République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Etude de quelques problèmes mixtes avec condition intégrale

Présenté Par:
NABTI Nadjoua
BOUGOFFA Yasmine

Devant le jury :

DGAICHIA Hakima	MCA	UnivérsitéLarbi Tébessi	Président
BENZAHI Mourad	MCB	UnivérsitéLarbi Tébessi	Examinateur
MESLOUB Fatiha	MCA	UnivérsitéLarbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 19/06/2021

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Au terme de ce travail nous remercions "ALLAH" le tous

miséricordieux pour nous aide et nous donne la patience, le courage et la volonté sans lesquels ce travail n'aurait pas été réalisé et pour tout ce qu'il nous offre dans cette vie.

Nous voudrons exprimer nos sincère remerciements profonde gratitude à notre encadrant *Dr.MESLOUB Fatiha*, qui a fait tout sa possible pour nous permis d'enrichir considérablement notre connaissances mathématique.

Nous adressons de remerciements les membres de jurys qui sont accepté avec gentilles d'examiner notre travail, président *Dr. DEGAICHIA Hakima* et examinateur *Dr.BENZAHI Mourad.*

Nos remerciements vont également à tous les enseignants

de l'Université de Tébessa, de faculté des sciences Exactes et de la Nature et de Vie de Département des Mathématique et Informatiques

Un grand merci aussi profond à tous ceux qui ont contribué de près ou de lois à l'élaboration de ce travail.

Dédicaces

A mes chers parents

©

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurais point remercier comme il se doit.
Je vous remercie pour tout le soutien, mes études et dans ma vie l'amour que vous me portez depuis mon enfance et l'encouragement qu'ils m'ont toujours témoignés pour que je réussi dans mes études et dans ma vie

A mes chers frères

Abderrazak, Karim et Faysel.

A mes chères sœurs

Basma, Moufida, Rahma et Zahia.

A mes amis

Yasmine,Lobna, Maroua et Donya.

A tous ceux qu'il ma enseignés durant mon étude.
A tous ceux qui chères proches de mon cœurs, et a tous ceux qui m'aiment et qui aurait voulu partager ma joie.

Nadjoua

Dédicaces

A mes chers parents

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurais point remercier comme il se doit.
Je vous remercie pour tout le soutien, mes études et dans ma vie l'amour que vous me portez depuis mon enfance et l'encouragement qu'ils m'ont toujours témoignés pour que je réussi dans mes
études et dans ma vie.
Mes chers frères
Bilel et Oussama.
A mes chères sœurs
Nabila, Sana, Souhaila et Roumaysa.
A mes amis
Nadjoua, Yasmina, Sara et Chayma.
A tous ceux qu'il ma enseignés durant mon étude.
A tous ceux qui chères proches de mon cœurs, et a tous ceux qui m'aiment et qui aurait voulu partager ma joie.

Yasmine

الملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة بعض المسائل المختلطة غير المحلية باستعمال طريقة المتراجحات الطاقوية .
المسألة الأولى هي معادلة ذات قطع مكافئ مرفقة بشروط كلاسيكية.
المسألة الثانية هي معادلة ذات قطع زائد من الدرجة الثانية حيث تم دمج شرط كلاسيكي و شرط تكاملي.

Résumé

Le but de ce travail est d’étudiée quelques problèmes mixtes non locaux par la méthode des inégalités énergétiques (estimation à priori).

Le premier problème est une équation parabolique avec condition classique.

Le deuxième problème est une équation hyperbolique de deuxième degré en combinant une condition classique et une autre intégral.

Abstract

The objective of this work is to study some mixed problems non local by the inequality energy method (priori estimate).

The first problem is a parabolic equation with classical condition.

The second is an hyperbolic equation of second order combining a classical and an integral conditions.

Table des matières

Introduction

Dans la théorie des équations aux dérivées partielles (EDP) plusieurs phénomènes physiques peuvent être modélisé et décrits en termes de problèmes non locaux, c'est-à-dire comme des problèmes mixtes avec des conditions aux limites intégrales.

Les conditions aux limites non locales se posent beaucoup lorsque les informations sur la frontière ne peuvent être mesuré directement mais les valeurs moyennes sont connues. Une condition intégrale, peut représenter physiquement une moyenne, un flux, une énergie totale ou une masse totale.

La résolution des problèmes mixtes ayant des conditions non-locales a commencé au début des années soixante, où Canon [6] a utilisé la méthode potentielle pour prouve que équation parabolique homogène associée à des conditions classiques et non- classique est bien posée. Ensuite, Kamynin [13] a généralisé les résultats obtenus par Canon en utilisant un système d'équations intégrales. Mouravei et Philinovsku [32] ont utilisé le principe de maximum en combinant un Neumann et une condition intégrale pour l'équation de chaleur. Lonkin [12], a étudié également d'autres cours de problèmes mixtes avec des conditions intégrales.

Actuellement, les méthodes fonctionnelles sont devenus très actif et essentielles dans l'étude des problèmes mathématiques théoriques et appliqués.

Dans ce mémoire, nous avons appliqué la méthode d'inégalité énergétique pour deux problèmes aux limites. La méthode d'inégalité énergétique dite aussi méthode d'analyse fonctionnelle et méthode des estimations a priori. Cette méthode a été introduites et nommées par Sergei Natanovich Bernstein (1906, 1910), qui les a utilisées pour prouver l'existence de solutions aux équations elliptiques non linéaires du second ordre dans le plan. Parmi les premiers exemples importants d'estimations a priori, citons les estimations de Schauder données par Schauder (1934, 1937) et les estimations données par De Giorgi et Nash pour les équations elliptiques ou paraboliques du second ordre dans de nombreuses variables dans leur solution au dix-neuvième problème de Hilbert.

La méthode des estimations a priori est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et est développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode on trouve des difficultés parmi les quelles nous citons :

* Le choix des espaces fonctionnels.

* Le choix du multiplicateur Mu.

Pour étudier les problèmes posé, nous écrivons tout d'abord le problème donneé dans le formulaire opérateur :

$$Lu = F,$$

Pour l'opérateur L engendré par le problème considéré, nous démontrons l'inégalité de l'énergie du type

$$\|u\|_B \leq C \|Lu\|_H, \quad \forall u \in D(L). \tag{1}$$

Cette démonstration se base sur une analyse précise des formes obtenues en multipliant l'équation donnée par un opérateur Mu contenant la fonction u ou ses dérivées et une certaine fonction poids, et en intégrant sur le domaine.

Le choix du multiplicateur Mu est fondamental, il est dicté par l'équation et les conditions aux limites.

Ensuite dans les topologies fortes des espaces B et H on construit la fermeture $\overline{L}$ de l'opérateur L, et la solution de l'équation

$$\overline{L}u = F,$$

est appelée solution forte du problème considéré. A l'aide d'un passage à la limite, on prolonge l'inégalité (1) à $u \in D(\overline{L})$, on obtient

$$\|u\|_B \leq C \left\|\overline{L}u\right\|_H, \quad \forall u \in D\left(\overline{L}\right).$$

et ainsi est garantie l'existence de la solution sur l'ensemble des images $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$.

Comme l'image de l'opérateur $\overline{L}$ est fermée dans H et que $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R(L)}$,pour la démonstration de l'existence de la solution forte pour tout $\mathcal{F} \in H$ il suffit d'établir la densité de $R(L)$ dans H qui est obtenue à l'aide des opérateurs de régularisation. L'unicité est déduite de l'inégalité de l'énergie (1).

Notre mémoire se compose de trois chapitres

Le premier chapitre est consacré aux rappels de quelques outils de base tel que la théorie des espaces fonctionnels et à la théorie des opérateurs, ainsi les inégalités et quelque théorèmes utilisées dans cette mémoire.

Le second chapitre est voué à étudier l'existence et l'unicité d'une solution forte généralisée d'un problème parabolique linéaire du quatrième ordre avec les conditions classiques.

Le troisième chapitre on a prouvé l'existence et l'unicité d'une solution faible d'un problème hyperbolique non-linéaire avec une condition intégrale et une condition de Dirichlet. Où, on montre l'existence et l'unicité de la solution forte pour le problème linéaire par la méthode d'inégalité d'énergie. Ensuite, en appliquant un processus itératif basé sur les résultats obtenus pour le problème linéaire, on prouve l'existence et l'unicité de la solution faible du problème non-linéaire.

On termine ce travaille par une conclusion et une bibliographe.

Notations

E	Espace vectoriel normé.
$\|.\|$	La norme.
$(.,.)$	Le produit scalaire.
Ω	Un ouvert borné dans $\mathbb{R}$.
$\lim$	La limite.
$\rightarrow$	La convergence forte.
$L^p(\Omega)$	L'espace des fonctions mesurables u sur Ω vérifiant $\int_\Omega \|u\|^p\, dx < \infty$.
$L^2(\Omega)$	L'espace des fonctions de carré intégrable.
$L^2_\rho(\Omega)$	L'espace de Hilbert avec poid des fonctions définies et de carré intégrales.
$C^\infty(\Omega)$	L'ensemble de toutes les fonctions indéfiniment dérivables.
H	Un espace de Hilbert.
B	Un espace de Banach.
L	Un opérateur linéaire.
$D(L)$	Le domaine de définition de L.
$\overline{L}$	La fermeture de L.
$\overline{D(L)}$	L'adhérence de $D(L)$.
$R(L)$	L'ensemble des valeurs Lu pour tout $u \in D(A)$.
$\mathcal{L}$	Opérateur différentiel.
$\dfrac{\partial}{\partial x}$	La dérivée partielle.
$W^l_m(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in L^m(\Omega)$, tel que $D^k u \in L^m(\Omega)$, où $\|k\| \leq l$.
$W^l_m(\Omega)$	L'espace des fonctions $u \in W^l_m(\Omega)$à suport compact dans Ω.
$\hookrightarrow$	L'injection canonique.
$\|.\|^{(l)}_{m,\Omega}$	La norme dans l'espace $W^l_m(\Omega)$.
$(.,.)^{(1)}_{2,\Omega}$	Le produit scalaire dans l'espace $W^2_1(\Omega)$.

Chapitre 1

Notions Préliminaires

Le présent chapitre est consacré aux rappels essentiels des notions et des concepts de base d'analyse utilisés tout le long de ce travail, à usage permanent dans les prochains chapitres. Ces importantes notions sont énoncées sous forme de définitions, théorèmes, corollaires et lemmes. Pour plus de détails, des références à la littérature seront systématiquement données.

1.1 Espace Normés, Espace de Banach et Espace de Hilbert

1.1.1 Espace linéaire

Définition 1.1 *Soit E un ensemble des éléments dénotés : x, y.......... On suppose que chaque paire des éléments (x, y) peut être combiné par un opération nommée addition pour donner un autre élément z dénoté $z = x + y$. On suppose aussi que chaque nombre réel et chaque élément x peut être combiné par une opération notée multiplication pour donner un autre élément y dénoté par $y = \beta x$. L'ensemble E avec ces deux opérations est nommé un espace linéaire si les axiomes suivants sont satisfaits*

$$x + y = y + x. \tag{1.1.1}$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z. \tag{1.1.2}$$

Il y a dans E un élément unique, dénoté par 0 nommé l'élément neutre tel que

$$x + 0 = x\ ,\forall\ x \in E. \tag{1.1.3}$$

Pour chaque $x \in E$ correspond un élément unique, dénoté par $(-x)$ tel que

$$x + (-x) = 0. \tag{1.1.4}$$

$$\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y. \tag{1.1.5}$$

$$(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x. \tag{1.1.6}$$

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x). \tag{1.1.7}$$

$$1.x = x. \tag{1.1.8}$$

$$0.x = 0. \tag{1.1.9}$$

Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *et* $x, y \in E$.

1.1.2 Espace Normée :

Définition 1.2 ***Une norme*** *sur l'espace vectoriel linéaire* E*, est une fonction a valeur réelle*

$\|.\| : E \longrightarrow [0, \infty[$, dont la valeur à u est dénoté par $\|u\|$ $(norme\ de\ u)$ vérifiant les trois axiomes

a) $\|u\| \geq 0, \forall u \in E$ et $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.

b) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \forall \lambda \in \mathbb{k}$.

c) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Inégalité triangulaire).

Définition 1.3 ***(Espace linéaire normé) :*** *Un espace linéaire* E *muni d'une norme est nommé un espace linéaire normé, noté par* $(E, \|.\|)$.

1.1.3 Espace de Banach :

Définition 1.4 *La convergence d'une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*d'éléments de* X *vers* x *dans la norme de* X *(convergence forte) est définie par*

$$\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0,$$

et on note par

$$x_n \xrightarrow{f} x,$$

Définition 1.5 *Une suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*d'éléments d'un espace normé* X *est dite suite de Cauchy si*

$$\|x_p - x_q\|_X \rightarrow 0 \text{ quand } p, q \rightarrow \infty,$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p > N_\varepsilon, \forall q > N_\varepsilon \Longrightarrow \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Toute suite convergente est de Cauchy.

Définition 1.6 *Un espace normé* E *est dit espace complet si est seulement si toute suite de Cauchy* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*de* E *est une suite convergente dans* E.

Définition 1.7 *Soit $(E, \| \; . \; \|)$ un espace normé, on dit que E est un espace de* ***Banach*** *si E est un espace* ***complet.***

1.2 Espace de Hilbert

Définition 1.8 *On appelle un* ***produit scalaire*** *sur X et on note $(.,.)$, tout forme sésquilinéaire, hermitienne et défini positive définir de $X \times X$ dans $\mathbb{k}$, c.à.d*
(1) Linéarité :

$$\forall x, y, z \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}, \begin{cases} (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z), \\ (x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z), \end{cases}$$

(2) Hermitienne :

$$\forall x, y \in X, (x, y) = \overline{(y, x)}.$$

(3) Définie positive :

$$\forall x \in X - \{0\}, (x, x) > 0 et (x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Naturellement si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
Le nombre $(x.y)$ appelé produit scalaire des vecteurs.

Définition 1.9 *On appelle* ***espace préhilbertien*** *tout espace vectoriel muni d'une norme associée à un produit scalaire.*

Définition 1.10 *Un espace de* ***Hilbert*** *$(H, (.,.))$ est un espace préhilbertien qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.*

Théorème 1.1 *Pour qu'un espace normé X soit préhilbertien il faut et il suffit que sa norme satisfait à l'identité du parallélogramme c.à.d*

$$\|x + y\|_X^2 + \|x - y\|_X^2 = 2\left(\|x\|_X^2 + \|y\|_X^2\right) \; \forall x, y \in X.$$

Remarque 1.1 *On conclut du théorème ci-dessus q'un espace de* ***Hilbert*** *est un espace de* ***Banach*** *sa norme satisfait l'identité du parallélogramme.*

***Les EDP linéaire du second ordre**

Définition 1.11 *Quant on pose $X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, une équation aux dérivées partielles du second ordre sera de la forme*

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i;j}(X) \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(X) + \sum_{i=1}^{n} B_i(X) \frac{\partial U}{\partial x_i}(X) + C.U = G(X),$$

avec $A_{i;j}$, B_i , C, G des fonctions indépendantes de U ne s'annulant pas toutes simultanément dans $\mathbb{R}^n$.

Si nous limitons dans $\mathbb{R}^2$, c'est à dire $X = (x, y)$, alors

$$A.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B.\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + C.\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D.\frac{\partial U}{\partial x} + E.\frac{\partial U}{\partial y} + F.U = 0.$$

On peut classer les **EDP** linéaire d'ordre deux en trois grandes familles : **elliptique**, **hyperbolique et paraboliques.**

- Les équations elliptiques :

L'équation est elliptique si $B^2 - 4AC \prec 0$.

Exemple 1.1 $\Delta U = f$ *L'équation de Poisson.*

- Les équations hyperboliques :

L'équation est hyperbolique si $B^2 - 4AC \succ 0$.

Exemple 1.2 $U_{tt} - \Delta U = 0$ *L'équation des ondes.*

- Les équations paraboliques :

L'équation est parabolique si $B^2 - 4AC = 0$.

