



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique

Université Larbi Tébessi -Tébessa-
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la
Nature et de la Vie*

Département : Sciences de la Matière



N d'ordre :.....

Série :.....

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat 3^{ème} Cycle

Option : *Physique de la Matière Condensée*

Thème

Les oscillateurs bosoniques relativistes en présence des défauts topologiques : cas de la corde cosmique

Présenté par :

Nadjette Messai

Devant le jury

Pr. Abdelmalek Boumali	Rapporteur	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>
Pr. Faïçal Chemam	Président	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>
Pr. Mahmoud Merad	Examineur	<i>Université Larbi Ben Mhidi, Oum el Bouaghi</i>
Pr. Mohamed Tayeb Meftah	Examineur	<i>Université Kasdi Merbah Ouargla</i>
Pr. Boutheina Boutabia-Chéraitia	Examineur	<i>Université de Annaba</i>
Pr. Mohamed Loutfi Benkheldir	Examineur	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>
Pr. Lyazid Chetouani	Invité	<i>Université de Constantine</i>

Date de Soutenance : 20/05/2017

© *Mémoire effectué au
Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique*



**Les oscillateurs bosoniques relativistes en présence des
défauts topologiques : cas de la corde cosmique**

Messai Nadjette

ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة تأثير الحقول الثقالية الناتجة عن العيوب الطوبولوجية مثل الحبال الكونية على الهزازات النسبية البوزونية و هذا بتواجد حقل مغناطيسي منتظم و كمونات سلمية. كل الحلول الناتجة نوقشت و درس تأثير مثل هذه العيوب على الحلول الذاتية للمسألة.

Abstract

In this these, we study the influence of the gravitational fields produced by a topological defect such as cosmic string space–time on a relativistic oscillator in the presence of a uniform magnetic field, and in the presence of scalar potentials. We present the eigensolutions of our problem in question and analyze the influence of cosmic string space–time on the eigenvalues.

Résumé

Dans cette thèse, nous avons étudiés l'influence des champs gravitationnels produits par un défaut topologique tels que la corde cosmique, sur les oscillateurs relativistes bosoniques en présence d'un champ magnétique uniforme et des potentiels scalaires. L'influence de ce défaut sur les solutions propres a été bien analysée.

Dédicace

*A ma mère et mon père ,
A mon mari Abdelhakim ,
A mes sœurs ,
A mes frères ,
A ma famille ,
A tout mes amis ,
A tout mes collègues ,
Et à tout mes enseignants ,
Et Spécialement mon encadreur Professeur Boumali Abdelmalek ,*

Je dédie cet humble travail.

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet de fin d'études, pour obtenir le diplôme de Doctorat 3eme Cycle en Physique de la matière condensée à l'université de Larbi Tébessi-Tébessa-. Avant tout, je remercie ALLAH tout puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail. Et d'une façon toute particulière, je remercie mes chers parents pour leur patience et le bonheur qui nous ont apporté.

Je tiens à remercier mon encadreur le Professeur Abdelmalek Boumali pour m'avoir proposer mon sujet qui est aussi intéressant et riche. Je suis très reconnaissant tout particulièrement pour la confiance qu'il m'a témoignée et la liberté qui m'a laissé.

J'exprime mes remerciements à Monsieur. Chemam faïçal Professeur à l'Université de Larbi-Tébessi -Tébessa-, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de ma thèse.

Je remercie vivement Monsieur Merad Mahmoud, Professeur à l'Université Larbi Ben Mhidi, Dum el Bouaghi d'avoir accepté de participer à ce jury de thèse et de juger ce travail.

Je tiens également à remercier Mme Bouthaina Boutabia-Chéraitia, Professeur à l'Université de Annaba, de l'intérêt qu'elle a témoigné pour mon travail, ainsi que d'avoir bien voulu de participer au jury de thèse .

Je suis très honorée par la présence de Monsieur. Mohamed Tagueb Meftah, Professeur à l'Université Kasdi Merbah Ouargla, dans le jury de ma thèse. Je voudrais lui assurer toute ma gratitude

Je remercie vivement Monsieur. Lyazid Chetouani Professeur à l'Université de Constantine, qui m'a fait l'honneur de participer au Jury de soutenance ; je le remercie profondément.

Je remercie Monsieur. Benkhedir Mohamed-Loutfi Professeur à l'Université de

Larbi-Tébessi -Tébessa-, qui a accepté d'être examinateur de cette thèse.

je remercie tout particulièrement mon mari Abdelhakim, pour sa patience, son encouragement, et son soutien moral tout au long de ce travail.

Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux nombreuses personnes qui nous ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse. Nous remercions aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadré, observé, aidé, conseillé et même supporté. Enfin, on souhaite exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui bien en marge de ce travail, ont contribué largement à son aboutissement. Que ce soit depuis toujours, depuis plusieurs années ou quelques mois seulement, nombreux sont ceux et ceux qui ont participé à notre épanouissement. On les remercie sincèrement.

Table des matières

ملخص	i
Abstract	ii
Résumé	iii
Dédicace	iv
Remerciements	v
Liste des Tableaux	ix
Liste des Figures	x
Liste des symboles	xiii
Les Chapitres	
Introduction	1
Les Chapitres	
1 Les équations relativistes dans un espace-temps courbé	5
1.1 Formalisme	5

1.1.1	La Méthode de Vierbein	6
1.1.2	La Méthode des Repères Mobiles	6
1.2	Les équations relativistes dans un espace courbé	7
1.2.1	L'équation de Klein-Gordon dans un espace plat	8
1.2.2	L'équation de Klein-Gordon dans un espace courbé	10
1.2.3	L'équation de Dirac dans un espace-temps plat	10
1.2.4	L'équation de Dirac dans un espace-temps courbé	12
1.2.5	L'équation de Kemmer dans un espace-temps plat	12
1.2.6	L'équation de Kemmer dans un espace-temps courbé	14
2	Les oscillateurs relativistes bosoniques dans un espace-temps plat	15
2.1	L'oscillateur bidimensionnel de Klein-Gordon	15
2.2	L'oscillateur bidimensionnel de DKP	16
2.2.1	Cas d'un photon massif	16
2.2.2	Cas d'une seule particule bosonique	19
2.2.2.1	Particule de spin-0	19
2.2.2.2	Particule de spin-1	20
3	Les oscillateurs relativistes bosoniques en présence d'une corde cosmique	22
3.1	La corde cosmique	22
3.2	Les solutions propres	23
3.2.1	L'oscillateur de KG	25
3.2.1.1	En absence du champ magnétique	25
3.2.1.2	En présence d'un champ magnétique externe	27
3.2.1.3	En présence d'un potentiel scalaire	29
3.2.2	L'oscillateur de DKP	34
3.2.2.1	Photon massif	34
3.2.2.2	Cas d'une seule particule bosonique simple	40
	Conclusion	53

Bibliographie	57
Les Annexes	64
A La méthode de Nikiforov-Uvarov (NU)	64
B L'oscillateur de Dirac (DO)	66
B.1 Interprétation physique	66
B.2 Les solutions en présence d'une corde cosmique	68
B.2.1 En absence d'un champ magnétique externe	68
B.2.2 En présence d'un champ magnétique externe	70
C Les matrices β de l'équation de DKP dans un espace-temps de Minkowsk	72
C.1 Particule de spin-0	72
C.2 Particule de spin-1	73
D Liste des articles	74

Liste des tableaux

Table	page
Table	page

Liste des Figures

Figure	page
Figure	page
3.1 Représentation d'une corde cosmique.	24
3.2 Simulation des cordes cosmiques par des vortex.	24

Nomenclature

j^μ Le quadricourant

A^ν Le quadripotentiel

H_D L'Hamiltonien de Dirac

ψ_{DKP} La fonction d'onde de l'équation DKP

\square Le dalembertien

(DO) L'oscillateur de Dirac

$H_n(x)$ La Fonction de Hermite

DKP L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau

β Les matrices de Kemmer

$\vec{\alpha}$ Les matrices de Dirac

Δ Laplacien

ψ_{KG} La fonction d'onde de Klein-Gordon

ψ_D La fonction d'onde de Dirac

ψ_K La fonction d'onde de Kemmer

$H(\zeta)$ La fonction confluyente de Heun

η_b^a La métrique de l'espace Minkowskien

$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ Symboles de Christoffel

e_μ^a les tétrades de l'espace

$g_{\mu\nu}$ Le tenseur fondamental

(*KGO*) L'oscillateur de Klein-Gordon

$\vec{\gamma}$ Les matrices gamma de Dirac

Introduction

L'oscillateur harmonique est un outil de base en physique depuis de nombreux siècles. La pleine importance de l'oscillateur harmonique comme un outil de base pour le développement de la physique théorique est probablement apparu avec la naissance de la mécanique quantique. C'était le premier exemple auquel s'appliquaient les règles de quantification, et depuis lors ses spectres, ses fonctions d'onde, ses symétries, et bientôt, ont eu d'innombrables applications non seulement dans les calculs directs, mais aussi comme un modèle pour mieux comprendre des problèmes plus complexes [1].

Dans une tentative de réconcilier la mécanique quantique avec la relativité, Dirac a proposé de linéariser l'équation de Klein Gordon (KG) des particules libres, en se basant sur la relation relativiste quadratique entre l'énergie et la quantité de mouvement. Il a bien obtenu une équation relativiste de premier ordre par rapport au temps décrivant ainsi le mouvement d'une particule de spin-1/2, tels que l'électron. L'introduction de l'interaction électromagnétique dans cette équation, lui a conduit de faire un traitement relativiste de l'atome d'hydrogène. En 1989, Moshinsky et Szczepaniak [2] ont proposé d'écrire l'oscillateur harmonique, pour le cas des particules relativiste de spin 1/2, dans une autre forme linéaire par rapport aux coordonnées et aux moments. Cette idée a donné naissance à l'oscillateur de Dirac car, dans la limite non-relativiste, cet oscillateur devient un oscillateur harmonique avec un terme de couplage spin-orbite très fort. Dans ce sens, et à l'opposé de l'équation de Dirac pour le cas de l'atome d'hydrogène, l'oscillateur de Di-

rac est devenu un modèle théorique motivant jusqu'à l'apparition d'une récente réalisation expérimentale de cet oscillateur basant sur de micro-ondes [3]. Elle a été présentée en s'appuyant sur un système de contrainte "tight-binding system", ouvrant ainsi un nouveau champ d'investigation. [4].

L'un des problèmes les plus intéressants de la physique théorique est le lien entre la mécanique quantique et la gravité depuis l'étude du cas d'une particule quantique non relativiste en présence d'une gravitation constante [5]. L'étude des systèmes quantiques dans un espace-temps courbé remonte à la fin des années 1920 et au début des années 1930 [6--8]. Motivé par l'idée de construire une théorie combinant la mécanique quantique avec la relativité générale, l'extension des équations de Schrödinger et de Dirac aux espaces courbés a été bien mis en évidence. La compréhension de l'interaction entre les particules relativistes et la gravité se fait bien en résolvant leurs équations de mouvement. Ces solutions sont des outils précieux pour l'examen et l'amélioration des méthodes numériques pour des modèles afin de résoudre des problèmes physiques complexes. Par exemple, les recherches ont montré que les niveaux d'énergie d'un atome placé dans un champ de gravitation, sont modifiés en raison d'interaction de l'atome avec la courbure de l'espace-temps.

Récemment, l'interaction des particules avec un champ gravitationnel produit par des défauts topologiques est devenue un domaine de recherche très actif, et a fait l'objet de plusieurs études récentes [9--33]. Selon les concepts modernes de la physique théorique, les défauts topologiques ont été formés par la transition de phase de vide dans l'univers primitif. Ces défauts se manifestent en des parois de domaines, cordes cosmiques et des monopôles [27]. Parmi eux, les cordes cosmiques ont attiré beaucoup d'attention en physique des particules, spécialement en cosmologie et astrophysique où les effets gravitationnels jouent un rôle important [21, 27, 34]. Ces cordes ne produisent pas l'interaction gravitationnelle locale mais elles modifient la géométrie de l'espace-temps. Ce sont des défauts linéaires, et l'espace-temps lié à ces cordes cosmiques est localement plane et globalement conique.

L'oscillateur Dirac (DO) est l'un des systèmes quantiques les plus importants. Il a été étudié par Ito et al [35] pour la première fois. D'autre part, Moshinsky et Szczepaniak [2] ont été les premiers qui ont introduit un terme intéressant dans l'équation de Dirac. Plus précisément, ils ont suggéré la substitution, dans l'équation de Dirac libre, l'opérateur

d'impulsion \vec{p} par $\vec{p} - im\beta\omega\vec{r}$, avec \vec{r} étant le vecteur de position, m la masse de la particule et ω la fréquence de l'oscillateur. Les états d'énergies positive de cet oscillateur sont similaire à ceux de l'oscillateur harmonique non relativiste. Physiquement, cet oscillateur peut être interprété comme l'interaction d'un moment magnétique avec un champ électrique linéaire [36]. Le potentiel électromagnétique, associé à cet oscillateur a été trouvé par Benitez et al [37, 38]. L'oscillateur Dirac a suscité beaucoup d'intérêt à la fois parce qu'il fournit l'un des rares exemples exactement soluble, et qu'il a de nombreuses applications physiques. Citons par exemple, le lien de l'oscillateur de Dirac avec l'optique quantique, plus précisément avec le modèle de Jaynes Cummings [39, 40], l'effet Ramsey-interférométrie [41], l'existence des transitions de phase quantique [42, 43]. Bruce et Minning [44] ont étendu cet oscillateur pour le cas des particules bosoniques : un modèle relativiste de l'oscillateur harmonique a également été proposé, pour une particule scalaire, en se basant sur l'oscillateur de Dirac. Ces auteurs ont montré qu'un couplage analogue à un couplage linéaire de l'oscillateur de Dirac peut être introduit dans l'équation de KG d'une manière qu'on peut retrouver l'équation de Schrödinger d'un oscillateur harmonique dans la limite non relativiste. Ce couplage proposé par Bruce et Minning [44] est connu par l'oscillateur de KG [44--47].

L'équation relativiste de premier ordre du Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) [48--50] est une équation décrivant les particules de spin-0 et de spin-1. Elle a été utilisée pour analyser les interactions relativistes des hadrons avec des noyaux : les résultats trouvés sont en bon accord avec les données trouvées par l'expérience. Une question importante liée à l'équation DKP concerne son équivalence avec les théories fondées sur les équations de second ordre de KG et Proca [51, 52]. Dans les années 1970, cette équivalence supposée était question pour plusieurs situations, montre que, dans certains cas, les deux théories de DKP et KG peuvent donner des résultats différents. De plus, en présence d'une d'interaction, l'équation de DKP semble être plus riche que celle de l'équation de KG. Dans ce contexte, on peut citer les modèles, à base de l'équation de DKP, qui ont été proposées afin d'étudier les interactions meson-noyau : les résultats trouvés montrent que l'équation de DKP donne un ajustement meilleur pour des données expérimentales par rapport à celui trouvé en utilisant l'équation de KG. Dans le même sens, les techniques d'approximation développées dans le

cadre de la diffusion nucléon-noyau ont été généralisées, ce qui avaient données une bonne description des résultats expérimentaux sur la diffusion meson-noyau [53]. La diffusion du noyau de deutéron, l'interaction mésonique et le modèle relativiste de π -noyau de la diffusion élastique ont été également étudiées à la base de l'équation de DKP [54--56], l'oscillateur de Kemmer bidimensionnelle [57], l'équation de DKP avec une interaction dépendant du temps [58], l'oscillateur de DKP avec l'algèbre de Synder deSitter [59], et enfin en présence de plusieurs type d'interactions [20, 47, 55, 56, 60--74].

L'étude de l'équation de DKP dans un espace-temps courbé n'a pas bien été traités dans la littérature contrairement au cas de l'espace-temps plat . Dans ce sens, on peut voir que peu des travaux, concernant le mouvement des oscillateurs relativistes dans un espace-temps courbé, existent [9--13, 15, 20, 32, 75--82].

Dans ce contexte, notre contribution s'insère à la détermination des solutions des oscillateurs relativistes bosoniques en présence des défauts topologiques , spécialement les cordes cosmiques. En premier lieu, nous considerons les trois types d'oscillateurs pour le cas d'un espace-temps plat (espace de Minkowski). Ensuite nous étendons cette étude au cas d'un espace-temps courbé : cet espace est caractérisé par la présence d'une corde cosmique.

Cette thèse comporte trois chapitre de la façon suivante : dans le premier chapitre, on fait un bref rappel sur les équations relativistes bien connues tels que l'équation de KG, l'équation de Dirac, et enfin l'équation de DKP dans les deux types d'espaces. Le deuxième chapitre est consacré aux comportements des oscillateurs relativistes dans un espace-temps plat . Le troisième chapitre discute ce comportement dans un espace-temps courbé et précisément en présence d'une corde cosmique. Enfin, nous terminons notre étude par une conclusion globale.

Notons ici que cette thèse a été rédigée en utilisant \LaTeX par le biais du logiciel Lyx (www.lyx.org). La classe utilisée ici a été proposée par *M. Boumali Abdelmalek*.

Les équations relativistes dans un espace-temps courbé

في هذا الفصل سنقوم بكتابة معادلات الحركة الثلاث داخل فضاء منحنى .

1.1 Formalisme

La courbure dépend essentiellement de la métrique qui définit bien les propriétés géométriques de l'espace [5, 83, 84]. Cette métrique est introduite via les tétrades de l'espace en question $\{e_\mu^a, e_\nu^b\}$ comme suit :

$$g_{\mu\nu}(x) = e_\mu^a(x) e_\nu^b(x) \eta_{ab}, \quad (1.1)$$

avec $\eta_{ab} = \eta^{ab} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$ est le tenseur métrique de l'espace de Minkowski et $g_{\mu\nu}$ de l'espace courbé en question. Le tenseur $g_{\mu\nu}$ peut aussi définir la longueur infinitésimal ds^2 comme suit :

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (1.2)$$

où dx^μ sont les vecteurs de base de l'espace dual. Notons ici que la liaison des deux tenseurs η_{ab} et $g_{\mu\nu}$, se fait par l'intermédiaire des connections qui assurent le transport parallèle des vecteurs au long d'une courbe sans changer sa direction. Ces derniers peuvent être calculer via deux méthodes : (i) la première dite la méthode de Vierbein (aussi appelé référentiel de Lorentz), et la (ii) deuxième méthode se base sur les repères mobiles .

1.1.1 La Méthode de Vierbein

Commençons par le calcul de la dérivée covariante du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ [84, 85]

$$\nabla_{\mu} g_{\nu\lambda} = \nabla_{\mu} (e_{\nu}^a e_{\lambda}^b \eta_{ab}) = (\nabla_{\mu} e_{\nu}^a) e_{\lambda}^b \eta_{ab} + e_{\nu}^a (\nabla_{\mu} e_{\lambda}^b) \eta_{ab} = 0. \quad (1.3)$$

avec $\nabla_{\mu} \eta_{ab} = 0$ dans un espace plat. La permutation des indices de l'équation précédente donne

$$\nabla_{\rho} g_{\mu\nu} = \partial_{\rho} g_{\mu\nu} - \Gamma_{\rho\mu}^{\lambda} g_{\lambda\nu} - \Gamma_{\rho\nu}^{\lambda} g_{\mu\lambda}. \quad (1.4)$$

dont $\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}$ est la connexion affine (aussi nommée symboles de Christoffel). Elle est définie par :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}). \quad (1.5)$$

Un autre paramètre pertinent d'un espace courbé est le tenseur de courbure de Riemann : ce dernier a la forme suivante :

$$R_{\lambda\mu\nu}^k = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\lambda}^k - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^k + \Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\eta}^k - \Gamma_{\mu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^k. \quad (1.6)$$

Son contraction par rapport aux indices (k, λ) , c-à-d ;

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu k \nu}^k, \quad (1.7)$$

donne

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (1.8)$$

qui est le scalaire de Ricci .

1.1.2 La Méthode des Repères Mobiles

La notion des repères mobiles a été élaborée par Elie Cartan qui explora l'utilisation des formes différentielles pour calculer les coefficients de connexion ainsi que la courbure sans recourt à la détermination des symboles de Christoffel : en chaque point de l'espace-temps on attribue un repère local orthonormé dont les vecteurs de base sont e_a qui sont écrites avec des indices latins (a, b) . Dans ces repères, la métrique est de type Minkowskien, η^{ab}

. Ces vecteurs ont des coordonnées e_a^μ par rapport aux repères naturels définis par les vecteurs e_μ avec des indices grecs (μ, ν) . Soit $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ les formes différentielles de degré 1 données par

$$\omega^a = e_\mu^a(x^\nu) dx^\mu, \quad (1.9)$$

ou

$$ds^2 = \eta_{ab} \omega^a \omega^b. \quad (1.10)$$

La différentiation absolue d'un vecteur A est définie par :

$$DA^a = dA^a + \omega_b^a A^b. \quad (1.11)$$

que l'on peut définir dans une forme différentielle avec

$$dA \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.12)$$

On définit la dérivée extérieure \wedge par :

$$A \wedge B = A_\mu B_\nu - A_\nu B_\mu. \quad (1.13)$$

Un autre facteur important pour le cas d'un espace courbé c'est la notion de torsion : elle est écrite de manière concise en termes de l'espace et de connexion de spin par :

$$T^a = de^a + \omega_b^a \wedge e^b. \quad (1.14)$$

Cette dernière forme peut aussi être écrite explicitement en fonction de connexion affine par

$$T_{\mu\nu}^\lambda = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \quad (1.15)$$

L'annihilation de la torsion nous conduit à une équation bien connue, c'est l'équation de Maurer-Cartan dont :

$$de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0. \quad (1.16)$$

1.2 Les équations relativistes dans un espace courbé

1.2.1 L'équation de Klein-Gordon dans un espace plat

En Mécanique quantique non relativiste, on peut établir l'équation de Schrödinger en appliquant le principe de correspondance [86]

$$p^i \mapsto -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (1.17)$$

$$E \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial t}. \quad (1.18)$$

Ce principe nous permis d'écrire l'équation de Schrödinger d'une particule massive non relativiste par la forme suivante :

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \hbar^2 \frac{\Delta}{2m} \right) \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.19)$$

Pour le cas d'une particule relativiste libre dont l'énergie est donnée par

$$E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4,$$

son équation de mouvement sera alors

$$(\hbar^2 \hat{\square} + m^2 c^2) \psi = 0, \quad (1.20)$$

où $\hat{\square} = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta$ est le vecteur D'Alembertien (à partir de maintenant, nous adoptons les unités naturelles $\hbar = c = 1$). C'est l'équation libre de KG . En formulation covariante elle s'écrit comme suit :

$$\{ \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \} \psi(x) = 0. \quad (1.21)$$

L'introduction d'une interaction électromagnétique se fait par le biais de la procédure du couplage minimale . Ce dernier transforme P^μ en

$$P^\mu - eA^\mu \text{ ou } \partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + ieA^\mu, \quad (1.22)$$

dont le quadripotential A^μ est défini par

$$A^\mu = (A^0, A^i) = (\varphi, \vec{A}). \quad (1.23)$$

Dans ce cas, l'équation (1.21) devient

$$\{(\partial_\mu + ieA_\mu)(\partial^\mu + ieA^\mu) + m^2\} \psi = 0. \quad (1.24)$$

L'équation conjugué de l'équation de KG (1.21) est :

$$\psi^*(x) \{\partial_\mu \partial^\mu + m^2\} = 0. \quad (1.25)$$

En multipliant l'équation (1.21) à gauche par ψ^* et l'équation (1.25) à droite par ψ on obtient

$$\psi^*(x) \partial_\mu \partial^\mu \psi(x) = -m^2 \psi^*(x) \psi(x), \quad (1.26)$$

$$\psi(x) \partial_\mu \partial^\mu \psi^*(x) = -m^2 \psi(x) \psi^*(x). \quad (1.27)$$

Par soustraction des deux équations, on trouve

$$\partial_\mu \{\psi^*(x) \partial^\mu \psi(x) - \psi(x) \partial^\mu \psi^*(x)\} = 0 \Leftrightarrow \partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.28)$$

dont

$$J^\mu = \psi^*(x) \partial^\mu \psi(x) - \psi(x) \partial^\mu \psi^*(x) = \left(\rho, \vec{J}\right), \quad (1.29)$$

est le quadricourant. Cette dernière équation définit l'équation de continuité

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (1.30)$$

avec ici

$$\rho(x, t) = \psi^*(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} - \psi(x) \frac{\partial \psi^*(x)}{\partial t}. \quad (1.31)$$

Il y'a un problème avec cette expression : A un moment donné t , $\psi(x)$ et $\frac{\partial \psi(x)}{\partial t}$ peuvent avoir des valeurs arbitraires ; donc, $\rho(x, t)$ peut être positive ou négative. Par conséquent, $\rho(x, t)$ n'est définie positive. La raison de ce problème est que l'équation KG est une équation différentielle de second ordre par rapport au temps. Passons maintenant au cas d'un espace courbé.

1.2.2 L'équation de Klein-Gordon dans un espace courbé

L'équation libre de KG dans un espace courbé est donnée par la relation suivante :

$$(D^2 - \xi R - m^2) \psi = 0, \quad (1.32)$$

où l'opérateur D^2 , représentant le Dalemberdien dans un espace courbé, est défini par

$$D^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \quad (1.33)$$

$g = \det(g_{\mu\nu})$, R est le scalaire de Ricci, et ξ est une constant de couplage : elle vaut 0 pour le couplage minimal, et $\frac{1}{6}$ pour le couplage conformationnel. Dans ce qui suit, nous mettons $\xi = 0$. En introduisant une interaction électromagnétique, l'équation (1.32) devient :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + ieA_\mu) \sqrt{-g} g^{\mu\nu} ((\partial_\nu + ieA_\nu)) - m^2 \right] \psi = 0. \quad (1.34)$$

1.2.3 L'équation de Dirac dans un espace-temps plat

D'après (1.20) l'équation de KG est une équation relativiste du second ordre admettant une probabilité qui peut être négative(1.31) [86]. Pour cela Dirac proposa une équation relativiste covariante linéaire par rapport à l'impulsion. Il considéra sa forme comme suite

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = (-i \vec{\alpha} \cdot \vec{grad} + m\beta) \psi$$

$$E = \sum_{i=1}^3 \alpha_i p_i + \beta m \equiv \alpha \cdot p + \beta m, \quad (1.35)$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et β sont des matrices hermitiennes de rang N pair, au minimum égal à 4, qui sont vérifiées les relations d'anticommutation suivants

$$\begin{aligned} \alpha_i^2 &= 1 \\ \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, i \neq j \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= \{\alpha_i, \beta\} = 0 \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned}, \quad (1.36)$$

Ces derniers appelés matrices de Dirac ; ils ont la forme

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

où σ_i sont les matrices de Pauli satisfaisant à (1.36). La fonction d'onde ψ est alors un spineur de rang 4 de la forme suivante

$$\psi(\vec{r}, t) = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4)^T. \quad (1.38)$$

Écrivons maintenant l'équation de Dirac sous forme covariante en introduisant

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= -\gamma_0 = \beta \\ \gamma^i &= \gamma_i = \gamma^0 \alpha_i, \end{aligned} \quad (1.39)$$

qui conduit à

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.40)$$

Réécrivons ainsi les relations (1.36) comme suit :

$$\begin{aligned} \{\gamma^0, \gamma^0\} &= 2(\gamma^0)^2 = 2 \times 1_{4 \times 4}, \\ \{\gamma^0, \gamma^i\} &= 0, \\ \{\gamma^i, \gamma^j\} &= 0, i \neq j, \\ \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

Utilisons la transformation (1.22) on obtient

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m] \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.42)$$

Multiplions l'équation de Dirac à gauche par γ^0

$$\left[i\frac{\partial}{\partial t} - eA_0 + \alpha^i (i\partial_i - eA_i) - \gamma^0 m \right] \psi(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.43)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t} \psi = H_0 \psi + V \psi, \quad (1.44)$$

où

$$\begin{aligned} H_0 &= -\alpha^i \partial_i + \gamma^0 m, \\ V &= eA_0 + e\alpha^i A_i. \end{aligned} \quad (1.45)$$

L'équation (1.45) ressemble à l'équation de Schrödinger en interaction classique avec un champ électromagnétique, même si la fonction d'onde est un spineur. Notamment, dans le cas particulier où $A_\mu = (\varphi, 0)$ le potentiel se réduit au potentiel électrique multiplié par

la charge de la particule e .

