République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de **MASTER**
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

On the combinatorics and dynamics of Tetranacci

Présenté Par:
BAHI Zaim
MOUMEN Rahim

Devant le jury :

Mr, SAYEB Abdessadek	MCB	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr, SMAEL Hichem	MAA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Mr, DEGUAICHI Nouar	MAA	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 20/06/2021

بسم الله الرحمن الرحيم

مـلـخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو اجراء دراسة حول اصفار متغيرات Fibonacci المعممة (R-Banacci) على وجه الخصوص في البعد 2, 3, و4 باستخدام تقنية تحليلية تعتمد على صيغة كوشي للتمثيل التكاملي وعلى التطبيقات المتوافقة.

الكلمات المفتاحية: ارقام Fibonacci , كثيرات حدود Fibonacci, الدوال المولدة, التحويل المطابق, الجاذب الصغري.

Abstract

The main objective of this work is to make a study on the zeros of genelized Fibonacci polynomials (R-Bonacci) in particular in dimension 2,3 and 4 using an analtycal technique based on the Cauchy integral representation formula and on conformal mappings.

Key-words : Fibonacci numbers, generalized Fibonacci polynomials, generator function, conformal transformation, zero attractor.

Résumé

L'objectif principal de ce mémoire est de faire une étude sur les zéros des polynômes de Fibonacci généralisés (R-Bonacci) en particulier en dimension 2,3 et 4 en utilisant une technique analytique basé sur la formule de représentation intégrale de Cauchy et sur les applications conformes.

Mots clés : Nombres de Fibonacci, polynômes de Fibonacci généralisés, fonction génératrice, transformation conforme, zéro attracteur.

Remerciements

Avant tous nous remercions Dieu ALLAH tout puissant de nous avoir aidés à accomplir ce travail et de nous avoir guidés vers ce chemin du savoir et de la science.
En premier lieu nous voudrons exprimer nos plus vifs remerciements à Monsieur, Docteur DEGAICHI Nouar, notre Directeur de mémoire pour l'intéressant sujet qu'il nous a proposé, pour son aide, sa patience, ses conseils, ses encouragements, sa grande disponibilité et son ouverture d'esprit qui nous ont aidés à mener à bien ce travail. On lui sommes également reconnaissant pour la confiance qu'il nous a accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute nous gratitude en seulement quelques lignes.
Nous adressons nos plus vifs remerciements à Monsieur, Docteur SAIB Abdessadek maitre de conférences à l'université Larbi Tebessi qui nous fait l'honneur d'être président de notre jury.
Nous tenons à exprimer nos sincères remerciements à Monsieur, Docteur SMAEL Hichem maitre assistant à l'université Larbi Tebessi pour avoir accepté d'examiner ce travail.
Nous voudrons également remercier tous les membres du département de mathématiques et informatique et tous ceux qui nous ont aidé de près et de loin pour achever ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

L'étude des zéros d'un polynôme et leurs distribution assymptotique est un problème trés ancien et important car il n y a pas de théories générales qui nous permet de trouver les zéros d'un polynôme de degré supérieur ou égal à 5, l'importance de l'étude des zéros des polynômes dans la plupart des domaines de mathématiques s'interprète en algebre par les zéros du polynôme caractéristique, en géométrie algébrique la variété algébrique est l'ensemble des zéros des polynômes qui définissent la variété, en combinatoire est que toute sorte de problème revient à l'étude assymptotique des zéros de polynômes, et en EDO, EDP et en théorie des nombres où il y a le fameux problème de Riemann [1].

L'une des familles célèbre de polynômes se trouve les polynômes de Fibonacci [2] qui sont des généralisations des nombres de Fibonacci.

Les polynômes de Fibonacci ont été inventer par le mathématicien belge E. C. Catalan [3] en 1883 [10], 90 ans aprés les R-Bonacci ont été introduits par Hoggat et Bicknell [2].

Dans [1], Hoggat [4] et al., ont donnés une caractérisation complète pour les zéros des polynômes de Fibonacci en utilisant les fonction hyperboliques. En 1997 Ricci [5] et al., [9] ont fait une investigation numérique pour les zéros des $R-$Bonacci et ils ont conjecturé que ces zéros sont

1. G.F.B. Riemann (1826-1866)
2. L. Fibonacci (1170-1240)
3. E.C. Catalan (1813-1894)
4. V.E.Hoggatt (1921-1980)
5. P.E. Ricci (1944-)

sur une courbe assez compliquée.

Dans notre travail on s'intéresse à l'étude des zéros des $R-$Bonacci pour $R = 2, 3$ et 4 ainsi que leurs distribution assymptotique qui s'applle ensemble des zéros attarcteurs d'un point de vue dynamique. Au premier lieu ont introduit la suite des nombres de Fibonacci qui sont définis par la récurrence suivante :

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \text{ pour } n \geq 0, \\ F_0 = 0, F_1 = 1, \end{cases}$$

ainsi que sa représentation combinatoire et matricielle, puis sa représentation analytique qui nécéssite ce qu'on appelle la fonction génératrice. Dans une seconde étape on va faire une extension au $R-$Bonacci pour $R = 2, 3$ et 4. On note que la généralisation des polynômes de Fibonacci existe, Hoggatt et Bicknell étudies ce qu'on appelle les polynômes R-bonacci sachant que $R_n(x)$ définis par la relation récurrente suivante

$$\begin{cases} R_{-k}(x) = 0 \text{ pour } k = 0, 1, ..., r-2, \\ R_1(x) = 1, R_2(x) = x^{r-1}, \\ R_{n+r}(x) = x^{r-1} R_{n+r-1}(x) + x^{r-2} R_{n+r-2}(x) + ... + R_n(x). \end{cases}$$

Cette mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre est consacré à des rappels concernant le théorème de représentation intégrale de Cauchy [6], au théorème des résidus et aux transformations conformes, et a l'introduction du concept de fonctions génératrices.

Dans le deuxième chapitre, on introduit les polynômes de Fibonacci, en donnant une investigation numérique pour les racines des polynômes de Fibonacci via les fonctions hyperboliques, puis on montre analytiquement que l'ensemble de ces zéros est fermé.

Au troisième chapitre, on va concentrer sur les polynômes de Tribonacci en donnant une caractérisation de l'ensemble des zéros attracteurs de ces deux familles de polynômes.

Dans le quatrième chapitre, on va présenté les même procédures qui sont utilisée dans le chapitre précédant appliquées sur les polynômes de Quadranacci.

Dans le cinquième chapitre, on finis notre travail par une conclusion et quelque perspectives.

6. L.A. Cauchy (1789-1857)

CHAPITRE 1

PRÉLIMINAIRES

Contents

1.1 Fonction génératrice

La fonction Génératrice fournit un outil puissant pour résoudre la relation de récurrence homogène linéaire à coefficients constants. En 1718, De Moivre [1] a inventé des fonctions génératrices afin de résoudre la relation de récurrence de Fibonacci.
On introduit la définition suivante

Définition 1.1.1. *Soient $a_0, a_1, a_2, ...$ une suite de nombres réels.*
La fonction

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + \cdots ,$$

est appelée la fonction génératrice de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.1.1 Opérations sur les fonctions génératrices

Somme et produit de deux fonctions génératrices

Soient f et g deux fonctions génératrices telles que :

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_nx^n,$$

et

$$g(x) = \sum_{n\geq 0} b_nx^n.$$

Alors, la somme de f et g est donnée par

$$f(x) + g(x) = \sum_{n\geq 0}(a_n + b_n)x_n,$$

et le produit est donné par :

$$f(x)g(x) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} a_ib_{n-i}\right)x^n.$$

L'exemple suivant illustre comment on peut obtenir la fonction génératrice des nombres de Fibonacci.