Exemple 1.3 $U_t - \Delta U = 0$ *L'équation de la chaleur.*

1.3 Orthogonaux et Complémentaire Orthogonal

Définition 1.12 *Soit H un espace préhilbertien et x, y deux vecteurs de H.On dit que x est **orthogonale** à y si $(x, y) = 0$ et on écrit*

$$x \perp y.$$

Remarque 1.2 $x \perp y \Longleftrightarrow y \perp x$. *On dit aussi que les deux vecteurs x et y sont orthogonaux.*

Définition 1.13 *Deux sous-ensembles A et B d'un espace préhilbertien H sont dit **orthogonaux** lorsque $(a, b) = 0$, pour tout $(a, b) \in A \times B$ et on note $A \perp B$.*

Définition 1.14 *Soit M un sous-ensemble d'un espace préhilbertien H. On appelle **complémentaire orthogonal** de N et on note $N^\perp$ l'ensemble*

$$N^\perp = \{x \in H, \ \forall a \in N, (a, x) = 0\}.$$

Proposition 1.1 *Il est clair que $N^{\perp}$ est un sous-espace fermé, si N est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H alors, $H = N \oplus N^{\perp}$ (somme directe orthogonal).*

1. L'égalité $H = N \oplus N^{\perp}$signifie que tout éléments z de H s'écrit d'une façon unique de la forme $z = x + y$ où $x \in N$ et $y \in N^{\perp}$.
2.L' expression $H = N \oplus N^{\perp}$est dite décomposition orthogonale de l'éspace H.

Théorème 1.2 *Soit H un espace de Hilbert, un sous-espace N de H est* ***dense*** *si et seulement si $N^{\perp} = \{0\}$.*

1.4 Inversibilité d'un opérateur

On désigne par $(B, \|.\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{k} := R$ ou $\mathbb{C}$. Si $(E, \|.\|_E)$ est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{k}$, on désigne par $L(B, E)$ l'espace des applications linéaires de B dans E et $\mathcal{L}(B, E)$ l'espace des applications linéaires continues de B dans E. Si $B := E$, on note simplement $L(B) := L(B, B)$ et $\mathcal{L}(B) := \mathcal{L}(B, B)$. Enfin, s'il y a risque de confusion on notera la norme de B par$\|.\|_B$.

Définition 1.15 *Soit $A \in \mathcal{L}(B)$ est dit* ***inversible*** *s'il existe $S \in \mathcal{L}(B)$ tel que $AS = I_{d_E}$**(inversible à droite)** et $SA = I_{d_B}$**(inversible à gauche),** où I désigne l'opérateur identité.Un tel opérateur (lorsqu'il existe) est unique.On l'appelle opérateur inverse de A et on le note $S = A^{-1}$.*

On note $G\mathcal{L}(B)$ l'ensemble des opérateurs $A \in \mathcal{L}(B)$ inversibles.

Remarque 1.3 *Si un opérateur est inversible à droite et injectif (resp inversible à gauche et surjectif) alors il est inversible et tout inverse à droite (ou à gauche) est égale à l'inverse.*

Théorème 1.3 ***(Théorème de l'inverse de Banach)*** *: Si $A \in \mathcal{L}(B)$ (B espace de Banach) est bijectif alors, son inverse A^{-1}est continu.*

Théorème 1.4 *Soit $A \in G\mathcal{L}(H)$, H est Hilbert, A est inversible si et seulement si*
(i) *A est inferieurement borné : $(i.e.\exists\ \alpha > 0 \parallel Ax \parallel \geq \alpha \parallel x \parallel \forall x \in H)$.*
(ii) *$Im(A)$ est dense dans H : $(\overline{Im(A)} = H)$.*

Lemme 1.1 *Soit $A \in G\mathcal{L}(E)$ est inversible alors*

$$\forall x \in H \qquad \parallel Ax \parallel \geq \left\|A^{-1}\right\|^{-1} \|x\|.$$

Corollaire 1.1 *Soient* $(B, \|.\|_B)$ *un espace de Banach sur* $\Bbbk$ *et* $A \in \mathcal{L}(E, B)$*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. Il existe $C > 0$*telle que, pour tout* $x \in E$*, on a :* $\|Ax\|_B \geq C \|x\|_E$.

2. A *est injectif et* $Im(A)$ *est fermé dans* B *.*

Corollaire 1.2 *Soient* $(B, \|.\|_B)$ *un espace de Banach sur* $\Bbbk$ *et* $A \in \mathcal{L}(E, B)$*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes*

1.$Im(A) = B$ *et il existe* $C > 0$ *telle que, pour tout* $x \in E$*, on* $\|Ax\|_B \geq C \|x\|_E$.

2.A *est inversible..*

Définition 1.16 *(Adjoint d'un opérateur) : Soient* E *et* F *deux espaces de Hilbert et* $T \in \mathcal{L}(E, F)$*. L'unique application linéaire* $T^* \in \mathcal{L}(E, F)$ *telle que pour tous* $x \in E$*,* $y \in F$ *on a*

$$(Tx, y) = (x, T^*y),$$

est appelée adjointe de T*.*

Théorème 1.5 *Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(E, F)$ *est inversible si et seulement si* T^* *est inversible, et alors on a*

$$(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*.$$

1.5 Espace de sobolev

Définition 1.17 *Soit* $m > 0, p \geq 1, W^{m,p}(\Omega)$ *est l'ensemble de toutes les fonctions* $u \in L^p(\Omega)$ *ayant des dérivées généalisées jusqu'a lordre* l *(inclus) dans* $L^p(\Omega)$

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega); \forall \alpha : |\alpha| \leq m\}.$$

où $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}$ est un multi-indice et

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}, \text{ avec } |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.$$

Si on munit $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme suivant

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^p(\Omega)}^m &= \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} \\ &= \left(\int_\Omega \sum_{k=0}^{m} \sum_{(k)} \left| \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{K_1} \partial x_2^{K_2} ....\partial x_n^{K_n}} \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

on obtient un espace de Banach.

Définition 1.18 *$W_0^{m,p}$ est le sous espace de $W^{m,p}$ constitués de toutes les fonctions $u \in W^{m,p}$ et à support compact dans Ω.*

L'espace $W_0^{1,2}(\Omega)$ joue un rol trés important pour la résolution des problèmes aux limites des E.D.P de seconde ordre de tous type.
Le produit scalaire dans $W_0^{1,2}(\Omega)$ et $W^{1,2}(\Omega)$ est défini par

$$\begin{aligned}(u,v)^{(1)}_{L^2(\Omega)} &= (u,v)_{W_2^1(\Omega)} \\ &= \int\limits_{\Omega} (uv + u_x v_x)\, dx \\ &= (u,v)_{L^2(\Omega)} + (u_x, v_x)_{L^2(\Omega)}\,.\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}u_x v_x &= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i} v_{x_i}, \\ v_x^2 &= \sum_{i=1}^{n} v_{x_i}^2, \\ u_x^2 &= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i}^2.\end{aligned}$$

Si $m = 0$

$$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)\,.$$

Si $p = 2$

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega)\,; \forall \alpha : |\alpha| \leq m\right\}.$$

1.6 Les espaces fonctionnels

Définition 1.19 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$ et $\Omega \in \mathbb{R}^n$ un ensemble mesurable au sens de Lebesgue.*

On définit

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \rightharpoonup \mathbb{R}, u \text{ fonction mésurable et } \int_\Omega |u|^p\, dx \lessdot \infty\right\}.$$

Muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notation 1.1 *Si* $p = 2$, $L^2(\Omega)$ *est un espace de Hilbert muni de la norme et le produit scalaire suivant*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uvdx.$$

On peut considérer comme sous espaces dans $L^p(\Omega)$ les espaces

a) $C^\infty(\Omega)$.

b) L'ensemble de tous les polynômes.

c) $C_0^\infty(\Omega)$.

Définition 1.20 *On définit l'éspace* L^∞ *comme suit*

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \textit{mesurable} \setminus \exists C \textit{ tel que } |u(x)| \leq C \textit{ sur } \Omega\}.$$

$L^\infty(\Omega)$ est un espace complet pour la norme

$$L^\infty(\Omega) = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

Définition 1.21 *Soit* $L^2_\rho(\Omega)$ *l'espace de Hilbert avec* **poid** *des fonctions définies et de carré intégrales muni de la norme et le produit scalair suivant*

$$(u,v)_{L^2_\rho(Q)} = (xu,v)_{L^2(Q)} = \int_Q xu.vdxdt.$$

$$\|u\|_{L^2_\rho(Q)} = \left\|\sqrt{x}u\right\|_{L^2(Q)} = \left(\int_Q x\ u^2 dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.22 $W_\rho^{1,0}(Q)$*est un espace de Hilbert muni de la norme et le produit scalaire suivant*

$$(u,v)_{W_\rho^{1,0}(Q)} = (u,v)_{L^2_\rho(Q)} + (u_x,v_x)_{L^2_\rho(Q)}.$$

$$\|u\|^2_{W_\rho^{1,0}(Q)} = \|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_x\|^2_{L^2_\rho(Q)}.$$

Définition 1.23 $W_{\rho}^{1,1}(Q)$ *est un espace de Hilbert muni de la norme et le produit scalaire suivant*

$$(u,v)_{W_{\rho}^{1,1}(Q)} = (u,v)_{L_{\rho}^{2}(Q)} + (u_x, v_x)_{L_{\rho}^{2}(Q)} + (u_t, v_t)_{L_{\rho}^{2}(Q)}.$$

$$\|u\|^2_{W_{\rho}^{1,1}(Q)} = \|u\|^2_{L_{\rho}^{2}(Q)} + \|u_x\|^2_{L_{\rho}^{2}(Q)} + \|u_t\|^2_{L_{\rho}^{2}(Q)}.$$

1.7 Quelques propriétés d'opérateurs dans un Hilbert

Définition 1.24 ***Un opérateur*** *A défini par un ensemble $D(A) \subset H$ (H espace de Hilbert) fait associé à chaque $u \in D(A)$ un certain élément $v \in H$ (i.e)*

$$Au = v.$$

A est linéaire si, $\forall u_1, u_2 \in D(A)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda A(u_1) + \mu A(u_2).$$

A est bornée si, $\exists c > 0$ tel que

$$\forall u \in D(A), \ \|Au\| \leq c\|u\| \ \text{ sur } \ D(A).$$

– Un sous-ensemble important du domaine de A est l'espace nul de A, $N(A)$, où

$$N(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}.$$

1.7.1 Opérateur linéaire [fermée,fermable]

Définition 1.25 *Soit $A : H_1 \to H_2$ (opérateur linéaire), on note $D(A)$ sont domaine de définition, $D(A) \subset H_1$, et $R(A)$ l'ensembles des valeurs de A.*

$$R(A) = \{Au, u \in D(A)\} = \bigcup_{u \in D(A)/\{0\}} [Au].$$

1. Si $\|A\| < \infty$, on dit que A est borné.
2. A est continue si $u_n \to u$ dans H_1 alors $Au_n \to Au$ dans H_2.
3. L' opérateur T est appelé extension de A si
   - $* \ D(A) \subset D(T)$.
   - $* Au = Tu, \forall u \in D(A)$.

Définition 1.26 *L'opérateur $A : H_1 \to H_2$ est dit **fermé** si pour toute suite $u_n \in D(A)$ on a*

$$\begin{aligned} u_n &\to u \text{ dans } H_1, \\ Au_n &\to f \text{ dans } H_2, \end{aligned}$$

alors

$$u \in D(A) \text{ et } Au = f.$$

Définition 1.27 *On dit que l'opérateur A est **fermable** si pour tout suite $u_n \in D(A), u_n \to 0$ et $Au_n \to f$ alors $f = 0$.*

Définition 1.28 *Le graphe de l'opérateur linéaire $A : X \to Y$ est l'ensemble des paires ordonnées*

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) \,|x \in D(A)\} \subset X \times Y.$$

Le graphe est un sous espace de $X \times Y$.

Définition 1.29 *L'opérateur $\tilde{A}$ est une extension de A si et seulement si*

$$\Gamma(\tilde{A}) \supset \Gamma(A).$$

Définition 1.30 *On dit que l'opérateur A est **fermé** si son graphe est fermé dans $X \times Y$, et noté par $\overline{A}$.*

Définition 1.31 *L'opérateur A est dit **fermable** s'il possède une extension fermée. Chaque opérateur fermable admet une plus petite extension fermée qu'on appelle sa fermeture et noté par $\overline{A}$.*

1.8 Formule de Green

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Soient u, v deux fonctions de classe C^2 dans $\overline{\Omega}$. Les formules suivantes sont appelées formules de Green

$$\int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial v} dS = \int\limits_{\Omega} (v\Delta u + \nabla v.\nabla u)\, dx, \tag{1.8.1}$$

$$\int\limits_{\partial\Omega} (v\frac{\partial u}{\partial v} - u\frac{\partial v}{\partial v}) dS = \int_{\Omega} (v\Delta u - u\Delta v)\, dx, \tag{1.8.2}$$

où dS désigne la mesure de surface sur $\partial\Omega$.

En effet, les formules de Green (1.8.1) et (1.8.2) tiennent plus généralement pour $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$,où les intégrales sur Ω et $\partial\Omega$ converge.

Cas spéciaux

– Si on prend $v = 1$dans (1.8.1), on a

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} dS = \int_{\Omega} \Delta u dx,$$

– Si on prend $u = v$ dans (1.8.1), on a

$$\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial u}{\partial v} dS = \int_{\Omega} \left(u\Delta u + |\nabla u|^2\right) dx.$$

1.9 Opérateurs de régularisation

Soit w une fonction de classe C^∞ d'une seule variable ζ tel que : $w(\zeta) > 0$ et $w(\zeta) = 0$, si $|\zeta| \geq 1$ et $\int_{-\infty}^{\infty} w(\zeta)\, d\zeta = \int_{-1}^{1} w(\zeta)\, d\zeta = 1$ on note par

$$w_\varepsilon(x, x') = \frac{1}{\varepsilon} w\left(\frac{x - x'}{\varepsilon}\right),$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_\varepsilon(x, x')\, dx' = \int_{-\infty}^{\infty} w_\varepsilon(x, x')\, dx' = 1,$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{-1}^{1} w_\varepsilon(x, x')\, dx = \int_{-1}^{1} w_\varepsilon(x, x')\, dx' = 1,$$

et

$$w_\varepsilon(x, x') = 0 \text{ si } |x - x'| \geq \varepsilon.$$

Soit $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ et $u \in L^2(\Omega)$.

On définit l'opérateur de **régularisation** $\forall \varepsilon > 0$, $\rho_\varepsilon : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ par

$$\begin{aligned}(\rho_\varepsilon h)(x) &= \int_{\Omega} w_\varepsilon(x, x')\, u(x')dx' \\ &= \int_{|x-x'|<\varepsilon} w_\varepsilon(x, x')\, h(x')dx',\end{aligned}$$

où $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ et $h \in L^2(\Omega)$.

Propriété de ρ_ε

P$_1$ La fonction $\rho_\varepsilon h \in C^\infty(\Omega)$ et $h \in L^2(\Omega)$.

P$_2$ Si $h \in L^2(\Omega)$ alors $u \in L^2(\Omega)$, ainsi

$$\|\rho_\varepsilon h - h\|_{L^2(\Omega)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0,$$

et

$$\|\rho_\varepsilon h\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\rho_\varepsilon h\|_{L^2(\Omega)}.$$

P$_3$ $\frac{d^k}{dx^k}\rho_\varepsilon h = \rho_\varepsilon \frac{d^k h}{dx^k}$ si $h \in C^k(\Omega)$.

P$_4$ Si $\alpha \in C(\Omega)$ et $h \in L^2(\Omega)$, alors

$$\|\alpha\rho_\varepsilon h - \rho_\varepsilon(\alpha h)\|_{L^2(\Omega)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

P$_5$ Si $\alpha \in C(\Omega)$ et $h \in L^2(\Omega)$, alors

$$\left\|\frac{\partial}{\partial x}(\alpha\rho_\varepsilon h - \rho_\varepsilon(\alpha h))\right\|_{L^2(\Omega)} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0.$$

1.10 Quelques Inégalités Importantes

1.10.1 Lemme de Gronwall

Si les $f_i(\tau)$ $(i = 1, 2, 3)$ *sont des fonctions positives sur l'intervalle* $(0, T)$ et $f_1(\tau)$, $f_2(\tau)$ *sont intégrables et* $f_3(\tau)$ *est non décroissante sur* $(0, T)$ *, alors si*

$$\Im_\tau f_1 + f_2(\tau) \leq f_3(\tau) + c\Im_\tau f_2(t),$$

alors

$$\Im_\tau f_1 + f_2(\tau) \leq e^{c\tau} f_3(\tau).$$

où

$$\Im_\tau f_i(\tau) = \int_0^\tau f_i(t)\, dt \quad (i = 1, 2, ...).$$

1.10.2 Inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\int_{\Omega} u(x)v(x)dx \leq \left(\int_{\Omega} u^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

où $u, v \in L^2(\Omega)$.

