagger (i\partial_t + i\alpha_j \partial_j - \beta m) \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} (2i\beta\alpha_i x_i) \psi, \\ &= i\psi^\dagger \dot{\psi} + i\psi^\dagger \alpha_j \partial_j \psi - \psi^\dagger \beta m \psi + \frac{eB}{2} \bar{\psi} (2i\beta\alpha_i x_i) \psi. \\ &= i\psi^\dagger \dot{\psi} + i\psi^\dagger \alpha_1 \partial_x \psi + i\psi^\dagger \alpha_2 \partial_y \psi - \psi^\dagger \beta m \psi + i\frac{eB}{m} \psi^\dagger \beta \alpha_1 x \psi + i\frac{eB}{m} \psi^\dagger \beta \alpha_2 y \psi \end{aligned}$$

De la densité lagrangienne (A.48) nous obtenons les équations de mouvement, en utilisant les expressions Euler-Lagrange pour les champs ψ et ψ^\dagger .

- Pour le cas du champ ψ , on a

$$(A.49) \quad i\dot{\psi}^\dagger = m\psi^\dagger\beta - im\omega\psi^\dagger\beta\alpha_{1x} - im\omega\psi^\dagger\beta\alpha_{2y}.$$

- Par contre, pour le champ conjugué ψ^\dagger , l'équation de mouvement suit la relation suivante

$$(A.50) \quad i\dot{\psi} = [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + m\beta - im\omega\beta\alpha_{1x} - im\omega\beta\alpha_{2y}] \psi.$$

L'expression (A.50) peut être réécrite comme suit

$$(A.51) \quad i\dot{\psi} = [\alpha_j (p_j - im\omega\beta x_j) + \beta m] \psi$$

Les expressions (A.50) et (A.51) correspondent à l'équation de Dirac en présence d'un potentiel linéaire en deux dimensions (oscillateur de Dirac). Ainsi, nous pouvons conclure que l'oscillateur de Dirac à deux dimensions représente une particule de spin-1/2 et électriquement chargé se déplaçant à l'intérieur d'une plaque interagissant avec un champ magnétique perpendiculaire externe et uniforme.

A.3 L'oscillateur de Dirac à trois dimensions

L'équation de Dirac avec une interaction DO est :

$$(A.52) \quad \left\{ c\alpha \left(p - im_0\omega\tilde{\beta}r \right) + \tilde{\beta}m_0c^2 \right\} \psi = E\psi,$$

où m_0 est la masse, $\omega > 0$ est la fréquence constante de l'oscillateur, et enfin α les matrices 4×4 de Dirac qui sont données par :

$$(A.53) \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

avec σ sont les matrices de Pauli. Suivant Martinez et al [14, 15], il a été montré que (A.52) peut être réécrit sous une forme covariante de Lorentz comme suit :

$$(A.54) \quad [\gamma^\mu p_\mu - m_0c^2 + (\kappa e4m_0) \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}] \psi = 0,$$

où le tenseur électromagnétique est donné par

$$(A.55) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu, \gamma^\nu),$$

dont le quadri-potential vecteur

$$(A.56) \quad A_\mu = \frac{2x_\mu (u \cdot x) - x^\mu u_\mu}{4},$$

est le potentiel électromagnétique associé à l'interaction de DO. Ici, $u_\mu = (m_0\omega, 0)$ est le vecteur dépendant du repère, et le paramètre $\kappa e 4m_0$ définit le moment magnétique anomal de l'oscillateur de Dirac.

Maintenant, comparons (A.52) avec l'équation de Pauli-Dirac-Pauli décrivant le mouvement d'un fermion neutre de spin 1/2 avec une masse m_0 et un moment magnétique anomal, dans un champ électromagnétique externe dont l'équation s'écrit par

$$(A.57) \quad \left[\gamma^\mu p_\mu - m_0 c^2 - \frac{1}{2} \mu \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right] \psi = 0.$$

A partir de (A.57) on peut réécrire le second terme de (A.52) en fonction des deux champs électrique externe E et de magnétique B comme suit

$$(A.58) \quad \frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = i\alpha \cdot E - \Sigma \cdot B,$$

où $\alpha = \gamma^0 \gamma$ et $\Sigma^k = (1/2) \varepsilon^{ijk}$ avec $\varepsilon^{ijk} = (\varepsilon^{123} = 1)$, étant des tenseurs totalement antisymétriques. Dans ce cas, la forme de l'Hamiltonien devient

$$(A.59) \quad H_D = c\alpha p + i\mu\gamma E - \mu\beta\Sigma B + \beta mc^2.$$

En posant que $B = 0$, (A.59) se transforme à

$$(A.60) \quad H_D = c \cdot \alpha \cdot p + i\mu\gamma \cdot E + \beta mc^2.$$

Ainsi, l'interaction de DO peut être interprétée comme le mouvement d'une particule avec un moment chromo magnétique anomal interagissant avec un champ chromo électrique variant linéairement.

A.4 Conclusion

L'oscillateur de Dirac (DO) est l'un des systèmes les plus étudiés en mécanique quantique relativiste et en mathématiques physiques. En particulier, nous montrons que ce système a une propriété unique qu'il n'a jamais vue dans d'autres systèmes connus : selon sa dimensionnalité spatiale, DO représente des systèmes physiques de nature

électromagnétique très différente [104]. Dans ce sens, il a également montré que

- En trois dimensions, le DO représente un fermion relativiste électriquement neutre avec un moment de dipôle magnétique, dans un milieu diélectrique à symétrie sphérique et sous l'effet d'un champ électrique qui dépend de la distance radiale.
- Par contre, en deux dimensions, le DO représente un fermion de spin-1/2 relativiste sous l'effet d'un champ magnétique externe uniforme et perpendiculaire
- Enfin, à une dimension, il reproduit un fermion relativiste, électriquement chargé interagissant avec un champ électrique linéaire.

ANNEXE B

LISTE DES ARTICLES

- A. Boumali and Z. Selama, *Physics of Particles and Nuclei Letters*, (2018), **15**, 473–477
- Z. Selama, A. Boumali, *Rev. Mex. Fis*, (2021), **67**, 226-237

Two-dimensional boson oscillator under a magnetic field in the presence of a minimal length in the non-commutative space

Z. Selama* and A. Boumali**

Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique, LPAT, Université Larbi-Tébessi, Tébessa, Algeria.

*e-mail: zina.slama@univ-tebessa.dz; zinaslama@gmail.com

**e-mail: abdelmalek.boumali@univ-tebessa.dz; boumali.abdelmalek@gmail.com

Received 7 September 2020; accepted 10 November 2020

In this paper, we consider a two-dimensional Klein-Gordon oscillator in the presence of a magnetic field in non-commutative phase space in the framework of relativistic quantum mechanics with minimal length. The eigensolutions are found and the system is mapped to the well-known Schrödinger equation in a Pöschl-Teller potential.

Keywords: Klein-Gordon oscillator; minimal length; magnetic field; non commutative phase-space.

PACS: 03.65.Pm; 03.65.Ge; 03.65.Ca

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.67.226>

1. Introduction

The studies of the relativistic generalization of the harmonic oscillator has drawn much attention in recent years. The well-known relativistic model of the harmonic oscillator was revived by Moshinsky and Szczepaniak [1], who gave it the name of Dirac oscillator (DO) because, in the non-relativistic limit, it becomes a harmonic oscillator with a very strong spin-orbit coupling term. The Dirac relativistic oscillator is an important potential both the theoretical and application implications. It was for the first time studied by Ito *et al.* [2]. They considered a Dirac equation in which the momentum \vec{p} is replaced by $\vec{p} - im\beta\omega\vec{r}$, with \vec{r} being the position vector, m the mass of particle, and ω the frequency of the oscillator. Physically, it can be shown that the DO interaction represents a physical system, which can be interpreted as the interaction of the anomalous magnetic moment with a linear electric field [3,4]. The electromagnetic potential associated with the DO has been found by Benitez *et al.* [5]. The Dirac oscillator has attracted a lot of interest both because it provides one of the examples of the Dirac's equation exact solvability and because of its numerous physical applications (see [6] and references therein). Recently, Franco-Villafane *et al.* [7] exposed the proposal of the first experimental microwave realization of the one-dimensional DO. The experiment relies on a relation of the DO to a corresponding tight-binding system. The experimental results obtained, concerning the spectrum of the one-dimensional DO with and without the mass term, are in good agreement with those obtained in the theory. In addition, Yang and Piekarewicz [8] illustrate the power and flexibility of the Dirac oscillator and they suggest extensions to the study of systems without spherical symmetry as required in constrained calculations of nuclear excitations. Self-consistent calculations of binding energies and ground-state densities for a selected set of doubly-magic are performed using the Dirac-oscillator basis and are then compared against results obtained with the often-used

Rung-Kutta method. The results obtained using the Dirac oscillator basis reproduced with high accuracy those derived using the Rung-Kutta method.

The unification between the general theory of relativity and the quantum mechanics is one of the most important problems in theoretical physics. This unification predicts the existence of a minimal measurable length on the order of the Planck length. All approaches of quantum gravity show the idea that near the Planck scale, the standard Heisenberg uncertainty principle should be reformulated. The minimal length uncertainty relation has appeared in the context of the string theory, where it is a consequence of the fact that the string cannot probe distances smaller than the string scale $\hbar\sqrt{\beta}$, where β is a small positive parameter called the deformation parameter. This minimal length can be introduced as an additional uncertainty in position measurement, so that the usual canonical commutation relation between position and momentum operators becomes

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta p^2). \quad (1)$$

This commutation relation leads to the standard Heisenberg uncertainty relation

$$\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq i\hbar\left(1 + \beta(\Delta p)^2\right), \quad (2)$$

which clearly implies the existence of a non-zero minimal length $\Delta x_{\min} = \hbar\sqrt{\beta} \sim l_p$ where l_p is the Planck length. This modification of the uncertainty relation is usually termed the generalized uncertainty principle (GUP) or the minimal length uncertainty principle [9–12]. Note here that Saavedra and Utreras [13] were the first to propose a generalization of the canonical commutation relations of quantum mechanics which should be important at high energies. So a new (high energy) uncertainty principle was obtained.

