



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

Université Larbi Tébessi -Tébessa-
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la
Nature et de la Vie*

Département : Sciences de la Matière



N d'ordre :.....

Série :.....

MÉMOIRE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Option : *Physique de la Matière Condensée*

THÈME

Détermination des propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Kemmer à une dimension

par :

Saadi Randa

Devant le jury

PR. FAIÇAL CHEMAM

PRÉSIDENT

Université Larbi-Tébessi, Tébessa

PR. ABDELMALEK BOUMALI

RAPPORTEUR

Université Larbi-Tébessi, Tébessa

DR. BOUGROURA HAMZA

EXAMINATEUR

Université Larbi-Tébessi, Tébessa

Date de Soutenance : 23 Juin 2021

© *Mémoire effectué au
Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique*



Détermination des propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Kemmer à une dimension

Saadi randa

23 Juin 2021

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة الخواص الفائقة الاحصائية للهزاز التوافقية النسبية و اللانسبية للجسيمات ذات السبين معروف. في بادئ الأمر قمنا بدراسة هذه الخواص للهزاز التوافقي أحادي البعد عن طريق إيجاد دالة القسمة لهذا الهزاز. ثم بعدها طبقنا نفس الشيء بالنسبة للهزازات النسبية الخاصة بالسبينات صفر، نصف و واحد. أيضا قمنا بدراسة الخواص الفائقة الاحصائية لشذوذ شوتكي لهذه الهزازات النسبية.

Abstract

In this work we study the superstatistical properties of the relativistic and non-relativistic Harmonic oscillators of known spinning particles. First, we study the properties of a one-dimensional Harmonic oscillator by finding its the partition function . Then, we did the same thing for the relativistic Harmonic oscillators having a spin equal to zero, half and one. We also studied the superstatistical properties of Schottky anomalies for these oscillators.

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous étudions les propriétés superstatistiques des oscillateurs harmoniques relativistes et non relativistes de particules ayant un spin connues. Tout d'abord, nous étudions les propriétés d'un oscillateur harmonique unidimensionnel en trouvant sa fonction de partition. Ensuite, nous avons fait la même chose pour les oscillateurs Harmonis relativistes ayant un spin égal à zéro, la moitié et un. Nous avons également étudié les propriétés superstatistiques des anomalies de Schottky pour ces oscillateurs.

Dédicace

*A mes chères parents,
A mes frères et mes sœurs,
A ma famille,
A tout mes amis,
A tout mes collègues,
A tout mes enseignants,*

Je dédie cet humble travail.

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet de fin d'études, pour obtenir le diplôme de master en physique de la Matière condensée à l'université de Larbi Tébessi-Tébessa-. Avant tout, je remercie ALLAH tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail. Et d'une façon toute particulière, j'adresse mes sincères remerciements à ma chère mère qui m'a soutenu dans toutes les parties de ma vie et m'a donné la force et le courage d'atteindre tout cela moi-même.

Je tiens à remercier mon encadreur le Professeur Abdelmalek Boumali pour m'avoir proposé mon sujet qui est aussi intéressant et riche. Je suis très reconnaissant tout particulièrement pour la confiance qu'il m'a témoignée et la liberté qui m'a laissé. J'exprime mes remerciements à Faïçal Chemam, Maître de Conférences A à l'Université de Larbi-Tébessi -Tébessa-, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de mon mémoire. Je remercie vivement Bougroua Hamza, Maître de Conférence B à l'Université de Larbi-Tébessi -Tébessa-, qui a accepté d'être examinateurs de cet mémoire. Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux nombreuses personnes qui nous ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse. En particulier, je tiens à remercier vivement ma collègue Siouane Soumia qui m'a aidé le long de ce travail. Qu'elle trouve ici mes sentiments les plus sincères.

Nous remercions aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadré, observé, aidé, conseillé et même supporté. Enfin, on souhaite exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui bien en marche de ce travail, ont contribué largement à son aboutissement. Que ce soit depuis toujours, depuis plusieurs années ou quelques mois seulement, nombreux sont ces les et ceux qui ont participé à notre épanouissement. On les remercie sincèrement.

TABLE DES MATIÈRES

ملخص	i
ABSTRACT	ii
RÉSUMÉ	iii
DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
LISTE DES TABLEAUX	vii
LISTE DES FIGURES	viii
Introduction	2
1 Bref aperçu sur les équations relativistes	5
1.1 L'équation de Klein-Gordon	5
1.1.1 Le quadri-courant J^μ	7
1.2 L'équation de Dirac	8
1.2.1 Le quadri-courant J^μ	10
1.3 L'équation de Kemmer	11

2 Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur Harmonique à une dimension	15
2.1 Le concept de la superstatistique	15
2.2 Choix de $f(\beta)$	17
2.3 Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur Harmonique unidimensionnel	19
2.3.1 Les solutions propres	19
2.3.2 Les propriétés superstatistiques	20
2.4 Résultats et discussion	21
2.5 L'anomalie de Schottky	26
2.5.1 La chaleur spécifique d'un système à deux niveaux	26
3 Les propriétés superstatistiques pour des particules de spin-0 et spin-1/2 à une dimension	30
3.1 Les solutions propres de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel	30
3.2 Les solutions propres de l'oscillateur de Klein-Gordon unidimensionnel	32
3.3 Les propriétés superstatistiques des deux oscillateurs	34
3.4 L'anomalie de Schottky	36
4 Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Kemmer à une dimension	39
4.1 Les solutions propres de l'oscillateur de Kemmer à une dimension	39
4.2 Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Kemmer	43
4.3 L'anomalie de Schottky	45
Conclusion	48
Bibliographie	50

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

2.1	Superstatistique	16
2.2	L'existence d'un pic autour d'une valeur critique	23
2.3	La chaleur spécifique d'un oscillateur harmonique simple à une dimension pour $N = 2, 20, 30, 50$ et 70 en fonction de $1/\beta$	24
2.4	La chaleur spécifique d'un oscillateur harmonique simple à une dimension pour différentes valeurs de q en fonction de $1/\beta$	25
2.5	L'anomalie de Schottky de l'oscillateur Harmonique unidimensionnel pour les niveaux suivants : $N = 2, 3, 5, 7$ et 10	27
2.6	L'anomalie de Schottky de l'oscillateur Harmonique unidimensionnel pour $q = 0.2$	28
2.7	L'anomalie de Schottky de l'oscillateur Harmonique unidimensionnel pour $q = 0.7$	28
2.8	L'évolution de l'anomalie de Schottky pour différents valeurs de q	29
3.1	La chaleur spécifique pour les deux types d'oscillateurs	34
3.2	La chaleur spécifique pour différentes valeurs de q pour les deux types d'oscillateurs	35
3.3	L'anomalie de Schottky pour les deux types d'oscillateurs	36
3.4	L'anomalie de Schottky des deux types d'oscillateurs pour $q = 0.2$	37

3.5	L'anomalie de Schottky des deux types d'oscillateurs pour $q = 0.7$	37
3.6	L'évolution de l'anomalie de Schottky pour différents valeurs de q pour un système à deux niveaux pour les deux types d'oscillateurs.	38
4.1	La chaleur spécifique pour l'oscillateur de Kemmer	43
4.2	La chaleur spécifique pour différentes valeurs de q pour l'oscillateur de Kemmer à $1D$	44
4.3	L'anomalie de Schottky pour l'oscillateur de Kemmer	45
4.4	L'anomalie de Schottky de l'oscillateur de Kemmer pour $q = 0.2$	46
4.5	L'anomalie de Schottky de l'oscillateur de Kemmer pour $q = 0.7$	46
4.6	L'évolution de l'anomalie de Schottky de l'oscillateur de Kemmer pour différents valeurs de q	47

L'oscillateur de Dirac (DO) a été pour la première fois abordé par Ito et al [1]. Dans cette étude les auteurs ont estimé une équation de Dirac dans lequel l'expression du moment \vec{p} a été remplacée par $\vec{p} - im\omega\gamma^0\vec{x}$, dont \vec{x} représente le vecteur de position, m la masse de la particule et ω la fréquence de l'oscillateur. L'intérêt pour le problème a été revivé par Moshinsky et Szczepaniak [2], qui lui donna le nom de l'oscillateur de Dirac (DO) parce que, dans la limite non-relativiste, il devient un oscillateur Harmonique avec un terme de couplage spin-orbite très fort. Physiquement, l'interaction (DO) est un système, qui peut être interprété comme une interaction du moment magnétique anormal avec un champ électrique linéaire [3, 4]. En raison de ses nombreuses applications en physique, l'oscillateur de Dirac a attiré beaucoup d'intérêt parce qu'il constitue l'un des exemples rares qui possède des solutions exactes. En mécanique quantique relativiste, le (DO) a été étudié à partir de nombreux points de vue, on cite parmi eux : (i) les études des propriétés de la covariance de l'équation de Dirac en présence de l'interaction de l'oscillateur de Dirac, (ii) la détermination du spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes, (iii) l'étude des propriétés algébriques du groupe de Lie, (iv) la supersymétrie, (v) enfin l'invariance conforme. La relation entre l'oscillateur de Dirac et l'optique quantique par le biais de son modèle connu sous le nom du modèle de Jayness-Cumming, a été bien établi dans les deux cas de l'espace commutatif et noncommutatif [5-16].

Récemment, la superstatistique est devenue un sujet de grand intérêt à cause de ses applications dans plusieurs domaines de la physique : à titre exemple, citons les travaux suivants : (i) les différents types de distributions de probabilité du facteur de Boltzmann-Gibbs généralisé, (ii) le formalisme q -déformé, (iii) les espaces non commutatifs en présence d'un champ magnétique, (iv) la fonction Gamma, (v) les superstatistiques avec la distribution delta de Dirac q -déformée, (vi) le modèle du gaz parfait en interaction, et enfin (iiV) la superstatistique et son influence sur les fluctuations de la température [17–19].

La superstatistique est une branche de la mécanique statistique consacrée à l'étude des systèmes hors-équilibre. Elle se caractérise par l'utilisation de la superposition de plusieurs modèles statistiques différents en équilibre thermodynamique [20–26]. Dans ce contexte, ce mémoire se focalise sur l'application de ce formalisme pour les deux cas suivants :

- L'oscillateur Harmonique non-relativiste,
- L'oscillateur de Dirac unidimensionnel : exactement, nous voulons calculer les propriétés superstatistiques des deux types d'oscillateurs.
- L'oscillateur de Kemmer unidimensionnel pour les bosons vecteurs.

L'objectif principal de notre mémoire est de déterminer les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Kemmer unidimensionnel dans le cadre de la théorie Superstatistique. En premier lieu, on discute les propriétés superstatistiques de l'oscillateur Harmonique. Ensuite, l'étude s'étend au cas relativiste à travers le traitement de l'oscillateur de Dirac.

Ce mémoire comporte trois chapitres composés de la façon suivante : dans le premier chapitre, on rappelle quelques généralités sur les équations relativistes de Klein-Gordon (particules scalaires de spin $S = 0$), de Dirac (particules spinorielles de spin $S = 1/2$) et enfin de Kemmer (particules vectorielles de spin $S = 1$).

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude de l'influence de la troncation du spectre d'énergie sur les propriétés superstatistiques de l'oscillateur Harmonique à une dimension. Le troisième chapitre traite les propriétés superstatistiques des deux oscillateurs de Dirac accompagnées de leurs discussions et explications. Dans le quatrième chapitre,

nous étudions les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Kemmer pour des particules vectorielles de spin $S = 1$. L'idée de la troncation du spectre de l'énergie et son influence sur les propriétés superstatistiques sera étendue pour le cas des trois oscillateurs relativistes suivant : l'oscillateur de Klein-Gordon, l'oscillateur de Dirac et enfin de l'oscillateur de Kemmer.

Enfin, pour clore notre travail nous présentons une conclusion générale ou nous soulignons les points essentiels dégagés par notre étude .

CHAPITRE 1

BREF APERÇU SUR LES ÉQUATIONS RELATIVISTES

1.1 L'équation de Klein-Gordon

L'équation de Schrödinger pour une fonction d'onde ψ est donnée par la relation suivante [27, 28]

$$H\psi = E\psi, \quad (1.1)$$

dont H est l'Hamiltonien de la particule. En mécanique quantique, on peut établir l'équation de Schrödinger en s'appuyant sur la règle de la correspondance suivante

$$E \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$P^i \mapsto -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.3)$$

Le principe de correspondance appliqué à l'expression de l'énergie d'une particule massive non relativiste donné par l'expression ci-dessous

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{x}), \quad (1.4)$$

conduit à l'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde $\psi(\vec{x}, t)$ suivante

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right\} \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t), \quad (1.5)$$

dont $\nabla^2 = \Delta$ est le laplacien. Par la même façon, en appliquant le principe de correspondance à l'expression de l'énergie d'une particule relativiste libre, dont l'énergie est

$$E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1.6)$$

mène à l'équation de Klein-Gordon

$$\left(\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \nabla^2 + m^2 c^2 \right) \psi(\vec{x}, t) = 0. \quad (1.7)$$

Cette dernière forme peut aussi avoir la forme suivante

$$(\square + \lambda^2) \psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (1.8)$$

avec $\square = \partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ est le d'Alembertien, que l'on écrit aussi sous une forme covariante par $\square = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu$, avec $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ est le tenseur fondamental de l'espace Minkowski [26] et $\lambda = \frac{mc}{\hbar}$.