1.10.3 Inégalité de Cauchy

$$ab \leq \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

1.10.4 Inégalité de Cauchy avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$, et $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2.$$

1.10.5 Inégalité de Young (Inégalité de Cauchy généralisée)

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}, p > 1$ on a

$$ab \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{p-1}{p}|b|^{\frac{p}{p-1}}.$$

1.10.6 Inégalité de Young avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$, a, b arbitraire (réels)

$$|a.b| \leq \frac{1}{p}|\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p}\left|\frac{b}{\varepsilon}\right|^{\frac{p}{p-1}}, \text{ pour tout } p > 1.$$

1.10.7 Inégalité de Hölder

Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $u \in L^q(\Omega)$, on a l'inégalité suivante

$$\int_Q u(x)\, v(x) \leq \left(\int_Q |u(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_Q |v(x)|^{\frac{p-1}{p}}\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

où $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Cette inégalité est la généralisation de l'inégalité de l'integrale de Cauchy-Shwartz.

1.10.8 Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ tel que pour toute fonction $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\int_\Omega u^2 dx \leq C_\Omega^2 \int_\Omega u_x^2 dx, \forall u \in \mathring{W}_2^1(\Omega).$$

Chapitre 2

Sur un problème mixte pour une équation parabolique avec conditions classiques

Ce chapitre est consacré à l'étude d'une équation parabolique linéaire du quatrième ordre avec des conditions classiques. Nous prouvons l'existence et l'unicité d'une solution forte du problème donné.

2.1 Position du problème

Dans la région $Q = (0, \ell) \times [0, T] = \{(x, t) : 0 < x < \ell, 0 < t < T\}$ .On considère le problème mixte suivant pour une équation parabolique du quatrième ordre. On cherche une fonction u : $Q \to \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &= \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ &= f(x, t). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

On associé à l'équation $(2.1.1)$ la condition initiale

$$\ell u = u(x, 0) = \varphi(x), \tag{2.1.2}$$

et les conditions aux limites

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t) &= 0, \\ u(\ell,t) &= 0, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\ell,t) &= 0, \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

où f, φ sont des fonctions données.
Nous allons étudier en détail le problème $(2.1.1)-(2.1.3)$, on introduit l'espace de Hilbert $L^2(Q)$, et l'espace de Sobolev $W_2^{2,0}(Q)$ avec la norme associée

$$||u||^2_{W_2^{2,0}(Q)} = ||u||^2_{L^2(Q)} + ||u_x||^2_{L^2(Q)} + ||u_{xx}||^2_{L^2(Q)}.$$

Ensuite, le problème $(2.1.1) - (2.1.3)$ peut être formulé comme suit

$$\begin{aligned} Lu &= (\mathcal{L}u, \ell u) \\ &= (f, \varphi), \end{aligned}$$

L'opérateur L est défini sur B vers H, où B est un espace de Banach constitué de fonction $u \in L^2(Q)$ ayant la norme finie définie par

$$||u||^2_B = \sup_{0\le\tau\le T} \left\{ ||u(x,\tau)||_{L^2(0,\ell)} \right\} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q)},$$

et H est l'espace de Hilbert $L^2(0,\ell) \times L^2(Q)$ avec une norme

$$||Lu||^2_H = ||\varphi||^2_{L^2(0,\ell)} + ||f||^2_{L^2(Q)}.$$

Soit $D(L)$ le domaine de L qui est l'ensemble de toutes les fonctions $u \in L^2(Q)$ tel que $u_t, u_x, u_{xx}, u_{xxt}, u_{xxx}$ $\in L^2(Q)$ est satisfaisant les conditions aux limites $(2.1.3)$.

2.2 L'unicité de la solution

Théorème 2.1 *Pour toute fonctions $u \in D(L)$, on a l'estimation suivante*

$$\sup_{0\le\tau\le T} \left\{ ||u(x,\tau)||^2_{L^2(0,\ell)} \right\} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q)} \le K\left(||\varphi(x)||^2_{L^2(Q)} + ||f||^2_{L^2(Q)} \right), \tag{2.2.1}$$

où K *est une constante positive indépendante de* u.

Preuve. On considère le produit scalaire dans $L^2(Q_\tau)$ de l'equation $(2.1.1)$ et l'opérateur

$$Mu = u, \tag{2.2.2}$$

avec $Q_\tau = \Omega \times (0,\tau) = (0,\ell) \times (0,\tau), \tau \in (0,T)$, on obtient

$$(Mu, \mathcal{L}u)_{L^2(Q_\tau)} = (u_t, u)_{L^2(Q_\tau)} - (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u)_{L^2(Q_\tau)} + (\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, u)_{L^2(Q_\tau)}, \tag{2.2.3}$$

En utilisant les conditions aux limites $(2.1.3)$ et en intégrant par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
(u_t, u)_{L^2(Q_\tau)} &= \int\limits_{Q_\tau} u_t u dx dt \\
&= \int\limits_0^\ell \int\limits_0^\tau u_t u dx dt \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell \int\limits_0^\tau 2u_t u dx dt \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell (\int\limits_0^\tau 2u_t u dt) dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell \left[u^2\right]_0^\tau dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell u^2(x,\tau) dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell u^2(x,0) dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell u^2(x,\tau) dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^\ell \varphi^2(x) dx \\
&= \frac{1}{2}\left\|u(x,\tau)\right\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\|\varphi(x)\right\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

On répète les même calcules sur la deuxième terme, on obtient

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u\right)_{L^2(Q_\tau)} &= -\int_{Q_\tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx dt \\
&= -\int_0^\ell \int_0^\tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u dx dt \\
&= -\int_0^\tau [u_x u]_0^\ell \, dt + \int_{Q_\tau} u_x^2 dx dt \\
&= -\int_0^\tau \left(u_x(\ell,t)\, u(\ell,t) - u_x(0,t)\, u(0,t)\right) dt + \int_{Q_\tau} u_x^2 dx dt \\
&= \int_{Q_\tau} u_x^2 dx dt \\
&= \|u_x\|^2_{L^2_{(Q_\tau)}}.
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

La calcule de la troisième terme donne

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}, u\right)_{L^2(Q_\tau)} &= \int_{Q_\tau} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} . u dx dt \\
&= \int_{Q_\tau} u_{xxxx} . u dx dt \\
&= \int_0^\tau [u_{xxx} . u]_0^\ell \, dt - \int_{Q_\tau} u_x u_{xxx} dx dt \\
&= -\int_{Q_\tau} u_x u_{xxx} dx dt \\
&= -\int_0^\tau [u_x u_{xx}]_0^\ell \, dt + \int_{Q_\tau} u_{xx}^2 dx dt \\
&= \int_{Q_\tau} u_{xx}^2 dx dt \\
&= ||u_{xx}||^2_{L^2(Q_\tau)}.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Substitution $(2.2.4)-(2.2.6)$ dans $(2.2.3)$ nous donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\int_0^\ell u^2(x,\tau)dx - \frac{1}{2}\int_0^\ell \varphi^2(x)dx + ||u_x||^2_{L^2(Q_\tau)} \\ & + ||u_{xx}||^2_{L^2(Q_\tau)} \\ = & \int_{Q_\tau} fudxdt. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy sur la partie droite de $(2.2.7)$ on obtient

$$\int_{Q_\tau} fudxdt \leq \frac{1}{2}||f||^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{1}{2}||u||^2_{L^2(Q_\tau)}, \tag{2.2.8}$$

a partir de $(2.2.7)$ et $(2.2.8)$ on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}||u(x,\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u_x||^2_{L^2(Q_\tau)} + ||u_{xx}||^2_{L^2(Q_\tau)} \\ \leq & \frac{1}{2}||f||^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{1}{2}||u||^2_{L^2(Q_\tau)} + \frac{1}{2}||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Il découle de$(2.2.9)$ que

$$\begin{aligned} & ||u(x,\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u_x||^2_{L^2(Q_\tau)} + ||u_{xx}||^2_{L^2(Q_\tau)} \\ \leq & c(||f||^2_{L^2(Q_\tau)} + ||u||^2_{L^2(Q_\tau)} + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}), \end{aligned}$$

où

$$C = \frac{1}{2}.$$

En appliquant Lemme de Gronwalls on trouve

$$||u(x,\tau)||_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q_\tau)} \leq c||f||^2_{L^2(Q_\tau)} + c||\varphi||^2_{L^2(\Omega)} + c\int_0^\tau ||u(x,\tau)||^2_{L^2(\Omega)}dt, \tag{2.2.10}$$

ceci implique que

$$||u(x,\tau)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q)} \leq c\exp(c\tau)(||f||^2_{L^2(Q_T)} + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}). \tag{2.2.11}$$

En passant on $\sup$ par apport à τ sur $[0,T]$, on obtient

$$\sup_{0\leq\tau\leq T}\left\{ ||u(x,\tau)||^2_{L^2(\Omega)}\right\} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q)} \leq c\exp(cT)(||f||^2_{L^2(Q_T)} + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}),$$

donc

$$||u(x,\tau)||^2_{C(0.T,L^2(0,\ell))} + ||u||^2_{W_2^{2,0}(Q)} \leq K\ (||f||^2_{L^2(Q^T)} + ||\varphi||^2_{L^2(\Omega)}), \tag{2.2.12}$$

où

$$K = c\exp(cT).$$

■

Proposition 2.1 *L'opérateur $L : B \to H$ admet une fermeture $\overline{L}$.*

Preuve. *Soit $u_n \in D(L)$ une suite tel que*

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ dans } B, \tag{2.2.13}$$

et

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{F} = (f, \varphi) \text{ dans } H. \tag{2.2.14}$$

Nous devons montre que

$$\mathcal{F} \equiv 0, \text{ (i.e) } f \equiv 0, \text{ et } \quad \varphi \equiv 0.$$

Puisque (2.2.12) *est vérifié, on a*

$$u_n \to 0 \text{ dans } D'(Q), \tag{2.2.15}$$

où $D'(Q)$ est l'espace de distribution sur Q.
En vertu de la continuité de dérivation de $D'(Q)$ dans $D'(Q)$, (2.2.14) *implique que*

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ dans } D'(Q). \tag{2.2.16}$$

Selon (2.2.13), *on a*

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\to} f \text{ dans } L^2(Q), \tag{2.2.17}$$

alors

$$Lu_n \underset{n\to\infty}{\to} f \text{ dans } D'(Q), \tag{2.2.18}$$

D'aprés l'unicité de la limite dans $D\prime(Q)$, on conclut que

$$f \equiv 0,$$

selon (2.2.13), *on conclut également que*

$$\ell u_n \underset{n\to\infty}{\to} \varphi \text{ dans } L^2(0,\ell), \tag{2.2.19}$$

du fait que l'injection canonique $L^2(0,\ell) \hookrightarrow D\prime(0,\ell)$ est continue, on en déduit que

$$\ell u_n \underset{n\to\infty}{\to} \varphi \text{ dans } D'(0,\ell), \tag{2.2.20}$$

alors

$$||\ell u_n||_{L^2(a,\ell)} \leq ||u_n||_B, \quad \forall n, \tag{2.2.21}$$

on a

$$\ell u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \ \textit{dans}\ L^2(0,l). \tag{2.2.22}$$

Par conséquence

$$\ell u_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0 \ \textit{dans}\ D'(0,l). \tag{2.2.23}$$

D'après l'unicité de la limite dans $D\prime(0,l)$*, on conclut que* $\varphi \equiv 0$*, donc* $\mathcal{F} \equiv 0$*. Cela prouve* ***la poposition 2.1.*** ■

Soit $\overline{L}$ *la fermeture de* L*, et* $\overline{D(L)}$ *son domaine.*

Définition 2.1 *La solution de l'équation*

$$\overline{L}u = \mathcal{F},$$

pour tout $u \in D(\overline{L})$ *est appelée solution forte de problème* $(2.1.1)-(2.1.3)$*.Par passage à la limite, on prolonge l'estimation* $(2.2.1)$ *aux solutions fortes*

$$||u||_B \leq K||\overline{L}u||_H, \quad \forall u \in D(\overline{L}). \tag{2.2.24}$$

A partir de cette inégalité on a

Corollaire 2.1 *Le problème* $(2.1.1)-(2.1.3)$ *admet une solution unique et depend continument du données*

$$\mathcal{F} = (f, \varphi) \in H.$$

Preuve. L'unicité de solution est due à l'inégalité $(2.2.1)$. Pour la dépendance continue de la solution forte du données $u = (\overline{L})^{-1}\mathcal{F}$, du problème

$$\mathcal{F} = (f, \varphi) \in H.$$

On suppose qu'il existe une solution forte

$$\overline{L}u = \mathcal{F},$$

et si de plus $u_1 = (\overline{L})^{-1}\mathcal{F}$, est une autre solution du meme problème, avec second membre $\mathcal{F}_1$. On a

$$||u - u_1||^2 \leq K||\overline{L}(u - u_1)||^2 = K||\mathcal{F} - \mathcal{F}_1||^2.$$

Ce qui signifie qu'une faible variation du second membre $\mathcal{F}$ n'entraine qu'une faible variation de solution. ■

Corollaire 2.2 *L'image* $R(\overline{L})$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est fermé dans* H *est égal à* $\overline{R(L)}$*, (i.e)*

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}.$$

2.3 Solvabilité du problème

Théorème 2.2 *Pour tout $\mathcal{F} = (f, \varphi) \in H$, le problème $(2.1.1) - (2.1.3)$ admet une seul solution forte $u = (\overline{L})^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}}\mathcal{F}$, où l'estimation*

$$||u||_B \leq c||\mathcal{F}||_H,$$

est satisfait, et c est une constante positive ne dépend pas de u.

Preuve. *De $(2.2.24)$ on conclut que l'opérateur $\overline{L}$ de domaine $D(\overline{L})$ dans $R(\overline{L})$ a un inverse $\overline{L}^{-1}$, et de **corollaire 2.2,** on conclut que l'image $R(\overline{L})$ de l'opérateur $\overline{L}$ est fermé dans H.*
Alors on va prouver la densité de l'ensemble $R(L)$ dans l'espace H, (i.e)

$$\overline{R(L)} = H.$$

pour ça on a besoin la proposition suivante ■

Proposition 2.2 *Soit $D_0(L) = \{u \in D(L) : \ell u = 0\}$, pour certain fonction $\psi \in L^2(Q)$ et pour tout $u \in D_0(L)$, on a*

$$(\mathcal{L}u, \psi)_{L^2(Q)} = 0, \tag{2.3.1}$$

alors

$$\psi = 0 \text{ dans } Q.$$

Preuve. Premièrement, on définit la fonction φ par

$$\varphi(x,t) = \int_t^T g(x,\upsilon)d\upsilon. \tag{2.3.2}$$

Soit

$$u_t = \int_t^T \psi(x,\upsilon)d\upsilon. \tag{2.3.3}$$

Et soit

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq s, \\ \int_s^t u_\tau d\tau, & s \leq t \leq T \ , \end{cases} \tag{2.3.4}$$

il découle de $(2.3.3), (2.3.4)$, que

$$\psi(x,t) = -u_{tt}. \tag{2.3.5}$$

■

Lemme 2.1 *La fonction $\psi(x,t)$ définit par $(2.3.5)$ appartient à $L^2(Q)$.*

Preuve. *Maintenant, en remplaçant ψ dans $(2.3.1)$ par son representation $(2.3.5)$, les relations $(2.3.2)-(2.3.4)$*

$$(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4},-u_{tt})_{L^2(Q)}=0 \tag{2.3.6}$$

Calculant chaque terme dans $(2.3.6)$, on obtient

$$\begin{aligned}(u_t,-u_{tt})_{L^2(Q)} &= -\int\limits_Q u_t u_{tt}dxdt \\ &= -\int\limits_0^\ell\int\limits_0^T u_t u_{tt}dxdt \\ &= \int\limits_0^\ell\int\limits_s^T u_t u_{tt}dxdt \\ &= \int\limits_{Q_s} u_t u_{tt}dxdt-\int\limits_0^\ell \left[u_t^2\right]_s^T,\end{aligned}$$

alors

$$-2\int\limits_Q u_t u_{tt}dxdt=-\int\limits_0^\ell \left[u_t^2\right]_s^T,$$

d'où

$$\begin{aligned}-\int\limits_Q u_t u_{tt}dxdt &= -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left[(u_t^2)\right]_s^T dx \\ &= -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega (u_t(x,T))^2dx+\frac{1}{2}\int\limits_\Omega (u_t(x,s))^2dx \\ &= \frac{1}{2}\int\limits_\Omega (u_t(x,s))^2dx. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

On répète les même calcules sur la deuxième terme on obtient

$$\begin{aligned}
(-u_{xx}, -u_{tt}) &= \int\limits_{Q} u_{xx} u_{tt} dx dt \\
&= \int\limits_{0}^{l} \int\limits_{s}^{T} u_{xx} u_{tt} dx dt \\
&= \int\limits_{0}^{l} [u_t u_{xx}]_s^T - \int\limits_{Q_s} u_t u_{xxt} dx dt \\
&= -\int\limits_{Q_s} u_t u_{xxt} dx dt \\
&= -\int\limits_{s}^{T} [u_{xt} u_t]\, dt + \int\limits_{Q_s} u_{tx} u_{xt} dx dt \\
&= \int\limits_{Q_s} u_{tx} u_{xt} dx dt \\
&= \int\limits_{Q_s} u_{xt}^2 dx dt,
\end{aligned} \tag{2.3.8}$$