1.2.4 L'équation de Dirac dans un espace-temps courbé

L'équation de Dirac dans un espace courbé en présence d'un potentiel A^μ est donné par la relation

$$\{i\tilde{\gamma}^\mu(x)[(\partial_\mu + ieA_\mu) - \Gamma_\mu] - m\}\psi = 0, \quad (1.46)$$

avec $\tilde{\gamma}^\mu(x)$ sont les matrices de Dirac dans l'espace courbé : sa relation avec les matrices γ^a de l'espace plat est donnée par : (1.39)

$$\gamma^\mu(x) = E_a^\mu(x) \gamma^a. \quad (1.47)$$

Ces matrices vérifient l'équation (1.41). $E_a^\mu(x)$ sont les matrices inverse de la tétrade dont

$$g^{\mu\nu} = E_a^\mu E_b^\nu \eta^{ab}. \quad (1.48)$$

Les connections spinorielles Γ_μ sont calculées en utilisant la relation (1.49)

$$\Gamma_\mu = \frac{i}{4} \omega_{\mu ab} \Sigma^{ab}, \quad (1.49)$$

où

$$\Sigma^{ab} = \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b]. \quad (1.50)$$

Notons ici que les indices $(a, b, c) = 0, 1, 2, 3$ indiquent le repère de référence local, et les indices (μ, ν) indiquent un espace-temps courbé.

1.2.5 L'équation de Kemmer dans un espace-temps plat

L'équation de Kemmer est une extension du formalisme covariant de l'équation de Dirac , décrit les particules scalaires de spin-0 et vectorielles de spin-1, dans lequel on remplace les matrices gamma γ^μ par des matrices bêta β^μ vérifiant un algèbre plus compliquée connue sous le nom de l'algèbre de Kemmer [68].

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - M) \psi_k = 0, \quad (1.51)$$

avec β^μ sont des matrices satisfaisant les relations de commutation suivants :

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu g^{\nu\rho} + \beta^\rho g^{\nu\mu}, \quad (1.52)$$

contrairement aux matrices gamma de l'algèbre de Dirac, ces matrices sont des inversibles. En présence d'une interaction électromagnétique A_μ , Eq. (1.51) prend la forme

$$(i\beta^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - M) \psi = 0. \quad (1.53)$$

Conjuguons maintenant l'équation (1.51) :

$$\partial_\mu \psi^\dagger \beta^\mu + M \psi^\dagger = 0, \quad (1.54)$$

on définit $\bar{\psi}$ par

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \left\{ 2 (\beta^0)^2 - 1 \right\}, \quad (1.55)$$

avec

$$\bar{\psi} \beta^0 = \psi^\dagger \beta^0, \quad (1.56)$$

avec $\bar{\psi}$ étant l'adjoint de ψ . Sachant que

$$\bar{\psi} \beta^\mu \beta^0 = \psi^\dagger \beta^{\mu\dagger} \beta^0. \quad (1.57)$$

On obtient l'équation de continuité

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.58)$$

avec

$$J^\mu = (J^0, J^k) = \bar{\psi} \beta^\mu \psi, \quad (1.59)$$

où

$$J^k = \bar{\psi} \beta^k \psi, \quad (1.60)$$

$$J^0 = \bar{\psi} \beta^0 \psi. \quad (1.61)$$

La densité de probabilité qui n'est pas définie positive : comme dans le cas des équations relativistes de Proca et de KG , il est donc nécessaire de recourir à la réinterprétation de Pauli et Weisskopf qui est basée sur la symétrie de charge. Ainsi, en multipliant J^0 par la charge élémentaire ,on obtient la densité du courant électromagnétique.

1.2.6 L'équation de Kemmer dans un espace-temps courbé

Dans un espace courbé, l'équation de DKP est donnée par la relation [81, 82]

$$\left(i\tilde{\beta}^\mu \nabla_\mu - m \right) \psi_K = 0, \quad (1.62)$$

avec m est la masse du boson et $\tilde{\beta}^\mu$ sont les matrices de Kemmer dans la nouvelle configuration satisfaisant à la relation

$$\tilde{\beta}^\mu = E_a^\mu(x) \beta^a. \quad (1.63)$$

La dérivée covariante dans l'équation (1.62) est défini par

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \Sigma_\mu, \quad (1.64)$$

la connexion affine Σ_μ est donnée par

$$\Sigma_\mu = \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} [\beta^a, \beta^b], \quad (1.65)$$

Enfin, les connexions de spin $\omega_{\mu ab}$ peuvent écrire en fonction de symboles de christoffel (1.5) comme suit :

$$\omega_\mu^{ab} = e_\alpha^a e^{\nu b} \Gamma_{\mu\nu}^\alpha - e^{\nu b} \partial_\mu e_\nu^a. \quad (1.66)$$

Les oscillateurs relativistes bosoniques dans un espace-temps plat

في هذا الفصل سنقوم بايجاد حلول الهزازات التوافقية النسبية البوزونية في فضاء مستو.

2.1 L'oscillateur bidimensionnel de Klein-Gordon

L'équation bidimensionnelle libre de KG est donnée par la relation suivante

$$(p_x^2 + p_y^2) \psi_{KG} = (E^2 - m^2) \psi_{KG}. \quad (2.1)$$

L'introduction de l'interaction de l'oscillateur de Dirac se fait par la substitution $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - im\omega \vec{r}$, avec ω est la fréquence. Dans ce cas, l'oscillateur de KG s'écrira donc comme suit :

$$[(p_x + im\omega x)(p_x - im\omega x) + (p_y + im\omega x)(p_y - im\omega x)] \psi_{KG} = (E^2 - m^2) \psi_{KG}, \quad (2.2)$$

dont

$$\begin{aligned} (p_x + im\omega x)(p_x - im\omega x) &= p_x^2 + im\omega [x, p_x] + m^2\omega^2 x^2 \\ &= p_x^2 + m^2\omega^2 x^2 - m\omega, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} (p_y + im\omega y)(p_y - im\omega y) &= p_y^2 + im\omega [y, p_y] + m^2\omega^2 y^2 = \\ &= p_y^2 + m^2\omega^2 y^2 - m\omega. \end{aligned}$$

La substitution des deux équations dans l'équation (2.2) mène à l'équation suivante

$$[p_x^2 + p_y^2 + m^2\omega^2 (x^2 + y^2)] \psi_{KG} = (E^2 - m^2 + 2m\omega) \psi_{KG}, \quad (2.4)$$

où

$$\left\{ \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \right) \right\} \psi_{KG} = \varepsilon \psi_{KG}. \quad (2.5)$$

Ici

$$\varepsilon = \frac{E^2 - m^2}{2m} + \frac{1}{\omega}.$$

Cette dernière équation est similaire à celle de l'équation de l'oscillateur harmonique bidimensionnel dont les solutions sont bien connues : ainsi les solutions propres sont

$$E_{n_x, n_y} = \pm \sqrt{m^2 + 2m\omega (n_x + n_y)}, \quad (2.6)$$

$$\psi_{KG}(x, y) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi}} H_{n_x}(\sqrt{m\omega}x) H_{n_y}(\sqrt{m\omega}y) e^{-\frac{m\omega}{2}(x^2+y^2)}. \quad (2.7)$$

2.2 L'oscillateur bidimensionnel de DKP

L'équation fondamentale de l'oscillateur de Kemmer bidimensionnel est donnée par

$$[i\beta^0 \partial_0 + i\beta^i (\partial_i + M\omega Bx_i) - M] \psi_k = 0. \quad (2.8)$$

Dans ce qui suit nous allons traités deux cas différents selon la nature de la particule bosoniques de spin-1.

2.2.1 Cas d'un photon massif

Ici la particule de spin-1 est considérée comme une particule composée de deux particules identiques de spin-1/2, dont la masse totale $M = m_1 + m_2$. Les matrices de Kemmer

β^μ ($\mu = 0, 1, 2$) sont des matrices 4×4 , satisfaisant à la relation (1.52)

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = \beta^\mu g^{\nu\rho} + \beta^\rho g^{\nu\mu},$$

avec

$$\beta^\mu = \gamma^\mu \otimes I + I \otimes \gamma^\mu, \quad (2.9)$$

avec I est la matrice d'identité 2×2 , γ^μ sont les matrices de Dirac s'écrivant en fonction des matrices de Pauli σ^i par [87--91]

$$\gamma^\mu = (\sigma^3, i\sigma^1, i\sigma^2) \quad (2.10)$$

où

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

dont \otimes indique le produit tensoriel. Après un calcul direct, l'équation (2.8) devient

$$\{i(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) \partial_0 + \sqcup + \sqcap - M\} \psi_K = 0, \quad (2.12)$$

où

$$\sqcup = i(\gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^1) (\partial_1 + M\omega x B), \quad (2.13)$$

$$\sqcap = i(\gamma^2 \otimes I + I \otimes \gamma^2) (\partial_2 + M\omega y B), \quad (2.14)$$

et $B = \gamma^0 \otimes \gamma^0$ avec $B^2 = 1$. Dans notre cas, la fonction d'onde ψ_k est définie par

$$\psi_K = \psi_D \otimes \psi_D = (\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4)^T, \quad (2.15)$$

avec ψ_D désigne la fonction d'onde de Dirac. En utilisant les relations suivantes

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \beta^0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\beta^1 = \begin{bmatrix} 0 & i & i & 0 \\ i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & i \\ 0 & i & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

nous obtenons les quatre équations algébriques suivantes

$$(2E - M) \psi_1 - (\partial_x - M\omega x - i\partial_y + iM\omega y) \psi_2 - (\partial_x - M\omega x - i\partial_y + iM\omega y) \psi_3 = 0, \quad (2.16)$$

$$(\partial_x + M\omega x + i\partial_y + iM\omega y) \psi_1 + M\psi_2 + (\partial_x + M\omega x - i\partial_y - iM\omega y) \psi_4 = 0, \quad (2.17)$$

$$(\partial_x + M\omega x + i\partial_y + iM\omega y) \psi_1 + M\psi_3 + (\partial_x + M\omega x - i\partial_y - iM\omega y) \psi_4 = 0, \quad (2.18)$$

$$(2E + M) \psi_1 + (\partial_x - M\omega x + i\partial_y - iM\omega y) \psi_2 + (\partial_x - M\omega x + i\partial_y - iM\omega y) \psi_3 = 0. \quad (2.19)$$

A partir de ce système d'équation, nous avons

$$\psi_2 = \psi_3, \quad (2.20)$$

$$\psi_1 = \frac{2}{2E - M} (\partial_x - M\omega x - i\partial_y + iM\omega y) \psi_2, \quad (2.21)$$

$$\psi_4 = \frac{-2}{2E + M} (\partial_x - M\omega x + i\partial_y - iM\omega y) \psi_2. \quad (2.22)$$

En remplaçant tous ces équations dans l'équation (2.19), nous obtenons l'équation différentielle suivante par rapport à ψ_2 :

$$\left\{ \partial_x^2 + \partial_y^2 - M^2\omega^2 (x^2 + y^2) - 4E\omega L_z - 2M\omega + \frac{4E^2 - M^2}{2} \right\} \psi_2 = 0, \quad (2.23)$$

ou

$$\left\{ \left(\frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) + \left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 \right) \right\} \psi_2 = \zeta \psi_2 \quad (2.24)$$

avec

$$\zeta = \omega + \frac{2E\omega M_l}{M} - E^2 + \frac{M^2}{4}. \quad (2.25)$$

L'équation (2.24) est l'équation de l'oscillateur harmonique bidimensionnel. Ainsi, les solutions propres sont écrites comme suit [57]

$$E_{n_x, n_y, M_l} = 2M \left\{ \frac{\omega M_l}{M} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\omega}{2M} (n_x + n_y + 2) + \left(\frac{\omega M_l}{M} \right)^2} \right\}, \quad (2.26)$$

la fonction d'onde de l'oscillateur de Kemmer est

$$\psi_K = N_{norm} \begin{pmatrix} \frac{2(\partial_x - M\omega x - i\partial_y + iM\omega y)}{2E - M} \\ 1 \\ 1 \\ \frac{-2(\partial_x - M\omega x + i\partial_y - iM\omega y)}{2E + M} \end{pmatrix} \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi}} H_{n_x}(\sqrt{m\omega}x) H_{n_y}(\sqrt{m\omega}y) e^{-\frac{m\omega}{2}(x^2 + y^2)} \quad (2.27)$$

2.2.2 Cas d'une seule particule bosonique

Traitons maintenant l'oscillateur de Kemmer pour les particules bosoniques de spin-0 et de spin-1. Les matrices β^μ de DKP sont données dans l'Annexe (C).

2.2.2.1 Particule de spin-0

L'introduction du terme d'interaction de l'oscillateur de Dirac, dans l'équation de DKP se fait par la substitution $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - iM\omega\eta\vec{r}$. Dans ce cas, l'oscillateur de DKP est donné par :

$$\{i\beta^0\partial_0 + i\beta^1(\partial_1 + M\omega\eta x) + i\beta^2(\partial_2 + M\omega\eta y) - M\} \psi_K = 0. \quad (2.28)$$

L'état stationnaire ψ_K est une fonction d'onde de 5 composants donner par la forme

$$\psi_K = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4 \ \psi_5)^T. \quad (2.29)$$

L'insertion de l'équation (2.29) dans l'équation (2.28) conduit au système des équations suivantes

$$-M\psi_1 + E\psi_2 - i(\partial_x - M\omega x)\psi_3 - i(\partial_y - M\omega y)\psi_4 = 0, \quad (2.30)$$

$$E\psi_1 - M\psi_2 = 0, \quad (2.31)$$

$$i(\partial_x + M\omega x)\psi_1 - M\psi_3 = 0, \quad (2.32)$$

$$i(\partial_y + M\omega y)\psi_1 - M\psi_4 = 0, \quad (2.33)$$

$$-M\psi_5 = 0. \quad (2.34)$$

Ce système donne

$$\psi_2 = \frac{E}{M}\psi_1,$$

$$\begin{aligned}\psi_3 &= \frac{i(\partial_x + M\omega x)}{M}\psi_1, \\ \psi_4 &= \frac{i(\partial_y + M\omega y)}{M}\psi_1, \\ \psi_5 &= 0.\end{aligned}$$

En substitution tous les composantes de la fonction d'onde ψ_K dans l'équation (2.28), on obtient l'équation différentielle suivante par rapport à ψ_1 :

$$\{(\partial_x - M\omega x)(\partial_x + M\omega x) + (\partial_y - M\omega y)(\partial_y + M\omega y) + E^2 - M^2\}\psi_1 = 0. \quad (2.35)$$

Cette dernière peut être réécrit par une autre façon comme suit

$$[(p_x + im\omega x)(p_x - im\omega x) + (p_y + im\omega y)(p_y - im\omega y)]\psi_K = (E^2 - M^2)\psi_K. \quad (2.36)$$

L'équation (2.36) similaire à celle trouvée pour le cas de l'oscillateur de KG [61] : alors, les solutions sont

$$E_{n_x, n_y} = \pm \sqrt{m^2 + 2m\omega(n_x + n_y)}, \quad (2.37)$$

$$\psi_K(x, y) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E}{M} \\ \frac{i(\partial_x + M\omega x)}{M} \\ \frac{i(\partial_y + M\omega y)}{M} \\ 0 \end{pmatrix} H_{n_x}(\sqrt{m\omega}x) H_{n_y}(\sqrt{m\omega}y) e^{-\frac{m\omega}{2}(x^2 + y^2)}. \quad (2.38)$$

2.2.2.2 Particule de spin-1

Pour ce type d'équation, la fonction d'onde de la particule est une fonction d'onde à dix composantes : elle est donnée par

$$\psi_{DKP} = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4 \ \psi_5 \ \psi_6 \ \psi_7 \ \psi_8 \ \psi_9 \ \psi_{10})^T. \quad (2.39)$$

En insérant cette fonction d'onde dans l'équation (2.8), on obtient

$$-M\psi_1 - E\psi_7 + i(\partial_x - M\omega x)\psi_{10} = 0, \quad (2.40)$$

$$-M\psi_2 - E\psi_8 + i(\partial_y - M\omega y)\psi_{10} = 0, \quad (2.41)$$

$$-M\psi_3 - E\psi_9 = 0, \quad (2.42)$$

$$-M\psi_4 + i(\partial_y + M\omega y)\psi_9 = 0, \quad (2.43)$$

$$-M\psi_5 - i(\partial_x + M\omega x)\psi_9 = 0, \quad (2.44)$$

$$-M\psi_6 + i(\partial_x + M\omega x)\psi_8 - i(\partial_y + M\omega y)\psi_5 = 0, \quad (2.45)$$

$$-M\psi_7 - E\psi_1 - i(\partial_y - M\omega y)\psi_6 = 0, \quad (2.46)$$

$$-M\psi_8 - E\psi_2 + i(\partial_x - M\omega x)\psi_6 = 0, \quad (2.47)$$

$$-M\psi_9 - E\psi_3 - i(\partial_x - M\omega x)\psi_5 + i(\partial_y - M\omega y)\psi_4 = 0, \quad (2.48)$$

$$-M\psi_{10} + i(\partial_x + M\omega x)\psi_1 + i(\partial_y + M\omega y)\psi_2 = 0. \quad (2.49)$$

Ce système d'équation conduit à

$$\psi_3 = \frac{-E}{M}\psi_9, \quad \psi_4 = \frac{i(\partial_y + M\omega y)}{M}\psi_9, \quad \psi_5 = \frac{-i(\partial_x + M\omega x)}{M}\psi_9. \quad (2.50)$$

L'insertion de (2.50) dans l'équation (2.48) donne

$$\{(\partial_x - M\omega x)(\partial_x + M\omega x) + (\partial_y - M\omega y)(\partial_y + M\omega y) + E^2 - M^2\}\psi_9 = 0. \quad (2.51)$$

On remarque aussi que cette équation différentielle correspond à la composante ψ_9 est similaire à l'équation (2.35), et par conséquent nous avons les mêmes résultats : alors les solutions propres sont [61]

$$E_{n_x, n_y} = \pm \sqrt{m^2 + 2m\omega(n_x + n_y)}, \quad (2.52)$$

$$\psi_9(x, y) = \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi}} H_{n_x}(\sqrt{m\omega}x) H_{n_y}(\sqrt{m\omega}y) e^{-\frac{m\omega}{2}(x^2 + y^2)}. \quad (2.53)$$

Les oscillateurs relativistes bosoniques en présence d'une corde cosmique

في هذا الفصل سنقوم بايجاد حلول الهزازات التوافقية النسبية البوزونية في فضاء منحنى بحضور حبل كوني داخل حقل مغناطيسي خارجي.

3.1 La corde cosmique

La corde cosmique est un objet hypothétique présent en faible quantité dans l'univers qui aurait une structure essentiellement linéique (d'où son nom). Il se serait formé lors d'une transition de phase dans l'univers primordial résultant d'une parois de domaines , cordes et monopôles . Le concept de la corde cosmique ne doit pas être confondu avec celui des cordes de la théorie des cordes. Ces dernières sont des objets microscopiques dont la taille est de l'ordre de la longueur de Planck $l_p = 1.616252 \times 10^{-35} \text{metre}$, alors que les cordes cosmiques sont des objets aussi grands que l'univers observable, voire plus grand encore. La première classification des défauts topologiques et une discussion de leur évolution ont été données par Kibble en 1976. Depuis ce temps, on a beaucoup appris sur l'évolution et les conséquences cosmologiques de divers défauts (voir l'article [27]). En raison de leurs énergies extrêmement élevées, des défauts cosmologiques n'ont pas encore été détecté, et il est pratiquement impossible de les produire, même dans les accélérateurs les plus puissants de particules. D'autre part, cela est une des raisons pour lesquelles les gens

sont intéressés à eux - si elles se trouvent aujourd'hui, ils seront un lien direct unique pour la physique des premiers instants de l'univers. Les défauts topologiques apparait dans physique de la matière condensée comme des vortex dans les supraconducteurs ou les superfluides ; parois des domaines dans les matériaux magnétiques, les solitons dans les polymères quasi-unidimensionnels et les dislocations ou disclinations dans les solides désordonnés et les cristaux liquides. Parmi ces défauts, les cordes cosmiques ont été avéré être l'un le plus grand potentiel pour la formation de la structure cosmique. Elles sont comme toute autre concentration de masse et d'énergie, agit comme source d'un champ gravitationnel. Parce que les cordes cosmiques sont des objets étendus, ce champ gravitationnel affectera non seulement le mouvement des particules à proximité, mais aussi la trajectoire de la corde elle-même, et ainsi de calculer le champ gravitationnel de même une corde cosmique isolé dans l'espace vide sinon peut poser un problème non linéaire compliqué . Cet espace est défini dans les coordonnées cylindriques (t, ρ, φ, z) par l'équation suivante :

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (3.1)$$

où α est appelé l'angle de déficit : elle est défini par $\alpha = 1 - 4\mu$ dont μ est la densité massive linéaire de la corde. L'angle azimutal varie dans l'intervalle $0 \leq \varphi < 2\pi$ [21]. Il n'y a pas de défaut dans le cas $\alpha = 1$. L'angle de déficit ne peut prendre que des valeurs dans lesquelles $\alpha < 1$. elle peut prendre des valeurs supérieures à 1, ce qui correspond à un espace-temps anti-conique avec une courbure négative [22, 92]. Cette géométrie possède une singularité conique présentée par le tenseur de courbure suivant :

$$R_{\rho\varphi}^{\rho\varphi} = \frac{1 - \alpha}{4\alpha} \delta_2(\rho), \quad (3.2)$$

ou $\delta_2(\rho)$ est la fonction bidimensionnelle dans l'espace plat. La singularité conique donne naissance à la courbure concentrée sur l'axe de la corde cosmique : la courbure est nulle presque partout [16].

3.2 Les solutions propres

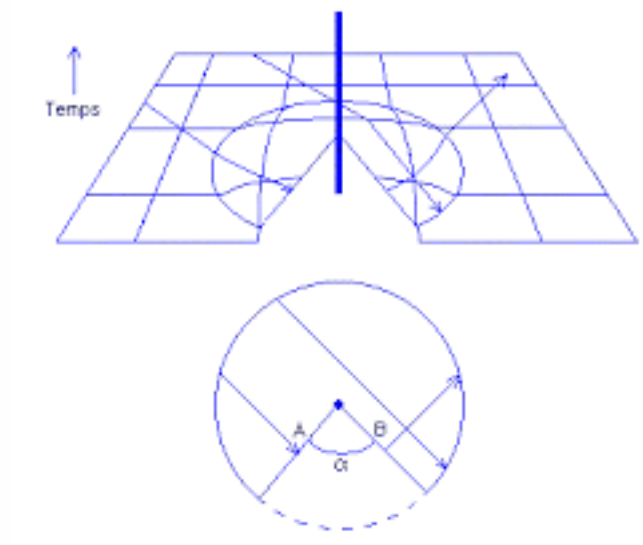


Fig. 3.1 : Représentation d'une corde cosmique.

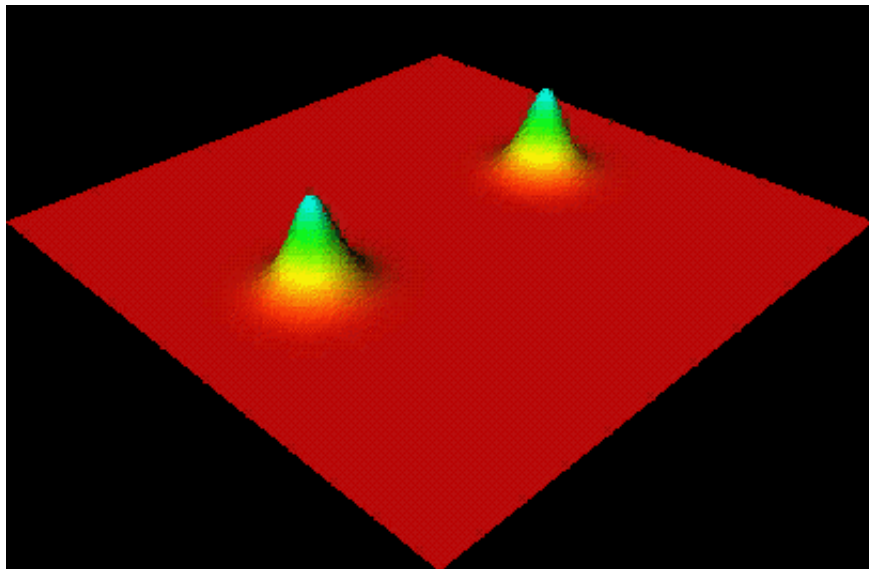


Fig. 3.2 : Simulation des cordes cosmiques par des vortex.

3.2.1 L'oscillateur de KG

Dans cette section, nous allons solutionner l'oscillateur de KG en présence de la corde cosmique en présence d'un champ magnétique extérieur.

3.2.1.1 En absence du champ magnétique

L'équation d'un champ scalaire massif en présence d'un champ gravitationnel [25, 31, 93--97], dans le cas général, est donnée par (1.32,1.33)

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - \xi R - m^2 \right) \psi_{KG} = 0, \quad (3.3)$$

où $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \alpha^2 \rho^2, 1)$, dont $g = |\det(g_{\mu\nu})| = -\alpha^2 \rho^2$, est le tenseur fondamental et R est le scalaire de Ricci qui est nul partout sauf dans la direction de l'axe de la corde cosmique : la courbure est concentrée selon l'axe de la cordes cosmique , et nulle presque partout dans tous espace.

A partir de (3.3), l'oscillateur de KG bidimensionnel en présence de la corde cosmique s'écrit donc par :

$$\left\{ -\partial_t^2 + \frac{1}{\rho} (\partial_\rho - m\omega\rho) (\rho\partial_\rho + m\omega\rho^2) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \partial_\phi^2 - m^2 \right\} \psi_{KG} = 0, \quad (3.4)$$

avec la substitution suivante $P_\rho \rightarrow P_\rho - im\omega\rho$ [46].

Le calcul du terme $(\partial_\rho - m\omega\rho) (\rho\partial_\rho + m\omega\rho^2)$ donne

$$(\partial_\rho - m\omega\rho) (\rho\partial_\rho + m\omega\rho^2) = \rho\partial_\rho^2 + \partial_\rho - m^2\omega^2\rho^3 + 2m\omega\rho. \quad (3.5)$$

En choisissant la forme de la fonction d'onde comme

$$\psi_{KG} = e^{-iEt+ij\phi} \varphi_{KG}(\rho), \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (3.6)$$

l'équation (3.131) se transforme à

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - m^2\omega^2\rho^2 + 2m\omega - \frac{j^2}{\alpha^2\rho^2} + E^2 - m^2 \right\} \varphi_{KG} = 0, \quad (3.7)$$

ou

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \left(m^2 \omega^2 \rho^2 + \frac{\lambda^2}{\rho^2} - \vartheta \right) \right\} \varphi_{KG} = 0. \quad (3.8)$$

dont

$$\begin{aligned} \vartheta &= E^2 - m^2 + 2m\omega, \\ \lambda &= \frac{i}{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Maintenant, en faisant le changement des variables suivants :

$$\zeta = m\omega\rho^2, \quad (3.10)$$

$$\varphi_{KG}(\rho) = \zeta^{\frac{|\lambda|}{2}} e^{-\frac{\zeta}{2}} F(\zeta), \quad (3.11)$$

l'équation (3.134) devient :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \left(\frac{\lambda^2}{4\zeta^2} + \frac{1}{4} - \frac{\vartheta}{4m\omega\zeta} \right) \right\} \varphi_{KG}(\rho) = 0, \quad (3.12)$$

ou

$$\zeta F''(\zeta) + (|\lambda| + 1 - \zeta) F'(\zeta) - \left(\frac{|\lambda|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\vartheta}{4m\omega} \right) F(\zeta) = 0, \quad (3.13)$$

avec $F \equiv_1 F_1$ suit l'équation différentielle suivante

$$xF''(x) + (c - x)F'(x) - aF(x) = 0, \quad (3.14)$$

dont

$$\begin{aligned} c &= |\lambda| + 1, \\ a &= \frac{|\lambda|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\vartheta}{4m\omega}. \end{aligned}$$

Cette équation admet comme solution une fonction hypergéométrique confluyente. Pour obtenir des fonctions d'ondes normalisées, il faut que les séries infinies deviennent des polynomiales. Cette exigence n'est satisfaite que dans le cas où le terme indépendant a est un entier négatif, $a = -n$. Ainsi, nous avons :

$$\frac{|\lambda|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\vartheta}{4m\omega} = -n. \quad (3.15)$$

Un calcul simple conduit directement au spectre d'énergie de cet oscillateur : le résultat est alors

$$E^2 = m^2 + 2m\omega \left(2n + \frac{|j|}{\alpha} \right). \quad (3.16)$$

Selon cette équation, on constate que la présence de l'angle de déficit α de la corde cosmique modifié bien le spectre de la particule : contrairement au cas de l'espace plat : la présence de cette dernière brise bien la dégénérescence des niveaux d'énergies. Dans la limite $\alpha \rightarrow 1$, dont $N = 2n + j$, est le nombre quantique principal, le spectre d'énergie de l'oscillateur de KG dans l'espace plat (2.6) est bien reproduit.