1. A. De Moivre (1667-1754)

Exemple 1.1.1. *La suite des nombres de Fibonacci* $(F_n)_n$ *satisfait la relation récurrente suivante*

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \\ F_0 = 0, F_1 = 1. \end{cases}$$

Pour trouver la fonction génératrice des nombres de Fibonacci on considère la fonction

$$g(x) = \sum_{i \geq 0} F_i x^i,$$

puis on cherche les deux fonctions $xg(x)$ *et* $x^2 g(x)$

$$xg(x) = \sum_{i \geq 1} F_i x^{i+1},$$

et

$$x^2 g(x) = \sum_{i \geq 1} F_i x^{i+2}.$$

Donc, on obtient

$$g(x) - xg(x) - x^2 g(x) = F_1 x + \sum_{i \geq 2} \left(F_i - F_{i-1} - F_{i-2}\right) x^i$$

ce qui nous donne

$$(1 - x - x^2) g(x) = x.$$

Ainsi, on a

$$g(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

1.2 Fonctions holomorphes, fonctions analytiques

1.2.1 Fonctions holomorphes

Définition 1.2.1. *Une fonction* $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *est holomorphe si elle est* $\mathbb{C}-$*dérivable en chaque point de* U.

1.2.2 Fonctions analytiques

Ce sont les fonctions qui sont localement développables en série entière.

Définition 1.2.2. *Une fonction $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est analytique lorsque, pour tout $z_0 \in U$, il existe un disque $D(z_0, r) \subset U$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tels qu'on ait, pour tout $z \in D(z_0, r)$:*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n .$$

Bien entendu, les coéfficients a_n de la série entière qui restitue f sur le disque $D(z_0, r)$ dépendent du point z_0, on a

$$\begin{aligned} a_n &= a_n(z_0) \\ &= \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \end{aligned}$$

1.3 Indice d'un chemin fermé

Définition 1.3.1. *Soit γ un chemin fermé dans le plan $\mathbb{C}$, et soit a un point de $\mathbb{C}$ n'appartenant pas à l'image de γ.*

On appelle indice de γ par rapport à a et on note $I(\gamma, a)$, la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\tau \frac{dz}{z - a}.$$

1.4 Formule integrale de Cauchy

Théorème 1.4.1 (de Cauchy)**.** *soit f une fonction holomorphe dans un ouvert D.*

Soit $a \in D$, et soit γ un chemin fermé de D, ne passant pas par a et homotope a un point dans D

On a alors

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)dz}{z - a} = I(\gamma, a) f(a),$$

où $I(\gamma, a)$ désigne l'indice du chemin fermé γ par rapport au point a .

Démonstration. Pour la preuve voir [6]. ∎

La fonction $\frac{1}{t-z}$ qui figure sous le signe d'intégration peut être développée en série, compte tenu du fait que $\mid z \mid \leq \mid t \mid$.
D'une façon précise on a :

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t}\frac{1}{1-\frac{z}{t}} = \frac{1}{t}\left(1 + \frac{z}{t} + ... + \frac{z^n}{t^n} + ...\right),$$

par suite

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \sum_{n\geq 0} z^n \frac{f(t)}{t^{n+1}}dt.$$

La série converge normalment pour $\mid z \mid \leq r$ et $\mid t \mid = r_0$. On peut donc l'intégrer terme à terme, et obtient une série normament convergente pour $\mid z \mid \leq r$;

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n,$$

où les coefficients sont données par les intégrales

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=r_0} \frac{f(t)dt}{t^{n+1}}.$$

1.5 Théorème des résidus

Considérons d'abord une fonction $f(z)$ holomorphe dans une couronne $p_2 < |z| < p_1$ centrée à l'origine.

Proposition 1.5.1. *Si γ est un chemin fermé contenu dans une telle couronne, on a*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz = I(\gamma, 0)a_{-1},$$

où $I(\gamma, 0)$ désigne l'indice du chemin γ par rapport à l'origine 0, et a_{-1} est le coéfficient de $1/z$ dans le développement de f.

1.6 Transformations conformes

Une transformation conforme est une application qui transforme l'affixe complexe $\mathbb{Z}$ d'un point du plan original (générateur) en un point dans le plan image d'affixe $\mathbb{Z}$.

Elle respecte certaines propriétés : la fonction $f : z \to \mathbb{Z}$ est définie, continue, bijective, holomorphe et à dérivée non nulle sur le domaine d'étude du plan original.

Définition 1.6.1. *Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$*
Une application $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite conforme si elle conserve les angles et ça dérivée ne s'annule pas.

1.6.1 Transformation de Joukowski

La transformation de Joukowski[2] est définie par

$$\begin{cases} J(z) & = z + \frac{1}{z}, \\ z & \neq 0. \end{cases}$$

Remarque 1.6.1. *La transformation de Joukowski est holomorphe pour $z \neq \pm 1$.*

2. N. Joukowski (1847-1921)

CHAPITRE 2

LES POLYNÔMES DE FIBONACCI

Contents

La généralisation des nombres de Fibonacci au polynômes de Fibonacci a été l'objet de nombreux travaux, l'une des premiers de ces travaux a était faite en 1883 par le mathématicien belge E. C. Catalan.

2.1 Nombres de Fibonacci

Définition 2.1.1. *La suite des nombres de Fibonacci est définie par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \ , \ n \geq 0, \\ F_0 = 0, \ F_1 = 1. \end{cases} \tag{2.1}$$

Les premiers termes de la suite de Fibonacci jusqu'à F_{13} sont cités au tableau suivant

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

2.2 Ecriture binômiale des nombres de Fibonacci

Définition 2.2.1. *Soient n, k deux entiers non négatifs. Le coéfficient binômial noté $\binom{n}{k}$ est définit par*

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & si \ k \leq n, \\ 0 & ailleur. \end{cases}$$

Les coéfficients binômiaux $\binom{n}{k}$ pour $k \leq n$ sont arrangés sur un triangle dit triangle de Pascal[1] *comme le montre le shéma au dessous*

$$\begin{array}{ccccc} \binom{0}{0} & & & & \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} \end{array}$$

E Lucas[2] avait établit le lien entre les nombres de Fibonacci et les coéfficients binômiaux. Ce lien fait l'objet du résultat suivant.

1. P. Pascal (1623-1662)
2. E. Lucas (1842-1891)

Théorème 2.2.1 (Lucas)**.**

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k}, \; n \geq 0.$$

Démonstration. Pour la preuve, voir [10]. ■

2.2.1 Représentation matricielle des nombres de Fibonacci

Les nombres de Fibonacci peuvent être écrits sous forme matricielle.

En prenant

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

pour tout $n \geq 1$, la puissance n-ième de cette matrice est une matrice dont les coéfficients sont des nombres de Fibonacci.

Remarque 2.2.1. *Les valeurs propres de la matrice Q sont notées par α et β telles que :*

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right),$$

et

$$\beta = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right).$$

Donc Q est diagonalisable.

Ce qui nous permet d'avoir la formule de Binet [3] suivante

Proposition 2.2.1 (Binet)**.**

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{2.3}$$

La représentation matricielle citée au dessus nous donne

$$Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ce qui nous a fournit la formule suivante due à Cassini [4].