La calcule de la troisième terme donne

$$\begin{aligned}
(u_{xxxx}, -u_{tt})_{L^2(Q)} &= -\int\limits_{Q} u_{xxxx} u_{tt} dx dt \\
&= \int\limits_{s}^{T} [u_{xxx} u_{tt}]_0^l \, dt + \int\limits_{Q_s} u_{xxx} u_{ttx} dx dt \\
&= \int\limits_{s}^{T} [u_{xx} u_{ttx}]_0^l \, dt - \int\limits_{Q_s} u_{xx} u_{ttxx} dx dt \\
&= \int\limits_{0}^{l} [u_{txx} u_{xx}]_s^T \, dx + \int\limits_{Q_s} u_{txx}^2 dx dt \\
&= \int\limits_{Q_s} u_{txx}^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{2.3.9}$$

Substitution de $(2.3.7) - (2.3.9)$ *dans* $(2.3.6)$ *donne*

$$\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (u_t(x,s))^2 dx + \int\limits_{Q_s} u_{xt}^2 dx dt + \int\limits_{Q_s} u_{txx}^2 dx dt = 0. \tag{2.3.10}$$

Alors

$$\psi(x,t) = -u_{tt} = 0,$$

pour tout $(x,t) \in Q_s = \Omega \times [s,T]$.
Procédant de cette façon étape par étape le long des cylindres de hauteurs on prouve que $\psi = 0$ *p.p dans* Q. *Maintenant, on suppose que pour certains élément* $G = (\psi, \psi_1) \in R(L)^{\perp}$, *on a*

$$\begin{aligned}(Lu, G)_H &= (\mathcal{L}u, \psi)_{L^2(Q)} + (\ell u, \psi_1)_{L^2(0,l)} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

On doit prouver que

$$G = 0.$$

Si on suppose que $u \in D_0(L)$ *dans* $(2.3.11)$, *alors*

$$(Lu, \psi)_{L^2(Q)} = 0, \quad \forall u \in D_0(L). \quad (2.3.12)$$

Par conséquence

$$\psi \equiv 0,$$

d'où $(2.3.11)$ *prend la forme*

$$(\ell u, \psi_1)_{L^2(0,l)} = 0. \quad (2.3.13)$$

Puisque l'image $R(L)$ *de l'opérateur trace* ℓ *est dense dans* $L^2(0,l)$*, alors la relation* $(2.3.13)$ *implique que*

$$\psi_1 \equiv 0,$$

par conséquent

$$G \equiv 0,$$

et cela donne

$$R(L)^{\perp} = \{0\}.$$

Alors

$$\overline{R(L)} = H.$$

■

Chapitre 3

Sur un problème mixte singulier pour une équation hyperbolique avec conditions non locale

Dans ce chapitre nous étudions un problème mixte non locale pour une équation hyperbolique non linéaire. Nous prouvons l'existence, l'unicité et la dépendance continue d'une solution forte du problème posé. En écrivant le problème linéaire sous forme opérationnelle, tout d'abord nous établissons une estimation a priori pour la solution de laquelle on déduit l'unicité de la solution forte du problème linéaire posé. Pour l'existence de la solution, on démontre la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré. Sur la base des résultats du problème linéaire, nous appliquons un processus itérative pour établir l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution faible du problème non linéaire.

3.1 Position du problème

On considère l'équation aux dérivées partielles non linéaire suivante

$$\mathcal{L}\nu = \nu_{tt} - \nu_{xx} - \frac{1}{x}\nu_x = f\left(x,t,\nu,\nu_x\right), \tag{3.1.1}$$

dans le domaine

$$Q = \Omega \times (0,T) = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < x < a,\ 0 < t < T\right\}.$$

On associé à l'équation $(3.1.1)$ les conditions initiales

$$\ell_1\nu = \nu\left(x,0\right) = \phi_1\left(x\right),\quad x \in (0,a), \tag{3.1.2}$$

$$\ell_2 \nu = \nu_t (x, 0) = \phi_2 (x), \quad x \in (0, a). \tag{3.1.3}$$

Conditions aux limites de Dirchlet

$$\nu (a, t) = \psi_1 (t), \ t \in (0, T), \tag{3.1.4}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^a \nu (x, t) \, dx = \psi_2 (t), \ t \in (0, T), \tag{3.1.5}$$

où $f (x, t, \nu, \nu_x), \phi_1 (x), \phi_2 (x), \psi_1 (t)$ et $\psi_2 (t)$sont des fonctions données satisfaisant les conditions de comptabilitées

$$\phi_1 (a) = \psi_1 (0), \int_0^a \phi_1 (x) \, dx = \psi_2 (0), \tag{3.1.6}$$

$$\phi_2 (a) = \psi_1' (0), \int_0^a \phi_2 (x) \, dx = \psi_2' (0). \tag{3.1.7}$$

La fonction f est lipchitzienne, c'est-à-dire : il existe une constante positive d tel que

$$| f (x, t, \nu_1, \upsilon_1) - f (x, t, \nu_2, \upsilon_2)| \leq d (|\nu_1 - \nu_2| + |\upsilon_1 - \upsilon_2|), \tag{(A)}$$

pour tout $(x, t) \in Q$.
Nous transformons le problème $(3.1.1) - (3.1.5)$ avec des conditions aux limites non homogène $(3.1.4)$ à un problème équivalent avec des conditions homogène, en introduisant une nouvelle fonction inconnue définie comme suit

$$u (x, t) = \nu (x, t) - V (x, t), \tag{3.1.8}$$

où

$$V (x, t) = \left(1 - \frac{2 (x - a)}{a}\right) . \psi_1 (t) - \frac{2 (x - a)}{a^2} . \psi_2 (t). \tag{3.1.9}$$

Ensuite, le problème $(3.1.1) - (3.1.5)$ peut être formulé comme suit

$$\mathcal{L} u = f (x, t, \nu, \nu_x) - \mathcal{L} V = f (x, t, u, u_x), \tag{3.1.10}$$

$$\ell_1 u = \phi_1 (x) - \ell_1 V = h_1 (x), \tag{3.1.11}$$

$$\ell_2 u = \phi_2(x) - \ell_2 V = h_2(x), \tag{3.1.12}$$

$$u(a,t) = 0, \tag{31.12}$$

$$\int_0^a u(x,t)\,dx = 0. \tag{3.1.14}$$

Au lieu de recherche la fonction ν, on recherche la fonction u.
Ainsi, la solution du problème $(3.1.1) - (3.1.5)$ est donnée par

$$\nu(x,t) = u(x,t) + V(x,t).$$

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2 Nous commençons d'abord par résoudre le problème linéaire associé à $(3.1.10) - (3.1.14)$ et introduisez également les espaces fonctionnels utilisés tout au long du chapitre. Puis dans la section 3, nous prouvons l'unicité de la solution du problème linéaire. Et dans la section 4, nous montrons l'existence de solutions. Enfin, dans la section 5, sur la base des résultats du problème linéaire, on applique un processus itérative pour établir l'existence et l'unicité de la solution faible du problème non linéaire $(3.1.10) - (3.1.14)$.

3.2 Problème linéaire associé

Pour l'étude du problème posé nous avons besoin de quelques espaces fonctionnels pour étudier le problème mixte non local donné par l'équation

$$\mathcal{L}u = u_{tt} - u_{xx} - \frac{1}{x}u_x = f(x,t), \tag{3.2.1}$$

vérifiant les conditions $(3.1.11) - (3.1.14)$.
Pour étudier le problème posé, nous introduisons les espaces fonctionnels nécessaires . Soit $L^2_\rho(\Omega)$ l'espace de Hilbert avec poid des fonctions définies et de carré intégrales muni de le produit scalaire

$$(u,\upsilon)_{L^2_\rho(Q)} = (xu,\upsilon)_{L^2(Q)} = \int_Q xu.\upsilon dxdt,$$

et de la norme

$$\|u\|_{L^2_\rho(Q)} = \left\|\sqrt{x}u\right\|_{L^2(Q)} = \left(\int\limits_Q x\ u^2 dx\ dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit $W_\rho^{1,0}(Q)$l'espace de Hilbert ayant le produit scalaire

$$(u,\upsilon)_{W_\rho^{1,0}(Q)} = (u,\upsilon)_{L^2_\rho(Q)} + (u_x,\upsilon_x)_{L^2_\rho(Q)},$$

et avec la norme associée

$$\|u\|^2_{W_\rho^{1,0}(Q)} = \|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_x\|^2_{L^2_\rho(Q)}.$$

Aussi, soit $W_\rho^{1,1}(Q)$ l'espace de Hilbert ayant le produit scalaire

$$(u,\upsilon)_{W_\rho^{1,1}(Q)} = (u,\upsilon)_{L^2_\rho(Q)} + (u_x,\upsilon_x)_{L^2_\rho(Q)} + (u_t,\upsilon_t)_{L^2_\rho(Q)},$$

et avec la norme associée

$$\|u\|^2_{W_\rho^{1,1}(Q)} = \|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_x\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q)}.$$

Le problème (3.2.1), (3.1.11) $-$ (3.1.14) peut être écrit sous la forme opérationnelle

$$Lu = (f,h_1,h_2),\ \forall u \in D(L), \tag{3.2.2}$$

où L est un opérateur donnée par $L = (\mathcal{L},\ell_1,\ell_2)$, avec domaine de définition

$$D(L) = \left\{\begin{array}{c} u \ \in\ L^2(Q), telque\ \ u_t, u_{tt}, u_x, u_{tx}, u_{xx} \ \in\ L^2(Q), \\ u(a,t) = 0, \int\limits_0^a u(x,t) = 0. \end{array}\right\}$$

L est un opérateur défini sur B vers H, où B est un espace de Banach avec

$$\|u\|^2_B = \sup_{0\leq\tau\leq T}\left(\left\|u(x,\tau)_{W_\rho^{1,1}(\Omega)}\right\|_B\right),$$

et H est un espace de Hilbert $L^2_\rho(Q) \times W^1_\rho(\Omega) \times L^2_\rho(\Omega)$ muni de la norme finie

$$\|\mathcal{F}\|^2_H = \|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|h_1\|^2_{W^1_\rho(\Omega)} + \|h_2\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}.$$

Soit $\overline{L}$ la fermeture de l'opérateur L, avec le domaine de définition $D\left(\overline{L}\right)$.

Définition 3.1 *On appelée solution forte du problème* $(3.2.1)$,$(3.1.11)-(3.1.14)$ *la solution de l'équation d'opérateur*

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \forall u \in D\left(\overline{L}\right).$$

On établisse la méthode des inégalités de l'inérgie pour l'opérateur L, on obtient une estimation a priori pour l'opérateur $\overline{L}$. Enfin, on prouve que l'image $R(L)$ de l'opérateur L est dense dans H.

3.3 Estimation a priori

Théorème 3.1 *Pour tout fonction* $u \in D(L)$, *on a l'estimation a priori*

$$\|u\|_B \leq C\|Lu\|_H , \tag{3.3.1}$$

où C est une constante positive indépendante de u.

Preuve. On considère le produit scalaire dans $L^2(Q^\tau)$ de l'équation $(3.2.1)$ et **l'opérateur integro-différentiel**

$$Mu = -x(\tau - t)\int_0^t \left(\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right)(x,s)\,ds + xu_t , \tag{3.3.2}$$

où $Q^\tau = (0,a) \times (0,\tau)$ avec $0 \leq \tau \leq T$, et $\Im_x v = \int_0^x v(\xi,t)\,d\xi$,

on obtient

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}u, Mu)_{L^2(Q^\tau)} \;=\;& -\left((\tau-t)\,u_{tt}, \int_0^t \left(\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right)(x,s)\,ds\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ &+ \left((\tau-t)\,u_{xx}, \int_0^t \left(\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right)(x,s)\,ds\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\ &+ \left((\tau-t)\,u_x, \int_0^t \left(\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right)(x,s)\,ds\right)_{L^2(Q^\tau)} \\ &+ (u_{tt}, u_t)_{L^2_\rho(Q^\tau)} - (u_{xx}, u_t)_{L^2_\rho(Q^\tau)} - (u_x, u_t)_{L^2(Q^\tau)}.\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

En utilisant les conditions $(3.1.13)$ et $(3.1.14)$, et en intégrant par parties, on peut évaluer les termes comme suit

$$
\begin{aligned}
& -\left((\tau-t)\, u_{tt}, \int_0^t \left(\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right)(x,s)\, ds\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
= & -\int_0^a \left[x(\tau-t)\, u_t.\left(\int_0^t \left(\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right)(x,s)\, ds\right)\right]_0^\tau dx \\
& +\int_{Q^\tau} x(\tau-t)\, u_t.\Im_x\left(\xi u_\xi\right) dxdt \; - \int_{Q^\tau} x u_t.\left(\int_0^t \left(\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right)(x,s)\, ds\right) dxdt \\
= & \int_0^\tau (\tau-t)\left[\Im_x\left(\xi u_t\right).\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right]_0^a dt \; - \int_{Q^\tau} x(\tau-t)\, u_x.\Im_x\left(\xi u_t\right) dxdt \\
& -\int_0^\tau \left[\Im_x\left(\xi u_t\right).\left(\int_0^t \left(\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right)(x,s)\, ds\right)\right]_0^a dt \\
& +\int_{Q^\tau} x\Im_x\left(\xi u_t\right).\left(\int_0^t u_x(x,s)\, ds\right) dxdt \\
= & -\left((\tau-t)\, u_x, \Im_x\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \left(\int_0^t u_x(x,s)\, ds, \Im_x\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned}
\tag{3.3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left((\tau-t)\,u_{xx},\int_0^t (\Im_x(\xi u_\xi))(x,s)\,ds\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)}\\
&= \int_{Q^\tau} x(\tau-t)\,u_{xx}.\left(\int_0^t (\Im_x(\xi u_\xi))(x,s)\,ds\right)dxdt\\
&= \int_0^\tau \left[x(\tau-t)\,u_x.\left(\int_0^t (\Im_x(\xi u_\xi))(x,s)\,ds\right)\right]_0^a dt\\
&\quad -\int_{Q^\tau} (\tau-t)\,u_x.\left(\int_0^t (\Im_x(\xi u_\xi))(x,s)\,ds\right)dxdt\\
&\quad -\int_{Q^\tau} x^2(\tau-t)\,u_x.\left(\int_0^t u_x(x,s)\,ds\right)dxdt\\
&= -\int_{Q^\tau} (\tau-t)\,u_x.\left(\int_0^t (\Im_x(\xi u_\xi))(x,s)\,ds\right)dxdt\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_0^a \left[x^2(\tau-t)\left(\int_0^t u_x(x,s)\,ds\right)^2\right]_0^\tau dx\\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{Q^\tau} x^2\left(\int_0^t u_x(x,s)\,ds\right)^2 dxdt\\
&= -\left((\tau-t)\,u_x,\int_0^t (\Im_x(\xi u_\xi))(x,s)\,ds\right)_{L^2(Q^\tau)}\\
&\quad -\frac{1}{2}\left\|x\int_0^t u_x(x,s)\,ds\right\|^2_{L^2(Q^\tau)},
\end{aligned}
\tag{3.3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
& (u_{tt}, u_t)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
= \; & \int_{Q^\tau} x u_{tt}.u_t dxdt \\
= \; & \frac{1}{2}\int_0^a \left[x u_t^2\right]_0^\tau dx \\
= \; & \frac{1}{2}\int_0^a x u_t^2 (x,\tau)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^a x h_2^2(x)\, dx \\
= \; & \frac{1}{2}\left\|u_t(x,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\|h_2\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}, \qquad (3.3.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -(u_{xx}, u_t)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
= \; & -\int_{Q^\tau} x u_{xx}.u_t dxdt \\
= \; & -\int_0^\tau \left[x u_x.u_t\right]_0^a dt + \int_{Q^\tau} u_x.u_t dxdt \\
& + \int_{Q^\tau} x u_x.u_{tx} dxdt \\
= \; & \int_{Q^\tau} u_x.u_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^a \left[x u_x^2\right]_0^\tau dx \\
= \; & \int_{Q^\tau} u_x.u_t dxdt + \frac{1}{2}\int_0^a x u_x^2(x,\tau)\, dx \\
& -\frac{1}{2}\int_0^a x\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2 dx \\
= \; & (u_x, u_t)_{L^2(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\left\|u_x(x,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& -\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial h_1}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}, \qquad (3.3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\left((\tau-t)\, f, \int\limits_0^t \left(\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right)(x,s)\, ds\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
= \; & -\int\limits_{Q^\tau} x\,(\tau-t)\, f.\left(\int\limits_0^t \left(\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right)(x,s)\, ds\right) dxdt \\
= \; & -\int\limits_0^\tau (\tau-t)\left[\Im_x(\xi f).\left(\int\limits_0^t \left(\Im_x\left(\xi u_\xi\right)\right)(x,s)\, ds\right)\right]_0^a dt \\
& +\int\limits_{Q^\tau} x\,(\tau-t)\,\Im_x(\xi f).\left(\int\limits_0^t u_x(x,s)\, ds\right) dxdt \\
= \; & \left((\tau-t)\,\Im_x(\xi f),\left(\int\limits_0^t u_x(x,s)\, ds\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)}. \qquad (3.3.8)
\end{aligned}
$$