Enfin, la fonction d'onde totale de notre oscillateur est donnée par

$$\psi_{KG}(\rho) = e^{-iEt + ij\phi} (m\omega\rho^2)^{\frac{|j|}{\alpha}} \exp\left(-\frac{m\omega\rho^2}{2}\right) {}_1F_1\left(-n, \frac{|j|}{\alpha} + 1, m\omega\rho^2\right). \quad (3.17)$$

Passons maintenant au cas de la présence d'un champ magnétique externe.

3.2.1.2 En présence d'un champ magnétique externe

En présence d'un champ magnétique externe, parallèle à l'axe de la corde, le potentiel vecteur associé, dont

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = B_0 \vec{e}_z, \quad (3.18)$$

est choisi comme suit

$$\vec{A}_\phi = -\frac{\alpha B_0 \rho^2}{2} \vec{e}_\phi. \quad (3.19)$$

Dans ce cas, l'oscillateur de KG obéit à l'équation suivante :

$$\left\{ -\partial_t^2 + \frac{1}{\rho} (\partial_\rho - m\omega\rho) (\rho\partial_\rho + m\omega\rho^2) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \left(\partial_\phi - i \frac{eB_0 \rho^2}{2} \right)^2 - m^2 \right\} \psi_{KG} = 0. \quad (3.20)$$

En utilisant l'équation (3.6), Eq. (3.20) se transforme à

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - m^2 \Omega^2 \rho^2 + 2m \left(\omega + \omega_0 \frac{j}{\alpha} \right) - \frac{j^2}{\alpha^2 \rho^2} + E^2 - m^2 \right\} \varphi_{KG} = 0, \quad (3.21)$$

où $\omega_0 = \frac{eB_0}{2m}$ est la fréquence cyclotronique de la particule, et

$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega_0^2. \quad (3.22)$$

En posant que

$$\nu = \frac{j}{\alpha}, \quad \Gamma = E^2 - m^2 + 2m \left(\omega + \omega_0 \frac{j}{\alpha} \right), \quad (3.23)$$

l'équation (3.21) devient

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \left(m^2 \omega^2 \rho^2 + \frac{\nu^2}{\rho^2} - \Gamma \right) \right\} \varphi_{KG} = 0. \quad (3.24)$$

Cette dernière équation est similaire à celle de l'équation (3.8) : en procédant de la même façon, avec le changement suivant :

$$\xi = m\Omega\rho^2, \quad (3.25)$$

$$\varphi_{KG}(\rho) = \xi^{\frac{|\nu|}{2}} e^{-\frac{\xi}{2}} F(\xi), \quad (3.26)$$

nous obtenons

$$\xi F''(\xi) + (|\nu| + 1 - \xi) F'(\xi) - \underbrace{\left(\frac{|\nu|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\Gamma}{4m\Omega} \right)}_a F(\xi) = 0. \quad (3.27)$$

La solution de cette équation différentielle est également la fonction hypergéométrique confluent bien connue. Pour bien obtenir une solution normalisée il faut que les séries polynomiales finies convergent. Cette exigence est satisfaite par la condition suivante :

$$a = \frac{|\nu|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\Gamma}{4m\Omega} = -n. \quad (3.28)$$

Ainsi les solutions propres de l'oscillateur de KG dans un champ gravitationnel provenant de la corde cosmique et en présence d'un champ magnétique externe sont

$$E^2 = m^2 + 2m\Omega \left(2n + \frac{|j|}{\alpha} + 1 \right) - 2m \left(\omega + \omega_0 \frac{j}{\alpha} \right), \quad (3.29)$$

$$\psi_{KG} = e^{-iEt+ij\phi} (m\Omega\rho^2)^{\frac{|j|}{\alpha}} \exp\left(-\frac{m\Omega\rho^2}{2}\right) {}_1F_1\left(-n, \frac{|j|}{\alpha} + 1, m\Omega\rho^2\right). \quad (3.30)$$

Les niveaux d'énergie relativistes (3.29) correspondent au spectre d'énergie relativiste de l'oscillateur de KG dans une corde cosmique en présence d'un champ magnétique . Deux remarques concernant notre spectre peuvent être faites :

- le cas ou la fréquence de l'interaction d'oscillateur de Dirac $\omega = 0$ conduit aux mêmes résultats obtenus dans la réf. [18]
- l'annulation du champ magnétique , $\omega_0 = 0$, fournit le spectre d'énergie donnée par l'équation (3.16).
- la présence de la corde cosmique via le paramètre α dans le spectre d'énergie brise bien la dégénérescence des niveaux d'énergie. Dans la limite $\alpha \rightarrow 1$, dont $N = 2n + j$, on retrouve bien le spectre d'énergie de l'oscillateur de KG dans un espace-temps plat .

3.2.1.3 En présence d'un potentiel scalaire

Dans cette partie, on va étudier les solutions concernant les particules relativistes massive sans spin à deux dimensions en présence de la corde cosmique sous l'effet d'un potentiel scalaire . L'introduction de ce type de potentiel ce fait par deux approches : (i) en faisant une modification dans l'opérateur $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$ et (ii) en changeant le terme de la masse $m \rightarrow m + S(\rho)$.

Ainsi, en présence de l'interaction de l'oscillateur de Dirac $\partial_\rho \rightarrow \partial_\rho + m\omega\rho$, l'équation (3.3) se réécrit dans une autre forme comme suit

$$\left\{ -(\partial_t - ieA_0)^2 + \frac{1}{\rho} (\partial_\rho - m\omega\rho) (\rho\partial_\rho + m\omega\rho^2) + \frac{1}{\alpha^2\rho^2} \partial_\phi^2 - (m + S(\rho))^2 \right\} \psi_{KG} = 0. \quad (3.31)$$

En choisissant la forme du potentiel scalaire par

$$eA_0 \rightarrow \frac{f}{\rho} = \pm \frac{|f|}{\rho}, \quad (3.32)$$

$$S(\rho) \rightarrow \frac{f'}{\rho} = \pm \frac{|f'|}{\rho}, \quad (3.33)$$

où f et f' sont des constantes. l'éq. (3.31) devient :

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + i\frac{2f\partial}{\rho\partial t} + \frac{f^2}{\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - m^2\omega^2\rho^2 + 2m\omega + \frac{1}{\alpha^2\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} - m^2 - \frac{2mf'}{\rho} - \frac{f'^2}{\rho^2} \right\} \psi_{KG} = 0. \quad (3.34)$$

Soit

$$\psi_{KG} = e^{-iEt+l\phi} \varphi_{KG}(\rho), \quad (3.35)$$

avec $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, alors l'équation (3.34) se transforme à

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2} - \frac{2\sigma}{\rho} - m^2\omega^2\rho^2 + \gamma^2 \right] \varphi_{KG}(\rho) = 0, \quad (3.36)$$

dont

$$\beta^2 = \left(\frac{l}{\alpha}\right)^2 + f'^2 - f^2, \quad (3.37)$$

$$\sigma = mf' - Ef, \quad (3.38)$$

$$\gamma^2 = E^2 - m^2 + 2m\omega. \quad (3.39)$$

En prenant que $\xi = \sqrt{m\omega}\rho$, l'éq. (3.36) devient

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{\beta^2}{\xi^2} - \frac{\delta}{\xi} - \xi^2 + \frac{\gamma^2}{m\omega} \right] \varphi_{KG}(\xi) = 0, \quad (3.40)$$

avec $\delta = \frac{2\sigma}{\sqrt{m\omega}}$. Maintenant, en réécrivant $\varphi_{KG}(\xi)$ comme une fonction inconnue $H(\xi)$ [18, 98, 99]

$$\varphi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \xi^{|\beta|} H(\xi). \quad (3.41)$$

l'éq. (3.40) se modifier et devient

$$H''(\xi) + \left\{ (2|\beta| + 1) \frac{1}{\xi} - 2\xi \right\} H'(\xi) + \left\{ \frac{\gamma^2}{m\omega} - 2|\beta| - 2 - \frac{\delta}{\xi} \right\} H(\xi) = 0. \quad (3.42)$$

Cette équation est une fonction confluyente de Heun dont [28, 100--103]

$$H(\xi) = H\left(2|\beta|, 0, \frac{\gamma^2}{m\omega}, 2\delta, \xi\right). \quad (3.43)$$

Pour résoudre cette équation nous utilisons la méthode de Frobenius [104]. Dans ce cas,

l'équation (3.43) peut être écrit comme un développement en série de puissance infinie autour de l'origine comme suit

$$H(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j. \quad (3.44)$$

Dans ce stade, une remarque pertinente concernant la méthode de Frobenius doit être soulignée : l'acceptabilité d'une solution en série dépend de sa convergence (y compris la convergence asymptotique). Il est tout à fait possible pour la méthode de Frobenius de donner une solution en série qui satisfait à l'équation différentielle initiale lorsqu'elle est substituée dans l'équation mais qui ne converge pas dans la région d'intérêt. L'équation différentielle de Legendre illustre cette situation [104]. Suivant cet argument, et dans certains cas particuliers, la série de l'équation (3.44) ne converge pas : des solutions spéciales exactes pour l'équation ont été trouvés par Vercin [98] en vertu de l'exigence que la série converge. Une analyse numérique détaillée de cette équation, y compris des solutions singulières, est donnée par Myrheim et al [99]. Ils ont étudiés le problème de deux anyons, en interaction avec le potentiel Coulomb en présence d'un champ magnétique. Il est intéressant de remarquer que notre problème se réduit aussi au même problème mathématique que celui de Vercin [98]. En outre, des situations similaires ont été bien traitées pour de nombreux problèmes physiques. Dans ces études, les auteurs considèrent que la série de Heun diverge, et pour avoir des solutions acceptables, ils ont imposé une condition à la fonction d'onde. A ce stade, une remarque sur la convergence de cette série nous semble pertinente : afin d'obtenir un type particulier des solutions exactes représentant des états liés, on doit chercher des expressions pour les polynômes à $H(\xi)$, c'est-à-dire que des solutions qui peuvent être obtenues en imposant des conditions où la série de puissance devient un polynôme de degré n . Ceci peut être argumenter comme suit : en mécanique quantique, si nous voulons avoir une fonction d'onde normalisable, nous imposons à la fonction d'onde d'être finie, c-à-d., l'annulation de cette fonction aux bords ($\xi \rightarrow 0$ et $\xi \rightarrow \infty$) en même temps. De cette façon, on peut obtenir des solutions pour des états liés due à l'absence de la divergence sur la fonction d'onde pour les deux limites. Dans notre cas, la fonction $H(\xi)$ a été écrit comme une extension d'une série de puissance autour de l'origine. En conséquence, les solutions peuvent être obtenues en imposant que l'expansion

de la série de puissance ou la série de Heun biconfluent devienne un polynôme de degré n .

Revenons maintenant à notre cas : Substituant (3.44) dans (3.42) on obtient la relation de récurrence suivante :

$$a_{j+2} = \frac{\delta}{(j+2)(j+1+\lambda)} a_{j+1} - \frac{\theta - 2j}{(j+2)(j+1+\lambda)} a_j, \quad (3.45)$$

avec $\lambda = 2|\beta| + 1$ et $\theta = \frac{\gamma^2}{m\omega} - 2|\beta| - 2$. En commençant avec $a_0 = 1$ et en utilisant la relation (3.45), les deux premiers coefficients du développement en série de puissances sont données par :

$$a_1 = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\sigma}{\sqrt{m\omega}} \frac{1}{2|\beta| + 1}, \quad (3.46)$$

$$a_2 = \frac{\delta^2}{2\lambda(1+\lambda)} - \frac{\theta}{2(1+\lambda)} = \frac{2\sigma^2}{m\omega} \frac{1}{(2|\beta| + 1)(2|\beta| + 2)} - \frac{\theta}{2(2|\beta| + 2)} \quad (3.47)$$

Les solutions de l'état stationnaire peuvent être obtenus en imposant les conditions dans lesquelles la série de puissance devient un polynôme de degré n . Ceci arrive lorsque en posant

$$\theta = 2n, \quad (3.48)$$

$$a_{n+1} = 0. \quad (3.49)$$

Ainsi, les valeurs propres de notre oscillateur sont

$$E^2 = m^2 + 2m\omega_{n,l} \left(n + \left| \sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2} + f'^2} - f^2 \right| \right). \quad (3.50)$$

L'expression de l'énergie (3.50) est une expression générale pour les niveaux d'énergie relativistes de l'oscillateur de KG soumis à un potentiel scalaire et en présence de la corde cosmique : on peut voir que que l'influence de ces potentiels change l'état fondamental : l'état fondamental sera alors défini par le nombre quantique $n = 1$ au lieu du nombre quantique $n = 0$ [77]. Notons ici que l'écriture de la fréquence ω angulaire en termes de nombres quantiques n, l dans l'équation. (3.51). Du point de vue mathématique, cette dépendance de la fréquence angulaire de cet oscillateur relativiste sur les nombres quantiques $\{n, l\}$ résulte du fait que les solutions exactes de l'équation (3.42) sont obtenues

uniquement pour certaines valeurs de la fréquence de notre oscillateur. Du point de vue de la mécanique quantique, c'est l'effet de l'influence des potentiels scalaires sur l'oscillateur de KG .

Concentrons maintenant sur le niveau $n = 1$. D'après la condition (3.49), on trouve que

$$\omega_{1,l} = \frac{2\sigma^2}{m(2|\beta| + 1)}, \quad (3.51)$$

en remplaçant ce dernier dans l'équation (3.50), l'expression du niveau d'énergie (pour $n = 1$) devient :

$$\varepsilon_1^2 = m^2 + 2m\omega_{1,l}(1 + |\beta|). \quad (3.52)$$

Enfin, trois cas particuliers, dépendant de choix de f et f' , peuvent être discuter.

- pour $f = 0$, nous avons

$$\omega_{1,l} = \frac{2mf'^2}{\left(2\left|\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2} + f'^2}\right| + 1\right)}, \quad (3.53)$$

$$\varepsilon_{1,l} = m \left[1 + 4f'^2 \frac{\left(1 + \left|\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2} + f'^2}\right|\right)}{\left(1 + 2\left|\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2} + f'^2}\right|\right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.54)$$

- pour $f = -f'$, on obtient

$$\omega_{1,l} = \frac{2f^2(m + \varepsilon_1)^2}{m(2\left|\frac{l}{\alpha}\right| + 1)}, \quad (3.55)$$

$$\varepsilon_{1,l} = \frac{4f^2m\left(\frac{1+|l/\alpha|}{1+2|l/\alpha|}\right) \pm m}{1 - 4f^2\left(\frac{1+|l/\alpha|}{1+2|l/\alpha|}\right)}. \quad (3.56)$$

- enfin, pour $f' = 0$, nous trouvons

$$\omega_{1,l} = \frac{2\varepsilon_1^2 f^2}{m\left(2\left|\sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2} - f^2}\right| + 1\right)}, \quad (3.57)$$

$$\varepsilon_{1,l} = \pm \frac{m}{\sqrt{1 - 4f^2 \left(\frac{1 + \left| \sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2} - f^2} \right|}{1 + 2 \left| \sqrt{\frac{l^2}{\alpha^2} - f^2} \right|} \right)}}. \quad (3.58)$$

3.2.2 L'oscillateur de DKP

Ici, on distingue deux cas selon la nature de la particule : cas d'une particule composite ou " **photon massif**" selon De Broglie, et cas d'une particule unique. Traitons en premier lieu le cas d'un photon massif.

3.2.2.1 Photon massif

Un photon massif, selon de Broglie, est une particule de spin-1 constituée de deux particules fermioniques identiques de spin-1/2 de masse m dont sa masse totale est $M = 2m$. Les matrices de Kemmer β_μ ($\mu = 0, 1, 2$) sont des matrices 16×16 satisfaisant à la relation de commutation suivante

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}^\mu \tilde{\beta}^\nu \tilde{\beta}^\rho + \tilde{\beta}^\rho \tilde{\beta}^\nu \tilde{\beta}^\mu &= \tilde{\beta}^\mu g^{\nu\rho} + \tilde{\beta}^\rho g^{\nu\mu}, \\ \tilde{\beta}^a &= \gamma^a \otimes I + I \otimes \gamma^a. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Le tétrade de notre espace est choisi comme suit :

$$e_0^a = (1, 0, 0, 0), e_1^a = (0, 1, 0, 0), e_2^a = (0, 0, \alpha\rho, 0), e_3^a = (0, 0, 0, 1). \quad (3.60)$$

Cherchons, en premier lieu les solutions de l'oscillateur de Kemmer en absence d'un champ magnétique extérieur.

L'absence d'un champ magnétique extérieur Les matrices $\tilde{\beta}^\mu$ de Kemmer de l'espace-temps courbé sont écrites en fonction de celles de l'espace de Minkowski (1.63) par

$$\tilde{\beta}^\mu = E_a^\mu(x) \beta^a. \quad (3.61)$$

Cela implique que tous les différents termes qui apparaissent dans l'oscillateur de Kemmer dans l'espace-temps plat [57] sont modifiés, en présence d'une corde cosmique, comme

suit :

$$\tilde{B} = \tilde{\gamma}^0 \otimes \tilde{\gamma}^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tilde{\beta}^0 = E_a^0(x) \beta^a = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad (3.62)$$

$$\tilde{\beta}^1 = E_a^1(x) \beta^a = \begin{bmatrix} 0 & i & i & 0 \\ i & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & i \\ 0 & i & i & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\beta}^2 = E_a^2(x) \beta^a = \frac{1}{\alpha\rho} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Injectons tous les éléments de calculs dans l'équation de l'oscillateur de Kemmer (1.62) on obtient :

$$\left(i\tilde{\beta}^0 \partial_0 + i\tilde{\beta}^1 \partial_1 + i\tilde{\beta}^2 (\partial_2 - \Sigma_2) - m \right) \psi_K = 0, \quad (3.64)$$

où ψ_K représente la fonction d'onde de Kemmer : elle est définie comme un produit tensoriel de deux fonctions d'onde de Dirac ψ_D par

$$\psi_K = \psi_D \otimes \psi_D = \left(\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4 \right)^T. \quad (3.65)$$

Le terme Σ_2 est la composante non nulle de la connexion spinorielles de l'espace : elle est donnée par

$$\Sigma_2 = \Gamma_2 \otimes I + I \otimes \Gamma_2, \quad (3.66)$$

ou

$$\Gamma_2(x) = \frac{1}{8} \omega_{2ab} [\gamma^a, \gamma^b]. \quad (3.67)$$

En absence de la torsion (système à deux dimensions), et en utilisant l'équation de Maurer-Cartan [5, 83, 84, 105--107], les composantes $\omega_{\mu ab}$ conduit à

$$\Sigma_2 = i\alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

L'introduction de l'interaction de l'oscillateur de Dirac se fait par la modification suivante $\partial_1 \rightarrow \partial_1 + m\omega\rho\tilde{B}$: cela conduit au système des équations suivant :

$$(2E - m) \psi_1 - \left(\partial_1 - m\omega\rho - \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_2 - \left(\partial_1 - m\omega\rho - \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_3 = 0, \quad (3.69)$$

$$\left(\partial_1 + m\omega\rho + \frac{1}{\rho} + i\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_1 + m\psi_2 + \left(\partial_1 + m\omega\rho + \frac{1}{\rho} - i\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_4 = 0, \quad (3.70)$$

$$\left(\partial_1 + m\omega\rho + \frac{1}{\rho} + i\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_1 + m\psi_3 + \left(\partial_1 + m\omega\rho + \frac{1}{\rho} - i\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_4 = 0, \quad (3.71)$$

$$(2E + m) \psi_4 + \left(\partial_1 - m\omega\rho + \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_2 + \left(\partial_1 - m\omega\rho + \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_3 = 0. \quad (3.72)$$

A partir de ces équations, nous obtenons :

$$\psi_2 = \psi_3, \quad (3.73)$$

$$\psi_1 = \frac{2 \left(\partial_1 - m\omega\rho - \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right)}{2E - m} \psi_2, \quad (3.74)$$

$$\psi_4 = \frac{-2 \left(\partial_1 - m\omega\rho + \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right)}{2E + m} \psi_2. \quad (3.75)$$

Insérons (3.73), (3.74) et (3.75) dans (3.70), et choisissons la forme suivante pour la fonction d'onde

$$\psi_2 = e^{iJ\phi} \chi(\rho), \quad (3.76)$$

nous trouvons alors

$$\left[\partial_1^2 + \frac{\partial_1}{\rho} - m^2\omega^2\rho^2 - \frac{J^2}{\alpha^2\rho^2} - 2m\omega + 4E\omega\frac{J}{\alpha} + E^2 - \frac{m^2}{4} \right] \chi(\rho) = 0, \quad (3.77)$$

ou

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho - \left[\frac{\lambda^2}{\rho^2} + m^2\omega^2\rho^2 - \gamma \right] \right) \chi(\rho) = 0. \quad (3.78)$$

avec

$$\lambda = \frac{J}{\alpha}, \quad (3.79)$$

$$\gamma = E^2 + 4E\omega\lambda - 2m\omega - \frac{m^2}{4}. \quad (3.80)$$

L'équation (3.78) est similaire à l'équation. (B.25), et par conséquent nous trouvons

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \left[\frac{\lambda^2}{4\varrho^2} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma}{4m\omega\varrho} \right] \right) \chi(\varrho) = 0. \quad (3.81)$$

Pour résoudre cette équation, nous utilisons la méthode Nikiforov-Uvarov (NU) (voir Annexe A) : après un réarrangement de l'équation précédente, tous les paramètres de cette méthode sont donnés par les expressions suivantes :

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \quad (3.82)$$

$$\xi_1 = \frac{1}{4}, \xi_2 = \frac{\Omega}{4m\omega}, \xi_3 = \frac{\lambda^2}{4}, \quad (3.83)$$

$$\alpha_4 = \alpha_5 = 0, \alpha_6 = \frac{1}{4}, \alpha_7 = -\frac{\Omega}{4m\omega}, \quad (3.84)$$

$$\alpha_8 = \frac{\lambda^2}{4}, \alpha_9 = \frac{1}{4}, \alpha_{10} = 1 + |\lambda|, \quad (3.85)$$

$$\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = \frac{|\lambda|}{2}, \alpha_{13} = \frac{1}{2}, \quad (3.86)$$

$$\frac{2n+1}{2} - \frac{\Omega}{4m\omega} + \frac{|\lambda|}{2} = 0. \quad (3.87)$$

La fonction d'onde totale est donnée comme une fonction hypergéométrique confluent par

$$\psi_2(\rho) = e^{-iEt} e^{iJ\phi} (m\omega)^{\frac{|J|}{2}} \rho^{\frac{|J|}{\alpha}} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} F\left(-n, \frac{|J|}{\alpha} + 1, m\omega\rho^2\right). \quad (3.88)$$

Un calcul simple conduit direct à la forme exacte du spectre de l'énergie comme suit :

$$\frac{E}{m} = 2r \left(\frac{J}{\alpha} \right) \pm \sqrt{4r^2 \frac{J^2}{\alpha^2} + 2r \left(\left| \frac{J}{\alpha} \right| + 2n + 2 \right) + \frac{1}{4}}, \quad (3.89)$$

avec $r = \frac{\omega}{m}$. Comme dans le cas de l'oscillateur de Dirac, la présence d'une corde cosmique, par le biais du paramètre α , brise la dégénérescence de notre spectre. En outre, dans la limite où $\alpha \rightarrow 1$ en eq. (3.89), le résultat exact de l'oscillateur à deux dimensions de

l'oscillateur de Kemmer dans l'espace de Minkowski est bien obtenu [57].

Examinons maintenant la présence d'un champ magnétique externe.

En présence d'un champ magnétique externe Le potentiel vecteur lié au champ magnétique est choisi par la forme suivante :

$$\vec{A}_\phi = i \frac{\phi_B}{2\pi\alpha\rho} \vec{e}_\phi. \quad (3.90)$$

Ainsi, l'oscillateur de Kemmer dans une corde cosmique et en présence d'un champ magnétique sera

$$\left(i\tilde{\beta}^0 \partial_0 + i\tilde{\beta}^1 \partial_1 + i\tilde{\beta}^2 \left(\partial_2 - \Sigma_2 + i \frac{e\phi_B}{2\pi} \right) - m \right) \psi_K = 0. \quad (3.91)$$

En utilisant l'équation (3.65), (3.91) se transforme à

$$(2E - m) \psi_1 - \left(\partial_1 - m\omega\rho + \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} - \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_2 - \left(\partial_1 - m\omega\rho + \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} - \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_3 = 0, \quad (3.92)$$

$$\left(\partial_1 + m\omega\rho + \frac{1}{\rho} - \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} + i \frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_1 + m\psi_2 + \left(\partial_1 + m\omega\rho + \frac{1}{\rho} + \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} - i \frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_4 = 0, \quad (3.93)$$

$$\left(\partial_1 + m\omega\rho + \frac{1}{\rho} - \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} + i \frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_1 + m\psi_3 + \left(\partial_1 + m\omega\rho + \frac{1}{\rho} + \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} - i \frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_4 = 0, \quad (3.94)$$

$$(2E + m) \psi_4 + \left(\partial_1 - m\omega\rho - \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} + \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_2 + \left(\partial_1 - m\omega\rho - \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} + \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_3 = 0. \quad (3.95)$$

La comparaison entre (3.93) et (3.94) conduit à

$$\psi_2 = \psi_3. \quad (3.96)$$

Les autres composantes sont alors réécrit en fonction de ψ_2 par :

$$\psi_1 = \frac{2 \left(\partial_1 - m\omega\rho + \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} - \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right)}{2E - m} \psi_2, \quad (3.97)$$

$$\psi_4 = \frac{-2 \left(\partial_1 - m\omega\rho - \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} + \frac{i\partial_2}{\alpha\rho} \right)}{2E + m} \psi_2. \quad (3.98)$$

Insérons les équations (3.96), (3.97) et (3.98) dans (3.93), et choisissons

$$\psi_2 = e^{iJ\phi} \chi(\rho), \quad (3.99)$$

nous obtenons

$$\left[\partial_\rho^2 + \frac{\partial_1}{\rho} - m^2\omega^2\rho^2 - 2m\omega - \left(\frac{J^2}{\alpha^2} + \frac{\left(\frac{e\phi_B}{2\pi}\right)^2}{\alpha^2} - 2\frac{\left(\frac{e\phi_B}{2\pi}\right)J}{\alpha^2} \right) \frac{1}{\rho^2} + 4E\omega \left(\frac{J}{\alpha} - \frac{\left(\frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha} \right) + E^2 - \frac{m^2}{4} \right] \chi(\rho) = 0, \quad (3.100)$$

ou

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \left[\frac{\mu^2}{\rho^2} + m^2\omega^2\rho^2 - \Omega \right] \right) \chi(\rho) = 0 \quad (3.101)$$

avec

$$\mu = \frac{J - \frac{e\phi_B}{2\pi}}{\alpha}, \quad \Omega = \left(E^2 - \frac{m^2}{4} + 4E\omega\mu - 2m\omega \right). \quad (3.102)$$

Par comparaison avec ce qui a été fait dans le paragraphe précédent, les solutions propres sont

$$E = 2\omega\mu \pm 2\sqrt{\omega^2\mu^2 + \left(\frac{m^2}{16} + m\omega \left(\frac{|\mu|}{2} + 1 + n \right) \right)}, \quad (3.103)$$

$$\chi(\rho) = (m\omega)^{\left| \frac{s\left(J - \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha} \right|} \rho^{\left| \frac{s\left(J - \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha} \right|} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} F\left(-n, \left| \frac{s\left(J - \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha} \right| + 1, m\omega\rho^2\right). \quad (3.104)$$

La fonction d'onde ψ_2 prend la forme

$$\psi_2(\rho) = e^{iJ\phi} (m\omega\rho)^{\left| \frac{s\left(J - \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha} \right|} \rho^{\left| \frac{s\left(J - \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha} \right|} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} F\left(-n, \left| \frac{s\left(J - \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha} \right| + 1, m\omega\rho^2\right). \quad (3.105)$$

En posant soit $\phi_B = 0$ dans l'équation (3.103), nous trouverons les mêmes résultats obtenus en absence du champ magnétique .