3. J.P.M. Binet (1786-1856)
4. G.D. Cassini (1625-1712)

Proposition 2.2.2 (Formule de Cassini)**.**

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \,. \tag{2.4}$$

Démonstration. On a Q est diagonalisable, alors il existe $M \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que

$$M^{-1}QM = D,$$

ce qui implique que

$$M^{-1}Q^nM = D^n.$$

Par passage au déterminant on obtient

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{vmatrix} &= \det(Q^n) \\ &= \det(D^n) \\ &= (\det D)^n \\ &= (-1)^n \,. \end{aligned}$$

■

2.3 Polynômes de Fibonacci

En mathématiques les polynômes de Fibonacci, nommés en l'honneur du mathématicien italien Leonardo Fibonacci, sont une suite de polynômes $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ généralisant les nombres de Fibonacci, définis d'une manière telle que $(F_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ soit égal au n-ième nombre de la suite de Fibonacci.

Définition 2.3.1. *La suite des polynômes de Fibonacci* $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par la relation de récurrence suivante*

$$\begin{cases} F_{n+2}(x) = xF_{n+1}(x) + F_n(x) \\ F_0(x) = 0,\ F_1(x) = 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Les premiers termes des polynômes de Fibonacci sont donnés par le tableau suivant

n	$F_n(x)$
0	0
1	1
2	x
3	x^2+1
4	$x\left(x^2+2\right)$
5	x^4+3x^2+1
6	$x\left(x^2+3\right)\left(x^2+1\right)$
7	$x^6+5x^4+6x^2+1$
8	$x\left(x^2+2\right)\left(x^4+4x^2+2\right)$
9	$x^8+7x^6+15x^4+10x^2+1$
10	$x\left(x^4+3x^2+1\right)\left(x^4+5x^2+5\right).$

2.3.1 Représentation matricielle des polynômes de Fibonacci

Dans le cas des polynômes de Fibonacci la matrice Q citée au paragraphe précédente s'écrit comme suit

$$Q\left(x\right)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.3.1}$$

Le polynôme caractéristique a pour valeurs propres

$$\alpha\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+4}\right),$$

et

$$\beta(x)=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2+4}\right).$$

2.3.2 Formules explicites des polynômes de Fibonacci

L'une des formules explicites qui donne les termes de la suite des polynômes de Fibonacci de plus haut degré en fonction des coéfficients binômiaux est donnée par

Théorème 2.3.1. *Pour tout* $n\geq 0$, *on a*

$$F_{n+1}(x)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n-j}{j}x^{n-2j},\ n\geq 0. \tag{2.6}$$

$$F_n(x)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{(n-1)}{2}\right]}\binom{n-j-1}{j}x^{n-2j-1},\ n\geq 0. \tag{2.7}$$

Démonstration. Pour la preuve voir [10]. ■

Il y un analogue de la formule (2.3) pour les polynômes de Fibonacci qui est donnés par

Proposition 2.3.1 (Binet pour les polynômes de Fibonacci)**.**

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n(x) - \beta^n(x)}{\alpha(x) - \beta(x)}. \tag{2.8}$$

2.3.3 Racines des polynômes de Fibonacci

Il devient plus difficile de trouver les racines des équations polynômes du degré n, pour $n \geq 5$, aucune formule générale ne peut être appliquée.

Par contre on peut trouver les racine pour certaines classes de polynômes, en utilisant les fonctions hyperboliques, cette technique est trés bien marchée pour les polynômes de Fibonacci de degré supérieurs.

Théorème 2.3.2 (Hoggatt et Bicknell)**.** *Les zéros de polynômes de Fibonacci $F_n(x)$ sont donnés par*

$$x = 2i \cos k\pi/n$$

tel que

$$1 \leq k \leq n-1.$$

Démonstration. La démonstration qu'on va présenter ici est due à Hoggatt et Bicknell, elle est basée sur les deux fonctions hyperboliques suivantes.

1-

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),$$

où $z = x + iy$ est la variable complexe.

Cette fonction satisfait les identités

$$\cosh iy = \cos y$$

$$\cosh z^2 - \sinh z^2 = 1$$

2-

$$\sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),$$

qui satisfait l'identité

$$\sinh iy = i \sin y.$$

Soit $x = 2\sinh z$, alors

$$\sqrt{x^2+4} = 2i \sinh z.$$

On remplace les valeurs de $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ dans la formule (cf (2.8)), on obtient

$$\begin{aligned} F_n(x) &= i^{n-1}\left(\frac{e^{nz} - e^{-nz}}{e^z - e^{-z}}\right) \\ &= i^{n-1}\frac{\sinh nz}{\sinh z}. \end{aligned}$$

Alors

$$F_n(x) = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sinh nz = 0 \text{ et} \\ \sinh z \end{array} \right. .$$

De plus, on a

$$\sinh nz = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sin ny = 0 \text{ ou} \\ z = iy \end{array} \right. \quad \sin ny = 0$$

Cela implique que $ny = \pm k\pi$.

Par suite, on trouve

$$z = \pm\frac{k\pi}{n}.$$

■

Corollaire 2.3.1. *On peut représenter les polynômes de Fibonacci sous la forme trigonométrique suivante*

$$F_n(x) = \prod_{k=1}^{n-1} (x - 2i \cos k\pi/n). \tag{2.3.2}$$

Corollaire 2.3.2. *Si $x = 1$, alors les nombres de Fibonacci se repésente aussi par*

$$F_n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - 2i \cos k\pi/n).$$

2.3.4 Représentation analytique des polynômes de Fibonacci

Proposition 2.3.2. *La fonction génératrice des polynômes de Fibonacci est donnée par*

$$\begin{aligned} g(x,t) &= \sum_{k\geq 0} F_k(x)t^k \\ &= \frac{t}{1-xt-t^2}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule intégrale de Cauchy, on a les Lemmes suivants

Lemme 2.3.1. *Pour tout x non nul la famille des polynômes de Fibonacci a la représentation suivante :*

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{1-xt-t^2}\frac{dt}{t^n},\ n \geq 0.$$

Démonstration. On a

$$F_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{t}{1-xt-t^2}\frac{dt}{t^{n+1}}. \tag{2.3.3}$$

On remplace la variable t par tx dans l'égalité (2.3.3), donc on obtient

$$F_n(x) = \frac{x^{1-n}}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{1-x^2\left(t^2+t\right)}\frac{dt}{t^n}, n \geq 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0. \tag{2.10}$$

Alors

$$x^{n-1}F_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{1-x^2\left(t^2+t\right)}\frac{dt}{t^n}, n \geq 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0.$$

Maintenant, on pose

$$x^{n-1}F_n(x) = f_n\left(x^2\right),$$

où

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{1-x\left(t^2+t\right)}\frac{dt}{t^n}. \tag{2.11}$$

Puis, on pose $\zeta = \frac{1}{x}$ dans (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{-\zeta}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{t^2+t-\zeta}\frac{dt}{t^n} 2.12 \\ &= \frac{-\zeta}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{P(t)}\frac{dt}{t^n}, \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

avec

$$P(t) = t^2 + t - \zeta.$$

■

Lemme 2.3.2. *$P(t)$ a un zéro double si et seulement si*

$$\zeta = \frac{-1}{4}.$$

ce qui équivaux au $x = \pm 2i$.