Substitution de $(3.3.4)-(3.3.8)$ dans $(3.3.3)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\|u_t(x,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|u_x(x,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
= \; & \frac{1}{2}\left\|h_2(x)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial h_1}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\left\|x\int_0^t u_x(x,s)\, ds\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
& +\left((\tau-t)\, u_x,\ \Im_x(\xi u_t)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& -\left(x\int_0^t u_x(x,s)\, ds,\ \Im_x(\xi u_t)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& +\left((\tau-t),\ \Im_x(\xi f),\left(\int_0^t u_x(x,s)\, ds\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& +(f,u_t)_{L^2_\rho(Q^\tau)}. \qquad (3.3.9)
\end{aligned}
$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy avec ε et l'inégalité de poincaré, nous estimons chaque terme sur la partie droite de $(3.3.9)$ comme suit

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\|x\int\limits_0^t u_x(x,s)\, ds\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
\leq \; & \frac{T^2 a}{4}\left\|u_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}, \qquad (3.3.10)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\tau-t\right)u_x, \Im_x\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2(Q^\tau)} \\
\leq\ & \frac{T^2 a}{4}\left\|u_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi u_t\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq\ & \frac{T^2 a}{4}\left\|u_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{a^3}{4}\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

$$\begin{aligned}
&-\left(\int_0^t u_x\left(x,s\right)ds, \Im_x\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq\ & \frac{a}{2}\left\|\int_0^t u_x\left(x,s\right)ds\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi u_t\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq\ & \frac{T^2 a}{4}\left\|u_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{a^3}{4}\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\tau-t\right)\Im_x\left(\xi f\right), \left(\int_0^t u_x\left(x,s\right)ds\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq\ & \frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi f\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{T^2 a}{2}\left\|\int_0^t u_x\left(x,s\right)ds\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq\ & \frac{a^3}{4}\left\|f\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{T^4 a}{4}\left\|u_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

$$\begin{aligned}
&\left(f, u_t\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq\ & \frac{1}{2}\left\|f\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}.
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Combinant l'inégalités $(3.3.10)-(3.3.14)$ et l'égalité $(3.3.9)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u_t\left(x,\tau\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|u_x\left(x,\tau\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
\leq\ & \frac{1}{2}\left\|h_2\left(x\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial h_1}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&+\left(aT^2+\frac{T^4 a}{4}\right)\left\|u_x\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left(a^3+1\right)\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{a^3}{2}+1\right)\left\|f\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.3.15}$$

Il est facile de vérifier que

$$\frac{1}{2}\left\|u\left(x,\tau\right)\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(\Omega)}\leq\frac{1}{2}\left\|h_{1}\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|u\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(Q^{\tau})}+\frac{1}{2}\left\|u_{t}\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(Q^{\tau})}. \tag{3.3.16}$$

En ajoutant l'inégalité (3.3.16) à (3.3.15) côté à côté, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\|u\left(x,\tau\right)\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(\Omega)}+\left\|u_{x}\left(x,\tau\right)\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(\Omega)}+\left\|u_{t}\left(x,\tau\right)\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(\Omega)}\\
\leq\;& K\left(\left\|h_{1}\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(\Omega)}+\left\|\frac{\partial h_{1}}{\partial x}\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(\Omega)}+\left\|h_{2}\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(\Omega)}\right.\\
&+\left\|f\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(Q^{\tau})}+\left\|u\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(Q^{\tau})}+\left\|u_{x}\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(Q^{\tau})}\\
&\left.+\left\|u_{t}\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(Q^{\tau})}\right),
\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

où

$$K=\max\left\{2aT^{2}+\frac{aT^{4}}{2},a^{3}+2\right\}.$$

Maintenant, en appliquant le lemme de Gronwall a l'inégalité (3.3.17), nous obtenons

$$\left\|u\left(x,\tau\right)\right\|^{2}_{W^{1,1}_{\rho}(\Omega)}\leq Ke^{K\tau}\left(\left\|h_{1}\right\|^{2}_{W^{1}_{\rho}(\Omega)}+\left\|h_{2}\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(\Omega)}+\left\|f\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(Q^{\tau})}\right),$$

ce qui implique

$$\left\|u\left(x,\tau\right)\right\|^{2}_{W^{1,1}_{\rho}(\Omega)}\leq Ke^{KT}\left(\left\|h_{1}\right\|^{2}_{W^{1}_{\rho}(\Omega)}+\left\|h_{2}\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(\Omega)}+\left\|f\right\|^{2}_{L^{2}_{\rho}(Q)}\right). \tag{3.3.18}$$

Puisque le côté droit de (3.3.18) ne dépend pas de τ, en prenant la borne supérieure du coté gauche par rapport à τ sur l'intervalle $[0,T]$, d'où l'estimation (3.3.1) avec $C=\sqrt{K\exp\left(KT\right)}$. Puisque nous n'avons aucune information concernant l'image de l'opérateur L , sauf que $R\left(L\right)\subset H$, il faut prolonger L pour que l'estimation (3.3.1) est valable pour l'extension et que sa image soit tout l'espace H. Alors on établisse la proposition suivante. ■

Proposition 3.1 *L'opérateur $L:B\rightarrow H$ admet une fermeture $\overline{L}$.*
Preuve. *Soit $u_{n}\in D(L)$ est une suite telle que*

$$u_{n}\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}0 \text{ dans } B, \tag{3.3.19}$$

et

$$L\,u_{n}\underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow}\mathcal{F}=\left(f,h_{1},h_{2}\right) \text{ dans } H, \tag{3.3.20}$$

alors il faut montrer que $f\equiv0,h_{1}\equiv0,h_{2}\equiv0$.

Puisque $(3.3.19)$ *est vérifié, on a*

$$u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } D'(Q). \tag{3.3.21}$$

Où $D'(Q)$ *est l'espace de distribution sur* Q.
D'aprés la continuité de la dérivation de $D'(Q)$ *dans* $D'(Q)$, $(3.3.21)$ *implique que*

$$\mathcal{L}u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } D'(Q). \tag{3.3.22}$$

Selon $(3.3.20)$, *on a*

$$\mathcal{L}u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^2_\rho(Q). \tag{3.3.23}$$

Puis

$$\mathcal{L}u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } D'(Q). \tag{3.3.24}$$

D'aprés l'unicité de la limite dans $D'(Q)$, *on conclut que* $f \equiv 0$.
Selon $(3.3.20)$, *on conclut également que*

$$\ell_1 u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} h_1 \text{ dans } W^1_\rho(\Omega). \tag{3.3.25}$$

Du fait que l'injection canonique de $W^1_\rho(\Omega)$ *dans* $D'(\Omega)$ *est continue, on déduit que*

$$\ell_1 u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} h_1 \text{ dans } D'(\Omega). \tag{3.3.26}$$

de plus, puisque $(3.3.19)$ *est vérifié et*

$$\|\ell_1 u_n\|_{W^1_\rho(\Omega)} \leq \|u_n\|_B \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.3.27}$$

On a

$$\ell_1 u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } W^1_\rho(\Omega). \tag{3.3.28}$$

Par conséquence

$$\ell_1 u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } D'(\Omega). \tag{3.3.29}$$

D'après l'unicité de la limite dans $D'(\Omega)$,*on conclut de* $(3.3.26)$ *et* $(3.3.29)$ *que* $h_1 \equiv 0$.
En utilisant la même procédure, on peut montrer que $h_2 \equiv 0$. *Cela prouve* ***la proposition 3.1***.
Puisque les points du graphe de l'opérateur $\overline{L}$ *sont des limites de séquence des points du graphe de* L, *puis on prend la limite en* $(3.3.1)$ *pour obtenir une estimation a priori pour l'opérateur* $\overline{L}$, *c'est*

$$\|u\|_B \leq C\left\|\overline{L}u\right\|_H \quad \forall u \in D\left(\overline{L}\right), \tag{3.3.30}$$

à partir de laquelle on conclue les résultats. ∎

Corollaire 3.1 *La solution forte du problème* $(3.2.1), (3.1.11)-(3.1.14)$ *est unique et dépend continûment des données* $(f, h_1, h_2) \in F$.

Corollaire 3.2 *L'image* $R\left(\overline{L}\right)$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est fermé dans* H *et égal à la fermeture* $\overline{R\left(L\right)}$ *de* $R\left(L\right)$ *,c'est à dire*

$$R\left(\overline{L}\right) = \overline{R\left(L\right)}.$$

3.4 La solvabilité du problème

Théorème 3.2 *Le problème* $(3.2.1), (3.2.11)-(3.1.14)$, *admet une solution forte unique* $u = \overline{L}^{-1}\mathcal{F} = \overline{L^{-1}}\mathcal{F}$*, qui dépend continûment des données, pour tout* $f \in L^2_\rho\left(Q\right), h_1 \in W^1_\rho\left(\Omega\right)$ *et* $h_2 \in L^2_\rho\left(\Omega\right)$.

Proposition 3.2 *Soit* $D_\circ\left(L\right) = \{u \in D\left(L\right) : \ell_1 u = \ell_2 u = 0\}$*, si pour* $\omega \in L^2_\rho\left(Q\right)$ *et pour tout* $u \in D_\circ\left(L\right)$, *on a*

$$(Lu, \omega)_{L^2_\rho(Q)} = 0. \tag{3.4.1}$$

Preuve. *On définir la fonction* $\lambda\left(x,t\right)$ *par*

$$\lambda\left(x,t\right) = \int_t^T \omega\left(x,s\right)ds. \tag{3.4.2}$$

Soit u_{tt} *la solution de l'équation*

$$u_{tt} + \left(\Im_x\left(\xi u_\xi + u\right)\right)_{tt} = \lambda\left(x,t\right). \tag{3.4.3}$$

Et soit

$$u = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq s, \\ \int_s^t (t-\tau)\, u_{\tau\tau} d\tau, & s \leq t \leq T. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

De $(3.4.3)$ *et* $(3.4.4)$, *on a*

$$\omega\left(x,t\right) = -u_{ttt} - \left(\Im_x\left(\xi u_\xi + u\right)\right)_{ttt}. \tag{3.4.5}$$

Nous avons les résultats suivants ■

Lemme 3.1 *La fonction* $\omega\left(x,t\right)$ *défini par* $(3.4.5)$ *est dans* $\omega \in L^2_\rho\left(Q\right)$.

Preuve. *On utilise l'opérateur de régularisation* ρ_ε *de la forme*

$$\left(\rho_\varepsilon u\right)\left(x,t\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} W\left(\frac{s-t}{\varepsilon}\right) u\left(x,s\right)ds,$$

où

$$W \in C_0^{\infty}(0,T), W(t) \geq 0,$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(t)\,dt = 1.$$

On applique l'opérateur ρ_ε *et* $\frac{\partial}{\partial t}$ *à l' équation* $(3.4.3)$, *on trouve*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{tt} + \left(\Im_x\left(\xi u_\xi + u\right)\right)_{tt}\right) \\ = \;& \frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(u_{tt} + \left(\Im_x\left(\xi u_\xi + u\right)\right)_{tt}\right) - \rho_\varepsilon\left(u_{tt} + \left(\Im_x\left(\xi u_\xi + u\right)\right)_{tt}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \lambda. \end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Alors

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t}\left(u_{tt} + \left(\Im_x\left(\xi u_\xi + u\right)\right)_{tt}\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} \\ \leq \;& 2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(u_{tt} + \left(\Im_x\left(\xi u_\xi + u\right)\right)_{tt}\right) - \rho_\varepsilon\left(u_{tt} + \left(\Im_x\left(\xi u_\xi + u\right)\right)_{tt}\right)\right\}\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} \\ & +2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\lambda\right\|^2_{L^2_\rho(Q)}. \end{aligned} \tag{3.4.7}$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur ρ_ε*, on obtient*

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{tt} + \left(\Im_x\left(\xi u_\xi + u\right)\right)_{tt}\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} \leq 2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\lambda\right\|^2_{L^2_\rho(Q)},$$

Puisque $\rho_\varepsilon \upsilon \longrightarrow \upsilon$ *lorsque* $\varepsilon \longrightarrow 0$ *dans* $L^2_\rho(Q)$, *et*$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(u_{tt} + \left(\Im_x\left(\xi u_\xi + u\right)\right)_{tt}\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)}$ *est borné, on conclut que* $\omega \in L^2_\rho(Q)$.
Puis en remplaçant $\omega(x,t)$ *dans* $(3.4.1)$ *par sa représentation* $(3.4.5)$*, on obtient*

$$\begin{aligned} & -\left(u_{tt}, u_{ttt}\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(u_{xx}, u_{ttt}\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(u_x, u_{ttt}\right)_{L^2(Q)} \\ & -\left(u_{tt}, \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(u_{xx}, \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\ & +\left(u_x, \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right)\right)_{L^2(Q)} - \left(u_{tt}, \Im_x\left(u_{ttt}\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\ & +\left(u_{xx}, \Im_x\left(u_{ttt}\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(u_x, \Im_x\left(u_{ttt}\right)\right)_{L^2(Q)} = 0. \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

En tenant compte du fait l'équation $(3.4.3)$, $(3.4.4)$, *les conditions aux limites*$(3.4.13)$, $(3.4.14)$ *et les* *propriétés de l'intégration par partie, on obtient*

$$\begin{aligned}
& -\left(u_{tt}, u_{ttt}\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
= & -\int_{Q_s} x u_{tt}.u_{ttt} dx dt \\
= & -\frac{1}{2}\int_0^a \left[x u_{tt}^2\right]_s^T dx \\
= & \frac{1}{2}\int_0^a x u_{tt}^2\left(x, s\right) dx \\
= & \frac{1}{2}\left\|u_{tt}\left(x, s\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ,
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

$$\begin{aligned}
& \left(u_{xx}, u_{ttt}\right)_{L_\rho^2(Q)} \\
= & \int_{Q_s} x u_{xx}.u_{ttt} dx dt \\
= & \int_s^T \left[x u_x.u_{ttt}\right]_0^a dt - \int_{Q_s} u_x.u_{ttt} dx dt \\
& -\int_{Q_s} x u_x.u_{tttx} dx dt \\
= & -\int_{Q_s} u_x.u_{ttt} dx dt - \int_0^a \left[x u_x.u_{ttx}\right]_s^T dx \\
& +\int_{Q_s} x u_{tx}.u_{ttx} dx dt \\
= & -\int_{Q_s} u_x.u_{ttt} dx dt + \frac{1}{2}\int_0^a \left[x u_{tx}^2\right]_s^T dx \\
= & -\int_{Q_s} u_x.u_{ttt} dx dt + \frac{1}{2}\int_0^a x u_{tx}^2\left(x, T\right) dx \\
= & -\left(u_x, u_{ttt}\right)_{L^2(Q_s)} + \frac{1}{2}\left\|u_{tx}\left(x, T\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2 ,
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

$$
\begin{aligned}
& -\left(u_{tt}, \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= & -\int_{Q_s} x u_{tt} . \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right) dx dt \\
= & -\int_s^T \left[\Im_x\left(\xi u_{tt}\right) . \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right)\right]_0^a dt+\int_{Q_s} x u_{\xi ttt} . \Im_x\left(\xi u_{tt}\right) dx dt \\
= & \int_s^T \left[x u_{ttt} . \Im_x\left(\xi u_{tt}\right)\right]_0^a dt-\int_{Q_s} u_{ttt} . \Im_x\left(\xi u_{tt}\right) dx dt \\
& -\int_{Q_s} x^2 u_{ttt} . u_{tt} dx dt \\
= & -\int_s^T \left[\left(\Im_x u_{ttt}\right) . \Im_x\left(\xi u_{tt}\right)\right]_0^a dt+\int_{Q_s} x u_{tt} .\left(\Im_x u_{ttt}\right) dx dt \\
& -\frac{1}{2} \int_0^a \left[x^2 u_{tt}^2\right]_s^T dx \\
= & \int_{Q_s} x u_{tt} .\left(\Im_x u_{ttt}\right) dx dt+\frac{1}{2} \int_0^a x^2 u_{tt}^2(x, s) dx \\
= & \left(u_{tt},\left(\Im_x u_{ttt}\right)\right)_{L^2\left(Q_s\right)}+\frac{1}{2}\left\|x u_{tt}(x, s)\right\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}
\qquad (3.4.11)
$$

$$
\begin{aligned}
& \left(u_{xx}, \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= & \int_{Q_s} x u_{xx} . \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right) dx dt \\
= & \int_s^T \left[x u_x . \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right)\right]_0^a dt-\int_{Q_s} u_x . \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right) dx dt \\
& -\int_{Q_s} x^2 u_x . u_{xttt} dx dt \\
= & -\int_{Q_s} u_x . \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right) dx dt-\int_0^a \left[x^2 u_x . u_{xtt}\right]_s^T dx \\
& +\int_{Q_s} x^2 u_{xt} . u_{xtt} dx dt \\
= & -\int_{Q_s} u_x . \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right) dx dt+\frac{1}{2} \int_0^a \left[x^2 u_{xt}^2\right]_s^T dx \\
= & -\int_{Q_s} u_x . \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right) dx dt+\frac{1}{2} \int_0^a x^2 u_{xt}^2(x, T) dx \\
= & -\left(u_x, \Im_x\left(\xi u_{\xi ttt}\right)\right)_{L^2\left(Q_s\right)}+\frac{1}{2}\left\|x u_{xt}(x, T)\right\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}
\qquad (3.4.12)
$$

$$\begin{aligned}
& \left(u_{xx}, \Im_x\left(u_{ttt}\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= & \int_{Q_s} x u_{xx}.\Im_x\left(u_{ttt}\right) dxdt \\
= & \int_s^T \left[x u_x.\Im_x\left(u_{ttt}\right)\right]_0^a dt - \int_{Q_s} u_x.\Im_x\left(u_{ttt}\right) dxdt \\
& -\int_{Q_s} x u_x.u_{ttt} dxdt \\
= & -\int_{Q_s} u_x.\Im_x\left(u_{ttt}\right) dxdt - \int_0^a \left[x u_x.u_{tt}\right]_s^T dx \\
& +\int_{Q_s} x u_{xt}.u_{tt} dxdt \\
= & -\left(u_x, \Im_x\left(u_{ttt}\right)\right)_{L^2(Q_s)} + \left(u_{xt}, u_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q_s)}. \qquad (3.4.13)
\end{aligned}$$

