République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equation aux deriveés partielles et applications

Thème

Etude de certains systèmes d'évolution d'ordre fractionnaire

Présenté Par :
Yakdha Hadi

Devant le jury :

Mr HAOUAM Kamel	*Prof*	*Univérsité Larbi Tébessi*	*Président*
Mr REBIAI Belgacem	*Prof*	*Univérsité Larbi Tébessi*	*Encadreur*
Mr BOUMAZA Nouri	*MCA*	*Univérsité Larbi Tébessi*	*Examinateur*

Date de soutenance : 19/06/2021

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equation aux deriveés partielles et applications

Thème

Etude de certains systèmes d'évolution d'ordre fractionnaire

Présenté Par :
Yakdha Hadi

Devant le jury :

Mr HAOUAM Kamel	Prof	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr REBIAI Belgacem	Prof	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur
Mr BOUMAZA Nouri	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur

Date de soutenance : 19/06/2021

Dédicace

A l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que dieu te garde dans son vaste paradis, mon père **Ahmed**

A la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur; maman **Nadjia** que j'adore.

À ceux qui m'ont appris qu'une vie sans interconnexion, sans amour et sans coopération ne vaut rien, à mes frères **Haithem** et **Alaa** et mes soeurs **Iftikhar**, **Rawnak** et **Insaf**,

A ma belle nièce **Ranime**

À la source de mon énergie **Layla** avec mes meilleurs vœux.

A ma grande famille **Hadi** et **Saidani**

À mon partenaire de vie qui m'aime sincèrement, qui a rempli ma vie de défis et de surmonter les difficultés. Mon cher mari **Fathi**

A la famille de mon marie **Mizeb**

À l'âme de mon cher grand-père **Salah**

A mes fidéles amies,

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé qui sont toujours à mes côtés

je dédie ce travail .

Yakdha

Remerciement

Je remercie ALLAH le tout puissant d'avoir me donner la force et la volonté de mener à terme ce travail.

J’adresse mais sincères remerciements les plus distingué à mon encadreur ***Pr. REBIAI Belgacem*** pour les efforts qu'il a déployés pour mener à bien cette recherche et pour les précieuses informations qui ont contribué à l'enrichissement de ses pages.

Je remercie aussi les membres du jury ***Pr. HAOUAM Kamel*** et ***Dr. BOUMAZA Nouri***, qui ont accepté de juger ce travail.

J’adresse mes sincères remerciements à tous les professeurs et travailleurs du département de mathématiques et informatique.

Tout le respect et l'appréciation de **mes parents** pour toute la confiance et le soutien qu'ils nous ont apporté

Table des matières

Introduction

Le calcul fractionnaire est défini comme étant la branche mathématique qui étudie la généralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres non nécessairement entiers. Ces origines remontent à la fin du $17^{ème}$ siècle, l'époque où *Newton* et *Leibniz* ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, *Leibniz* a présenté le symbole $\frac{d^n}{dt^n}$ pour désigne la $n^{ème}$ dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$?. Cette lettre, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \frac{1}{2}$, c'est à dire une fraction a en fait donné lieu au nom de cette partie des Mathématiques.
Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier, le concept du calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la "nature" autour de nous.
Les équations d'évolution fractionnaires ont été formulées dans plusieurs domaines d'applications, par exemples, en viscoélasticité, théorie du contrôle, électricité, biologie, électromagnétiques,...etc.
Dans ce mémoire on va aborder certains systèmes d'évolution fractionnaires et de les étudier du point de vue existence et/ou non existence de solutions.
Notre mémoire est organisé comme suit :
Le premier chapitre est destiné aux différents outils et techniques mathématiques utilisés par la suite : quelques notions préliminaires concernant les espaces fonctionnelles, les inégalités utiles, la dérivation et l'intégration fractionnaire, quelques applications des dérivées fractionnaires, et résultats préliminaires.
Le deuxième chapitre est consacré à l'étude d'un systéme d'évolution fractionnaire avec un terme source à croissance exponentielle.
Enfin, nous terminons ce mémoire par une conclusion dans laquelle nous avons fait la synthese el les perspectives de ce travail.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Notations et notions de base

1.1.1 Espaces fonctionnels

Dans cette partie on rappelle les notions et les résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle qui représentent un outil indispensable dans notre étude. Pour plus de détails voir [8] et [31].

• Espace des fonctions intégrables

Définition 1.1 *Une tribu sur $\mathbb{R}^d$,$(d \geq 1)$ est une famille de parties de $\mathbb{R}^d$ contenant $(\emptyset, \mathbb{R})$, stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable (et donc par intersection dénombrable).*
Si $\mathcal{B}$ désigne une tribu sur $\mathbb{R}^d$, les éléments de $\mathcal{B}$ s'appellent les ensembles mesurables : On dit que $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B})$ est un espace mesurable.

Définition 1.2 *Soit $\mathcal{B}$ une tribu de $\mathbb{R}^d$. Une mesure positive μ sur $\mathcal{B}$ est une application de $\mathcal{B}$ dans $\bar{\mathbb{R}}_+$ vérifiant :*
1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. *Pour toute famille dénombrable (B_i) d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints, on a :*

$$\mu\left(\bigcup_1^\infty B_i\right) = \sum_1^\infty \mu(B_i).$$

$(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré.

Définition 1.3 *Une fonction $F : \mathbb{R}^d \to \bar{\mathbb{R}}$ est mesurable si l'image réciproque de tout intervalle ouvert de $\bar{\mathbb{R}}$ est un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$.*

Définition 1.4 *Soit $\Omega = (a, b)$ un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$.*

1. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace des fonctions réelles f sur Ω telles que f est mesurable et*

$$\int_a^b |f(x)|^p \, dx < +\infty.$$

2. *Pour $p = \infty$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions mesurables f bornées presque partout (p.p) sur Ω.*

Exemple 1.1 $\left(L^p(a, b), \|.\|_{L^p(a,b)}\right)$ *est un espace de Banach. En particulier, si $p = 2$ alors :*

$$\|f\|_2 = \int_a^b |f(x)|^{\frac{1}{2}} \, dx < +\infty,$$

et $(L^2(a, b), \|.\|_2)$ est un espace de Hilbert.

Définition 1.5 *Soit $\Omega = (a, b)$ un intervalle fini ou non de $\mathbb{R}$.*

Théorème 1.1 1. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme:*

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

2. *L'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme :*

$$\|f\|_\infty = \inf\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \quad p.p \ \text{ sur } \ \Omega\}.$$

• Espaces des fonctions continues et absolument continues

Définition 1.6 *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est intégrable (pour la mesure μ) si elle est mesurable et si*

$$\int_\Omega |f(x)| \, d\mu(x) < +\infty.$$

Définition 1.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $k \in \mathbb{N}$.On désigne par $C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions f qui leurs dérivées d'ordre inférieur ou égale à k soit continues sur Ω, muni de la norme :*

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \left\|f^{(i)}\right\|_C = \sum_{i=0}^{k} \max_{x \in \Omega} \left|f^{(i)}(x)\right|, \quad k \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si $k = 0$, $C^0(\Omega) \equiv C(\Omega)$ l'espace des fonctions f continues sur Ω muni de la norme :

$$\|f\|_C = \max_{x \in \Omega} |f(x)|.$$

On désigne par $AC(\Omega)$ l'espace des fonctions absolument continues sur Ω.
$C_0(\Omega)$ est l'espace de toutes les fonctions continues sur Ω tendant vers zéro lorsque x tend vers l'infini.
$H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}.$$

D'une façon générale pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ sont définis comme suit

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ vérifiant } |\alpha| \leq m \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^2_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

et

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m \},$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{m,p} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)},$$

où $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ est la dérivée au sens des distributions.
$L^\infty_{loc}(\Omega)$ est l'espace des fonctions localement intégrable défini par

$$L^\infty_{loc}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable, } \int_K |u|^p \, dx < \infty \text{ pour tout compact de } \Omega \right\}.$$

1.1.2 Inégalités utiles

• Inégalité de Hölder

Soient $1 < p, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$. Alors l'inégalité de *Hölder* (voir [8]) s'écrit

$$\int_\Omega |uv| \, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

• Inégalité de Young

La forme standard de l'inégalité de *Young* (voir [8]) affirme que pour tous réels a et b positifs ou nuls et tous réels p et q strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $a^p=b^q$.

L'inégalité de Young avec ε s'écrit comme suit :

$$ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon}+\frac{\varepsilon b^2}{2}.$$

• Inégalité de Ju

Soient $N \geq 1$, $\delta \in [0.2]$ et $q \geq 1$, pour toute fonction positive de Schwartz ψ, on a

$$(-\triangle)^{\frac{\delta}{2}}\psi^q \leq q\psi^{q-1}(-\triangle)^{\frac{\delta}{2}}\psi,$$

où $\triangle$ est le Laplacien. Pour la démonstration de cette inégalité voir [22]

1.1.3 Existence locale et globale de solutions

L'étude de l'éxistence locale et de l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles est basée sur la théorie d'existence pour des équations différentielles semi-linéaires abstraites. Pour plus de détails voir [16].

Soit $(X,\|.\|)$ un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire, et $f : X \to X$. Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}-Au=f,\ t>0, \\ u(0)=u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.8 *On dit qu'une fonction u de la variable $t \geq 0$ à valeurs dans X est une solution locale du problème (1.1), s'il existe un intervalle maximal $[0,T)$, sur le quel u est définie, et elle est l'unique solution de (1.1) dans $C^1([0,T),X)$.*

En particulier, l'une des deux éventualités suivantes a lieu :

i) $T=+\infty$,

ii) $T<+\infty$ et $\lim_{t\to T}\|u\|=+\infty$.

On dit que la solution est globale si i) est satisfaite, et que la solution explose en temps fini si on a ii).

1.2 Intégration fractionnaire

1.2.1 Fonctions spéciales

Dans cette partie, on présente les fonctions : Gamma, Bêta, de Mittag-Leffler et de Mainardi qui seront qui seront utilisées dans le chapitre suivant. Ces fonctions jouent un rôle trés important dans la théorie du calcul fractionnaire, pour plus de détails voir [27] et [32].

• Fonction Gamma

En mathématiques, l'une des fonctions de base du calcul fractionnaire est la fonction eulérienne Gamma (ou fonction Gamma). C'est une fonction complexe qui prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexes.

Définition 1.9 *Pour tout nombre complexe z tel que $\mathrm{Re}(z) > 0$, la fonction Gamma d'Euler $\Gamma(z)$ est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt \ , \qquad \mathrm{Re}(z) > 0. \tag{1.2}$$

Quelques propriétés de La fonction Gamma possède les propriétés suivantes :
a ▶ Une proprieté importante de la fonction $\Gamma(z)$ d'aprés (1.2) est la relation suivante :

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{1.3}$$

Qu'on peut demontrer par une intégration par parties

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty t^z e^{-t}dt \\ &= -t^z e^{-t} \,|_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1} e^{-t}dt \\ &= z\Gamma(z).\end{aligned}$$

b ▶ La fonction Gamma généralise le factoriel car :

$$\Gamma(n+1) = n! \ , \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralise la notion de factorielle.
c ▶ On définit le prolongement de $\Gamma(z)$ pour z nombre réel négatif comme suit :

Supposons $z \in (-1, 0)$ alors $z + 1 > 0$ est bien défini par la formule (1.3), mais non pas par (1.2).

Alors il convient de définir $\Gamma(z)$ par la relation suivante :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}. \tag{1.5}$$

En suivant la même procédure pour tout nombre réel $z \in (-(n+1), -n)$, $(n \in \mathbb{N})$ on oura :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n+1)}{z(z+1)\ldots(z+n)} \quad , \quad 0 < z+n+1 < 1. \tag{1.6}$$

$\Gamma(z)$ est infinie pour $z = 0$, et il en sera de même pour toutes les valeurs entieres négatives de z c'est à dire

$\Gamma(-1), \Gamma(-2), \ldots, \Gamma(-n)$ sont infinies.