Dans ce qui suit, nous adoptons des unités telles que $\hbar = c = 1$. La forme covariante de l'équation (1.8) est

$$(g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu + \lambda^2) \psi(\vec{x}, t) = 0. \quad (1.9)$$

L'introduction de l'interaction due au champ électromagnétique se fait par le principe de couplage minimal : ce dernier consiste à remplacer les dérivées ∂_μ par une dérivé covariante (covariante vis à vis des transformations de jauge) comme suit :

$$\partial^\mu \mapsto \partial^\mu - ieA^\mu, \quad (1.10)$$

dont le quadri-potentiel A^μ a comme composante

$$A^\mu = (\varphi, A). \quad (1.11)$$

A partir des équations (1.10) et (1.11), (1.9) se transforme à

$$\{g_{\mu\nu}(\partial - ieA)^\mu(\partial - ieA)^\nu + \lambda^2\} \psi(\vec{x}) = 0. \quad (1.12)$$

1.1.1 Le quadri-courant J^μ

La détermination du quadri-courant J^μ se fait en suivant les démarches suivantes :

Le complexe conjugué de l'équation (1.7) est

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta + \lambda^2\right) \psi^*(\vec{x}) = 0. \quad (1.13)$$

En multipliant les deux équations (1.7) et (1.8) respectivement par ψ^* et ψ , on obtient

$$\frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \psi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi^* \right) = \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*, \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) = \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (1.15)$$

La soustraction de (1.14) et (1.15) donne

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \partial_0 \psi - \psi \partial_0 \psi^*) + \nabla \cdot (\psi^* (\vec{\nabla} \psi) - \psi (\vec{\nabla} \psi)^*) = 0. \quad (1.16)$$

Par comparaison avec l'équation de continuité

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (1.17)$$

où $j^\mu = (j^0, \vec{j})$ est le quadri-courant s'écrivant dans une forme covariante par

$$j^\mu = \psi^* (\partial^\mu \psi) - (\partial^\mu \psi^*) \psi. \quad (1.18)$$

Ainsi, A partir des deux équations (1.17) et (1.18), les deux densités $\rho = \frac{j^0}{c}$ et \vec{j} sont définies respectivement par

$$\rho = \frac{j^0}{c} = (\psi^* \partial_0 \psi - \psi \partial_0 \psi^*), \quad (1.19)$$

$$\vec{j} = \psi^* (\vec{\nabla} \psi) - \psi (\vec{\nabla} \psi)^*. \quad (1.20)$$

Remarquons ici, que la densité de charge pour le cas des particules scalaires peuvent donner lieu à des densités négative.

1.2 L'équation de Dirac

L'existence d'une densité de charges négative a incité Dirac de reformuler l'équation de Klein-Gordon dans le but d'avoir toujours une densité positive : essayons de trouver une racine carrée de l'opérateur suivant $p^2 + m^2 = -\Delta + m^2$, en utilisant une représentation matricielle [28]

$$H\psi = \left(\frac{1}{i}\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 m \right) \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (1.21)$$

où ψ et m son respectivement la fonction d'onde et la masse de la particule relativiste, et α et γ^0 sont des matrices Hermitiennes, de telle façon que l'opérateur $H = \frac{1}{i}\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 m$ soit lui même Hermitien. On demande aussi que l'équation (1.21) soit compatible avec l'équation (1.7).

La fonction d'onde dans l'équation de Dirac est un spineur d'ordre 4 ayant la forme suivante

$$\psi(\vec{x}, t) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T. \quad (1.22)$$

Projetons l'équation (1.22) dans l'équation (1.21), on trouve le système suivant

$$\begin{aligned} (-i\alpha_i \nabla + \gamma^0 m)^2 \psi &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_i^2} - \sum_{i \neq j} \{\alpha_i, \alpha_j\} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{i} m \sum_{i=1}^3 \{\alpha_i, \gamma^0\} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} + (\gamma^0)^2 m^2 \psi_i \\ &= (-\Delta + m^2) \psi, \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ainsi, les matrices $\vec{\alpha}$ de Dirac suivent l'algèbre suivant

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &= \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, \\ \{\alpha_i, \gamma^0\} &= \alpha_i \gamma^0 + \gamma^0 \alpha_i = 0, \text{ si } (i \neq j), \\ \alpha_i^2 &= (\gamma^0)^2 = I, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, i = (1, 2, 3). \quad (1.25)$$

Concernant les matrices γ , dont

$$\gamma^0 = \gamma_0, \quad (1.26)$$

$$\gamma^i = -\gamma_i = \gamma^0 \alpha^i, \quad (1.27)$$

elles appartiennent à un algèbre dite Algèbre de Clifford dont

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2 (\gamma^0)^2 = 2 \times I_{4 \times 4}, \quad (1.28)$$

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = (\gamma^0)^2 \alpha_i + \gamma^0 \alpha_i \gamma^0 = 0. \quad (1.29)$$

$$\{\gamma^i, \gamma^k\} = \gamma^0 \alpha_i \gamma^0 \alpha_k + \gamma^0 \alpha_k \gamma^0 \alpha_i = -\alpha_i \alpha_k - \alpha_k \alpha_i = -2\delta_{ij}. \quad (1.30)$$

Les équations c-dessus peuvent être regrouper sous la forme covariante suivante

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (1.31)$$

avec $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ est le tenseur métrique de l'espace-temps de Minkowski.

Dans le but d'écrire l'équation de Dirac sous une forme covariante, il faut que les matrices γ prennent la notation covariante suivante $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$, dont $\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3)$, l'équation de Dirac (1.21) se transforme à

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad (1.32)$$

ou

$$(i\cancel{\partial} - m) \psi = 0, \quad (1.33)$$

en utilisant la notation slash de Feynman $\cancel{\partial} = a^\mu \gamma_\mu$.

1.2.1 Le quadri-courant J^μ

Le conjugué du spineur de Dirac est défini par

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad (1.34)$$

Suivant le même concept utiliser pour le cas de l'équation de Klein-Gordon concernant la détermination du quadri-courant J^μ , tels que

$$j^\nu = \bar{\psi} \gamma^\nu \psi. \quad (1.35)$$

A partir de cette équation, tout en respectant la condition de continuité suivante $\partial_\mu J^\mu = 0$, la densité de probabilité ainsi que son courant deviennent

$$\rho = \psi^\dagger \psi, \quad (1.36)$$

$$\vec{J} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi. \quad (1.37)$$

La multiplication de la charge de la particule aboutira à la densité du courant électromagnétique.

L'incorporation de l'interaction électromagnétique dans l'équation covariant libre de Dirac se fait par le biais du principe de couplage minimal : soit le quadri-potentiel $A^\nu = (\varphi, \vec{A})$, le couplage minimal se traduit par la transformation ci-dessous

$$p^\nu \mapsto p^\nu - eA^\nu, \quad (1.38)$$

avec p^{mu} est le quadri-impulsion du champ électromagnétique. En appliquant le principe de correspondance dont

$$p_\nu \mapsto i\partial_\nu,$$

l'équation (1.38) devient

$$i\partial^\nu - eA^\nu. \quad (1.39)$$

Enfin, l'introduction de l'interaction électromagnétique dans l'équation de Dirac (1.21)

donne

$$\{\gamma^\nu (i\partial_\nu - eA_\nu) - m\} \psi = 0. \quad (1.40)$$

Pour avoir l'Hamiltonien de Dirac, nous suivons les démarches suivantes : multiplions l'équation de Dirac à gauche par γ^0

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 + \gamma^0\gamma^i (i\partial_i - eA_i) - \gamma^0m \right) \psi = 0. \quad (1.41)$$

L'équation (1.41) peut être écrite sous une forme condensée $H_D\psi = E\psi$

$$\underbrace{i\frac{\partial}{\partial t}}_E \psi = \underbrace{\{(-\alpha_i\partial_i + \gamma^0m) + (eA_0 - e\gamma^0\gamma_iA_i)\}}_{H_D} \psi. \quad (1.42)$$

dont

$$H_D = (-\alpha_i\partial_i + \gamma^0m) + (eA_0 - e\gamma^0\gamma_iA_i). \quad (1.43)$$

En l'absence d'interaction, l'Hamiltonien de la particule libre est

$$H_0 = -\alpha_i\partial_i + \gamma^0m. \quad (1.44)$$

L'équation (1.42) ressemble à l'équation de Schrödinger avec la fonction d'onde est un spineur.

1.3 L'équation de Kemmer

L'équation de Kemmer est une extension du formalisme covariant de Dirac , aux particules scalaires de spin-0 et vectorielles de spin-1 , dans lequel on remplace les matrices gamma γ^μ par des matrices bêta β^μ : vérifiant une algèbre plus compliquée connue sous le nom de l'Algèbre de Kemmer.

L'équation libre de Kemmer s'écrit par [29–34] [29–34]

$$(i\partial_\mu\beta^\mu - M) \psi (x, t) = 0, \quad (1.45)$$

dont les matrices β^μ possèdent trois représentations irréductibles, la triviale de dimen-

sion 0 , et celles de dimensions 5 et 10, pour le cas des particules de spin $s = 0$ et $s = 1$ respectivement. Ces matrices obéissent aux règles de commutations suivant

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\mu} \beta^\mu, \quad (1.46)$$

où $g^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique avec la signature $(+ - - -)$.

On choisit une représentation pour les matrices β^μ dans laquelle $\beta^{k+} = -\beta^k$, et $\beta^{0+} = \beta^0$: ainsi

- Pour les particules scalaires de spin $S = 0$

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \beta^i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \rho^i \\ -\rho_T^i & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, i = 1, 2, 3 \quad (1.47)$$

avec

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

dont ρ_T représente la matrice transposée de ρ .

- Pour les particules vectorielles ayant un spin $S = 1$

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ 0^T & 0_{3 \times 3} & 1_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0^T & 1_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ 0^T & 0_{3 \times 3} & 1_{3 \times 3} & -is_i \\ -e^T & 1_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ 0^T & -is_i & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, (i = 1, 2, 3) \quad (1.49)$$

avec $\bar{0}$ et e_i sont données par :

$$\bar{0} = (0, 0, 0), e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1), \quad (1.50)$$

et $1_{3 \times 3}$ est la matrice unité. Les s_i sont les matrices standards non-relativistes du spin

$S = 1$ [28]

$$s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, s_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, s_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

En présence d'une interaction avec un champ électromagnétique A^μ , l'équation (1.45) se transforme à

$$\{i\beta^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - M\} \psi(x, t) = 0. \quad (1.52)$$

Conjuguons maintenant l'équation (1.52), on trouve

$$i\partial_\mu \psi^+ \beta^\mu + M\psi^+ = 0, \quad (1.53)$$

dont

$$\bar{\psi} = \psi^+ \left\{ 2(\beta^0)^2 - 1 \right\}, \quad (1.54)$$

d'où

$$\bar{\psi}\beta^0 = \psi^+\beta^0. \quad (1.55)$$

avec $\bar{\psi}$ étant l'adjoint de ψ vérifiant l'équation suivante :

$$i(\partial_\mu - ieA_\mu)\bar{\psi}\beta^\mu + M\bar{\psi} = 0. \quad (1.56)$$

Sachons que

$$\bar{\psi}\beta^\mu\beta^0 = \psi^+\beta^{\mu+}\beta^0, \quad (1.57)$$

alors, l'équation de continuité est définie par

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.58)$$

avec

$$J^\mu = (J^0, J^k) = \bar{\psi}\beta^\mu\psi, \quad (1.59)$$

où

$$J^k = \bar{\psi}\beta^k\psi. \quad (1.60)$$

La densité du courant est alors suit la relation suivante

$$J^0 = \bar{\psi} \beta^0 \psi. \quad (1.61)$$

la densité de probabilité qui n'est pas définie positive : comme dans le cas des équations relativistes de Proca et de (KG), il est donc nécessaire de recourir à la réinterprétation de Pauli et Weisskopf qui est basée sur la symétrie de charge. Ainsi, en multipliant J^0 par la charge élémentaire e , on obtient la densité du courant électromagnétique.

CHAPITRE 2

LES PROPRIÉTÉS SUPERSTATISTIQUES DE L'OSCILLATEUR HARMONIQUE À UNE DIMENSION

2.1 Le concept de la superstatistique

La superstatistique constitue un formalisme de la physique statistique, consistant à décrire les propriétés statistiques d'un système par une superposition de plusieurs statistiques, d'où le nom superstatistique .