Considérons maintenant le cas d'une particule simple non composite.

3.2.2.2 Cas d'une seule particule bosonique simple

Particule de spin-0 L'oscillateur bidimensionnelle de DKP en présence de la corde cosmique est donné par

$$\left[i\tilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}S^{ab} \right) - M \right] \psi_{DKP} = 0, \quad (3.106)$$

ou

$$\left\{ i\tilde{\beta}^0\partial_0 + i\tilde{\beta}^1(\partial_1 + m\omega\rho\tilde{\eta}) + i\tilde{\beta}^2(\partial_2 + \alpha[\beta^1, \beta^2]) - M \right\} \psi_{DKP} = 0. \quad (3.107)$$

L'état stationnaire ψ_{DKP} est une fonction d'onde de 5 composants de la forme

$$\psi_{DKP} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)^T. \quad (3.108)$$

En utilisant les équations suivantes (3.61), (C.1) et (C.2), et par l'insertion de (3.108) dans (3.107), nous trouvons

$$E\psi_2 - i \left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) \psi_3 - i \frac{\partial_2}{\alpha\rho} \psi_4 - M\psi_1 = 0, \quad (3.109)$$

$$E\psi_1 - M\psi_2 = 0, \quad (3.110)$$

$$i(\partial_1 + M\omega\rho)\psi_1 - M\psi_3 = 0, \quad (3.111)$$

$$i \frac{\partial_2}{\alpha\rho} \psi_1 - M\psi_4 = 0, \quad (3.112)$$

$$-M\psi_5 = 0, \quad (3.113)$$

où

$$\psi_2 = \frac{E}{M}\psi_1,$$

$$\psi_3 = i \frac{(\partial_1 + M\omega\rho)}{M}\psi_1,$$

$$\psi_4 = \frac{i}{\alpha\rho M}\partial_2\psi_1,$$

$$\psi_5 = 0.$$

Dans ce cas, l'éq. (3.109) devient

$$\left\{ \left(\partial_\rho - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) (\partial_\rho + M\omega\rho) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \partial_\rho^2 + E^2 - M^2 \right\} \psi_1 = 0. \quad (3.114)$$

En faisant le choix suivant concernant la fonction d'onde ψ_1

$$\psi_1(\rho) = e^{iJ\phi} \varphi(\rho),$$

l'équation (3.114) se transforme à

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \left(\frac{\lambda^2}{\rho^2} + M^2 \omega^2 \rho^2 - \nu \right) \right\} \varphi(\rho) = 0, \quad (3.115)$$

avec

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{J}{\alpha}, \\ \nu &= E^2 - M^2 + 2M\omega. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Afin de résoudre l'équation (3.115), nous posons le changement de variable $\zeta = M\omega\rho^2$.

Cela conduit à l'équation différentielle dont la forme est :

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \left(\frac{\lambda^2}{4\zeta^2} + \frac{1}{4} - \frac{\nu}{4M\omega\zeta} \right) \right\} \varphi(\rho) = 0. \quad (3.117)$$

Pour obtenir des solutions régulières à cette dernière équation, soit

$$\varphi(\rho) = \zeta^{\frac{|\lambda|}{2}} e^{-\frac{\zeta}{2}} F(\zeta), \quad (3.118)$$

alors l'Eq. (3.117) devient

$$\zeta \ddot{F}(\zeta) + (|\lambda| + 1 - \zeta) \dot{F} - \left(\frac{|\lambda|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{4M\omega} \right) F = 0. \quad (3.119)$$

L'équation (3.119) est une fonction hypergéométrique confluyente de la forme

$$xF''(x) + (c-x)F' - aF(x) = 0. \quad (3.120)$$

dont $F \equiv_1 F_1$. Les solutions propres de cette équation sont obtenues en posant que $a = -n$. Cela conduit à

$$\frac{|\lambda|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\nu}{4M\omega} = -n. \quad (3.121)$$

Selon (3.121), les solutions propres sont

$$E^2 = M^2 + 2M\omega \left(2n + \frac{|J|}{\alpha} \right), \quad (3.122)$$

$$\psi_1(\rho) = e^{-iEt+iJ\phi} (M\omega\rho^2)^{\frac{|J|}{2\alpha}} \exp\left(-\frac{M\omega\rho^2}{2}\right) {}_1F_1\left(-n, \frac{|J|}{\alpha} + 1, M\omega\rho^2\right). \quad (3.123)$$

Dans la limite où $\alpha \rightarrow 1$, le spectre d'énergie de l'oscillateur de DKP dans l'espace de Minkowski est bien mis en évidence (voir l'Eq. (2.37)).

Selon (3.122), la présence de l'angle de déficit α de la corde cosmique modifié le spectre de la particule en question. Contrairement au cas de l'espace-temps plat [61], la présence des défauts topologiques brise la dégénérescence des niveaux d'énergies.

En présence d'un champ magnétique externe L'équation de l'oscillateur de DKP dans une corde cosmique et en présence d'un champ magnétique est :

$$\left\{ i\tilde{\beta}^0\partial_0 + i\tilde{\beta}^1(\partial_1 + M\omega\rho\tilde{\eta}) + i\tilde{\beta}^2 \left(\left\{ \partial_2 + i\frac{e\phi_B}{2\pi} \right\} + \alpha[\beta^1, \beta^2] \right) - M \right\} \psi_{DKP} = 0. \quad (3.124)$$

L'insertion de l'Eq. (3.108) dans l'équation (3.124) donne

$$E\psi_2 - i \left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) \psi_3 - i \frac{(\partial_2 + i\frac{e\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho} \psi_4 - M\psi_1 = 0, \quad (3.125)$$

$$E\psi_1 - M\psi_2 = 0, \quad (3.126)$$

$$i(\partial_1 + mM\omega\rho)\psi_1 - M\psi_3 = 0, \quad (3.127)$$

$$i \frac{(\partial_2 + i\frac{e\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho} \psi_1 - M\psi_4 = 0, \quad (3.128)$$

$$-M\psi_5 = 0. \quad (3.129)$$

Ce système d'équations donne

$$\begin{aligned}\psi_2 &= \frac{E}{M}\psi_1, \\ \psi_3 &= i\frac{(\partial_1 + M\omega\rho)}{M}\psi_1, \\ \psi_4 &= \frac{i}{\alpha\rho M}\left(\partial_2 + i\frac{e\phi_B}{2\pi}\right)\psi_1, \\ \psi_5 &= 0.\end{aligned}$$

Un calcul direct montre que la composante ψ_1 suit l'équation suivante :

$$\left\{ \left(\partial_2 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) (\partial_1 + M\omega\rho) + \frac{1}{\alpha^2\rho^2} \left(\partial_2 + i\frac{e\phi_B}{2\pi} \right)^2 + E^2 - M^2 \right\} \psi_1 = 0. \quad (3.130)$$

Soit

$$\psi_1 = e^{-iJ\phi}\varphi(\rho),$$

alors on obtient une équation différentielle par rapport à $\varphi(\rho)$ comme suit :

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho - \left(\frac{\Gamma'^2}{\rho^2} + M^2\omega^2\rho^2 - \nu' \right) \right\} \varphi(\rho) = 0, \quad (3.131)$$

dont

$$\begin{aligned}\Gamma' &= \frac{J - \frac{e\phi_B}{2\pi}}{\alpha}, \\ \nu' &= E^2 - M^2 + 2M\omega.\end{aligned} \quad (3.132)$$

Notons ici que l'équation (3.131) est similaire à l'équation (3.117) : comme conséquence, les solutions propres sont

$$E^2 = M^2 + 2M\omega \left(2n + \left| \frac{J - \frac{e\phi_B}{2\pi}}{\alpha} \right| \right), \quad (3.133)$$

$$\psi_1(\rho) = e^{-iEt+iJ\phi} (M\omega\rho^2)^{\left| \frac{J - \frac{e\phi_B}{2\pi}}{2\alpha} \right|} \exp\left(-\frac{M\omega\rho^2}{2}\right) {}_1F_1\left(-n, \left| \frac{J - \frac{e\phi_B}{2\pi}}{\alpha} \right| + 1, M\omega\rho^2\right). \quad (3.134)$$

Le cas particulier où $\phi_B = 0$ conduit au spectre d'énergie donné par l'équation (3.122).

En présence d'un potentiel scalaire En présence d'un potentiel scalaire son introduction dans l'équation de mouvement d'effectuer la substitution suivante

$$p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu, \quad (3.135)$$

où q est la charge électrique et A^μ est le quadrivecteur potentiel électromagnétique . Dans ce cas, l'équation (3.107) se modifie et devient

$$\left\{ i\tilde{\beta}^0 (\partial_0 - iqA_0) + i\tilde{\beta}^1 (\partial_\rho + M\omega\rho\tilde{\eta}) + i\tilde{\beta}^2 (\partial_\phi + \alpha [\beta^1, \beta^2]) - M \right\} \psi = 0. \quad (3.136)$$

En Choissant la forme du potentiel scalaire par

$$qA^0 = \frac{f}{\rho} = \pm \frac{|f|}{\rho}, \quad (3.137)$$

et en utilisant les équations suivantes (3.61), (C.1) et (C.2) et par l'insertion de (3.108) et (3.137) dans l'équation (3.136), nous obtenons le système d'équations suivant :

$$\left(E + \frac{f}{\rho} \right) \psi_2 - i \left(\partial_\rho - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) \psi_3 - i \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_4 - M\psi_1 = 0, \quad (3.138)$$

$$\left(E + \frac{f}{\rho} \right) \psi_1 - M\psi_2 = 0, \quad (3.139)$$

$$i (\partial_\rho + M\omega\rho) \psi_1 - M\psi_3 = 0, \quad (3.140)$$

$$i \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_1 - M\psi_4 = 0, \quad (3.141)$$

$$-M\psi_5 = 0. \quad (3.142)$$

Ce système donne

$$\psi_2 = \frac{\left(E + \frac{f}{\rho} \right)}{M} \psi_1, \quad (3.143)$$

$$\psi_3 = i \frac{(\partial_\rho + M\omega\rho)}{M} \psi_1, \quad (3.144)$$

$$\psi_4 = \frac{i}{M\alpha\rho} \partial_\phi \psi_1, \quad (3.145)$$

$$\psi_5 = 0. \quad (3.146)$$

Mettons les équations (3.143), (3.144) et (3.145) dans l'équation (3.138), on obtient une équation par rapport à la composante ψ_1 comme

$$\left\{ \left(E + \frac{f}{\rho} \right)^2 + \left(\partial_\rho - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) (\partial_\rho + M\omega\rho) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \partial_\phi^2 - M^2 \right\} \psi_1 = 0. \quad (3.147)$$

Soit

$$\psi_1(\rho) = e^{iJ\phi} \chi(\rho), \quad (3.148)$$

alors

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2} + \frac{2Ef}{\rho} - M^2 \omega^2 \rho^2 + \nu'' \right] \chi(\rho) = 0, \quad (3.149)$$

avec

$$\nu'' = E^2 - m_0^2 + 2m_0\omega, \quad \beta^2 = \lambda^2 - f^2, \quad \lambda = \frac{J}{\alpha}. \quad (3.150)$$

En choisissant $\zeta = \sqrt{M\omega}\rho$, l'équation (3.149) se transforme à

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\beta^2}{\xi^2} + \frac{\delta}{\xi} - \xi^2 + \frac{\nu}{m_0\omega} \right] \chi(\xi) = 0, \quad (3.151)$$

avec $\delta = \frac{2Ef}{\sqrt{M\omega}}$. En écrivant la fonction $\chi(\xi)$ comme une fonction inconnue $H(\xi)$ [18, 98, 99, 108]

$$\chi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \xi^{|\beta|} H(\xi), \quad (3.152)$$

l'équation (3.151) devient

$$H''(\xi) + \left\{ (2|\beta| + 1) \frac{1}{\xi} - 2\xi \right\} H'(\xi) + \left\{ \frac{\nu}{m\omega} - 2|\beta| - 2 + \frac{\delta}{\xi} \right\} H(\xi) = 0, \quad (3.153)$$

qui est une fonction bi-confluente de Heun [[100, 101, 104, 108] dont

$$H(\xi) = H \left(2|\beta|, 0, \frac{\nu}{m\omega}, 2\delta, -\xi \right). \quad (3.154)$$

Pour résoudre cette équation nous utilisons la méthode de Frobenius [28, 101--104]. En se basant sur cette méthode, l'Eq (3.154) s'écrit comme un développement en série de

puissance autour de l'origine comme suit :

$$H(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j. \quad (3.155)$$

En remplaçant la série (3.155) dans l'équation (3.153), on obtient la relation de récurrence suivante :

$$a_{j+2} = -\frac{\delta}{(j+2)(j+1+\gamma)} a_{j+1} - \frac{\theta-2j}{(j+2)(j+1+\gamma)} a_j, \quad (3.156)$$

avec $\gamma = 2|\beta| + 1$ et $\theta = \frac{\nu}{m\omega} - 2|\beta| - 2$. En commençant par $a_0 = 1$ et en utilisant la relation (3.156) nous obtenons

$$a_1 = -\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{2Ef}{\sqrt{m_0\omega}} \frac{1}{2|\beta|+1},$$

$$a_2 = \frac{\delta^2}{2\gamma(1+\gamma)} - \frac{\theta}{2(1+\gamma)} = \frac{2E^2 f^2}{m_0\omega} \frac{1}{(2|\beta|+1)(2|\beta|+2)} - \frac{\theta}{2(2|\beta|+2)}. \quad (3.157)$$

Les solutions de l'état stationnaire peuvent être obtenus en imposant les conditions dans lesquelles la série de puissance infinie devient un polynôme de degré n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Ceci arrive lorsque :

$$\theta = 2n, \quad (3.158)$$

$$a_{n+1} = 0. \quad (3.159)$$

D'après l'équation (3.158) nous accédons au spectre d'énergie comme suit :

$$E^2 = m_0^2 + 2m_0\omega \left(n + \left| \sqrt{\frac{J^2}{\alpha^2} - f^2} \right| \right). \quad (3.160)$$

On remarque que l'introduction d'un potentiel scalaire dans l'oscillateur de DKP change complètement les niveaux d'énergie. Cet influence exige la translation de niveau fondamental de l'oscillateur de DKP au niveau quantique $n = 1$ au lieu de $n = 0$ tel qu'obtenu dans [28, 103, 108]. Notons que dans le cas ou $f \rightarrow 0$ (absence du potentiel scalaire), nous atteignons le résultat exact des bosons scalaires dans une corde cosmique [20]. Aussi,

si nous prenons les deux limites $f \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow 1$ on trouve le même résultat que dans le cas de l'oscillateur de DKP dans l'espace de Minkowski [61].

Particule de Spin-1 A partir des équations (3.106), (3.61), (C.3) et (C.4), et lors de l'introduction de l'oscillateur de Dirac $\partial_\rho \rightarrow \partial_\rho + M\omega\tilde{\eta}\rho$, l'oscillateur de DKP s'écrit alors par

$$\left\{ i\tilde{\beta}^0\partial_0 + i\tilde{\beta}^1(\partial_1 + m\omega\rho\tilde{\eta}) + i\tilde{\beta}^2(\partial_2 + \alpha[\beta^1, \beta^2]) - M \right\} \psi_{DKP} = 0, \quad (3.161)$$

dont l'état stationnaire ψ_k dans ce cas est une fonction d'onde de dix composantes

$$\psi_{DKP} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})^T. \quad (3.162)$$

L'insertion de (3.162) dans (3.161) donne

$$-E\psi_7 + (\partial_1 - M\omega\rho)\psi_{10} - M\psi_1 = 0, \quad (3.163)$$

$$-E\psi_8 + \frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_{10} - M\psi_2 = 0, \quad (3.164)$$

$$-E\psi_9 - M\psi_3 = 0, \quad (3.165)$$

$$-\frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_9 - M\psi_4 = 0, \quad (3.166)$$

$$(\partial_1 + M\omega\rho)\psi_9 - M\psi_5 = 0, \quad (3.167)$$

$$\frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_7 - \left(\partial_1 + M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) \psi_8 - M\psi_6 = 0, \quad (3.168)$$

$$-E\psi_1 + \frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_6 - M\psi_7 = 0, \quad (3.169)$$

$$-E\psi_2 - (\partial_1 - M\omega\rho)\psi_5 - M\psi_8 = 0, \quad (3.170)$$

$$-E\psi_3 + \left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) \psi_5 - \frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_4 - M\psi_9 = 0, \quad (3.171)$$

$$-\left(\partial_1 + M\omega\rho - \frac{1}{\rho} \right) \psi_1 - \frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_2 - M\psi_{10} = 0, \quad (3.172)$$

D'après les équations (3.165), (3.166) et (3.167) on trouve

$$\psi_3 = -\frac{E}{M}\psi_9, \quad (3.173)$$

$$\psi_4 = -\frac{1}{M}\frac{\partial_2}{\alpha\rho}\psi_9, \quad (3.174)$$

$$\psi_5 = \frac{1}{M}(\partial_1 + M\omega\rho)\psi_9. \quad (3.175)$$

L'injection des équations (3.173), (3.174) et (3.175) dans l'équation (3.171) définit une équation différentielle par rapport à la composante ψ_9 comme suit

$$\left\{ \left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) (\partial_1 + M\omega\rho) + \frac{\partial_2^2}{\alpha^2\rho^2} + E^2 - m^2 \right\} \psi_9 = 0. \quad (3.176)$$

Cette équation est similaire à (3.114), et par conséquent les solutions propres sont

$$E^2 = M^2 + 2M\omega \left(2n + \frac{|J|}{\alpha} \right), \quad (3.177)$$

$$\psi_9(\rho) = e^{-iEt+iJ\phi} (M\omega\rho^2)^{\frac{|J|}{2\alpha}} \exp\left(-\frac{M\omega\rho^2}{2}\right) {}_1F_1\left(-n, \frac{|J|}{\alpha} + 1, M\omega\rho^2\right). \quad (3.178)$$

Afin d'avoir le même spectre d'énergie pour les autres composantes, elles doivent satisfaire la même équation que la composante ψ_9 . Ainsi, en choisissant pour

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \quad (3.179)$$

on trouve que

$$\psi_6 = \psi_7 = \psi_8 = \psi_{10} = 0. \quad (3.180)$$

Ce résultat est justifié selon la nature de l'équation de DKP : en effet la fonction d'onde de l'équation de DKP admet uniquement six composantes physiques et quatre composante redondante : ces dernières sont à la base du problème de découplage du système des équations. Ce qui justifié l'existence des composantes nulles dans la fonction d'onde de DKP

En présence d'un champ magnétique externe En présence d'un champ magnétique décrit par le potentiel vecteur $\vec{A}_\phi = i \frac{\phi_B}{2\pi\alpha\rho} \vec{e}_\phi$, l'oscillateur de DKP sera

$$\left\{ i\tilde{\beta}^0 \partial_0 + i\tilde{\beta}^1 (\partial_1 + M\omega\rho\tilde{\eta}) + i\tilde{\beta}^2 \left(\left\{ \partial_2 + i \frac{e\phi_B}{2\pi} \right\} + \alpha [\beta^1, \beta^2] \right) - M \right\} \psi_{DKP} = 0. \quad (3.181)$$

Suivons les mêmes étapes de la section précédente, on trouve que

$$-E\psi_7 + (\partial_1 - M\omega\rho) \psi_{10} - M\psi_1 = 0, \quad (3.182)$$

$$-E\psi_8 + \frac{(\partial_2 + i \frac{e\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho} \psi_{10} - M\psi_2 = 0, \quad (3.183)$$

$$-E\psi_9 - M\psi_3 = 0, \quad (3.184)$$

$$-\frac{(\partial_2 + i \frac{e\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho} \psi_9 - M\psi_4 = 0, \quad (3.185)$$

$$(\partial_1 + M\omega\rho) \psi_9 - M\psi_5 = 0, \quad (3.186)$$

$$\frac{\partial_2 + i \frac{e\phi_B}{2\pi}}{\alpha\rho} \psi_7 - \left(\partial_1 + M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) \psi_8 - M\psi_6 = 0, \quad (3.187)$$

$$-E\psi_1 + \frac{(\partial_2 + i \frac{e\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho} \psi_6 - M\psi_7 = 0, \quad (3.188)$$

$$-E\psi_2 - (\partial_1 - M\omega\rho) \psi_5 - M\psi_8 = 0, \quad (3.189)$$

$$-E\psi_3 + \left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) \psi_5 - \frac{(\partial_2 + i \frac{e\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho} \psi_4 - M\psi_9 = 0, \quad (3.190)$$

$$-\left(\partial_1 + M\omega\rho - \frac{1}{\rho} \right) \psi_1 - \frac{(\partial_2 + i \frac{e\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho} \psi_2 - M\psi_{10} = 0. \quad (3.191)$$

Ce système conduit à

$$\psi_3 = -\frac{E}{M}\psi_9, \quad \psi_4 = -\frac{1}{M} \frac{(\partial_2 + i \frac{e\phi_B}{2\pi})}{\alpha\rho} \psi_9, \quad \psi_5 = \frac{1}{M} (\partial_1 + M\omega\rho) \psi_9. \quad (3.192)$$

Insérons (3.190) dans (3.192), on obtient

$$\left\{ \left(\partial_2 - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) (\partial_1 + M\omega\rho) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \left(\partial_2 + i \frac{e\phi_B}{2\pi} \right)^2 + E^2 - M^2 \right\} \psi_9 = 0, \quad (3.193)$$

Cette équation est similaire à l'équation (3.130), et par conséquent les solutions propres sont

$$E^2 = M^2 + 2M\omega \left(2n + \left| \frac{J - \frac{e\phi_B}{2\pi}}{\alpha} \right| \right), \quad (3.194)$$

$$\psi_9(\rho) = e^{-iEt+iJ\phi} (M\omega\rho^2)^{\left| \frac{J - \frac{e\phi_B}{2\pi}}{2\alpha} \right|} \exp\left(-\frac{M\omega\rho^2}{2}\right) {}_1F_1\left(-n, \left| \frac{J - \frac{e\phi_B}{2\pi}}{\alpha} \right| + 1, M\omega\rho^2\right). \quad (3.195)$$

Les autres composantes ont la même forme que la section précédente.

En présence d'un potentiel scalaire L'équation de DKP bidimensionnelle dans une corde cosmique soumit à un potentiel scalaire est :

$$\left\{ i\tilde{\beta}^0 (\partial_0 - iqA_0) + i\tilde{\beta}^1 (\partial_\rho + m\omega\rho\varsigma) + i\tilde{\beta}^2 (\partial_\phi + \alpha [\beta^1, \beta^2]) - M \right\} \psi = 0 \quad (3.196)$$

où M est la masse de particule spin-1. L'état stationnaire ψ est une fonction d'onde de dix composantes de l'équation DKP comme

$$\psi = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4 \ \psi_5 \ \psi_6 \ \psi_7 \ \psi_8 \ \psi_9 \ \psi_{10})^T \quad (3.197)$$

En substituant (3.61) (C.3), (C.4) et (3.197) , nous obtenons le système des équations suivant :

$$-\left(E + \frac{f}{\rho}\right) \psi_7 + (\partial_\rho - M\omega\rho) \psi_{10} - M\psi_1 = 0, \quad (3.198)$$

$$-\left(E + \frac{f}{\rho}\right) \psi_8 + \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_{10} - M\psi_2 = 0, \quad (3.199)$$

$$-\left(E + \frac{f}{\rho}\right) \psi_9 - M\psi_3 = 0, \quad (3.200)$$

$$-\frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_9 - M\psi_4 = 0, \quad (3.201)$$

$$(\partial_\rho + M\omega\rho) \psi_9 - M\psi_5 = 0, \quad (3.202)$$

$$\frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_7 - \left(\partial_\rho + M\omega\rho + \frac{1}{\rho}\right) \psi_8 - M\psi_6 = 0, \quad (3.203)$$

$$-\left(E + \frac{f}{\rho}\right) \psi_1 + \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_6 - M\psi_7 = 0, \quad (3.204)$$

$$-\left(E + \frac{f}{\rho}\right) \psi_2 - (\partial_\rho - M\omega\rho) \psi_5 - M\psi_8 = 0, \quad (3.205)$$

$$-\left(E + \frac{f}{\rho}\right) \psi_3 + \left(\partial_\rho - M\omega\rho + \frac{1}{\rho}\right) \psi_5 - \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_4 - M\psi_9 = 0, \quad (3.206)$$

$$-\left(\partial_\rho + M\omega\rho - \frac{1}{\rho}\right) \psi_1 - \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_2 - M\psi_{10} = 0. \quad (3.207)$$

A partir (3.200), (3.201) et (3.202), on obtient

$$\psi_3 = -\frac{\left(E + \frac{f}{\rho}\right)}{M} \psi_9, \quad (3.208)$$

$$\psi_4 = -\frac{1}{M} \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_9, \quad (3.209)$$

$$\psi_5 = \frac{1}{M} (\partial_\rho + M\omega\rho) \psi_9. \quad (3.210)$$

Insérons ces équations dans (3.206), nous arrivons à une équation par rapport à la composante ψ_9 comme suit :

$$\left\{ \left(E + \frac{f}{\rho}\right)^2 + \left(\partial_\rho - M\omega\rho + \frac{1}{\rho}\right) (\partial_\rho + M\omega\rho) + \frac{\partial_\phi^2}{\alpha^2\rho^2} - M^2 \right\} \psi_9 = 0. \quad (3.211)$$

Considérons $\psi_9(\rho) = e^{iJ\phi} \varphi(\rho)$, alors nous trouvons

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2} + \frac{2Ef}{\rho} - M^2\omega^2\rho^2 + \nu \right] \varphi(\rho) = 0, \quad (3.212)$$

dont $\nu = E^2 - M^2 + 2M\omega$, $\beta^2 = \lambda^2 - f^2$, $\lambda = \frac{J}{\alpha}$.

Comme A. Boumali et al. [61] a souligné dans leurs article, il est très difficile de dissocier le système d'équations ci-dessus comme cela a été fait pour ψ_9 , nous choisissons

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \quad (3.213)$$

dans ce cas nous obtenons

$$\psi_6 = \psi_7 = \psi_8 = \psi_{10} = 0. \quad (3.214)$$

Ainsi, en comparant (3.212) avec (3.149), on remarque que nous avons la même équation

différentielle et, par conséquent, nous avons les mêmes résultats

$$E^2 = M^2 + 2M\omega \left(n + \left| \sqrt{\frac{J^2}{\alpha^2} - f^2} \right| \right) \quad (3.215)$$

$$\psi_9(\xi) = H \left(2|\beta|, 0, \frac{\nu}{m\omega}, 2\delta, -\xi \right). \quad (3.216)$$

Conclusion et Perspective

L'oscillateur de Dirac a attiré beaucoup d'intérêt à la fois parce qu'il constitue l'un des exemples rares qui ont des solutions exactes, et aussi en raison de ses nombreuses applications en physiques. En mécanique quantique relativiste, cet oscillateur a été étudiée à partir de nombreux points de vue, y compris : (i) les études sur les propriétés de la covariance de l'équation de Dirac en présence de l'oscillateur de Dirac , (ii) la détermination du spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes de ce dernier, (iii) l'étude des propriétés algébrique du groupe de Lie , (iv) la supersymétrie, (v) l'invariance conforme, (iv) les propriétés thermiques, etc. Aussi, la correspondance de cet oscillateur avec l'optique quantique est bien mis en évidence dans les deux type d'espaces : espace commutatif et noncommutatif [39--43, 109, 110].

Notons aussi, que par comparaison avec le cas de l'équation de Dirac appliquer à l'étude de l'atome d'hydrogène, l'oscillateur de Dirac est resté un modèle théorique jusqu'à la réalisation expérimentale de ce dernier par Franco-Villafane et al. [3] ouvrant ainsi un nouveau domaine de recherche très intéressant dans la physique moderne : comme exemple, la relation directe entre l'oscillateur de Dirac et le composé graphène en utilisant le modèle de la masse effective [110].

Récemment, l'un des problèmes les plus intéressants de la physique théorique est le lien entre la mécanique quantique et la gravité . Ce dernier implique la distorsion de l'espace-temps en question. L'interaction des particules avec un champ gravitationnel produit par

les défauts topologiques est devenue un domaine de recherche très actif. Il a fait l'objet de plusieurs études récentes. Selon les concepts modernes de la physique théorique, les défauts topologiques ont été formés par une transition de phase dans l'univers primitif. Ces défauts se manifestent en parois de domaines, cordes cosmiques et monopôles. C'est dans ce contexte que nous nous sommes concentrés sur l'étude des oscillateurs bosoniques, afin de déduire leurs mouvements et leurs comportements en présence d'un champ gravitationnel.

