



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

**Université Larbi Tébessi -Tebessa-**  
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et  
de la Vie*

*Département : Sciences de la Matière*



N d'ordre :.....

Série :.....

### **Thèse**

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

**Doctorat 3ème cycle LMD**

Option : ***Physique Théorique***

### **Intitulée**

---

## **Les propriétés thermodynamiques des oscillateurs harmoniques relativistes fractionnaires**

---

*Korichi Nabil*

Devant le jury

Pr. Benkhedir Mouhamed Louf	<b>Président</b>	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>
Pr. Abdelmalek Boumali	<b>Rapporteur</b>	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>
Pr. Maamache Mustapha	<b>Examineur</b>	<i>Université Ferhat Abbas. Sétif 1</i>
Dr. Zaghrou Nasreddine	<b>Examineur</b>	<i>ENS Assia Djébar, Constantine</i>
Pr. Chemam Faïçal	<b>Examineur</b>	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>

*Date de Soutenance : 26/06/2023*

© *Mémoire effectué au*  
*Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique*



*Les propriétés thermodynamiques des oscillateurs harmoniques relativistes  
fractionnaires*

*Kerichi Nabil*

4 juillet 2023

---

## ملخص

في هذا العمل ركزنا اهتمامنا على دراسة الخصائص الحرارية لبعض النظم الإحصائية لمذبذبات ديراك وكلاين جوردون و PKD النسبية أحادية البعد أولاً قدمنا الأدوات الأساسية لبناء نظرية المشتق الكسري ومنه طبقنا بعض الخصائص والتعريفات المهمة للمشتقات الكسرية على المذبذبات التوافقية النسبية باستخدام التقريب شبه الكلاسيكي ثم حددنا قيم الطاقة الذاتية للمذبذبات التوافقية الكلاسيكية بدلالة المعامل الكسري  $\alpha$  ومنه تحصلنا على تأثير ملحوظا على قيم الطاقة الذاتية .

وبتقديم حسابا عدديا بسيطا على طريقة التحليل العددي للخصائص الحرارية لطيف الطاقة الذاتية لهذا النظام واستخدمنا صيغة أويلر ماكلورين لحساب دالة التوزيع بدلالة المعامل الكسري  $\alpha$  والخصائص الحرارية المتعلقة بالحالة الكسرية بدلالة المعامل الكسري  $\alpha$  وكذلك احتمال الكثافة .

---

## Abstract

In this thesis, we investigate the fractional version of the one-dimensional relativistic oscillators. We apply some important definitions and properties of a new kind of fractional formalism on the Dirac, Klein-Gordon and DKP oscillators. By using a semiclassical approximation, the energy eigenvalues have been determined for these oscillators. The obtained results show a remarkable influence of the fractional parameter on the energy eigenvalues. By considering a unique energy spectrum, we present a simple numerical computation of the thermal properties of a defined energy spectrum of a system. The Euler–Maclaurin formula has been used to calculate the partition function and therefore the associated thermodynamics quantities. In addition, the eigensolutions of these three oscillators, based on the factorization method, have been determined.

---

## Résumé

Dans cette thèse, nous étudions la version fractionnelle des oscillateurs relativistes unidimensionnels. Nous appliquons certaines définitions et propriétés importantes d'un nouveau type de formalisme fractionnaire sur les trois oscillateurs de Dirac, Klein-Gordon et DKP. En utilisant une approximation semi-classique, les valeurs propres d'énergie ont été déterminées pour ces oscillateurs. Les résultats obtenus montrent une influence remarquable du paramètre fractionnel sur les valeurs propres de l'énergie. En considérant un spectre d'énergie unique, nous présentons un calcul numérique simple des propriétés thermiques d'un spectre d'énergie défini d'un système. La formule d'Euler–Maclaurin a été utilisée pour calculer la fonction de partition et donc les quantités thermodynamiques associées. En outre, les fonctions propres de ces trois oscillateurs, basées sur la méthode de factorisation, ont été déterminées.

---

## *Dédicace*

*Je dédie cet humble travail à mes chers parents qui m'ont tant encouragé et mené au succès. À mes chères sœurs et mon frère Zakaria. À mon ami Salim pour le goût de l'effort qu'il m'a apporté. À mon défunt grand-père, j'aimerais bien que ce travail soit parmi les meilleurs cadeaux que je puisse lui offrir.*

---

## Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet de fin d'études, pour obtenir le diplôme de Doctorat LMD en Physique Théorique à l'université de Larbi Tébessi-Tébessa-. Avant tout, je remercie ALLAH le tout-puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail. Et d'une façon toute particulière, j'adresse mes sincères remerciements à mes parents qui m'ont soutenu dans toutes les parties de ma vie et m'ont donné la force et le courage d'atteindre tout cela moi-même.

Je tiens à remercier mon encadreur le Professeur *Abdelmalek Boumali* pour m'avoir proposé ce sujet aussi intéressant et riche. Je suis très reconnaissant tout particulièrement pour la confiance qu'il m'a témoignée et la liberté qui m'a laissé.

J'exprime mes remerciements à Monsieur *Benkhedir Mouhamed-Loutfi*, Professeur à l'*Université Larbi-Tébessi -Tébessa-*, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de mon mémoire.

Je remercie vivement Monsieur *Maamache Mustapha*, Professeur à l'*UFA. Sétif 1* d'avoir accepté de participer à ce jury de thèse et de juger ce travail.

Je tiens également à remercier Monsieur *Zaghrou Nasreddine*, Maître de Conférence A à l'*ENS Constantine*, de l'intérêt qu'il a témoigné pour mon travail, ainsi que d'avoir bien voulu de participer au jury de thèse.

Je remercie Monsieur *Chemam Fayçal*, Professeur à l'*Université Larbi-Tébessi-Tébessa-*, qui a accepté d'être examinateur de cette thèse.

Je remercie aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observés, aidés, conseillés et même supportés. Enfin, je souhaite exprimer toute ma gratitude à l'ensemble des personnes, qui bien en marche de ce travail, ont contribué largement à son aboutissement. Que ce soit depuis toujours, depuis plusieurs années ou quelques mois seulement, nombreux sont ceux et ceux qui ont participé à notre épanouissement. On les remercie sincèrement.