En général, le formalisme s'applique à un système hors équilibre thermodynamique, où la température exhibe des fluctuations. On peut ainsi assigner une fonction de distribution à la température, ou de manière générale à un paramètre globale β dépendant du système, dans notre cas $\beta = \frac{1}{k_B T}$ représente l'inverse de la température. A petite échelle, le système montre un équilibre local décrit par la statistique de Boltzmann habituel $e^{-\beta E}$. A grande échelle, ce système est décrit par une superposition de la statistique de Boltzmann et d'une fonction de distribution $f(\beta)$ caractérisant les fluctuations de la température. Ainsi, elle est définie par la superposition de différentes statistique (voir Figure. 2.1) .

Les superstatistiques décrivent des systèmes hors-équilibre avec un état stationnaire

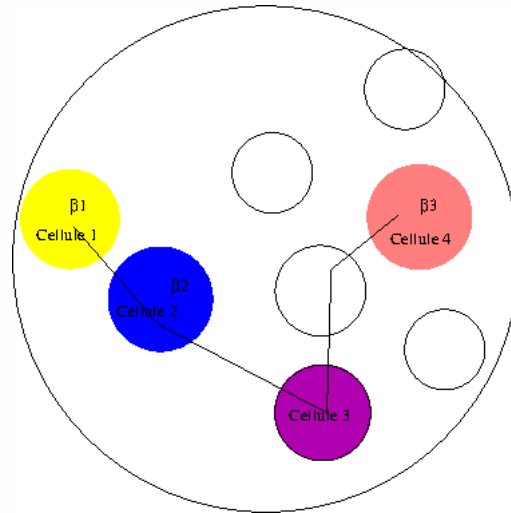


FIG. 2.1 : Superstatistique

et fluctuations des paramètres intensives. Si E est l'énergie d'un micro-état, on peut écrire que

$$B(E) = \int_0^{\infty} f(\beta) e^{-\beta E} d\beta, \quad (2.1)$$

où $B(E)$ est le facteur de Boltzmann générale. Il peut différer de manière significative du facteur de Boltzmann ordinaire, qui est récupéré pour $f(\beta) = \delta(\beta - \beta_n)$.

A partir de (2.1), $B(E)$ peut être regarder comme une transformation de Laplace de la probabilité de la densité $f(\beta)$. Bien qu'il existe une infinité de possibilités pour le choix de la fonction $f(\beta)$, certains critères doivent être remplis afin de réduire considérablement ce nombre. Ces critères sont

- La fonction de probabilité $f(\beta)$ doit être une densité de probabilité normalisée.
- L'intégrale $\int_0^{\infty} f(\beta) e^{-\beta E} d\beta$ converge.
- Dans le cas limite, c-à-d, l'absence des fluctuations des paramètres intensives, les nouvelles statistiques tendent vers des statistiques ordinaires de Boltzmann-Gibbs (BG).

Sous ces conditions, la distribution de probabilité stationnaire habituelle,

$$p(E) = \frac{e^{-\beta E}}{Z}, \quad (2.2)$$

devient

$$p(E) = \frac{B(E)}{Z}, \quad (2.3)$$

avec

$$Z(\beta) = \sum_n B(E_n), \quad (2.4)$$

où $Z(\beta)$ est la fonction de partition généralisée.

2.2 Choix de $f(\beta)$

Dans notre cas, nous nous concentrons uniquement sur la χ^2 -superstatistiques ou la distribution Gamma : ce choix est justifié par la grande utilisation de cette distribution dans la littérature (pour plus de détails voir la référence . [26]).

Ainsi, la fonction $f(\beta)$ sera :

$$f(\beta) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left(\frac{\beta}{b}\right)^{c-1} e^{-\frac{\beta}{b}}, \quad (2.5)$$

où ($b > 0, c > 1$) sont des paramètres réels . L'intégration sur β donne le facteur de Boltzmann généralisé [41]

$$\begin{aligned} B(E) &= \int_0^\infty f(\beta) e^{-\beta E} d\beta \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{b\Gamma(c)} \left(\frac{\beta}{b}\right)^{c-1} e^{-\frac{\beta}{b}} e^{-\beta E} d\beta \\ &= \frac{1}{b\Gamma(c)} \frac{1}{b^{c-1}} \int_0^\infty \beta^{c-1} e^{-\beta(E+\frac{1}{b})} d\beta. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Posons que

$$\beta \left(E + \frac{1}{b}\right) = t \Rightarrow d\beta = \frac{dt}{E + \frac{1}{b}}, \quad (2.7)$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \beta^{c-1} e^{-\beta(E+\frac{1}{b})} d\beta &= \int_0^\infty \left(\frac{t}{E+\frac{1}{b}} \right)^{c-1} e^{-t} \frac{dt}{E+\frac{1}{b}} \\ &= \frac{1}{(E+\frac{1}{b})^{c-1}} \frac{1}{(E+\frac{1}{b})} \int_0^\infty t^{c-1} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{(E+\frac{1}{b})^{c-1}} \frac{1}{(E+\frac{1}{b})} \Gamma(c), \end{aligned} \quad (2.8)$$

dont

$$\Gamma(c) = \int_0^\infty t^{c-1} e^{-t} dt. \quad (2.9)$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} B(E) &= \frac{1}{b\Gamma(c)} \frac{1}{b^{c-1}} \frac{1}{(E+\frac{1}{b})^c} \Gamma(c) \\ &= \frac{1}{b^c (E+\frac{1}{b})^c} \\ &= (1+bE)^{-c}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Selon les travaux suivants de Tsallis , les statistiques non-extensives sont définies par la fonction q-exponentielle généralisée

$$e_q^{-\beta_0 E} = (1 + (q-1)\beta_0 E)^{-\frac{1}{q-1}}. \quad (2.11)$$

Cette fonction est définie par [42, 43]

$$e_q(x) = \begin{cases} (1 + (q-1)x)^{-\frac{1}{q-1}} & 0 < q < 1 \\ e^x & q = 1, \end{cases}, \quad (2.12)$$

où le paramètre q est l'indice de la mécanique statistique non-extensive : si on identifie $c = \frac{1}{q-1}$ et $bc = \beta_0$ dont

$$\beta_0 = \langle \beta \rangle = \int_0^\infty \beta f(\beta) d\beta = bc, \quad (2.13)$$

est la moyenne de β , l'équation (2.10) donne le facteur de Boltzmann généralisé qui s'écrit

par

$$B(E) = (1 + (q - 1) \langle \beta \rangle E_n)^{-\frac{1}{q-1}}. \quad (2.14)$$

Dans ce cas, l'équation(2.14) se transforme en

$$e_q^{-\langle \beta \rangle E} = (1 + (q - 1) \langle \beta \rangle E)^{-\frac{1}{q-1}}. \quad (2.15)$$

Par conséquent, le facteur $B(E)$ se réduit à

$$B(E) = (1 + (q - 1) \langle \beta \rangle E)^{-\frac{1}{q-1}}, \quad (2.16)$$

ou

$$B(E) = e_q^{-\langle \beta \rangle E_n}. \quad (2.17)$$

Dans le cas limite où $q \rightarrow 1$, on retrouve à la fois (i) la fonction exponentielle habituelle et (ii) la fonction de partition habituelle de la mécanique statistique ordinaire.

Maintenant, en raison de cette universalité, Beck [21–25, 35, 36] a introduit un paramètre universel q pour toute superstatistique, pas seulement pour les statistiques de Tsallis : ce paramètre est donné par la relation suivante

$$q = \frac{\langle \beta^2 \rangle}{\langle \beta \rangle^2}. \quad (2.18)$$

Ce paramètre q n'est que le coefficient de variation de la distribution $f(\beta)$, défini par le rapport de l'écart-type et de la moyenne. L'absence de la fluctuation de β conduit à la limite habituel $q = 1$.

2.3 Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur Harmonique unidimensionnel

2.3.1 Les solutions propres

L'équation générale de l'oscillateur Harmonique à une dimension est donnée par [46]

$$\left\{ \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2x^2 \right\} \psi(x) = E_n \psi(x), \quad (2.19)$$

où m est la masse de particule et ω est la fréquence. Pour la configuration $\{x\}$, en utilisant le principe de correspondance suivant

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, x \mapsto \hat{x}, p_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.20)$$

l'équation (2.19) devient

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{m\omega}{\hbar} x^2 \right) \psi(x) = \frac{E_n}{\hbar\omega} \psi(x). \quad (2.21)$$

Les solutions propres de cette équation sont les suivants [27, 28, 46]

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{\lambda_n}}{2^n \sqrt{\pi n!}}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} H_n \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right). \quad (2.22)$$

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.23)$$

2.3.2 Les propriétés superstatistiques

La définition de la fonction de partition est donnée par [26, 40, 41]

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+\frac{1}{2})}, \\ &= e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n} \\ &= e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\hbar\omega})^n}_I, \end{aligned} \quad (2.24)$$

dont I est une série géométrique

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-\beta\hbar\omega})^n = \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}, \quad (2.25)$$

alors

$$\begin{aligned} Z &= \frac{e^{-\frac{\beta\hbar\omega}{2}}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \\ &= \frac{2}{\sinh\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right)} \end{aligned} \quad (2.26)$$

La dernière équation détermine la fonction de partition exacte. Maintenant, avant de présenter les résultats pour l'oscillateur Harmonique, toutes les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur, comme l'énergie libre, l'entropie, l'énergie totale et la chaleur spécifique, seront obtenues via la fonction de partition Z . Les définitions thermodynamiques de toutes ces quantités en fonction de Z mènent aux relations suivantes :

$$F = -\frac{1}{\beta}\ln Z, \quad U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad (2.27)$$

$$\frac{S}{k_B} = \ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad \frac{Cv}{k_B} = \beta^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}. \quad (2.28)$$

Le facteur de Boltzmann $B(E)$ suit la relation suivante [21–26, 35, 36, 47–49]

$$B(E_n) = e^{-\langle\beta\rangle E_n} \left(1 + \frac{a}{2} \langle\beta\rangle^2 E_n^2 - \frac{a^2}{3} \langle\beta\rangle^3 E_n^3 + \dots \right). \quad (2.29)$$

Selon l'équation (2.29), la fonction de partition généralisée prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} Z &= \sum B(E_n) = \sum e^{-\langle\beta\rangle E_n} \left(1 + \frac{a}{2} \langle\beta\rangle^2 E_n^2 - \frac{a^2}{3} \langle\beta\rangle^3 E_n^3 + \dots \right) \\ &= \left(1 + \frac{a}{2} \langle\beta\rangle^2 \frac{d^2}{d\langle\beta\rangle^2} - \frac{a^2}{3} \langle\beta\rangle^3 \frac{d^3}{d\langle\beta\rangle^3} \right) \sum_n e^{-\langle\beta\rangle E_n}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.4 Résultats et discussion

Dans ce présent travail, nous nous concentrons sur les différents aspect de la chaleur spécifique et l'influence de nombre de niveaux d'énergies sur cette quantité.

En mécanique statistique, Il est courant de considérer un seul système physique et comparez sa chaleur spécifique à deux températures différentes. Dans l'autre coté, une grande partie de l'étude repose sur la comparaison des chaleurs spécifiques de deux sys-

tèmes indiscernables à la même température. Récemment, la chaleur spécifique de plusieurs potentiels quantiques ont été analysés par Pizarro et al [50]. Ils ont montré que la limite classique de la chaleur spécifique d'un oscillateur harmonique simple à une dimension est atteinte à des températures modérées si un nombre relativement petit de niveaux quantiques ($\ll 100$) est considéré. Les chaleurs spécifiques des oscillateurs harmoniques simples à deux niveaux, n niveaux et un nombre infini de niveaux ont été étudiés en détail par Styer [51]. Ainsi, le but directeur de ce présent travail est l'étude de l'évolution de ces propriétés avec l'augmentation du nombre d'états quantiques entrant dans l'évaluation de la fonction de partition de l'oscillateur Harmonique en question.

Discutons maintenant les différents résultats obtenus pour cet oscillateur. En utilisant l'équation (2.30) ainsi que les équations (2.27) et (2.28), tous les propriétés superstatistiques de notre oscillateur ont été déterminés. Dans tous les calculs on a supposé que $\hbar = \omega = m = c = 1$, et tous les quantités trouvés sont sans dimensions.