In this direction, some remarks can be made about Eqs. (1) and (2): (i) according to the works of [14–18], one important observation was that various observable effects of

the minimal length uncertainty relation are non-perturbative in the deformation parameter β , (*i.e.*, contain all orders in β) even though β appears only to linear order in Eqs. (1) and (2) [16–18]. (ii) In Ref. [15], the authors study the effect of the minimal length on the thermal properties of a Dirac oscillator when the position and momentum obey Eq. (1), and studied the possible constraint that can be placed on β . By using the properties of the Epstein zeta function, this study leads to a minimal length in the interval of $10^{-16} < \Delta x < 10^{-14}$ m with the following physically acceptable condition $\beta > \beta_0 = (1/m^2 c^2)$. (iii) Kempf [10, 11, 19] has shown that Eq. (1) follows naturally when the canonical commutation relation between position and momentum operators is modified according to the Eq. (1). So, we may select the position \hat{x} and momentum \hat{p} operators in terms of the undeformed observables x and p , *i.e.* $[x, p] = i\hbar$, as

$$\hat{x} = (1 + \beta p^2) x, \text{ and } \hat{p} = p. \quad (3)$$

One should note that the construction of models in these spaces would not be an easy task as the operators \hat{x} and \hat{p} in the deformed commutation relation (1) are in general not Hermitian $\hat{x}^\dagger = \hat{x} + 2i\beta\hbar\hat{p}$ and $\hat{p}^\dagger = \hat{p}$, albeit the simplified version (3) still allows one operator to remain Hermitian [20]. According to the works of Bagchia *et al.* [21] the positivity of β becomes important, as it ensures the absence of singularities in the metric.

According to the Kempf's prescription [10–12, 19], the position and momentum operators satisfying Eq. (1) can be also represented by

$$\hat{x} = i\hbar(1 + \beta p^2)x + \gamma p; \quad \hat{p} = p, \quad (4)$$

where the operators x and p satisfy the canonical commutation relation $[x, p] = i\hbar$. In this case, the internal product in Fourier space becomes

$$\langle \phi(p)^* \psi(p) \rangle = \int \frac{\phi(p)^* \psi(p)}{(1 + \beta p^2)^{1 - \frac{\gamma}{\hbar}}} dp. \quad (5)$$

The parameter γ appears in both Eqs. (4) and (5) is an arbitrary constant which does not affect the observable quantities; its choice determines only the weight function in the definition of the scalar product [22]. In this work, we have opted with the Kempf method, and so we chose $\gamma = 0$.

Nowadays, the reconsideration of the relativistic quantum mechanics in the presence of a minimal measurable length have been studied extensively. In this context, many papers were published where a different quantum system in space with Heisenberg algebra was studied. They are: the Abelian Higgs model [19], the thermostatics with minimal length [23], the one-dimensional Hydrogen atom [24], the Casimir effect in minimal length theories [25], the effect of minimal lengths on electron magnetism [26–28], the solutions of a two-dimensional Dirac equation in presence of an external magnetic field [29], the non-commutative phase space Schrödinger equation [30], and the Schrödinger equation with Harmonic potential in the presence of a magnetic field [31].

The study of NC spaces and their implications in physics is an extremely active area of research. It has been argued in various instances that non-commutativity should be considered as a fundamental feature of space-time at the Planck scale. On the other side, the study of quantum systems in an NC space has been the subject of much interest in past years, assuming that non-commutativity may be, in fact, a result of quantum gravity effects. In these studies, some attention has been paid to the models of NC quantum mechanics (NCQM). The interest in this approach lies on the fact that NCQM is a fruitful theoretical laboratory where we can get some insight on the consequences of non-commutativity in field theory by using standard calculation techniques of quantum mechanics. Various NC field theory models have been discussed as well as many extensions of quantum mechanics. Of particular interest is the so-called phase space non-commutativity, which has been investigated in the context of quantum cosmology, black holes physics, and the singularity problem. This specific formulation is necessary to implement the Bose–Einstein statistics in the context of NCQM (see [32–38]).

In addition, investigating the influence of the minimal length assumption on the energy spectrum of quantum systems has become an interesting issue primarily for two reasons. First, this may help to set some upper bounds on the value of the minimal length. In this context, we can cite some studies of the hydrogen atom and a two dimensional Dirac equation in an external magnetic field. Moreover, the classical limit has also provided some interesting insights into some cosmological problems. Second, it has been argued that quantum mechanics with a minimal length may also be useful to describe non-point-like particles, such as quasi-particles and various collective excitations in solids, or composite particles (see Ref [25] and references therein).

The purpose of this work is to investigate the formulation of a two-dimensional Klein Gordon oscillator (KGO) in the presence of a magnetic field by solving fundamental equations in the framework of relativistic quantum mechanics with minimal length in the NC space. To do this we first mapped the problem in question into a commutative space by using an appropriate transformations. Then, we solved it in the presence of a minimal length.

The paper is organized as follows. In Sec. 2, we solve the KGO in the presence of magnetic field in noncommutative phase space. Then, in Sec. 3, we study this problem in the framework of relativistic quantum mechanics with minimal length. Finally, Sec. 4 will be a conclusion.

2. The solutions within habitual quantum mechanics in NC space

To begin with, we note that the non-commutative phase space is characterized by the fact that their coordinate operators satisfy the equation [33–38]

$$\begin{aligned} [x_\nu^{(NC)}, x_\mu^{(NC)}] &= i\Theta_{\mu\nu}, [p_\mu^{(NC)}, p_\nu^{(NC)}] = 0, \\ [x_\mu^{(NC)}, p_\nu^{(NC)}] &= i\hbar\delta_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (6)$$

where $\Theta_{\mu\nu}$ is an antisymmetric tensor of space dimension. In order to obtain a theory which includes the aspects of being unitary and causal, we choose $\Theta_{0\nu} = 0$, which implies that the time remains as a parameter and the non-commutativity affects only the physical space. The noncommutative models specified by Eq. (1) can be realized in terms of a \star -product: the commutative algebra of functions with the usual product $f(x)g(x)$ is replaced by the \star -product Moyal algebra [37]:

$$(f \star g)(x) = \exp\left[\frac{i}{2}\tilde{\theta}_{ab}\partial_{x_a}\partial_{y_b}\right] f(x)g(y)|_{x=y}. \quad (7)$$

Since the system in which we study is two-dimensional, we limit our analysis to the xy plane, where the noncommutative algebra is written by

$$\begin{aligned} [x_i^{(NC)}, x_j^{(NC)}] &= i\Theta\epsilon_{ij}, [p_i^{(NC)}, p_j^{(NC)}] = 0, \\ [x_i^{(NC)}, p_j^{(NC)}] &= i\hbar\delta_{ij}, (i, j = 1, 2), \end{aligned} \quad (8)$$

where ϵ_{ij} is the two-dimensional Levi-civita tensor. Instead of solving the NC Klein-Gordon equation by using the star product procedure, we use Bopp's shift method, that is, we replace the star product by the usual product by making a Bopp's shift

$$x_i^{(NC)} = x_i - \frac{1}{2\hbar}\Theta_{\mu\nu}\epsilon_{ij}p_j, \quad p_i^{(NC)} = p_i. \quad (9)$$

Hence, in the two dimensional non-commutative phase-space, Eq. (9) becomes

$$\begin{aligned} x^{(NC)} &= x - \frac{\Theta}{2\hbar}p_y, \quad y^{(NC)} = y + \frac{\Theta}{2\hbar}p_x, \quad p_x^{(NC)} \\ &= p_x, \quad p_y^{(NC)} = p_y. \end{aligned} \quad (10)$$

In this case, the two-dimensional Klein-Gordon oscillator, in commutative space, which is written by

$$\left\{ (p_x + im_0\omega x)(p_x - im_0\omega x) + (p_y + im_0\omega y)(p_y - im_0\omega y) - \frac{E^2 - m_0^2c^4}{c^2} \right\} \psi_{KG} = 0, \quad (11)$$

is modified and transformed into

$$\begin{aligned} &\underbrace{(\hat{p}_x + im_0\omega\hat{x})(\hat{p}_x - im_0\omega\hat{x})}_{\cup} \\ &+ \underbrace{(\hat{p}_y + im_0\omega\hat{y})(\hat{p}_y - im_0\omega\hat{y})}_{\cap} \\ &- \frac{E^2 - m_0^2c^4}{c^2} \left. \right\} \psi_{KG} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

with

$$\begin{aligned} \cup &= (p_x + im_0\omega x)(p_x - im_0\omega x) = p_x^2 + m_0^2\omega^2x^2 \\ &+ im_0\omega(xp_x - p_x x) - m_0^2\omega^2\left(\frac{\Theta}{\hbar}\right)xp_y, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \cap &= (p_y + im_0\omega y)(p_y - im_0\omega y) = p_y^2 + m_0^2\omega^2y^2 \\ &+ im_0\omega(yp_y - p_y y) + m_0^2\omega^2\left(\frac{\Theta}{\hbar}\right)yp_x. \end{aligned} \quad (14)$$

Here we have used that

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x - \frac{\Theta}{2\hbar}p_y, \quad \hat{y} = y + \frac{\Theta}{2\hbar}p_x, \\ \hat{p}_x &= p_x, \quad \hat{p}_y = p_y. \end{aligned} \quad (15)$$

In the literature (see Ref [6] and references therein), the upper bound on the value of the coordinate commutator found is $\Theta \leq 4 \times 10^{-40} \text{ m}^2$. So, as an approximation, all terms with the square of Θ have been neglected.

Now, by putting Eqs. (13) and (14) in (12), we obtain

$$\begin{aligned} &\left[p_x^2 + p_y^2 + m_0^2\omega^2(x^2 + y^2) + im_0\omega[x, p_x] \right. \\ &+ im_0\omega[y, p_y] - m_0^2\omega^2\frac{\Theta}{\hbar}(xp_y - yp_x) \\ &\left. - \frac{E^2 - (m_0c^2)^2}{c^2} \right] \Psi_{KG} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

In order to solve the last equation, and for the sake of simplicity, we bring the problem into the momentum space.