Démonstration. Soient $t_1(x), t_2(x)$ les zéros de $P(t)$ ordonnés via leurs modules

$$|t_1(x)| \leq |t_2(x)| \tag{2.13}$$

Maintenant, si $P(t)$ n a pas de zéros doubles on utilise la décomposition de $\frac{1}{P(t)}$ suivante

$$\frac{1}{P(t)} = \frac{1}{P'(t_1)} \frac{1}{t - t_1(x)} + \frac{1}{P'(t_2)} . \frac{1}{t - t_2(x)}. \tag{2.14}$$

On remplace (2.14) dans (2.3.4) on aura

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{-\zeta}{2\pi i} \oint_{|t|=r_x} \left(\frac{1}{P'(t_1)} \frac{1}{t - t_1(x)} + \frac{1}{P'(t_2)} . \frac{1}{t - t_2(x)} \right) \frac{dt}{t^n} \\ &= \frac{\zeta}{2\pi i} \oint_{|t|=r_x} \left(\frac{1}{P'(t_1)} \frac{1}{t_1(x) - t} + \frac{1}{P'(t_2)} . \frac{1}{t_2(x) - t} \right) \frac{dt}{t^n}. \end{aligned}$$

Une intégration terme à terme et le théorème des résidus pour $x \neq 0, x \neq \pm 2i$ nous donne

$$f_n(x) = \frac{1}{x} \left[\frac{t_1^{-n}}{P'(t_1(x))} + \frac{t_2^{-n}}{P'(t_2(x))} \right]. \tag{2.15}$$

■

Pour étudier la distribution assymptotique des zéros de F_n on a besoin d'introduire le concept d'attracteur des zéros.

Définition 2.3.2. *Soit $\{q_n(x)\}$ $n \geq 0$ une suite de polynômes où le degré de $q_n(x)$ se croit vers l'infini quand $n \longrightarrow \infty$. Un ensemble A est dit zéro attracteur pour les zéros de $q_n(x)$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1- *Soit* $A_\varepsilon = \cup_{x\in A} B(x,\varepsilon)$ *où* $B(x,\varepsilon)$ *est un disque ouvert centré en* x *et de rayon* ε, *il exist* $n_0(\varepsilon)$ *tel que pour tout* $n \geq n_0$ *tous les zéros de* $q_n(x)$ *sont dans* A_ε.

2- *Pour tout* $x \in A$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$ *il exist* $n_1 \in \mathbb{N}$, *et il exist un zéro* r *de* $q_n(x)$ *tel que* $r \in B(x,\varepsilon)$.

2.3.5 Analyse des zéros de polynômes de Fibonacci

Soient $t_1(x), t_2(x)$ les zéros de $P(t) = 0$ ordonnés via leur module $|t_1| \leq |t_2|$.

On va étudier l'ensemble

$$A = \{x \in \text{plan } - x/\ |t_1(x)| = |t_2(x)|\}.$$

Proposition 2.3.3. $A = Z(\tau_n)$ *l'ensemble des points d'accumulations de* $\tau_n(x)$.

En dehors de cet ensemble il n y a pas se zéros de $\tau_n(x)$.

Remarque 2.3.1. *Soit*

$$B = \{x \in \textit{ plan-}x/\, |t_1(x)| < |t_2(x)|\},$$

tel que B *est un ensemble ouvert dans le plan des* x.

Lemme 2.3.3. *Il existe* $\rho \in \mathbb{R}_*^+$ *tel que,* $\forall n \in \mathbb{N}$ *les zéros de* $\tau_n(x)$ *sont contenus dans le disque*

$$D_\rho = \{x/\, |x| \leq \rho\}.$$

Démonstration. Le point à l'infini qu'on note $\infty \longrightarrow 0$ par $(x = \frac{1}{\xi})$ et $\xi = 0$ correspond à $t_1 = 0$ et $t_2 = -1$ respectivement, avec un choix arbitraire de t_1, t_2 i.e.,

$$|t_1| = 0$$

et

$$|t_2| = 1.$$

Alors, on a

$$\{x/\, |x| \geq \rho\} \subseteq B,$$

tel que pour tout $\{x/\,|x|\geq\rho\}$, on a

$$|t_1|<\frac{1}{3},|t_2|>\frac{1}{2}.$$

$$\frac{1}{2}\leq P^{'}(t_1)\leq 1,\quad 1\leq\left|P^{'}(t_2)\right|,$$

on a

$$\tau_n(x)=\frac{1}{x}\frac{t_1^{-n}}{P^{'}(t_1)}\left[1+\frac{P^{'}(t_1)}{P^{'}(t_2)}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^n\right]$$

ce qui nous donne

$$|\tau_n(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|\left|\frac{t_1^{-n}}{P^{'}(t_1)}\right|\left|1+\frac{P^{'}(t_1)}{P^{'}(t_2)}\left(\frac{t_1}{t_2}\right)^n\right|$$

On obtien alors

$$\begin{aligned}|\tau_n(x)| &= \left|\frac{1}{x}\right|\left(\frac{3}{2}\right)^n\left|1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right| \\ &= \left|\frac{1}{x}\right|\left(\frac{3}{2}\right)^n\left|1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right| \\ &> 0.\end{aligned}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$. ■

CHAPITRE 3

LES TRIBONACCI

Contents

Rappelons que les Tribonacci $T_n(x)$ satisfont la relation récurrente suivante :

$$T_0(x) = 0,\ T_1(x) = 1, T_2(x) = x^2, \tag{3.0.1}$$

pour $n \geq 0$, on a

$$T_{n+3}(x) = x^2 T_{n+2}(x) + x T_{n+1}(x) + T_n(x) \tag{3.0.2}$$

Définition 3.0.1. *Une suite de polynômes $\{\tau_n(x)\}_{n\geq 0}$ est appelé tribonacci relié si $\{\tau_n(x)\}$ satisfaite la récurrence définie dans et la condition initiale est arbitraire qui est $\tau_0(x) = p_0(x)$, et*

$$\begin{aligned} &\tau_1(x) = p_1(x), \quad \tau_2(x) = p_2(x), \\ &\tau_1(x),\ \tau_2(x) \in \mathbb{C}[x], \\ &(\tau_0(x), \tau_1(x), \tau_2(x)) \neq (0,0,0), \end{aligned}$$

on suppose aussi que

$$pgcd\,(p_0(x), p_1(x), p_2(x)) = 1.$$

3.1 Représentation intégrale

Pour résoudre la récurrence on définit

$$G(x,t) = \sum_{n\geq 0} T_n(x) t^n. \tag{3.1.1}$$

Comme étant la fonction génératrice de $T_n(x)$. Un calcul formel nous donne

$$G(x,t) = \frac{t}{1 - x^2 t - x t^2 - t^3}. \tag{3.1.2}$$

Lemme 3.1.1. $\forall x \neq 0, \exists r_x > 0,$ *la famille $T_n(x)$ a la representation integrale suivante tel que*

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{1 - x^2 t - x t^2 - t^3} \frac{dt}{t^n}. \tag{3.1.3}$$

Démonstration. Si on fait le changement de variable $t = tx$, on obtient

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{1 - x^2 t - x t^2 - t^3} \frac{dt}{t^n}. \tag{3.1.4}$$

Alors on a

$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{1 - x^3 t - x^3 t^2 - x^3 t^3} \frac{dt}{x^{n-1} t^n} \tag{3.1.5}$$
$$= \frac{x^{-n+1}}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{1 - x^3 (t + t^2 + t^3)} \frac{dt}{t^n}, \quad x \neq 0.$$

Par la multiplication, on trouve

$$x^{n-1} T_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{1 - x^3 (t + t^2 + t^3)} \frac{dt}{t^n}, \quad x \neq 0. \tag{3.1.6}$$

On pose

$$x^{n-1} T_n(x) = \tau_n(x^3), \tag{3.1.7}$$

avec

$$\tau_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{1 - x (t + t^2 + t^3)} \frac{dt}{t^n}. \tag{3.1.8}$$