Comme on le sait, la chaleur spécifique est définie par [40, 50–52]

$$\begin{aligned} \frac{C_v}{k} &= \beta^2 \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle \\ &= \beta^2 (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pour le cas de l'oscillateur Harmonique, l'équation (2.31) se transforme à :

$$C_v = k (\beta \hbar \omega)^2 \frac{e^{\beta \hbar \omega}}{(e^{\beta \hbar \omega} - 1)^2} \quad (2.32)$$

A très basses températures ($kT \ll \hbar\omega$), la chaleur spécifique tend vers zéro suivant la loi exponentielle d'Einstein $C_v \sim k (\beta \hbar \omega)^2 e^{-\beta \hbar \omega}$. Pour les hautes températures, la limite classique de Dulong et Petit [40] $C_v \sim k$ est atteinte. Aussi, Le développement de (2.32) à haute température donne

$$\frac{C_v}{k} \simeq 1 - \frac{1}{12} (\beta \hbar \omega)^2 \quad (2.33)$$

Pour le cas exacte (voir Figure . 2.3) on peut apercevoir que la chaleur spécifique a une croissance monotone en fonction de la température jusqu'à atteindre une valeur constante pour les niveaux d'énergies supérieur ($N = \infty$).

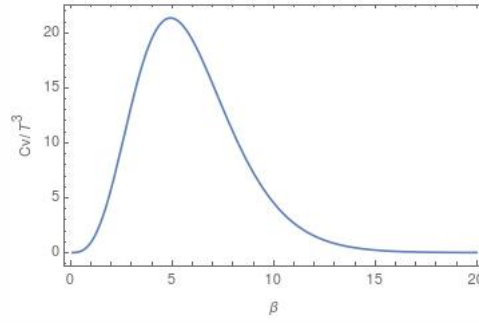


FIG. 2.2 : L'existence d'un pic autour d'une valeur critique

La Figure. 2.2 montre la variation de la fonction $\frac{C_v}{T^3}$ en fonction de $\frac{1}{T}$. Selon cette figure, on peut observer l'existence d'un pic autour de la valeur $kT \simeq \frac{\hbar\omega}{2}$. Cette représentation nous permis d'extraire la contribution due au modèle d'Einstein de la contribution du modèle de Debay.

Sur la Figure. 2.3, nous avons générés quelques courbes de la chaleur spécifique pour certains nombres limité des niveau d'énergies $N = 2, 6, 15$ et 50 . La courbe pour $N = 50$ est identique à celui généré en utilisant la fonction de partition complète (2.26)(c'est-à-dire additionnée de zéro à l'infini). Notre calcul est en accord avec ceux traités par [50, 51] : ces auteurs ont montré que la limite de la chaleur spécifique, à haute température, est obtenu pour un nombre quantiques relativement petits ($\ll 100$). Ainsi, la troncature du spectre d'énergie pour certaine nombre quantique conduit direct à la saturation requise pour le cas exacte : la chaleur spécifique n'est pas saturée pour les faibles valeurs du nombre quantique n mais, plutôt développe un pic et chute lentement à des températures élevées.

Maintenant, nous étudions l'origine des pics observés dans les courbes. Il est clair que le pic est dû à l'excitation des particules de l'état fondamental aux niveaux excités. Ces niveaux sont trop élevés pour contribuer de manière significative à ces températures. La quasi saturation du premier niveau excité et l'augmentation substantielle de la température nécessaire pour commencer à peupler les niveaux d'énergie les plus élevés sont responsables du minimum qui suit le pic et la chaleur spécifique se stabilise rapidement à sa limite classique.

Dans la Figure. 2.4, nous présentons les propriétés superstatistiques de cet oscilla-

teurs : le but derrière est l'étude de l'influence des deux paramètres suivants : le nombre de niveau entrant dans la contribution de la fonction de partition ainsi que le paramètre q de la théorie de la superstatistique. En se limitant uniquement aux courbes de la chaleur spécifique, la quantité physique accessible expérimentalement, nous pouvons bien voir que ces courbes (i) varient en fonction du paramètre q , (ii) la limite thermodynamique à haute températures est bien atteinte.

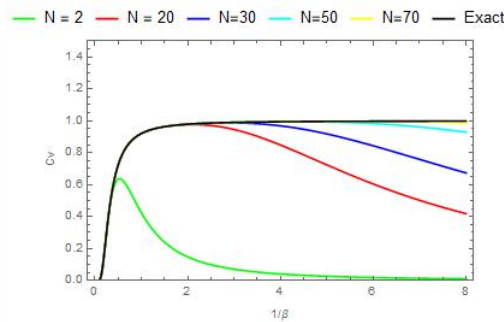


FIG. 2.3 : La chaleur spécifique d'un oscillateur harmonique simple à une dimension pour $N = 2, 20, 30, 50$ et 70 en fonction de $1/\beta$

En conclusion, nous souhaitons souligner deux résultats obtenus par l'évaluation numérique des formules thermiques de la chaleur spécifique.

- Sauf à des températures très élevées, une bonne approximation consiste à conserver quelques termes dans la somme de la fonction de partition. Cela signifie que seuls les niveaux les plus bas contribuent de manière significative aux propriétés thermodynamiques.
- Comme on peut le voir sur les figures, les valeurs calorifiques spécifiques très proches des prévisions classiques sont déjà obtenues à des températures modérées. Cela signifie qu'à une température moyenne donnée, la contribution d'un nombre de niveaux relativement faible (généralement bien inférieur à 100 dans les deux cas) suffit à générer des résultats effectivement classiques. Bien que ces résultats soient importants, ils sont rarement remarqués, ce qui contribue à des idées fausses sur la nature de la limite classique.

- Enfin, notons que, dans tous les cas considérés, les résultats classiques pour la chaleur spécifique ne vont pas à zéro dans la limite T , démontrant l'échec bien connu de la mécanique classique à basses températures : Lorsque kT est bien inférieur à l'espacement des niveaux $\hbar\omega$, les énergies thermiques typiques ne sont pas adéquats pour l'excitation de l'oscillateur à partir de l'état fondamental au premier état excité. Parce que l'oscillateur ne peut pas accepter l'énergie thermique dans ces petites quantités, l'énergie devient faible au lieu de se déverser dans l'oscillateur lors de l'augmentation de la température. Par conséquent, la chaleur spécifique est faible.

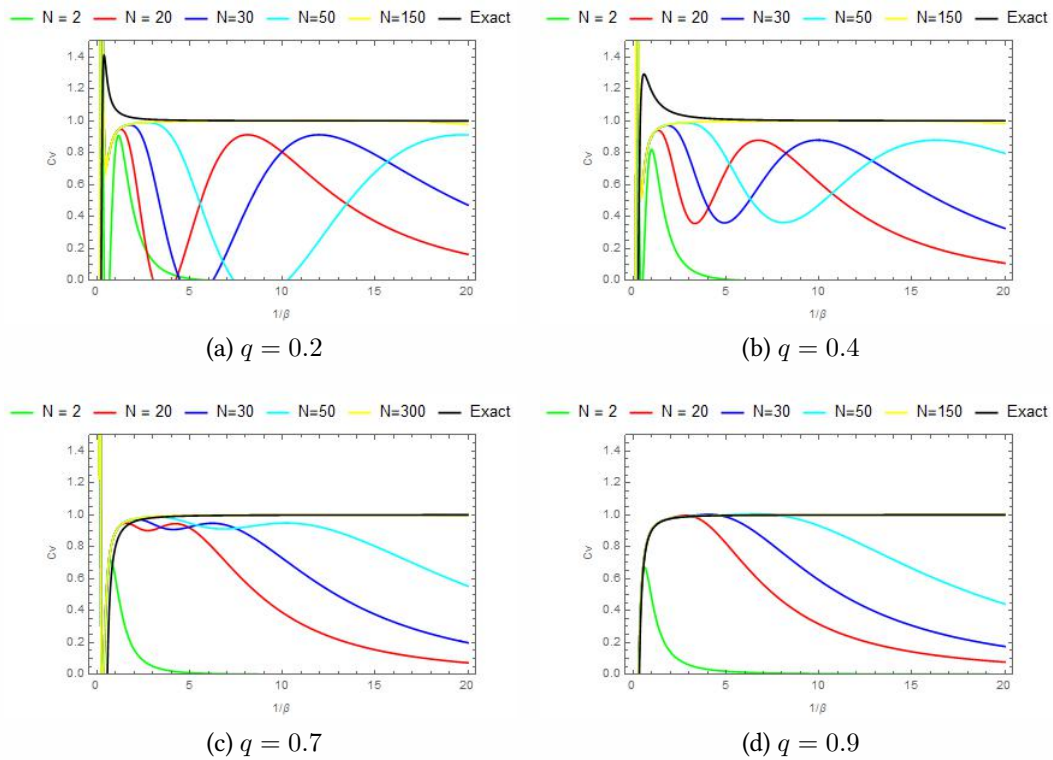


FIG. 2.4 : La chaleur spécifique d'un oscillateur harmonique simple à une dimension pour différentes valeurs de q en fonction de $1/\beta$

2.5 L'anomalie de Schottky

L'anomalie de Schottky est un effet observé en physique du solide où la capacité thermique spécifique d'un solide à basse température a un pic [52]. On l'appelle anomalie car la capacité calorifique augmente généralement avec la température ou reste constante. Cela se produit dans les systèmes avec un nombre limité de niveaux d'énergie de sorte que $E(T)$ augmente pour chaque niveau d'énergie. Puisque $Cv = dE/dT$, elle subira un grand pic lorsque la température passera d'un niveau à l'autre. Cet effet peut être expliqué en regardant le changement d'entropie du système. À une température nulle, seul le niveau d'énergie le plus bas est occupé, alors l'entropie est nulle et il y a très peu de probabilité d'une transition vers un niveau d'énergie plus élevé. Au fur et à mesure que la température augmente, il y a une augmentation de l'entropie et donc la probabilité d'une transition entre niveaux augmente. Lorsque l'énergie thermique kT s'approche de la différence entre les niveaux d'énergie, un large pic dans la courbe de la chaleur spécifique apparaît. Ce pic correspondant à un grand changement d'entropie pour un petit changement de température. À des températures élevées, tous les niveaux sont peuplés uniformément, il y a donc à nouveau un changement petit dans la fonction d'entropie pour de petits changements de température, et donc une chaleur spécifique plus faible jusqu'à devenir égale à zéro. Une anomalie de Schottky n'est pas une transition de phase, qui se manifesterait par une cuspide (Pointe aiguë et allongée) nette (2ème ordre) ou une fonction delta (1ere ordre) dans les courbes de la chaleur spécifique.

L'observation d'une anomalie de Schottky indique qu'il existe un petit nombre de niveaux d'énergie discrets dominant le comportement du système. Il peut quantifier l'espacement entre ces niveaux d'énergie. Enfin, cette anomalie (pic de Schottky) est observée aussi dans des systèmes avec plusieurs niveaux d'énergie discrets (voir Figure. 2.5).

2.5.1 La chaleur spécifique d'un système à deux niveaux

La fonction de partition d'un système à deux niveaux est donnée par

$$Z = 1 + e^{-\beta E} = 1 + e^{-\Delta/T}, \quad (2.34)$$

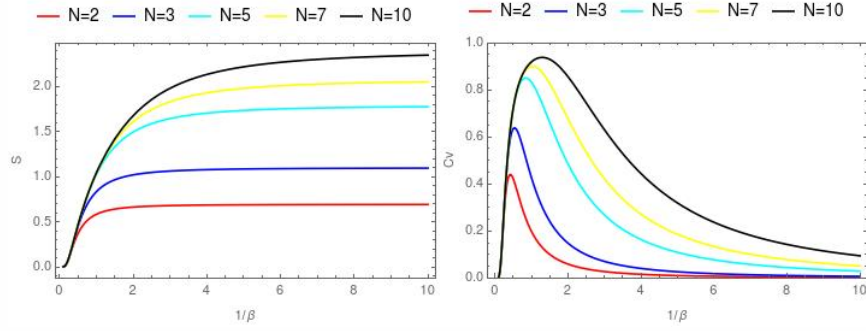


FIG. 2.5 : L'anomalie de Schottky de l'oscillateur Harmonique unidimensionnel pour les niveaux suivants : $N = 2, 3, 5, 7$ et 10

avec

$$E = k_B \Delta, \quad (2.35)$$

est le gap d'énergie entre les deux niveaux. L'énergie interne s'écrira alors par la relation suivante

$$U = k_B T^2 \left(\frac{d \ln Z}{dT} \right). \quad (2.36)$$

Enfin la capacité calorifiques sera

$$C_v = k_B \left(\frac{\Delta}{T} \right)^2 \frac{e^{\Delta/T}}{(1 + e^{\Delta/T})^2} \quad (2.37)$$

En ce qui suit, nous présentons nos résultats concernant les deux fonctions thermiques, l'entropie et la chaleur spécifique en fonction de la température pour différents valeurs du paramètre q . L'objectif derrière est de calculer les propriétés superstatistiques de l'anomalie de Schottky pour certains niveau d'énergies de système. Ces propriétés sont données à partir du paramètre q qui correspond à la fluctuation que subit la température. Ces propriétés sont présentés dans les Figures. 2.6 et 2.7.