ملخص	i
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Dédicace</b>	<b>iv</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Liste des Tableaux</b>	<b>viii</b>
<b>Liste des Figures</b>	<b>ix</b>
<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Les Aspects fondamentaux de l'analyse fractionnaire</b>	<b>5</b>
1.1 Préliminaires . . . . .	5
1.2 La fonction Gamma $\Gamma$ . . . . .	5
1.3 La fonction Bêta . . . . .	7
1.4 La fonction Mittag-Leffler . . . . .	8
1.5 Espace des fonctions sommables ( $L_p([a, b])$ ) . . . . .	8
1.6 Le calcul fractionnaire . . . . .	9
<b>2 L'oscillateur quantique fractionnaire Harmonique non-relativiste à 1D</b>	<b>16</b>
2.1 Les solutions de l'oscillateur quantique fractionnaire à une dimension . . .	16

2.2	Détermination de la fonction d'onde de l'oscillateur harmonique . . . . .	21
2.3	Propriétés thermiques de l'oscillateur quantique fractionnaire non-relativiste à 1D . . . . .	24
<b>3</b>	<b>L'oscillateur quantique fractionnaire de Dirac à 1D</b>	<b>28</b>
3.1	Les solutions propres de l'oscillateur fractionnaire de Dirac à 1D . . . . .	28
<b>4</b>	<b>L'oscillateur quantique fractionnaire de Klein-Gordon à 1D</b>	<b>35</b>
4.1	Les solutions propres de l'oscillateur fractionnaire de Klein-Gordon à 1D . . . . .	35
<b>5</b>	<b>L'oscillateur quantique fractionnaire de Duffin-Kemmer-Petiau à 1D</b>	<b>42</b>
5.1	L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau à une dimension . . . . .	42
5.2	Les solutions propres de l'oscillateur quantique fractionnaire de DKP unidimensionnel . . . . .	43
5.3	Fonctions propres de l'oscillateur fractionnaire de DKP à 1D . . . . .	49
<b>6</b>	<b>Les propriétés thermiques des oscillateurs fractionnaires relativistes à 1D</b>	<b>52</b>
6.1	Les propriétés thermodynamiques des oscillateurs fractionnaires relativistes . . . . .	52
6.2	Propriétés thermiques de l'oscillateur quantique fractionnaire de Dirac . . . . .	53
6.3	Propriétés thermiques de l'oscillateur quantique fractionnaire de Klein-Gordon . . . . .	54
6.4	Propriétés thermiques de l'oscillateur quantique fractionnaire de DKP . . . . .	56
	<b>Bibliographie</b>	<b>62</b>
<b>A</b>	<b>L'oscillateur quantique fractionnaire de Dirac</b>	<b>68</b>
<b>B</b>	<b>Les dérivés fractionnaires de Riemann-Liouville et Caputo</b>	<b>71</b>
B.1	La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville . . . . .	71
B.2	La dérivée fractionnaire de Caputo . . . . .	73
<b>C</b>	<b>Les approches semi-classique</b>	<b>75</b>
C.1	Préambule . . . . .	75
C.2	Approximation WKB (Wentzel, Kramers et Brillouin) . . . . .	75
C.3	Règle de quantification : Bohr-Sommerfeld-Wilson (BSW) et Einstein-Brillouin-Keller (EBK) . . . . .	77



LISTE DES TABLEAUX

2.1	Les quatre premières formes de $\tilde{H}_n$ . . . . .	24
4.1	Certaines valeurs de la fonction $\eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)$ . . . . .	36
5.1	Les quatre premières formes de $\tilde{H}_n$ . . . . .	50

## LISTE DES FIGURES

1.1	La fonction gamma $\Gamma$ en fonction de $x$ . . . . .	6
2.1	Le spectre d'énergie $E$ en fonction du nombre quantique $n$ . . . . .	21
2.2	Les quantités thermodynamiques de l'oscillateur fractionnaire Harmonique à 1D . . . . .	27
3.1	Les niveaux énergétiques de l'oscillateur de Dirac en fonction du nombre quantique $n$ pour différentes valeurs de $\alpha$ et $\nu$ . . . . .	33
3.2	Les fonctions propres de l'oscillateur fractionnaire de Dirac à 1 D . . . . .	34
4.1	Énergies des différents niveaux $n$ en fonction du paramètre $\alpha$ . . . . .	39
4.2	Les niveaux d'énergie de l'oscillateur fractionnaire de Klein-Gordon à 1D en fonction du nombre quantique $n$ pour différentes valeurs de $\alpha$ et $\nu$ . . . . .	40
4.3	L'allure de la fonction d'onde $(\psi_n)_{KG}$ ainsi que la densité de probabilité $(\rho_n)_{KG}$ pour les niveaux $n = 0, 1, 2, 3$ . . . . .	41
5.1	Spectre d'énergie pour les niveaux $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ en fonction du paramètre $\alpha$ . . . . .	48
5.2	L'allure des deux composantes $\psi_{1,0}$ et $\psi_{1,1}$ en fonction de $x$ . . . . .	51
6.1	Les quantités thermodynamiques de l'oscillateur fractionnaire de Dirac à 1D . . . . .	54
6.2	La limite classique de la chaleur spécifique pour les deux oscillateurs non relativiste et relativiste . . . . .	55
6.3	La chaleur spécifique des deux oscillateurs fractionnaires non relativiste ( $\alpha = 1$ ) et relativiste de Dirac ( $\alpha = 2$ ) . . . . .	55

6.4 Les quantités thermodynamiques de l'oscillateur fractionnaire de Klein-Gordon à 1D . . . . .	56
6.5 Les quantités thermodynamiques de l'oscillateur fractionnaire de DKP à 1D pour les deux particules de spin 0 et spin 1 . . . . .	57
6.6 La limite classique de la chaleur spécifique pour les deux oscillateurs non relativiste et relativiste . . . . .	58

Ces dernières années, les physiciens et les mathématiciens ont accordé beaucoup d'attention aux différentes généralisations de l'équation de Schrödinger dans le cas des opérateurs différentiels d'ordre fractionnaire. Le calcul fractionnaire fournit un ensemble d'axiomes et de méthodes pour étendre les définitions de coordonnées et de dérivés correspondants de l'entier  $n$  à un ordre arbitraire  $\alpha$ ,  $\{x^n, \frac{\partial^n}{\partial x^n}\} \rightarrow \{x^\alpha, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\}$ ,  $x > 0$  de manière raisonnable [1–3].

Le calcul fractionnaire a suscité un intérêt croissant au cours des deux dernières décennies. Cependant, ce n'est qu'au cours de la dernière décennie que des travaux concernant la mécanique quantique fractionnaire sont apparus. L'application du calcul fractionnaire à la mécanique quantique standard est une nouvelle partie de la physique quantique qui se développe rapidement, avec une variété d'applications [2–11].

Un grand nombre d'applications ont été étendues à d'autres disciplines, dont la cosmologie, l'ingénierie, la finance et la biologie [3]. Parmi eux, on peut citer les œuvres suivantes : (i) le problème de l'équation de fractionnaire de Schrödinger [12, 13] pour un potentiel infini [14–17] (ii) l'atome de Bohr fractionnaire [18, 19], (iii) l'équation de Schrödinger fractionnaire pour le mouvement tridimensionnel, (iv) Nouvelles caractéristiques de diffusion dans la mécanique quantique fractionnaire spatiale non hermitienne [20–22], (v) temps de tunneling dans un espace de la mécanique quantique fractionnaire [21], (vi) l'évolution fractionnaire en mécanique quantique [10], (vii) A l'équation fractionnaire de Dirac equation et ces solutions [23], optique quantique fractionnaire [24], mécanique statistique [25] et solutions de certains systèmes quantiques [26] et enfin à la spectroscopie infrarouge de molécules diatomiques [27, 28].