Ainsi, l'objectif principal de cette thèse était de résoudre ces équations relativistes bosoniques correspondants aux particules des spin-0 et spin -1, en présence de l'oscillateur de Dirac. Ces équations ont été traitées dans deux types d'espaces : espace-temps plat et courbé, en présence d'un champ magnétique externe parallèle à la corde. Le choix de la corde cosmique parmi les autres types de défauts topologiques est fondé sur la simplicité de la forme de sa métrique, et aussi pour son importance qu'il a eu particulièrement dans le domaine de l'astrophysique et la cosmologie jusqu'au domaine de la physique de l'état solide (les défauts de dislocations) : ces études ont méritées un grand intérêt dans les recherches modernes en physique théorique [9--27, 29--34, 77, 79, 97].

Dans notre cas, nous avons étudiés le cas des oscillateurs bosoniques relativistes en présence des défauts topologiques et spécialement le cas de la présence d'une corde cosmique. Ce problème a été résolu par l'utilisation de l'équation de KG et de l'équation de DKP. Les résultats trouvés peuvent être récapitulés comme suit :

1. **Pour le cas de l'équation de KG**, nous avons étudié l'influence des champs gravitationnels produits par la topologie induite de la corde cosmique sur l'oscillateur de KG en présence d'un champ magnétique uniforme parallèle à la corde. Nous pouvons voir que les solutions propres dépendent explicitement du paramètre non local de l'espace-temps considéré même dans le cas où l'espace-temps de la corde est localement plat. Contrairement au cas d'un oscillateur de KG dans un espace-temps plat, la présence des défauts topologiques brise totalement la dégénérescence du spectre de l'oscillateur de KG.
2. Maintenant, **pour le cas de l'équation de DKP** on distingue deux situations selon la nature de la particule :

- (a) Cas d'un **photon massif** correspondant à l'union de deux particules identiques de spin-1/2 de masse totale M : ici l'oscillateur de Kemmer bidimensionnel sous l'influence du champ gravitationnel produit par la topologie de l'espace-temps de la corde cosmique et en présence d'un champ magnétique uniforme aussi bien sans champ magnétique sont bien étudiés. Les solutions ont été trouvées en utilisant la méthode paramétrique généralisée de Nikiforov-Uvarov (NU) et l'influence de l'espace-temps d'une corde cosmique sur le spectre d'énergie a été analysé. Les solutions propres ont été obtenues, et la dynamique du système physique en considération dépend des caractéristiques de défaut topologique de la corde cosmique. En outre, en comparant le spectre d'énergie obtenu avec celui trouvé dans l'espace-temps plat, nous pouvons voir que la présence du déficit angulaire caractérisant la structure globale de la métrique dans l'espace-temps de la corde cosmique brise aussi la dégénérescence de ces énergies.
- (b) Cas d'une *particule bosonique de spin zéro ou un* : les solutions propres de l'oscillateur de DKP ont subi une modification importante lorsqu'ils sont soumis à l'action des potentiels scalaires tel que le potentiel coulombien, dont la fonction d'onde est définie comme une série biconfluente de Heun. Pour le spectre d'énergie qui dépend clairement du paramètre de potentiel f (ou \hat{f}) où les niveaux des états propres sont définis par le nombre quantique $n = 1$ au lieu de $n = 0$ comme il le montre les équations. (3.50), (3.160) et (3.215). Aussi, les valeurs de la fréquence angulaire ω est restreint, et dépend uniquement des nombres quantiques $\{n, j\}$. En outre, le spectre d'énergie obtenu dans l'espace-temps de la corde cosmique sont non-dégénérés à cause de la dépendance de ce spectre avec l'angle déficit α , contrairement dans le cas de l'espace-temps plat où les spectres d'énergie sont fortement dégénérés.

Les principales perspectives de recherche qui apparaissent à l'issue de cette thèse concernant les résultats trouvés, nous pouvons envisager de compléter les travaux suivants :

- en premier lieu, faire une extension de notre étude en insérant la dislocation dans notre espace-temps : on prévoit aussi d'intégrer les autres type de défauts topolo-

giques tels que les parois de domaines et les monopôles.

- ensuite, résoudre le problème en considération dans le cadre de la longueur minimale.
- enfin, étudier l'influence de défauts topologiques sur les propriétés thermodynamiques des ces oscillateurs harmoniques relativistes bosoniques ou fermioniques.

Bibliographie

- [1] M. Moshinsky, Y. F. Smirnov, *The Harmonic Oscillator in Modern Physics*, Harwood (Ed.), Amsterdam : Harwood, **1996**.
- [2] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, 22.
- [3] J. Franco-Villafane, E. Sadurni, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, *Phys. Rev. Lett* **2013**, 111, 70405.
- [4] C. Quesne, *J. Phys. A : Math. Theor* **2017**, 50, 081001.
- [5] D. Puetzfeld, C. Lämmerzahl, B. Schutz, *Equations of Motion in Relativistic Gravity*, Springer, **2015**.
- [6] E. Schrodinger, *Physica* **1932**, 6, 899.
- [7] G. C. McVittie, *Mon. Not. R. Astron. So* **1932**, 92, 868--877.
- [8] W. Pauli, *Ann. Phys* **1933**, 18, 337.
- [9] K. Bakke, *Phys. Lett. A* **2010**, 374, 3143–3146.
- [10] K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus* **2012**, 127, 82.
- [11] K. Bakke, C. Furtado, *Phys. Rev. D* **2009**, 80, 1--8.
- [12] K. Bakke, C. Furtado, *Phys.Rev. D* **2010**, 82, 1--7.

- [13] K. Bakke, L. R. Ribeiro, C. Furtado, J. R. Nascimento, *Phys. Rev. D* **2009**, 79, 1--6.
- [14] K. Bakke, A. de M. Carvalho, C. Furtado, *Eur. Phys. J. C* **2009**, 63, 149--155.
- [15] K. Bakke, C. Furtado, *Ann. Phys* **2013**, 336, 489--504.
- [16] K. Bakke, J. R. Nascimento, C. Furtado, *Phys. Rev. D* **2008**, 78, 064012.
- [17] G. de A. Marques, V. B. Bezerra, S. G. Fernandes, *Phys. Lett. A* **2005**, 341, 39--47.
- [18] E. F. Medeiros, E. B. de Mello, *Eur. Phys. J. C* **2012**, 72, 2051.
- [19] M. Carmeli, *Int. J. Theor. Phys* **1999**, 38, 1993--2007.
- [20] L. B. Castro, *Eur. Phys. J. C* **2015**, 75, 287.
- [21] M. R. Anderson, *The Mathematical Theory Of Cosmic Strings*, Intitute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, **2003**.
- [22] M. O. Katanaev, I. V. Volovitc, *Ann. Phys* **1992**, 216, 1--28.
- [23] J. A. G. Vickers, *Class. Quantum. Grav* **1987**, 4, 1-- 9.
- [24] M. de Montigny, M. Hosseinpour, H. Hassanabadi, *Int. J. Mod. Phys* **2016**, 31, 1650191.
- [25] K. D. K. D. Goswami, *Gen. Rel. Gravi* **1993**, 25, 117--122.
- [26] E. R. B. de Mello, A. A. Saharian, S. V. Abajyan, *Class. Quantum. Grav* **2013**, 30.
- [27] A. Vilenkin, *Phys. Rep* **1985**, 121, 263--315.
- [28] K. Bakke, *Ann. Phys* **2014**, 341, 86--93.
- [29] K. Bakke, F. Moraes, *Phys. Lett. A* **2012**, 376, 2838--2841.
- [30] J. Carvalho, C. Furtado, F. Moraes, *Phys. Rev. A* **2011**, 84, 032109.
- [31] K. D. Krori, H. Kakati, *Gen. Rel. Gravi* **1995**, 27, 1237--1249.

- [32] K. Bakke, C. Furtado, *Phys. Rev. A* **2013**, *87*, 1--7.
- [33] K. Bakke, C. Furtado, *Phys. Rev. A* **2009**, *80*, 1--7.
- [34] K. D. K. and D. Goswami, M. Barua-Basu, K. Das, *Class. Quantum Grav* **1994**, *11*, L153--L155.
- [35] D. Itô, K. Mori, E. Carriere, *Nuovo Cimento A* **1967**, *51*.
- [36] R. Martínez-y-Romero, A. Salas-Brito, *J. Math. Phys* **1992**, *33*, 1831--1836.
- [37] J. Bentez, R. P. M. y Romero, H. N. Núñez-Yépez, A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett* **1990**, *64*, 1643.
- [38] M. Moreno, A. Zentella, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, *22*.
- [39] P. Rozmej, R. Arvieu, *J. Phys. A* **1999**, *32*, 5367.
- [40] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, E. Solano, *Phys. Rev. A* **2007**, *76*.
- [41] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, A. Luis, *Phys. Rev. A* **2008**, *77*.
- [42] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, E. Solano, *Phys. Rev. Lett* **2007**, *99*.
- [43] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, A. Luis, *Phys. Rev. A* **2008**, *77*.
- [44] S. Bruce, P. Minning, *Nuovo Cimento A* **1993**, *106*.
- [45] N. Rao, B. Kagali, *Phys. Scr* **2008**, *77*, 015003.
- [46] A. Boumali, A. Hafdallah, A. Toumi, *Phys. Scr* **2011**, *84*.
- [47] V. V. Dvoeglazov, *Nuovo Cimento A* **1994**, *107*, 1413.
- [48] R. I. A. del Castillo Astiazaran, Master's thesis, Departement of Physics, McGill University Montréal, Québec. Canada, **1991**.
- [49] R. J. Duffin, *Phys. Rev* **1938**, *54*.

- [50] G. Petiau, *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect.* **1936**, 18, 16.
- [51] R. F. Guertin, T. L. Wilson, *Phys. Rev. D* **1977**, 15, 1518.
- [52] B. Vijayalakshmi, M. Seetharaman, P. M. Mathews, *J. Phys. A Math. Gen* **1979**, 12, 665.
- [53] B. C. Clark, S.Hama, G. R. Kälbermann, R. L.Mercer, L.Ray, *Phys. Rev. Lett.* **1985**, 55, 592--595.
- [54] R. E. Kozack, B. C. Clark, S. Hama, V. K. Mishra, R. L. Mercer, L. Ray, *Phys. Rev. C* **1988**, 37, 2898--2901.
- [55] R. C. Barrett, Y. Nedjadi, *Nucl. Phys. A* **1995**, 585, 311c--312c.
- [56] S. Ait-Tahar, J. S. I Khalili, Y. Nedjadi, *Nucl. Phys. A* **1995**, 589, 307--319.
- [57] A. Boumali, *J. Phys. A : Math. Theor* **2009**, 42, 235301.
- [58] K. Saeedi, H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, *Eur. Phys. J. A* **2016**, 52, 346.
- [59] M. Falek, M. Merad, T. Birkandan, *J. Math. Phys* **2017**, 58, 023501.
- [60] A. Boumali, L. Chetouani, *Phys. Lett. A* **2005**, 346.
- [61] A. Boumali, L. Chetouani, H. Hassanabadi, *Can. J. Phys* **2013**, 91, 1--11.
- [62] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Z. Naturforsch* **2015**, 70, 619--627.
- [63] B. Boutabia-Chéraitia, T. Boudjedaa, *Phys. Lett. A* **2005**, 338, 97--107.
- [64] B. Boutabia-Chéraitia, T. Boudjedaa, *J. Geo. Phys* **2012**, 62, 2038--2043.
- [65] B. Boutabia-Chéraitia, A. Makhlouf, *EJTP* **2016**, 13, 145--154.
- [66] B. Boutabia-Chéraitia, T. Boudjedaa, *Ukr. J. Phys* **2016**, 59, 565--568.
- [67] A. Boumali, *Z. Naturforsch* **2015**, 70, 1.

- [68] A. Boumali, Ph.D. thesis, Annaba University, **2005**.
- [69] B. Boutabia-Chéraitia, A. Makhlouf, *Z. Naturforsch* **2016**, *71*, 405--412.
- [70] L. Chetouani, M. Merad, T. Boudjedaa, A. Lecheheb, *Int. J. Theor. Phys* **2004**, *43*, 1147--1159.
- [71] Y. Kasri, L. Chetouani, *Int. J. Theor. Phys* **2008**, *47*, 2249--2258.
- [72] Y. Chargui, A. Trabelsi, L. Chetouani, *Phys. Lett. A* **2010**, *374*, 2907--2913.
- [73] H. Sobhani, H. Hassanabadi, *Phys. Part. Nucl. Let* **2017**, *14*, 83--86.
- [74] O. J. Oluwadare, K. J. Oyewumi, *EPJA* **2017**, *53*, 29.
- [75] K. Bakke, C. Furtado, *Eur. Phys. J. B* **2014**, *87*.
- [76] A. L. C. de Oliveira, E. R. B. de Mello, *Class. Quantum. Grav* **2006**, *23*, 5249--5263.
- [77] K. Bakke, C. Furtado, *Ann. Phys* **2015**, *355*, 48--54.
- [78] K. Bakke, *Braz. J. Phys* **2011**, *41*, 167--170.
- [79] K. Bakke, *Phys. Lett. A* **2010**, *374*, 4642--4646.
- [80] K. Bakke, *Phys. Rev. A* **2010**, *81*, 1--5.
- [81] M. Falek, M. Merad, *I. J. Mod. Phys. A* **2010**, *25*, 2747--2760.
- [82] M. Falek, M. Merad, *Cent. Eur. J. Phys* **2010**, *8*, 408--414.
- [83] B. F. Schutz, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge University Press, **1980**.
- [84] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, of Professor Douglas F Brewer, MA, DPhil Emeritus Professor of Experimental Physics, University of Sussex, I. O. P. PUBLISHING (Ed.), IOP Publishing Ltd 2003, **2003**.
- [85] J. Yepez, *arXiv :1106.2037v1* **2011**.

- [86] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, 2nd Edition Springer-Verlag (Ed.), Springer-Verlag, 2000.
- [87] I. Acikgov, N. Unal, *Found. Phys* **1998**, 28, 815--828.
- [88] Y. Sucu, N. Unal, *Eur. Phys. J. C* **2005**, 44, 287--291.
- [89] N. Unal, *concepts of physics* **2005**, II, 273--282.
- [90] A. Havare, T. Yetkin, *arxiv.org* **2002**.
- [91] H. Yanar, A. Havare, K. Sogut, *Advances in High Energy Physics* **2014**, 2014.
- [92] C. Furtado, F. Moraes, *Phys. Lett. A* **1994**, 188, 394--396.
- [93] K. D. Krori, S. N. G. Thakurtat, B. B. Paul, *J. Phys. A : Math., Nucl. Gen* **1974**, 7, 1884--1886.
- [94] K. D. Krori, J. Barua, *J. Phys. A : Math., Nucl. Gen.* **1974**, 7, 2125--2129.
- [95] K. D. Krori, D. Nandy, *J. Phys. A : Math. Gen* **1977**, 10, 993--996.
- [96] K. D. Krori, P. Borgohain, K. Das, *Class. Quantum Grav* **1990**, 7, 1539--1540.
- [97] K. Kroriti, D. Goswami, K. Dast, *Class. Quantum Grav* **1993**, 10, 125--129.
- [98] A. Verçin, *Phys. Lett. B* **1991**, 260.
- [99] J. Myrheim, E. Halvorsen, A. Verçin, *Phys. Lett. B* **1992**, 278, 171--174.
- [100] S. Slavyanov, W. Lay, *Special Functions : A Unified Theory Based on Singularities*, O. U. Press (Ed.), Oxford University Press, 2000.
- [101] K. Bakke, F. Moraes, *Phys. Lett. A* **2012**, 376, 2838--2841.
- [102] K. Bakke, H. Belich, *Eur. Phys. J. plus* **2012**, 127.
- [103] K. Bakke, C. Furtado, *Ann. Phys* **2015**, 355, 45--48.

- [104] G. Arfken, H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, E. A. Press (Ed.), Elsevier Academic Press- New York, **2005**.
- [105] K. D. C, *Theory and problem of tensor calculus*, McGraw-Hill, **1988**.
- [106] R. Sharpe, *Differential Geometry Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program*, springer (Ed.), **1991**.
- [107] B. Thaller, *The Dirac Equation*, W. B. W. T. E. H. Lieb (Ed.), Sprrrnger-Verlag Berlin Heidelberg, **1992**.
- [108] R. L. L. Vitoria, C. Furtado, K. Bakke, *arxiv.org* **2015**.
- [109] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **2013**, 128, 124--136.
- [110] A. Boumali, *Phys. Scr* **2015**, 90, 109501.

La méthode de Nikiforov-Uvarov (NU)

La méthode de Nikiforov-Uvarov (NU) est une puissante méthode utiliser pour résoudre les équations différentielles de deuxième ordre ayant sur la forme suivante

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} \right] \psi = 0. \quad (\text{A.1})$$

Dans cette méthode, les solutions propres satisfont les relations

$$\alpha_2 n - (2n + 1) \alpha_5 + (2n + 1) (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1) \alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3 \alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - (\alpha_{13}/\alpha_3)} P^{\alpha_{10} - 1, (\alpha_{11}/\alpha_3) - \alpha_{10} - 1} (1 - 2\alpha_3 s). \quad (\text{A.3})$$

Dans la limite $\alpha_3 = 0$, on a

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - (\alpha_{13}/\alpha_3)} = e^{\alpha_{13} s}, \quad (\text{A.4})$$

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - (\alpha_{13}/\alpha_3)} P^{\alpha_{10} - 1, (\alpha_{11}/\alpha_3) - \alpha_{10} - 1} = L_n^{\alpha_{10} - 1}(\alpha_{11} s). \quad (\text{A.5})$$

L'expression finale de la fonction d'onde est donc

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13} s} L_n^{\alpha_{10} - 1}(\alpha_{11} s) \quad (\text{A.6})$$

dont $L_n^{\alpha_{10} - 1}(\alpha_{11} s)$ est le polynome générale de Laguerre, avec

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1), \quad (\text{A.7})$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3)$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1, \quad (\text{A.8})$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2, \quad (\text{A.9})$$

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3, \quad (\text{A.10})$$

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6. \quad (\text{A.11})$$

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8}, \quad (\text{A.12})$$

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}), \quad (\text{A.13})$$

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}, \quad (\text{A.14})$$

$$\alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}). \quad (\text{A.15})$$

L'oscillateur de Dirac (DO)

B.1 Interprétation physique

En présence d'un champ magnétique , l'oscillateur de Dirac est donné par [2, 36--38]

$$\left\{ c\vec{\alpha} \left(\vec{P} - im\omega\gamma^0\vec{r} \right) + mc^2\gamma^0 \right\} \psi = E\psi \quad (\text{B.1})$$

avec

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

sont les matrices de Dirac , et $\vec{\sigma}$ étant les matrices de Pauli . A partir de l'équation (B.1), L'Hamiltonien de Dirac est donnée par :

$$H_D = c\vec{\alpha} \left(\vec{P} - im\omega\gamma^0\vec{r} \right) + mc^2\gamma^0, \quad (\text{B.3})$$

qui s'écrit aussi dans une forme covariante comme :

$$\left\{ \gamma^\mu P_\mu - m + \left(\frac{ge}{4m} \right) \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \psi = 0. \quad (\text{B.4})$$

On a que :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}), \quad (\text{B.5})$$

le tenseur électromagnétique s'écrit sous la forme

$$A_\mu = \frac{1}{4} \{2x_\mu(U.x) - x^2 U_\mu\}, \quad (\text{B.6})$$

où A_μ est le potentiel quadri-vecteur à l'oscillateur de Dirac dont $g = \frac{2m}{e}$ est le moment magnétique anormal.

l'équation (B.4) est similaire à l'équation de Dirac pour des particules neutres ayant un moment magnétique anormal μ ce qui donne l'équation de Dirac-Pauli suivante :

$$\left(\gamma^\mu P_\mu + \left(\frac{\mu}{2m} \right) \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m \right) \psi_D = 0. \quad (\text{B.7})$$

dont le terme $\frac{\mu}{2} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ a la forme suivante :

$$\frac{\mu}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i \vec{\sigma} \vec{E} - \vec{\Sigma} \vec{B}, \quad \vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma}, \quad \Sigma^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} \sigma^{ij}, \quad (\text{B.8})$$

ou ϵ^{kij} c'est le tenseur Levi-Cevita . Maintenant soit :

$$\psi_D(\vec{r}, t) = \exp(-iEt) \Phi_D(\vec{r}), \quad (\text{B.9})$$

dans ce cas l'équation (B.1) devient :

$$H_D \Phi_D = E \Phi_D, \quad (\text{B.10})$$

ou H_D est définie par

$$H_D = c \vec{\alpha} \vec{P} + ic\mu \vec{\gamma} \vec{E} - \mu c \gamma^0 \vec{\Sigma} \vec{B} + mc^2 \gamma^0, \quad (\text{B.11})$$

pour $\vec{B} = \vec{0}$, cet l'Hamiltonien devient :

$$H_D = c \vec{\alpha} \vec{P} + ic\mu \vec{\gamma} \vec{E} + mc^2 \gamma^0. \quad (\text{B.12})$$

En comparant l'équation (B.12) avec (B.3), on peut voir, que l'oscillateur de Dirac est simplement un cas particulier des particules neutres de Dirac dans un champ électrique

extérieur dont on peut faire la transformation suivante :

$$\vec{E} \longmapsto m\omega \vec{r} \quad (\text{B.13})$$

B.2 Les solutions en présence d'une corde cosmique

Dans cette section, nous discutons brièvement les solutions de l'oscillateur de Dirac dans une corde cosmique en présence d'un champ magnétique extérieur. [30].

B.2.1 En absence d'un champ magnétique externe

L'équation de Dirac dans une corde cosmique est donnée par la formule suivante :

$$\{i\tilde{\gamma}^\mu(x) [\partial_\mu - \Gamma_\mu] - m\} \psi_D = 0. \quad (\text{B.14})$$

Les matrices γ de Dirac dans l'espace-temps de la corde cosmique sont données par :

$$\beta = \tilde{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

$$\tilde{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.16})$$

$$\tilde{\gamma}^2(x) = \frac{1}{\alpha\rho} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Les coefficients de la connection spinorielle $\Gamma_\mu(x)$ sont calculés par

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{8} \omega_{\mu ab} [\gamma^a, \gamma^b], \quad (\text{B.18})$$

avec $\omega_b^a = \omega_{\mu b}^a dx^\mu$ où ω_b^a sont déterminés en résolvant l'équation (1.16), et ses composantes non nulles sont :

$$\omega_{\varphi 1}^2 = -\omega_{\varphi 2}^1 = \alpha. \quad (\text{B.19})$$

Ainsi, nous avons

$$\tilde{\gamma}^\mu(x) \Gamma_\mu(x) = -\frac{1}{2\rho} \gamma^1. \quad (\text{B.20})$$

En introduisant l'interaction de l'oscillateur de Dirac par $\partial_\rho \rightarrow \partial_\rho + m\omega\rho\beta$, et en insérant la relations (B.20) dans l'équation (B.14), on trouve l'équation de mouvement suivant :

$$\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1 \left(\partial_\rho + m\omega\rho\beta + \frac{1}{2\rho} \right) + i\frac{\gamma^2}{\alpha\rho}\partial_2 - m \right) \psi_D(t, \rho) = 0. \quad (\text{B.21})$$

Soit la fonction d'onde

$$\psi_D = e^{-iEt} e^{i(l+\frac{1}{2})\phi} \begin{pmatrix} \phi(\rho) \\ \chi(\rho) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

alors, on obtient un système des équations comme

$$(E - m)\phi - \left\{ \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} - m\omega\rho \right) - i \left(\frac{l + \frac{1}{2}}{\alpha\rho} \right) \right\} \chi = 0, \quad (\text{B.23})$$

$$(E + m)\chi + \left\{ \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} + m\omega\rho \right) + i \left(\frac{l + \frac{1}{2}}{\alpha\rho} \right) \right\} \phi = 0. \quad (\text{B.24})$$

Par un calcul algébrique direct, on aura

$$\left[\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho - \left\{ m^2\omega^2\rho^2 + \frac{\eta_\pm^2}{\rho^2} - \gamma_\mp \right\} \right] \begin{pmatrix} \phi(\rho) \\ \chi(\rho) \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{B.25})$$

avec

$$\lambda = s \frac{l + \frac{1}{2}}{\alpha},$$

$$\eta_\pm = \lambda \pm \frac{1}{2}, \quad (\text{B.26})$$

$$\gamma_\mp = E^2 - m^2 + 2m\omega \left(\lambda \mp \frac{1}{2} \right).$$

En faisant maintenant un changement de variable $\varrho = m\omega\rho^2$, l'équation (B.25) se transforme à

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} - \left[\frac{\eta_\pm^2}{4\varrho^2} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma_\mp}{4m\omega\varrho} \right] \right) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}(\varrho) = 0. \quad (\text{B.27})$$

Afin de résoudre cette équation, nous appliquons la méthode de Nikiforov-Uvarov (NU) : alors tous les paramètres de la méthode sont

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \quad (\text{B.28})$$

$$\xi_1 = \frac{1}{4}, \xi_2 = \frac{\gamma_-}{4m\omega}, \xi_3 = \frac{\eta_+^2}{4}, \quad (\text{B.29})$$

$$\alpha_4 = \alpha_5 = 0, \alpha_6 = \frac{1}{4}, \alpha_7 = -\frac{\gamma_-}{4m\omega}, \quad (\text{B.30})$$

$$\alpha_8 = \frac{\eta_+^2}{4}, \alpha_9 = \frac{1}{4}, \alpha_{10} = 1 + |\eta_+|, \quad (\text{B.31})$$

$$\alpha_{11} = 1, \alpha_{12} = \frac{|\eta_+|}{2}, \alpha_{13} = \frac{1}{2}, \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{2n+1}{2} - \frac{\gamma_-}{4m\omega} + \frac{|\eta_+|}{2} = 0. \quad (\text{B.33})$$

D'après les relations (B.26) et (B.33), et par une simple manipulation, nous trouvons les niveaux d'énergie suivants :

$$E^2 = m^2 + 4m\omega \left(n + \frac{|\eta_{\pm}|}{2} - \frac{\eta_{\mp}}{2} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{B.34})$$

avec $n = 0, 1, 2, \dots, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, s = \pm 1$. La fonction propre est donnée en termes de fonction confluyente hypergéométrique comme suit :

$$\begin{bmatrix} \chi(\rho) \\ \phi(\rho) \end{bmatrix} = (m\omega)^{\frac{|\eta_{\pm}|}{2}} \rho^{|\eta_{\pm}|} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} F(-n, |\eta_{\pm}| + 1, m\omega\rho^2) \quad (\text{B.35})$$

B.2.2 En présence d'un champ magnétique externe

L'oscillateur de Dirac à deux dimensions dans une corde cosmique et en présence d'un champ magnétique est défini par

$$\left(i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^1 \left(\partial_1 + m\omega\rho\beta + \frac{1}{2\rho} \right) + i\frac{\gamma^2}{\alpha\rho} \left(\partial_2 + i\frac{e\phi_B}{2\pi} \right) - m \right) \psi_D(t, \rho) = 0. \quad (\text{B.36})$$

Utilisons la même fonction d'onde précédente (B.22) nous trouvons :

$$\left[\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \left\{ m^2\omega^2\rho^2 + \frac{\eta_{\pm}^2}{\rho^2} - \Omega_{\mp} \right\} \right] \begin{pmatrix} \phi(\rho) \\ \chi(\rho) \end{pmatrix} = 0, \quad (\text{B.37})$$

avec

$$\eta'_{\pm} = s \frac{[l + \frac{1}{2}] + \frac{e\phi_B}{2\pi}}{\alpha} \pm \frac{1}{2} = \lambda' \pm \frac{1}{2},$$

et

$$\Omega_{\mp} = E^2 - m^2 + 2m\omega \left(\lambda' \mp \frac{1}{2} \right). \quad (\text{B.38})$$

Soit maintenant la variable suivante $\varrho = m\omega\rho^2$, alors (B.37) devient

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \left[\frac{\eta_{\pm}'^2}{4\varrho^2} + \frac{1}{4} - \frac{\Omega_{\mp}}{4m\omega\varrho} \right] \right) \begin{pmatrix} \phi(\varrho) \\ \chi(\varrho) \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{B.39})$$

Pour résoudre l'équation ci-dessus, nous utilisons la méthode NU : cette dernière conduit aux solutions propres suivantes

$$E^2 = m^2 + 4m\omega \left(n + \frac{|\eta'_{\pm}|}{2} - \frac{\eta'_{\mp}}{2} + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{B.40})$$

dont

$$\eta'_{\pm} = \lambda' \pm \frac{1}{2} = \frac{s}{\alpha} \left\{ \left[l + \frac{1}{2} \right] + \frac{e\phi_B}{2\pi} \right\} = \eta'_{\pm} = \frac{s}{\alpha} \left\{ l_B + \frac{1}{2} \right\}, \quad (\text{B.41})$$

avec $n = 0, 1, 2, \dots, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. La fonction d'onde totale est

$$\begin{bmatrix} \chi(\rho) \\ \phi(\rho) \end{bmatrix} = (m\omega)^{\frac{|\eta'_{\pm}|}{2}} \rho^{|\eta'_{\pm}|} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} F(-n, |\eta'_{\pm}| + 1, m\omega\rho^2). \quad (\text{B.42})$$

Les matrices β de l'équation de DKP dans un espace-temps de Minkowsk

C.1 Particule de spin-0

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

dont l'opérateur $\eta = 2(\beta^0)^2 - 1$ avec $\eta^2 = 1$.