En générale, l'anomalie de Schottky est une caractéristique générale des systèmes à deux niveaux. La capacité thermique est définie comme $C_v = dU/dT$ où U est l'énergie interne. Le gradient de l'énergie interne est donc important. A très basses températures, seul le niveau le plus bas est peuplé et l'énergie interne est faible et la capacité thermique est aussi également. Cependant, lorsque la température augmente, le niveau supérieur

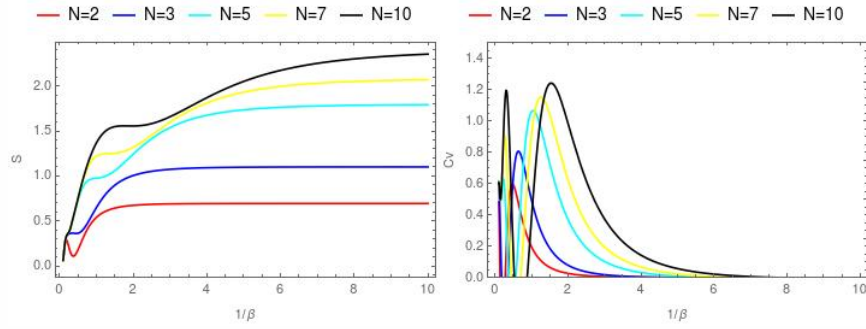


FIG. 2.6 : L'anomalie de Schottky de l'oscillateur Harmonique unidimensionnel pour $q = 0.2$

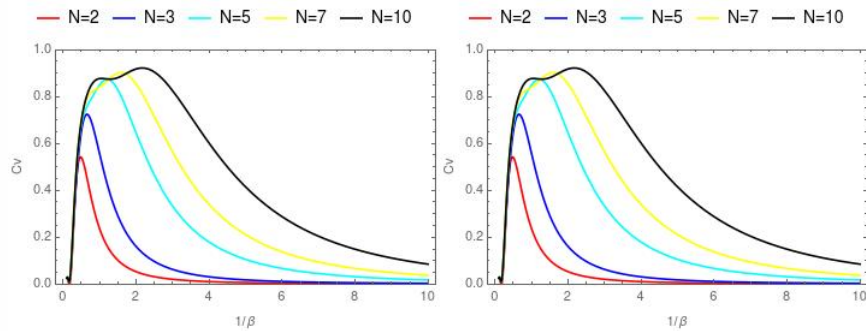


FIG. 2.7 : L'anomalie de Schottky de l'oscillateur Harmonique unidimensionnel pour $q = 0.7$

commence à être peuplé et ainsi l'énergie interne augmente rapidement. Lorsque les deux niveaux sont presque également peuplés, ce qui se produit à très haute température, plus d'énergie ne peut être absorbée et le gradient dU/dT devient effectivement constante et ainsi la capacité thermique devient petite et tend vers zéro. Un comportement similaire est observé lorsqu'il y a trois ou quatre, etc., c'est-à-dire un petit nombre de niveaux.

La Figure. 2.8 montre l'influence du paramètre q sur l'énergie de gap (2.37) pour un système à deux niveaux. On peut voir que ce gap diminue lors de la croissance de ce paramètre et la population du premier niveau excité devient un peu difficile.

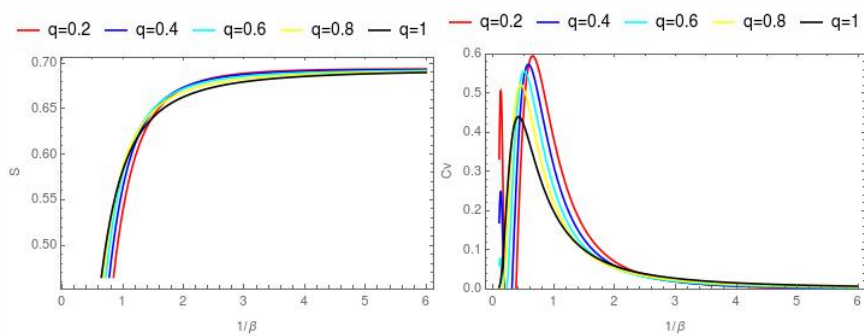


FIG. 2.8 : L'évolution de l'anomalie de Schottky pour différents valeurs de q

CHAPITRE 3

LES PROPRIÉTÉS SUPERSTATISTIQUES POUR DES PARTICULES DE SPIN-0 ET SPIN-1/2 À UNE DIMENSION

3.1 Les solutions propres de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel

L'équation générale de l'oscillateur de Dirac à une dimension est exprimée par la relation suivante :

$$\{c\alpha_x(p_x - im\omega\beta x) + \beta m\} \psi_D = E\psi_D, \quad (3.1)$$

où m est la masse de la particule, ω est la fréquence, $\psi_D = (\psi_1, \psi_2)^T$ la fonction d'onde et les α_x, β sont les matrices de Pauli. Ces matrices sont définies par

$$\alpha_x = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

L'Hamiltonien de l'oscillateur de Dirac est décrit par l'équation ci-dessous

$$H_D = \{c\alpha_x(P_x - im\omega\beta x) + \beta m\}. \quad (3.3)$$

L'équation (3.3) s'écrit sous une forme matricielle comme suit :

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left(P_x - im\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} m & P_x + im\omega x \\ P_x - im\omega x & -m \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

En insérant (3.4) dans l'équation (3.3) on obtient :

$$\begin{pmatrix} m & P_x + im\omega x \\ P_x - im\omega x & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

A partir de cette équation, on trouve le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} m\psi_1 + (p_x + im\omega x)\psi_2 &= E\psi_1, \\ (p_x - im\omega x)\psi_1 - m\psi_2 &= E\psi_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

L'équation (3.6) permet d'avoir la composante ψ_2 en fonction de ψ_1 comme suit :

$$\psi_2(x) = \frac{(p_x - im\omega x)}{(E + m)}\psi_1(x). \quad (3.7)$$

L'injection de l'équation (3.7) dans (3.6) donne

$$[(p_x + im\omega x)(p_x - im\omega x) - E^2 + m^2]\psi_1(x) = 0. \quad (3.8)$$

En développant le terme $(p_x + im\omega x)(p_x - im\omega x)$ on trouve

$$[p_x^2 + im\omega(xp_x - p_x x) + (m\omega x)^2 - E^2 + m^2]\psi_1(x) = 0. \quad (3.9)$$

En utilisant la relation d'incertitude de Heisenberg, $[x, p_x] = i\hbar$, l'équation (3.9) se transforme à

$$[p_x^2 + (m\omega x)^2]\psi_1(x) = [E^2 + \hbar m\omega - m^2]\psi_1(x), \quad (3.10)$$

ou bien sous une autre forme

$$\left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) \psi_1(x) = \left(\frac{\omega m + E^2 - m^2}{2m} \right) \psi_1(x) = \tilde{E}\psi_1(x), \quad (3.11)$$

avec

$$\tilde{E} = \frac{\omega m + E^2 - m^2}{2m}. \quad (3.12)$$

La relation (3.11) est une équation standard d'un oscillateur Harmonique à une dimension. En conséquence, son spectre d'énergie est bien connu. Il vérifie la formule suivante

$$E = \pm m \sqrt{\frac{2\omega}{m} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\omega}{m} + 1}. \quad (3.13)$$

Cette dernière peut se mettre sous la forme explicite suivante

$$E_n = \pm m \sqrt{1 + 2m\omega n}, \quad (3.14)$$

Les fonctions d'onde propres peuvent être exprimées en termes de polynôme de Hermite de degré n

$$\psi_1(x) = N_{norm} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} H \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}. \quad (3.15)$$

avec $N_{norm} = 2^n \sqrt{\pi n!}$ est la constante de normalisation. Ainsi, la fonction d'onde totale associée est

$$\psi_D = N_{norm} \left(\frac{1}{\frac{c(p_x - im\omega x)}{(E + mc^2)}} \right) H \left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \right) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}. \quad (3.16)$$

3.2 Les solutions propres de l'oscillateur de Klein-Gordon unidimensionnel

L'équation de mouvement libre de (KG) à une dimension est donné par la relation :

$$(p_x^2 - E^2 + m^2) \psi_{KG} = 0. \quad (3.17)$$

L'introduction de l'interaction de type de l'oscillateur de Dirac se fait par la substitution de p_x par $p_x + im\omega x$. Dans ce cas, l'équation (3.17) se transforme à :

$$\{(p_x + im\omega x)(p_x - im\omega x)\} \psi_{KG} = (E^2 - m^2) \psi_{KG}. \quad (3.18)$$

où sous une autre forme par :

$$\left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \psi_{KG} = \bar{E}\psi_{KG}. \quad (3.19)$$

dont

$$\bar{E} = \frac{E^2 - m^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega,$$

L'équation (3.19) est une équation unidimensionnelle d'un oscillateur harmonique dont les solutions sont bien connues. Ainsi, la forme de notre spectre d'énergie est donc

$$E_n = \pm\sqrt{m^2 + 2\omega mn} \quad (3.20)$$

La fonction d'onde correspondante est

$$\psi_{KG}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} H_n(\sqrt{m\omega}x) e^{-\frac{m\omega}{2}x^2}. \quad (3.21)$$

Comme premier résultat, on constate que la forme du spectre d'énergie de l'oscillateur de Klein-Gordon a la même forme que celui de l'oscillateur de Dirac. Ainsi, toute discussion des propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Dirac des particules fermioniques sera étendu au cas des particules bosoniques. Ces propriétés seront obtenus comme dans le cas de l'oscillateur harmonique. La fonction de partition généralisée aura la même forme que l'équation (2.30), c-à-d,

$$\mathcal{Z} = \left(1 + \frac{a}{2} \langle \beta \rangle^2 \frac{d^2}{d\langle \beta \rangle^2} - \frac{a^2}{3} \langle \beta \rangle^3 \frac{d^3}{d\langle \beta \rangle^3} \right) \sum_n e^{-\langle \beta \rangle E_n} \quad (3.22)$$

avec un spectre d'énergie adoptant l'équation (3.14) pour les fermions, et l'équation (3.20) pour les bosons.

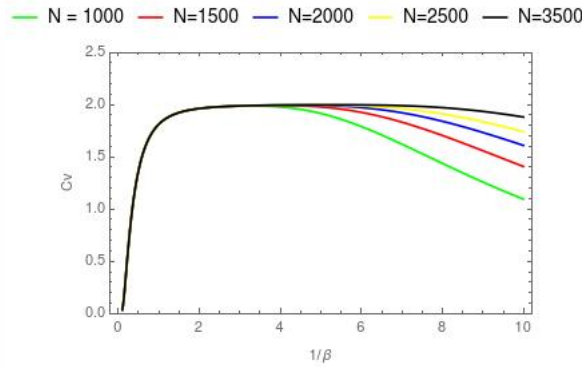


FIG. 3.1 : La chaleur spécifique pour les deux types d'oscillateurs

3.3 Les propriétés superstatistiques des deux oscillateurs

Dans cette section, nous nous concentrons, comme dans le cas de l'oscillateur Harmonique, sur l'étude de l'influence de nombres de niveaux ainsi que le paramètre q sur la chaleur spécifique. Ainsi, le motif directeur est d'analyser l'évolution de ces propriétés avec l'augmentation du nombre d'états quantiques pour ces deux oscillateurs. Notons ici que ces types d'oscillateurs harmoniques relativistes sont bien connus pour avoir une place importante en physique aux niveaux fondamental et pratique [5, 10, 11, 26, 29, 30, 53–55].

Dans la Figure. 3.1, nous avons générés quelques courbes de la chaleur spécifique pour certain nombre limité des niveau d'énergies tels que $N = 1000, 1500, 2000, 2500$ et 3500 . La courbe pour $N = 3500$ est identique à celui généré en utilisant la fonction de partition complète (c'est-à-dire additionnée de zéro à l'infini) de équation (3.22). Ainsi, comme dans le cas de l'oscillateur Harmonique, la troncation du spectre d'énergie conduit direct à la saturation requise pour le cas exacte : la chaleur spécifique n'est pas saturée pour les faibles valeurs du nombre quantique N mais, plutôt développe un pic étalé qui chute lentement à des températures élevées. Enfin, le nombre de niveaux quantiques pour les deux oscillateurs sont inférieures à 4000.

Maintenant, tous les résultats après l'introduction du concept de la superstatistique à partir du paramètre q sont présentés dans la Figure. 3.2.