On a $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(0^+) = +\infty$.

$\Gamma(z)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < z \leq 1$.

Exemple 1.2 *Pour* $x = \frac{1}{2}$*, on a par définition :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Posons

$$t = u^2,$$

donc

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2u du \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.\end{aligned}$$

L'intégrale de *Gauss* est donnée par

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

• Fonction Bêta

Définition 1.10 *La fonction bêta est définie par l'intégrale :*

$$\beta(z,w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt \qquad \mathrm{Re}(z)>0,\ \ \mathrm{Re}(w)>0. \tag{1.7}$$

Cette fonction est reliée à la fonction gamma par la relation suivante :

$$\beta(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad , \quad \forall x,y>0. \tag{1.8}$$

• Fonction de Mittag-Leffler

La fonction exponentielle, e^z, joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. La généralisation de la fonction exponentielle à un seul paramètre a été introduite par Mittag-Leffler et à deux paramètres a été introduite par *ARGAWAL,* pour plus de détails voir [25].

• Fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre

Définition 1.11 *La fonction Mittag-Leffler à un seul paramètre, est définie par :*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)}\,, \quad \alpha>0,\ \ z\in\mathbb{C}. \tag{1.9}$$

• Fonction Mittag-Leffler à deux paramètres

Définition 1.12 *La fonction Mittag-Leffler à deux paramètres, est définie par :*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}\,, \quad \alpha,\beta>0,\ \ z\in\mathbb{C}. \tag{1.10}$$

- ▶ $E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z)$;
- ▶ $E_{1,1}(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$

• Fonction de Mainardi

Définition 1.13 *Soient $z\in\mathbb{C}$ et $\alpha\in(0,1)$. La fonction de Mainardi est définie par*

$$M_\alpha(z) = \sum\nolimits_{k=0}^{+\infty} \frac{(-z)^k}{k!\Gamma(-\alpha k+1-\alpha)} = \frac{1}{2\pi i}\int_G \sigma^{\alpha-1}e^{(\sigma-z\sigma^\alpha)}d\sigma, \tag{1.12}$$

où G est le contour qui commence et se termine à $-\infty$ et encercle l'origine une fois dans le sens des aiguilles d'une montre.

Proposition 1.1 *Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in (0,1)$, nous avons les assertions suivantes :*

1. *La transformée de Laplace de la fonction $M_\alpha(z)$ est $\mathcal{L}[M_\alpha](t) = E_\alpha(-z)$.*
2. $\int_0^{+\infty} t^r M_\alpha(t)\, dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)}, \quad r > -1.$

Preuve.

1. Nous avons par la relation (1.12)

$$M_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_G \sigma^{\alpha-1} e^{(\sigma - z\sigma^\alpha)} d\sigma,$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} M_\alpha(t)\, e^{-zt} dt &= \int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_G \sigma^{\alpha-1} e^{(\sigma - z\sigma^\alpha)} d\sigma\right] e^{-zt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_G \sigma^{\alpha-1} e^{\sigma}\left[\int_0^{+\infty} e^{-t(z+\sigma^\alpha)} dt\right] d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{\sigma^{\alpha-1} e^{\sigma}}{z+\sigma^\alpha} d\sigma \\ &= E_\alpha(-z). \end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{L}[M_\alpha](t) = E_\alpha(-z).$$

2. En utilisant la propriété suivante (voir [19]),

$$\int_0^{+\infty} t^r M_\alpha(t)\, dt = \lim_{s \to 0} (-1)^r \frac{d^r}{ds^r} E_\alpha(-s),$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{ds^r} E_\alpha(-s) &= \frac{d^r}{ds^r} \sum\nolimits_{r=0}^{\infty} \frac{(-s)^r}{\Gamma(\alpha r+1)} \\ &= \frac{(-1)^r r!}{\Gamma(\alpha r+1)}. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t^r M_\alpha(t)\, dt &= \lim_{s \to 0} (-1)^r \frac{(-1)^r r!}{\Gamma(\alpha r+1)} \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r+1)}. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.1 *Par la Proposition précédente, on trouve pour* $r=0$

$$\int_0^{+\infty} M_\alpha(t)\,dt = 1.$$

Autrement dit, M_α *est une densité de probabilité. D'autre part, notons par*

$$\rho_\alpha\left(t^{-1/\alpha}\right) = \alpha t^{1+\frac{1}{\alpha}} M_\alpha(t),$$

où la transformée de Laplace de ρ_α *est donnée par la relation*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\rho_\alpha(t)\,dt = e^{-\lambda^\alpha}. \tag{1.13}$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\lambda^\alpha}\right)(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda^\alpha)^k}{k!}\right)(t)\\
&= \sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\mathcal{L}^{-1}\left(\lambda^{\alpha k}\right)(t)\\
&= \sum\nolimits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{-\alpha k-1}}{k!\Gamma(-\alpha k)}\\
&= -\alpha t^{-\alpha-1}\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{-\alpha k}}{\alpha(k+1)!\Gamma(-\alpha k-\alpha)}\\
&= \alpha t^{-\alpha-1}\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{-\alpha k}}{k!\Gamma(-\alpha k-\alpha+1)}\\
&= \alpha t^{-\alpha-1}M_\alpha\left(t^{-\alpha}\right) = \rho_\alpha(t).
\end{aligned}$$

1.2.2 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Dans cette section, on présente une généralisation de l'opérateur d'intégration au cas fractionnaire.

Définition 1.14 *L'intégrale de Riemann-Liouville d'ordre* $\alpha>0$ *de la fonction* $f\in L^1([a,b],\mathbb{R})$ *est définie par :*

$$(I_a^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt.$$

Théorème 1.2 *Pour* $f\in C([a,b])$, *l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville possède la propriété de semi-groupe*

$$I_a^{\alpha}\left[\left(I_a^{\beta}f\right)(x)\right]=I_a^{\alpha+\beta}f\left(x\right).$$

Preuve. La preuve découle directement de la définition

$$I_a^{\alpha}\left[\left(I_a^{\beta}f\right)(x)\right]=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)}\int_a^x\left(x-t\right)^{\alpha-1}\left[\int_a^t\left(t-u\right)^{\beta-1}f\left(u\right)du\right]dt,$$

où $f\in C\left([a,b]\right)$, d'après le théorème de *Fubini* et par le changement de variable $t=u+s(x-u)$ on obtient

$$I_a^{\alpha}\left[\left(I_a^{\beta}f\right)(x)\right]=\frac{B\left(\alpha,\beta\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta\right)}\int_a^x\left(t-u\right)^{\beta-1}f\left(u\right)du=I_a^{\alpha+\beta}f\left(x\right).$$

■

Proposition 1.2 *On a les propriétés suivantes :*

1. *L'opérateur intégral I_a^{α} est linèaire.*
2. $I_a^{0}f\left(t\right)=f\left(t\right).$
3. $\frac{d}{dx}\left(I_a^{\alpha}f\right)(x)=\left(I_a^{\alpha-1}f\right)(x).$

Exemple 1.3 *Soit $f\left(x\right)=\left(x-a\right)^{\beta},\beta>0$. A l'aide de changement de variable $s=a+(t-a)x$, on obtient :*

$$\begin{aligned}I_a^{\alpha}f\left(t\right)&=\frac{\left(x-a\right)^{\beta+\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}\int_0^1\left(1-x\right)^{\alpha-1}x^{\beta}dx\\&=\frac{\left(x-a\right)^{\beta+\alpha}}{\Gamma\left(\alpha\right)}B\left(\alpha,\beta+1\right)\\&=\frac{\left(x-a\right)^{\beta+\alpha}\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha\right)\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)},\end{aligned}$$

d'où

$$I_a^{\alpha}f\left(t\right)=\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\alpha+\beta+1\right)}\left(x-a\right)^{\beta+\alpha}.\tag{1.14}$$

1.3 Dérivation fractionnaire

Il existe plusieurs approches pour la dérivation fractionnaire malheureusement elles ne sont pas toutes équivalentes. Nous présentons dans cette partie les approches de *Grünwald-Letnikov*, de *Riemann-Liouville* et de *Caputo* qui sont les plus utilisées, pour plus de détails voir [27] et [32].

1.3.1 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à dérivée d'ordre arbitraire. Ce qui permet d'exprimer la dérivée d'ordre entier p (si p est positif) et l'intégrale répétée $(-p)$ fois (si p est négatif), d'une fonction f comme ceci : Pour une fonction f donnée, d'après la définition classique de la dérivation en un point t on a :

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(t) - f(t-h)\right). \tag{1.15}$$

On utilise le même concept pour la dérivée seconde pour trouver

$$\begin{aligned} f''(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f'(t) - f'(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(t)-f(t-h)}{h} - \frac{f(t)-f(t-2h)}{h}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left(f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)\right). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Pour la dérivée troisième, on obtient

$$f'''(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3}\left(f(t) - 3f(t-h) + 3f(t-2h) - f(t-3h)\right).$$

Par itération on trouve la formule générale

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f(t-kh),$$

où

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-k+1)} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Pour un entier p arbitraire $(p \leq n)$, on a

$$f^{(p)}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^p} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} f(t-kh),$$

en tenant compte du fait que $\begin{pmatrix} p \\ p+j \end{pmatrix} = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

Définition 1.15 *La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par :*

$$^{GL}D^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} f(t-kh),$$

où $0 \leq n-1 < \alpha < n$.

Remarque 1.2 *Remarquons que*

$$\begin{aligned} (-1)^k \begin{pmatrix} \alpha \\ k \end{pmatrix} &= (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \\ &= (-1)^k \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)(\alpha-k)\Gamma(\alpha-k)}{k!(\alpha-k)\Gamma(\alpha-k)} \\ &= \frac{-\alpha(-\alpha+1)\ldots(-\alpha-k+1)}{k!} \\ &= \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)}. \end{aligned}$$

Donc

$$^{GL}D^{\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-\alpha)} f(t-kh).$$

L'intégrale fractionnaire se traduit par l'expression suivante :

$$^{GL}I^{\alpha} f(t) = ^{GL}D^{-\alpha} f(t) = \lim_{h\to 0} h^{\alpha} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} f(t-kh).$$

Pour $\alpha = 1$, on obtient :

$$\begin{aligned} ^{GL}I^{1} f(t) &= \lim_{h\to 0} h \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(1)} f(t-kh) = \lim_{h\to 0} h \sum_{k=0}^{+\infty} f(t-kh) \\ &= \int_0^{t-a} f(t-y)\,dy = \int_a^t f(\tau)\,d\tau. \end{aligned}$$

Proposition 1.3 *Pour m entier positif et p non entier on a :*

$$\frac{d^m}{dt^m}\left(^{GL}D_t^p f(t)\right) = ^{GL}D_t^{m+p} f(t),$$

et

$$^{GL}D_t^p \left(\frac{d^m}{dt^m} f(t)\right) = ^{GL}D_t^{m+p} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-m}}{\Gamma(k-p-m+1)} \neq \frac{d^m}{dt^m}\left(^{GL}D_t^p f(t)\right).$$

On déduit alors que la dérivation fractionnaire et la dérivation classique ne commutent que si $f^{(k)}(a)=0$ pour tout $k=1,2,3,\ldots,m-1$.

Remarque 1.3 *La dérivée d'une fonction constante au sens de Grünwald-Letnikov en générale n'est pas nulle ni constante.*
Si $f(t)=c$, on a $f^{(k)}(t)=0$, pour $k=1,2,...,n$. Donc pour p non entier, on obtient :

$$\begin{aligned}
{}^{GL}D_t^p f(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} \\
&\quad +\frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\,d\tau \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}.
\end{aligned}$$

1.3.2 Approche de Riemann-Liouville

Définition 1.16 *Soit $f\in L^1([a,b])$, les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville à gauche ${}^{RL}D_a^\alpha$ et à droite ${}^{RL}D_b^\alpha$ d'ordre $\alpha>0$ de la fonction f sont définies par :*

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\,dt,$$

$${}^{RL}D_b^\alpha f(x)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\int_x^t (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)\,dt,$$

avec $a<x<b$ et $n=[\alpha]+1$ où $[\alpha]$ est la partie entière de α.
En particulier, pour $\alpha=m\in\mathbb{N}$, on a :

$${}^{RL}D_a^0 f(x)=\frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d}{dx}\right)\int_a^x f(t)\,dt=f(x),$$

$${}^{RL}D_a^m f(x)=\frac{1}{\Gamma(1)}\left(\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}\right)\int_0^x f(t)\,dt=\frac{d^m}{dx^m}f(x).$$

Donc la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville coïncide avec la dérivée classique pour $\alpha\in\mathbb{N}$.