C.2 Particule de spin-1

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (C.3)$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (C.4)$$

Liste des articles

1. *A. Boumali and N. Messai, Can. J. Phys.* **92**, 1460–1463 (2014).
2. *N. Messai and A. Boumali, Eur. Phys. J. Plus.* **130** : 140 (2015).
3. *A. Boumali and N. Messai, Can. J. Phys.* 2016-0800 (April 2017).

Klein–Gordon oscillator under a uniform magnetic field in cosmic string space–time

Abdelmalek Boumali and Nadjette Messai

Abstract: In this article, we study the influence of the gravitational fields produced by a topology such as cosmic string space–time on a Klein–Gordon oscillator in the presence of a uniform magnetic field. We present the eigensolutions of our problem in question and analyze the influence of cosmic string space–time on the eigenvalues.

PACS Nos.: 98.80.Cq.

Résumé : Nous étudions ici l'influence des champs gravitationnels produits par la topologie, comme l'espace–temps d'une corde cosmique, sur un oscillateur de Klein–Gordon en présence d'un champ magnétique uniforme. Nous trouvons les solutions propres (eigen) de notre problème et nous analysons l'influence de l'espace–temps de la corde cosmique sur les valeurs propres. [Traduit par la Rédaction]

1. Introduction

The analysis of gravitational interactions with a quantum mechanical system has recently attracted attention in particle physics and has been an active field of research.

The way to understand the interaction between relativistic quantum mechanical particles and gravity is to solve the general relativistic form of their wave equations. These equations may be considered insignificant at the atomic scale, where gravitational effects are weak, but the physics governing these particles plays an important role in astrophysics and cosmology, in which gravitational effects play a dominant role. In addition, studying single-particle states is important to constructing a unified theory of gravitation and quantum mechanics [1–4].

The Dirac oscillator (DO) interaction is potentially important for both theory and application. It was studied for the first time by Ito et al. [5]. Moshinsky and Szczepaniak [6] were the first to substitute the term $\mathbf{p} - im\omega\beta\mathbf{r}$ for the momentum operator in the Dirac equation. It can be shown that the DO is a physical system that can be interpreted as the interaction of the anomalous magnetic moment with a linear electric field [7, 8]. The electromagnetic potential associated with the DO was found by Benitez et al. [9].

The DO has attracted a lot of interest both because it provides one example of the Dirac equation's exact solvability [10] and because of its numerous physical applications. Many aspects of the DO as a relativistic quantum mechanics problem have been studied, including covariance properties, complete energy spectrum and corresponding wave functions, symmetry Lie algebra, shift operators, hidden supersymmetry, conformal invariance properties, and the completeness of the wave function. Relativistic many-body problems with DO interactions have been extensively studied, with a special emphasis on the mass spectra of mesons (quark–antiquark systems) and baryons (three-quark systems). The dynamics of wave packets in a DO have been determined, and a relation with the Jaynes–Cumming model has been established. The (2 + 1) space–time has also been shown to be an interesting framework for discussing the DO in connection with new phenomena (such as the quantum Hall effect and fractional statistics) in condensed matter physics. The thermodynamic prop-

erties of the DO in (1 + 1) space–time have been mentioned to be relevant to the studies of quark–gluon plasma models (see refs. 11 and 12 and references therein).

Recently, the interaction of particles with a gravitational field produced by topological defects has become a well-investigated topic, being studied in such problems as particle scattering due to topological defects, Landau levels in the presence of topological defects, the DO in a topological defect, the noninertial effect of the DO in a topological defect, and so on. (For further information see refs. 3 and 4 and the references therein).

The aim of the present study is to solve the Klein–Gordon equation for the DO interaction in a background produced by topological defects, such as cosmic strings and magnetic cosmic strings. Our contribution redresses the lack of existing literature concerning the physical properties of charged, massive scalar particles of spin 0 interacting with gravitational fields due to topological defects.

The well-known prescription to introduce the DO interaction in the Klein–Gordon equation was proposed by Mirza and coworkers [13, 14]. Thus, the Klein–Gordon oscillator, in flat space, in a final form must be written as

$$[(\mathbf{p} + im\omega\mathbf{r})(\mathbf{p} - im\omega\mathbf{r}) + E^2 - m^2]\psi = 0 \quad (1)$$

This paper is organized as follows. In Sect. 2, we solve the free Klein–Gordon equation in a cosmic string background. The solutions of the Klein–Gordon oscillator in a magnetic cosmic string background are presented in Sect. 3. Section 4 will be a conclusion.

2. Free Klein–Gordon equation in a cosmic string background

In this section, we solve the Klein–Gordon oscillator in cosmic string space–time. The general form of the cosmic string metric, in (t, ρ, ϕ, z) cylindrical coordinates is [1]

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \alpha^2\rho^2d\phi^2 + dz^2 \quad (2)$$

Received 15 August 2013. Accepted 31 March 2014.

A. Boumali and N. Messai. Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique, Université de Tébessa, 12000, W. Tébessa, Algeria.

Corresponding author: Abdelmalek Boumali (e-mail: boumali.abdelmalek@gmail.com).

where $-\infty < (t, z) < +\infty$, $0 < \rho \leq \infty$, and $0 \leq \phi \leq 2\pi$. The parameter α is the deficit angle associated with a conical geometry obeying $\alpha = 1 - 4\eta$, and η is the linear mass density of the string in natural units ($\hbar = c = 1$).

The governing equation of a massive scalar field with an arbitrary coupling to the gravitational field takes the form [1–4]

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} \mathbf{g}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} - m^2 + \zeta R \right) \psi = 0 \tag{3}$$

where R is the Ricci scalar, and $\mathbf{g}_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \alpha^2\rho^2, 1)$ is the fundamental tensor with $g = \det(\mathbf{g}_{\mu\nu}) = -\alpha^2\rho^2$.

To calculate the Ricci scalar, we use the following equation [15]:

$$R = \mathbf{g}^{\mu\nu} \mathbf{R}_{\mu\nu} \tag{4}$$

where

$$\mathbf{R}_{\mu\nu} = \mathbb{R}_{\mu\kappa\nu}^\kappa \tag{5}$$

with $\mathbb{R}_{\lambda\mu\nu}^\kappa$ being the Riemann curvature tensor given by

$$\mathbb{R}_{\lambda\mu\nu}^\kappa = \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa - \partial_\nu \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa + \Gamma_{\nu\lambda}^\eta \Gamma_{\mu\eta}^\kappa - \Gamma_{\mu\lambda}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\kappa \tag{6}$$

where

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa = \frac{1}{2} \mathbf{g}^{\kappa\nu} (\partial_\lambda \mathbf{g}^{\mu\nu} + \partial_\mu \mathbf{g}^{\nu\lambda} - \partial_\nu \mathbf{g}^{\lambda\mu}) \tag{7}$$

are the Christoffel symbols. Using these equations, we find that the Ricci scalar is vanishing everywhere except the cosmic string axis — i.e., the curvature tensor is concentrated on the cosmic string axis, and at all other points the curvature is zero.

Hence, the free Klein–Gordon equation in the cosmic string background, (2), becomes

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{d^2}{dz^2} - m^2 \right) \psi = 0 \tag{8}$$

A solution of this equation can be constructed by taking into account temporal independence and the rotational symmetry of the background around the z -axis.

Thus, we can choose the following ansatz:

$$\psi = e^{iEt + i\ell\phi + ikz} \Phi(\rho) \tag{9}$$

Hence, (8) becomes

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{l^2}{\alpha^2 \rho^2} + E^2 - k^2 - m^2 \right) \Phi(\rho) = 0 \tag{10}$$

or

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \left(\frac{\lambda^2}{\rho^2} - \gamma^2 \right) \right] \Phi(\rho) = 0 \tag{11}$$

with

$$\lambda = \frac{l}{\alpha} \quad \gamma^2 = E^2 - k^2 - m^2 \tag{12}$$

Putting $z = \gamma\rho$ and $\Phi(\rho) = u(z)$, we get

$$\frac{d^2 u(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} u'(z) + \left(1 - \frac{\lambda^2}{z^2} \right) u(z) = 0 \tag{13}$$

which is a Bessel equation [16]. Thus, the eigensolutions of free Klein–Gordon equation are given by [1, 2]

$$E^2 = m^2 + p^2 \quad (p^2 = k^2 + \gamma^2) \tag{14}$$

$$\Phi(\rho) = N J_{|\lambda|}(\gamma\rho) \tag{15}$$

where N is a normalization factor.

3. Klein–Gordon oscillator in magnetic cosmic string space–time

3.1. Klein–Gordon oscillator without an external magnetic field

According to (3), a Klein–Gordon oscillator in a cosmic string background, where $p_\rho \rightarrow p_\rho - im\omega\rho$, can be described by

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} (\partial_\rho - m\omega\rho)(\rho\partial_\rho + m\omega\rho^2) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{d^2}{dz^2} - m^2 \right] \Phi(\rho) = 0 \tag{16}$$

The calculation of the term $(\partial_\rho - m\omega\rho)(\rho\partial_\rho + m\omega\rho^2)$ yields

$$(\partial_\rho - m\omega\rho)(\rho\partial_\rho + m\omega\rho^2) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} - m^2 \omega^2 \rho^3 + 2m\omega\rho \tag{17}$$

Using the ansatz

$$\psi = e^{-iEt + ij\phi + ikz} \varphi(\rho) \tag{18}$$

where $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, and k is a constant, (16) transforms into

$$\left[\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \left(\frac{\kappa^2}{\rho^2} + m^2 \omega^2 \rho^2 - \vartheta \right) \right] \Phi(\rho) = 0 \tag{19}$$

with

$$\vartheta = E^2 - m^2 - k^2 + 2m\omega \quad \kappa = \frac{j}{\alpha} \tag{20}$$

Now, let us make a coordinate transformation given by $\xi = m\omega\rho^2$. We obtain the following second-order differential equation:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \left(\frac{\kappa^2}{4\xi^2} + \frac{1}{4} - \frac{\vartheta}{4m\omega\xi} \right) \right] \Phi(\rho) = 0 \tag{21}$$

To obtain a regular solution of (21), we assume $\Phi(\rho) = \xi^{(|\kappa|/2)} e^{-(\xi/2)} F(\xi)$. Then (21) is transformed into

$$\xi F''(\xi) + (|\kappa| + 1 - \xi) F'(\xi) - \left(\frac{|\kappa|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\vartheta}{4m\omega} \right) F(\xi) = 0 \tag{22}$$

which is the confluent hypergeometric equation for $F \equiv {}_1F_1: xF''(x) + (c-x)F'(x) - aF(x)$ [16].

To obtain normalized solutions of this equation, we require that the polynomial series converge. This requirement is fulfilled by assuming the independent term to be a negative integer. Thus [16],

$$\frac{|\kappa|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\vartheta}{4m\omega} = -n \tag{23}$$

By simple calculation we find the following energy levels:

$$E_{k,j,\alpha}^2 = m^2 + 2m\omega\left(2n + \frac{|j|}{\alpha}\right) + k^2 \tag{24}$$

The relativistic energy levels (24) correspond to the relativistic energy spectrum of the Klein–Gordon oscillator in a cosmic string background.

The presence of the deficit angle α modifies the degenerate spectrum of the particle. In contrast to the case of the DO [3], and unlike the case of flat space, the presence of the defects breaks the degeneracy of the energy levels.

In the limit where $\alpha \rightarrow 1$, and when we put $N = 2n + j$, which corresponds to the principal quantum number, we recover the energy spectrum of the Klein–Gordon oscillator in flat space [13, 17].

In the classical limit, using the relation $E = \epsilon + m$, and the nonrelativistic limit $\epsilon \ll m$, (24) becomes

$$\frac{E^2 - m^2}{2m} \simeq \epsilon = \omega\left(2n + \frac{|j|}{\alpha}\right) + \frac{k^2}{2m} \tag{25}$$

Therefore, the presence of α in (25) also breaks the degeneracy of the spectrum.

Finally, the total wave function of our problem is given by

$$\psi(\rho) = e^{-iEt} e^{ij\phi} e^{ikz} (m\omega\rho^2)^{|j|/\alpha} \exp\left(-\frac{m\omega\rho^2}{2}\right) {}_1F_1\left(-n, \frac{|j|}{\alpha} + 1, m\omega\rho^2\right) \tag{26}$$

3.2. Klein–Gordon oscillator in a magnetic cosmic string background

In cosmic string space–time, the vector potential associated with a uniform magnetic field parallel to the string, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = B_0 \mathbf{k}$, can be written as [18]

$$\mathbf{A} = -\frac{\alpha B_0 \rho^2}{2} \mathbf{e}_\phi \tag{27}$$

Then, the Klein–Gordon oscillator in magnetic cosmic string space–time obeys

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho}(\partial_\rho - m\omega\rho)(\rho\partial_\rho + m\omega\rho^2) + \frac{1}{\alpha^2\rho^2}\left(\partial_\phi - i\frac{eB_0\rho^2}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{dz^2} - m^2 \right] \Phi(\rho) = 0 \tag{28}$$

Using (18), (28) transforms into

$$\left[\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho + E^2 - k^2 + 2m\left(\omega + \omega_0\frac{j}{\alpha}\right) - m^2 - m^2\Omega^2\rho^2 - \frac{j^2}{\alpha^2\rho^2} \right] \Phi(\rho) = 0 \tag{29}$$

where $\omega_0 = (eB_0)/(2m)$ is the so-called cyclotron frequency of the particle, and

$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega_0^2 \tag{30}$$

Defining the following variables:

$$\xi = m\Omega\rho^2 \tag{31}$$

$$\Gamma = E^2 - k^2 + 2m\left(\omega + \omega_0\frac{j}{\alpha}\right) - m^2 \tag{32}$$

$$\zeta_1 = \frac{j}{\alpha} \tag{33}$$

and using the ansatz $\varphi(\xi) = \xi^{|\zeta_1|/2} e^{-(\xi/2)} F(\xi)$, we obtain

$$\xi F''(\xi) + (|\zeta_1| - \xi + 1)F'(\xi) - \left(\frac{|\zeta_1|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\Gamma}{4m\Omega}\right)F(\xi) = 0 \tag{34}$$

The solution to this differential equation is also the well-known confluent hypergeometric function [16]. As in (22), to obtain a normalized solution for this equation, we require that the polynomial series converge. This requirement is fulfilled by setting the independent term to be a negative integer, that is,

$$\frac{|\zeta_1|}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\Gamma}{4m\Omega} = -n \tag{35}$$

Therefore, the eigenvalues are

$$E_{k,j,n}^2 = 2m\Omega\left(2n + \frac{|j|}{\alpha} + 1\right) - 2m\left(\omega + \omega_0\frac{j}{\alpha}\right) + m^2 + k^2 \tag{36}$$

The relativistic energy levels (36) correspond to the relativistic energy spectrum of the Klein–Gordon oscillator in a magnetic cosmic string background. Two remarks about (36) can be made:

- the vanishing of the frequency of the DO interaction, $\omega = 0$, leads to the same results obtained in ref. 18; and
- the vanishing magnetic field, $\omega_0 = 0$, yields the energy spectrum given by (24).

The presence of α in the energy spectrum breaks the degeneracy of the energy levels. In the limit $\alpha \rightarrow 1$, and when we set $N = 2n + j$, we recover the energy spectrum of the Klein–Gordon oscillator in flat space.

In the classical limit, using the relation $E = \epsilon + m$ and the nonrelativistic limit $\epsilon \ll m$, (36) becomes

$$\frac{E^2 - m^2}{2m} \simeq \epsilon = \Omega\left(2n + \frac{|j|}{\alpha} + 1\right) - \omega + \omega_0\frac{j}{\alpha} + \frac{k^2}{2m} \tag{37}$$

and the presence of α in (37) also breaks the degeneracy of the spectrum.

Finally, the total wave function is expressed in terms of confluent hypergeometric functions.

$$\psi(\rho) = e^{-iEt} e^{ij\phi} e^{ikz} (m\Omega\rho^2)^{|j|/\alpha} \exp\left(-\frac{m\Omega\rho^2}{2}\right) {}_1F_1\left(-n, \frac{|j|}{\alpha} + 1, m\Omega\rho^2\right) \tag{38}$$

4. Conclusion

We have investigated the influence of topological defects due to cosmic strings on the Klein–Gordon oscillator, in the presence of a uniform magnetic field parallel to the string. The eigenvalues and eigenfunctions depend explicitly on the nonlocal parameter

of the space–time under consideration, even though it is locally flat. In contrast to the case of a Klein–Gordon oscillator in flat space, the presence of topological defects breaks the degeneracy of the spectrum of the Klein–Gordon oscillator.

Acknowledgements

We wish to express our sincere gratitude to the referees for their instructive comments and careful reading of this article, and we would like to thank I. Kanatchikov for assistance.

References

1. K.D. Krori, P. Borgohain, P.K. Kar, and D. Das. *J. Math. Phys.* **29**, 1645 (1988). doi:10.1063/1.527912.
2. K.D. Krori, P. Borgohain, and D. Das. *J. Math. Phys.* **35**, 1032 (1994). doi:10.1063/1.530649.
3. J. Carvalho, C. Furtado, and F. Moraes. *Phys. Rev. A*, **84**, 032109 (2011). doi:10.1103/PhysRevA.84.032109.
4. K. Bakke. *Eur. Phys. J. Plus.* **127**, 82 (2012). doi:10.1140/epjp/i2012-12082-2.
5. D. Itô, K. Mori, and E. Carriere. *Nuovo Cimento A*, **51**, 1119 (1967). doi:10.1007/BF02721775.
6. M. Moshinsky and A. Szczepaniak. *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L817 (1989). doi:10.1088/0305-4470/22/17/002.
7. R.P. Martinez-y-Romero and A.L. Salas-Brito. *J. Math. Phys.* **33**, 1831 (1992). doi:10.1063/1.529660.
8. M. Moreno and A. Zentella. *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L821 (1989). doi:10.1088/0305-4470/22/17/003.
9. J. Benitez, P.R. Martinez y , H.N. Romero, A.L. Nunez-Yepey, and Salas-Brito. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1643 (1990). doi:10.1103/PhysRevLett.64.1643. PMID: 10041450.
10. O. Castanos, A. Frank, R. Lopez, and L.F. Urrutia. *Phys. Rev. D*, **43**, 544 (1991). doi:10.1103/PhysRevD.43.544.
11. C. Quesne and V.M. Tkachuk. *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 1747 (2005). doi:10.1088/0305-4470/38/8/011.
12. E. Sadurne. *AIP Conf. Proc.* **1334**, 249 (2011).
13. B. Mirza and M. Mohadesi. *Commun. Theor. Phys.* **42**, 664 (2004). doi:10.1088/0253-6102/42/5/664.
14. B. Mirza, R. Narimani, and S. Zare. *Commun. Theor. Phys.* **55**, 405 (2011). doi:10.1088/0253-6102/55/3/06.
15. S. Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. John Wiley and Sons, Inc. 1972.
16. G.E. Andrews, R. Askey, and A. Roy. *Special functions*. Cambridge University Press, Cambridge. 1999.
17. H. Benzair, M. Merad, T. Boudjedaa, and M. Makhlof. *Z. Naturforsch.* **67**, 77 (2012). doi:10.5560/ZNC.2012.67c0077.
18. E.R. Figueiredo Medeiros, E.R. Bezerra de , and Mello. *Eur. Phys. J. Plus.* **72**, 2051 (2012). doi:10.1140/epjc/s10052-012-2051-9.

Exact solutions of a two-dimensional Kemmer oscillator in the gravitational field of cosmic string

Nadjette Messai^a and Abdelmalek Boumali^b

Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique, Université de Tébessa, 12000, W. Tébessa, Algeria

Received: 20 May 2015 / Revised: 28 June 2015

Published online: 22 July 2015 – © Società Italiana di Fisica / Springer-Verlag 2015

Abstract. The two-dimensional Kemmer oscillator under the influence of the gravitational field produced by a topology such as the cosmic string spacetime and in the presence of a uniform magnetic field as well as without magnetic field are investigated. The eigensolutions of our problem have been found by using the generalized parametric Nikiforov-Uvarov (NU) method, and the influence of the cosmic string spacetime on the energy spectrum has been analyzed. We show that the dependence of the energy levels of the quantum system with the angular deficit α , which characterizes the global structure of the metric in the cosmic string spacetime, breaks the degeneracy of these levels.

1 introduction

In relativistic quantum mechanics, the exact solutions of the wave equation are very important for the understanding of the physics that can be brought by such solutions. They are valuable tools in determining the radiative contributions to the energy. The quantum mechanics of charged, massive, and spin-1 particles in an external field has been studied in many different situations using different techniques [1–5]. These works have especially investigated the solutions of the equation in a magnetic field. These techniques are very complex in their determination of the eigensolutions of such particles. The relativistic wave equation for a massive spin-1 particle was initially derived by Kemmer in 1939. The Kemmer equation is a Dirac-type equation, which involves matrices obeying a different scheme of commutation rules [6, 7].

The analysis of gravitational interactions with a quantum mechanical system has recently attracted attention in particle physics and has been an active field of research. The general way to understand the interaction between relativistic quantum mechanical particles and gravity is to solve the general relativistic form of their wave equations. These equations may be considered insignificant at the atomic scale, where gravitational effects are weak, but the physics governing these particles plays an important role in astrophysics and cosmology, in which gravitational effects play a dominant role. In addition, studying single-particle states is important to constructing a unified theory of gravitation and quantum mechanics (see [8] and references therein).

The Dirac oscillator (DO) was for the first time studied by Itô and Carriere. On the other hand, Moshinsky and Szczepaniak were the first who introduced an interesting term in the Dirac equation. More specifically, they suggested to substitute in the free Dirac equation the momentum operator \vec{p} like $\vec{p} - im\omega\beta\vec{r}$. They could obtain a system in which the positive energy states have a spectrum similar to the one of the non-relativistic harmonic oscillator. Recently, this interaction has particularly got more interest [9]. It is reviewed, because of the interest in the many different domain in physics. Furthermore, the interaction of this oscillator with a gravitational field produced by topological defects, has become a well-investigated topic [10–19].

The aim of the present study is to solve the Kemmer oscillator in a background produced by topological defects, such as cosmic strings and magnetic cosmic strings. Also, our contribution redresses the lack of existing literature concerning the physical properties of charged, massive scalar particles of spin-1 interacting with gravitational fields due to topological defects.

^a e-mail: nadjette.messai@gmail.com

^b e-mail: boumali.abdelmalek@gmail.com

This paper is organized as follows: in sect. 2, we present a review of the solutions of the DO in the cosmic string background. Section 3 is devoted to solve this case of the Kemmer oscillator in cosmic string spacetime using the NU method. Finally, sect. 4, will be a conclusion.

2 Eigen solutions of the two-dimensional Dirac oscillator

2.1 The solutions without a magnetic field

In this section we review the solutions of a two-dimensional Dirac oscillator in the cosmic string background. The metric which describes the cosmic string is given by

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (1)$$

where $-\infty < (t, z) < +\infty$, $0 < \rho \leq \infty$ and $0 \leq \phi \leq 2\pi$. The parameter α is the deficit angle associated with conical geometry obeying $\alpha = 1 - 4\eta$, and η is the linear mass density of the string in natural units $\hbar = c = 1$.

The Dirac equation in the arbitrary curved spacetime is written by [11]

$$[i\gamma^\mu(x)(\partial_\mu - \Gamma_\mu) - m]\psi_D = 0, \quad (2)$$

where m is the mass of particles, $\Gamma_\mu(x)$ are the spinor affine connections and γ^μ are the generalized Dirac matrices satisfying the anticommutation relations

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (3)$$

and defined in terms of a set of tetrad fields by

$$\gamma^\mu(x) = e_a^\mu(x)\gamma^a, \quad (4)$$

where e_a^μ satisfies the relation $e_a^\mu(x)e_b^\nu(x)\eta^{ab} = g^{\mu\nu}$, and $(\mu, \nu) = (0, 1, 2, 3)$ are tensor indices, $(a, b) = (0, 1, 2, 3)$ are tetrad indices and γ^a are the standard flat spacetime Dirac matrices [12–14]. The tensor $\eta^{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ is the Minkowski tensor.

For the two-dimensional case, we choose the Dirac matrices γ^a in terms of Pauli matrices as [20–22]

$$\gamma^a = (\sigma^3, i\sigma^1, is\sigma^2), \quad (5)$$

with parameter s taking the values ± 1 (+1 for spin up and -1 for spin down) [23].

The spinorial connection is given by [22]

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{8}\omega_{\mu ab}[\gamma^a, \gamma^b]. \quad (6)$$

These components can be obtained by solving the Maurer-Cartan structure equations in the absence of torsions: $d\hat{e}^a + \omega_b^a \hat{e}^b = 0$, where $\omega_b^a = \omega_{\mu b}^a(x)dx^\mu$, and $\omega_{\mu b}^a(x)$ is called connection 1-form [24].

According to eq. (1), we choose the tetrads for the line elements being

$$\hat{e}^0 = dt, \quad \hat{e}^1 = d\rho, \quad \hat{e}^2 = \rho d\phi, \quad \hat{e}^3 = dz. \quad (7)$$

By solving the Maurer-Cartan structure equations, we obtain that

$$\gamma^\mu(x)\Gamma_\mu(x) = -\frac{1}{2\rho}\gamma^1. \quad (8)$$

Now, to include the Dirac oscillator term $im\omega\beta\rho$ into eq. (2), we proceed with the following substitution in the radial momentum component $\partial_1 \rightarrow \partial_1 + m\omega\rho$. Hence, eq. (2) is transformed into

$$\left\{ i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\left(\partial_1 + m\omega\rho\beta + \frac{1}{2\rho}\right) \right\} \psi_D + \left(i\frac{\gamma^2}{\alpha\rho}\partial_2 - m \right) \psi_D = 0. \quad (9)$$

In order to solve eq. (9), we adopt the following Ansatz:

$$\psi_D = e^{-iEt} e^{i(l+\frac{1}{2})\phi} \begin{pmatrix} \phi(\rho) \\ \chi(\rho) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

By substituting (10) into (9), we get the following system of equations:

$$(E - m)\phi - \left\{ \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} - m\omega\rho \right) - is \left(\frac{l + \frac{1}{2}}{\alpha\rho} \right) \right\} \chi = 0, \tag{11}$$

$$(E + m)\chi + \left\{ \left(\partial_\rho + \frac{1}{2\rho} + m\omega\rho \right) + is \left(\frac{l + \frac{1}{2}}{\alpha\rho} \right) \right\} \phi = 0. \tag{12}$$

After a simple algebraic calculation, we have

$$\left[\partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \left\{ m^2 \omega^2 \rho^2 + \frac{\eta_\pm^2}{\rho^2} - \gamma_\mp \right\} \right] \begin{pmatrix} \phi(\rho) \\ \chi(\rho) \end{pmatrix} = 0, \tag{13}$$

with

$$\eta_\pm = \lambda \pm \frac{1}{2}, \quad \left(\lambda = s \frac{l + \frac{1}{2}}{\alpha} \right), \tag{14}$$

and where

$$\gamma_\mp = E^2 - m^2 + 2m\omega \left(\lambda \mp \frac{1}{2} \right), \tag{15}$$

By making a change of variables $\varrho = m\omega\rho^2$, eq. (13) transforms into

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \left(\frac{\eta_\pm^2}{4\varrho^2} + \frac{1}{4} - \frac{\gamma_\mp}{4m\omega\varrho} \right) \right\} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} (\varrho) = 0. \tag{16}$$

Now, in order to solve the last equation, we use the well-known method based on the Nikiforov-Uvarov method (NU) [25, 26]. Thus, by comparing with the equations from (A.1) to (A.11), the following expressions are obtained:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \tag{17}$$

$$\xi_1 = \frac{1}{4}, \quad \xi_2 = \frac{\gamma_-}{4m\omega}, \quad \xi_3 = \frac{\eta_+^2}{4}, \tag{18}$$

$$c_4 = c_5 = 0, \quad c_6 = \frac{1}{4}, \quad c_7 = -\frac{\gamma_-}{4m\omega}, \tag{19}$$

$$c_8 = \frac{\eta_+^2}{4}, \quad c_9 = \frac{1}{4}, \quad c_{10} = 1 + |\eta_+|, \tag{20}$$

$$c_{11} = 1, \quad c_{12} = \frac{|\eta_+|}{2}, \quad c_{13} = \frac{1}{2}, \tag{21}$$

$$\frac{2n + 1}{2} - \frac{\gamma_-}{4m\omega} + \frac{|\eta_+|}{2} = 0, \tag{22}$$

From these equations, the form of energy levels is

$$E^2 = m^2 + 4m\omega \left(n + \frac{|\eta_\pm|}{2} - \frac{\eta_\mp}{2} + \frac{1}{2} \right), \tag{23}$$

with $n = (0, 1, \dots)$, $l = (0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, and $s = \pm 1$. The eigenfunction is given in terms of hypergeometric confluent function as

$$\begin{bmatrix} \chi(\rho) \\ \phi(\rho) \end{bmatrix} = (m\omega)^{\frac{|\eta_\pm|}{2}} \rho^{|\eta_\pm|} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} \times F(-n, |\eta_\pm| + 1, m\omega\rho^2). \tag{24}$$

We note here that the eigensolutions obtained (eqs. (23), (24)) are similar to the one found by [11].