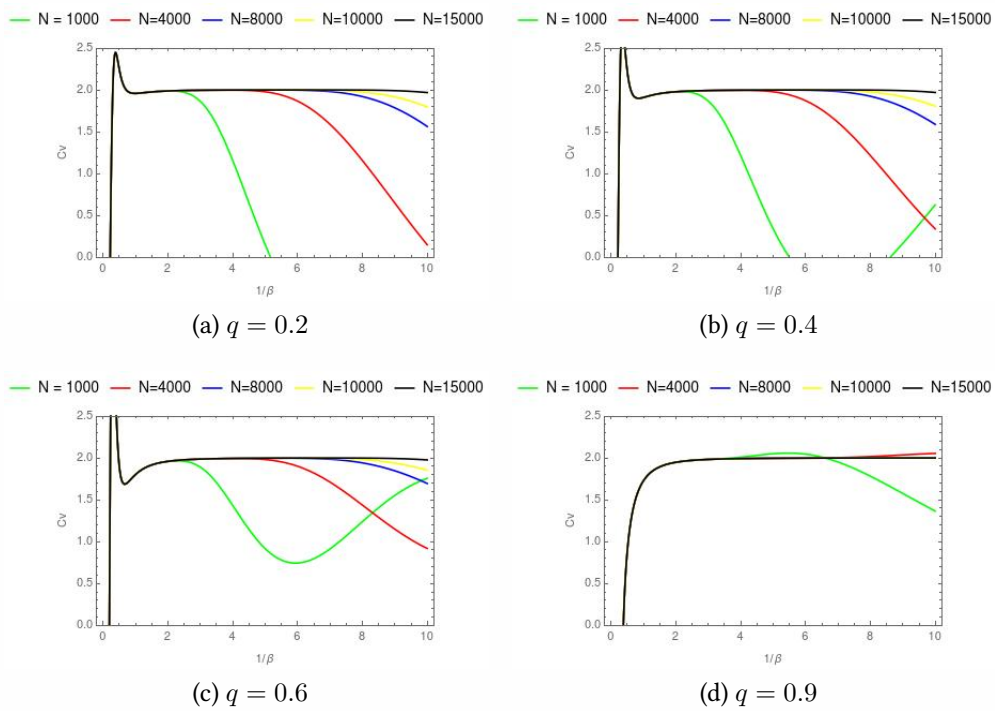


FIG. 3.2 : La chaleur spécifique pour différentes valeurs de q pour les deux types d'oscillateurs

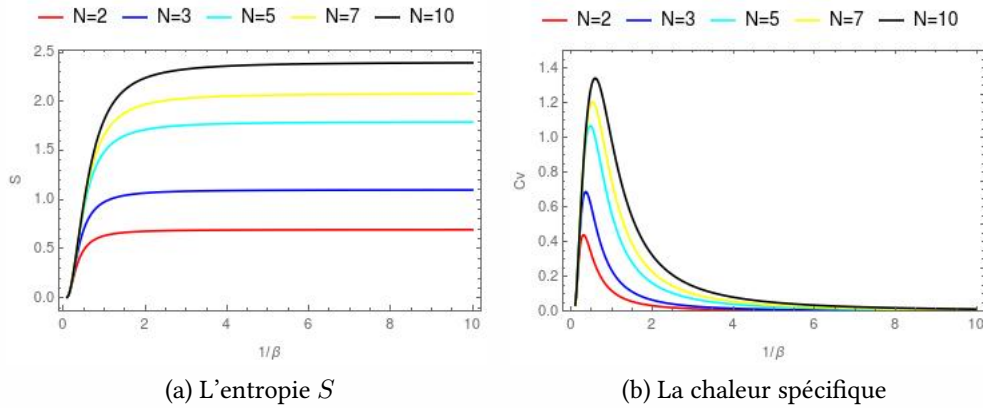


FIG. 3.3 : L'anomalie de Schottky pour les deux types d'oscillateurs

Dans la Figure . 3.2, nous présentons les différents quantités thermiques en fonction du paramètre q pour différents choix de nombres de niveaux N . En se limitant uniquement aux courbes de la chaleur spécifique, nous pouvons bien voir que ces courbes (i) varient en fonction du paramètre q , (ii) la limite thermodynamique à haute températures est bien atteinte. En conclusion, nous souhaitons souligner que sauf à des températures très élevées, une bonne approximation consiste à conserver quelques termes dans la somme. Cela signifie que seuls les niveaux les plus bas contribuent de manière significative aux propriétés thermodynamiques. Aussi, contrairement pour le cas de l'oscillateur Harmonique non-relativiste, le nombre de niveaux est plus élevés dans le cas des deux oscillateurs que celui trouvé dans le cas traité dans le Chapitre 2.

3.4 L'anomalie de Schottky

Passons maintenant au cas particulier du contribution des plus bas niveaux : c'est le cas de l'anomalie de Schottky.

Dans la Figure. 3.3 , nous présentons l'anomalie de Schottky pour les deux oscillateurs pour les valeurs faibles des niveaux d'énergies pour les deux types d'oscillateurs. Remarquons ici que c'est la première fois cette détermination a été faite. Rappelons ici, que l'anomalie de Schottky est un effet observé en physique du solide où la capacité thermique spécifique d'un solide à basse température a un pic [52]. On l'appelle anomalie car

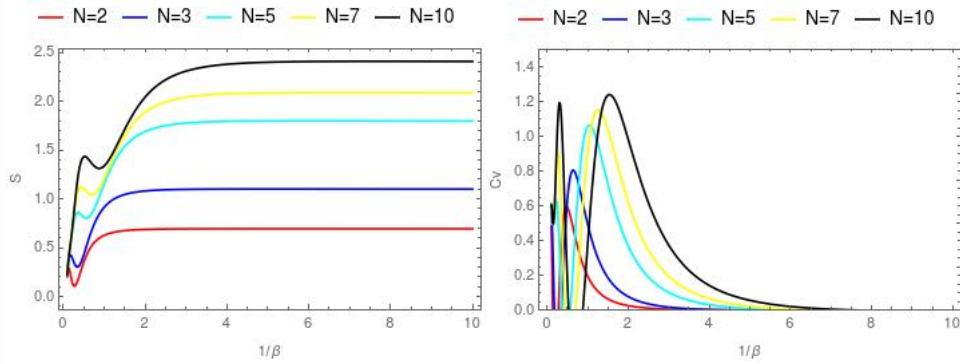


FIG. 3.4 : L'anomalie de Schottky des deux types d'oscillateurs pour $q = 0.2$

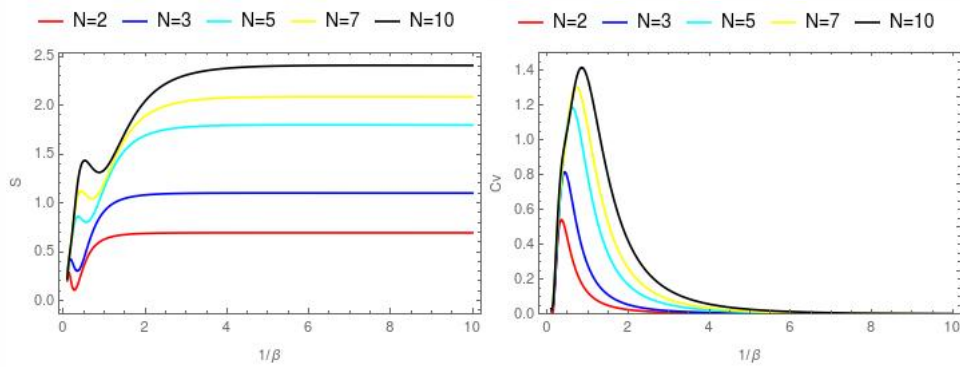


FIG. 3.5 : L'anomalie de Schottky des deux types d'oscillateurs pour $q = 0.7$

la capacité calorifique augmente généralement avec la température ou reste constante. Notons qu'une anomalie de Schottky n'est pas une transition de phase. L'observation d'une anomalie de Schottky indique qu'il existe un petit nombre de niveaux d'énergie discrets dominant le comportement d'un système et peut quantifier l'espacement entre ces niveaux d'énergie.

En ce qui suit, nous présentons nos résultats concernant les deux fonctions thermiques, l'entropie et la chaleur spécifique en fonction de la température pour différents valeurs du paramètre q . L'objectif derrière est de calculer les propriétés superstatistiques de l'anomalie de Schottky pour certaines niveau d'énergies de système. Ces propriétés sont données à partir du paramètre q qui correspond à la fluctuation que subit la température. Ces propriétés sont présentés dans les Figures. 3.4 et 3.5. On constate que les valeurs de $q > 0.7$ sont les plus adaptés par rapport aux courbes pour le cas $q = 0.2$.

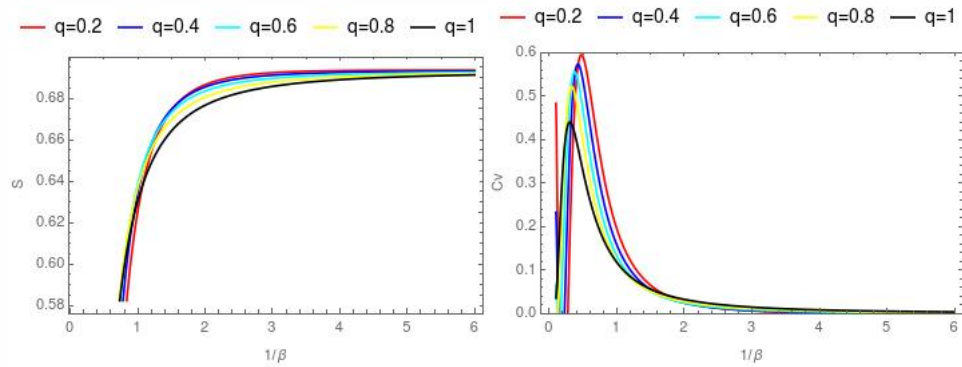


FIG. 3.6 : L'évolution de l'anomalie de Schottky pour différents valeurs de q pour un système à deux niveaux pour les deux types d'oscillateurs.

Enfin, dans la dans la Figure. 3.6, nous suivons l'évolution de cette anomalie pour différentes valeurs de q . On constate ici que le gap énergétique diminue lors de l'augmentation du paramètre q c-à-d, la diminution de la fluctuation de la température comme dans le cas de l'oscillateur Harmonique unidimensionnel.

CHAPITRE 4

LES PROPRIÉTÉS SUPERSTATISTIQUES DE L'OSCILLATEUR DE KEMMER À UNE DIMENSION

4.1 Les solutions propres de l'oscillateur de Kemmer à une dimension

L'équation relativiste libre de Kemmer est donnée par [30–32, 54] :

$$(\beta^\mu p_\mu - M) \psi_k = 0, \quad (4.1)$$

où M est la masse totale des deux particules de spin $S = \frac{1}{2}$ et β sont les matrices de Kemmer satisfaisant à la relation de commutation suivante :

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\mu, \quad (4.2)$$

avec

$$\beta^\mu = \gamma^\mu \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^\mu, \quad (4.3)$$

où \hat{I} est la matrice identité, γ^μ la matrice de Dirac et \otimes le produit tensoriel.

L'état stationnaire ψ_k de l'équation (4.11) est une fonction d'onde à quatre compo-

santes s'écrivant sous la forme :

$$\psi_k = \psi_D \otimes \psi_D = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \end{pmatrix}^T. \quad (4.4)$$

où ψ_D est la solution de l'équation de Dirac. Pour l'oscillateur de Kemmer, l'opérateur d'impulsion \vec{p} , dans l'équation libre de Kemmer, pourrait être remplacé par $\vec{p} - iMB\omega\vec{x}$ avec B est choisi comme $B = \gamma^0 \otimes \gamma^0$, ($B^2 = \hat{I}$) [33,54]. Ainsi, on obtient

$$\{\beta^0\xi - \beta^1(p_x - iMB\omega x) - \beta^2(p_y - iMB\omega y) - M\} \psi_k = 0, \quad (4.5)$$

avec

$$\beta^0 = \gamma^0 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^0, \beta^1 = \gamma^1 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^1, \beta^2 = \gamma^2 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^2. \quad (4.6)$$

En utilisant les relations suivantes

$$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}, \quad (4.7)$$

$$\alpha_x = \gamma^0 \gamma^1 \implies \gamma^0 \alpha_x = \gamma^1, \quad (4.8)$$

$$\alpha_y = \gamma^0 \gamma^2 \implies \gamma^0 \alpha_y = \gamma^2, \quad (4.9)$$

et

$$\beta^1 = \gamma^1 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^1 = \hat{I} \otimes \gamma^0 \sigma_x + \gamma^0 \sigma_x \otimes \hat{I}, \quad (4.10)$$

$$\beta^2 = \hat{I} \otimes \gamma^0 \sigma_y + \gamma^0 \sigma_y \otimes \hat{I}. \quad (4.11)$$

Multipliant à gauche l'équation (4.5) par $(\gamma^0 \otimes \gamma^0)$, nous obtenons :

$$\{(\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^0 \xi - (\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^1 (p_x - iMB\omega x) - M (\gamma^0 \otimes \gamma^0)\} \psi_k = 0, \quad (4.12)$$

avec

$$(\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^0 = (\gamma^0 \otimes \gamma^0) (I \otimes \gamma^0 + \gamma^0 \otimes I) = (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0), \quad (4.13)$$

$$(\gamma^0 \otimes \gamma^0) \beta^1 = (\gamma^0 \otimes \gamma^0) (I \otimes \gamma^0 \sigma_x + \gamma^0 \sigma_x \otimes I) = (\gamma^0 \otimes \sigma_x + \sigma_x \otimes \gamma^0), \quad (4.14)$$