Recalling that

$$\hat{x} = i\hbar\frac{\partial}{\partial\hat{p}_x}, \quad \hat{y} = i\hbar\frac{\partial}{\partial\hat{p}_y}, \quad (17)$$

$$\hat{p}_x = p_x, \quad \hat{p}_y = p_y, \quad (18)$$

and when passing onto polar coordinates [9]

$$p_x = p \cos\theta, \quad p_y = p \sin\theta, \quad \text{with } p^2 = p_x^2 + p_y^2, \quad (19)$$

Eqs. (17) and (18) become

$$x = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_x} = i\hbar\left(\cos\theta\frac{d}{dp} - \frac{\sin\theta}{p}\frac{d}{d\theta}\right), \quad (20)$$

$$y = i\hbar\frac{\partial}{\partial p_y} = i\hbar\left(\sin\theta\frac{d}{dp} + \frac{\cos\theta}{p}\frac{d}{d\theta}\right). \quad (21)$$

Putting Eqs. (20) and (21) in Eq. (16), the last equation can be written explicitly in polar coordinates by

$$\begin{aligned} &\left[p^2 - \lambda^2\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) \right. \\ &\left. + m_0^2\omega^2\Theta\left(i\frac{\partial}{\partial\theta}\right) - 2\lambda - \varsigma \right] \Psi_{KG} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

where

$$\lambda = m_0\omega\hbar, \tag{23}$$

$$\varsigma = \frac{E^2 - m_0^2c^4}{c^2}. \tag{24}$$

With the help of the following relation [39]

$$\psi_{KG}(p, \theta) = f(p) e^{i|l|\theta}, \tag{25}$$

Eq. (22) is transformed into

$$\left(\frac{d^2 f(p)}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{df(p)}{dp} - \frac{l^2}{p^2} f(p) \right) + (\kappa^2 - k^2 p^2) f(p) = 0, \tag{26}$$

with

$$\kappa^2 = \frac{m_0^2\omega^2\Theta l + 2\lambda + \varsigma}{\lambda^2}, \quad k^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{27}$$

Now, noting that [39]

$$f(p) = p^{|l|} e^{-\frac{k}{2}p^2} F(p), \tag{28}$$

then the differential equation

$$F'' + \left(\frac{2|l| + 1}{p} - 2kp \right) F' - [2k(|l| + 1) - \kappa^2] F = 0, \tag{29}$$

is transformed into the Kummer equation

$$t \frac{d^2 F}{dt^2} + \{ |l| + 1 - t \} \frac{dF}{dt} - \frac{1}{2} \left\{ |l| + 1 - \frac{\kappa^2}{4k} \right\} F = 0, \tag{30}$$

which by using, instead of p , the variable $xt = kp^2$. The solution of this equation is the confluent series ${}_1F_1(a; |l| + 1; t)$, with

$$a = \frac{1}{2} (|l| + 1) - \frac{\kappa^2}{4k}. \tag{31}$$

The confluent series becomes a polynomial if and only if $a = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Thus, following this, we have the solutions

$$\psi_{KG}(p, \theta) = C_{n, |l|} p^{|l|} e^{-\frac{k}{2}p^2} \times {}_1F_1(-n; |l| + 1; kp^2) e^{i|l|\theta}, \tag{32}$$

$$E_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 2rN - \frac{\omega^2 \Theta}{c^2} l}, \tag{33}$$

with $N = 2n + |l|$ is the principal quantum number, and $r = (\hbar\omega/m_0c^2)$ the parameter that controls the non-relativistic limit.

We can see that the presence of the parameter Θ , in the spectrum of energy, breaks the degeneracy of the energy levels. Furthermore, by taking that $\Theta = 0$, we reach the exact result of the two-dimensional Klein-Gordon oscillator in Minkowski space-time

$$E_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 2rN}. \tag{34}$$

This form of energy is in a good agreement with that obtained in the literature (see Ref. [37]).

3. The solutions in the presence of a minimal length

In the minimal length formalism, the Heisenberg algebra is given by [11–22]

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i\hbar\delta_{ij} (1 + \beta p^2), \tag{35}$$

where $0 < \beta \leq 1$ is minimal length and p is magnitude of the momentum. When the energy is much smaller than the Planck mass, β goes to zero and we recover Heisenberg uncertainty principle.

A representation of \hat{x}_i and \hat{p}_i which satisfies Eq. (35), may be taken as

$$\hat{x} = i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{d}{dp_x}, \quad \hat{p}_x = p_x, \tag{36}$$

$$\hat{y} = i\hbar (1 + \beta p^2) \frac{d}{dp_y}, \quad \hat{p}_y = p_y. \tag{37}$$

By using the Eqs. (36) and (37), Eq. (16) becomes

$$\left[p^2 - \lambda^2 (1 + \beta p^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - 2\lambda (1 + \beta p^2) - 2\lambda^2 (1 + \beta p^2) \beta p \frac{\partial}{\partial p} + (1 + \beta p^2) m_0^2 \omega^2 \Theta \left(i \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \varsigma \right] \Psi_{KG} = 0. \tag{38}$$

Now, when we put that

$$\psi_{KG} = h(p) e^{ij|\theta|}, \tag{39}$$

with $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, the Eq. (38) is transformed into

$$\left\{ -a(p) \frac{\partial^2}{\partial p^2} + b(p) \frac{\partial}{\partial p} + c(p) - \varsigma \right\} h(p) = 0, \tag{40}$$

with

$$\begin{aligned} a(p) &= a(p) = \lambda^2 (1 + \beta p^2)^2, \\ b(p) &= -\frac{\lambda^2 (1 + \beta p^2)^2}{p} - 2\beta \lambda^2 (1 + \beta p^2) p \\ c(p) &= p^2 + \lambda^2 \frac{(1 + \beta p^2)^2 j^2}{p^2} - 2\lambda (1 + \beta p^2) \\ &\quad - (1 + \beta p^2) m_0^2 \omega^2 \Theta j. \end{aligned} \tag{41}$$

In order to solve Eq. (40), we adopt the following substitution as used by Jana *et al.*, [38]

$$h(p) = \rho(p)\varphi(p), \quad q = \int \frac{1}{\sqrt{a(p)}} dp, \quad (42)$$

$$\rho(p) = \exp\left(\int \chi(p) dp\right), \quad \chi(p) = \frac{2b + a'}{4a} = -\frac{1}{2p}. \quad (43)$$

After these substitutions, Eq. (40) becomes

$$\left[-\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + V(p)\right]\varphi(p) = \varsigma\varphi(p), \quad (44)$$

with

$$V(p) = p^2 - 2\lambda(1 + \beta p^2) + \beta\lambda^2(1 + \beta p^2) + \frac{\lambda^2(1 + \beta p^2)^2}{p^2} \left(j^2 - \frac{1}{4}\right) - (1 + \beta p^2)m_0^2\omega^2\Theta j, \quad (45)$$

with $\rho(p) = p^{-1/2}$.

In order to simplify the function $V(p)$, we use the change of variable

$$p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(q\lambda\sqrt{\beta}). \quad (46)$$

In this case, the form $V(p)$ with the new variable q becomes

$$V(q) = -\frac{1}{\beta} + \underbrace{\beta\lambda^2}_{U_0} \times \left(\frac{\frac{1}{\beta^2\lambda^2} - \frac{2}{\beta\lambda} + j^2 + \frac{3}{4} - m_0^2\omega^2\Theta \frac{j}{\beta\lambda^2}}{\cos^2 \alpha q} + \frac{j^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \alpha q}\right). \quad (47)$$

Consequently, the final form of our differential equation is

$$\left\{-\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + \frac{U_0}{2} \times \left(\frac{\frac{1}{\beta^2\lambda^2} - \frac{2}{\beta\lambda} + j^2 + \frac{3}{4} - m_0^2\omega^2\Theta \frac{j}{\beta\lambda^2}}{\cos^2 \alpha q} + \frac{j^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \alpha q}\right)\right\}\varphi(p) = \bar{\varsigma}\varphi(p), \quad (48)$$

where

$$\bar{\varsigma} = \varsigma + \frac{1}{\beta}. \quad (49)$$

Thus, Eq. (48) is brought to

$$\left\{-\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + \frac{U_0}{2} \times \left(\frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\cos^2 \alpha q} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\sin^2 \alpha q}\right)\right\}\varphi(q) = \bar{\varsigma}\varphi(q), \quad (50)$$

with

$$V(q) = -\frac{1}{\beta} + \beta\lambda^2 \left\{\frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)}\right\}, \quad (51)$$

and where

$$\zeta_1(\zeta_1 - 1) = j^2 - \frac{1}{4}, \quad (52)$$

$$\zeta_2(\zeta_2 - 1) = \frac{1}{\beta^2\lambda^2} - \frac{2}{\beta\lambda} + j^2 + \frac{3}{4} - m_0^2\omega^2\Theta \frac{j}{\beta\lambda^2}. \quad (53)$$

Finally, we have

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}U_0 \left\{\frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)}\right\}\right) \times \varphi(q) = \bar{\xi}^2\varphi(q), \quad (54)$$

where $U_0 = \alpha^2$ with $\alpha = \lambda\sqrt{\beta}$.

In this stage, we can see that Eq. (54) is the well-known Schrödinger equation in a Pöschl-Teller potential with the following potential [39]

$$U = \frac{1}{2}U_0 \left\{\frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)}\right\}, \quad (55)$$

and where we have the conditions that $(\zeta_1, \zeta_2) > 1$.

By comparing Eq. (48) with Eq. (54), we obtain

$$\zeta_1 = |j| \pm \frac{1}{2}, \quad (56)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\beta^2\lambda^2} - \frac{2}{\beta\lambda} + j^2 - m_0^2\omega^2\Theta \frac{j}{\beta\lambda^2}\right)} \quad (57)$$

Now, in order to solve Eq. (48), we introduce the new variable

$$z = \sin^2(\alpha q). \quad (58)$$

In this case, Eq. (48) can be rewritten as

$$z(1-z)\varphi'' + \left(\frac{1}{2} - z\right)\varphi' + \frac{1}{4}\left\{\frac{\bar{\xi}^2}{\alpha^2} - \frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{z} - \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{1-z}\right\}\varphi = 0. \quad (59)$$

With the new wave function φ , defined by

$$\varphi = z^{\frac{\zeta_1}{2}}(1-z)^{\frac{\zeta_2}{2}}\Psi(z), \quad (60)$$

we arrive at

$$z(1-z)\Psi'' + \left[\left(\zeta_1 + \frac{1}{2}\right) - z(\zeta_1 + \zeta_2 + 1)\right]\Psi' + \frac{1}{4}\left\{\frac{\bar{\xi}^2}{\alpha^2} - (\zeta_1 + \zeta_2)^2\right\}\Psi = 0. \quad (61)$$

The general solution of this equation is

$$\Psi = C_1 {}_2F_1(a'; b'; c'; z) + C_2 z^{1-c'} {}_2F_1(a' + 1 - c'; b' + 1 - c'; 2 - c'; z), \quad (62)$$

with

$$\begin{aligned}
 a' &= \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \frac{\bar{\xi}}{\alpha} \right), \\
 b' &= \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 - \frac{\bar{\xi}}{\alpha^2} \right), \quad c' = \zeta_1 + \frac{1}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{63}$$

With the condition $a' = -n$, we obtain

$$\bar{\xi}^2 = \alpha^2 (\zeta_1 + \zeta_2 + 2n)^2.
 \tag{64}$$

In order to obtain the energy spectrum, it should be noted that in the limit $\beta \rightarrow 0$, the energy spectrum should regenerate to the no-GUP result.