Remarque 1.4 *Pour $n=[\alpha]+1$ et $x>a$, on a :*

$${}^{RL}D_a^\alpha f(x)=\left(\frac{d}{dx}\right)^n I_a^{n-\alpha} f(x).$$

Exemple 1.4 *Soit* $f(x) = (x-a)^{\beta}$ *avec* $\beta > -1$. *D'après la définition (1.16) puis la remarque (1.3), on a :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = I_a^{n-\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+n-\alpha+1)} D^n (x-a)^{n-\alpha+\beta}. $$

Alors, pour $(\alpha-\beta) \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, *on a :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = {}^{RL}D_a^{\alpha} (x-a)^{\alpha-j} = 0, \quad j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, $$

par ailleurs si $(\alpha-\beta) \notin \{1, 2, 3, \dots, n\}$ *on trouve :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}. $$

En particulier, si $\beta = 0$, *la dérivée fractionnaire d'une fonction constante* $f(x) = c$ *au sens de Riemann-Liouville n'est pas nulle, ni constante, mais on a :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} c = \frac{c\,(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

La proposition suivante établie une condition suffisante d'existence de la dérivée fractionnaire.

Proposition 1.4 *Soient* $\alpha \geq 0$ *et* $n = [\alpha]+1$. *Si* $f \in C^n([a,b])$, *alors la dérivée fractionnaire* ${}^{RL}D_a^{\alpha} f$ *existe presque partout sur* $[a,b]$ *et de plus, elle est donnée par :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} f(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(j-\alpha+1)} (x-a)^{j-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt. $$

L'opérateur de dérivation au sens de *Riemann-Liouville* possède les propriétés résumées dans la proposition suivante :

Proposition 1.5 *Soient* $\alpha, \beta > 0$ *tels que* $n-1 \leq \alpha < n$, $m-1 \leq \beta < m$.

1. *Pour* $f \in L^1([a,b])$, *l'égalité :*

$$ {}^{RL}D_a^{\alpha} \left(I_a^{\alpha} f(x) \right) = f(x), $$

est vrai pour presque tout $x \in [a,b]$.

2. *Si* $0 < \beta < \alpha$, *alors pour* $f \in L^1([a,b])$, *la relation :*

$$ {}^{RL}D_a^{\beta} \left({}^{RL}D_a^{\alpha} f \right)(x) = \left(I_a^{\alpha-\beta} f \right)(x), $$

est vrai presque partout sur $[a,b]$.

3. *Si* $0 < \alpha \leq \beta$ *et la dérivée fractionnaire* ${}^{RL}D_a^{\beta-\alpha} f$ *existe, alors on a :*

$$ {}^{RL}D_a^{\beta} \left(I^{\alpha} f \right)(x) = \left({}^{RL}D_a^{\beta-\alpha} f \right)(x). $$

4. *Si* $f \in L^1([a,b])$ *et* $I^{n-\alpha} f \in C^n([a,b])$, *alors :*

$$\left[I_a^{\alpha}\left({}^{RL}D_a^{\alpha} f\right)\right](x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{j-n+\alpha}}{\Gamma(j-n+\alpha+1)} \lim_{x \to a^+} \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^j I_a^{n-\alpha} f\right](x).$$

5. *Pour tous* $f, g \in C([a,b])$ *tels que* $D_{a|t}^{\alpha} f = {}^{RL} D_a^{\alpha} f$, $D_{t|b}^{\alpha} g = {}^{RL} D_b^{\alpha} g$ *existent et sont continues, la formule d'intégration par parties est donnée par :*

$$\int_a^b g(t)\, D_{a|t}^{\alpha} f(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, D_{t|b}^{\alpha} g(t)\, dt.$$

1.3.3 Approche de Caputo

Bien que la dérivation fractionnaire au sens de *Riemann-Liouville* a joué un rôle important dans le développement du calcul fractionnaire, à cause de ses applications dans les mathématiques pures et appliquées. Cependant, étant donnée que la dérivée au sens de *Riemann-Liouville* d'une constant n'est pas nulle et que les conditions initiales du problème de Cauchy sont exprimées par des dérivées d'ordre fractionnaire, *Caputo* propose une autre approche où la dérivée de la constante est nulle et que les conditions initiales sont exprimées comme dans le cas classique par des dérivées d'ordre entier.

Définition 1.17 *Soit* $f \in C^n([a,b])$, *les dérivées fractionnaires de Caputo à gauche* ${}^{C}D_a^{\alpha}$ *et à droite* ${}^{C}D_b^{\alpha}$ *d'ordre* $\alpha > 0$ *de la fonction* f *sont définies par :*

$${}^{C}D_a^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt,$$

$${}^{C}D_b^{\alpha} f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^t (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t)\, dt,$$

avec $a < x < b$ *et* $n = [\alpha] + 1$ *où* $[\alpha]$ *est la partie entière de* α.

Remarque 1.5 *On pose :*

$${}^{C}D^{\alpha} f(x) = {}^{C} D_a^{\alpha} f(x) = I^{n-\alpha}\left(D^n f(x)\right).$$

Exemple 1.5 *Considérons la fonction :*

$$f(x) = x^{\beta},\ \beta > 0.$$

Pour $0 < n-1 \leq \alpha < n \leq \beta$, *on a :*

$${}^{C}D^{\alpha} f(x) = I^{n-\alpha}\left(D^n x^{\beta}\right),$$

où

$$D^n x^\beta = \left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-n}\right).$$

Par suite, on a :

$$I^{n-\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-n}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt.$$

On fait le changement de variable $t = yx$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt &= \int_0^1 (x-xy)^{n-\alpha-1} (xy)^{\beta-n} x dy \\
&= \int_0^1 x^{n-\alpha-1} (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} x^{\beta-n+1} dy \\
&= \int_0^1 x^{\beta-\alpha} (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\
&= x^{\beta-\alpha} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^{\beta-n} dy \\
&= x^{\beta-\alpha} B(n-\alpha, \beta-n+1) \\
&= x^{\beta-\alpha} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$I^{n-\alpha}\left(\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} x^{\beta-\alpha}\right) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-n)} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha},$$

et finalement, on obtient :

$${}^C D^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} x^{\beta-\alpha}.$$

Pour $\beta = 0$, on a :

$${}^C D^\alpha 1 = 0.$$

Contrairement à la dérivation de Riemann-Liouville la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo d'une constante est nulle.

1.3.4 Relation entre l'approche de Caputo et de Riemann-Liouville

Le théorème suivant établit le lien entre la dérivée fractionnaire au sens de *Caputo* et celle au sens de *Riemann-Liouville*.

Théorème 1.3 *Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si f possède $(n-1)$ dérivée en a et si ${}^C D_a^\alpha f(x)$ et ${}^{RL} D_a^\alpha f(x)$ existent, alors :*

$${}^C D_a^\alpha f(x) = {}^{RL} D_a^\alpha \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^{k-\alpha}}{\sum(k-\alpha-1)} \right]. \quad (1.18)$$

De la relation (1.18), on déduit que si

$$f^{(k)}(x) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

on aura :

$$^{C}D_{a}^{\alpha} f(x) =^{RL} D_{a}^{\alpha} f(x),$$

et les deux définitions sont alors équivalentes.

1.4 Applications des intégrales et des dérivées fractionnaires

Les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires ce qui simplifient leurs usages pour résoudre des problèmes appliqués dans plusieurs champs de la science. Pour plus de détails, voir par exemple [33].

1.4.1 Interprétation physique de l'intégrale de Riemann-Liouville

Pour donner l'interprétation physique de l'intégration non entière, nous considérons l'exemple d'un conducteur d'une voiture. Supposons que la voiture est équipée de deux appareils de mesure, le compteur de vitesse qui enregistre la vitesse de conducteur et l'horloge qui affiche le temps τ. Cependant, le temps τ affiché par l'horloge est incorrect.
Nous supposons que la relation entre le temps incorrect (affiché par l'horloge et dont le conducteur considère comme le temps exact), et le temps exact T est donnée par la fonction $g_t(\tau)$ telle que $T = g_t(\tau)$ et

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)}\left[t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha}\right].$$

Ceci signifie que si le conducteur mesure l'intervalle de temps $d\tau$, le vrai intervalle de temps est $dT = dg_t(\tau)$.
Le conducteur A représente le conducteur de la voiture ; ignorant l'erreur de l'horloge, calcule la distance parcourue au moyen d'une intégrale classique

$$S_A(t) = \int_0^t V(\tau)\, d\tau. \tag{1.19}$$

Un observateur O, lui en connaissance de la mauvaise mesure de l'horloge et de la fonction $g_t(\tau)$ reliant le temps incorrect au temps exact, calcule la distance réellement parcourue par la voiture

$$S_O(t) = \int_0^t V(\tau)\, dg_t(\tau) = I^{\alpha} V(t), \tag{1.20}$$

avec

$$I^{\alpha}V(t)=\frac{1}{\Gamma(t)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}V(\tau)\,d\tau.$$

L'intégrale donnée par l'équation (1.19) peut être interprétée comme la distance parcourue par un mobile pour lequel nous avons effectué deux mesures :

Une mesure correct de la vitesse et une mesure incorrect du temps. L'intégrale fractionnaire de *Riemann-Liouville* donnée par l'équation (1.20) peut être interprétée comme la véritable distance parcourue par l'objet mobile, pour le quel nous avons enregistré ses valeurs locales de la vitesse $V(\tau)$ (c'est sa vitesse individuelle) et la valeur locale du temps τ (temps individuel), sachant que la relation entre le temps enregistré localement et le temps cosmique est donnée par la fonction $g_t(\tau)$.

La fonction $g_t(\tau)$ d'écrit le temps échelle non homogène, qui dépend non seulement de τ, mais aussi du paramètre t qui représente la dernière valeur mesurée du temps individuel de l'objet mobile. Quand t change, l'intervalle de temps cosmique change également.

La notion du temps cosmique est reliée au changement de la gravité dans l'espace temps d'un corps en déplacement. En effet un corps mobile change sa position dans l'espace temps, le champ de la gravité dans l'espace-temps tout entier change également en raison de mouvement. Par conséquent ; l'intervalle de temps cosmique, qui correspond à l'histoire du mouvement de l'objet mobile, change. Ceci affecte le calcul de la vraie distance $S_O(t)$ parcourue par cet objet mobile.

Donc, l'intégrale fractionnaire de *Riemann-Liouville* de la vitesse individuelle $V(\tau)$, d'un objet mobile, pour lequel la relation entre son temps individuel τ, et le temps cosmique T à chaque instant t est donnée par la fonction connue $T=g_t(\tau)$ représente la véritable distance $S_O(t)$ parcourue par cet objet.

1.4.2 Interprétation physique de la dérivée de Riemann-Liouville

En utilisant les propriétés de la dérivation et de l'intégration fractionnaire, on peut exprimer l'expression de la vitesse individuelle $V(\tau)$ à partir de la véritable distance parcourue $S_O(t)$.