Maintenant, en combinant l'égalités $(3.4.8)-(3.4.13)$,*on a*

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\|u_{tt}(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|x u_{tt}(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|u_{tx}(x,T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|x u_{xt}(x,T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} = -\left(u_{xt}, u_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q_s)}, \qquad (3.4.14)
\end{aligned}$$

où $Q_s = \Omega \times (s,T)$.

En appliquant l'inégalité de Cauchy avec ε *sur la partie droite de* $(3.4.14)$ *on trouve*

$$\begin{aligned}
& \left\|u_{tt}(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|x u_{tt}(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +\left\|u_{tx}(x,T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|x u_{xt}(x,T)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq & \left\|u_{xt}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \left\|u_{tt}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}. \qquad (3.4.15)
\end{aligned}$$

Puisque le troisième et le quatrième termes du partie gauche de $(3.4.15)$ *ne dépend pas de* s, *on introduit la nouvelle fonction* $\sigma(x,t)$ *définie par*

$$\sigma(x,t) = \int_t^T u_{\tau\tau} d\tau. \qquad (3.4.16)$$

Puis

$$u_t(x,t) = \sigma(x,s) - \sigma(x,t) \text{ et } u_t(x,T) = \sigma(x,s). \qquad (3.4.17)$$

Ainsi, l'inégalité $(3.4.15)$ *devient*

$$\begin{aligned}
& \left\|u_{tt}(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|x u_{tt}(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& +\left\|\sigma_x(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|x\sigma_x(x,s)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq & \left\|u_{tt}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \left\|\sigma_x(x,s) - \sigma_x(x,t)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \|u_{tt}(x,s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|xu_{tt}(x,s)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + (1-2(T-s)) \|\sigma_x(x,s)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|x\sigma_x(x,s)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq \; & 2\left(\|u_{tt}\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \|\sigma_x\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}\right). \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

Si $s_0 \succ 0$ *vérifiant* $2(T-s_0) = \frac{1}{2}$, *alors* $(3.4.18)$ *implique que*

$$\begin{aligned} & \|u_{tt}(x,s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|xu_{tt}(x,s)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ & + \|\sigma_x(x,s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|x\sigma_x(x,s)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq \; & 4\left(\|u_{tt}\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \|\sigma_x\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}\right), \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

pour tout $s \in [T-s_0, T]$.
Remplaçons

$$\eta(s) = \|u_{tt}\|^2_{L^2_\rho(Q_S)} + \|\sigma_x\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}, \tag{3.4.20}$$

dans $(3.4.19)$, *on obtient*

$$\|xu_{tt}(x,s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|x\sigma_x(x,s)\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{d\eta}{ds} \leq 4\eta(s), \tag{3.4.21}$$

à partir de $(3.4.21)$ *nous avons*

$$-\frac{d}{ds}(\eta(s)\exp(4s)) \leq 0. \tag{3.4.22}$$

En tenant compte du fait que $\eta(T) = 0$, *une intégration de* $(3.4.22)$ *par rapport à* s *sur* $[s,T]$ *donne*

$$\eta(s).\exp(4s) \leq 0. \tag{3.4.23}$$

Il découle de l'inégalité $(3.4.23)$ *que* $\omega \equiv 0$ *presque partout sur* Q_{T-s_0}. *Puisque la longueur* s *est indépendante de l'origine, nous utilisons la même procédure un nombre infini de fois pour montrer que* $\omega \equiv 0$ *dans* Q. *Ceci complète la preuve de* ***la Proposition 3.2.***
Soit $W = (\omega, \omega_1, \omega_2) \in R(L)^\perp$, *tel que*

$$(\mathcal{L}u, \omega)_{L^2_\rho(Q)} + (\ell_1 u, \omega_1)_{W^1_\rho(\Omega)} + (\ell_2 u, \omega_2)_{L^2_\rho(\Omega)} = 0, \tag{3.4.24}$$

posons $u \in D_\circ(L)$ *dans l'équation* $(3.4.24)$, *nous obtenons*

$$(\mathcal{L}u, \omega)_{L^2_\rho(Q)} = 0, \forall\, u \in D_\circ(L). \tag{3.4.25}$$

D'après la proposition (3.2) *on en déduit que* $\omega = 0$. *Ainsi, l'équation* $(3.4.24)$ *devient*

$$\left(\ell_1 u, \omega_1\right)_{W_\rho^1(\Omega)} + \left(\ell_2 u, \omega_2\right)_{L_\rho^2(\Omega)} = 0. \tag{3.4.26}$$

Comme les images $\ell_1 u$ *et* $\ell_2 u$ *s'annulent d'une manière indépendante et que les ensembles des valeurs des opérateurs* ℓ_1 *et* ℓ_2 *sont respectivement denses dans les espaces* $W_\rho^1(\Omega)$ *et* $L_\rho^2(\Omega)$, *alors* $\omega_1 \equiv 0$ *et* $\omega_2 \equiv 0$, *par conséquent* $W \equiv 0$. *Ceci complète la démonstration du* ***théorème 3.2***. ■

3.5 Problème non linéaire

Dans cette section nous consacrons à la preuve de l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution sur les données du problème $(3.1.10) - (3.1.14)$. D'abord, nous prouvons le lemme suivant

Lemme 3.2 *Pour tout* υ *appartient à* $W_\rho^{1,0}((0,a))$ *satisfaisant la condition intégrale* $(3.1.14)$, *on a*

$$\int_0^a x\left(\Im_x \upsilon\right)^2 dx \leq 4a^2 \int_0^a x\upsilon^2 dx. \tag{3.5.1}$$

Preuve. Il est facile de voir que pour chaque fonction υ satisfisant la condition intégrle $(3.1.14)$ on a

$$\int_0^a \frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(\Im_x \upsilon\right)^2\right) dx = \int_0^a \left(\left(\Im_x \upsilon\right)^2 + 2x\upsilon.\Im_x \upsilon\right) dx0 = 0,$$

par conséquent

$$\int_0^a x\left(\Im_x \upsilon\right)^2 dx \leq a \int_0^a \left(\Im_x \upsilon\right)^2 dx = -2a \int_0^a x\upsilon.\Im_x \upsilon dx.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy avec ε, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^a x\left(\Im_x \upsilon\right)^2 dx &\leq \left|2a \int_0^a x\upsilon.\Im_x \upsilon dx\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} 4a^2 \int_0^a x\upsilon^2 dx + \frac{1}{2\varepsilon} \int_0^a x\left(\Im_x \upsilon\right)^2 dx, \end{aligned}$$

prenons $\varepsilon = 1$, ainsi $(3.5.1)$ est établi pour toute fonction lisse υ.
Considérons maintenant le problème auxiliaire suivant avec l'équation homogène

$$\mathcal{L}U = U_{tt} - U_{xx} - \frac{1}{x} U_x = 0, \tag{3.5.2}$$

$$\ell_1 U = U(x,0) = h_1(x), \tag{3.5.3}$$

$$\ell_2 U = U_t(x,0) = h_2(x), \tag{3.5.4}$$

$$U(a,t)=0, \tag{3.5.5}$$

$$\int_0^a U dx = 0. \tag{3.5.6}$$

Si u est la solution du problème $(3.1.10)-(3.1.14)$ et U est la solution du problème $(3.5.2)-(3.5.6)$, alors $\omega = u - U$ satisfaisant

$$\mathcal{L}\omega = \omega_{tt} - \omega_{xx} - \frac{1}{x}\omega_x = F(x,t,\omega,\omega_x), \tag{3.5.7}$$

$$\ell_1\omega = \omega(x,0) = 0, \tag{3.5.8}$$

$$\ell_2\omega = \omega_t(x,0) = 0, \tag{3.5.9}$$

$$\omega(a,t) = 0, \tag{3.5.10}$$

$$\int_0^a \omega dx = 0, \tag{3.5.11}$$

où

$$F(x,t,\omega,\omega_x) = F(x,t,\omega+U,\omega_x+U_x).$$

La fonction F satisfaisant la condition

$$|F(x,t,u_1,\upsilon_1) - F(x,t,u_2,\upsilon_2)| \leq d(|u_1-u_2| + |\upsilon_1-\upsilon_2|), \tag{B}$$

pour tout $(x,t) \in Q$.

D'après **le Théorème 3.2**, le problème $(3.5.2)-(3.5.6)$ admet une solution unique dépendant continûment de $h_1 \in W_\rho^1(\Omega)$ et $h_2 \in L_\rho^2(\Omega)$.

Il reste à résoudre le problème $(3.5.7)-(3.5.11)$. Donc nous allons prouver que le problème $(3.5.7)-(3.5.11)$ admet une solution faible unique.

Supposons que υ, ω appartient à $C^2(Q)$ tel que

$$\upsilon(x,T) = \upsilon_t(x,T) = 0,$$

$$\omega(x,0) = \omega_t(x,0) = 0,$$

$$\upsilon(a,t) = \omega(a,t) = 0,$$

$$\int_0^a \upsilon dx = \int_0^a \omega dx = 0,$$

Pour tout $\upsilon \in C^2(Q)$, nous avons

$$\begin{aligned} & -(\mathcal{L}\omega, \Im_x(\xi\upsilon_\xi))_{L_\rho^2(Q)} \\ = & -(\omega_{tt}, \Im_x(\xi\upsilon_\xi))_{L_\rho^2(Q)} + (\omega_{xx}, \Im_x(\xi\upsilon_\xi))_{L_\rho^2(Q)} \\ & + (\omega_x, \Im_x(\xi\upsilon_\xi))_{L^2(Q)}. \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

On considère séparément les intégrales de chaque terme à droite et à gauche de l'égalité (3.5.12). En intégrant par partie et en prenant en compte les conditions sur υ et ω

$$\begin{aligned}
& -\left(\omega_{tt}, \Im_x\left(\xi\upsilon_\xi\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= & -\int_Q x\omega_{tt}.\Im_x\left(\xi\upsilon_\xi\right)dxdt \\
= & -\int_0^T\left[\Im_x\left(\xi\omega_{tt}\right).\Im_x\left(\xi\upsilon_\xi\right)\right]_0^a dt+\int_Q x\upsilon.\Im_x\left(\xi\omega_{tt}\right)dxdt \\
= & \int_0^T\left[x\upsilon.\Im_x\left(\xi\omega_{tt}\right)\right]_0^a dt-\int_Q \upsilon.\Im_x\left(\xi\omega_{tt}\right)dxdt \\
& -\int_Q x^2\upsilon.\omega_{tt}dxdt \\
= & -\int_0^a\left[\upsilon.\Im_x\left(\xi\omega_t\right)\right]_0^T dx+\int_Q \upsilon_t.\Im_x\left(\xi\omega_t\right)dxdt \\
& -\int_0^a\left[x^2\upsilon.\omega_t\right]_0^T dx+\int_Q x^2\upsilon_t.\omega_t dxdt \\
= & \left(\upsilon_t, \Im_x\left(\xi\omega_t\right)\right)_{L^2(Q)}+\left(x\upsilon_t,\omega_t\right)_{L^2_\rho(Q)},
\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\omega_{xx}, \Im_x\left(\xi\upsilon_\xi\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= & \int_Q x\omega_{xx}.\Im_x\left(\xi\upsilon_\xi\right)dxdt \\
= & \int_0^T\left[x\omega_x.\Im_x\left(\xi\upsilon_\xi\right)\right]_0^a dt \\
& -\int_Q \omega_x.\Im_x\left(\xi\upsilon_\xi\right)dxdt \\
& -\int_Q x^2\omega_x.\upsilon_x dxdt \\
= & -\left(\omega_x, \Im_x\left(\xi\upsilon_\xi\right)\right)_{L^2(Q)} \\
& -\left(x\omega_x,\upsilon_x\right)_{L^2_\rho(Q)},
\end{aligned} \tag{3.5.14}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\mathcal{L}\omega, \Im_x\left(\xi\upsilon_\xi\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= & -\int xF.\Im_x\left(\xi\upsilon_\xi\right)dx \\
= & -\int_0^T\left[\Im_x\left(\xi F\right).\Im_x\left(\xi\upsilon_\xi\right)\right]_0^a dt \\
& +\int_Q x\upsilon_x.\Im_x\left(\xi F\right)dxdt \\
= & \left(\upsilon_x, \Im_x\left(\xi F\right)\right)_{L^2_\rho(Q)}.
\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

La substitution de $(3.5.13)-(3.5.15)$ dans $(3.5.12)$ donne

$$H(\omega,\upsilon)=\left(\upsilon_x,\Im_x(\xi F)\right)_{L^2_\rho(Q)}, \tag{3.5.16}$$

où

$$H(\omega,\upsilon)=\left(\upsilon_t,\Im_x(\xi\omega_t)\right)_{L^2(Q)}+\left(x\upsilon_t,\omega_t\right)_{L^2_\rho(Q)}-\left(x\omega_x,\upsilon_x\right)_{L^2_\rho(Q)}. \tag{3.5.17}$$

■

Définition 3.2 *Une fonction $\omega\in W^{1,1}_\rho(Q)$ est dite solution faible du problème $(3.5.7)-(3.5.11)$ si $(3.5.16)$ est satisfaite.*

Maintenant nous Construisons une suite d'itérations de la manière suivante. En commençant par $\omega^{(0)}=0$ la suite $\left(\omega^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie comme suit étant donné l'élément $\omega^{(n-1)}$, alors pour $n=1,2,...$, résolvons le problème

$$\omega^{(n)}_{tt}-\omega^{(n)}_{xx}-\frac{1}{x}\omega^{(n)}_x=F\left(x,t,\omega^{(n-1)},\omega^{(n-1)}_x\right), \tag{3.5.18}$$

$$\omega^{(n)}(x,0)=0, \tag{3.5.19}$$

$$\omega^{(n)}_t(x,0)=0, \tag{3.5.20}$$

$$\omega^{(n)}(a,t)=0, \tag{3.5.21}$$

$$\int_0^a\omega^{(n)}dx=0, \tag{3.5.22}$$

Théorème 3.3 *Affirme que pour tout n fixé, chaque problème $(3.5.18)-(3.5.22)$ admet une solution unique $\omega^{(n)}(x,t)$. Si on pose $V^{(n)}(x,t)=\omega^{(n+1)}(x,t)-\omega^{(n)}(x,t)$, alors on obtient un nouvelle problème*

$$V^{(n)}_{tt}-V^{(n)}_{xx}-\frac{1}{x}V^{(n)}_x=\sigma^{(n-1)}(x,t). \tag{3.5.23}$$

$$V^{(n)}(x,0)=0, \tag{3.5.24}$$

$$V^{(n)}_t(x,0)=0, \tag{3.5.25}$$

$$V^{(n)}(a,t)=0, \tag{3.5.26}$$

$$\int_0^a V^{(n)}dx=0, \tag{3.5.27}$$

où

$$\sigma^{(n-1)}(x,t)=F\left(x,t,\omega^{(n)},\omega^{(n)}_x\right)-F\left(x,t,\omega^{(n-1)},\omega^{(n-1)}_x\right).$$