Thus, the exact form of ζ_1 and ζ_2 are

$$\zeta_1 = |j| + \frac{1}{2},
 \tag{65}$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\beta^2 \lambda^2} - \frac{2}{\beta \lambda} + j^2 - m_0^2 \omega^2 \Theta \frac{j}{\beta \lambda^2} \right)}.
 \tag{66}$$

where $j \neq 0$.

With the aid of Eqs. (56), (57) and (64), we obtain the final form of the spectrum of energy: it is expressed explicitly by

$$E^2 = m_0^2 c^4 \left\{ 1 - \frac{1}{(m_0 c)^2 \beta} + \frac{\beta \lambda^2}{(m_0 c)^2} \left(|j| + 1 + 2n + \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\beta^2 \lambda^2} - \frac{2}{\beta \lambda} + j^2 - m_0^2 \omega^2 \Theta \frac{j}{\beta \lambda^2} \right)} \right)^2 \right\}
 \tag{67}$$

From Eq. (67), the presence of both β and Θ breaks the degeneracy of our spectrum of energy. In addition, the presence of the spectrum of energy with the parameter β , contrarily to the case of Θ , leads to the dependence of the energy levels on n^2 : as mentioned by Nouicer [27], this dependence on n^2 is a feature of hard confinement. Finally, in the limit where $\beta \rightarrow 0$, we reach the following equation

$$E_n = \pm m_0 c^2 \sqrt{1 + 2rN - \frac{\omega^2 \Theta}{c^2} l},
 \tag{68}$$

which has the same form as the Eq. (33). The corresponding wave function is

$$\psi_{KG} = N_{\text{norm}} e^{i|j|\theta} p^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{\zeta_1}{2}} (1-z)^{\frac{\zeta_2}{2}} {}_2F_1(-n; b'; c'; z).
 \tag{69}$$

with N_{norm} is the constant of normalization.

4. The solutions in the presence of a magnetic field

In a magnetic field, when we choose the potential vectors as

$$\mathbf{A} = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0 \right),
 \tag{70}$$

the two-dimensional Klein-Gordon oscillator in non-commutative space is

$$\left[\left(\hat{p}_x - \frac{eA_x}{c} + im_0\omega\hat{x} \right) \left(\hat{p}_x - \frac{eA_x}{c} - im_0\omega\hat{x} \right) + \left(\hat{p}_y - \frac{eA_y}{c} + im_0\omega\hat{y} \right) \left(\hat{p}_y - \frac{eA_y}{c} - im_0\omega\hat{y} \right) - \frac{E^2 - (m_0c^2)^2}{c^2} \right] \Psi_{KG} = 0
 \tag{71}$$

or in the explicit form as

$$\left[\underbrace{\left(\hat{p}_x + \frac{eB}{2c}\hat{y} + im_0\omega\hat{x} \right) \left(\hat{p}_x + \frac{eB}{2c}\hat{y} - im_0\omega\hat{x} \right)}_{\square} + \underbrace{\left(\hat{p}_y - \frac{eB}{2c}\hat{x} + im_0\omega\hat{y} \right) \left(\hat{p}_y - \frac{eB}{2c}\hat{x} - im_0\omega\hat{y} \right)}_{\square} - \frac{E^2 - (m_0c^2)^2}{c^2} \right] \Psi_{KG} = 0.
 \tag{72}$$

By using Bopp's shift method, Eq. (72) is transformed into

$$\left\{ \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c} \right)^2 (p_x^2 + p_y^2) + \left(m_0^2 \omega^2 + \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 \right) (x^2 + y^2) + im_0\omega \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c} \right) [x, p_x] + \right.$$

$$+im_0\omega \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c}\right) [y, p_y] - \left\{ \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right) \frac{eB}{c} + m_0^2\omega^2 \frac{\Theta}{\hbar} \right\} \underbrace{(xp_y - yp_x)}_{L_z} - \frac{E^2 - (m_0c^2)^2}{c^2} \Big\} \Psi_{KG} = 0. \tag{73}$$

Putting Eqs. (36), (37) and (39) in (73), we obtain

$$\left\{ \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)^2 p^2 - \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right) (1 + \beta p^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} - \frac{j^2}{p^2}\right) - 2 \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right) (1 + \beta p^2) \beta p \frac{\partial}{\partial p} \right. \\ \left. - 2\lambda (1 + \beta p^2) \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c}\right) - (1 + \beta p^2) \left\{ \hbar \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right) \frac{eB}{c} + m_0^2\omega^2 \Theta \right\} |j| - \zeta^2 \right\} \Psi_{KG} = 0. \tag{74}$$

with $\zeta^2 = (E^2 - (m_0c^2)^2)/c^2$. Following the same procedure as in the above section, we have

$$\left[-\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + V(p)\right] \varphi(p) = \zeta'\varphi(p), \tag{75}$$

or with the new variable q ,

$$\left\{-\frac{d^2\varphi(q)}{dq^2} + \frac{U_0}{2} \left(\frac{\zeta'_1(\zeta'_1 - 1)}{\cos^2 \alpha q} + \frac{\zeta'_2(\zeta'_2 - 1)}{\sin^2 \alpha q}\right)\right\} \varphi(q) = \zeta'\varphi(q).$$

In this case, the form of V is

$$V(p) = \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)^2 p^2 + \left\{ \lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2 \right\} (1 + \beta p^2)^2 \frac{1}{p^2} \left(j^2 - \frac{1}{4}\right) \\ - 2\lambda (1 + \beta p^2) \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c}\right) - \hbar (1 + \beta p^2) \left\{ \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right) \frac{eB}{c} + m_0^2\omega^2 \Theta \right\} |j| + \left\{ \lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2 \right\} (1 + \beta p^2) \beta,$$

or with the variable q

$$V(q) = -\frac{1}{\beta} + \beta\lambda^2 \left\{ \frac{\zeta'_1(\zeta'_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta'_2(\zeta'_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)} \right\},$$

where ζ'_1 and ζ'_2 are defined by

$$\zeta'_1(\zeta'_1 - 1) = j^2 - \frac{1}{4}, \tag{76}$$

$$\zeta'_2(\zeta'_2 - 1) = \frac{\left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)^2}{\beta^2 \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} + \left(j^2 + \frac{3}{4}\right) - \frac{2\lambda \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c}\right)}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} - \frac{\left\{ \hbar \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right) \frac{eB}{c} + m_0^2\omega^2 \Theta \right\} |j|}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)}. \tag{77}$$

Finally, our differential equation can be written as

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}U_0 \left\{ \frac{\zeta'_1(\zeta'_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta'_2(\zeta'_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)} \right\}\right) \varphi(q) = \bar{\zeta}'^2 \varphi(q), \tag{78}$$

where $U_0 = \alpha^2$ and $\bar{\zeta}'^2 = \zeta'^2 + (1 + [eB\Theta/4\hbar c])^2 (1/\beta)$ with $\alpha = \sqrt{\beta(\lambda^2 + \hbar^2[eB/2c]^2)}$.

As in the above case, Eq. (78) is the well-known Schrödinger equation in a Pöschl-Teller potential [39]. with the constraint that $(\zeta'_1, \zeta'_2) > 1$, the exact form of ζ_1 and ζ_2 are

$$\zeta'_1 = |j| + \frac{1}{2}, \tag{79}$$

$$\zeta'_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{\left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)^2}{\beta^2 \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} + j^2 - \frac{2\lambda \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c}\right)}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} - \frac{\left\{ \hbar \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right) \frac{eB}{c} + m_0^2\omega^2 \Theta \right\} |j|}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)}\right)}. \tag{80}$$

So, the general solution of Eq. (78) is

$$\Psi = C_1 {}_2F_1(a'; b'; c'; z) + C_2 z^{1-c} {}_2F_1(a' + 1 - c'; b' + 1 - c'; 2 - c; z), \tag{81}$$

with $z = \sin^2(\alpha q)$ and where

$$a' = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \frac{\bar{\xi}}{\alpha} \right), \quad b' = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 - \frac{\bar{\xi}}{\alpha^2} \right), \quad c' = \zeta_1 + \frac{1}{2}. \tag{82}$$

With the condition $a' = -n$, and by using Eq. (64), we obtain.

$$\bar{\xi}^2 = \beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c} \right)^2 \right) (\zeta_1 + \zeta_2 + 2n)^2 = \frac{E^2 - (m_0c^2)^2}{c^2} + \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c} \right)^2 \frac{1}{\beta}. \tag{83}$$

Now, from Eq. (83) the final form of the spectrum of energy is

$$E_n = \pm m_0c^2 \sqrt{1 - \frac{\left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)^2}{(m_0c)^2 \beta} + \frac{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)}{(m_0c)^2} \{|j| + 1 + 2n + \Xi'\}^2}, \tag{84}$$

with

$$\Xi' = \sqrt{\left(1 + \frac{\left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right)^2}{\beta^2 \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} + j^2 - \frac{2\lambda \left(1 + \frac{eB\Theta}{2\hbar c}\right)}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)} - \frac{\left\{\hbar \left(1 + \frac{eB\Theta}{4\hbar c}\right) \frac{eB}{c} + m_0^2 \omega^2 \Theta\right\} |j|}{\beta \left(\lambda^2 + \hbar^2 \left(\frac{eB}{2c}\right)^2\right)}\right)} \tag{85}$$

Also, we can see that the presence of both parameters β and Θ with a magnetic field breaks the degeneracy of the spectrum of energy. In addition, the presence of a term on n^2 shows the existence of hard confinement. This dependence is only clear when we introduce minimal length in the problem in question.

Finally, the corresponding wave function is

$$\psi_{KG} = N_{\text{norm}} e^{i|j|\theta} p^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{\zeta_1}{2}} (1-z)^{\frac{\zeta_2}{2}} \times F_1(-n; b'; c'; z). \tag{86}$$

with N_{norm} the constant of normalization.

Now, to achieve a deeper understanding of our spectrum of energy presented by Eq. (84), we have plotted the variation of the positive energy E with quantum number n and magnetic field B for different various situations. As the spectrum of energy is symmetric, any comments on the case of the positive energy can be extended to the case of the negative energy.