Soit

$$\{(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) \xi - \square - M (\gamma^0 \otimes \gamma^0)\} \psi_k = 0, \quad (4.15)$$

où

$$\square = (\gamma^0 \otimes \sigma_x + \sigma_x \otimes \gamma^0) (p_x - iMB\omega x), \quad (4.16)$$

En calculant tous les termes suivants

$$\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0 \xi = \begin{pmatrix} 2\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\xi \end{pmatrix}, \quad (\gamma^0 \otimes \sigma_x + \sigma_x \otimes \gamma^0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

$$M (\gamma^0 \otimes \gamma^0) = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

$$p_x - iMB\omega x = \begin{pmatrix} p_x - iM\omega x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_x + iM\omega x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_x + iM\omega x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_x - iM\omega x \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

Ainsi, l'équation (4.15) prend la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 2\xi - M & -p_x + iM\omega x & -p_x + iM\omega x & 0 \\ -p_x - iM\omega x & M & 0 & p_x - iM\omega x \\ -p_x - iM\omega x & 0 & M & p_x - iM\omega x \\ 0 & p_x + iM\omega x & p_x + iM\omega x & -(2\xi + M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Reportons ψ_k de (4.14) dans (4.30), nous obtenons, alors quatre équations algébriques

$$(2\xi - M) \psi_1 - (p_x + iM\omega x) \psi_2 - (p_x + iM\omega x) \psi_3 = 0, \quad (4.21)$$

$$-(p_x - iM\omega x) \psi_1 + M\psi_2 + (p_x - iM\omega x) \psi_4 = 0, \quad (4.22)$$

$$-(p_x - iM\omega x) \psi_1 + M\psi_3 + (p_x - iM\omega x) \psi_4 = 0, \quad (4.23)$$

$$(p_x + iM\omega x) \psi_2 + (p_x + iM\omega x) \psi_3 - (2\xi + M) \psi_4 = 0. \quad (4.24)$$

D'après ces équations, nous avons

$$\psi_1 = \frac{2(p_x + iM\omega x)}{2\xi - M} \psi_2, \quad (4.25)$$

$$\psi_2 = \psi_3, \quad (4.26)$$

$$\psi_4 = \frac{2(p_x + iM\omega x)}{2\xi + M} \psi_2. \quad (4.27)$$

Éliminons ψ_1, ψ_3, ψ_4 en faveur de ψ_2 , on trouve

$$\left[\frac{-2(p_x - iM\omega x)(p_x + iM\omega x)}{2\xi - M} + M + \frac{2(p_x - iM\omega x)(p_x + iM\omega x)}{2\xi + M} \right] \psi_2 = 0. \quad (4.28)$$

Après un simple calcul, on a :

$$4M(p_x^2 + M^2\omega^2 x^2 + M\omega) \psi_2 = M(4\xi^2 - M^2) \psi_2. \quad (4.29)$$

Par un calcul simple, l'équation (4.29) se transforme

$$\left(\frac{p_x^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 x^2 \right) \psi_2 = \bar{\xi} \psi_2, \quad (4.30)$$

où

$$\bar{\xi} = \frac{4\xi^2 - M^2}{8M} - \frac{\omega}{2}. \quad (4.31)$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique dont les solutions sont bien connues. Les solutions propres sont donnés comme suit :

$$\xi_n = \pm \sqrt{\frac{M^2}{4} + 2M\omega(n+1)}, \quad (4.32)$$

$$\psi_K(x) = N_{norm} \begin{pmatrix} \frac{2(p_x + iM\omega x)}{2\xi - M} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{2(p_x + iM\omega x)}{2\xi + M} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{m\omega x^2}{2}} H_n \left[(m\omega)^{\frac{1}{2}} x \right]. \quad (4.33)$$

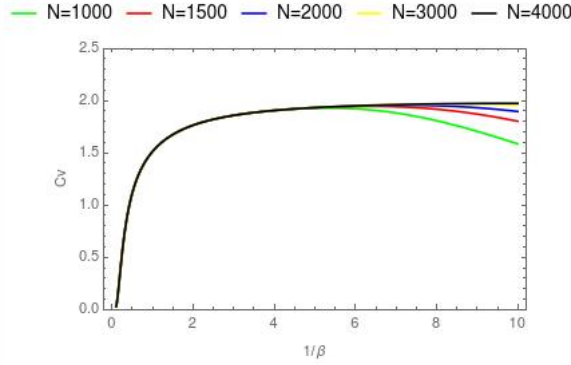


FIG. 4.1 : La chaleur spécifique pour l'oscillateur de Kemmer

4.2 Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Kemmer

A partir de la définition du spectre d'énergie (équation (4.32)), tous les propriétés superstatistiques sont faciles à déterminées via la fonction de partition. La fonction de partition généralisée aura la même forme que l'équation (2.30), c-à-d,

$$\mathcal{Z} = \left(1 + \frac{a}{2} \langle \beta \rangle^2 \frac{d^2}{d \langle \beta \rangle^2} - \frac{a^2}{3} \langle \beta \rangle^3 \frac{d^3}{d \langle \beta \rangle^3} \right) \sum_n e^{-\langle \beta \rangle \xi_n}, \quad (4.34)$$

avec un spectre d'énergie adoptant l'équation (4.32) pour le cas des bosons vectoriels de spin $S = 1$.

La méthode utilisée ici est la même pour le cas des oscillateurs Harmonique relativistes. Ainsi, nous nous somme intéressés sur l'étude de l'influence de nombres de niveaux d'énergie sur l'aspect des courbes de la chaleur spécifique. Le but derrière est l'analyse de l'évolution de ces propriétés avec l'augmentation du nombre d'états quantiques figurant dans la définition de la fonction de partition.

Sur la Figure. 4.1 , nous avons tracés quelques courbes de la chaleur spécifique de l'oscillateur de Kemmer à une dimension pour certain nombre limité de niveau d'énergies tels que $N = 1000, 1500, 2000, 2500$ et 3500 . La courbe pour $N = 3500$ est identique à celui généré en utilisant la fonction de partition complète (c'est-à-dire additionnée de zéro à l'infini) de équation (3.22). Ainsi, la troncature du spectre d'énergie pour certaine

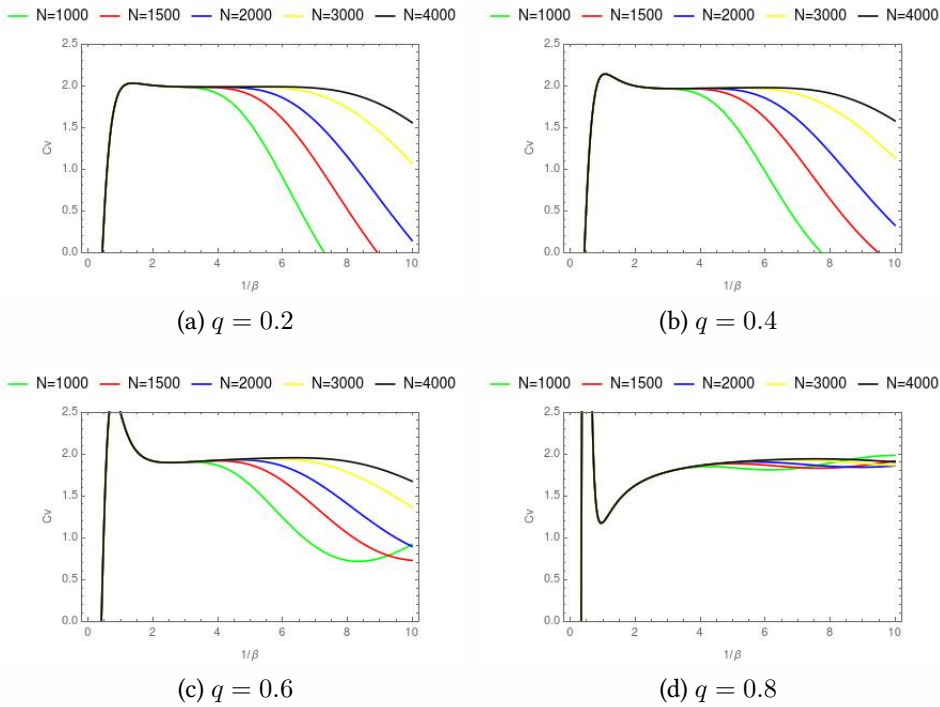


FIG. 4.2 : La chaleur spécifique pour différentes valeurs de q pour l'oscillateur de Kemmer à 1D

nombre quantique conduit direct à la saturation requise pour le cas exacte : la chaleur spécifique n'est pas saturée pour les faibles valeurs du nombre quantique N mais, plutôt développe un pic étalé qui chute lentement à des températures élevées.

Maintenant, passons aux calculs des propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Kemmer. L'introduction de la théorie superstatistiques par le biais du paramètre q donnent les résultats suivant selon la Figure. 4.2 . Dans cette figure, nous présentons les différents quantités thermiques en fonction du paramètre q . En se limitant uniquement aux courbes de la chaleur spécifique, la quantité physique accessible, nous pouvons bien voir que ces courbes (i) varient en fonction du paramètre q , (ii) la limite thermodynamique à haute températures est bien atteinte. En conclusion, nous souhaitons souligner que sauf à des températures très élevées, une bonne approximation consiste à conserver quelques termes dans la somme. Cela signifie que seuls les niveaux les plus bas contribuent de manière significative aux propriétés thermodynamiques.

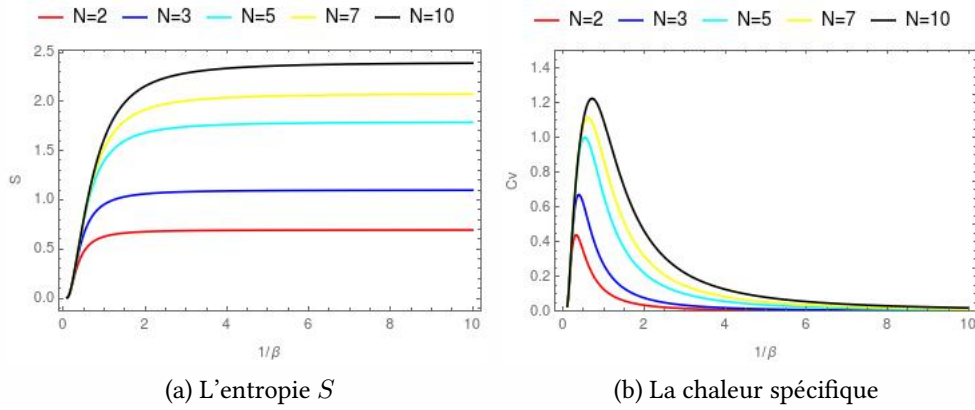


FIG. 4.3 : L'anomalie de Schottky pour l'oscillateur de Kemmer

4.3 L'anomalie de Schottky

Passons maintenant à l'étude de l'influence des deux paramètres N et q sur l'anomalie de Schottky.

Dans la Figure. 4.3 , nous présentons l'anomalie de Schottky pour le cas de l'oscillateur de Kemmer pour les niveaux d'énergies les plus basses. Remarquons ici que c'est la première fois cette détermination a été faite. Rappelons ici, que l'anomalie de Schottky est un effet observé en physique du solide où la capacité thermique spécifique d'un solide à basse température a un pic [52]. Une anomalie de Schottky n'est pas une transition de phase. L'observation d'une anomalie de Schottky indique qu'il existe un petit nombre de niveaux d'énergie discrets dominant le comportement d'un système, et peut quantifier l'espacement entre ces niveaux d'énergie.

En ce qui suit, nous présentons nos résultats concernant les deux fonctions thermiques, l'entropie et la chaleur spécifique en fonction de la température pour différents valeurs du paramètre q . L'objectif derrière est de calculer les propriétés superstatistiques de l'anomalie de Schottky pour certaines niveau d'énergies de système. Ces propriétés sont données à partir du paramètre q qui correspond à la fluctuation que subit la température. Ces propriétés sont présentés dans les Figures. 4.4 et .4.5. On constate que les valeurs de $q > 0.7$ sont les plus adaptés par rapport aux courbes pour le cas $q = 0.2$ comme dans le cas des deux oscillateurs de Klein-Gordon et de Dirac.