La dérivée fractionnaire de *Riemann-Liouville* de la vraie distance $S_O(t)$ parcourue par le mobile permet de donner l'expression de la vitesse individuelle $V(t)$: $V(\tau)=D^{\alpha}S_O(t)$ avec

$$D^{\alpha}S_O(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\frac{S_O(t)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\ 0\leq\alpha\leq 1.$$

On peut aussi dériver la valeur de la véritable distance par rapport à la variable de temps t qui donne la relation entre la vitesse $V_O(t)=S'_O(t)$ du mouvement de point de vue de l'observateur indépendant O et la vitesse individuelle $V(t)$:

$$V_O(t) = \frac{d}{dt} I^{\alpha} V(t) = D^{1-\alpha} V(t) .$$

Par conséquent, la dérivée au sens de *Riemann-Liouville* d'ordre $(1-\alpha)$, de la vitesse individuelle $V(t)$ est égale à la vitesse de vue de l'observateur indépendant $V_O(t)$, si le temps individuel τ et le temps cosmique T sont reliés par la fonction $T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)} \left[t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha} \right],$$

pour $\alpha = 1$, quand il n'y a aucune déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncident :

$$V_O(t) = V(t).$$

1.5 Résultats préliminaires

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et résultats qui seront utilisés dans le chapitre suivant.

Soit $T(t) = e^{-t(-\Delta)^{\beta/2}}$. Alors, comme $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint défini positif dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, on peut en déduire que $T(t)$ est un semi-groupe fortement continu sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ engendré par l'opérateur $(-\Delta)^{\beta/2}$.

De plus $T(t) = S_\beta(t) * w$ pour tout $w \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $t > 0$, et

$$S_\beta(t)(x) = S_\beta(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi - t|\xi|^{\beta}} d\xi,$$

où S_β satisfait les propriété suivantes :

1. $S_\beta(1) \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$,
2. $S_\beta(t,x) \geq 0$,
3. $\int_{\mathbb{R}^d} S_\beta(t,x)\, dx = 1$,

pour tous $x \in \mathbb{R}^d$ et $t > 0$. En utilisant l'inégalité de *Young* pour la convulation et la forme auto-adjoint de S_β nous avons

$$\|S_\beta(t) * w\|_q \leq C t^{-(d/\beta)(1/r-1/q)} \|w\|_r, \tag{1.21}$$

pour tout $w \in L^r(\mathbb{R}^d)$ et tout $1 \leq q \leq \infty$, $t > 0$; et

$$\|S_\beta(t) * w\|_q \leq \|w\|_q,$$

pour tout $w \in L^q(\mathbb{R}^d)$ et tout $1 \leq q \leq \infty$, $t > 0$.
De plus, comme $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)(-\Delta)^{\beta/2} v(x) = \int_{\mathbb{R}^d} v(x)(-\Delta)^{\beta/2} u(x),$$

pour tout $u, v \in D\left((-\Delta)^{\beta/2}\right) = H^\beta(\mathbb{R}^d)$.
Les opérateurs de *Mittag-Leffler* basés sur le semi-groupe $T(t)$ engendré par l'opérateur $(-\Delta)^{\beta/2}$ sont définis par

$$P_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^\infty M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds = \int_0^\infty M_\alpha(s) e^{-st^\alpha(-\Delta)^{\beta/2}} ds,$$

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha) ds = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) e^{-st^\alpha(-\Delta)^{\beta/2}} ds.$$

Lemme 1.1 *L'opérateur* $\{P_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0}$ *satisfait les propriétés suivantes :*

1. *Si* $w_0 > 0, w_0 \not\equiv 0$, *alors* $P_{\alpha,\beta}(t) w_0 > 0$,
2. *Si* $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ *et* $1/r = 1/p - 1/q < \beta/d$, *alors*
$$\|P_{\alpha,\beta}(t) w_0\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leq t^{-\frac{d}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(1 - d/(\beta r))}{\Gamma(1 - \alpha d/(\beta r))} \|w_0\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Preuve. La première propriété découle immédiatement du fait que $T(t) w_0 > 0$ et $M_\alpha(t) \geq 0$, $t > 0$.
Pour la deuxième propriété, en utilisant la formule (1.21) et les propriétés de la fonction $M_\alpha(t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^\infty M_\alpha(s) T(st^\alpha) w_0 ds \right\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} &\leq \int_0^\infty M_\alpha(s) (t^\alpha s)^{-d/\beta r} \|w_0\|_{Lp(\mathbb{R}^d)} ds \\
&\leq \int_0^\infty M_\alpha(s) (st^\alpha)^{(-d/\beta)(1/p - 1/q)} \|w_0\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} ds \\
&\leq \int_0^\infty M_\alpha(s) (st^\alpha)^{(-d/(\beta r))} \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} ds \\
&= t^{-d/(\beta r)\alpha} \int_0^\infty M_\alpha(s) s^{-d/(\beta r)} \|w_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} ds \\
&= t^{-\frac{d}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(1 - d/(\beta r))}{\Gamma(1 - \alpha d/(\beta r))} \|w_0\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 1.2 *L'opérateur* $\{S_{\alpha,\beta}(t)\}_{t>0}$ *satisfait :*

1. Si $w_0 \geq 0$, $w_0 \not\equiv 0$ Alors $S_{\alpha,\beta}(t)\, w_0 > 0$,
2. Si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{2\beta}{d}$.

Alors nous avons le résultat suivant :

$$\left\| S_{\alpha,\beta}(t)\, w_0 \right\|_{L^q\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq \alpha t^{-d/(\beta r)\alpha} \frac{\Gamma\left(2 - d/\left(\beta r\right)\right)}{\Gamma\left(1 + \alpha - \alpha d/\left(\beta r\right)\right)} \left\| w_0 \right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du lemme précédent. Pour la deuxième propriété, nous avons :

$$\begin{aligned}
\left\| \int_0^\infty M_\alpha(s)\, \alpha s T(s)\, w_0 ds \right\|_{L^q\left(\mathbb{R}^d\right)} &\leq \int_0^\infty M_\alpha(s)\, \alpha s \left(t^\alpha s\right)^{(-d/\beta)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} w_0 ds \\
&\leq \int_0^\infty M_\alpha(s)\, \alpha s \left(t^\alpha s\right)^{(-d/\beta)\left(\frac{1}{r}\right)} \left\| w_0 \right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)} ds \\
&\leq \int_0^\infty M_\alpha(s)\, \alpha s \left(t^\alpha s\right)^{(-d/\beta r)} \left\| w_0 \right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)} ds \\
&= \alpha t^{-\frac{d}{\beta r}\alpha} \int_0^\infty M_\alpha(s)\, s s^{-\frac{d}{\beta r}} \left\| w_0 \right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)} ds \\
&= \alpha t^{-\frac{d}{\beta r}\alpha} \int_0^\infty M_\alpha(s)\, s^{1-\frac{d}{\beta r}} \left\| w_0 \right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)} ds \\
&= \alpha t^{-\frac{d}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma\left(1 + 1 - \frac{d}{\beta r}\right)}{\Gamma\left(1 + \alpha\left(1 - \frac{d}{\beta r}\right)\right)} \left\| w_0 \right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)} \\
&= \alpha t^{-\frac{d}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{\beta r}\right)}{\Gamma\left(1 + \alpha - \frac{\alpha d}{\beta r}\right)} \left\| w_0 \right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\| \int_0^\infty M_\alpha(s)\, \alpha s T(s)\, w_0 ds \right\|_{L^q\left(\mathbb{R}^d\right)} = \alpha t^{-\frac{d}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{\beta r}\right)}{\Gamma\left(1 + \alpha - \frac{\alpha d}{\beta r}\right)} \left\| w_0 \right\|_{L^p\left(\mathbb{R}^d\right)}.$$

■

Chapitre 2

Etude d'un systéme d'évolution fractionnaire avec un terme source à croissance exponentielle

2.1 Introduction

Dans ce chapitre (voir [4]), on s'intérèsse au système d'évolution suivant :

$$\begin{array}{c} D_{0|t}^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\beta/2} u = J_{0|t}^{1-\alpha_1}(e^v), \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ D_{0|t}^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\beta/2} v = J_{0|t}^{1-\alpha_2}(e^u), \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \end{array} \tag{2.1}$$

avec les données initiales :

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.2}$$

où $d \geq 1$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1, 0 < \beta \leq 2$,et $D_{0|t}^{\alpha_i}$ est la dérivée fractionnaire de *Caputo* d'ordre α_i, $J_{0|t}^{1-\alpha_i}$ désigne l'intégrale fractionnaire de *Riemann-Liouville* d'ordre $1-\alpha_i$ définie par :

$$J_{0|t}^{1-\alpha_i}(e^{w(t)}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha_i} e^{w(t)} ds,$$

où Γ est la fonction Gamma, $(-\Delta)^{\beta/2}$ est le Laplacien farctionnaire défini par :

$$(-\Delta)^{\beta/2} w(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\beta \mathcal{F}(w)(\xi))(x),$$

pour tout $w \in D((-\Delta)^{\beta/2}) = H^\beta(\mathbb{R}^d)$, où $H^\beta(\mathbb{R}^d)$ est l'espace de Sobolev défini par :

$$H^\beta(\mathbb{R}^d) = \left\{ w \in S'; (-\Delta)^{\beta/2} w \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}, \quad \text{si } \beta \notin \mathbb{N},$$

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^d) = \left\{ w \in L^2(\mathbb{R}^d); (-\Delta)^{\beta/2} w \in L^2(\mathbb{R}^d) \right\}, \text{ si } \beta \in \mathbb{N},$$

où S' est l'espace de Schwartz et $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier et $\mathcal{F}^{-1}$ est son inverse et $u_0, v_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$, où $C_0(\mathbb{R}^d)$ est l'espace de toutes les fonctions continues et décroissantes vers zéro à l'infini.
Si $D^{\alpha}_{0|t}$ est remplacé par l'opérateur différentiel classique, nous avons le problème suivant :

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = J^{1-\alpha_1}_{0|t}(e^v), & x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ v_t + (-\Delta)^{\beta/2} v = J^{1-\alpha_2}_{0|t}(e^u), & x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ u\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right), \ v\left(x, 0\right) = v_0\left(x\right), \_ x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

qui a été étudié par *Ahmad et al* [1]. Ils ont prouvé l'existence d'une solution locale unique, et sous certaines conditions convenables sur les données initiales, ils ont prouvé que la solution explose en un temps fini et il ont étudié leur profil d'explosion. Le problème a été considéré par Fino et Kirane [14] avec les non-linéarités $J^{1-\alpha_1}_{0|t}(|v|^{p-1}v)$ et $J^{1-\alpha_2}_{0|t}(|u|^{q-1}u)$, i.e.

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = J^{1-\alpha_1}_{0|t}(|v|^{p-1}v), & x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ v_t + (-\Delta)^{\beta/2} v = J^{1-\alpha_2}_{0|t}(|u|^{q-1}u), & x \in \mathbb{R}^d, \quad t > 0, \\ u\left(x, 0\right) = u_0\left(x\right), \quad v\left(x, 0\right) = v_0\left(x\right), \_\_\_ x \in \mathbb{R}^d. \end{cases}$$

D'abord, ils ont validé le problème par un résultat d'existence d'une solution unique. Ensuite, ils ont montré que l'explosion de la solution existe et il ont étudié leur profil d'explosion en temp fini.
Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2, nous présentons des résultats d'existence locale et d'unicité de la solution douce du problème (2.1)-(2.2). Dans la section 3, nous montrons que l'explosion de ces solutions exite, tandis que dans la section 4, nous donnons une estimation de la durée de vie des solutions explosives avec certaines données initiales.

2.2 Existence locale

Dans cette section, nous allons prouver l'existence locale et l'unicité de la solution douce du problème (2.1)-(2.2). Tout d'abord nous donnons la définition de la solution douce.