Pour étudier les zéros attracteurs de $T_n(x)$ on étudi les zéros de $\tau_n(x)$. Soit

$$\xi = \frac{1}{x}. \tag{3.1.9}$$

Alors, on a

$$\tau_n(x) = \frac{\xi}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{\frac{1}{x} - (t + t^2 + t^3)} \frac{dt}{t^n}$$
$$= \frac{-\xi}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{t + t^2 + t^3 - \xi} \frac{dt}{t^n}$$
$$= \frac{-\xi}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=r_x} \frac{1}{P(t)} \frac{dt}{t^n},$$

où

$$P(t) = t^3 + t^2 + t - \xi. \tag{3.1.10}$$

■

Lemme 3.1.2. *1- $P(t)$ n'a pas de zéros de multiplicité trois.*

2- $P(t)$ a un zéro double.si et seulement si

$$t=\frac{-1-i\sqrt{2}}{3},t=\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}.$$

Démonstration. Soient $t_1(x), t_2(x), t_3(x)$ les zéros de $P(t)$ ordonnés par leurs modules

$$|t_1(x)| \leq |t_2(x)| \leq |t_3(x)|, \tag{3.1.11}$$

si $P(t)$ n à pas de zéros doubles on utilise la décomposition de $\frac{1}{p(t)}$, on obtient

$$\frac{1}{P(t)}=\frac{1}{P'(t_1)}\frac{1}{t-t_1(x)}+\frac{1}{P'(t_2)}.\frac{1}{t-t_2(x)}+\frac{1}{P'(t_3)}.\frac{1}{t-t_3(x)},$$

où

$$\begin{aligned} P(t) &= t^3+t^2+t-\xi \\ &= t^3+t^2+t-\frac{1}{x}, \end{aligned}$$

et

$$\tau_n(x)=\frac{-\xi}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=r\pi}\frac{1}{P(t)}.\frac{dt}{t^n}.$$

$$\begin{aligned} \tau_n(x) &= \frac{-\xi}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=r_x}\left[\frac{1}{P'(t_1)}.\frac{1}{t-t_{1(x)}}+\frac{1}{P'(t_2)}.\frac{1}{t-t_2(x)}+\frac{1}{P'(t_3)}.\frac{1}{t-t_3(x)}\right]\frac{dt}{t^n} \\ &= \frac{\xi}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=r_x}\left[\frac{1}{P'(t_1)}.\frac{1}{t_{1(x)}-t}+\frac{1}{P'(t_2)}.\frac{1}{t_2(x)-t}+\frac{1}{P'(t_3)}.\frac{1}{t_3(x)-t}\right]\frac{dt}{t^n}, \end{aligned}$$

par l'intégration terme à terme et le théorème des résidus nous donne pour

$$x\neq\frac{-7}{3}\pm\frac{4}{3}i\sqrt{2}, x\neq 0$$

$$\tau_n(x)=\frac{1}{x}\left[\frac{t_1^{-n}}{P'(t_1(x))}+\frac{t_2^{-n}}{P'(t_2(x))}+\frac{t_3^{-n}}{P'(t_3(x))}\right]. \tag{3.1.12}$$

Alors l'étude des zéros de $\tau_n(x)$ revient à étudier les zéros de $P(t)$. ■

Pour cela on utilise ce qu'on appelle les applications conformes. On va obtenir les zéros de $P(t)$ via une suite d'applications conformes.

$$P(t)=t^3+t^2+t-\xi=0. \tag{3.1.13}$$

3.1.1 Réduction à la forme canonique

Ecrivons $P(t)$ sous la forme suivante

$$P(t) = t^3 + pt + q, \tag{3.1.14}$$

cela revient à faire le changement de variable

$$t = \omega - \frac{1}{3}. \tag{3.1.15}$$

Donc, on obtient

$$\omega^3 + \frac{2}{3}\omega - \left(\frac{7}{27} + \xi\right) = 0 = P(\omega), \tag{3.1.16}$$

tel que $P(\omega)$ a une racine double $(i.e)$

$$P'(\omega) = 0 \Leftrightarrow 3\omega^2 + \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow \omega = \pm\frac{i\sqrt{2}}{3}. \tag{3.1.17}$$

Maintenant, si on pose $\omega = \lambda q$ où $\lambda = \frac{i\sqrt{2}}{3}$ on aura

$$q^3 - 3q + \beta = 0, \tag{3.1.18}$$

avec

$$\beta = \frac{-(7 + 27\xi)\, i}{2\sqrt{2}}. \tag{3.1.19}$$

Si

$$q = p + \frac{1}{p} \Rightarrow \left(p + \frac{1}{p}\right)^3 - 3\left(p + \frac{1}{p}\right) + \beta = 0. \tag{3.1.20}$$

Par la simplification de (3.1.20), on a

$$p^3 + 3p + \frac{3}{p} + \frac{1}{p} - 3p - \frac{3}{p} + \beta = 0 \Rightarrow p^6 + \beta p^3 + 1 = 0.$$

On pose $p^3 = s$, donc on aura

$$s^2 + \beta s + 1 = 0. \tag{3.1.21}$$

Résolvons (3.1.21), on obtient

$$\beta = -\left(s + \frac{1}{s}\right). \tag{3.1.22}$$

par conséquent, pour tous les zéros de $P(t)$ par une suite d'applications conformes en commençant par le plan-x et en arrivant au plan$-t$.

Le diagramme suivant nous permet de regarder l'obtention des zéros de $\tau_n(x)$ via les applications conformes suivante

$$\begin{array}{c} x-\text{plan} \xrightarrow{x=\frac{1}{\xi}} \xi-\text{plan} \xrightarrow{\beta=-\frac{(7+27\xi)i}{2\sqrt{2}}} \\ t=w-\frac{1}{3}\uparrow \qquad \downarrow s=J^{-1}\left(-\beta\right) \\ t-\text{plan} \leftarrow w-\text{plan} \leftarrow q-\text{plan} \xleftarrow{q=J(p)} p-\text{plan} \quad p=s^{\frac{1}{3}} \leftarrow s-\text{plan}, \end{array}$$

on a les zéros de $P(t)=0$, donc, par la procédure suivante

$$x \longrightarrow \xi \longrightarrow \beta \longrightarrow s \longrightarrow p \longrightarrow q \longrightarrow \omega \longrightarrow t, \tag{3.1.23}$$

tel que

$$|\xi| > 1.$$

On pose

$$\xi = r \exp i\theta,$$

alors, on a

$$J\left(\xi\right) = \xi + \frac{1}{\xi} = re^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}}.$$

De plus

$$J\left(\xi\right) = re^{i\theta} + \frac{1}{r}e^{-i\theta} = re^{i\theta} + r^{-1}e^{-i\theta},$$

par l'utilisation des formules trigonométrique, on a

$$J\left(\xi\right) = r\cos\theta + ir\sin\theta + r^{-1}\cos\theta - ir^{-1}\sin\theta,$$

alors

$$J\left(\xi\right) = \left(r + r^{-1}\right)\cos\theta + i\left(r - r^{-1}\right)\sin\theta.$$

Posons

$$\left(r + r^{-1}\right)\cos\theta = u,$$

et

$$\left(r - r^{-1}\right)\sin\theta = v.$$

Lemme 3.1.3. *Soit θ et r sont données, alors*

$$re^{i\theta} \quad \underrightarrow{J(\xi)} \ \frac{u^2}{(r+r^{-1})^2} + \frac{v^2}{(r-r^{-1})^2} = 1$$