Figure 1 shows the behavior of the spectrum of energy versus n by changing the three parameters appearing in the expression for the energy spectrum, *i.e.*, the magnetic field B , the NC parameter θ and the minimal length β . This figure has been depicted for two cases: $j = 0$ and $j = 1$. Here, three remarks can be made

- When varying only the magnetic field, one observes that the allure of the spectrum of energy tends to become linear in the high magnetic field regime.

- From the variation of β only, we can see that for each value of β we have two regions: first region, the values of the energy are zero until a specific number where the spectrum begin grows. According to this figure, this specific number depends inversely with β .

- Now, when varying θ , we see that all curves coincide.

In Fig. 2, we represent the variation of the positive energy levels with magnetic field for four levels $n = 0, 1, 2, 3$. For each level of energy, we have chosen $j = 0, 1, 2, 3$. With the exception of the case $j = 0$, every curve show approximately a linear form with a magnetic field B .

Finally, in order to show that the problem in question has relevance from a physical point of view, we make the following remarks. Firstly, we can mention some studies that showed the existence of a close relation between graphene and the Dirac oscillator model. [6, 40–42].

Bastos *et al.*, [33] consider a non-commutative description of graphene. This description consists of a Dirac equation for massless Dirac fermions plus non-commutative corrections, which are treated in the presence of an external magnetic field. They argue that, being a two-dimensional Dirac system, graphene is particularly interesting to test non-commutativity. They find that momentum non-commutativity affects the energy levels of graphene and they obtain a bound for the momentum non-commutative parameter. Their results show that momentum non-commutativity yields interesting results

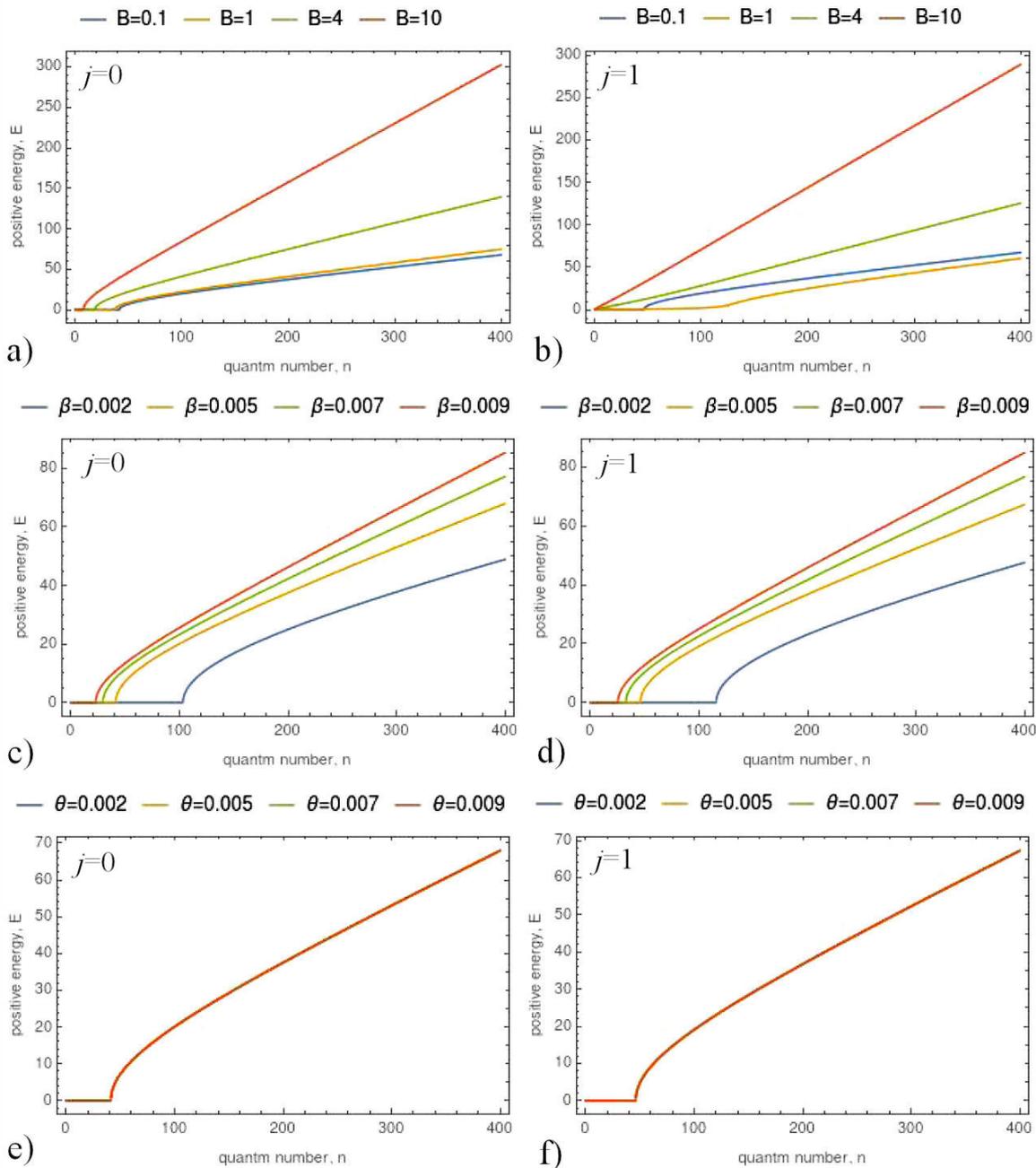


FIGURE 1. The positive energy eigenvalues as a function of the quantum number n . a, b) Variation with respect of B for fixed value of $\theta = 0.00$ and $\beta = 0.005$; c, d) variation with respect of β for fixed values of $B =$ and $\theta = 0.005$; e, f) variation with respect of θ for fixed value of $B = 0.1$ and $\beta = 0.005$.

also at low-energies and that its implications are not restricted to quantum cosmology and black holes physics.

In the same context, Falomir *et al.* [43] employ a simple nonrelativistic model to describe the low-energy excitation of graphene. The model is based on a deformation of the Heisenberg algebra which makes the commutator of momenta proportional to the pseudo-spin. As a result, the resulting Hall conductivity is consistent with the anomalous integer quantum Hall effect found in graphene.

Jallel [44] describes the lattice deformation in graphene under strain effect by considering the spacial-moment coordinates do not commute. Within such framework, he (i) build a new model describing Dirac fermions interacting with an external source that is non commutative parameter dependent, and (ii) the eigenvalues are showing Landau levels in similar way to the case of a real magnetic field applied to graphene.

Iorio and Pais [45], in their paper “Generalized uncertainty principle in graphene” showed that, by going beyond

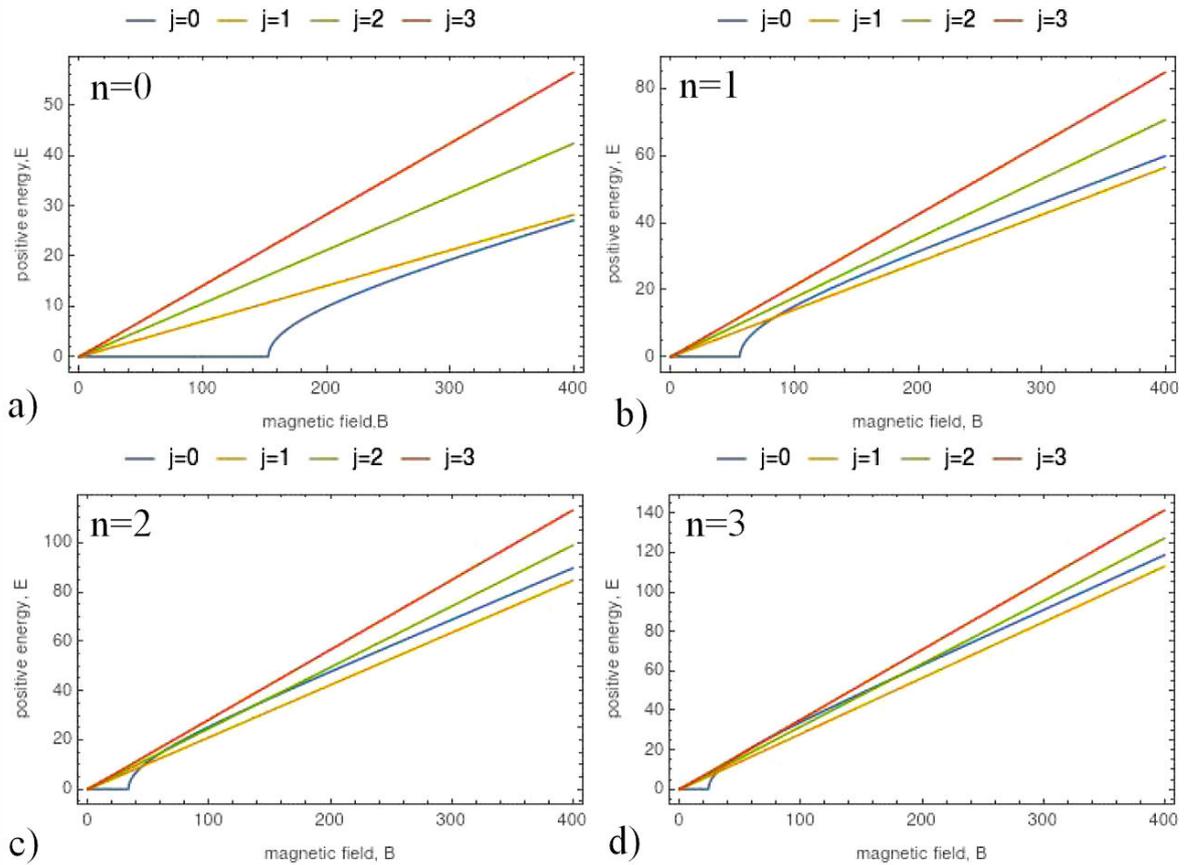


FIGURE 2. The positive energy eigenvalues as a function of the magnetic field B for $n = 0, 1, 2, 3$.

the low-energy approximation for which the dispersion relations of graphene are linear, the corresponding emergent field theory is a specific generalization a Dirac field theory. The generalized Dirac Hamiltonians one obtains are those compatible with specific generalizations of the uncertainty principle. They also comment on the compatibility of the latter with non-commuting positions, and on their possible physical realization.

Thus, following these works and maybe others which are not cited here, we can expect that our study can be regarded as a contribution to the case of graphene by introducing the minimal length in the commutations rules of Heisenberg.