2.2 The solutions in a magnetic cosmic string background

The two-dimensional Dirac equation in the background of a cosmic string with magnetic field defined by its magnetic vector potential

$$\vec{A}_\phi = i \frac{\phi_B}{2\pi\alpha\rho} \vec{e}_\phi, \tag{25}$$

is

$$\left\{ i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1\left(\partial_1 + m\omega\rho\beta + \frac{1}{2\rho}\right) \right\} \psi_D + \left(i\frac{\gamma^2}{\alpha\rho}\left(\partial_2 + i\frac{e\phi_B}{2\pi}\right) - m \right) \psi_D = 0. \tag{26}$$

Using the same Ansatz as in eq. (10), and projecting it in eq. (26), we obtain

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho - \left(m^2\omega^2\rho^2 + \frac{\eta_{\pm}^2}{\rho^2} - \Omega_{\mp} \right) \right\} \begin{pmatrix} \phi(\rho) \\ \chi(\rho) \end{pmatrix} = 0, \tag{27}$$

with the following substitutions:

$$\eta'_{\pm} = s\frac{\left[l + \frac{1}{2}\right] + \frac{e\phi_B}{2\pi}}{\alpha} \pm \frac{1}{2} = \lambda' \pm \frac{1}{2}, \tag{28}$$

and

$$\Omega_{\mp} = E^2 - m^2 + 2m\omega\left(\lambda' \mp \frac{1}{2}\right), \tag{29}$$

Defining the following variable $\varrho = m\omega\rho^2$, eq. (27) transforms into

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} - \left(\frac{\eta_{\pm}^2}{4\varrho^2} + \frac{1}{4} - \frac{\Omega_{\mp}}{4m\omega\varrho} \right) \right\} \phi(\varrho) = 0. \tag{30}$$

By using the NU method, we have the following eigensolutions:

$$E^2 = m^2 + 4m\omega\left(n + \frac{|\eta'_{\pm}|}{2} - \frac{\eta'_{\mp}}{2} + \frac{1}{2}\right), \tag{31}$$

with $n = 0, 1, 2, \dots$ and $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, and

$$\eta'_{\pm} = \lambda' \pm \frac{1}{2} = \frac{s}{\alpha}\left\{\left[l + \frac{1}{2}\right] + \frac{e\phi_B}{2\pi}\right\} = \eta'_{\pm} = \frac{s}{\alpha}\left\{l_B + \frac{1}{2}\right\} \tag{32}$$

and where

$$\begin{pmatrix} \chi(\rho) \\ \phi(\rho) \end{pmatrix} = (m\omega)^{\frac{|\eta'_{\pm}|}{2}}\rho^{|\eta'_{\pm}|}e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} \times F\left(-n, |\eta'_{\pm}| + 1, m\omega\rho^2\right). \tag{33}$$

Also, these eigensolutions are similar to those found in [11].

3 Eigen solutions of the two-dimensional Kemmer oscillator

3.1 The solutions without a magnetic field

The free relativistic Kemmer equation in curved space-time is

$$\left(i\tilde{\beta}^{\mu}\nabla_{\mu} - M\right)\psi_K = 0, \tag{34}$$

where M is the total mass of identical spin- $\frac{1}{2}$ particles and $\tilde{\beta}$ are Kemmer matrices for the cosmic string background given by eq. (1). They satisfy the following commutation relation:

$$\tilde{\beta}^{\mu}\tilde{\beta}^{\nu}\tilde{\beta}^{\lambda} + \tilde{\beta}^{\lambda}\tilde{\beta}^{\nu}\tilde{\beta}^{\mu} = g^{\mu\nu}\tilde{\beta}^{\lambda} + g^{\lambda\nu}\tilde{\beta}^{\mu}, \tag{35}$$

with

$$\tilde{\beta}^{\mu} = \gamma^{\mu}(x) \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^{\mu}(x). \tag{36}$$

$\gamma^{\mu}(x)$ are the Dirac matrices defined in the previous section, eq. (3), \hat{I} is a 4×4 identity matrix, and \otimes indicates a direct product. The covariant derivative in eq. (34) is

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} - \Sigma_{\mu}, \tag{37}$$

where the spinorial connections can be written as [22]

$$\Sigma_{\mu} = \lim_{\gamma \rightarrow \sigma} \Sigma_{\mu} = \left(\Gamma_{\mu} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \Gamma_{\mu}\right), \tag{38}$$

where the spinorial connection $\Gamma_{\mu}(x)$ is given by eq. (6).

The stationary state ψ_K of eq. (34) is the four-component wave function of the Kemmer equation, which can be written in the form

$$\psi_K = \psi_D \otimes \psi_D = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4)^T, \tag{39}$$

with ψ_D the solution of the Dirac equation.

Thus, the Kemmer equation in the cosmic string background is

$$\left\{ i\tilde{\beta}^0 \partial_0 + i\tilde{\beta}^1 \partial_1 + i\tilde{\beta}^2 (\partial_2 - \Sigma_2) - M \right\} \psi_K = 0. \tag{40}$$

In the presence of Dirac oscillator potential, we could do the following change: $\partial_1 \rightarrow \partial_1 + M\omega\rho\hat{B}$. The operator $\hat{\mathbf{B}}$ is chosen as $\hat{B} = \gamma^0 \otimes \gamma^0$ with $\hat{B}^2 = \hat{I}$. Hence, the Kemmer equation with Dirac oscillator interaction

$$\left\{ i \left(\gamma^0 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^0 \right) \partial_0 + \square + \square \right\} \psi_K = 0, \tag{41}$$

with

$$\square = i \left\{ \left(\gamma^1 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^1 \right) \left(\partial_1 + M\omega\rho\hat{B} \right) \right\}, \tag{42}$$

$$\square = i \left\{ \left(\gamma^2 \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \gamma^2 \right) \left(\partial_2 - \Sigma_2 \right) - M \right\}. \tag{43}$$

Substituting eq. (38) into eq. (40), we obtain the following system of equations:

$$(2E - M)\psi_1 - \left(\partial_1 - M\omega\rho - \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_2 - \left(\partial_1 - M\omega\rho - \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_3 = 0, \tag{44}$$

$$\left(\partial_1 + M\omega\rho + \frac{1}{\rho} + is\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_1 + M\psi_2 + \left(\partial_1 + M\omega\rho + \frac{1}{\rho} - is\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_4 = 0, \tag{45}$$

$$\left(\partial_1 + M\omega\rho + \frac{1}{\rho} + is\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_1 + M\psi_3 + \left(\partial_1 + M\omega\rho + \frac{1}{\rho} - is\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_4 = 0, \tag{46}$$

$$(2E + M)\psi_4 + \left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_2 + \left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_3 = 0. \tag{47}$$

From these equations, we get the following results:

$$\psi_2 = \psi_3, \tag{48}$$

$$\psi_1 = \frac{2 \left(\partial_1 - M\omega\rho - \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right)}{2E - M} \psi_2, \tag{49}$$

$$\psi_4 = \frac{-2 \left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right)}{2E + M} \psi_2. \tag{50}$$

Putting eqs. (48), (49) and (50) into eq. (41), and with the following choice:

$$\psi_2 = e^{iJ\phi} \chi(\rho), \tag{51}$$

we get

$$\left(\partial_1^2 + \frac{\partial_1}{\rho} - M^2\omega^2\rho^2 - \frac{J^2}{\alpha^2\rho^2} \right) \chi(\rho) + \left(-2M\omega + 4sE\omega\frac{J}{\alpha} + E^2 - \frac{M^2}{4} \right) \chi(\rho) = 0. \tag{52}$$

Now, when we use the following transformations:

$$\lambda = \frac{sJ}{\alpha}, \tag{53}$$

$$\varsigma = E^2 + 4E\omega\lambda - 2M\omega - \frac{M^2}{4}, \tag{54}$$

we have

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \left(\frac{\lambda^2}{\rho^2} + M^2\omega^2\rho^2 - \varsigma \right) \right\} \chi(\rho) = 0. \tag{55}$$

We remark that the last equation is similar to eq. (13). So, by using the same method as in the case of the two-dimensional Dirac oscillator, we obtain

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} - \left(\frac{\lambda^2}{4\varrho^2} + \frac{1}{4} - \frac{\varsigma}{4M\omega\varrho} \right) \right\} \chi(\varrho) = 0. \tag{56}$$

By applying the NU method, we arrive at these expressions:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \tag{57}$$

$$\xi_1 = \frac{1}{4}, \quad \xi_2 = \frac{\varsigma}{4M\omega}, \quad \xi_3 = \frac{\lambda^2}{4}, \tag{58}$$

$$c_4 = c_5 = 0, \quad c_6 = \frac{1}{4}, \quad c_7 = -\frac{\varsigma}{4M\omega}, \tag{59}$$

$$c_8 = \frac{\lambda^2}{4}, \quad c_9 = \frac{1}{4}, \quad c_{10} = 1 + |\lambda|, \tag{60}$$

$$c_{11} = 1, \quad c_{12} = \frac{|\lambda|}{2}, \quad c_{13} = \frac{1}{2}, \tag{61}$$

$$\frac{2n+1}{2} - \frac{\varsigma}{4M\omega} + \frac{|\lambda|}{2} = 0. \tag{62}$$

Thus, the eigensolutions are

$$\psi_2(\rho) = e^{-iEt} e^{iJ\phi} (M\omega)^{\frac{|sJ|}{2}} \rho^{\frac{Js}{\alpha}} e^{-\frac{M\omega\rho^2}{2}} F\left(-n, \left| \frac{sJ}{\alpha} \right| + 1, M\omega\rho^2\right), \tag{63}$$

$$E = 2r \left(\frac{sJ}{\alpha} \right) \pm \sqrt{4r^2 \frac{J^2}{\alpha^2} + 2r \left(\left| \frac{sJ}{\alpha} \right| + 2n + 2 \right) + \frac{1}{4}} \tag{64}$$

with $r = \frac{\omega}{M}$. We note here that the presence of the parameter α , in the spectrum of energy, breaks the degeneracy of the energy levels. Furthermore, by taking the limit $\alpha \rightarrow 1$ into eq. (64), we reach the exact result of the two-dimensional Kemmer oscillator in Minkowskian spacetime [27].

3.2 The solutions in a magnetic cosmic string background

By adopting the same vector potential as in the Dirac oscillator, the Kemmer oscillator in a magnetic cosmic string spacetime obeys

$$\left(i\tilde{\beta}^0 \partial_0 + i\tilde{\beta}^1 \partial_1 + \right) \psi_K + \left(i\tilde{\beta}^2 \left(\partial_2 - \Sigma_2 + i\frac{e\phi_B}{2\pi} \right) - M \right) \psi_K = 0. \tag{65}$$

By using eq. (38), the above equation transforms into

$$(2E - M)\psi_1 - \left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} - \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_2 - \left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} - \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_3 = 0, \tag{66}$$

$$\left(\partial_1 + M\omega\rho + \frac{1}{\rho} - \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} + is\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_1 + M\psi_2 + \left(\partial_1 + M\omega\rho + \frac{1}{\rho} + \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} - is\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_4 = 0, \tag{67}$$

$$\left(\partial_1 + M\omega\rho + \frac{1}{\rho} - \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} + is\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_1 + M\psi_3 + \left(\partial_1 + M\omega\rho + \frac{1}{\rho} + \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} - is\frac{\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_4 = 0, \tag{68}$$

$$(2E + M)\psi_4 + \left(\partial_1 - M\omega\rho - \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} + \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_2 + \left(\partial_1 - M\omega\rho - \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} + \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right) \psi_3 = 0. \tag{69}$$

From these equations, we get the following results:

$$\psi_2 = \psi_3, \tag{70}$$

$$\psi_1 = \frac{2 \left(\partial_1 - M\omega\rho + \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} - \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right)}{2E - M} \psi_2, \tag{71}$$

$$\psi_4 = \frac{-2 \left(\partial_1 - M\omega\rho - \frac{e\phi_B}{2\pi\alpha\rho} + \frac{is\partial_2}{\alpha\rho} \right)}{2E + M} \psi_2. \tag{72}$$

By putting eqs. (71) and (72) into eq. (68), and choosing that

$$\psi_2 = e^{iJ\phi}\chi(\rho), \tag{73}$$

we have

$$\left(\partial_\rho^2 + \frac{\partial_\rho}{\rho} - M^2\omega^2\rho^2 - 2M\omega - \frac{\llbracket}{\rho^2} + \langle \rangle\right)\chi(\rho), \tag{74}$$

with

$$\llbracket = \frac{J^2}{\alpha^2} + \frac{\left(\frac{se\phi_B}{2\pi}\right)^2}{\alpha^2} - 2\frac{\left(\frac{se\phi_B}{2\pi}\right)sJ}{\alpha^2}, \tag{75}$$

$$\langle \rangle = 4E\omega \left\{ \frac{sJ}{\alpha} - \frac{\left(s\frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha} \right\} + E^2 - \frac{M^2}{4}. \tag{76}$$

Also, eq. (74) can be rewritten by

$$\left\{ \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho}\partial_\rho - \left(\frac{\mu^2}{\rho^2} + M^2\omega^2\rho^2 - \Lambda\right) \right\} \chi(\rho) = 0, \tag{77}$$

with

$$\mu = \frac{s\left(J - \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha}, \quad \Lambda = \left(E^2 + 4E\omega\mu - 2M\omega - \frac{M^2}{4}\right). \tag{78}$$

According to the above case, and by using the NU method, the eigensolutions are

$$E = 2\omega\mu \pm 2\sqrt{\omega^2\mu^2 + \left(\frac{M^2}{16} + M\omega\left(\frac{|\mu|}{2} + 1 + n\right)\right)}, \tag{79}$$

$$\chi(\rho) = (m\omega)^{\frac{\left|\frac{s\left(J - \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha}\right|}{2}} \rho^{\left|\frac{s\left(J - \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha}\right|} e^{-\frac{m\omega\rho^2}{2}} F\left(-n, \left|\frac{s\left(J - \frac{e\phi_B}{2\pi}\right)}{\alpha}\right| + 1, m\omega\rho^2\right) \tag{80}$$

We remark that if we put $\phi_B = 0$ ($B = 0$) in eq. (79), we recover the same results obtained in the previous section (eq. (64)).

4 Conclusion

In this work, we have considered the case of a Kemmer oscillator for vector bosons in a magnetic cosmic string spacetime. The eigensolutions are obtained by using the generalized parametric NU method. We show that the quantum dynamics of a physical system depend on the topological defects features of the cosmic string, and the eigensolutions possess an explicit dependence on the parameter α . Furthermore, by comparing the spectrum of energy obtained in our case with those of the same problem in the flat spacetime [27], we can see that the presence of the angular deficit α , which characterizes the global structure of the metric in the cosmic string spacetime, breaks the degeneracies of these energies.

Appendix A. Review of the Nikiforov-Uvarov (NU) method

The Nikiforov-Uvarov method is based on solving the second-order differential Schrödinger, Dirac and DKP equations by reduction to a generalized equation of hyper-geometric type. The following equation is a general form of the second-order differential equation written for any potential as

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{c_1 - c_2s}{s(1 - c_3s)} \frac{d}{ds} + \frac{-\zeta_1s^2 + \zeta_2s - \zeta_3}{\{s(1 - c_3s)\}^2} \right] \psi = 0. \tag{A.1}$$

According to the Nikiforov-Uvarov (NU) method, the eigenfunctions and eigenvalues are given by

$$\psi(s) = s^{c_{12}}(1 - c_3s)^{-c_{12} - \frac{c_{13}}{c_3}} P\left(c_{10}-1, \frac{c_{11}}{c_3} - c_{10}-1\right)(1 - 2c_3s), \quad (\text{A.2})$$

and

$$c_2n - (2n + 1)c_5 + (2n + 1)(\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}) + n(n - 1)c_3 + c_7 + 2c_3c_8 + 2\sqrt{c_8c_9} = 0. \quad (\text{A.3})$$

The corresponding parameters are

$$c_4 = \frac{1}{2}(1 - c_1), \quad c_5 = \frac{1}{2}(c_2 - 2c_3), \quad (\text{A.4})$$

$$c_6 = c_5^2 + \zeta_1, \quad c_7 = 2c_4c_5 - \zeta_2, \quad (\text{A.5})$$

$$c_8 = c_4^2 + \zeta_3, \quad c_9 = c_3c_7 + c_3^2c_8 + c_6, \quad (\text{A.6})$$

$$c_{10} = c_1 + 2c_4 + 2\sqrt{c_8}, \quad (\text{A.7})$$

$$c_{11} = c_2 - 2c_5 + 2(\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}), \quad (\text{A.8})$$

$$c_{12} = c_4 + \sqrt{c_8}, \quad c_{13} = c_5 - (\sqrt{c_9} + c_3\sqrt{c_8}). \quad (\text{A.9})$$

In the special case of $c_3 = 0$, when

$$\lim_{c_3 \rightarrow 0} (1 - c_3s)^{-c_{12} - \frac{c_{13}}{c_3}} = e^{c_{13}s}, \quad (\text{A.10})$$

$$\lim_{c_3 \rightarrow 0} (1 - c_3s)^{-c_{12} - \frac{c_{13}}{c_3}} P\left(c_{10}-1, \frac{c_{11}}{c_3} - c_{10}-1\right) = L_n^{c_{10}-1}(c_{11}s), \quad (\text{A.11})$$

the wave function becomes

$$\psi(s) = s^{c_{12}} e^{c_{13}s} L_n^{c_{10}-1}(c_{11}s), \quad (\text{A.12})$$

where $L_n^{c_{10}-1}(c_{11}s)$ is the generalized Laguerre polynomial.

References

1. W.-Y. Tsai, A. Yildiz, Phys. Rev. D **4**, 3643 (1971).
2. T. Goldman, W.-Y. Tsai, Phys. Rev. D **4**, 3648 (1971).
3. W.-Y. Tsai, Phys. Rev. D **4**, 3652 (1971).
4. L.D. Kruse, P. Lu, R.H. Good, Phys. Rev. D **3**, 1275 (1971).
5. D. Shay, R.H. Good, Phys. Rev. **179**, 1410 (1969).
6. N. Kemmer, Proc. R. Soc. A **173**, 91 (1939).
7. R.J. Duffin, Phys. Rev. **54**, 1114 (1938).
8. A. Boumali, N. Messai, Can. J. Phys. **92**, 1460 (2014).
9. A. Boumali, H. Hassanabadi, Eur. Phys. J. Plus **128**, 124 (2013).
10. K. Bakke, Phys. Lett. A **374**, 3143 (2010).
11. J. Carvalho, C. Furtado, F. Moraes, Phys. Rev. A **84**, 032109 (2011).
12. K. Bakke, Eur. Phys. J. Plus **127**, 82 (2012).
13. K. Bakke, Gen. Relativ. Gravit. **45**, 1847 (2013).
14. K. Bakke, C. Furtado, Ann. Phys. **336**, 489 (2013).
15. F.M. Andrade, E.O. Silva, Eur. Phys. J. C **74**, 3187 (2014).
16. K. Bakke, C. Furtado, Eur. Phys. J. B **8**, 222 (2014).
17. K. Bakke, Ann. Phys. **346**, 51 (2014).
18. K. Bakke, C. Furtado, Ann. Phys. **355**, 48 (2015).
19. L.B. Castro, arXiv:1504.01961 (2015).
20. N. Unal, Concepts Phys. **II**, 273 (2005).
21. I. Acikgov, N. Unal, Found. Phys. **28**, 815 (1998).
22. K. Sogut, A. Havare, Class. Quantum Grav. **23**, 7129 (2006).
23. C.R. Hagen, Phys. Rev. Lett. **64**, 503 (1990).
24. M. Nakahara, *Geometry and Physics* (IOP Publishing Ltd, 2003).
25. A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics* (Birkhauser, Boston, 1988).
26. C. Tezcan, R. Sever, Int. J. Theor. Phys. **48**, 337 (2009).
27. A. Boumal, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 235301 (2009).

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/309631765>

Exact solutions of a two-dimensional Duffin-Petiau-Kemmer oscillator subject to a coulomb potential in the...

Article in *Canadian Journal of Physics* · November 2016

DOI: 10.1139/cjp-2016-0800

CITATIONS

0

READS

316

2 authors:



Abdelmalek Boumali

Université de Tébessa

52 PUBLICATIONS 211 CITATIONS

SEE PROFILE



Nadjette Messai

Université de Tébessa

4 PUBLICATIONS 3 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



on the properties and solutions of Majorana equation for some interactions potentials [View project](#)

All content following this page was uploaded by [Abdelmalek Boumali](#) on 05 November 2016.

The user has requested enhancement of the downloaded file. All in-text references [underlined in blue](#) are added to the original document and are linked to publications on ResearchGate, letting you access and read them immediately.

Exact solutions of a two-dimensional Duffin-Kemmer-Petiau oscillator subject to a coulomb potential in the gravitational field of cosmic string

Abdelmalek Boumali* and Nadjette Messai†

*Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique,
University Larbi Tébessi -Tébessa-, 12000, W. Tébessa, Algeria.*

Abstract

In this paper, the problem of a two-dimensional Duffin-Petiau-Kemmer (DKP) oscillator in the presence of a coulomb potential in the cosmic string background is solved. The eigensolutions of the problem in question have been found, and the influence of the Coulomb potential in the presence of the gravitational field of cosmic string has been analyzed.

PACS numbers: 98.80.Cq

Keywords: cosmic string; DKP equation; DKP oscillator

*Electronic address: boumali.abdelmalek@gmail.com

†Electronic address: nadjette.messai@gmail.com

I. INTRODUCTION

The analysis of gravitational interactions with a quantum mechanical system has recently attracted attention in particle physics and has been an active field of research. The general way to understand the interaction between relativistic quantum mechanical particles and gravity is to solve the general relativistic form of their wave equations. These solutions are valuable tools for examining and improving models and numerical methods for solving complicated physical problems.

In the conventional relativistic approach, the interaction of $S = 0$ and $S = 1$ hadrons with different nuclei has been described by the second-order Klein-Gordon (KG) equation for $S=0$ and Proca equation for $S=1$ particles. It is well known that is very difficult to tackle these second-order equations mathematically and to derive the physics behind them. Therefore, considerable interest in recent years has been devoted to examining the interactions of $S = 0$ and $S = 1$ hadrons with nuclei by using the first-order relativistic Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) equation [1].

One important question related to DKP equation concerns the equivalence between its spin 0 and 1 sectors and the theories based on the second-order KG and Proca equations[2]. Historically, the loss of interest in the DKP stems from the equivalence of the DKP approach to the Klein-Gordon (KG) and Proca descriptions in on-shell situations, in addition to the greater algebraic complexity of the DKP formulation. However, in the 1970s, this supposed equivalence was questioned in several situations involving breaking of symmetries and hadronic processes, showing that in some cases, the DKP and KG theories can give different results. Moreover, the DKP equation appears to be richer than the KG equation if the interactions are introduced. In this context, alternative DKP-based models were proposed for the study of meson-nucleus interactions, yielding a better adjustment to the experimental data when compared to the KG-based theory[3]. In the same direction, approximation techniques formerly developed in the context of nucleon-nucleus scattering were generalized, giving a good description for experimental data of meson-nucleus scattering[4]. The deuteron-nucleus scattering was also studied using DKP equation, motivated by the fact that this theory suggests a spin-1 structure from combining two spin- $\frac{1}{2}$ [5]. In addition, we can cite the works of [6, 7] on the meson-nuclear interaction and the relativistic model of α -nucleus elastic scattering where they have been treated by the formalism of the DKP

theory. Recently, there is a renewed interest in the DKP equation. It has been studied in the context of quantum chromodynamics (QCD) [8], covariant Hamiltonian formalism [9], in the causal approach[10, 11], in the context of five-dimensional Galilean invariance[12], in the scattering of K^+ nucleus[13], in the presence of the Aharonov-Bohm potential[14, 15], in the Dirac oscillator interaction[16], in the study of thermodynamics properties[17], on the supersymmetric[18], and finally in the presence of some shape of interactions[19–31]. These examples in some case break the equivalence between the theories based on the DKP equation and KG and Proca equations.

The Dirac oscillator was for the first time studied by Itô and Carriere [32]. On the other side, Moshinsky and Szczepaniak were the first who introduced an interesting term in the Dirac equation. More specifically, they suggested to substitute in the free Dirac equation the momentum operator \vec{p} like $\vec{p} - im\omega\beta\vec{r}$. They could obtain a system in which the positive energy states have a spectrum similar to the one of the non-relativistic harmonic oscillator [33]. Recently, this interaction has particularly got more interest. It is reviewed, because of the interest in the many different domain in physics (see Ref. [33] and references therein).

The topological defects plays an important role in physical properties of systems, and they appear in gravitation as monopoles, strings and walls [34–43]. Among them, cosmic strings and monopoles seem to be the best candidates to be observed. The former are linear defects, and the space-time produced by an idealized cosmic string is locally flat, however, globally conical, with a planar angle deficit determined by the string tension.

The well-known procedure to introduce the coupling between a charged particle and electromagnetic fields in the DKP equation, is through the minimal coupling. Dosch, Jensen and Müller in 1971 proposed another procedure by making a modification in the mass term in the form: $m \rightarrow m + S(\vec{r})$ where $S(\vec{r})$ is the scalar potential [45]. This new formalism has been used by Soff et al [46] to analyze the Dirac equation in the presence of a Coulomb potential and a static scalar potential. Bergerhoff and Soff [47] show that, in contrast to the minimal coupling of the electromagnetic potentials where it is correlated with the momentum, a scalar potentials, which are an invariant Lorentz's scalar, are coupled to the mass of a particle in the Dirac equation and thus act effectively as a position dependent mass. They have shown that, when a scalar external is coupled instead of a vector Coulomb potential, the no present of Klein's paradox and consequently the spontaneous pair creation . This implies, that for an arbitrary scalar potential one can always find the bound states in the

gap between $+m_e c^2$ and $-m_e c^2$, which is not the case for the usual Coulomb potential, which is coupled to the Dirac field by replacing \vec{p} by $\vec{p} - (e/c)\vec{A}$ in the Dirac equation. More recently, Medeiros et al [44] have been used this formalism to study Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string space-time in the presence of magnetic field and scalar potential. In the same context, Bakke and his co-workers [40] have been studied several problems by using this new approach. They showed that this modification in the mass term gives rise to a position-dependent mass for a relativistic particle (see Ref.[38] and references therein). Following Bakke [40], this method has been used in different situation such as : (i) the quark–antiquark interaction, (ii) analysis of the behavior of a Dirac particle in both static scalar and Coulomb potentials, (iii) in a relativistic scalar particle in the cosmic string space time, and (iv) finally in the Klein-Gordon oscillator subject to a Coulomb potential. Following Medeiros et al [44], if one wants to investigate the relativistic quantum motion of a charged particle in the presence of electromagnetic and scalar potentials, both procedures, the minimal coupling and a modification in the mass term, should be taken into account. The problem of the wave functions of particles subject to different confining potentials as a Coulomb potential, whose exact solution as well established, has been made by replacing \vec{p} by $\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ in the relativistic particle equation's: this potential is a time-like component of the electromagnetic vector potential.