Lemme 3.3 *Supposons que la condition (B) est vérifie, alors il existe une constante positive k telle que pour le problème $(3.5.23)-(3.5.27)$, nous avons l'estimation a priori*

$$\left\|V^{(n)}\right\|_{W_\rho^{1,1}(Q)} \leq K\left\|V^{(n-1)}\right\|_{W_\rho^{1,1}(Q)}. \tag{3.5.28}$$

Preuve. Prenant le produit scalaire dans $L_\rho^2(Q^\tau)$, avec $0 \leq \tau \leq T$ de l'équation différentielle dans $(3.5.23)$ et l'opérateur intégro-différentielle

$$MV = V_t^{(n)} - (\tau - t)\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\,ds,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\left(V_{tt}^{(n)}, V_t^{(n)}\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} - \left(V_{xx}^{(n)}, V_t^{(n)}\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} - \left(V_x^{(n)}, V_t^{(n)}\right)_{L^2(Q^\tau)} \\
&-\left((\tau-t)\,V_{tt}^{(n)}, \int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\,ds\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} \\
&+\left((\tau-t)\,V_{xx}^{(n)}, \int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\,ds\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} \\
&+\left((\tau-t)\,V_x^{(n)}, \int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\,ds\right)_{L^2(Q^\tau)} \\
= \;&\left(\sigma^{(n-1)}, V_t^{(n)}\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} - \left((\tau-t)\,\sigma^{(n-1)}, \int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\,ds\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)}.
\end{aligned} \tag{3.5.29}$$

Prenons on compte les conditions $(3.5.26)$ et $(3.5.27)$, intégrations successives par parties de chaque terme de $(3.5.29)$ conduit à

$$\begin{aligned}
&\left(V_{tt}^{(n)}, V_t^{(n)}\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} \\
= \;&\int_{Q^\tau} x V_{tt}^{(n)}.V_t^{(n)}\,dxdt \\
= \;&\frac{1}{2}\int_0^a \left[x\left(V_t^{(n)}\right)^2\right]_0^\tau dx \\
= \;&\frac{1}{2}\int_0^a x\left(V_t^{(n)}\right)^2(x,\tau)\,dx \\
= \;&\frac{1}{2}\left\|V_t^{(n)}(x,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2,
\end{aligned} \tag{3.5.30}$$

$$
\begin{aligned}
& -\left(V_{xx}^{(n)},V_t^{(n)}\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} \\
= & -\int_{Q^\tau} xV_{xx}^{(n)}.V_t^{(n)}dxdt \\
= & -\int_0^\tau\left[xV_x^{(n)}.V_t^{(n)}\right]_0^a dt+\int_{Q^\tau} xV_x^{(n)}.V_{tx}^{(n)}dxdt \\
& +\int_{Q^\tau} V_x^{(n)}.V_t^{(n)}dxdt \\
= & \frac{1}{2}\int_0^a\left[x\left(V_x^{(n)}\right)^2\right]_0^\tau dx+\int_{Q^\tau} V_x^{(n)}.V_t^{(n)}dxdt \\
= & \frac{1}{2}\left\|V_x^{(n)}(x,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left(V_x^{(n)},V_t^{(n)}\right)_{L^2(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.5.31}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\left((\tau-t)V_{tt}^{(n)},\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\,ds\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} \\
= & -\int_{Q^\tau} x(\tau-t)V_{tt}^{(n)}.\left(\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\,ds\right)dxdt \\
= & -\int_0^a\left[x(\tau-t)V_t^{(n)}.\left(\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\,ds\right)\right]_0^\tau dx \\
& +\int_{Q^\tau} x(\tau-t)V_t^{(n)}.\Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)dxdt \\
& -\int_{Q^\tau} xV_t^{(n)}.\left(\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\,ds\right)dxdt \\
= & \int_0^\tau\left[(\tau-t)\Im_x\left(\xi V_t^{(n)}\right).\Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)\right]_0^a dt \\
& \quad -\int_{Q^\tau} x(\tau-t)V_x^{(n)}.\Im_x\left(\xi V_t^{(n)}\right)dxdt \\
& -\int_0^\tau\left[\Im_x\left(\xi V_t^{(n)}\right).\left(\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\,ds\right)\right]_0^a dt \\
& +\int_{Q^\tau} x\Im_x\left(\xi V_t^{(n)}\right).\left(\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\,ds\right)dxdt \\
= & -\left((\tau-t)V_x^{(n)},\Im_x\left(\xi V_t^{(n)}\right)\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} \\
& +\left(\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\,ds,\Im_x\left(\xi V_t^{(n)}\right)\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.5.32}
$$

$$\begin{aligned}
&\left((\tau-t)\, V_{xx}^{(n)}, \int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\, ds\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} \\
=\;& \int_{Q^\tau} x\,(\tau-t)\, V_{xx}^{(n)}.\left(\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\, ds\right) dxdt \\
=\;& \int_0^\tau \left[x\,(\tau-t)\, V_x^{(n)}.\left(\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\, ds\right)\right]_0^a dt \\
&-\int_{Q^\tau} (\tau-t)\, V_x^{(n)}.\left(\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\, ds\right) dxdt \\
&-\int_{Q^\tau} x^2\,(\tau-t)\, V_x^{(n)}.\left(\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\, ds\right) dxdt \\
=\;& -\int_{Q^\tau} (\tau-t)\, V_x^{(n)}.\left(\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\, ds\right) dxdt \\
&-\frac{1}{2}\int_0^a \left[x^2\,(\tau-t)\left(\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\, ds\right)^2\right]_0^\tau dx \\
&-\frac{1}{2}\int_0^a x^2\left(\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\, ds\right)^2 dx \\
=\;& -\left((\tau-t)\, V_x^{(n)}, \left(\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\, ds\right)\right)_{L^2(Q^\tau)} \\
&-\frac{1}{2}\left\| x\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\, ds\right\|_{L^2(Q^\tau)}^2,
\end{aligned} \tag{3.5.33}$$

$$\begin{aligned}
&-\left((\tau-t)\,\sigma^{(n-1)},\ \int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\ ds\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} \\
=\;& -\int_{Q^\tau} x\ (\tau-t)\ \sigma^{(n-1)}.\left(\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\ ds\right) dxdt \\
=\;& -\int_0^\tau \left[(\tau-t)\ \Im_x\left(\xi\sigma^{(n-1)}\right).\left(\int_0^t \Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)(x,s)\ ds\right)\right]_0^a dt \\
&+\int_{Q^\tau} x\ (\tau-t)\ \Im_x\left(\xi\sigma^{(n-1)}\right).\left(\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\ ds\right) dxdt \\
=\;& \left((\tau-t)\ \Im_x\left(\xi\sigma^{(n-1)}\right), \int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\ ds\right)_{L_\rho^2(Q^\tau)}.
\end{aligned} \tag{3.5.24}$$

Substituons $(3.5.30) - (3.5.34)$ dans $(3.5.29)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\|V_t^{(n)}(x,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|V_x^{(n)}(x,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
= & \left((\tau-t)V_x^{(n)},\Im_x\left(\xi V_\xi^{(n)}\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& -\left(\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\,ds,\Im_x\left(\xi V_t^{(n)}\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|x\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\,ds\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
& +\left(\sigma^{(n-1)},V_t^{(n)}\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& +\left((\tau-t)\Im_x\left(\xi\sigma^{(n-1)}\right),\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\,ds\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)}.
\end{aligned} \tag{3.5.35}$$

Appliquons les inégalité de Cauchy avec ε et Poincaré, alors chaque termes du côté droit de $(3.5.35)$ peuvent être estimés comme suit

$$\begin{aligned}
& \left((\tau-t)V_x^{(n)},\Im_x\left(\xi V_t^{(n)}\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq & \frac{T^2a}{2}\left\|V_x^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi V_t^{(n)}\right)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
\leq & \frac{T^2a}{2}\left\|V_x^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{a^3}{4}\left\|V_t^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.5.36}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\,ds,\Im_x\left(\xi V_t^{(n)}\right)\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq & \frac{a}{2}\left\|\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\,ds\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi V_t^{(n)}\right)\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
\leq & \frac{aT^2}{4}\left\|V_x^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{a^3}{4}\left\|V_t^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.5.37}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\|x\int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\,ds\right\|^2_{L^2(Q^\tau)} \\
\leq & \frac{aT^2}{4}\left\|V_x^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.5.38}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\sigma^{(n-1)},V_t^{(n)}\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq & \frac{1}{2}\left\|\sigma^{(n-1)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|V_t^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{3.5.39}$$

$$
\begin{aligned}
&\left((\tau - t)\, \Im_x \left(\xi \sigma^{(n-1)} \right), \int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\, ds \right)_{L_\rho^2(Q^\tau)} \\
\leq\ & \frac{1}{2} \left\| \Im_x \left(\xi \sigma^{(n-1)} \right) \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 + \frac{aT^2}{2} \left\| \int_0^t V_x^{(n)}(x,s)\, ds \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
\leq\ & \frac{a^3}{4} \left\| \sigma^{(n-1)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 + \frac{aT^4}{4} \left\| V_x^{(n)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 .
\end{aligned} \tag{3.5.40}
$$

En combinant les égalités $(3.5.35) - (3.5.40)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left\| V_t^{(n)}(x,\tau) \right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| V_x^{(n)}(x,\tau) \right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & \left(aT^2 + \frac{aT^4}{4} \right) \left\| V_x^{(n)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 + \frac{1}{2} \left(a^3 + 1 \right) \left\| V_t^{(n)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{a^3}{2} + 1 \right) \left\| \sigma^{(n-1)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 .
\end{aligned} \tag{3.5.41}
$$

La condition (B) donne

$$
\begin{aligned}
&\left\| \sigma^{(n-1)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
=\ & \int_{Q^\tau} x \left(F\left(x,t,\omega^{(n)},\omega_x^{(n)}\right) - F\left(x,t,\omega^{(n-1)},\omega_x^{(n-1)}\right) \right)^2 dxdt \\
\leq\ & \int_{Q^\tau} x d^2 \left(\left| \omega^{(n)} - \omega^{(n-1)} \right| + \left| \omega_x^{(n)} - \omega_x^{(n-1)} \right| \right)^2 dxdt \\
\leq\ & 2d^2 \left(\int_{Q^\tau} x \left(\left| \omega^{(n)} - \omega^{(n-1)} \right| \right)^2 dxdt + \int_{Q^\tau} x \left(\left| \omega_x^{(n)} - \omega_x^{(n-1)} \right| \right)^2 dxdt \right) \\
=\ & 2d^2 \left(\left\| V^{(n-1)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 + \left\| V_x^{(n-1)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \right) \\
\leq\ & 2d^2 \left(\left\| V^{(n-1)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 + \left\| V_x^{(n-1)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 + \left\| V_t^{(n-1)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \right) \\
=\ & 2d^2 \left\| V^{(n-1)} \right\|_{W_\rho^{1,1}(Q^\tau)}^2 .
\end{aligned} \tag{3.5.42}
$$

Substituons $(3.5.42)$ dans $(3.5.41)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left\| V_t^{(n)}(x,\tau) \right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \left\| V_x^{(n)}(x,\tau) \right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 \\
\leq\ & \left(aT^2 + \frac{aT^4}{4} \right) \left\| V_x^{(n)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 + \frac{1}{2} \left(a^3 + 1 \right) \left\| V_t^{(n)} \right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
&+ d^2 \left(\frac{a^3}{2} + 1 \right) \left\| V^{(n-1)} \right\|_{W_\rho^{1,1}(Q^\tau)}^2 .
\end{aligned} \tag{3.5.43}
$$

Il est facile de vérifier que

$$\frac{1}{2}\left\|V^{(n)}(x,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \leq \frac{1}{2}\left\|V^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\left\|V_t^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}. \tag{3.5.44}$$

Ajoutons $(3.5.44)$ à $(3.5.43)$ côté à côté, on obtient

$$\left\|V^{(n)}(x,\tau)\right\|^2_{W^{1,1}_\rho(\Omega)} \leq k_1\left\|V^{(n)}\right\|^2_{W^{1,1}_\rho(Q^\tau)} + d^2k_2\left\|V^{(n-1)}\right\|^2_{W^{1,1}_\rho(Q^\tau)}. \tag{3.5.45}$$

où

$$\begin{aligned} k_1 &= \max\left\{2aT^2 + \frac{aT^4}{2}, a^3+2\right\}, \\ k_2 &= a^3+2. \end{aligned}$$

En appliquant lemme de Gronwalls à $(3.5.45)$, on obtient

$$\left\|V^{(n)}(x,\tau)\right\|^2_{W^{1,1}_\rho(\Omega)} \leq d^2K_2e^{k_1\tau}\left\|V^{(n-1)}\right\|^2_{W^{1,1}_\rho(Q^\tau)}.$$

ce que implique

$$\left\|V^{(n)}(x,\tau)\right\|^2_{W^{1,1}_\rho(\Omega)} \leq d^2K_2e^{k_1T}\left\|V^{(n-1)}\right\|^2_{W^{1,1}_\rho(Q)}. \tag{3.5.46}$$

En intégrant la dernière inégalité sur l'intervalle $(0,T)$, on obtient l'estimation a priori souhaitée $(3.5.28)$ qui est

$$\left\|V^{(n)}\right\|^2_{W^{1,1}_\rho(Q)} \leq d^2TK_2e^{K_1T}\left\|V^{(n-1)}\right\|^2_{W^{1,1}_\rho(Q)}.$$

A partir des critères de convergence des séries, il résulte que la série $\sum_{n=1}^{\infty} V^{(n)}$ converge si $d^2Tk_2e^{k_1T} < 1$, comme $V^{(n)}(x,t) = \omega^{(n+1)}(x,t) - \omega^{(n)}(x,t)$, alors il s'ensuit que la suite $\left(\omega^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned} \omega^{(n)}(x,t) &= \sum_{k=0}^{n-1} V^{(k)} + \omega^{(0)}(x,t) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^{(k+1)}(x,t) - \omega^{(k)}(x,t)\right) + \omega^{(0)}(x,t), \end{aligned}$$

converge vers un élément $\omega \in W^{1,1}_\rho(Q)$.

Maintenant, pour prouver que cette fonction limite ω est une solution du problème considéré $(3.5.23)-(3.5.27)$, nous devons montrer que ω satisfait $(3.5.16)$ comme mentionné dans **la Définition 3.2**.