Au cours des dernières décennies, un nouveau formalisme de la mécanique quan-

tique (MQ) est apparu comme une approche inhabituelle pour étudier les lois fondamentales de la physique. L'histoire de la mécanique quantique fractionnaire a été introduite en 2002 par Laskin [18] lorsqu'il a utilisé l'idée du calcul fractionnaire pour dériver une forme fractionnaire de l'équation de Schrödinger. La nature de la mécanique quantique fractionnaire est déterminée par l'indice de Lévy  $0 < \alpha \leq 2$  et l'exigence de l'existence d'un moment donne la restriction  $1 < \alpha \leq 2$ . Laskin [2, 8, 16–19, 29–31]. En utilisant la dérivée fractionnaire quantique de Riesz, Laskin généralise la mécanique quantique standard à une version fractionnaire dans laquelle l'équation de Schrödinger prend la forme suivante :

$$(1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}_\alpha \Psi,$$

dont

$$(2) \quad \hat{H}_\alpha = \frac{\hat{P}^\alpha}{2m} + V(\hat{x}^\alpha),$$

où  $i$  l'unité imaginaire,  $\hbar$  est la constante de Planck,  $\Psi$  la fonction d'onde et  $\hat{H}_\alpha$  est l'opérateur Hamiltonien d'ordre  $\alpha$  avec  $1 < \alpha \leq 2$ . De toute évidence, l'effet de la formulation fractionnaire est encodé dans l'opérateur du moment  $\hat{p}^\alpha$  qui est exprimé en termes de la dérivée spatiale de l'ordre de  $\alpha$ . Suivant l'approche de Laskin, de nombreux auteurs ont travaillé au cours des dernières années à étendre la formulation fractionnaire pour explorer d'autres branches de la physique moderne et, depuis, le nombre d'articles a considérablement augmenté et de nombreux résultats importants ont été obtenus [23, 32–34]. Cependant, la plupart des contributions actuelles ont porté sur l'étude des problèmes relativistes en termes de l'équation de Dirac qui prédit le comportement des fermions et de l'équation de Klein-Gordon qui décrit les bosons. Dans la plupart de ces études, les auteurs ont abordé le système en question d'un point de vue mathématique, et ils n'ont pas fourni suffisamment d'interprétations physiques. Leurs approches fractionnaires sont basées sur des définitions différentes et la plupart d'entre elles ont utilisé la forme intégrale. Il faut mentionner qu'il existe deux célèbres cadres classiques du calcul fractionnaire, à savoir Riemann-Liouville et Caputo. Cependant, ces deux concepts entre autres ne satisfont pas beaucoup de propriétés mathématiques. Par exemple, la dérivée Riemann-Liouville d'une constante n'est pas nulle. En outre, la formule dérivée connue du produit et le quotient de deux fonctions ne sont pas satisfaits [1–3]. En plus, la règle de la chaîne n'est pas satisfaite.



Cette thèse a pour objet d'étudier les propriétés thermodynamiques des oscillateurs relativistes dans le cadre du calcul fractionnaire. L'interaction de l'oscillateur de Dirac est un potentiel important tant pour la théorie que pour l'application. Il a été pour la première fois étudié par Ito et Carriere [35]. De l'autre côté, Moshinsky et Szczepaniak [36–38] furent les premiers à introduire un terme intéressant dans l'équation de Dirac. Plus précisément, ils ont suggéré de substituer dans l'équation libre de Dirac l'opérateur de l'impulsion comme  $p - im\omega\beta r$ <sup>1</sup>. On peut montrer que l'oscillateur Dirac est un système physique, qui peut être interprété comme l'interaction du moment magnétique anormal avec un champ électrique linéaire [22, 39, 40]. Le potentiel électromagnétique associé à l'oscillateur de Dirac a été découvert par Benitez et al [41]. L'oscillateur Dirac a suscité beaucoup d'intérêt à la fois parce qu'il fournit un des exemples de la solvabilité exacte de l'équation de Dirac [42] et à cause de ses nombreuses applications physiques. En tant que problème de la mécanique quantique relativiste, L'oscillateur de Dirac a été étudié sous de nombreux angles (voir Réf. [38, 43] et ses références). Récemment, l'étude des propriétés thermiques appliquées à la mécanique quantique est un sujet en pleine croissance dans la littérature. Pacheco et al [44, 45] ont d'abord examiné les propriétés thermiques de l'oscillateur de Dirac standard unidimensionnel. Dans cette direction, à notre connaissance, les oscillateurs fractionnaires relativistes unidimensionnels et par conséquent, ses propriétés thermiques ne sont pas traitées. Aussi, nous avons intégré les propriétés thermiques de l'oscillateur fractionnaire harmonique fractionnaire unidimensionnel. A notre connaissance, ce type d'étude n'a pas été traité dans la littérature. Donc, nous nous attendons à ce que cette étude nous aide à comprendre les propriétés des oscillateurs relativistes.

Le manuscrit est organisé comme suit: nous évoquerons brièvement les différentes définitions de base de la dérivation et de l'intégration d'ordre non entier et quelques propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire dans le premier chapitre.

Le deuxième chapitre est consacré sur le calcul des propriétés thermodynamiques de l'oscillateur fractionnaire harmonique non relativiste et l'influence du paramètre  $\alpha$  sur ses propriétés.

Les solutions exactes des oscillateurs fractionnaires relativistes de Dirac, Klein-Gordon et de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) ont fait l'objet des chapitres 2,3 et 4 respectivement.

Le calcul des propriétés statistique de ces oscillateurs a été traité dans le chapitre 5.

Enfin, nous résumons les résultats dans leur ensemble en guise de conclusion générale.

---

<sup>1</sup>Cette forme de l'opérateur de l'impulsion  $p - im\omega\beta r$  n'est pas hermétique .

## 1.1 Préliminaires

Dans ce chapitre, nous discutons brièvement des outils et éléments mathématiques nécessaires pour le calcul fractionnaire. Pour y parvenir, nous commençons par un rappel des fonctions spéciales et des espaces fonctionnels. Ensuite, on rappelle quelques notions essentielles de l'analyse du concept de dérivation et d'intégration fractionnaire et certaines de leurs propriétés principales.