Définition 2.1 *(Solution douce). Soient $u_0, v_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $T > 0$. On dit que*

$$(u, v) \in C\left([0, T), C_0\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \times C\left([0, T), C_0\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$$

est une solution douce du problème (2.1)-(2.2) si (u,v) *satisfait, pour* $t \in [0,T]$, *les équations suivantes :*

$$u(t) = P_{\alpha_1,\beta}(t)\,u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}\,S_{\alpha_1,\beta}(t-s)\;J_{0|s}^{1-\alpha_i}(e^{v(s)})ds,$$

$$v(t) = P_{\alpha_2,\beta}(t)\,v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1}\,S_{\alpha_2,\beta}(t-s)\;J_{0|s}^{1-\alpha_2}(e^{u(s)})ds.$$

Théorème 2.1 *(Existance locale). Soient* $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^d)$ *. Alors il existe un temps maximale* $T_{\max} > 0$ *et une solution douce unique* $(u,v) \in C([0,T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^d)) \times C([0,T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^d))$ *au problème (2.1)-(2.2). De plus, nous avons*

$$T_{\max} = +\infty \text{ ou bien } T_{\max} < +\infty \text{ avec } \lim_{t\to T_{\max}} \left(\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \|v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\right) = +\infty.$$

De plus, si $u_0, v_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, $v_0 \not\equiv 0$, *alors* $u(t), v(t) > 0$ *pour tout* $0 < t < T_{\max}$. *En outre, si* $u_0, v_0 \in L^r(\mathbb{R}^d)$, *pour* $1 < r < \infty$, *alors* $u, v \in C([0,\ T_{\max}); L^r(\mathbb{R}^d))$.

Preuve. Pour $T > 0$, nous définissons l'espace de *Banach*

$$E_r = \left\{(u,v) \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^d)) \times C([0,T], C_0(\mathbb{R}^d)) : |||(u,v)||| \leq 2(\ \|u_0\|_\infty + \ \|v_0\|_\infty)\right\},$$

où $\|.\|_\infty = \|.\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$ et $|||.|||$ est la norme de E_r définit par :

$$|||(u,v)||| = \ \|u\|_1 + \ \|v\|_1 = \ \|u\|_{L^\infty([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))} + \ \|v\|_{L^\infty([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^d))}.$$

Ensuite, pour tout $(u,v) \in E_r$, on définit l'opérateur Ψ par $\Psi(u,v) = (\Psi_1(u,v), \Psi_2(u,v))$, où

$$\Psi_1(u,v) = \ P_{\alpha_1,\beta}(t)\,u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}\,S_{\alpha_1,\beta}(t-s)J_{0|s}^{1-\alpha_1}(e^{v(s)})ds,$$

et

$$\Psi_2(u,v) = \ P_{\alpha_2,\beta}(t)\,v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1}\,S_{\alpha_2,\beta}(t-s)J_{0|s}^{1-\alpha_2}(e^{u(s)})ds.$$

L'existence d'une solution locale sera prouvée comme un point fixe de Ψ en utilisant le théorème du point fixe de *Banach*.

$\cdot\ \Psi : E_r \longrightarrow E_r$.

Soit $(u,v)\in E_r$, nous utilisons les lemmes (1.3) et (1.4)

$$\begin{aligned}
|||\Psi(u,v)||| &= |||\Psi_1(u,v)|||_1 + |||\Psi_2(u,v)|||_1\\
&= \left\| P_{\alpha_1,\beta}(t)\,u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} S_{\alpha_1,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_1}(e^{v(s)})ds \right\|_1\\
&\quad + \left\| P_{\alpha_2,\beta}(t)\,v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} S_{\alpha_2,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_2}(e^{u(s)})ds \right\|_1\\
&\le \|u_0\|_\infty + \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} S_{\alpha_1,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_1}(e^{v(s)})ds \right\|_{L^\infty}\\
&\quad + \|v_0\|_\infty + \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} S_{\alpha_2,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_2}(e^{u(s)})ds \right\|_{L^\infty},
\end{aligned}$$

et comme

$$J_{0|s}^{1-\alpha_i}(e^{w(t)}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha_i} e^{w(s)}ds, \quad i=1,2,$$

alors on a

$$\begin{aligned}
|||\Psi(u,v)||| &\le \|u_0\|_\infty + \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} S_{\alpha_1,\beta}(t-s) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_1} e^{v(s)} d\tau ds \right\|_{L^\infty}\\
&\quad + \|v_0\|_\infty + \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} S_{\alpha_2,\beta}(t-s) \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_2)} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_2} e^{u(s)} d\tau ds \right\|_{L^\infty}\\
&\le \|u_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(\alpha_1)} \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_1} \left\|e^{v(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0.T])}\\
&\quad + \|v_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_2)\Gamma(\alpha_2)} \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_2} \left\|e^{u(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0.T])}\\
&\le \|u_0\|_\infty + C_1 \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_1} \left\|e^{v(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0.T])}\\
&\quad + \|v_0\|_\infty + C_2 \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_2} \left\|e^{u(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty([0.T])}.
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant le théoréme de *Fubini*, on obtient

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|\Psi(u,v)\right|\right|\right| &\leq \left\|u_0\right\|_\infty + C_1\left\|\int_0^t\int_\tau^t (t-s)^{\alpha_1-1}(s-\tau)^{-\alpha_1}\left\|e^{v(\tau)}\right\|_\infty dsd\tau\right\|_{L^\infty([0.T])} \\
&\quad + \left\|v_0\right\|_\infty + C_2\left\|\int_0^t\int_\tau^t (t-s)^{\alpha_2-1}(s-\tau)^{-\alpha_2}\left\|e^{u(\tau)}\right\|_\infty dsd\tau\right\|_{L^\infty([0.T])} \\
&\leq \left\|u_0\right\|_\infty + \left\|v_0\right\|_\infty + Te^{\|v\|_1} + Te^{\|u\|_1} \\
&\leq \left\|u_0\right\|_\infty + \left\|v_0\right\|_\infty + 2Te^{2\left(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty\right)},
\end{aligned}$$

où $\qquad C_1 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(\alpha_1)},\ C_2 = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_2)\Gamma(\alpha_2)}.$

Mainenant, nous choisissons $2Te^{2\left(\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty\right)} \leq \left\|u_0\right\|_\infty + \left\|v_0\right\|_\infty$, alors $\Psi(u,v) \in E_r$.

· Ψ est une contraction.

Soient $(u,v),(\tilde{u},\tilde{v}) \in E_r$, nous utilisons le lemme (1.4), nous trouvons

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left|\Psi(u,v) - \Psi(\tilde{u},\tilde{v})\right|\right|\right| &= \left\|\Psi_1(u,v) - \Psi_1(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_1 + \left\|\Psi_2(u,v) - \Psi_2(\tilde{u},\tilde{v})\right\|_1 \\
&= \left\|\begin{array}{c} P_{\alpha_1,\beta}(t)\,u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} S_{\alpha_1,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_1}(e^{v(s)})ds \\ -\left(P_{\alpha_1,\beta}(t)\,\tilde{u}_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} S_{\alpha_1,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_1}(e^{\tilde{v}(s)})ds\right) \end{array}\right\|_1 \\
&\quad + \left\|\begin{array}{c} P_{\alpha_2,\beta}(t)\,v_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} S_{\alpha_2,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_2}(e^{u(s)})ds \\ -\left(P_{\alpha_1,\beta}(t)\,\tilde{v}_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} S_{\alpha_2,\beta}(t-s)\, J_{0|s}^{1-\alpha_2}(e^{\tilde{u}(s)})ds\right) \end{array}\right\|_1 \\
&\leq C_1\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}\int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_1}\left\|e^{v(\tau)} - e^{\tilde{v}(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds\right\|_{L^\infty([0,t])} \\
&\quad + C_2\left\|\int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1}\int_0^s (s-\tau)^{-\alpha_2}\left\|e^{u(\tau)} - e^{\tilde{u}(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds\right\|_{L^\infty([0,t])} \\
&= C_1\left\|\int_0^t\int_\tau^t (t-s)^{\alpha_1-1}(s-\tau)^{-\alpha_1}\left\|e^{v(\tau)} - e^{\tilde{v}(\tau)}\right\|_\infty dsd\tau\right\|_{L^\infty([0.T])} \\
&\quad + C_2\left\|\int_0^t\int_\tau^t (t-s)^{\alpha_2-1}(s-\tau)^{-\alpha_2}\left\|e^{u(\tau)} - e^{\tilde{u}(\tau)}\right\|_\infty dsd\tau\right\|_{L^\infty([0.T])}.
\end{aligned}$$

Donc, on déduire que

$$\begin{aligned}
|||\Psi(u,v)-\Psi(\tilde{u},\tilde{v})\ ||| &\leq T\left\|e^{v}-e^{\tilde{v}}\right\|_1+T\left\|e^{u}-e^{\tilde{u}}\right\|_1 \\
&\leq Te^{2\left(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty\right)}\ \|v-\tilde{v}\|_1+Te^{2\left(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty\right)}\ \|u-\tilde{u}\|_1 \\
&= Te^{2\left(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty\right)}\ |||(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})||| \\
&\leq \frac{1}{2}\,|||(u,v)-(\tilde{u},\tilde{v})|||\,,
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité suivante :

$$\left|e^{w(t)}-e^{\tilde{w}(t)}\right|=e^{\lambda w(t)+\mu\tilde{w}(t)}\left|w(t)-\tilde{w}(t)\right|,\ 0<\lambda,\ \mu<1,\ \lambda+\mu=1, \tag{2.3}$$

et T est choisi tel que :

$$Te^{2\left(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty\right)}\leq\frac{1}{2}.$$

Alors Ψ est une contraction sur E_T. Donc d'après le théoréme du point fixe de *Banach*, il existe une solution douce $(u,v)\in E_T$ du problème (2.1)-(2.2).

Maintenant, on va demontrer l'unicité de la solution. Soient $(u,v),(\tilde{u},\tilde{v})\in E_T$ deux solutions douces du problème (2.1)-(2.2), en utilisant le lemme (1.4) et l'inégalité (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|u(t)-\tilde{u}(t)\|_\infty+\|v(t)-\tilde{v}(t)\|_\infty &\leq C_1\int_0^t(t-s)^{\alpha_1-1}\int_0^s(s-\tau)^{-\alpha_1}\left\|e^{v(\tau)}-e^{\tilde{v}(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds \\
&\quad +C_2\int_0^t(t-s)^{\alpha_2-1}\int_0^s(s-\tau)^{-\alpha_2}\left\|e^{u(\tau)}-e^{\tilde{u}(\tau)}\right\|_\infty d\tau ds \\
&= C_1\int_0^t\int_\tau^t(t-s)^{\alpha_1-1}(s-\tau)^{-\alpha_1}\left\|e^{v(\tau)}-e^{\tilde{v}(\tau)}\right\|_\infty ds d\tau \\
&\quad +C_2\int_0^t\int_\tau^t(t-s)^{\alpha_2-1}(s-\tau)^{-\alpha_2}\left\|e^{u(\tau)}-e^{\tilde{u}(\tau)}\right\|_\infty ds d\tau \\
&\leq e^{2\left(\|u_0\|_\infty+\|v_0\|_\infty\right)}\left(\int_0^t\left(\|v(\tau)-\tilde{v}(\tau)\|_\infty\|v(\tau)-\tilde{v}(\tau)\|_\infty\right)d\tau\right).
\end{aligned}$$

Alors l'unicité découle de l'inégalité de *Gronwall* (voir [10]). De plus, cette unicité implique l'existence d'une solution sur un intervalle maximal $[0,T_{\max})$ evec l'alternative éxpliquée dans le théoreme.