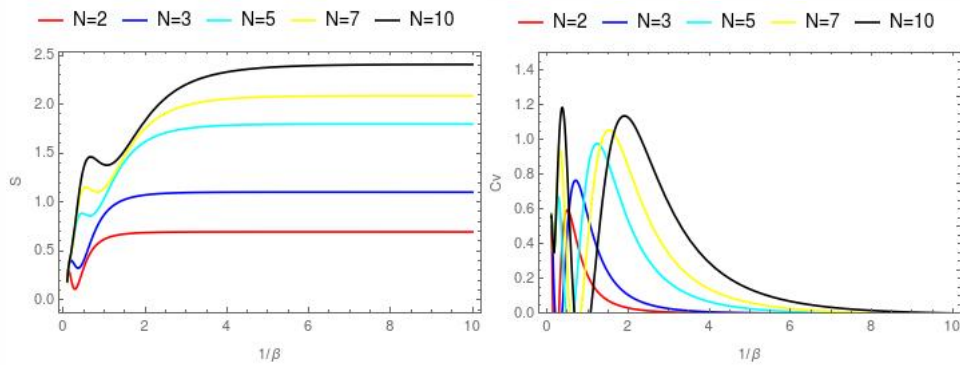


FIG. 4.4 : L'anomalie de Schottky de l'oscillateur de Kemmer pour $q = 0.2$

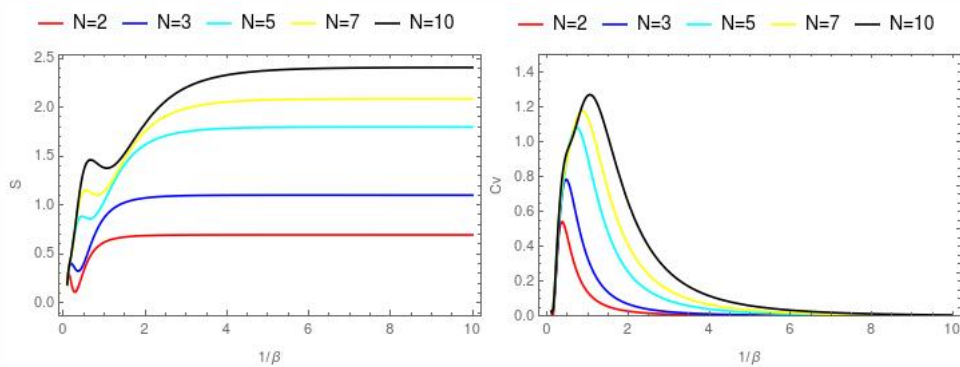


FIG. 4.5 : L'anomalie de Schottky de l'oscillateur de Kemmer pour $q = 0.7$

La Figure. (4.6) montre que l'évolution du gap énergétique pour un système à deux niveaux de l'oscillateur de Kemmer : ce gap diminue en augmentant les valeurs de q . Comme dans le cas des oscillateurs relativistes, cela veut dire que le gap énergétique de l'oscillateur de Kemmer augmente par l'augmentation de la fluctuation de la température.

Enfin, nous suivons l'évolution de cette anomalie pour différentes valeurs de q dans la Figure. 4.6.

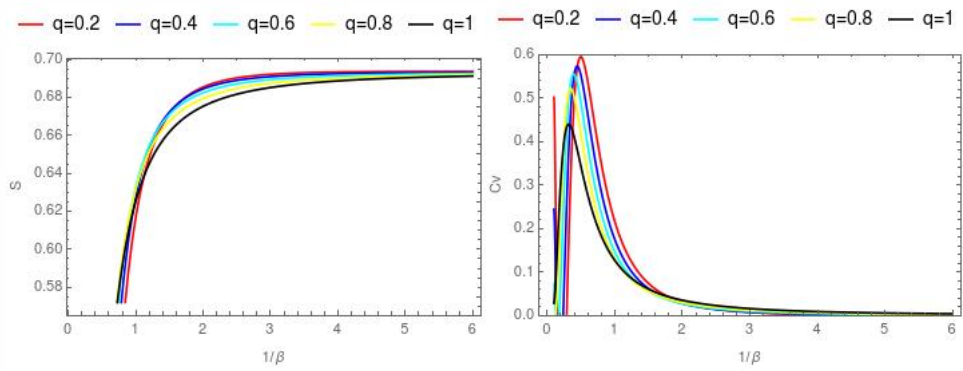


FIG. 4.6 : L'évolution de l'anomalie de Schottky de l'oscillateur de Kemmer pour différents valeurs de q

CONCLUSION

Dans ce mémoire nous avons solutionné les trois équations relativistes correspondant aux particules de spin-0, $\frac{1}{2}$ et 1 en présence d'un oscillateur Harmonique relativiste, connu sous le nom de l'interaction de l'oscillateur de Dirac. Les solutions trouvées représentent l'espace unidimensionnel

Concernant le cas des particules scalaires de spin-0, régit par l'équation de Klein-Gordon, le spectre d'énergie est non-dégénéré. Pour le cas des particules de spin- $\frac{1}{2}$, qui suivent l'équation de Dirac, le spectre d'énergie dégagé est non-dégénéré. Les résultats obtenus, pour les deux types d'oscillateurs, sont en bon accord avec ceux trouvés dans la littérature [6-8,33,56]. Enfin, pour le cas des particules vectorielles de spin-1, dont on utilise l'équation de Kemmer pour trouver les solutions, les résultats donnent aussi un spectre d'énergie non-dégénéré.

Nous avons aussi étudié les propriétés superstatistiques des oscillateurs relativistes et non relativistes.

En premier lieu, nous avons abordé le cas de l'oscillateur Harmonique. Les solutions propres de cet oscillateur ont été obtenues, ainsi que ces propriétés superstatistiques. Ces dernières ont été obtenues par l'utilisation de l'approche de la fonction Zeta. La comparaison avec le cas exacte de l'oscillateur Harmonique a été bien discutée. En se limitant uniquement aux courbes de la chaleur spécifique, la quantité physique accessible expérimentalement, nous pouvons bien voir que ces courbes (i) varient en fonction du

paramètre q , (ii) la limite thermodynamique à haute températures est bien atteinte, et enfin (iii) contrairement au cas précédent, l'approche des deux pôles montre une bonne correspondance entre les courbes en fonction de q et le cas exacte ($q = 1$). Dans le même contexte, notre étude a été étendue au cas de l'oscillateur de Dirac à une dimension : après avoir déterminé les solutions propres de cet oscillateur, les propriétés superstatistiques de ce dernier ont été bien évaluées : Nous avons variés les deux paramètres (r, q) afin d'obtenir une chaleur spécifique non-négative obéissant à la troisième loi de la thermodynamique.

En conclusion, les résultats trouvés montrent que l'introduction de la superstatistique pour le cas de l'oscillateur de Dirac uni-dimensionnel permet d'éliminer l'existence d'une chaleur spécifique négative, problème posé sérieusement dans la littérature, pour certaine valeur du paramètre universel q .

Notons ici que notre problème en question est intéressant au niveau théorique et expérimental : au niveau théorique il sert comme un modèle réaliste pour des exemples qui ont des solutions exactes, par contre au niveau expérimental, notre oscillateur a été bien conçu et réalisé par le modèle d'un système of *trapped atomic ions*. L'oscillateur de Dirac, en utilisant le modèle *trapped atomic ions*, est bien réalisable expérimentalement comme le prévoit Bermudez [5] et al, et Blatt et al [57].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. I. K. Mori, E. Carriere, *Nuovo Cimento A* **1967**, *51*, 1119.
- [2] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, *22*, L817–L819.
- [3] R. P. Martinez-yRomero, A. L. Salas-Brito, *J. Math. Phys* **1992**, *33*, 1831.
- [4] R. P. MartinezyRomero, H. N. Nunez-Yepe, A. L. Salas-Brito, *Eur. J. Phys* **1995**, *16*, 135–141.
- [5] A. Bermudez, M. A. M. Delgado, A. Luis, *Phys. Rev. A* **2008**, *77*, 063815.
- [6] B. Mirza, M. Zarei, *Eur. Phys. J. C* **2004**, *32*, 583.
- [7] B. Mirza, R. Narimani, M. Zarei, *Eur. Phys. J. C* **2006**, *48*, 641.
- [8] B. Mirza, R. Narimani, S. Zare, *Comm. Theor. Phys* **2011**, *55*, 405–409.
- [9] L. Lamata, J. Casanova, R. Gerritsma, C. F. Roos, J. J. Garcia-Ripoll, E. Solana, *New. J. Phys* **2011**, *13*, 095003.
- [10] C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata, *J. Math. Phys* **2008**, *49*, 072101.
- [11] C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata, *Phys. Rev. D* **2008**, *78*, 023516.

- [12] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M. M. Jabbari, A. Tureanu, *Phys. Rev. Lett* **2001**, *86*, 2716.
- [13] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M. M. Jabbari, A. Tureanu, *Phys. Lett. B* **2002**, *527*, 149–154.
- [14] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder, M. M. Jabbari, A. Tureanu, *Nucl. Phys. B* **2004**, *70*, 14–34.
- [15] C. Quesne, M. Moshinsky, *J. Phys. A : Math. Gen* **1990**, *23*, 2263–2272.
- [16] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **2013**, *128*, 124.
- [17] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, A. Boumali, *Int. J. Geom. Metho. Mod. Phys* **2017**, *14*, 1750112.
- [18] W. C. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, *Mod. Phys. Lett. A* **2018**, *33*, 1850060.
- [19] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, W. S. Chung, *Eur. Phys. J. Plus* **2018**, *133*, 157.
- [20] C. Beck, *Euro. phys. Lett* **2003**, *64*, 151.
- [21] C. Beck, *Physica. D* **2004**, *193*, 195.
- [22] C. Beck, E. G. D. Cohen, H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **2005**, *72*, 026304.
- [23] C. Beck, *Phys. Rev. Lett* **2007**, *98*, 064502.
- [24] C. Beck, *Eur. Phys. J. A* **2009**, *40*, 267–273.
- [25] C. Beck, *Phil. Trans. R. Soc. A* **2011**, *369*, 453–465.
- [26] A. Boumali, F. Serdouk, S. Dilmi, *Physica. A* **2020**.
- [27] F. Schwabl, *Statistical mechanics*, Springer (Ed.), 2nd ed. Springer Berlin Heidelberg New York, **2006**.
- [28] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics wave equations*, Springer-Verlag Berlin, **2000**.

- [29] A. Boumali, *Can. J. Phys* **2007**, 07.
- [30] A. Boumali, *J. Phys. A : Math. Theor* **2009**, 235301.
- [31] A. Boumali, *Turk. J. Phys* **2008**, 307.
- [32] A. Boumali, *Phys. Scr* **2007**, 669.
- [33] A. Boumali, A. Hafdallah, A. Toumi, *Phys. Scr* **2011**, 84, 1–2.
- [34] A. Hafdallah, Ph.D. thesis, Universite de Tebessa, **2011**.
- [35] C. Beck, *Europhys. Lett* **2003**, 64, 151.
- [36] C. Beck, *Braz. J. Phys* **2009**, 39, 357–363.
- [37] S. Abe, *Cent. Eur. J. Phys*, 7, 401–404.
- [38] S. Abe, S. Thurner, *Phys. Rev. E* **2005**, 72, 036102.
- [39] S. Abe, C. Beck, G. D. Cohen, *Phys. Rev. E* **2007**, 76, 031102.
- [40] H. S. W. Greiner, L. Neise, *Thermodynamique et mécanique statistique*, Springer, **1995**.
- [41] B. Warda, C. Oumaima, mathesis, Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de dirac unidimensionnel, **2020**.
- [42] A. Lavagno, G. Kaniadakis, M. Rego-Monteiro, P. Quarati, C. Tsallis, *Astrophys. Lett. Commun* **1998**, 35, 449.
- [43] C. Tsallis, *J. Stat. Phys* **1988**, 52, 479.
- [44] C. Tsallis, R. S. Mendes, A. R. Plastino, *Physica. A* **1998**, 261, 534.
- [45] C. Tsallis, A. M. C. Souza, *Phys. Rev. E* **2003**, 67, 026106.
- [46] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, B. Springer (Ed.), **1974**.

- [47] C. B. E. Van der Straeten, *Phys. Rev. E* **2008**, 78, 051101.
- [48] C. B. E. Van der Straeten, *arXiv* **2009**, 0901, 2271.
- [49] C. B. E. Van-der Straeten, *Physica. A* **2011**, 390, 951.
- [50] C. A. Pizarro, C. A. Condat, P. W. Lamberti, D. P. Prato, *Am. J. Phys.* **1996**, 64, 736.
- [51] D. F. Styer, *Am. J. Phys.* **1997**, 65, 974.
- [52] C. Kittel, *Introduction to solid state physics*, J. Wiley (Ed.), JohnWiley, **1996**.
- [53] A. Bermudez, M. A. M. Delgado, E. Solano, *Phys. Rev. A* **2007**, 76, 041801(R).
- [54] A. Boumali, L. Chetouani, *Phys. Lett. A* **2005**, 346, 261–268.
- [55] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **2013**, 128, 1–13.
- [56] B. Mirza, R. Narimani, S. Zare, *Commun. Theor. Phys* **2011**, 55, 405–409.
- [57] R. Blatt, C. F. Roos, *Nat. Phys* **2012**, 8, 277–284.