## 1.2 La fonction Gamma $\Gamma$

**Définition1:** La fonction Gamma d'Euler est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres réels, et même aux nombres complexes. Pour  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $Re(\alpha) > 0$ , on définit la fonction Gamma par [46–49]

$$(1.1) \quad \Gamma : \alpha \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive. L'allure de la fonction gamma est donnée par la figure suivante

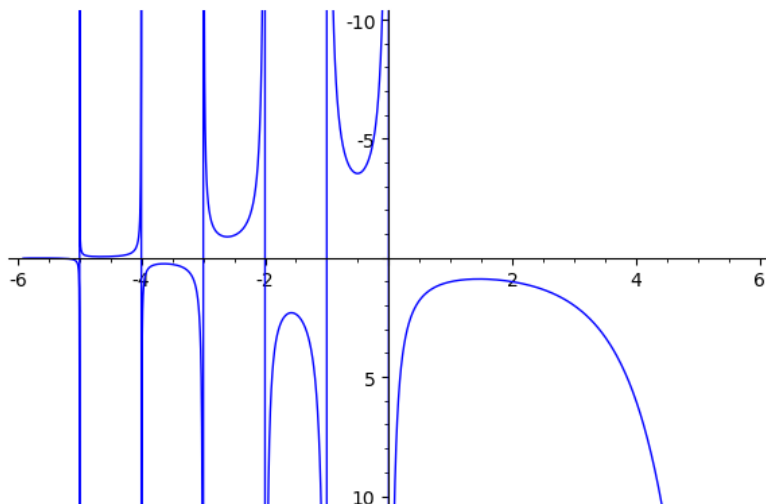


Figure 1.1: La fonction gamma  $\Gamma$  en fonction de  $x$

En intégrant (1.1) par parties, nous pouvons voir que [46]

$$(1.2) \quad \Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha), \text{ dont } \Re(\alpha) > 0.$$

La propriété (1.2) permet d'établir ce qui suit

$$(1.3) \quad \Gamma(n + 1) = n\Gamma(n); \forall n \in \mathbb{N}.$$

dont on peut la démontrer par une intégration par parties comme suit :

$$(1.4) \quad \Gamma(n + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^n dt = [-e^{-t} t^n]_0^{\infty} + n \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = n\Gamma(n).$$

En utilisant la relation (1.4), nous obtenons pour  $n = 1, 2, 3, \dots$  les valeurs

$$(1.5) \quad \Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1!, \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2!, \Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3!.$$

Plus généralement

$$(1.6) \quad \Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n!.$$

Aussi, nous avons la relation suivante [50]

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} e^{-\pi s^2} \pi^{-\frac{1}{2}} s^{-1} 2\pi s ds \\ &= \pi^{\frac{1}{2}} \int_R e^{-\pi s^2} ds = \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Pour le cas générale dont  $\alpha = n + \frac{1}{2}$ , on a

$$(1.8) \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!} \sqrt{\pi},$$

dont  $n$  est un entier positif.

### 1.3 La fonction Bêta

**Définition2:** La fonction Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie pour des nombres complexes  $p$  et  $q$  par [47, 50, 51]:

$$(1.9) \quad B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0.$$

Elle est liée à la fonction  $\Gamma$  par la relation suivante :

$$(1.10) \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \Re(p) > 0, \Re(q) > 0.$$

Il découle de (1.10) que la fonction bêta est une fonction symétrique, c'est-à-dire.

$$(1.11) \quad B(p, q) = B(q, p).$$

Enfin, nous pouvons mentionner ci-dessous quelques propriétés de cette fonction [50, 52, 53]

$$(1.12) \quad B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(\theta)^{2p-1} \cos(\theta)^{2q-1} d\theta,$$

$$(1.13) \quad B(p, q)B(p+q, 1-q) = \frac{\pi}{p \sin(q\pi)},$$

$$(1.14) \quad B(p, q+1) = \frac{q}{p+q} B(p, q),$$

$$(1.15) \quad B(p, q) = 2^{1-2p} B\left(\frac{1}{2}, p\right).$$

## 1.4 La fonction Mittag-Leffler

**Définition3:** La fonction Mittag-Leffler est définie par la série suivante [1, 46, 53]:

$$(1.16) \quad E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}, \alpha > 0.$$

Cette définition peut être généralisée comme suit :

$$(1.17) \quad E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k\alpha + \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0.$$

Pour le cas particulier  $\alpha = \beta = 1$ , on retrouve l'expression usuelle de la fonction exponentielle :

$$(1.18) \quad E_{1,1}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Maintenant, si  $\alpha = 0$  et  $\beta = 1$ , alors on obtient la forme de la somme d'une suite géométrique :

$$(1.19) \quad E_{0,1}(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}, \text{ pour } |z| < 1.$$

Enfin, les valeurs  $\alpha = 1$  et  $\beta = 2$  conduit à la relation suivante :

$$(1.20) \quad E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

## 1.5 Espace des fonctions sommables ( $L_p([a, b])$ )

**Définition4:** Soit  $X$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ). L'espace  $X$  est dit espace vectoriel normé, s'il est muni d'une application [54–56]

$$(1.21) \quad \|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

vérifiant les axiomes suivantes :

1.  $\|x\| \geq 0$  et  $\|x\| = 0$  si et seulement si  $x = 0, \forall x \in X$
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

**Définition5** L'espace vectoriel normé  $(X, \|\cdot\|)$  est dit complet si toute suite de Cauchy dans  $X$  est convergente.

**Définition6** Un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

**Définition7** Soit  $\varphi$  une fonction définie et mesurable sur  $[a, b]$  qui appartient à l'ensemble  $L_p([a, b])$ , où  $p$  est un entier positif. La norme  $L_p([a, b])$  est définie par :

$$(1.22) \quad \int_a^b |\varphi(x)|^p dx < \infty.$$

**Définition8** La fonction  $f$  est dite absolument continue sur un intervalle si pour tout réel  $\varepsilon$  strictement positif, il existe un réel  $\delta$  strictement positif, tel que pour tout système fini d'intervalle  $[a_k, b_k] \in [a, b]$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  on a la relation :

$$(1.23) \quad \sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n (f(b_k) - f(a_k)) < \varepsilon$$

L'ensemble des fonctions absolument continues sur  $[a, b]$  est noté  $AC([a, b])$ .

**Théorème:** Les fonctions absolument continues sur un intervalle  $[a, b]$  possèdent une dérivée sommable sur  $[a, b]$  dit autrement [57]

$$(1.24) \quad f \in AC([a, b]) \iff \exists \varphi \in L_1([a, b])$$

tel que pour tout  $x \in [a, b]$

$$(1.25) \quad f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t) dt$$

**Définition9** On note par  $AC^n([a, b])$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , l'espace des fonctions  $f$  qui ont des dérivées continues sur  $[a, b]$  jusqu'à l'ordre  $(n-1)$  et telles que  $f^{(n-1)} \in AC([a, b])$  c'est-à-dire [58]

$$(1.26) \quad AC^n \in ([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, f^{(k)} \in AC([a, b]), k = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}, f^{(n-1)} \in AC([a, b])\}$$

## 1.6 Le calcul fractionnaire

Dans ce qui suit, nous présentons la définition ainsi que quelques propriétés de base sur l'intégrale et le dérivé fractionnaire dans le sens de Riemann-Liouville et de Caputo.