· **Positivité de la solution** : Si $u_0,v_0\geq 0$ et $u_0\not\equiv 0, v_0\not\equiv 0$, nous avons d'aprés la définition de la solution douce et le lemme (1.3)

$$\begin{aligned}
u(t) &\geq P_{\alpha_1,\beta}(t)\,u_0>,t\in(0,T_{\max})\,, \\
v(t) &\geq P_{\alpha_2,\beta}(t)\,v_0>,t\in(0,T_{\max})\,.
\end{aligned}$$

·**Régularité de la solution** : Soient $u_0, v_0 \in L^r(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq r \leq \infty$, nous répétons l'argument du point fixe dans l'espace

$$E_{T,r} = \left\{(u,v) \in \Sigma \times \Sigma : |||(u,v)||| \leq 2 \times (\|u_0\|_\infty + \|v_0\|_\infty), |||(u,v)|||_{\infty,r} \leq 2(\|u_0\|_{L^r} + \|v_0\|_{L^r})\right\},$$

où

$$\Sigma = C\left([0,T]; C_0\left(\mathbb{R}^d\right) \cap L^r\left(\mathbb{R}^d\right)\right),$$

$$|||(u,v)|||_{\infty,r} = \|u\|_{L^\infty([0,T];L^r(\mathbb{R}^d))} + \|v\|_{L^\infty([0,T];L^r(\mathbb{R}^d))},$$

nous obtenons une solution douce unique (u,v) dans $E_{T,r}$. D'où, $(u,v) \in C\left([0,T_{\max}); L^r\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$. Ce qui achève la preuve du théorème. ■

2.3 Explosions des solutions

Premièrement, nous donnons la définition de la solution faible du problème (2.1)-(2.2) et après nous prouvons l'explosion de cette solution en temps fini.

Définition 2.2 *(Solution faible). Soient $u_0, v_0 \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $T > 0$. On dit que (u,v) est une solution faible du problème (2.1)-(2.2) si $(u,v) \in L^p\left((0,T); L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)\right) \times L^p\left((0,T); L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ et satisfait*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} D_{t|T} \Psi_1 u\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta)^{\beta/2} \Psi_1 u\,dx\,dt \\
= &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} J_{0|t}(e^v) \Psi_1\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} D_{t|T} \Psi_1 u_0\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} D_{t|T} \Psi_2 v\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (-\Delta)^{\beta/2} \Psi_2 v\,dx\,dt \\
= &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} J_{0|t}(e^u) \Psi_2\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} D_{t|T} \Psi_2 v_0\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

pour toutes les fonctions test $\Psi_1, \Psi_2 \in C^1\left([0,T]; H^\beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ telles que $\Psi_1(x,T) = \Psi_2(x,T) = 0$.

Lemme 2.1 *[14]. Soient $u_0, v_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right), T > 0$ et $u, v \in C\left([0,T]; C_0\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ une solution douce du problème (2.1)-(2.2). Alors (u,v) est une solution faible du problème (2.1)-(2.2).*

Théorème 2.2 *(Explosion de la solution). Soient $u_0, v_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$ avec $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, $v_0 \geq 0$, $v_0 \not\equiv 0$. Alors la solution douce du problème (2.1)-(2.2) explose en temps fini.*

Preuve. La preuve est par contradiction. Supposons que (u, v) est une solution douce globale non triviale du problème (2.1)-(2.2). Alors (u, v) est une solution du ce problème dans $C\left([0,T]\,; C_0\mathbb{R}^d\right)$ pour tout $T >> 1$ tel que $u\left(t\right), v\left(t\right) > 0$ pour tout $t \in [0,T]$.
Soit $\Psi_i\left(x,t\right) = D_{t|T}^{1-\alpha_i}\varphi\left(x,t\right), \, i = 1,2$, avec $\varphi \in C^1\left([0,T]\,; H^\beta\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ tel que

$$\varphi\left(x,t\right) = \varphi_1\left(t\right)\varphi_2^l\left(x\right), \quad l >> 1,$$

où

$$\varphi_1\left(t\right) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^\gamma, \quad \gamma >> 1,$$

$$\varphi_2\left(x\right) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\theta/\beta}}\right), \quad \theta = \min\left\{\alpha_1, \alpha_2\right\},$$

et Φ est une fonction régulière, tel que

$$\Phi\left(x\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 1, \\ \searrow & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Alors d'après la définition (3.2) et le lemme (3.1), on a

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} u_0\left(x\right)\varphi\left(x,0\right)dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} e^v\varphi\left(x,t\right)dxdt \\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} u\left(x,t\right)\left(-\Delta\right)^{\beta/2}D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi\left(x,t\right)dxdt - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} u\left(x,t\right)\frac{d}{dt}\varphi\left(x,t\right)dxdt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} v_0\left(x\right)\varphi\left(x,0\right)dx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} e^u\varphi\left(x,t\right)dxdt \\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} v\left(x,t\right)\left(-\Delta\right)^{\beta/2}D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi\left(x,t\right)dxdt - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} v\left(x,t\right)\frac{d}{dt}\varphi\left(x,t\right)dxdt, \end{aligned}$$

et si nous posons $\Omega_T = [0,T] \times \Omega$, tel que $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^d, |x| \leq 2T^{\theta/\beta}\right\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} u_0\left(x\right)\varphi_2^l\left(x\right)\varphi_1\left(0\right)dx + \int_0^T\int_{\Omega} e^v\varphi\left(x,t\right)dxdt \\ &= \int_0^T\int_{\Omega} u_0\left(x,t\right)\left(-\Delta\right)^{\beta/2}\varphi_2^l\left(x\right)D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1\left(t\right)dxdt - \int_0^T\int_{\Omega} u\left(x,t\right)\varphi_2^l\left(x\right)\varphi_1^{'}\left(t\right)dxdt, \end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega} v_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1(0)\,dx + \int_0^T\int_{\Omega} e^u \varphi(x,t)\,dxdt$$
$$= \int_0^T\int_{\Omega} v_0(x,t)\,(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2^l(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_0^T\int_{\Omega} v(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1^{'}(t)\,dxdt.$$

En utilisant $\varphi_1(0) = 1$, nous pouvons écrire

$$\int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \int_0^T\int_{\Omega} e^v \varphi(x,t)\,dxdt$$
$$= \int_0^T\int_{\Omega} u_0(x,t)\,(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2^l(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_0^T\int_{\Omega} u(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1^{'}(t)\,dxdt,$$

et

$$\int_{\Omega} v_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \int_0^T\int_{\Omega} e^u \varphi(x,t)\,dxdt$$
$$= \int_0^T\int_{\Omega} v_0(x,t)\,(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2^l(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_0^T\int_{\Omega} v(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1^{'}(t)\,dxdt.$$

Maintenant, d'aprés l'inégalité de Ju, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\Omega} u_0(x,t)\,(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2^l(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_0^T\int_{\Omega} u(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1^{'}(t)\,dxdt\\
&\leq l\int_0^T\int_{\Omega} u_0(x,t)\,(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2^{l-1}(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_0^T\int_{\Omega} u(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1^{'}(t)\,dxdt\\
&\int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \int_0^T\int_{\Omega} e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt\\
&\leq l\int_0^T\int_{\Omega} u_0(x,t)\,(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2^{l-1}(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_0^T\int_{\Omega} u(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1^{'}(t)\,dxdt\\
&\leq l\int_0^T\int_{\Omega} u(x,t)\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Omega} u(x,t)\,\varphi_2^l(x)\left|\varphi_1^{'}(t)\right| dxdt\\
&= lI_1 + J_1,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} v_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \int_0^T\int_{\Omega} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt\\
&\leq l\int_0^T\int_{\Omega} v(x,t)\,\varphi_2^{l-1}(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\,D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_0^T\int_{\Omega} v(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1^{'}(t)\,dxdt\\
&\leq l\int_0^T\int_{\Omega} v(x,t)\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\Omega} v(x,t)\left|\varphi_1^{'}(t)\right| dxdt\\
&= lI_2 + J_2.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de *Young* $(e=\exp(1))$

$$AB \leq \varepsilon e^{A}+B\ln\frac{B}{e\varepsilon},\quad \text{pour } A,B>0,\quad \varepsilon>0,$$

avec

$$\varepsilon=\frac{1}{4l}\varphi(x,t),A=u(x,t),B=\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\ \text{dans } I_1,$$

et

$$\varepsilon=\frac{1}{4l}\varphi(x,t),A=v(x,t),B=\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\ \text{dans } I_2,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{1}{4l}\int_0^T\int_\Omega \varphi(x,t)e^{u(x,t)}+\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\ln\left(\frac{\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)}{e\frac{1}{4l}\varphi(x,t)}\right)dxdt\\
&\leq \int_0^T\int_\Omega\left[\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)\ln\left(\frac{4l\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t)}{e\varphi_1(t)\varphi_2^l(x)}\right)\right]dxdt\\
&\quad+\frac{1}{4l}\int_0^T\int_\Omega e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{1}{4l}\int_0^T\int_\Omega \varphi(x,t)e^{v(x,t)}+\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\ln\left(\frac{\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)}{e\frac{1}{4l}\varphi(x,t)}\right)dxdt\\
&\leq \int_0^T\int_\Omega\left[\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)\ln\left(\frac{4l\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right|D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t)}{e\varphi_1(t)\varphi_2^l(x)}\right)\right]dxdt\\
&\quad+\frac{1}{4l}\int_0^T\int_\Omega e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt.
\end{aligned}$$

De même façon, pour $J_i, i=1,2$ avec $\varepsilon=\frac{1}{4l}\varphi(x,t), A=w(x,t), (w=u$ pour J_1 et $w=v$ pour $J_2)$ et $B=\left|\varphi_1^{'}(t)\right|$, on obtient

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^T\int_\Omega u(x,t)\left|\varphi_1^{'}(t)\right|dxdt\\
&\leq \int_0^T\int_\Omega\left[\frac{1}{4}\varphi(x,t)e^{u(x,t)}\left|\varphi_1^{'}(x,t)\right|\ln\frac{\left|\varphi_1^{'}(t)\right|}{e\frac{1}{4}\varphi(x,t)}\right]dxdt\\
&\leq \int_0^T\int_\Omega\left[\left|\varphi_1^{'}(t)\right|\ln\left(\frac{4\left|\varphi_1^{'}(t)\right|}{l\varphi_1(t)\varphi_2^l(x)}\right)\right]dxdt+\frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt,
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \int_0^T \int_\Omega v(x,t) \left| \varphi_1^{'}(t) \right| dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega \left[\frac{1}{4} \varphi(x,t) e^{v(x,t)} \left| \varphi_1^{'}(x,t) \right| \ln \frac{\left| \varphi_1^{'}(t) \right|}{e \frac{1}{4} \varphi(x,t)} \right] dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega \left[\left| \varphi_1^{'}(t) \right| \ln \left(\frac{4 \left| \varphi_1^{'}(t) \right|}{l \varphi_1(t) \varphi_2^l(x)} \right) \right] dxdt + \frac{1}{4} \int_0^T \int_\Omega e^{v(x,t)} \varphi(x,t) \, dxdt.
\end{aligned}
$$

Et comme

$$
D_{t|T}^{1-\alpha_i} \varphi_1(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_i)} T^{\alpha_i - 1} \left(1 - \frac{t}{T} \right)_+^{\gamma + \alpha_i - 1},
$$

et

$$
\left| \varphi_1^{\prime}(t) \right| = \gamma T^{-1} \left(1 - \frac{t}{T} \right)_+^{\gamma - 1},
$$

alors

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_0^T \int_\Omega \left| (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2(x) \right| D_{t|T}^{1-\alpha_1} \varphi_1(t) \ln \left(\frac{4l \left| (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2(x) \right| \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_1)} T^{\alpha_1 - 1} \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{\gamma+\alpha-1}}{e \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{\gamma} \varphi_2^l(x)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4l} \int_0^T \int_\Omega e^{u(x,t)} \varphi(x,t) \, dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega \left| (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2(x) \right| D_{t|T}^{1-\alpha_1} \varphi_1(t) \ln \left(\frac{C_3 \left| (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2(x) \right| T^{\alpha_1 - 1} \left(1 - \frac{t}{T} \right)^{\alpha_1 - 1}}{\varphi_2^l(x)} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4l} \int_0^T \int_\Omega e^{u(x,t)} \varphi(x,t) \, dxdt,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
I_2 \leq & \int_0^T \int_\Omega \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t) \ln\left(\frac{4l\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_1)} T^{\alpha_2-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma+\alpha_1-1}}{e\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma}\varphi_2^l(x)}\right) \\
& +\frac{1}{4l}\int_0^T\int_\Omega e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\
\leq & \int_0^T \int_\Omega \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t) \ln\left(\frac{C_4\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_2-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) \\
& +\frac{1}{4l}\int_0^T\int_\Omega e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt,
\end{aligned}
$$

où

$$
C_3 = \frac{4l\Gamma(\gamma+1)}{e\Gamma(\gamma+\alpha_1)}, \quad C_4 = \frac{4l\Gamma(\gamma+1)}{e\Gamma(\gamma+\alpha_2)}.
$$