5. Conclusion

In this paper, we have exactly solved the KGO in two dimensions in the presence of an external magnetic field in the framework of relativistic quantum mechanics with minimal length and in the NC space. Firstly, by adopting the same procedure used by Menculini *et al.* [9], we have solved the problem only in the case of non-commutative space. The results found are in good agreement with those obtained in the literature. After that, we have introduced the minimal

length in the problem in question. This introduction has been making as follows: (i) we write the coordinates of the non-commutative space with those in commutative space by using the Bopp shift approximation, and (ii) then we introduce the minimal length in our equation. By these, the problem in question is identified with a Pöschl-Teller potential.

The eigensolutions of the problem in question in a magnetic field are obtained in the presence of a minimal length in non-commutative space. The dependence on these eigensolutions with the minimum length and the non-commutative parameters is very clear. Furthermore, by comparing the spectrum of energy obtained in our case with those of the same problem in the flat space-time, we can see that the presence of both parameters breaks the degeneracy of the spectrum of energy. In addition, the presence of a term on n^2 in the form of the spectrum of energy shows the existence of hard confinement. This dependence is only clear when we introduce minimal length in the problem in question. Finally, In the limit where $\beta \rightarrow 0$ and $\Theta \rightarrow 0$ tend to zero, we recover well the results obtained in the literature.

1. M. Moshinsky and A. Szczepaniak, The Dirac oscillator, *J. Phys. A* **22** (1989) L817, <https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/17/002>.
2. D. Itô, K. Mori, and E. Carriere, An example of dynamical systems with linear trajectory, *Nuovo Cimento A* **51** (1967) 1119, <https://doi.org/10.1007/BF02721775>.
3. R. P. Martínez-y-Romero and A. L. Salas-Brito, Conformal invariance in a Dirac oscillator, *J. Math. Phys.* **33** (1992) 1831, <https://doi.org/10.1063/1.529660>.
4. M. Moreno and A. Zentella, Covariance, CPT and the Foldy-Wouthuysen transformation for the Dirac oscillator, *J. Phys. A* **22** (1989) L821, <https://doi.org/10.1088/0305-4470/22/17/003>.
5. J. Benítez, R. P. Martínez y Romero, H. N. Nuéz-Yépez, and A. L. Salas-Brito, Solution and hidden supersymmetry of a Dirac oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990) 1643, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.1643>.
6. A. Boumali and H. Hassanabadi, The thermal properties of a two-dimensional Dirac oscillator under an external magnetic field, *Eur. Phys. J. Plus* **128** (2013) 124, <https://doi.org/10.1140/epjp/i2013-13124-y>.
7. J. A. Franco-Villafañe *et al.*, First Experimental Realization of the Dirac Oscillator, *Phys. Rev. Lett.* **111** (2013) 170405, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.111.170405>.
8. J. Yang and J. Piekarewicz, Dirac oscillator: An alternative basis for nuclear structure calculations, *Phys. Rev. C* **102** (2020) 054308, <https://doi.org/10.1103/PhysRevC.102.054308>.
9. L. Menculini, O. Panella, and P. Roy, Exact solutions of the (2+1) dimensional Dirac equation in a constant magnetic field in the presence of a minimal length, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 065017, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.87.065017>.
10. A. Kempf, Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry, *J. Math. Phys.* **35** (1994) 4483, <https://doi.org/10.1063/1.530798>.
11. A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation, *Phys. Rev. D* **52** (1995) 1108, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.52.1108>.
12. H. Hinrichsen and A. Kempf, Maximal localization in the presence of minimal uncertainties in positions and in momenta, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 2121, <https://doi.org/10.1063/1.531501>.
13. I. Saavedra and C. Ultreras, A generalization of quantum mechanics for high energies and quark physics, *Phys. Lett. B* **98** (1981) 74, [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(81\)90371-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(81)90371-3).
14. M. Maziashvili and L. Megreldze, Minimum-length deformed quantum mechanics/quantum field theory, issues, and problems, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2013** (2013) 123B06, <https://doi.org/10.1093/ptep/ptt107>.
15. A. Boumali, L. Chetouani, and H. Hassanabadi, Effects of the minimal length on the thermal properties of a two-dimensional Dirac oscillator, *Acta Phys. Pol. B* **47** (2016) 2067.
16. L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Exact solution of the harmonic oscillator in arbitrary dimensions with minimal length uncertainty relations, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 125027, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.125027>.
17. L. N. Chang, D. Minic, N. Okamura, and T. Takeuchi, Effect of the minimal length uncertainty relation on the density of states and the cosmological constant problem, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 125028, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.65.125028>.
18. S. Benczik *et al.*, Short distance versus long distance physics: The classical limit of the minimal length uncertainty relation, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 026003, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.66.026003>.
19. A. Kempf, Non-pointlike particles in harmonic oscillators, *J. Phys. A* **30** (1997) 2093, <https://doi.org/10.1088/0305-4470/30/6/030>.
20. T. K. Jana and P. Roy, Non-Hermitian Quantum Mechanics with Minimal Length Uncertainty, *Symmetry Integr. Geom.* **5** (2009) 083, <https://doi.org/10.3842/SIGMA.2009.083>.
21. B. Bagchi and A. Fring, Minimal length in quantum mechanics and non-Hermitian Hamiltonian systems, *Phys. Lett. A* **373** (2009) 4307, <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.09.054>.
22. Y. Chargui and A. Trabelsi, Path integral treatment of the one-dimensional Klein-Gordon oscillator with minimal length, *Phys. Scr.* **84** (2011) 045019, <https://doi.org/10.1088/0031-8949/84/04/045019>.
23. P. Gaete and E. Spallucci, The Abelian Higgs model and a minimal length in an unparticle scenario, *EPL* **105** (2014) 21002, <https://doi.org/10.1209/0295-5075/105/21002>.
24. B. Vakili and M. A. Gorji, Thermostatistics with minimal length uncertainty relation, *J. Stat. Mech.* **2012** (2012) P10013, <https://doi.org/10.1088/1742-5468/2012/10/P10013>.
25. P. Pedram, One-dimensional hydrogen atom with minimal length uncertainty and maximal momentum, *EPL* **101** (2013) 30005, <https://doi.org/10.1209/0295-5075/101/30005>.
26. Kh. Nouicer, Casimir effect in the presence of minimal lengths, *J. Phys. A* **38** (2005) 10027, <https://doi.org/10.1088/0305-4470/38/46/009>.
27. Kh. Nouicer, Effect of minimal lengths on electron magnetism, *J. Phys. A* **40** (2007) 2125, <https://doi.org/10.1088/1751-8113/40/9/017>.
28. Kh. Nouicer, An exact solution of the one-dimensional Dirac oscillator in the presence of minimal lengths, *J. Phys. A* **39** (2006) 5125, <https://doi.org/10.1088/0305-4470/39/18/025>.
29. M. Betrouche, M. Maamache, and J. R. Choi, Three-Dimensional Dirac Oscillator with Minimal Length: Novel Phenomena for Quantized Energy, *Adv. High Energy Phys.* **2013** (2013) 383957, <https://doi.org/10.1155/2013/383957>.

30. H. Hassanabadi, Z. Molaee, and S. Zarrinkamar, Noncommutative Phase Space Schrödinger Equation with Minimal Length, *Adv. High Energy Phys.* **2014** (2014) 459345, <https://doi.org/10.1155/2013/383957>.
31. H. Hassanabadi, E. Maghsoodi, A. N. Ikot, and S. Zarrinkamar, Minimal Length Schrödinger Equation with Harmonic Potential in the Presence of a Magnetic Field, *Adv. High Energy Phys.* **2013** (2013) 923686, <https://doi.org/10.1155/2013/923686>.
32. O. Bertolami and R. Queiroz, Phase-space noncommutativity and the Dirac equation, *Phys. Lett. A* **375** (2011) 4116, <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.09.053>.
33. C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, and J. N. Prate, Noncommutative graphene, *Int. J. Mod. Phys. A* **28** (2013) 1350064, <https://doi.org/10.1142/S0217751X13500644>.
34. C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, and J. N. Prata, Weyl-Wigner formulation of noncommutative quantum mechanics, *J. Math. Phys.* **49** (2008) 072101, <https://doi.org/10.1063/1.2944996>.
35. C. Bastos, N. C. Dias, and J. N. Prate, Wigner Measures in Noncommutative Quantum Mechanics, *Commun. Math. Phys.* **299** (2010) 709, <https://doi.org/10.1007/s00220-010-1109-5>.
36. O. Bertolami *et al.*, Noncommutative gravitational quantum well, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 025010, <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.72.025010>.
37. B. Mirza and M. Mohadesi, The Klein-Gordon and the Dirac Oscillators in a Noncommutative Space, *Commun. Theor. Phys.* **42** (2004) 664, <https://doi.org/10.1088/0253-6102/42/5/664>.
38. T. K. Jana and P. Roy, Exact solution of the Klein-Gordon equation in the presence of a minimal length, *Phys. Lett. A* **373** (2009) 1239, <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.02.007>.
39. S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 1974), <https://doi.org/10.1007/978-3-642-61995-3>.
40. C. Quimbay and P. Strange, arXiv:1311.2021 (2013).
41. C. Quimbay and P. Strange, arXiv:1312.5251 (2013).
42. A. Boumali, Thermodynamic properties of the graphene in a magnetic field via the two-dimensional Dirac oscillator, *Phys. Scr.* **90** (2015) 045702, <https://doi.org/10.1088/0031-8949/90/4/045702>.
43. H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, and M. Nieto, Graphene and non-Abelian quantization, *J. Phys. A* **45** (2012) 135308, <https://doi.org/10.1088/1751-8113/45/13/135308>.
44. A. Jellal, Measuring space deformation via graphene under constraints, *Phys. Lett. A* **385** (2021) 126964, <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2020.126964>.
45. A. Iorio and P. Pais, Generalized uncertainty principle in graphene, *J. Phys.: Conf. Ser.* **1275** (2019) 012061, <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1275/1/012061>.

Two-Dimensional Klein–Gordon Oscillator in the Presence of a Minimal Length¹

A. Boumali^{a,*} and Z. Selama^{a,**}

^aLaboratoire de Physique Appliquée et Théorique, Université Larbi-Tébessi, Tébessa, Algeria

*e-mail: boumali.abdelmalek@gmail.com

**e-mail: zinaslama@gmail.com

Received February 4, 2018

Abstract—Minimal length of a two-dimensional Klein–Gordon oscillator is investigated and illustrates the wave functions in the momentum space. The eigensolutions are found and the system is mapping to the well-known Schrödinger equation in a Pöschl–Teller potential.