### 1.6.1 Intégrale et dérivée fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

A l'aide de la formule de Cauchy, l'intégrale successive de la fonction  $\varphi$  est déterminée comme suit [9, 58]:

$$(1.27) \quad \begin{aligned} I_a^n \varphi(t) &= \int_a^t ds_1 \int_a^{s_1} ds_2, \dots \int_a^{s_{n-1}} \varphi(s_n) ds_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-s)^{n-1} \varphi(s) ds, n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

Cette formule peut être facilement étendue au cas fractionnaire [9]:

$$(1.28) \quad \begin{aligned} {}_a I_+^\alpha \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \\ {}_b I_-^\alpha \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \end{aligned}$$

#### 1.6.1.1 L'intégrale fractionnaire de Liouville

Nous définissons l'intégrale fractionnaire selon le réglage de Liouville  $a = -\infty, b = +\infty$  [58]:

$$(1.29) \quad \begin{aligned} {}_L I_+^\alpha \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \\ {}_L I_-^\alpha \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{+\infty} (s-t)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \end{aligned}$$

#### 1.6.1.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann

L'intégrale fractionnaire selon Riemann est donnée par le réglage  $a = 0, b = 0$  [58]:

$$(1.30) \quad \begin{aligned} {}_R I_+^\alpha \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \\ {}_R I_-^\alpha \varphi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^0 (s-t)^{\alpha-1} \varphi(s) ds \end{aligned}$$

Quelle est la différence entre la définition selon Liouville (1.29) et que selon Riemann (1.30)? Appliquons les deux définitions intégrales à la fonction spéciale  $f(t) = e^{kt}$ . Nous obtenons

$$(1.31) \quad \begin{aligned} {}_L I_+^\alpha e^{kt} &= k^{-\alpha} e^{kt} \quad t > 0 \\ {}_L I_-^\alpha e^{kt} &= (-k)^{-\alpha} e^{kt} \quad t < 0 \\ {}_R I_+^\alpha e^{kt} &= k^{-\alpha} e^{kt} \left( 1 - \frac{\Gamma(\alpha, kt)}{\Gamma(\alpha)} \right) \quad t > 0 \\ {}_R I_-^\alpha e^{kt} &= (-k)^{-\alpha} e^{kt} \left( 1 - \frac{\Gamma(\alpha, kt)}{\Gamma(\alpha)} \right) \quad t < 0 \end{aligned}$$

En généralisant cette relation, l'intégrale d'ordre non entier de la fonction  $\varphi(t)$  peut être défini en utilisant la fonction  $\Gamma$ . Nous désignons l'opérateur de dérivation d'ordre  $n$  par  $D^n$  dont  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, nous avons

$$(1.32) \quad D^n I_a^n = I, I_a^n D^n \neq I.$$

**Définition10:** Soit  $\varphi \in \mathcal{L}^1([a; b])$ . L'intégrale fractionnaire d'ordre  $\alpha$  au sens de Riemann-Liouville s'écrit par [51, 59]:

$$(1.33) \quad (I_a^\alpha \varphi)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} \varphi(s) ds, \alpha > 0.$$

**Définition11:** La dérivée fractionnaire d'ordre  $\alpha > 0$  au sens de Riemann-Liouville d'une fonction  $\varphi \in \mathcal{L}^1([a; b])$  est donnée par [9, 60]

$$(1.34) \quad \begin{aligned} \text{RL}D_a^\alpha \varphi(t) &= D^n [I_a^{n-\alpha} \varphi(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} \varphi(s) ds, \alpha > 0. \end{aligned}$$

où  $n = [\alpha] + 1$ , et  $[\alpha]$  est la partie entière de  $\alpha$ . Si  $0 < \alpha < 1$ , alors  $n = 1$ ; d'où

$$(1.35) \quad \text{RL}D_a^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-s)^{-\alpha-1} \varphi(s) ds, \alpha > 0.$$

**Exemple** Soient  $\alpha > 0, \beta > -1, \varphi(t) = (t-a)^\beta$ , alors

$$(1.36) \quad I_a^\alpha \varphi(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+\alpha+1)} (t-a)^{\beta+\alpha}, \alpha > 0, \beta > -1,$$

ou

$$(1.37) \quad \text{RL}D_a^\alpha \varphi(t) = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}, \alpha > 0, \beta > -1.$$

En effet

$$(1.38) \quad I_a^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-a)^\beta (t-s)^{\alpha-1} ds.$$

En utilisant le changement de variable suivant :

$$(1.39) \quad t = a + \theta(t-a), 0 < \theta < 1,$$

(1.38) devient

$$(1.40) \quad I_a^\alpha \varphi(t) = \frac{(t-a)^{\beta+\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \theta^\beta (1-\theta)^{\alpha-1} d\theta.$$

Selon (1.40), on arrive à

$$(1.41) \quad I_a^\alpha \varphi(t) = \frac{B(\beta+1, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\beta+\alpha},$$



ou

$$(1.42) \quad I_a^\alpha \varphi(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} (t-a)^{\beta+\alpha}.$$

De la même façon, nous montrons que

$$(1.43) \quad \text{RL}D_a^\alpha \varphi(t) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (t-a)^{\beta-\alpha}, \beta > -1, \alpha > 0.$$

En particulier

- si  $a = 0$ , alors

$$(1.44) \quad I_a^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} t^{\beta+\alpha},$$

et donc

$$(1.45) \quad \text{RL}D_a^\alpha t^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.$$

- si  $\varphi(t) = c$ , donc

$$(1.46) \quad \text{RL}D_a^\alpha \varphi(t) = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t)^{-\alpha}.$$

En général, nous en déduisons que le dérivé fractionnaire de la constante au sens de Riemann-Liouville n'est pas nul. Ceci permet de vérifier le résultat suivant.

**Proposition1** : Soient  $\alpha > 0$  et  $n = [\alpha] + 1$ , alors

$$(1.47) \quad \text{RL}D_a^\alpha \varphi(t) = 0 \Leftrightarrow \varphi(t) = \sum_{k=1}^n c_k (t-a)^{\alpha-k}.$$

En particulier, si  $0 < \alpha < 1$ , on aura

$$(1.48) \quad \text{RL}D_a^\alpha \varphi(t) = 0 \Leftrightarrow \varphi(t) = c (t-a)^{\alpha-1}.$$

Nous donnons à présent certaines propriétés des deux opérateurs  $I_a^\alpha$  et  $\text{RL}D_a^\alpha$

**Proposition2** : Soit  $f, g \in \mathcal{L}^1([a; b])$ : Pour  $\alpha > 0, \beta > 0$ , on a [51, 61]:

- L'opérateur d'intégration est linéaire

$$(1.49) \quad I_a^\alpha (\lambda f + g)(t) = \lambda (I_a^\alpha f)(t) + (I_a^\alpha g)(t), \lambda \in \mathbb{R}.$$

- L'opérateur de dérivation est linéaire

$$(1.50) \quad \text{RL}D_a^\alpha(\lambda f + g)(t) = \lambda \text{RL}D_a^\alpha f(t) + \text{RL}D_a^\alpha g(t), \lambda \in \mathbb{R}.$$

- En général

$$(1.51) \quad \text{RL}D_a^\alpha \left( \text{RL}D_a^\beta f(t) \right) \neq \text{RL}D_a^\beta \left( \text{RL}D_a^\alpha f(t) \right)$$