De même façon, pour $J_i, i = 1, 2$, on obtient

$$
\begin{aligned}
J_1 \leq & \int_0^T \int_\Omega \left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{4\left|\varphi_1'(t)\right|}{e\varphi_1(t)\varphi_2^l(t)}\right) dxdt + \int_\Omega e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\
\leq & \int_0^T \int_\Omega \left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{4\left|-\gamma T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma-1}\right|}{e\varphi_1(t)\varphi_2^l(x)}\right) dxdt + \frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\
\leq & \int_0^T \int_\Omega \left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(\frac{4\gamma\left|T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma-1}\right|}{e\varphi_2^l(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma}}\right) dxdt + \frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\
\leq & \int_0^T \int_\Omega \left|\varphi_1'(t)\right| \ln\left(C_5\frac{T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt + \frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt,
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
J_2 &\leq \int_0^T \int_\Omega \left|\varphi_1^{'}(t)\right| \ln\left(\frac{4\left|\varphi_1^{'}(t)\right|}{e\varphi_1(t)\,\varphi_2^l(t)}\right) dxdt + \int_\Omega e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega \left|\varphi_1^{'}(t)\right| \ln\left(\frac{4\left|-\gamma T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma-1}\right|}{e\varphi_1(t)\,\varphi_2^l(x)}\right) dxdt + \frac{1}{4}\int_0^T \int_\Omega e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega \left|\varphi_1^{'}(t)\right| \ln\left(\frac{4\gamma\left|T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma-1}\right|}{e\varphi_2^l(x)\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\gamma}}\right) dxdt + \frac{1}{4}\int_0^T \int_\Omega e^{vux,t}\varphi(x,t)\,dxdt \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega \left|\varphi_1^{'}(t)\right| \ln\left(C_5\frac{T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt + \frac{1}{4}\int_0^T \int_\Omega e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt,
\end{aligned}$$

où

$$C_5 = \frac{4\gamma}{e}.$$

En déduire finalement que

$$\int_\Omega u_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \int_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \leq lI_1 + J_1,$$

où

$$I_1 \leq \int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t) \times \ln\left(\frac{C_3\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_1-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt,$$

et

$$J_1 \leq \int_{\Omega_T} \left|\varphi_1^{'}(t)\right| \times \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt + \frac{1}{4}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt.$$

Que veut dire que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \int_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \;&\leq\; l\int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1'(t) \\
&\quad \times \ln\left(\frac{C_3\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_1-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt \\
&\quad + \int_{\Omega_T} \left|\varphi_1^{'}(t)\right| \times \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Pour I_2 et J_2, on a

$$\int\limits_{\Omega} v_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \int\limits_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \leq lI_2 + J_2,$$

où

$$I_2 \leq \int\limits_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t) \times \ln\left(\frac{C_4\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_2-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt,$$

et

$$J_2 \leq \int\limits_{\Omega_T} \left|\varphi_1'(t)\right| \times \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt + \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt.$$

Que veut dire que

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} v_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \int\limits_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \quad \leq \quad & l\int\limits_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1'(t) \\
& \times \ln\left(\frac{C_4\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_2-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt \\
& + \int\limits_{\Omega_T} \left|\varphi_1'(t)\right| \times \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt \\
& + \frac{1}{4}\int\limits_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt. \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Alors, d'après (2.4) et (2.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int\limits_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \frac{3}{4}\int\limits_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\
\leq \quad & l\int\limits_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t) \\
& \times \ln\left(\frac{C_3\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_1-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt \\
& + \int\limits_{\Omega_T} \left|\varphi_1'(t)\right| \times \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt \\
& + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t) \\
& \times \ln\left(\frac{C_4\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_2-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt \\
& + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_T} \left|\varphi_1'(t)\right| \times \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt, \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} v_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \frac{3}{4}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\
\leq\ & l\int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_2}\varphi_1(t) \\
&\times \ln\left(\frac{C_4\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_2-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt \\
&+\int_{\Omega_T} \left|\varphi_1^{'}(t)\right| \times \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt \\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega_T} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha_1}\varphi_1(t) \\
&\times \ln\left(\frac{C_3\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2(x)\right| T^{\alpha_1-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt \\
&+\frac{1}{2}\int_{\Omega_T} \left|\varphi_1^{'}(t)\right| \times \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}\left(1-\frac{t}{T}\right)^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) dxdt. \qquad (2.7)
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables $\tau = \frac{t}{T}$ et $y = \frac{x}{T^{\alpha_i/\beta}}$, nous obtenons

$$\left.\begin{aligned} \tau = \tfrac{t}{T} &\Longrightarrow dt = T d\tau \\ y = \tfrac{x}{T^{\frac{\alpha_i}{\beta}}} &\Longrightarrow dx = T^{\frac{\alpha_i}{\beta}} dy \end{aligned}\right. \Longrightarrow dxdt = T^{\frac{\alpha_i d}{\beta}+1} dy d\tau,$$

$$(-\Delta_x)^{\beta/2}\varphi_2 = T^{-\alpha_i}(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2,$$

$$D_{t|T}^{1-\alpha_i}\varphi_1(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_i)} T^{\alpha_i-1}(1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_i-1},$$

et

$$|\varphi_1'(t)| = \gamma T^{-1}(1-\tau)_+^{\gamma-1}.$$

Maintenant, nous définissons $\Omega_2 = [0,1] \times \left\{ y \in \mathbb{R}^d, \|y\| \leq 2 \right\}$. Donc, on peut écrire (2.6) et (2.7) comme suite :

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} u_0(x)\, \varphi_2^l(x)\, dx + \frac{3}{4} \int\limits_{\Omega_T} e^{v(x,t)} \varphi(x,t)\, dx dt \\
\leq\ & l \int\limits_0^1 \int\limits_{\substack{\mathbb{R}^d \\ \|y\| \leq 2}} \left| T^{-\alpha_1} (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2 \left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}} y \right) \right| \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_1)} T^{\alpha_1 - 1} (1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_1-1} \\
& \times \ln \left(\frac{C_3 \left| T^{-\alpha_1} (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2 \left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}} y \right) \right| T^{\alpha_1-1} (1-\tau)^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l \left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}} y \right)} \right) T^{\frac{\alpha_1 d}{\beta}+1} dy d\tau \\
& + \int\limits_0^1 \int\limits_{\substack{\mathbb{R}^d \\ \|y\| \leq 2}} \left| \gamma T^{-1} (1-\tau)^{\gamma-1} \right| \ln \left(\frac{C_5 T^{-1} (1-\tau)^{-1}}{\varphi_2^l \left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}} y \right)} \right) T^{\frac{\alpha_1 d}{\beta}+1} dy d\tau \\
& + \frac{1}{2} l \int\limits_0^1 \int\limits_{\substack{\mathbb{R}^d \\ \|y\| \leq 2}} \left| T^{-\alpha_2} (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2 \left(T^{\frac{\alpha 2}{\beta}} y \right) \right| \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_1)} T^{\alpha_2 - 1} (1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_2-1} \\
& \times \ln \left(\frac{C_4 \left| T^{-\alpha_2} (-\Delta)^{\beta/2} \varphi_2 \left(T^{\frac{\alpha 2}{\beta}} y \right) \right| T^{\alpha_2-1} (1-\tau)^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l \left(T^{\frac{\alpha 2}{\beta}} y \right)} \right) T^{\frac{\alpha_2 d}{\beta}+1} dy d\tau \\
& + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \int\limits_{\substack{\mathbb{R}^d \\ \|y\| \leq 2}} \left| \gamma T^{-1} (1-\tau)^{\gamma-1} \right| \times \ln \left(\frac{C_5 T^{-1} (1-\tau)^{-1}}{\varphi_2^l \left(T^{\frac{\alpha 2}{\beta}} y \right)} \right) T^{\frac{\alpha_2 d}{\beta}+1} dy d\tau,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega} v_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \frac{3}{4}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\
\leq\ & l\int_0^1 \int_{\substack{\mathbb{R}^d \\ \|y\|\leq 2}} \left|T^{-\alpha_2}(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)\right| \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_2)} T^{\alpha_2-1}(1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_2-1} \\
&\times \ln\left(\frac{C_3\left|T^{-\alpha_2}(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)\right| T^{\alpha_2-1}(1-\tau)^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)}\right) T^{\frac{\alpha_2 d}{\beta}+1}dyd\tau \\
&+\int_0^1 \int_{\substack{\mathbb{R}^d \\ \|y\|\leq 2}} \left|\gamma T^{-1}(1-\tau)^{\gamma-1}\right| \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}(1-\tau)^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)}\right) T^{\frac{\alpha_2 d}{\beta}+1}dyd\tau \\
&+\frac{1}{2}l\int_0^1 \int_{\substack{\mathbb{R}^d \\ \|y\|\leq 2}} \left|T^{-\alpha_1}(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)\right| \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_2)} T^{\alpha_1-1}(1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_1-1} \\
&\times \ln\left(\frac{C_4\left|T^{-\alpha_1}(-\Delta)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)\right| T^{\alpha_1-1}(1-\tau)^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)}\right) T^{\frac{\alpha_1 d}{\beta}+1}dyd\tau \\
&+\frac{1}{2}\int_0^1 \int_{\substack{\mathbb{R}^d \\ \|y\|\leq 2}} \left|\gamma T^{-1}(1-\tau)^{\gamma-1}\right| \times \ln\left(\frac{C_5 T^{-1}(1-\tau)^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)}\right) T^{\frac{\alpha_1 d}{\beta}+1}dyd\tau.
\end{aligned}
$$

Finalement, on déduit que :

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \frac{3}{4}\int_{\Omega_T} e^{v(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\
\leq \quad & C_6 T^{\alpha_1 d/\beta} \int_{\Omega_2} \left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_1-1} \\
& \times \ln\left(\frac{C_3 T^{-1}\left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)\right|(1-\tau)^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)}\right)dyd\tau \\
& +\gamma T^{\frac{\alpha_1 d}{\beta}} \int_{\Omega_2} (1-\tau)^{\gamma-1}\ln\left(\frac{C_5 T^{-1}(1-\tau)^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)}\right)dyd\tau \\
& +C_7 T^{\frac{\alpha_2 d}{\beta}} \int_{\Omega_2} \left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_2-1} \\
& \times \ln\left(\frac{C_4 T^{-1}\left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)\right|(1-\tau)^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)}\right)dyd\tau \\
& +\frac{\gamma}{2} T^{\frac{\alpha_2 d}{\beta}} \int_{\Omega_2} (1-\tau)^{\gamma-1}\ln\left(\frac{C_5 T^{-1}(1-\tau)^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)}\right)dyd\tau,
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} v_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,dx + \frac{3}{4}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t)\,dxdt \\
\leq\ & C_8 T^{\alpha_2 d/\beta}\int_{\Omega_2}\left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_2-1} \\
&\times \ln\left(\frac{C_3T^{-1}\left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)\right|(1-\tau)^{\alpha_2-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)}\right)dyd\tau \\
&+\gamma T^{\frac{\alpha_2 d}{\beta}}\int_{\Omega_2}(1-\tau)^{\gamma-1}\ln\left(\frac{C_5T^{-1}(1-\tau)^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_2}{\beta}}y\right)}\right)dyd\tau \\
&+C_9 T^{\frac{\alpha_1 d}{\beta}}\int_{\Omega_2}\left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\gamma+\alpha_1-1} \\
&\times \ln\left(\frac{C_4T^{-1}\left|(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)\right|(1-\tau)^{\alpha_1-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)}\right)dyd\tau \\
&+\frac{\gamma}{2}T^{\frac{\alpha_1 d}{\beta}}\int_{\Omega_2}(1-\tau)^{\gamma-1}\ln\left(\frac{C_5T^{-1}(1-\tau)^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\frac{\alpha_1}{\beta}}y\right)}\right)dyd\tau,
\end{aligned}\tag{2.9}$$

où

$$C_6 = 2C_9 = \tfrac{l\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_1)} \quad \text{et} \quad C_8 = 2C_7 = \tfrac{l\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha_2)}.$$