Démonstration. On a

$$u^2 = \left(r + r^{-1}\right)^2 \cos^2\theta$$

$$v^2 = \left(r - r^{-1}\right)^2 \sin^2\theta,$$

alors, on trouve

$$\frac{u^2}{(r+r^{-1})^2} + \frac{v^2}{(r-r^{-1})^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u^2}{\alpha^2} + \frac{v^2}{\rho^2} = 1,$$

avec

$$\alpha \neq \pm\rho,$$

$$re^{i\theta} \quad \underrightarrow{J(\xi)} \ \frac{u^2}{(r+r^{-1})^2} + \frac{v^2}{(r-r^{-1})^2} = 1,$$

qui est l'équation d'une ellipse. ■

3.2 Analyse des zéros

Soient $t_1(x), t_2(x)$ et $t_3(x)$, les zéros de $P(t) = 0$ ordonnés via leur module $|t_1| \leq |t_2| \leq |t_3|$. On va étudier l'ensemble

$$A = \{x \in \text{plan } - x/ \ |t_1(x)| = |t_2(x)|\}.$$

Lemme 3.2.1. *$A = Z(\tau_n)$ l'ensemble des zéros attracteurs de $\tau_n(x)$.*

Démonstration. Stucture de A dans le (plan $- p$) :

Soit

$$p = re^{i\theta}, \quad r \geqslant 1,$$

l'image de p dans le plan$-p$ est déterminée comme suit

$$\begin{aligned} q = J(p) &= re^{i\theta} + r^{-1}e^{-i\theta} \\ &= \left(r + r^{-1}\right)\cos\theta + i\left(r - r^{-1}\right)\sin\theta. \end{aligned}$$

On a

$$\omega = \lambda q = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(r^{-1} - r\right)\sin\theta + i\frac{\sqrt{2}}{3}\left(r + r^{-1}\right)\cos\theta$$

et

$$t = \omega - \frac{1}{3}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
|t|^2 &= \left|\omega - \frac{1}{3}\right|^2 \\
&= \left|\frac{\sqrt{2}}{3}\left(r^{-1} - r\right)\sin\theta - \frac{1}{3}\right|^2 + \left|\frac{\sqrt{2}}{3}\left(r + r^{-1}\right)\cos\theta\right|^2 \\
&= \frac{2}{9}\left(r^{-1} - r\right)^2\sin^2\theta + \frac{1}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{9}\left(r^{-1} - r\right)\sin\theta \\
&\quad + \frac{2}{9}\left(r + r^{-1}\right)^2\cos^2\theta \\
&= \frac{2}{9}\left[\left(r^{-2} - r^2\right)\sin^2\theta - \frac{4}{9}\sin^2\theta\right] \\
&\quad + \frac{1}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{9}\left(r^{-1} - r\right)\sin\theta + \frac{2}{9}\left[r^2 + r^{-2}\right]\cos^2\theta + \frac{4}{9}\cos^2\theta
\end{aligned}$$

Finalement, on trouve

$$|t|^2 = \frac{2}{9}\left(r^2 + r^{-2}\right) + \frac{4}{9}\cos 2\theta + \frac{1}{9} - \frac{2\sqrt{2}}{9}\left(r^{-1} - r\right)\sin\theta$$

■

Lemme 3.2.2. *On note l'image d'un point x dans le plan-p par*

$$re^{i\theta_0}, re^{i\left(\theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right)}, re^{i\left(\theta_0 + \frac{4\pi}{3}\right)},$$

on prend par exemple

$$\begin{gathered}
re^{i\theta_0} \longrightarrow t_1 \\
re^{i\left(\theta_0 + \frac{4\pi}{3}\right)} \longrightarrow t_2,
\end{gathered}$$

dans le plan–t

$$\begin{gathered}
t_1 = r\left(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0\right), \\
t_2 = r\left(\cos\left(\theta_0 + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)
\end{gathered}$$

Donc, on a

$$|t_1|^2 = r^2,$$

$$|t_2|^2 = r^2.$$

Alors

$$|t_1|^2 = |t_2|^2 \tag{3.2.1}$$

$$\begin{aligned}
(3.2.1) \quad \Rightarrow \quad & \frac{2}{9}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{4}{9}\cos 2\theta_0+\frac{1}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta_0 \\
= \quad & \frac{2}{9}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{4}{9}\cos 2\left(\theta_0+\frac{4\pi}{3}\right) \\
& +\frac{1}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right)\sin\left(\theta_0+\frac{4\pi}{3}\right)\frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right)\left(-\sin\theta_0+\sin\left(\theta_0+\frac{4\pi}{3}\right)\right) \\
= \quad & \frac{2}{9}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)+\frac{4}{9}\left(\cos 2\left(\theta_0+\frac{4\pi}{3}\right)-\cos 2\theta_0\right) \\
= \quad & \frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right)\left(\sin\left(\theta_0+\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\theta_0\right) \\
= \quad & \frac{4}{9}\left[\cos 2\left(\theta_0+\frac{4\pi}{3}\right)-\cos 2\theta_0\right],
\end{aligned}$$

puis on utilise l'identité trigonométrique

$$\cos 2A - \cos 2B = -2\left(\sin A - \sin B\right)\left(\sin A + \sin B\right).$$

On obtient

$$\begin{gathered}
\frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right)\left[2\sin\frac{2\pi}{3}\cos\left(\theta_0+\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\
-\frac{8}{9}\left[2\sin\frac{2\pi}{3}\cos\left(\theta_0+\frac{2\pi}{3}\right)\right]\left[2\cos\frac{2\pi}{3}\sin\left(\theta_0+\frac{2\pi}{3}\right)\right].
\end{gathered}$$

Deux cas à traité, si

$$\cos\left(\theta_0+\frac{2\pi}{3}\right)=0 \Rightarrow \theta_0+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

et

$$\theta_0=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}+2k\pi \Rightarrow \theta_0=\frac{\pi}{6}$$

avec

$$\theta_0=\frac{-7\pi}{6},$$

alors on obtient $\forall r \geq 1$ *l'égalité est satisfaite.*

Si $\cos\left(\theta_0 + \frac{2\pi}{3} \neq 0\right)$. *Donc*

$$\frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right) \times 2\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-8}{9} 2\sin\frac{2\pi}{3} \times 2\cos\frac{2\pi}{3} \times \sin\left(\theta_0+\frac{2\pi}{3}\right).$$

Ce qui donne

$$\frac{\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right) = \frac{-8}{9}\cos\frac{2\pi}{3}\sin\left(\theta_0+\frac{2\pi}{3}\right),$$

alors

$$\frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right) = \frac{8}{9}\sin\left(\theta_0+\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\sqrt{2}\left(-r+\frac{1}{r}\right) = 4\sin\left(\theta_0+\frac{2\pi}{3}\right).$$

Ce qui est équivalent à

$$\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3.$$

On va étudier le résultat obtenu sous forme du lemme suivant

Lemme 3.2.3. *La condition* $|t_1| = |t_2|$ *dans le plan-p où*

$$\begin{array}{l} re^{i\theta_0} = p_1 \longrightarrow t_1 \\ re^{i\left(\theta_0+\frac{4\pi}{3}\right)} \longrightarrow t_2 \end{array} \tag{3.2.2}$$

est donné par 1- $p_1 = re^{-i\frac{\pi}{6}}$ $r \geq 1$
2- p_1 *est dans l'arc du cercle* $\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3$ *dans la region* $r \geq 1$.