**Lemme**  $I_a^\alpha I_a^\beta f(t) = I_a^{\alpha+\beta} f(t)$  (1.52)

**Preuve** Soit  $f, g \in \mathcal{L}^1([a; b])$ . Pour  $\alpha > 0, \beta > 0, \lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$(1.53) \quad \text{RL}D_a^\alpha(\lambda f + g)(t) = D^n I_a^{n-\alpha}(\lambda f + g)(t).$$

Comme la dérivée  $n^{ieme}$  et l'intégrale sont linéaires alors  ${}^{RL}D_a^\alpha$  est linéaire. Comme [53, 58]:

$$(1.54) \quad \text{RL}D_a^\alpha \left( \text{RL}D_a^\beta f(t) \right) = \text{RL}D_a^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\text{RL}D_a^{\beta-k} f(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (t-a)^{k-\alpha}, m = [\beta] + 1,$$

et

$$(1.55) \quad \text{RL}D_a^\beta \left( \text{RL}D_a^\alpha f(t) \right) = \text{RL}D_a^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\text{RL}D_a^{\alpha-k} f(a)}{\Gamma(k-\beta+1)} (t-a)^{k-\beta}, n = [\alpha] + 1.$$

Par suite, les deux opérateurs de dérivations fractionnaires ne commutent que si  $\alpha = \beta$  et  $\text{RL}D_a^{\alpha-k} f(a) = 0$ , pour tout  $k = 1, 2, 3, \dots, n$  et  $\text{RL}D_a^{\beta-k} f(a) = 0$ , pour tout  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Donc

$$(1.56) \quad \text{RL}D_a^\alpha \left( \text{RL}D_a^\beta f(t) \right) \neq \text{RL}D_a^\beta \left( \text{RL}D_a^\alpha f(t) \right).$$

**Proposition 3** Soient  $\alpha > 0, \beta > 0$ , alors

- Pour  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ , l'égalité :

$$(1.57) \quad \text{RL}D_a^\alpha (I_a^\alpha f(t)) = f(t).$$

est vraie presque par tout sur  $[a, b]$ .

- Pour  $f \in \mathcal{L}^1([a, b])$ , la relation

$$(1.58) \quad \text{RL}D_a^\beta (I_a^\alpha f(t)) = I_a^{\alpha-\beta} f(t),$$

est vrai presque par tout sur  $[a, b]$ . En particulier, lorsque  $\beta = k \in \mathbb{N}$  et  $\alpha > k$ , alors :

$$(1.59) \quad \text{RL} D_a^\beta (I_a^\alpha f(t)) = I_a^{q-k} f(t).$$

- Si  $\beta \geq \alpha > 0$  et la dérivée fractionnaire  $\text{RL} D_a^{\beta-\alpha} f$  existe, alors on a :

$$(1.60) \quad \text{RL} D_a^\beta (I_a^\alpha f(t)) = D_a^p f(t).$$

- Pour  $\alpha > 0, k \in \mathbb{N}^*$ . si les dérivées fractionnaires, alors

$$(1.61) \quad \text{RL} D_a^k (\text{RL} D_a^\alpha f(t)) = \text{RL} D_a^{k+\alpha} f(t).$$

**Lemme** : Si  $q > 0, p > 0$ , alors l'équation

$$(1.62) \quad (I_a^q I_a^p \varphi)(t) = (I_a^{q+p} \varphi)(t)$$

est satisfaite presque par tout sur  $[a, b]$ , pour toute  $\varphi \in \mathcal{L}^1([a, b])$ .

## 1.6.2 Dérivées fractionnaires de Liouville–Caputo à gauche et à droite

La dérivée fractionnaire de Liouville–Caputo à gauche et à droite d'ordre  $\alpha$ , sont définies par les deux équation suivantes [58]: pour le cas à droite, on a

$$(1.63) \quad \begin{aligned} \text{LC} D_+^\alpha f(t) &= {}_L I_+^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-s)^{-\alpha} \frac{d}{ds} \varphi(s) ds, t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Par contre le cas à gauche, elle s'écrit par :

$$(1.64) \quad \begin{aligned} \text{LC} D_-^\alpha f(t) &= {}_L I_-^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^{+\infty} (s-t)^{-\alpha} \frac{d}{ds} \varphi(s) ds, t \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

A partir de ces équation, on définit la dérivée de Caputo à gauche et à droite d'ordre  $\alpha$  comme suit [58, 62] : La dérivée à droite par

$$(1.65) \quad \begin{aligned} {}_C D_+^\alpha f(t) &= {}_R I_+^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{d}{ds} \varphi(s) ds, t \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

et la dérivée à gauche comme

$$(1.66) \quad {}_C D_-^\alpha f(t) = {}_R I_-^{1-\alpha} \frac{d}{dt} f(t) \\ = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^0 (s-t)^{-\alpha} \frac{d}{ds} \varphi(s) ds, t \in \mathbb{N}.$$

Cette définition est appelée la dérivé fractionnaire de Caputo. La différence entre les deux formes de définition peut être élucidé par ce qui suit :

Pour le cas de Riemann fractionnaire, on aura :

$$(1.67) \quad {}_R D_+^\alpha \text{const} = \frac{\text{const}}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$$

Par contre, le cas de Caputo on obtient

$$(1.68) \quad {}_C D_+^\alpha \text{const} = 0$$

## CHAPITRE 2

### L'OSCILLATEUR QUANTIQUE FRACTIONNAIRE HARMONIQUE NON-RELATIVISTE À 1D

#### 2.1 Les solutions de l'oscillateur quantique fractionnaire à une dimension

L'équation de Schrödinger fractionnaire à une dimension est donné par [2, 8, 19, 29–31]

$$(2.1) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = H_\alpha \Psi(x, t), \quad 1 < \alpha \leq 2,$$

dont

$$(2.2) \quad H_\alpha = D_\alpha (-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} + \frac{1}{2} m \omega^2 |x|^\alpha, \quad 1 < \alpha \leq 2,$$

avec

$$(2.3) \quad H_\alpha = E_p + V,$$

où  $E_p$  est l'énergie cinétique fractionnaire et  $V$  le potentiel fractionnaire externe. Cette énergie cinétique

$$(2.4) \quad E_p = \frac{p^2}{2m},$$

devient

$$(2.5) \quad E_p = D_\alpha |p|^\alpha, \quad 1 < \alpha \leq 2.$$

Ici,  $p$  est le moment conjugué et  $D_\alpha = \left(\frac{1}{2m}\right)^{\alpha/2}$  sont  $[D_\alpha] = \text{Joule}^{1-\alpha} \text{meter}^\alpha \text{sec}^{-\alpha}$ .

Le cas particulier  $\alpha = 2$  conduit à la dérivée spatiale ordinaire avec  $D_2 = \frac{1}{2m}$ . La différence entre les équations ((2.4) et (2.5) a des répercussions fondamentales sur la mécanique quantique standard [ [2]] : le passage d'une équation de Schrödinger non locale à une équation locale par rapport à celle-ci élargit le rôle du terme énergie cinétique: Ainsi, plutôt qu'une quantité statique basée sur la géométrie pure, elle devient un élément plus dynamique. En ce sens, la diversité des différents phénomènes quantiques est modélisée par la modification du terme énergie potentielle seulement [16, 17].