DOI: 10.1134/S1547477118050047

1. INTRODUCTION

Recently, there have been growing interest in obtaining exact solutions of relativistic wave equations. In particular exact solutions of the Klein–Gordon equation with various vector and scalar potentials.

The Dirac relativistic oscillator is an important potential both for theory and application. It was for the first time studied by Ito et al. [1]. They considered a Dirac equation in which the momentum \vec{p} is replaced by $\vec{p} - im\beta\omega\vec{r}$, with \vec{r} being the position vector, m the mass of particle, and ω the frequency of the oscillator. The interest in the problem was revived by Moshinsky and Szczepaniak [2], who gave it the name of Dirac oscillator (DO) because, in the non-relativistic limit, it becomes a harmonic oscillator with a very strong spin-orbit coupling term. Physically, it can be shown that the (DO) interaction is a physical system, which can be interpreted as the interaction of the anomalous magnetic moment with a linear electric field [3, 4]. The electromagnetic potential associated with the DO has been found by Benitez et al. [5]. The Dirac oscillator has attracted a lot of interest both because it provides one of the examples of the Dirac's equation exact solvability and because of its numerous physical applications (see [6] and reference therein). Recently, Franco-Villafane et al. [7] exposed the proposal of the first experimental microwave realization of the one-dimensional DO. The experiment relies on a relation of the DO to a corresponding tight-binding system. The experimental results obtained, concerning the spectrum of the one-dimensional DO with and without the mass term, are in good agreement with those obtained in the theory. In addition, Quimbay et al. [8, 9] show that the Dirac oscillator can describe a

naturally occurring physical system. Specifically, the case of a two-dimensional Dirac oscillator can be used to describe the dynamics of the charge carriers in graphene, and hence its electronic properties. Also, the exact mapping of the DO in the presence of a magnetic field with a quantum optics leads to consider the DO as a theory of an open quantum systems coupled to a thermal bath (see [6] and references therein).

The unification between the general theory of relativity and the quantum mechanics is one of the most important problems in theoretical physics. This unification predicts the existence of a minimal measurable length on the order of the Planck length. All approaches of quantum gravity show the idea that near the Planck scale, the standard Heisenberg uncertainty principle should be reformulated. The minimal length uncertainty relation has appeared in the context of the string theory, where it is a consequence of the fact that the string cannot probe distances smaller than the string scale $\hbar\sqrt{\beta}$, where β is a small positive parameter called the deformation parameter. This minimal length can be introduced as an additional uncertainty in position measurement, so that the usual canonical commutation relation between position and momentum operators becomes $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar(1 + \beta p^2)$. This commutation relation leads to the standard Heisenberg uncertainty relation $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} \geq i\hbar(1 + \beta(\Delta p)^2)$, which clearly implies the existence of a non-zero minimal length $\Delta x_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}$. This modification of the uncertainty relation is usually termed the generalized uncertainty principle (GUP) or the minimal length uncertainty principle [11–14].

Nowadays, the reconsideration of the relativistic quantum mechanics in the presence of a minimal

¹ The article is published in the original.

measurable length have been studied extensively. In this context, many papers were published where a different quantum system in space with Heisenberg algebra was studied. They are: the Abelian Higgs model [15], the thermostatics with minimal length [16], the one-dimensional Hydrogen atom [17], the casimir effect in minimal length theories [18], the effect of minimal lengths on electron magnetism [19], the Dirac oscillator in one and three dimensions [20, 21], the solutions of a two-dimensional Dirac equation in presence of an external magnetic field [22], the non-commutative phase space Schrödinger equation [23], Schrödinger equation with Harmonic potential in the presence of a Magnetic Field [24].

The purpose of this work is to investigate the formulation of a two-dimensional Klein–Gordon oscillator by solving fundamental equations in the framework of relativistic quantum mechanics with minimal length. The problem describes a relativistic particle moving in the relativistic harmonic oscillator called the Dirac oscillator.

The paper is organized as follows. In Section II, we exposed the solutions of our problem within habitual quantum mechanics, using the new method developed by Menculini et al. [10] and Jana et al. [25]. Then, Section III will be devoted to the our case, i.e., the solution of a two dimensional Klein–Gordon oscillator in the framework of relativistic quantum mechanics with minimal length. Finally, in Section V, we present the conclusion.

2. THE SOLUTIONS WITHIN HABITUAL QUANTUM MECHANICS

A two-dimensional Klein–Gordon oscillator is

$$\left\{ \underbrace{(p_x + im_0\omega x)(p_x - im_0\omega x)}_{\cup} + \underbrace{(p_y + im_0\omega y)(p_y - im_0\omega y)}_{\cap} - \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2} \right\} \Psi_{KG} = 0, \tag{1}$$

with

$$\cup = (p_x + im_0\omega x)(p_x - im_0\omega x) = p_x^2 + m_0^2\omega^2 x^2 - m_0\omega\hbar, \tag{2}$$

$$\cap = (p_y + im_0\omega y)(p_y - im_0\omega y) = p_y^2 + m_0^2\omega^2 y^2 - m_0\omega\hbar. \tag{3}$$

Now, for the sake of simplicity, we bring the problem into the momentum space. Recalling that

$$x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x}, \quad y = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y}, \tag{4}$$

$$\hat{p}_x = p_x, \quad \hat{p}_y = p_y, \tag{5}$$

and passing onto polar coordinates with the following definition [10]

$$p_x = p \cos \theta, \quad p_y = p \sin \theta, \tag{6}$$

with $p^2 = p_x^2 + p_y^2,$

$$\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_x} = i\hbar \left(\cos \theta \frac{d}{dp} - \frac{\sin \theta}{p} \frac{d}{d\theta} \right), \tag{7}$$

$$\hat{y} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_y} = i\hbar \left(\sin \theta \frac{d}{dp} + \frac{\cos \theta}{p} \frac{d}{d\theta} \right), \tag{8}$$

Equations (2) and (3) transform into

$$\cup = p^2 \cos^2 \theta - m_0^2\omega^2\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} - \hbar m_0\omega, \tag{9}$$

$$\cap = p^2 \sin^2 \theta - m_0^2\omega^2\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} - \hbar m_0\omega. \tag{10}$$

In this case, Eq. (1) becomes

$$\left(p^2 - m_0^2\omega^2\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} \right) - 2\hbar m_0\omega - \zeta \right) \Psi_{KG} = 0. \tag{11}$$

By using Eqs. (6), (7) and (8), we have

$$\frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial p_y^2} = \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p}, \tag{12}$$

and consequently, we obtain

$$\left\{ p^2 - \lambda^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) - 2\lambda - \zeta \right\} \Psi_{KG} = 0, \tag{13}$$

with $\lambda = m\omega\hbar$ and

$$\zeta = \frac{E^2 - m_0^2 c^4}{c^2}. \tag{14}$$

Now, when we choose

$$\Psi_{KG}(p, \theta) = f(p) e^{i|\ell|\theta}, \tag{15}$$

Equation (13) is transformed into

$$\left(\frac{d^2 f(p)}{dp^2} + \frac{1}{p} \frac{df(p)}{dp} - \frac{l^2}{p^2} f(p) \right) + (\kappa^2 - k^2 p^2) f(p) = 0, \tag{16}$$

with

$$\kappa^2 = \frac{2\lambda + \zeta}{\lambda^2}, \quad k^2 = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{17}$$

Now, putting [25]

$$f(p) = p^{|\ell|} e^{-\frac{k}{2} p^2} F(p), \tag{18}$$

the differential equation

$$F'' + \left(\frac{2|\ell| + 1}{p} - 2kp \right) F' - [2k(|\ell| + 1) - \kappa^2] F = 0, \tag{19}$$

is obtained for $F(p)$ which by using, instead of p , the variable $xt = kp^2$, is transformed into the Kummer equation

$$t \frac{d^2 F}{dt^2} + \{|l| + 1 - t\} \frac{dF}{dt} - \frac{1}{2} \left\{ |l| + 1 - \frac{\kappa^2}{4k} \right\} F = 0, \quad (20)$$

whose solution is the confluent series ${}_1F_1(a; |l| + 1; t)$, with

$$a = \frac{1}{2} (|l| + 1) - \frac{\kappa^2}{4k}. \quad (21)$$

The confluent series becomes a polynomial if and only if $a = -n$, ($n = 0, 1, 2, \dots$). We then have the solutions

$$\Psi_{KG}(p, \theta) = C_{n, |l|} p^{|l|} e^{-\frac{\kappa^2 p^2}{2}} {}_1F_1(-n; |l| + 1; kp^2) e^{i|l|\theta}, \quad (22)$$

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2rN}. \quad (23)$$

with $N = 2n + |l|$ is the principal quantum number, and $r = \frac{\hbar\omega}{m_0 c^2}$. This form of energy is in a good agreement with that obtained in the [11].

3. THE SOLUTIONS IN THE PRESENCE OF A MINIMAL LENGTH

In the minimal length formalism, the Heisenberg algebra is given by [12–24]

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i\hbar\delta_{ij}(1 + \beta p^2), \quad (24)$$

where $\beta > 0$ is the minimal length parameter. A representation of \hat{x}_i and \hat{p}_i which satisfies Eq. (24), may be taken as

$$\hat{x} = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{d}{dp_x}, \quad \hat{p}_x = p_x, \quad (25)$$

$$\hat{y} = i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{d}{dp_y}, \quad \hat{p}_y = p_y. \quad (26)$$

In this case, the KG oscillator equation is

$$\{p_x^2 + p_y^2 + m^2\omega^2(x^2 + y^2) + im\omega[x, p_x] + im\omega[y, p_y] - \zeta\} \Psi_{KG} = 0. \quad (27)$$

By using the Eqs. (25) and (26), Eq. (27) becomes

$$\left\{ p^2 - \lambda^2(1 + \beta p^2)^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial}{\partial p} \right) - 2\beta\lambda^2(1 + \beta p^2)^2 p \frac{\partial}{\partial p} - 2\lambda(1 + \beta p^2) - \zeta \right\} \Psi_{KG} = 0. \quad (28)$$

Now, when we put that

$$\Psi_{KG} = h(p) e^{i|l|\theta}, \quad (29)$$

with $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, then Eq. (28) transformed into

$$\left\{ -a(p) \frac{\partial^2}{\partial p^2} + b(p) \frac{\partial}{\partial p} + c(p) - \zeta \right\} h(p) = 0, \quad (30)$$

with

$$\begin{aligned} a(p) &= \lambda^2(1 + \beta p^2)^2, \\ b(p) &= -\frac{\lambda^2(1 + \beta p^2)^2}{p} - 2\beta\lambda^2(1 + \beta p^2)p \\ &= -\frac{a}{p} - 2\beta\lambda\sqrt{ap}, \\ c(p) &= p^2 + \frac{j^2\lambda^2(1 + \beta p^2)^2}{p^2} - 2\lambda(1 + \beta p^2) \\ &= p^2 + j^2 \frac{a}{p^2} - 2\sqrt{a}. \end{aligned} \quad (31)$$

Now, according to the following substitution [25]

$$h(p) = \rho(p)\varphi(p), \quad q = \int \frac{1}{\sqrt{a(p)}} dp, \quad (32)$$

$$\rho(p) = \exp\left(\int \chi(p) dp\right), \quad \chi(p) = \frac{2b + a'}{4a} = -\frac{1}{2p}, \quad (33)$$

we have

$$\left[-\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + V(p) \right] \varphi(p) = \zeta\varphi(p), \quad (34)$$

with

$$\begin{aligned} V(p) &= p^2 - 2\lambda(1 + \beta p^2) \\ &+ \beta\lambda^2(1 + \beta p^2) + \frac{\lambda^2(1 + \beta p^2)^2}{p^2} \left(j^2 - \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \quad (35)$$

We note here that the function $\rho(p) = p^{-\frac{1}{2}}$.