Démonstration. On pose la condition

$$|t_1| \leq |t_2|$$

pour avoir l'ordre $|t_1| \leq |t_2| \leq |t_3|$ soit $t_3 \longrightarrow re^{i\left(\theta_0+\frac{2\pi}{3}\right)}$ dans le plan-p. Puisque

$$|t_1| < |t_3| \Rightarrow |t_1|^2 < |t_3|^2.$$

Alors, on a

$$\frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right)\left[2\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\cos\left(\theta_0+\frac{\pi}{3}\right)\right] >$$
$$\frac{-8}{9}\left[2\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\cos\left(\theta_0+\frac{\pi}{3}\right)\right]\left[2\sin\left(\theta_0+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right],$$

si

$$\cos\left(\theta_0+\frac{\pi}{3}\right)>0 \iff \frac{-\pi}{2}<\theta_0+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$
$$\frac{-5\pi}{6}<\theta_0<\frac{\pi}{6}$$

On trouve

$$\frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right)2\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)>\frac{-8}{9}\left[2\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]\left[2\sin\left(\theta_0+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right]$$

$$\Rightarrow\frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right)>\frac{-8}{9}\sin\left(\theta_0+\frac{\pi}{3}\right)$$

$\iff$

$$\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2>3$$

alors on a :$\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2>3, r\geq 1, \frac{-5\pi}{6}<\theta_0<\frac{\pi}{6}$ on note par I la région

$$\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2>3, r\geq 1, \frac{-5\pi}{6}<\theta_0<\frac{\pi}{6}.$$

Cas (b) si :

$$\cos\left(\theta_0+\frac{\pi}{3}\right)<0\Rightarrow\frac{\pi}{6}<\theta_0<\frac{7\pi}{6}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{2\sqrt{2}}{9}\left(-r+\frac{1}{r}\right)>\frac{-8}{9}\sin\left(\theta_0+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2<3, r\geq 1, \quad \frac{\pi}{6}<\theta_0<\frac{7\pi}{6}$$

On note par II région

$$\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(y-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2<3, r\geq 1, \quad \frac{\pi}{6}<\theta_0<\frac{7\pi}{6}$$

alors

$$I \cup II = \{x \in \text{plan} - p \ / \ \ |t_1| < |t_3|\}$$

Sous les conditions du lemme précédent, soient L_1 l'ensemble des points $p_1 \longrightarrow t_1$ alors L_1 est défini par

$$L_1 = \{I \cup II\} \cap \left\{\theta = \frac{-\pi}{6}\right\} \cup \left\{\left(x + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 3\right\},$$

$$L_2 = Rot\left(L_1, \frac{4\pi}{3}\right) \longrightarrow t_2 \longrightarrow \text{plan} - p,$$

et

$$L_3 = Rot\left(L_1, \frac{2\pi}{3}\right) \longrightarrow t_3.$$

Où L_2 s'obtient par une rotation de L_1 d'angle $\frac{4\pi}{3}$, et L_3 s'obtient par une rotation de L_1 d'angle $\frac{2\pi}{3}$. ■

Théorème 3.2.1. *la condition pour laquelle les points dans le plan-p avec $|t_1| = |t_2| < |t_3|$ est $p_i \in L_i$ pour $i = 1, 2, 3$.*

3.3 L'action de l'image réciproque

Théorème 3.3.1. *la courbe représentée par l'ensemble A dans le plan-x est la courbe qui s'obtient par l'action de l'image réciproque sur son symétrie dans le plan-p en utilisant les applications conformes précédentes et on arrive au plan-x*

Soit $x_0 \in Z(\tau_n)$, soit $x_0^{\frac{1}{3}}$ la racine 3eme de x_0
par l'équation précédente

$$x_0^{(n-1)} T_n\left(x_0^{\frac{1}{3}}\right) = \tau_n(x_0).$$

3.3.1 Zéros attracteurs

Notons par L la courbe qui correspond à la condition $|t_1| = |t_2|$, pour tout $\varepsilon > 0$ soit L_ε un $\varepsilon-$voisinage de L dans le plan-x, les racines de $\tau_n(x)$ sont dans L_ε.

Soit

$$B = \{x \in \text{ } plan\text{-}x / |t_1(x)| < |t_2(x)|\}.$$

B est une région ouverte dans le plan-x

Lemme 3.3.1. *Il existe $\rho \in \mathbb{R}_*^+$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$ les zéros de $\tau_n(x)$ sont contenus dans le disque : $D_\rho = \{x / |x| \leq \rho\}$*

Démonstration. Le point à l'infini qu'on note $\infty \longrightarrow 0$ par $(x = \frac{1}{\xi})$ et
$\xi = 0 \longrightarrow \frac{-7i}{2\sqrt{2}}$ par β
$\frac{-7i}{2\sqrt{2}}$ correspond à $t_1 = 0$ et $t_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $t_3 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$
le choix de t_1, t_2, t_3 est arbitraire
$|t_1| = 0$ et $|t_2| = |t_3|$
Alors on a :
$\{x / |x| \geq \rho\} \subseteq B$ tel que pour tout $\{x / |x| \geq \rho\}$, on a : $|t_1| < \frac{1}{3}$, $|t_2| > \frac{1}{2}$, $|t_3| > \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2} \leq P^{'}(t_1) \leq 2$$
$$1 \leq \left| P^{'}(t_2) \right|$$

et

$$\left| P^{'}(t_2) \right| \geq 1$$

on a :

$$\tau_n(x) = \frac{1}{x} \frac{t_1^{-n}}{P^{'}(t_1)} \left[1 + \frac{P^{'}(t_1)}{P^{'}(t_2)} \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^n + \frac{P^{'}(t_1)}{P^{'}(t_3)} \left(\frac{t_1}{t_3} \right)^n \right]$$

ce qui nous donne :

$$|\tau_n(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| \left| \frac{t_1^{-n}}{P^{'}(t_1)} \right| \left| 1 + \frac{P^{'}(t_1)}{P^{'}(t_2)} \left(\frac{t_1}{t_2} \right)^n + \frac{P^{'}(t_1)}{P^{'}(t_3)} \left(\frac{t_1}{t_3} \right)^n \right|.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} |\tau_n(x)| &= \left|\frac{1}{x}\right| \left(\frac{3}{2}\right)^n \left|1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right| \\ &= \left|\frac{1}{x}\right| \left(\frac{3}{2}\right)^n \left|1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right| \\ &\geq \left|\frac{1}{x}\right| \frac{1}{2}\frac{3^n}{2} \\ &> 0, \end{aligned}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

Lemme 3.3.2. *Soit K un sous ensemble compact de B. Alors,*

$$\tau_n(x)t_1^n P'(t_1) \to \frac{1}{x}$$

uniformement pour $x \in K$, $n \in \mathbb{N}$.