La présence du potentiel de l'oscillateur harmonique fractionnaire unidimensionnel est donnée par :

$$(2.6) \quad V = \frac{1}{2}m\omega^2 |x|^\alpha ,$$

dont la valeur absolue du terme du potentielle est utilisée afin de préserver la parité de  $x$  en cas d'inversion [9].

En utilisant (2.5) et (2.6), (2.1) est transformé en [2, 19, 27, 30]

$$(2.7) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \left( D_\alpha (-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} + \frac{1}{2}m\omega^2 |x|^\alpha \right) \Psi(x,t), \quad 1 < \alpha \leq 2.$$

La résolution de cette équation est basée sur la définition du dérivé fractionnaire de Riesz [2].

Par définition, l'opérateur de dérivés fractionnaires unidimensionnels de Riesz.  $(-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2}$  est donné par

$$(2.8) \quad (-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} \Psi(x,t) = \int dp e^{ipx/\hbar} |p|^\alpha \varphi(p,t).$$

Ici

$$(2.9) \quad \varphi(p,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipx/\hbar} \Psi(x,t) dx,$$

est la transformation Fourier de la fonction d'onde  $\psi(x,t)$ . Par contre

$$(2.10) \quad \Psi(x,t) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx/\hbar} \varphi(p,t) dp,$$

est la transformation inverse de Fourier de  $\varphi(p,t)$  [53]. En posant  $\alpha = 2$ , on obtient exactement l'équation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique standard à une dimension [63–67]

$$(2.11) \quad i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right) \Psi(x,t).$$

L'opérateur hamiltonien fractionnaire de l'oscillateur harmonique à une dimension ( Eq. (2.2)) est écrit comme suivant [2]:

$$(2.12) \quad H_\alpha = D(-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} + \frac{1}{2} m \omega^2 |x|^\alpha = \frac{|p_x|^\alpha}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 |x|^\alpha .$$

À ce stade, notez que l'herméticité de l'Hamiltonien dépend du choix spécifique de la définition de dérivé fractionnaire. Bien que cet Hamiltonien n'est pas hermétique pour les définitions de Caputo et Riemann de dérivé fractionnaire. Il est possible de démontrer que l'utilisation des définitions de Feller et de Riesz du dérivé fractionnaire assure cette herméticité de l'Hamiltonien  $H_\alpha$  [2, 28].

Ainsi, l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour l'oscillateur harmonique quantique fractionnaire à une dimension est [2]

$$(2.13) \quad \left( D_\alpha (-\hbar^2 \Delta)^{\alpha/2} + \frac{1}{2} m \omega^2 |x|^\alpha \right) \psi(x) = E \psi(x), \quad 1 < \alpha \leq 2,$$

où

$$(2.14) \quad \Psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(x),$$

dont  $E$  est l'énergie de l'oscillateur quantique à fractionnaire.

Dans ce qui suit, nous passons brièvement en revue les solutions de l'équation. (2.13) afin d'obtenir la forme du spectre énergétique. Cette forme du spectre permet de calculer toutes les propriétés thermiques de l'oscillateur en question. Nous définissons l'énergie totale à  $E$ , de façon à ce que :

$$(2.15) \quad E = \frac{|p_x|^\alpha}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 |x|^\alpha .$$

L'équation (2.15) conduit à

$$(2.16) \quad |p_x| = (2mE - m^2 \omega^2 |x|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} .$$

En utilisant la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld [2]

$$(2.17) \quad \oint p(x) dx = 4 \int_0^{|x|} p(x) dx = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

on trouve que

$$(2.18) \quad 2(2mE)^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{|x|} \left(1 - \frac{m\omega^2}{2E} x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} dx = \pi\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

dont la notation  $\oint$  désigne l'intégrale sur une période complète du mouvement classique, et

$$(2.19) \quad x_m = \left( \frac{2E}{m\omega^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

est le point tournant de cette mouvement. Pour évaluer l'intégrale de l'équation.(2.18), nous introduisons une nouvelle variable

$$(2.20) \quad y = \frac{m\omega^2}{2E} x^\alpha.$$

Ainsi, nous avons :

$$(2.21) \quad x = \left( \frac{2E}{m\omega^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \hat{y}^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow d\hat{x} = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{E}{q^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \hat{y}^{\frac{1}{\alpha}-1} d\hat{y}.$$

En utilisant l'équation. (2.21), Le point tournant  $|x_m|$  devient

$$(2.22) \quad |x_m| = \left( \frac{2E}{m\omega^2} \right)^{\frac{1}{\alpha}} y_m^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'utilisation de (2.19) conduit à  $y_m = 1$ . En utilisant l'équation (2.21), l'équation.(2.18) est écrit, par rapport à avec la nouvelle variable  $y$ , comme suit :

$$(2.23) \quad \pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right) = \frac{2}{\alpha} \left( \frac{2}{\omega^2} \right)^{1/\alpha} E^{2/\alpha} \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-y)^{\frac{1}{\alpha}} dy.$$

Il est facile de remarquer que l'intégrale sur  $dy$  est équivalente à la fonction bêta  $B(x, y)$  dont [48, 68]

$$(2.24) \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Dans notre cas, cette fonction est donnée par :

$$(2.25) \quad \begin{aligned} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right) &= \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-y)^{\frac{1}{\alpha}} dy \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)}. \end{aligned}$$

Maintenant, posons (2.25) dans (2.23), la forme finale du spectre de l'énergie de l'oscillateur harmonique fractionnaire sera alors

$$(2.26) \quad E_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{\pi\hbar\alpha}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \omega \left( n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{\alpha}{2}}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$



L'équation. (2.26) généralise le spectre d'énergie habituel de l'oscillateur quantique standard. Il est à noter que, comme le montre Laskin, cette forme du spectre énergétique a l'avantage d'être indépendante du choix d'une définition précise du dérivé fractionnaire [27, 28]

Le spectre de l'énergie en fonction du nombre quantique  $n$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  est représenté dans la figure. 2.1. Cette figure révèle que l'effet du paramètre  $\alpha$  sur le spectre énergétique est significatif. Nous pouvons observer que lorsque  $\alpha$  diminue,  $E$  augmente.

Dans la limite  $\alpha = 2$ , nous retrouvons le spectre d'énergie standard pour l'oscillateur [69, 70]

$$(2.27) \quad \epsilon_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = (0, 1, 2, \dots).$$

Cette limite signifie que seul l'oscillateur quantique standard possède un spectre d'énergie équidistant.

A ce stade, nous souhaitons comprendre la physique derrière les deux bornes du paramètre  $\alpha$ . Suite aux travaux de Wei [16], la relation générale entre l'énergie cinétique et l'impulsion

$$(2.28) \quad \begin{aligned} T_\alpha &= D_\alpha |p|^\alpha \\ &= \chi_\alpha mc^2 \left( \frac{|p|}{mc} \right)^\alpha, \end{aligned}$$

où  $\chi_\alpha$  est un nombre positif dépendant du paramètre fractionnaire  $\alpha$ .