Now, if we put

$$p = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan(q\lambda\sqrt{\beta}), \quad (36)$$

the term $V(p)$ becomes

$$V(p) = -\frac{1}{\beta} + \frac{\beta\lambda^2}{\underbrace{U_0}} \left(\frac{j^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{\beta\lambda} + \frac{1}{\beta^2\lambda^2}}{\cos^2 \alpha q} + \frac{j^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \alpha q} \right), \quad (37)$$

and consequently, the final form of our differential equation is

$$\left\{ -\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + \frac{U_0}{2} \left(\frac{j^2 + \frac{3}{4} - \frac{2}{\beta\lambda} + \frac{1}{\beta^2\lambda^2}}{\cos^2 \alpha q} + \frac{j^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \alpha q} \right) \right\} \varphi(p) = \bar{\zeta}\varphi(p), \quad (38)$$

where $\bar{\zeta} = \zeta + \frac{1}{\beta}$. Equation (38) brings into

$$\left\{ -\frac{d^2\varphi(p)}{dq^2} + \frac{U_0}{2} \left(\frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\cos^2 \alpha q} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\sin^2 \alpha q} \right) \right\} \varphi(p) = \bar{\zeta}\varphi(p), \quad (39)$$

where

$$V(p) = -\frac{1}{\beta} + \beta\lambda^2 \left\{ \frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)} \right\}, \quad (40)$$

with

$$\zeta_1(\zeta_1 - 1) = j^2 - \frac{1}{4}, \quad (41)$$

$$\zeta_2(\zeta_2 - 1) = j^2 + \frac{3}{4} - \frac{2}{\beta\lambda} + \frac{1}{\beta^2\lambda^2}. \quad (42)$$

Thus, we have

$$\left(-\frac{d^2}{dq^2} + \frac{1}{2}U_0 \left\{ \frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)} \right\} \right) \times \varphi(p) = \bar{\xi}^2 \varphi(p), \quad (43)$$

where $U_0 = \alpha^2$ with $\alpha = \lambda\sqrt{\beta}$. Equation (43) is the well-known Schrödinger equation in a Pöschl–Teller potential with [26]

$$U = \frac{1}{2}U_0 \left\{ \frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{\sin^2(\alpha q)} + \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{\cos^2(\alpha q)} \right\}, \quad (44)$$

and with the following conditions $\zeta_1 > 1$ and $\zeta_2 > 1$.

By comparison Eq. (38) with Eq. (43), we have

$$\zeta_1 = |j| \pm \frac{1}{2}, \quad (45)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2} \pm \left(\frac{1}{\beta\lambda} - 1 \right) \sqrt{1 + \frac{j^2}{\left(\frac{1}{\beta\lambda} - 1 \right)^2}}. \quad (46)$$

Now, in order to solve Eq. (38), we introduce the new variable

$$z = \sin^2(\alpha q). \quad (47)$$

In this case, Eq. (38) can be written by

$$z(1-z)\varphi'' + \left(\frac{1}{2} - z \right) \varphi' + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\bar{\xi}^2}{\alpha^2} - \frac{\zeta_1(\zeta_1 - 1)}{z} - \frac{\zeta_2(\zeta_2 - 1)}{1-z} \right\} \varphi = 0. \quad (48)$$

With the new wave function φ , defined by

$$\varphi = z^{\frac{\zeta_1}{2}}(1-z)^{\frac{\zeta_2}{2}}\Psi(z), \quad (49)$$

we arrive at

$$z(1-z)\Psi'' + \left[\left(\zeta_1 + \frac{1}{2} \right) - z(\zeta_1 + \zeta_2 + 1) \right] \Psi' + \frac{1}{4} \left\{ \frac{\bar{\xi}^2}{\alpha^2} - (\zeta_1 + \zeta_2)^2 \right\} \Psi = 0. \quad (50)$$

The general solution of this equation is

$$\Psi = C_{12}F_1(a'; b'; c'; z) + C_2 z^{1-c'} F_1(a' + 1 - c'; b' + 1 - c'; 2 - c'; z), \quad (51)$$

with

$$a' = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 + \frac{\bar{\xi}}{\alpha} \right), \quad (52)$$

$$b' = \frac{1}{2} \left(\zeta_1 + \zeta_2 - \frac{\bar{\xi}}{\alpha} \right), \quad c' = \zeta_1 + \frac{1}{2}.$$

With the condition $a' = -n$, we obtain

$$\bar{\xi}^2 = \alpha^2(\zeta_1 + \zeta_2 + 2n)^2. \quad (53)$$

In order to obtain the energy spectrum, it should be to note that in the limit $\beta \rightarrow 0$, the energy spectrum should regenerate to the no-GUP result.

Thus, the exact form of ζ_1 and ζ_2 are

$$\zeta_1 = |j| + \frac{1}{2}, \quad (54)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\beta\lambda} - 1 \right) \sqrt{1 + \frac{j^2}{\left(\frac{1}{\beta\lambda} - 1 \right)^2}}, \quad (55)$$

where $j \neq 0$.

With the aid of Eqs. (45), (46) and (53), we obtain the final form of the spectrum of energy, which is given by

$$\frac{E}{m_0 c^2} = \pm \sqrt{1 - 2r + \frac{\beta}{\beta_0} r^2 j^2 + 2\Sigma(N + 1) \left(r - \frac{\beta}{\beta_0} r^2 \right) + \frac{\beta}{\beta_0} r^2 N^2}, \quad (56)$$

with

$$\Sigma = \sqrt{1 + \frac{j^2}{\left(\frac{1}{\beta\lambda} - 1 \right)^2}}. \quad (57)$$

We can see that where $\beta \rightarrow 0$, $\Sigma \rightarrow 1$, and the energy spectrum is reduced to the no-GUP result (Eq. (23)).

The corresponding wave function is

$$\Psi_{KG} = N e^{i|j|\theta} p^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{\zeta_1}{2}} (1-z)^{\frac{\zeta_2}{2}} {}_2F_1(-n; b'; c'; z), \quad (58)$$

with N is the constant of normalization.

4. CONCLUSIONS

In this paper, we have exactly solved the Klein–Gordon oscillator in two dimensions in the framework

of relativistic quantum mechanics with minimal length. The eigensolutions are obtained using a method developed in [10, 25] to solve a two-dimensional Dirac equation and Klein–Gordon equations. We firstly consider the case of the Klein–Gordon oscillator within the ordinary quantum mechanics: our results are in good agreement with those obtained in [11]. Then we have extended it in the case of the presence of a minimal length. The energy levels, for both cases, show a dependence on N^2 in the presence of the minimal length, which describes a hard confinement. In the limit where $\beta \rightarrow 0$, we recover the energy spectrum of no-GUP.

REFERENCES

1. D. Itô, K. Mori, and E. Carriere, *Nuovo Cim. A* **51**, 1119 (1967).
2. M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L817 (1989).
3. R. P. Martinez-y-Romero and A. L. Salas-Brito, *J. Math. Phys.* **33**, 1831 (1992).
4. M. Moreno and A. Zentella, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L821 (1989).
5. J. Benitez, P. R. Martinez-y-Romero, H. N. Nunez-Yepez, and A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1643–1645 (1990).
6. A. Boumali and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **128**, 124 (2013).
7. J. A. Franco-Villafane, E. Sadurni, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, and T. H. Seligman, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 170405 (2013).
8. C. Quimbay and P. Strange, arXiv:1311.2021.
9. C. Quimbay and P. Strange, arXiv:1312.5251.
10. L. Menculini, O. Panella, and P. Roy, *Phys. Rev. D* **87**, 065017 (2013).
11. H. Benzair, M. Merad, T. Boudjedaa, and M. Makhoulouf, *Z. Naturforsch.* **67**, 77 (2012).
12. A. Kempf, *J. Math. Phys.* **35**, 4483 (1994).
13. A. Kempf, G. Mangano, and R. B. Mann, *Phys. Rev. D* **52**, 1108 (1995).
14. H. Hinrichsen and A. Kempf, *J. Math. Phys.* **37**, 2121 (1996).
15. A. Kempf, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 2093 (1997).
16. P. Gaete and E. Spallucci, *Eur. Phys. Lett.* **105**, 21002 (2014).
17. B. Vakili and M. A. Gorji, *J. Stat. Mech.* P10013 (2012).
18. P. Pedram, *Eur. Phys. Lett.* **101**, 30005 (2013).
19. Kh. Nouicer, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 10027 (2005).
20. Kh. Nouicer, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 2125 (2007).
21. Kh. Nouicer, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 5125 (2006).
22. M. Betrouche, M. Maamache, and J. R. Choi, *Adv. High Energy Phys.* **2013**, 383957 (2013).
23. H. Hassanabadi, Z. Molaei, and S. Zarrinkamar, *Adv. High Energy Phys.* **2014**, 459345 (2014).
24. H. Hassanabadi, E. Maghsoodi, A. N. Ikot, and S. Zarrinkamar, *Adv. High Energy Phys.* **2013**, 923686 (2013).
25. T. K. Jana and P. Roy, *Phys. Lett. A* **373**, 1239–1241 (2009).
26. S. Flugge, *Practical Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 1974).