The principal aim of this paper is to solve the DKP oscillator in a background produced by topological defects, such as cosmic strings in the presence of a Coulomb potential. The introduction of the Coulomb potential in the DKP equation will be made by using the minimal coupling procedure. The structure of this article is as follows: In Sect. II, we briefly review the DKP equation in cosmic string background subject to the Coulomb potential. In Sect III, the eigensolutions have been obtained for both massive Spin-0 and spin-1 particles. Sect IV present our conclusion.

II. THE DKP OSCILLATOR IN COSMIC STRING BACKGROUND

In this section, we discuss the DKP oscillator in cosmic string space-time described by the metric [48, 49]

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (1)$$

with $-\infty < (t, z) < +\infty$, $0 < \rho \leq \infty$ and $0 \leq \phi \leq 2\pi$. The parameter α is the deficit angle associated with conical geometry obeying $\alpha = 1 - 4\eta$, and η is the linear mass density of the string in natural unite $\hbar = c = 1$.

The DKP equation in curved space-time is given by [50–53]

$$\left[i\tilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}S^{ab} \right) - m \right] \psi = 0, \quad (2)$$

where $\tilde{\beta}^\mu$ are the DKP matrices in curved space, and they satisfy the following relations:

$$\beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = \beta^a \eta^{bc} + \beta^c \eta^{ba}. \quad (3)$$

These matrices are related to the flat space-time β^a as: $\tilde{\beta}^\mu = e_a^\mu \beta^a$ with the following tetrad relations: The β^a are 5×5 matrices in the spin-0 representation and 10×10 matrices in the spin-1 representation. In our case, the β^a matrices are chosen as follows:[54, 55]

- for the spin-0 representation

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta_{2 \times 2} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{2 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \rho_{2 \times 3}^i \\ -\rho_{3 \times 2}^{iT} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2), \quad (4)$$

with

$$\theta_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

- for Spin-1 representation

$$\beta^0 = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1}^+ \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1}^+ \\ -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1}^+ \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta^k = \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} & iK^{k+} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & S_{3 \times 3}^k & 0_{3 \times 1}^+ \\ -I_{3 \times 3} & -S_{3 \times 3}^k & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1}^+ \\ iK^k & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0 \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2), \quad (6)$$

where

$$0_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

and

$$S^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S^2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

with

$$, K^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

and $S^{ab} = [\beta^a, \beta^b]$. The spin connection $\omega_{\mu ab}$ obeys the relations

$$\omega_{\mu ab} = e_a^i e_b^j \Gamma_{j\mu}^i - e_b^j \partial_\mu e_{aj}, \quad \omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}, \quad (8)$$

with

$$\Gamma_{j\mu}^i = \frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_l g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda j} - \partial_\lambda g_{\mu j}), \quad (9)$$

are the Christoffel symbols or the affine connections.

The introduction of the interaction will do by modifying the term $p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu$ where q is the electric charge, and $A_\mu = (-A_0, \vec{A})$ is the electromagnetic 4-vector potential. Takes into account the substitution $\partial_\rho \rightarrow \partial_\rho + m\omega\rho$ into Eq. (2), and the following form of the Coulomb potential [56–58]

$$qA^0 = \frac{f}{\rho} = \pm \frac{|f|}{\rho}, \quad (10)$$

where f is a constant, Eq.(2) can be written as

$$\left\{ i\tilde{\beta}^0 (\partial_0 - iqA_0) + i\tilde{\beta}^1 (\partial_\rho + m\omega\rho\varsigma) + i\tilde{\beta}^2 (\partial_\phi + \alpha [\beta^1, \beta^2]) - m \right\} \psi = 0, \quad (11)$$

with $\varsigma = 2(\beta^0)^2 - I$ and $\zeta^2 = I$.

In what follow, this equation will be used to extract the eigensolutions of a both massive spin-0 and spin-1 particles.

III. THE EIGENSOLUTIONS OF A TWO-DIMENSIONAL DKP OSCILLATOR IN COSMIC STRING BACKGROUND

A. case of spin zero

The two dimensional DKP equation in cosmic string space-time subject to the Coulomb potential is given by Eq. (11), where m_0 is the mass of particles of spin-0. The stationary

state ψ is a five-component wave function of the DKP equation, which can be written as

$$\psi = \left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5 \right)^T \quad (12)$$

Substituting (4), (5) and (12) into (11), we obtain

$$\left(E + \frac{f}{\rho} \right) \psi_2 - i \left(\partial_\rho - m_0 \omega \rho + \frac{1}{\rho} \right) \psi_3 - i \frac{\partial_\phi}{\alpha \rho} \psi_4 - m_0 \psi_1 = 0, \quad (13)$$

$$\left(E + \frac{f}{\rho} \right) \psi_1 - m_0 \psi_2 = 0, \quad (14)$$

$$i (\partial_\rho + m \omega \rho) \psi_1 - m_0 \psi_3 = 0, \quad (15)$$

$$i \frac{\partial_\phi}{\alpha \rho} \psi_1 - m_0 \psi_4 = 0, \quad (16)$$

$$- m_0 \psi_5 = 0. \quad (17)$$

From these equations, we get the following relations

$$\psi_2 = \frac{\left(E + \frac{f}{\rho} \right)}{m_0} \psi_1, \quad (18)$$

$$\psi_3 = i \frac{(\partial_\rho + m_0 \omega \rho)}{m_0} \psi_1, \quad (19)$$

$$\psi_4 = \frac{i}{m_0 \alpha \rho} \partial_\phi \psi_1, \quad (20)$$

$$\psi_5 = 0. \quad (21)$$

Putting Eqs. (18), (19) and (20) into Eq. (13), we have

$$\left\{ \left(E + \frac{f}{\rho} \right)^2 + \left(\partial_\rho - m \omega \rho + \frac{1}{\rho} \right) (\partial_\rho + m \omega \rho) + \frac{1}{\alpha^2 \rho^2} \partial_\phi^2 - m_0^2 \right\} \psi_1 = 0. \quad (22)$$

Choosing as Ansatz $\psi_1 = e^{iJ\phi} \chi(\rho)$, and after simple algebraic manipulations, we arrive at

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2} + \frac{2Ef}{\rho} - m_0^2 \omega^2 \rho^2 + \nu \right] \chi(\rho) = 0, \quad (23)$$

with

$$\nu = E^2 - m_0^2 + 2m_0 \omega, \quad \beta^2 = \lambda^2 - f^2, \quad \lambda = \frac{J}{\alpha}. \quad (24)$$

Now let us make a change of variable $\zeta = \sqrt{m_0 \omega} \rho$: in this case equation (23) becomes

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{\beta^2}{\xi^2} + \frac{\delta}{\xi} - \xi^2 + \frac{\nu}{m_0 \omega} \right] \chi(\xi) = 0. \quad (25)$$

Taking the following substitutions [56–59]

$$\delta = \frac{2Ef}{\sqrt{m_0\omega}}, \quad \chi(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \xi^{|\beta|} H(\xi), \quad (26)$$

where we have write $\chi(\xi)$ as unknown function $H(\xi)$, Eq. (25) can be rewritten by

$$H''(\xi) + \left\{ (2|\beta| + 1) \frac{1}{\xi} - 2\xi \right\} H'(\xi) + \left\{ \frac{\nu}{m\omega} - 2|\beta| - 2 + \frac{\delta}{\xi} \right\} H(\xi) = 0. \quad (27)$$

The last equation is a biconfluent Heun function[57–59]

$$H(\xi) = H\left(2|\beta|, 0, \frac{\nu}{m\omega}, 2\delta, -\xi\right). \quad (28)$$

In order to solve Eq. (27), we use the Frobenius method [60–63]: Eq.(28) can be written as a power series expansion around the origin as

$$H(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^j. \quad (29)$$

Substituting the series (29) into equation (27), we obtain the following recurrence relation:

$$a_{j+2} = -\frac{\delta}{(j+2)(j+1+\gamma)} a_{j+1} - \frac{\theta - 2j}{(j+2)(j+1+\gamma)} a_j, \quad (30)$$

where $\gamma = 2|\beta| + 1$ and $\theta = \frac{\nu}{m\omega} - 2|\beta| - 2$. By starting with $a_0 = 1$ and using the relation (30), we can calculate the other coefficients of the power series expansion as follows

$$a_1 = -\frac{\delta}{\gamma} = -\frac{2Ef}{\sqrt{m_0\omega}} \frac{1}{2|\beta| + 1}, \quad (31)$$

$$a_2 = \frac{\delta^2}{2\gamma(1+\gamma)} - \frac{\theta}{2(1+\gamma)} = \frac{2E^2 f^2}{m_0\omega} \frac{1}{(2|\beta| + 1)(2|\beta| + 2)} - \frac{\theta}{2(2|\beta| + 2)}. \quad (32)$$

Thus, the bound state solutions can be obtained by imposing the conditions where power series becomes a polynomial of degree n . This happens when:

$$\theta = 2n, \quad a_{n+1} = 0. \quad (33)$$

with now $n = 1, 2, 3, \dots$. From Eq. (33), the eigenvalues are given by

$$E_{n,J}^2 = m_0^2 + 2m_0\omega_{n,J} \left(n + \left| \sqrt{\frac{J^2}{\alpha^2} - f^2} \right| \right). \quad (34)$$

Following Eq. (34), the spectrum of energy of the DKP oscillator subject to the Coulomb potential in the presence of the gravitational shows two interesting results: (i) firstly, all levels of energy are not degenerate, and (ii) secondly, the introduction of the Coulomb potential in the DKP oscillator modified the relativistic energy levels. This influence yields the ground state of DKP oscillator to be defined by the quantum number $n = 1$ in contrast to the quantum number $n = 0$. This situation is similar to the case of the Klein-Gordon oscillator studied by Bakke et al [36–39]. So we can extended their physical interpretation in our case. Thus, when the condition $a_{n+1} = 0$ imposed (Eq. (33)), we obtain a polynomial of degree n the power series expansion given in Eq. (29). So, we can assume that frequency $\omega_{n,J}$ of the DKP oscillator can be adjusted in order to satisfied the condition $a_{n+1} = 0$. As a consequence, the quantum number of the system n restrict the possible values of the angular frequency. According this, there are values of the angular frequency which are not allowed in the system. Now, let us examine the case of the ground state $n = 1$: the condition $a_{n+1} = 0$ yields $a_2 = 0$. So, by using Eq. (30), frequency $\omega_{n,J}$ is given by

$$\omega_{1,J} = \frac{2f^2 E_{1,J}^2}{m_0 (2|\beta| + 1)}, \quad (35)$$

which corresponds to the possible values of the angular frequency of the DKP oscillator in the ground state. The energy levels corresponding of this ground state are written by

$$E_{n,J}^2 = \pm \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{4f^2}{2|\beta|+1} \left(1 + \left| \sqrt{\frac{J^2}{\alpha^2} - f^2} \right| \right)}}. \quad (36)$$

Therefore, the effects of the Coulomb potential on the spectrum of energy of the DKP oscillator in the presence of a cosmic string is given by a change of the energy levels, where the ground state is defined by the quantum number $n = 1$. Moreover, the values of the angular frequency of the DKP oscillator are restricted to a set of values in which allow us to obtain a polynomial solution to the biconfluent Heun series [36–39].

Finally, when we take the limit $f \rightarrow 0$ (i.e., vanishing of the Coulomb potential which here is chosen as time-like component of A^μ), we recover the exact result of scalar bosons in a cosmic string background [42]. Now, if we take a both limits $\alpha \rightarrow 1$ with $f \rightarrow 0$, we obtain the same result found in the case of a two-dimensional DKP oscillator in Minkowski space-time[54].

B. case of spin one

The two dimensional DKP equation in cosmic string space-time subject to a Coulomb potential is

$$\left\{ i\tilde{\beta}^0 (\partial_0 - iqA_0) + i\tilde{\beta}^1 (\partial_\rho + m\omega\rho\varsigma) + i\tilde{\beta}^2 (\partial_\phi + \alpha [\beta^1, \beta^2]) - M \right\} \psi = 0, \quad (37)$$

where M is the mass of spin-1 particles. The stationary state ψ is a ten-component wave function of the DKP equation with

$$\psi = \left(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10} \right)^T. \quad (38)$$

Substituting Eqs. (6), (7) and (38) into Eq. (37), we found the following system of equations

$$- \left(E + \frac{f}{\rho} \right) \psi_7 + (\partial_\rho - M\omega\rho) \psi_{10} - M\psi_1 = 0, \quad (39)$$

$$- \left(E + \frac{f}{\rho} \right) \psi_8 + \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_{10} - M\psi_2 = 0, \quad (40)$$

$$- \left(E + \frac{f}{\rho} \right) \psi_9 - M\psi_3 = 0, \quad (41)$$

$$- \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_9 - M\psi_4 = 0, \quad (42)$$

$$(\partial_\rho + M\omega\rho) \psi_9 - M\psi_5 = 0, \quad (43)$$

$$\frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_7 - \left(\partial_\rho + M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) \psi_8 - M\psi_6 = 0, \quad (44)$$

$$- \left(E + \frac{f}{\rho} \right) \psi_1 + \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_6 - M\psi_7 = 0, \quad (45)$$

$$- \left(E + \frac{f}{\rho} \right) \psi_2 - (\partial_\rho - M\omega\rho) \psi_5 - M\psi_8 = 0, \quad (46)$$

$$- \left(E + \frac{f}{\rho} \right) \psi_3 + \left(\partial_\rho - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) \psi_5 - \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_4 - M\psi_9 = 0, \quad (47)$$

$$- \left(\partial_\rho + M\omega\rho - \frac{1}{\rho} \right) \psi_1 - \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_2 - M\psi_{10} = 0. \quad (48)$$

From Eqs. (41), (42) and (43), we have

$$\psi_3 = - \frac{\left(E + \frac{f}{\rho} \right)}{M} \psi_9, \quad (49)$$

$$\psi_4 = - \frac{1}{M} \frac{\partial_\phi}{\alpha\rho} \psi_9, \quad (50)$$

$$\psi_5 = \frac{1}{M} (\partial_\rho + M\omega\rho) \psi_9. \quad (51)$$

Putting these equations into Eq. (47), we arrive at the following equation for ψ_9

$$\left\{ \left(E + \frac{f}{\rho} \right)^2 + \left(\partial_\rho - M\omega\rho + \frac{1}{\rho} \right) (\partial_\rho + M\omega\rho) + \frac{\partial_\phi^2}{\alpha^2 \rho^2} - M^2 \right\} \psi_9 = 0 \quad (52)$$

For the other components, it very difficult to decouple the system of equations above as was done for ψ_9 . In order to overcome this problem, we use the same method as in Ref.[54]: if we choose

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \quad (53)$$

we obtain

$$\psi_6 = \psi_7 = \psi_8 = \psi_{10} = 0. \quad (54)$$

Now, Considering the following Ansatz for the component $\psi_9 = e^{iJ\phi} \varphi(\rho)$, we find

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2} + \frac{2Ef}{\rho} - M^2 \omega^2 \rho^2 + \nu \right] \varphi(\rho) = 0, \quad (55)$$

with

$$\nu = E^2 - M^2 + 2M\omega, \quad \beta^2 = \lambda^2 - f^2, \quad \lambda = \frac{J}{\alpha}.$$

Eq (55) is similar to the Eq. (23) for the case of spin-0. Consequently, the eigensolutions are

$$E_n^2 = M^2 + 2M\omega_n \left(n + \left| \sqrt{\frac{J^2}{\alpha^2} - f^2} \right| \right), \quad (56)$$

$$\psi_9(\xi') = e^{-\frac{\xi'^2}{2}} \xi' |\zeta| H \left(2|\beta|, 0, \frac{\nu}{m\omega}, 2\delta', -\xi' \right), \quad (57)$$

with $\zeta' = \sqrt{M\omega\rho}$ and $\delta' = \frac{2Ef}{\sqrt{M\omega}}$.

As in the case of spin-0 particles, and from Eq. (56), the following remarks can be made: (i) the eigenvalues of particles of spin-1 have the same form that for the case of particles of spin-0, and (ii) all energy levels are not degenerate due the presence of the gravitational field of cosmic string, and finally (iii) the introduction of a Coulomb potential in DKP oscillator modified the relativistic energy levels. This influence yields the ground state of DKP oscillator to be defined by the quantum number $n=1$ in contrast to the quantum number $n = 0$. In the limit where $\alpha \rightarrow 1$ and $f \rightarrow 0$, we find the same result as in the case of a two-dimensional DKP oscillator in Minkowski space-time [54].

IV. CONCLUSION

In this work, we have investigated the influence of the topological defects due to the cosmic strings space-time on the DKP oscillator subject to the scalar potential such as a Coulomb potential which is a time-like of the electromagnetic vector potential. The eigenvalues and eigenfunctions depend explicitly on the non local parameter of the space-time under consideration even though it is locally flat. Contrarily in the case of DKP oscillator for the flat space, the presence of the topological defects breaks the degeneracy of the spectrum of the DKP oscillator. In addition, we have seen that the presence of the Coulomb potential modifies the spectrum of energy of the DKP oscillator. In both cases, the ground state of the system is determined by the quantum number $n = 1$ instead of the quantum number $n = 0$. As consequently, the values of the angular frequency of the DKP oscillator, in both cases, are restricted to a set of values in which allow us to obtain a polynomial solution to the biconfluent Heun series.

-
- [1] R. A. Krajcik et M. M. Nieto Am. J. Phys, **45**, 818 (1977).
N. Kemmer. Proc. R. Soc. Lond. A, 173, **91** (1939).
R. J. Duffin. Phys. Rev. **54**, 1114 (1938).
G. Petiau. Acad. R. Belg. Cl. Sci. M. Collect. 8, **16** (1936).
N. Kemmer, Proc. Cambridge Philosophical Society **39**, 189 (1943).
E.M. Corson, *Introduction to Tensors, Spinors, and Relativistic Wave-Equations*, Printed in Great Britain by Blackie & Son, Ltd., Glasgow (1953).
- [2] V. Ya. Fainberg and B. M. Pimentel, Phys. Lett. A, **271**,16-25 (2000)
R. Casana, V.Ya. Fainberg, 1, , B.M. Pimentel, J.S. Valverde, Phys. Lett. A, 316, 33–43 (2003).
- [3] E. Friedman, G. Kaelbermann and C. J. Batty, Phys. Rev. C, **34**, 16 (2000).
- [4] B. C. Clark, S. Hama, G. R. Kälbermann, R. L. Mercer and L. Ray, Phys. Rev. Lett, **6**, 2181 (1985).
- [5] R. E. Kozak, B. C. Clark, S. Hama, V. K. Mishra, R. L. Mercer and L. Ray, Phys. Rev. C, **40**, 2181 (1989).
- [6] R. C. Barrett and Y. Nedjadi, Nucl. Phys. A, **585**, 311c (1995).

- [7] S. Ait-Tahar, J. S. l-Khalili and Y. Nedjadi, Nucl. Phys. A, **589**, 307 (1995).
- [8] V. Gribov, Eur.Phys.J.C, **10**, 71 (1999).
- [9] I. V. Kanatchikov, Rep. Math. Phys. **46**, 107, (2000).
- [10] J.T.Lunardi, B.M.Pimental, R. G. Teixeira, J. S. Valverde, Phys. Lett. A, **268**,165-173 (2000).
- [11] J.T.Lunardi, B.M.Pimental, R. G. Teixeira, J. S. Valverde, Int. J. Mod. Phys. A, **17**,205 (2000).
- [12] M. DE Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, E. S. Santos et J. D. M Vianna, J. Phys, **33**, L273 (2000).
- [13] L. K. Kerr, B.C. Clark, S. Hama, L. Ray et G. W. Hoffmann, Prog. Theor. Phys. **103**, 321 (2000).
- [14] A. Boumali, Can. J. Phys, **82**, 67–74 (2004).
- [15] A. Boumali, Can. J. Phys, **85**, 1417–29 (2007).
- [16] A. Boumali and L. Chetouani, Phys. Lett. A, **346**, 261 (2005).
- [17] A. Boumali, Phys. Scr, **76**, 669–73 (2007).
- [18] A. Okninski, Int. J. Theor. Phys, **50**, 729–736 (2011).
- [19] M. C. B. Fernandes and J. D. M. Vianna, Braz. J. Phys. **28**, 2 (1999).
- [20] M. C. B Fernandes, A.E. Santana and J. D. M. Vianna, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 3841 (2003).
- [21] V. Ya. Fainberg and B.M. Pimentel, Phys. Lett. **271A**, 16 (2000).
- [22] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R.G. Teixeira and J.S. Valverde, Phys. Lett. **268A**, 165 (2000).
- [23] W. B. Zeleny, Phys. Rev. **158**, 1223 (1967).
- [24] O. A. S. Valenzuela and R. E. Z. Vega, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 4967 (1993).
- [25] B. Boutabia and T. Boudjedaa, Phys. Lett. **338A**, 97 (2005).
- [26] L. Chetouani, M. Merad, T. Boudjedaa, and A. Lecheheb, Int. J. Theor. Phys. **43**, 1147 (2004).
- [27] P. Ghose, M. K. Samal and A. Datta. Phys. Lett. **315A**, 23 (2003).
- [28] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, and R. G. Teixeira, Gen. Relativ. Gravitation. **34**, 491 (2002).
- [29] R. Casana, B. M. Pimentel, J. T. Lunardi, and R. G. Teixeira, Gen. Relativ. Gravitation. **34**, 1941 (2002)
- [30] M. Nowakowski, Phys. Lett. A 244, 329 (1998)
- [31] L.B. Castro, A.S de Castro, Phys. Rev. A 90, 022101 (2014).
- [32] D. Itô, K. Mori and E. Carriere, Nuovo Cimento. A,**51**, 1119 (1967);

M. Moshinsky and A. Szczepaniak, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, L817 (1989).

- [33] A. Boumali, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 235301 (2009).
- [34] K. Bakke and C. Furtado, Ann. Phys. **355**, 48-54 (2015)
- [35] A. J. Carvalho, C. Furtado and F. Moraes, Phys. Rev. A. **84**, 032109 (2011).
- [36] K. Bakke, Eur. Phys. J. Plus. **127**, 82 (2012)
- [37] K. Bakke and F. Moraes, Phys. Lett. **A376** , 2838-2841 (2012)
- [38] K. Bakke and H. Belich, Eur. Phys. J. plus. **129**: 147 (2014)
- [39] K. Bakke, Ann. Phys. **341**, 86-93 (2014).
- [40] K. Bakke and C. Furtado, Ann. Phys. **355**, 48-54 (2015).
- [41] L. B. Castro, Eur. Phys. J. C. **75** , 287 (2015).
- [42] A. Boumali and N. Messai, Can. J. Phys, (2014)

A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, Cosmic Strings and Other Topological Defects, Cambridge University Press, (2000).

- [44] E. R. F. Medeiros, E.R. Bezerra de Mello, Eur. Phys. J. C 72:2051 (2012).
- [45] H. G. Dosch, J. H. Jansen, V. F. Müller, Phys. Nor. 5, 2 (1971)

G. Soff, B. Müller, J. Rafelski, W. Greiner, Z. Naturforsch. A, J. Phys. Sci. 28 , 1389 (1973).

- [46] B. Bergerhoff and G. Soff, Z. Naturforsch. **49** a, 997-1012 (1994).
- [48] R. L. L. Vitória, C. Furtado and K. Bakke, Ann. Phys **370** , 128-136 (2016).
- [49] R. L. L. Vitória and K. Bakke, Eur. Phys. J. Plus (2016) 131 :36.
- [50] M. Falek and M. Merad, Cent. Euro. J. Phys. **8**, 3 (2010)
- [51] K. Sogut and A. Havare, Class. Quantum Grav. **23**, 7129-7142 (2006).

[J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, Duffin-Kemmer-Petiau equation in Riemannian space-times, arXiv:gr-qc/9909033](#)

- [53] A.A. Bytsenko, A.E. Golcalves and B.M. Pimentel, World Scientific, pp 111, (2000).
- [54] A. Boumali, L. Chetouani and H. Hassanabadi, Can. J. Phys. **91**, 1-11 (2013)

- [55] [W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations, 3rd Edition \(Springer, Berlin, 2000\).](#)
- [56] R. L. L. Vitória, C. Furtado, K. Bakke, *Ann. Phys.* **370**, 128 (2016)
- [57] E. R. Figueiredo Medeiros and E. R. Bezerra de Mello, *Eur. Phys. J. C.* **72**, 2051 (2012).
- [58] A. Vercin, *Phys. Lett. B.* **260**, 120 (1991).
- [59] J. Myrheim, E. Halvorsen and A. Vercin, *Phys. Lett. B.* **278**, 171 (1992).
- [60] [S. Slavyanov and W. Lay, Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities, Oxford University Press, Oxford, 2000](#)
- [61] [G. B. Arfken, H. J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, sixth ed., Elsevier Academic Press, New York, 2005.](#)

P. Maroni, Sur la forme bi-confluente de l'equation de Heun, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* 264, 503-505 (1967).

- [63] A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations Oxford University Press, New York (1995).*

Index

A

équation de Dirac, 1--4, 11, 12, 53, 67, 68
équation de DKP, 3, 4, 14, 19, 48, 50, 54
équation de Kemmer, 12
équation de KG, 1, 3, 4, 8--10, 14, 15, 54
équation de Proca, 3, 14
équation de Schrödinger, 3, 8, 11
équation DKP, 50
algèbre de Kemmer, 12

B

boson scalaire, 46

C

champ gravitationnel, 2, 28, 53--55
champ magnétique, 25, 27--29, 34, 38, 42, 49, 54, 55, 66, 70
champ magnétique, 39, 68
coefficients de connexion, 6
connection, 5
connection spinoriel, 68
connection spinorielle, 12
connexion affine, 6, 7

connexion de spin, 7

connexion spinorielle, 35

connexions de spin, 14

corde cosmique, 2, 4, 22, 23, 25, 27--29, 32, 34, 37, 38, 40, 42, 46, 50, 54, 55, 68, 70

couplage minimale, 8

courbure, 5, 6, 23, 25

D

défauts topologiques, 2, 4, 22, 23, 42, 54

dérivée covariante, 6

dérivée extérieure, 7

E

effet Ramsey-interférométrie, 3

espace de Minkowski, 5

espace de Minkowski, 34, 38, 42, 47

espace de Minkowski, 4

espace-temps, 2, 54, 55, 68

espace-temps courbé, 2, 4, 34

espace-temps plat, 4, 29, 34, 42, 54, 55

F

fonction bi-confluente de Heun, 45
fonction confluyente de Heun, 30
fonction confluyente hypergéométrique, 70
fonction hypergéométrique confluyente, 41
fonctions hypergéométrique confluent, 37
formes différentielles, 6
fréquence cyclotronique, 28

G

gravité, 2, 53

J

Jaynes Cummings, 3

L

latex, 4

lyx, 4

M

mécanique quantique, 1, 2, 8
méthode de Frobenius, 30, 45
méthode de Vierbein, 5
métrique, 5
matrices bêta, 12
matrices de Dirac, 10, 12, 17, 66, 68
matrices de DKP, 19
matrices de Kemmer, 14, 34
matrices de Pauli, 11, 66
matrices gamma, 12
Maurer-Cartan, 7, 35
monopôles, 2, 22, 54

N

Nikiforov-Uvarov, 37, 55, 64, 69

O

optique quantique, 3
oscillateur de Dirac, 1--3, 15, 19, 29, 36,
37, 47, 53, 54, 66--70
oscillateur de DKP, 4, 19, 40, 42, 46, 47,
49, 55
oscillateur de Kemmer, 16, 19, 34, 35, 38,
55
oscillateur de KG, 3, 15, 20, 25, 27--29,
32, 33, 54
oscillateur harmonique, 1, 3, 16, 18
oscillateur relativiste bosonique, 4
oscillateurs bosoniques, 54

P

parois de domaines, 2, 22, 54
particule bosonique, 3
particule scalaire, 12
potentiel électromagnétique, 3, 44
potentiel scalaire, 29, 32, 33, 44, 46, 50,
55

R

référentiel de Lorentz, 5
repères mobiles, 5, 6

S

scalaire de Ricci, 6, 10, 25
spineur, 11

symboles de Christoffel, 6

symboles de christoffel, 14

T

tétrade de l'espace, 5

tenseur de courbure de Riemann, 6

tenseur fondamental, 25

tenseur Levi-Cevita, 67

tenseur métrique, 5, 6

torsion, 7, 35

transitions de phase quantique, 3

transport parallèle, 5