Pour le problème $(3.5.18)-(3.5.22)$, nous avons

$$H\left(\omega^{(n)}, \upsilon\right) = \left(\upsilon_x, \Im_x\left(\xi F\left(\xi, t, \omega^{(n-1)}, \omega_\xi^{(n-1)}\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)}. \tag{3.5.47}$$

De $(3.5.47)$, nous avons

$$\begin{aligned} & H\left(\omega^{(n)}-\omega, \upsilon\right)+H(\omega, \upsilon) \\ = & \left(\upsilon_x, \Im_x(\xi F\left(\xi, t, \omega^{(n-1)}, \omega_\xi^{(n-1)}\right)\right) \\ & -\Im_x \xi F\left(\xi, t, \omega, \omega_\xi\right)))_{L_\rho^2(\Omega)} \\ & +\left(\upsilon_x, \Im_x\left(\xi F\left(\xi, t, \omega, \omega_\xi\right)\right)\right)_{L_\rho^2(Q)} . \end{aligned} \tag{3.5.48}$$

Maintenant, à partir de l'équation différentielle partielle $(3.5.18)$, nous avons

$$\begin{aligned} & H\left(\omega^{(n)}-\omega, \upsilon\right) \\ = & \left(\upsilon_x, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L_\rho^2(Q)} \\ & -\left(\upsilon_x, \Im_x\left(\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L_\rho^2(Q)} \\ & -\left(\upsilon_x, \Im_x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(Q)} . \end{aligned} \tag{3.5.49}$$

En utilisant les conditions sur υ et ω, après quelques intégrations par parties de chaque terme à droite de $(3.5.49)$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\left(\upsilon_x, \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= & \int_Q x\upsilon_x.\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)dxdt \\
= & \int_0^a\left[x\upsilon_x.\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right]_0^T dx \\
& -\int_Q x\upsilon_{xt}.\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)dxdt \\
= & -\int_0^T\left[x\upsilon_t.\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right]_0^a dt \\
& +\int_Q x^2\upsilon_t.\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)dxdt \\
& +\int_Q \upsilon_t.\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)dxdt \\
= & \int_Q x^2\upsilon_t.\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)dxdt \\
& +\int_0^T\left[\Im_x\upsilon_t.\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right]_0^a dt \\
& -\int_Q x\Im_x\upsilon_t.\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)dxdt \\
= & \left(x\upsilon_t, \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
& -\left(\Im_x\upsilon_t, , \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2_\rho(Q)},
\end{aligned} \tag{3.5.50}$$

$$
\begin{aligned}
& -\left(\upsilon_x, \Im_x\left(\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
= & -\int_Q x\upsilon_x . \Im_x\left(\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right) dxdt \\
= & -\int_0^T \left[\int_Q x\upsilon . \Im_x\left(\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right]_0^a dt \\
& +\int_Q \upsilon . \Im_x\left(\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right) dxdt \\
& +\int_Q x^2\upsilon . \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\omega^{(n)}-\omega\right) dxdt \\
= & \int_0^T \left[\Im_x\upsilon . \Im_x\left(\xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right]_0^a dt \\
& -\int_Q x\Im_x\upsilon . \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\omega^{(n)}-\omega\right) dxdt \\
& +\int_0^T \left[x^2\upsilon . \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right]_0^a dt \\
& -2\int_Q x\upsilon . \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right) dxdt \\
& +\int_Q x^2\upsilon_x . \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right) dxdt \\
= & -\int_0^T \left[x\Im_x\upsilon . \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right]_0^a dt \\
& +\int_Q \Im_x\upsilon . \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right) dxdt \\
& +\int_Q x\upsilon . \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right) dxdt \\
& -2\int_Q x\upsilon . \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right) dxdt \\
& +\int_Q x^2\upsilon_x . \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right) dxdt \\
= & \left(\Im_x\upsilon, \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2(Q)} \\
& -\left(\upsilon, \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
& +\left(x\upsilon_x, \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2_\rho(Q)},
\end{aligned}
\tag{3.5.51}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\left(\upsilon_x, \Im_x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(Q)} \\
= & -\int_Q x\upsilon_x.\Im_x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right) dxdt \\
= & -\int_0^T \left[x\upsilon.\Im_x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right]_0^a dt \\
& +\int_Q \upsilon.\Im_x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right) dxdt \\
& +\int_Q x\upsilon.\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right) dxdt \\
= & \int_0^T \left[\Im_x\upsilon.\Im_x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right]_0^a dt \\
& -\int_Q \Im_x\upsilon.\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right) dxdt \\
& +\int_Q x\upsilon.\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right) dxdt \\
= & -\left(\Im_x\upsilon, \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2(Q)} \\
& +\left(\upsilon, \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2_\rho(Q)}. \qquad (3.5.52)
\end{aligned}
$$

Substituons $(3.5.50)-(3.5.52)$ dans $(3.5.49)$, on obtient

$$
\begin{aligned}
H\left(\omega^{(n)}-\omega, \upsilon\right) = & \left(x\upsilon_t, \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} - \left(\Im_x\upsilon_t, \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
& +\left(x\upsilon_x, \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2_\rho(Q)}. \qquad (3.5.53)
\end{aligned}
$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les termes du côté droit de $(3.5.53)$, on trouve

$$
\begin{aligned}
& \left(x\upsilon_t, \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq & \; a\left\|\upsilon_t\right\|_{L^2_\rho(Q)} \cdot \left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right\|_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.54)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\left(\Im_x\upsilon_t, \frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq & \left\|\Im_x\upsilon_t\right\|_{L^2_\rho(Q)} \cdot \left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right\|_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq & \; 2a\left\|\upsilon_t\right\|_{L^2_\rho(Q)} \cdot \left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right\|_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.55)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\left(x\upsilon_x, \frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq \quad & a\left\|\upsilon_x\right\|_{L^2_\rho(Q)} \cdot \left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right\|_{L^2_\rho(Q)}, \qquad (3.5.56)
\end{aligned}$$

Combinant l'inégalités $(3.5.53)-(3.5.56)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&H\left(\omega^{(n)}-\omega,\upsilon\right) \\
\leq \quad & 3a\left\|\upsilon_t\right\|_{L^2_\rho(Q)} \cdot \left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right\|_{L^2_\rho(Q)} \\
&+a\left\|\upsilon_x\right\|_{L^2_\rho(Q)} \cdot \left\|\frac{\partial}{\partial x}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right\|_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq \quad & 3a\left\|\upsilon_t\right\|_{L^2_\rho(Q)} \cdot \left\|\omega^{(n)}-\omega\right\|_{W^{1,1}_\rho(Q)} \\
&+3a\left\|\upsilon_x\right\|_{L^2_\rho(Q)} \cdot \left\|\omega^{(n)}-\omega\right\|_{W^{1,1}_\rho(Q)}.
\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\begin{aligned}
&H\left(\omega^{(n)}-\omega,\upsilon\right) \\
\leq \quad & 3a\left\|\omega^{(n)}-\omega\right\|_{W^{1,1}_\rho(Q)}\left(\left\|\upsilon_t\right\|_{L^2_\rho(Q)}+\left\|\upsilon_x\right\|_{L^2_\rho(Q)}\right), \qquad (3.5.57)
\end{aligned}$$

en d'autre part on a

$$\begin{aligned}
&\left(\upsilon_x, \Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega^{(n-1)},\omega_\xi^{(n-1)}\right)\right)-\Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega,\omega_\xi\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq \quad & a^{\frac{1}{2}}\left\|\upsilon_x\right\|_{L^2_\rho(Q)}\left\|\Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega^{(n-1)},\omega_\xi^{(n-1)}\right)\right)-\Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega,\omega_\xi\right)\right)\right\|_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq \quad & \frac{a^2}{\sqrt{2}}\left\|\upsilon_x\right\|_{L^2_\rho(Q)}\left\|F\left(x,t,\omega^{(n-1)},\omega_x^{(n-1)}\right)-F\left(x,t,\omega,\omega_x\right)\right\|_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq \quad & \frac{a^2 d}{\sqrt{2}}\left\|\upsilon_x\right\|_{L^2_\rho(Q)}\left\|\left(\omega^{(n-1)}-\omega\right)+\left(\omega_x^{(n-1)}-\omega_x\right)\right\|_{L^2_\rho(Q)} \\
\leq \quad & a^2 d\left\|\upsilon_x\right\|_{L^2_\rho(Q)}\left(\left\|\omega^{(n-1)}-\omega\right\|^2_{L^2_\rho(Q)}+\left\|\omega_x^{(n-1)}-\omega_x\right\|^2_{L^2_\rho(Q)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
\leq \quad & a^2 d\left\|\upsilon_x\right\|_{L^2_\rho(Q)}\left\|\omega^{(n-1)}-\omega\right\|^2_{W^{1,1}_\rho(Q)}. \qquad (3.5.58)
\end{aligned}$$

Prenons en compte $(3.5.57)$ et $(3.5.58)$, et par passage à la limite quand $n \to \infty$ dans $(3.5.53)$ nous obtenons

$$H(\omega,\upsilon) = \left(\upsilon_x, \Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega,\omega_\xi\right)\right)\right)_{L^2_\rho(Q)}.$$

Ainsi, nous avons prouvé ce qui suit ■

Théorème 3.4 *Supposons que la condition* (B) *est satisfaite, et tel que* $d < \frac{1}{\sqrt{Tk_2}} e^{-\frac{k_1 T}{2}}$, *alors le problème* $(3.5.7) - (3.5.11)$ *admet une solution faible unique appartient à* $W_\rho^{1,1}(Q)$.

Il reste maintenant à prouver l'unicité de la solution du problème $(3.5.7) - (3.5.11)$.

Théorème 3.5 *Si la condition* (B) *est satisfaite, alors le problème* $(3.5.7) - (3.5.11)$ *admet une solution unique.*

Preuve. On suppose que $\omega_1, \omega_2 \in W_\rho^{1,1}(Q)$ sont deux solutions du problème $(3.5.7) - (3.5.11)$, alors $V = \omega_1 - \omega_2 \in W_\rho^{1,1}(Q)$ et satisfait

$$V_{tt} - V_{xx} - \frac{1}{x} V_x = \sigma(x,t). \tag{3.5.59}$$

$$V(x,0) = 0, \tag{3.5.60}$$

$$V_t(x,0) = 0, \tag{3.5.61}$$

$$V(a,t) = 0, \tag{3.5.62}$$

$$\int_0^t V dx = 0, \tag{3.5.63}$$

où

$$\sigma(x,t) = F\left(x, t, \omega_1, \frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right) - F\left(x, t, \omega_2, \frac{\partial \omega_1}{\partial x}\right).$$

Considérons le produit scalaire dans $L_\rho^2(Q)$, de l'équation différentielle $(3.5.59)$ et **l'opérateur intégro-difféentielles**

$$MV = V_t - (\tau - t) \int_0^t \Im_x (\xi V_\xi)(x,s)\, ds.$$

Nous suivons la même procédure utilisée pour demontrer le Lemme 3.5.3, on a

$$\|V\|_{W_\rho^{1,1}(Q)} \leq k \|V\|_{W_\rho^{1,1}(Q)}. \tag{3.5.64}$$

D'où

$$k = d\sqrt{Tk_2} e^{\frac{k_1 T}{2}},$$

avec

$$\begin{aligned} k_1 &= \max\left\{2aT^2 + \frac{aT^4}{2}, a^3 + 2\right\}, \\ k_2 &= a^3 + 2. \end{aligned}$$

comme $k < 1$, on déduit de $(3.5.64)$ que

$$(1-k)\|V\|_{W_\rho^{1,1}(Q)} = 0.$$

Ce qui implique que $V = \omega_1 - \omega_2 = 0$, par conséquent $\omega_1 = \omega_2 \in W_{\rho}^{1,1}(Q)$.
Ceci termine la démonstration du Théorème 3.5. Ainsi, nous avons prouvé l'unicité de la solution du problème $(3.5.7) - (3.5.11)$.

■

Conclusion

Ce mémoire est consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité de deux problèmes par la méthode des inégalité énergétique. Malgré sa complexité et difficultés dans le choix de multiplicateur Mu et les espaces fonctionnelles, nous avons pu établir l'existence et l'unicité et la dépendance continue du solution par rapport les donnés initiales de ces problèmes proposées.

Bibliographie

[1] Aldashev A. , A priori estimates for Tricomi and Darboux problems,Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 19, N 6, 985-991, (1983).

[2] Beilin S. A., Existence of solutions for a one-dimensional wave equation with nonlocal conditions, Electron. J. Diff. Eqns. 76 (2001), 1–8.

[3] Benouar N. E. and Yurchuk N. I., Mixed problem with an integral condition for parabolic equations with the Bessel operator,Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 27, N 12, 2094–2098, (1991).

[4] Benouar N. E., Problèmes aux limites pour une classe d'équations composites, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris,Vol. 319, Série I, 953–958, (1994).

[5] Bouziani A., A mixed problem for certain nonclassical equations with a small parameter, Bulletin de la Classe des Sciences, Académie Royale de Belgique, 1– 6, (1996).

[6] Cannon, R. : The solution of heat equation subject to the specification of energy. Q. Appl. Math. 21(2),155–160 (1963).

[7] Bouziani A., A mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation, J. Apll. Math. Stochastic Anal. 9(1996), 323–330.

[8] Cannon J. R. and Van der Hoek J., An implicit nite difference scheme for the diffusion of mass in a portion of the domain, Nu-merical solutions of partial differential equations (J. Noye, Ed), North-Holland, Amsterdam, (1982), 527–539.

[9] Cannon J. R. and Van der Hoek J., The existence and the continuous dependence for the solution of the heat equation subject to the speci cation of energy, Boll. Uni. Math. Ital. Suppl., 1(1981), 253–282.

[10] Cannon J. R., The solution of heat equation subject to the speci-cation of energy, Quart. Appl. Math., Vol 21 N°2 (1963), 155–160.

[11] Canon J.R., Esteva S.P, and Van der Hoek J., A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the speci cation of mass, SIAM Numer. Anal. 24 (1987), 499–515.

[12] Garding L., Cauchy's problem for hyperbolic equations, Mimeogr.Lecture Notes,University of Chicago, Chicago, 1958.

[13] Lonkin I., Solutions of a boundary value problem in heat conduction theory with nonclassical boundary conditions, Diff. Uravn.13 (1977), 1177–1182.

[14] Kamynin N. I., A boundary value problem in the theory of heat conduction with a non classical boundary conditions, TH., Vychisl.,Mat., Fiz. 43 N°6 (1964), 1006–1024.

[15] Kislov N. V. , Boundary-value problems for operational differential equations of mixed type, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 19,N°8, 1427–1436, (1983).

[16] Lonkin, N.I. : Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonclassical

boundary conditions. Differ. Uravn. 13(2), 1177–1182 (1977).

[17] Korzyuk V. I. and Dainyak V., A weak solution of a Dirichlet type problem for a third order nonclassical linear differential equation,Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 28, N°6, 1056–1066, (1992).

[18] Korzyuk V. I. and Yurchuk N. I., The conjugation of nonstationary abstract linear differential equations, Differential Equations, Vol.7, N°9, 1239–1245, (1974).

[19] Korzyuk V. I., The problem of conjugate equations of hyperbolic and parabolic, Differential Equations, Vol. 4, N°10, 955–961,(1968).

[20] Ladyzhenskaya O. A., Sur les problèmes aux limites fondamentaux liés aux équations paraboliques et hyperboliques, Dokl. Acad.Scien. URSS, Vol. 97, N°3, 395–398, (1954).

[21] Lax P., On Cauchy's problem for hyperbolic equation and the differentiability of solutions of elliptic equations. Comm. Pure and Appl. Math., Vol. 8, 615–633, (1955).

[22] Leray J., Lectures on hyperbolic differential equations with variable coef cients. Princeton, Just for Adv. study, (1952).

[23] Mesloub and Bouziani A., Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with Bessel operator, J. Appl.Math. Stochastic. Anal 15 (2002) No 3, 291–300.

[24] Mesloub S. and Bouziani A., Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations, J. Appl. Math.1 :3 (2001) 107–116.

[25] Mesloub S. and Bouziani A., On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, Internat. J. Math. & Math. Sci. Vol 22. N°3 511–519, (1999).

[26] Mesloub S., Bouziani A., and Kechkar N, A strong solution of an evaluation problem with integral conditions, Georgian Mathematical Journal, Vol. 9, No.1‘(2002), 149–159.

[27] Mesloub S. and Lekrine N., On a nonlocal hyperbolic mixed problem,Acta Sci. Math. (Szeged) 70 (2004), 65–75.

[28] Mesloub S. and S. A. Messaoudi, A nonlocal mixed semilinear problem for second hyperbolic equations, Electron. J. Diff. eqns,Vol. 2003, No. 30, pp. 1–17.

[29] Mesloub S. and S. A Messaoudi ., A three point boundary value problem for a hyperbolic equation with a nonlocal condition, J.Diff. eqns, Vol. 2002, No. 62, pp. 1–13.

[30] Mesloub S. and S. A Messaoudi., On a system of linear thermoelasticity with the Bessel operator, Matematick Vesnick, 57(2005),19–26.

[31] Mesloub S. and Mezhoudi, A mixed problem for a parabolic equation oh higher order with integral conditions, Bulletin of the Polish Academy of Sciences Mathematics, Vol. 50, No. 3, (2002), 13–22.

[32] Mesloub S., A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pluriparabolic equation, J. Math. Anal. 316 (2006) 189–209.

[33] Mesloub S., On a nonlocal problem for a pluriparabolic equation,Acta Sci. Math. (Szeged) 67 (2001), 203–219.

[34] Muravei L. A. and Philinovskii A. V., On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation, Matem. zametki 54(1993), 98–116.

[35] Pulkina L. S., A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations, Electron. J. Diff. Eqns. 45 (1999), 1– 6.

[36] Pulkina L. S., On solvability in L2 of nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, Differents. Uravn. 2 (2000).

[37] Samarskii A. A , Some problems in differential equations theory,Differentsial'nye Uravnenya 16 N°11 (1980), 1221–1228.

[38] Shi P., Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint, Siam. J. Math. Anal. 24 N°1 (1993), 46–58.

[39] Shi P. and Shillor M., design of contact patterns in one dimensional thermoelasticity in theoretical aspects of industrial design,Society for industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1992).

[40] Yurchuk N.I., Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, Differentsial'nye Uravneniya, Vol. 22 # 19 (1986), 2117–2126.