Corollaire 3.3.1. *La région B ne contient pas de point de $Z(\tau_n)$.*

Corollaire 3.3.2. $\forall n \in \mathbb{N}$, *tous les zéros de $\tau_n(x)$ sont contenus dans L_ε qui est $Z(\tau_n) \subset L_\varepsilon$.*

CHAPITRE 4

LES QUADRANACCI

Contents

Rappelons que les Quadranacci $Q_n(x)$ *satisfont la relation récurrente suivante :*

$$\begin{cases} Q_{n+4}(x) = x^3Q_{n+3}(x) + x^2Q_{n+2}(x) + xQ_{n+1}(x) + Q_n(x) \\ Q_0(x) = 0, Q_1(x) = 1, Q_2(x) = x^3 \text{ et } Q_3(x) = x^6 + x^2 \end{cases} \tag{4.0.1}$$

Le tableau suivant contient les 10 premiers termes du Quadranacci

n	$Q_n(x)$
0	0
1	1
2	x^3
3	$x^2(x^4+1)$
4	$x(x^8+2x^4+1)$
5	$x^{12}+3x^8+3x^4+1$
6	$x^3(x^{12}+4x^8+6x^4+4)$
7	$x^2(x^{16}+5x^{12}+10x^8+10x^4+3)$
8	$x(x^{20}+6x^{16}+15x^{12}+20x^8+12x^4+2)$
9	$x^{24}+5x^{20}+21x^{16}+35x^{12}+31x^8+12x^4+3$

Pour $x = 1$ *on a les 10 premiers termes de tettranacci*

$Q_0 = 0, Q_1 = 1, Q_2 = 1, Q_3 = 2, Q_4 = 4, Q_5 = 8, Q_6 = 15, Q_7 = 29, Q_8 = 56$ *et* $Q_9 = 108$

4.1 Représentation intégrale

Pour résoudre la récurrence on définit

$$G(x,t) = \sum_{n\geq 0} Q_n(x)t^n, \tag{4.1.1}$$

où $G(x,t)$ *est la fonction génératrice de* $Q_n(x)$*, puisque la récurrence est linéaire et a coéfficients constants un calcul formel nous donne*

$$G(x,t) = \frac{t}{1 - x^3t - x^2t^2 - xt^3 - t^4}. \tag{4.1.2}$$

Lemme 4.1.1. *La famille* $Q_n(x)$ *a représentation intégrale suivante :*
$x \neq 0, \exists r_x > 0$ *tel que :*

$$Q_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{1 - x^3t - x^2t^2 - xt^3 - t^4} \frac{1}{t^n} dt. \tag{4.1.3}$$

Si on remplace t par xt on obtient :

$$\begin{aligned}
Q_n(x) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{tx}{1-x^4t-x^4t^2-x^4t^3-x^4t^4}\frac{1}{(tx)^{n+1}}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{x^{-n}}{1-x^4t-x^4t^2-x^4t^3-x^4t^4}\frac{1}{t^n}dt \\
&= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{x^{-n}}{x^4\left(\frac{1}{x^4}-t-t^2-t^3-t^4\right)}\frac{1}{t^n}dt, x\neq 0 \\
&= -\frac{x^{-n-4}}{2\pi i}\oint \frac{1}{g(t)}\frac{1}{t^n}dt
\end{aligned}$$

où

$$g(t)=t^4+t^3+t^2+t-\frac{1}{x^4}.$$

Alors

$$g'(t)=4t^3+3t^2+2t+1, \tag{4.1.4}$$

et

$$g''(t)=12t^2+6t+2, \tag{4.1.5}$$

$g''(t)=0$ *si et seulement si*

$$t_1=\frac{-3-i\sqrt{15}}{12}$$

et

$$t_2=\frac{-3+i\sqrt{15}}{12}.$$

De même on fait la décomposition de $g(t)$ pour $t\neq t_1$ et $t\neq t_2$

$$\frac{1}{g(t)}=\frac{1}{g'(t_1)}\frac{1}{t(x)-t_1(x)}+\frac{1}{g'(t_2)}\frac{1}{t(x)-t_2(x)}+\frac{1}{g'(t_3)}\frac{1}{t(x)-t_3(x)}+\frac{1}{g'(t_4)}\frac{1}{t(x)-t_4(x)}, \tag{4.1.6}$$

où $t_1(x),t_2(x),t_3(x)$ et $t_4(x)$ sont les zéros simples de $g(t)$. Alors, on a

$$Q_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint\left(\frac{1}{p'(t_1)}\frac{1}{t(x)-t_1(x)}\frac{1}{t^n}+\frac{1}{p'(t_2)}\frac{1}{t(x)-t_2(x)}\frac{1}{t^n}+\frac{1}{p'(t_3)}\frac{1}{t(x)-t_3(x)}\frac{1}{t^n}+\frac{1}{p'(t_4)}\frac{1}{t(x)-t_4(x)}\frac{1}{t^n}\right)dt.$$

Par le théorème des résidus on aura :

$$Q_n(x)=-\frac{1}{x^3}\left[\frac{t_1^{-n}}{p'(t_1(x))}+\frac{t_2^{-n}}{p'(t_2(x))}+\frac{t_3^{-n}}{p'(t_3(x))}+\frac{t_4^{-n}}{p'(t_4(x))}\right].$$

CHAPITRE 5

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans ce travail on a présenté une étude analytiques des zéros des quadranacci qui sont une généralisation des tettranacci, on a commencé par étudier les zéros des Fibonacci et les zéros des tribonacci, on a fait des présentations combinatoires, matricielles et analytiques qui nous ont guidés avec la formule intégrale de Cauchy et le théorème des résidu a localisé les zéros de ses familles.

Parmi les problème qui se présentent dans ce champs on trouve :

1-Le problème de Fermat[1] *qui est le suivant :*

Les nombres $1, 3, 8, 120$ *ont la propriété : le produit de deux de ces nombres (order croissant) par l'un de ces nombres est un carré parfait; Davenport*[2] *a montré que pour* $1, 3, 8, x$ *ont la propriété de Fermat alors* $x = 120$ *et qu'il n'est pas possible de trouver* x, y *tels que* $1, 3, 8, x, y$ *qui ont la propriété précédente.*

On demande de regarder l'extension de cette propriété aux tribonacci et aux tettranacci.

2- D'aprés (2.3) *on construit la fonction* $\zeta(s) = \sum (F_n)^{-s}$ *dite fonction zéta de Fibonacci*

On demande de faire une étude analogue a celle de la fonction zéta de Riemann.

1. P. De Fermat (1601-1665)
2. H. Davenport (1907-1969)

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Bicknell, M.,Hoggatt, V.E., Jr. : Roots of Fibonacci polynomials Q. 11, 271-274 (1973)*

[2] *Bicknell, M.,Hoggatt, V.E., Jr. : Generalized Fibonacci polynomials Q. 16, 300-303 (1978)*

[3] *Boyer, R., Goh, W : On the zero attractor of the Euler polynomials. Adv. Appl. mahs.38, 97-132 (2007)*

[4] *Boyer, R., Goh, W : On the zero attractor of the partition polynomials. http ://arxiv.org/abs/0809.1266*

[5] *Burrage, K. : Generalized Fibonacci polynomials and the functional iteration of rational functions of degree one.*
Fibonacci Q. 28, 175-180 (1990)

[6] *Cartan, H. : Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieures variables complexes (Hermann, Paris, 191)*

[7] *Dilcher, K. : A Generalization of Fibonacci polynomials and a representation of gegenbaur polynomials of integer order. Fibonacci Q.16, 300-303 (1978)*

[8] *He, M.X., Ricci, P.E. : Asymptotic distribution of zeros of weighted Fibonacci polynomials. Complex var. 28, 375-384 (1996)*

[9] *He, M.X., Ricci, P.E., Simon, D. : Numerical results on the zeros of generalized Fibonacci polynomials. calcolo 34, 25-40 (1997)*

[10] Koshy, T. : Fibonacci and Lucas Numbers with applications (Wiley, New york, 2001)

[11] Nehari, Z. : Comformal mappings (McGraw-Hill, New York, 1952)

[12] Stanley, R. : http ://www-math.mit.edc/-rstan/zeros

[13] Titchmarsh, E.C. : The theory of functions, 2nd edn. (Oxford university Press, New York ; 1991)

[14] Vorobiev, N.N. : Fibonacci Numbers (Birkhauser, Basel, 2002) Translated from the Russian by Mircea Martin