Ainsi, nous avons deux fonctions bornées φ_2 et $(-\Delta_y)^{\beta/2}\varphi_2$ dans Ω_2 et

$$\varphi_2 \to 1 \text{ comme } T \to +\infty.$$

En utilisant le théoréme de convergence dominée de *Lebesgue*, nous déduisons que le coté droit de (2.8) et (2.9) diverge vers $-\infty$ lorsque $T \to +\infty$, tandis que le coté gauche est positif. Cela conduit à une contradiction. ∎

2.4 Temps de vie des solutions

Dans cette section, nous donnons une estimation de la limite supérieure de la durée maximale d'existence des solutions explosives pour le problème suivant

$$\begin{cases}
D_{0|t}^{\alpha_1}u_\varepsilon + (-\Delta)^{\beta/2}u_\varepsilon = J_{0|t}^{1-\alpha_1}(e^{v_\varepsilon}), & x\in\mathbb{R}^d, \quad t>0,\\
D_{0|t}^{\alpha_2}v_\varepsilon + (-\Delta)^{\beta/2}v_\varepsilon = J_{0|t}^{1-\alpha_2}(e^{u_\varepsilon}), & x\in\mathbb{R}^d, \quad t>0,\\
u_\varepsilon(x,0) = \varepsilon u_0(x),\ v_\varepsilon(x,0) = \varepsilon v_0(x), & x\in\mathbb{R}^d,
\end{cases}\tag{2.10}$$

où $\varepsilon > 0$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $0 < \beta \leq 2$, et $u_0, v_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$ satisfait

$$u_0(x) \geq m_0 |x|^{-\frac{\delta}{\alpha_1}}, \quad v_0(x) \geq n_0 |x|^{-\frac{\delta}{\alpha_2}}, \quad |x| \geq \varepsilon_0, \ \max\{\alpha_1, \alpha_2\} d < \delta < \beta, \tag{2.11}$$

pour certains constants positives m_0, n_0 et ε_0.

Théorème 2.3 *Supposons que l'hypothése (2.11) est vérifiée. Soit $[0, T_\varepsilon)$ l'intervalle du temps d'existence de la solution douce $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ du problème (2.10). Alors, il existe une constante C tel que*

$$T_\varepsilon \leq C\varepsilon^{\frac{1}{\eta}}, \quad \eta = \frac{\delta}{\beta} - 1 < 0.$$

Preuve. En prenant $\Psi_1(x,t)$ et $\Psi_2(x,t)$ du théoréme (2.2) et en utilisant la définition (2.2) et le lemme (2.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} & I_1 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} e^{v_\varepsilon} \varphi(x,t)\, dxdt \\ = & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u_\varepsilon(x,t) (-\Delta)^{\beta/2} D_{t|T}^{1-\alpha_1} \varphi(x,t)\, dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} u_\varepsilon(x,t) \frac{d}{dt}\varphi(x,t)\, dxdt, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & I_2 + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} e^{u_\varepsilon} \varphi(x,t)\, dxdt \\ = & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} v_\varepsilon(x,t) (-\Delta)^{\beta/2} D_{t|T}^{1-\alpha_2} \varphi(x,t)\, dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} v_\varepsilon(x,t) \frac{d}{dt}\varphi(x,t)\, dxdt, \end{aligned}$$

où

$$I_1 = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi_2^l(x)\, dx,$$

et

$$I_2 = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} v_0(x) \varphi_2^l(x)\, dx.$$

Nous choisissons $T \in [0, T_\varepsilon)$ tel que $0 < T_0 \leq T$. En posant le changement de variable $y = \frac{x}{T^{\alpha_i/\beta}}$ et en utilisant l'hypothése (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon m_0 T^{\frac{\alpha_1 d - \delta}{\beta}} \int_{|y| \geq \varepsilon_0 T^{-\alpha_1/\beta}} |y|^{-\frac{\delta}{\alpha_1}} \varphi_2^l\left(T^{\alpha_1/\beta} y\right) dy \ & \leq \ \varepsilon \int_{|x| \geq \varepsilon_0} u_0(x) \varphi_2^l(x)\, dx \\ & \leq \ \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} u_0(x) \varphi_2^l(x)\, dx \\ & = \ I_1, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\varepsilon n_0 T^{\frac{\alpha_2 d-\delta}{\beta}} \int_{|y|\geq\varepsilon_0 T^{-\alpha_2/\beta}} |y|^{-\frac{\delta}{\alpha_2}} \varphi_2^l\left(T^{\alpha_2/\beta} y\right) dy &\leq \varepsilon \int_{|x|\geq\varepsilon_0} v_0(x)\, \varphi_2^l(x)\, dx \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} v_0(x)\, \varphi_2^l(x)\, dx \\
&= I_2.
\end{aligned}$$

Donc nous déduisons que

$$\varepsilon C_{10} T^{\frac{-\delta}{\beta}} \left(T^{\frac{\alpha_1 d}{\beta}} + T^{\frac{\alpha_2 d}{\beta}}\right) \leq I_1 + I_2, \tag{2.12}$$

pour une certaine constante $C_{10} > 0$.
D'autre part, à partir de (2.8) et (2.9), on déduit qu'il existe une consante positive tel que

$$I_1 + I_2 \leq \varepsilon C_{11} T^{-1} \left(T^{\frac{\alpha_1 d}{\beta}} + T^{\frac{\alpha_2 d}{\beta}}\right). \tag{2.13}$$

Finalement, de (2.12) et (2.13), on déduit que

$$\varepsilon \leq C_{12} T^{\eta}, \quad \eta = \frac{\delta}{\beta} - 1 < 0,$$

et par conséquant, nous obtenons

$$T \leq C \varepsilon^{\frac{1}{\eta}},$$

pour une constante positive C, ce qui complète la preuve du théoréme. ■

Conclusion

Après avoir présenté les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension de ce travail, nous avons présenté des résultats d'existence locale et d'explosion en temps fini, ainsi qu'une estimation de la durée maximale d'existence des solutions explosives pour certains problèmes d'évolution fractionnaires en temps et en espace avec des termes sources non-linéaires de croissance exponentielle.

Au terme de ce mémoire, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations d'évolution fractionnaires, en ouvrant de noueaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

Bibliographie

[1] B. Ahmad, A. Alsaedi, D. Hnaien, M. Kirane, On a semi-linear system of nonlocal time and space reaction diffusion equations with exponential nonlinearities. J. Eqs. Appl., 30 (1), pp. 17-40, 2018.

[2] E. Ahmed, A. M. A. El-Sayed and H. A. A. El-Saka. On some Routh–Hurwitz conditions for fractional order differential equations and their applications in Lorenz, Rossler, Chua and Chen systems, Physics Letters A, 358 (1), pp. 1-4, 2006.

[3] B. Ahmad and J. J. Nieto, Solvability of nonlinear Langevin equation involving two fractional orders with Dirichlet boundary conditions, Hindawi Publishing Corporation International Journal of Differential Equation, Vol. 10, Special Issue, pp.1-10, 2010.

[4] A. Alsaedi, B. Ahmed, M. Kirane and B. Rebiai, Local and blowing-up solutions for a space-time fractional evolution system with nonlinearities of exponential growth, Math. Meth. App. Sci, 42 (12), pp. 4378-4393, 2019.

[5] M. Benchohra, S. Hamani and S. K. Ntouyas, Boundary value problems for differential equations with fractional order and nonlocal conditions, 71 (7-8), pp. 1-15, 2009.

[6] A. Benlabbes, Sur des problèmes aux conditions aux limites et à dérivées fractionnaires, Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université de Sidi Bel Abbès, 2016.

[7] A. Bouzaroura, Etude d'une équation différentielle fractionnaire impulsive dans un espace de Banach, , Thèse de Doctorat en Mathématiques, Université de Annaba, 2014.

[8] H.Brezis, Analyse Fonctionnelle, Théorie et applications, Masson, Paris, 1987.

[9] T. Cazenave, F. Dickstein and F. D. Weissler, An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling, Nonlinear Analysis, 68 (2), pp. 862-874, 2008.

[10] T. Cazenave and A. Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires, Ellipses, Paris, 1990.

[11] Z. Dahmani, M. A. Abdellaoui and M. Houas, Coupled systems of fractional integro-differential equations involving several functions, Theory and Applications of Mathematics Computer Science, 5 (1), pp. 53-61, 2015.

[12] M. Escobedo and M. A. Herrero, Boundedness and blow up for a semilinear reaction-diffusion system, Journal of Differential Equations, 89 (1), pp. 176-202, 1991.

[13] M. Fila and P. Quittner, The blow-up rate for a semilinear parabolic system, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 238 (2), pp. 468-476, 1999.

[14] A. Fino and M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a nonlocal evolution system, Math. Meth. Appl. Sci., 34 (9), pp. 1125-1143, 2011.

[15] A. Fino and M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation, Quart. Appl. Math., 70 (1), pp. 133-157, 2012.

[16] A. Friedman, Partial differential equations of parabolic type, Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1964

[17] L. Gaul, P. Klein and S. Kempfle, Damping description involving fractional operators, Mechanical Systems and Signal Processing, 5 (2), pp. 81-88, 1991.

[18] W. G. Glokle and T. F. Nonnenmacher, A fractional calculus approach of selfsimilar protein dynamics, Biophysical Journal, 68 (1), pp. 46-53, 1995.

[19] R. Gorenflo, Y. Luchko and F. Mainardi, Analytical properties and applications of the wright function, Fractional Calculus and Applied Analysis, 2 (4), pp. 383-414, 1999.

[20] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. P ?lya, Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[21] R. Hilfer, Applications of fractional calculus in physics, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2000.

[22] N. Ju, The maximum principle and the global attractor for the dissipative 2D quasi-geostrophic equations, Communications in Mathematical Physics, 255 (1), pp. 161-181, 2005.

[23] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional differential equations, North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204, 2006.

[24] M. Kirane, Y. Laskri and N.-e. Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl., 312 (2), pp. 488-501, 2005.

[25] F. Minardi, Fractional calculus : Some basic problems in continuum and statistical mechanics, Fractals and Fractional Calculus in continuum Mechanics, Springer-Verlag, Wien and New York , pp. 291-348, 1997.

[26] N. Nyamoradi, T Bashiri, S. M. Vaezpour and D. Baleanu, Uniqueness and existence of positive solutions for singular fractional differential equations, Electronic Journal of Differential Equations, 2014 (130), pp. 1-13, 2014.

[27] I. Podlubny, Fractional differential equations, Mathematics in science and engineering, vol. 198, Academic Press, San Diego, Calif, USA, 1999.

[28] S. I. Pokhozhaev, Concerning an equation in the theory of combustion, Mathematical Notes, 88 (1-2), pp. 48-56, 2010.

[29] B. Rebiai and S. Benachour, Global classical solutions for reaction-diffusion systems with nonlinearities of exponential growth, Journal of Evolution Equations, 10 (3), pp. 511-527, 2010.

[30] B. Rebiai, S. Rouar and K. Haouam, Critical exponents for nonlinear reaction-diffusion system with fractional derivatives, Global Journal of Pure and Applied Mathematics, 12 (6), pp. 5343-5351, 2016.

[31] W. Rudin, Analyse réelle et complexe : Cours et exercices, Dunod, Paris, 2009.

[32] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives : Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland, 1993.

[33] D. Slimani, Dérivation non entière : Application en traitement d'images, Mémoire de Magister en Automatique, Université de Tizi-Ouzou, 2012.

[34] K. Yosida, Functional analysis, Springer Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995.