Pour la première limite où  $\alpha = 2$ , en prenant  $\chi_2 = \frac{1}{2}$ , (2.28) devient

$$(2.29) \quad T_2 = \frac{|p|^2}{2m}.$$

L'équation. (2.29) montre que l'énergie cinétique fractionnaire est identique à l'énergie cinétique standard. Nous sommes donc dans la zone non relativiste de l'oscillateur harmonique ordinaire.

D'autre part, quand  $\alpha = 1$  où  $\chi_1 = 1$ , on obtient

$$(2.30) \quad T_1 = c |p|.$$

L'équation. (2.30) signifie que l'énergie cinétique fractionnaire est l'énergie cinétique sont environ dans une zone fortement relativiste [16]. Ainsi nous sommes dans le domaine

relativiste de l'oscillateur harmonique.

Pour terminer, le spectre d'énergie passe de la région relativiste ( $\alpha = 1$ ) à la région non relativiste ( $\alpha = 2$ ). Cette situation peut être bien expliquée lors de la détermination du comportement de la chaleur spécifique de notre oscillateur en question.

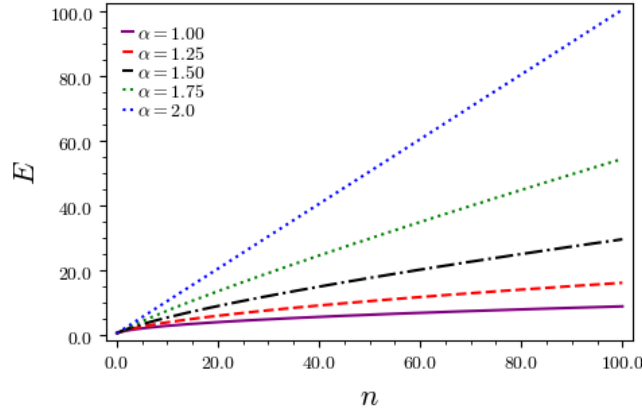


Figure 2.1: Le spectre d'énergie  $E$  en fonction du nombre quantique  $n$

## 2.2 Détermination de la fonction d'onde de l'oscillateur harmonique

Récemment, Rosu et Mancas [71] ont proposé une méthode d'obtention des fonctions d'ondes de l'oscillateur harmonique. La méthode est basée sur l'algorithme de factorisation et utilise la dérivée fractionnaire de Riesz-Feller.

Commençons par l'équation de Schrödinger fractionnaire

$$(2.31) \quad \left[ -D_\alpha \hbar \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} + V(x) \right] \psi(x) = E \psi(x)$$

Dans son traitement sur l'oscillateur harmonique, Laskin [2] a défini la forme du potentiel  $V(x)$  avec  $|x|^\alpha$ . Les auteurs ont fixé le paramètre ( $\alpha = 2$ ). Leurs arguments se résument sur le fait qu'alpha ne fait pas de différence substantielle dans la méthode. Cependant, ils se sont focalisés dans leurs études sur des oscillateurs du type  $V(x) = x^2$ . La raison en est que l'effet de la formulation fractionnaire est codé dans l'opérateur d'impulsion  $\hat{p}^\alpha$  qui est exprimé en matière de la dérivée spatiale d'ordre  $\alpha$ .

En utilisant que  $D_\alpha \hbar = 1$ , (2.31) devient

$$(2.32) \quad H_\alpha \psi(x) = \left[ -\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} + x^2 \right] \psi(x) = E \psi(x), \quad 1 < \alpha \leq 2.$$

Selon l'algorithme de factorisation, on considère une paire d'opérateurs  $A_\alpha$  et  $B_\alpha$  tels que

$$(2.33) \quad H_\alpha = B_\alpha A_\alpha + \epsilon_\alpha,$$

dont  $\epsilon_\alpha$  est un opérateur différentiel fractionnaire.

Les opérateurs  $A_\alpha$ ,  $B_\alpha$  et  $\epsilon_\alpha$  sont écrits sous la forme

$$(2.34) \quad A_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left( \frac{d^{\frac{\alpha}{2}}}{dx^{\frac{\alpha}{2}}} + x \right),$$

$$(2.35) \quad B_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \left( -\frac{d^{\frac{\alpha}{2}}}{dx^{\frac{\alpha}{2}}} + x \right),$$

$$(2.36) \quad \epsilon_\alpha = \frac{1}{2} \frac{d^{\frac{\alpha}{2}-1}}{dx^{\frac{\alpha}{2}-1}}.$$

La méthode consiste à résoudre l'équation suivante

$$(2.37) \quad A_\alpha \psi_0^\alpha = 0 \rightarrow \left( \frac{d^{\frac{\alpha}{2}}}{dx^{\frac{\alpha}{2}}} + x \right) \psi_0^\alpha = 0.$$

Cette équation sera résolue dans la représentation d'impulsion  $p$ .

### 2.2.1 La dérivée fractionnaire de Riesz-Feller

la dérivée fractionnaire de Riesz est définie par :

$$(2.38) \quad D_{RZ}^\alpha \iff \frac{L D_+^\alpha + L D_-^\alpha}{2 \cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}$$

$$(2.39) \quad D_{RZ}^\alpha f(x) = \Gamma(1+\alpha) \frac{\sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+\zeta) - 2f(x) + f(x-\zeta)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta \quad 0 < \alpha < 2$$

On applique la dérivée fractionnaire de Riesz sur la fonction  $f(x) = e^{i\frac{px}{\hbar}}$

$$(2.40) \quad D_{RZ}^\alpha e^{i\frac{px}{\hbar}} = \frac{\Gamma(\alpha+1) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi} e^{i\frac{px}{\hbar}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{i\left(\frac{px(\xi)}{\hbar}\right)} + e^{-i\left(\frac{px(\xi)}{\hbar}\right)} - 2}{\xi^{1+\alpha}} d\xi$$

Avec :

$$(2.41) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{px(\xi)}{\hbar}\right) - 1}{\xi^{1+\alpha}} d\xi = -2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{px(\xi)}{2\hbar}\right)}{\xi^{1+\alpha}} d\xi$$

On pose le changement de variable :  $\frac{p_x(\xi)}{2\hbar} = x \implies d\xi = \frac{2\hbar}{P_x} dx$

$$(2.42) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{p_x(\xi)}{\hbar}\right) - 1}{\xi^{1+\alpha}} d\xi = -2 \left(\frac{2\hbar}{P_x}\right) \left(\frac{P_x}{2\hbar}\right)^{\alpha+1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^{1+\alpha}} dx$$

Nous avons :  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^{1+\alpha}} dx = -2^{\alpha-1} \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$

$$(2.43) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{p_x(\xi)}{\hbar}\right) - 1}{\xi^{1+\alpha}} d\xi = \left(\frac{P_x}{\hbar}\right)^{\alpha} \Gamma(-\alpha) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

$$(2.44) \quad D_{RZ}^{\alpha} e^{i\frac{p_x x}{\hbar}} = 2 \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(-\alpha) \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{\pi} \left(\frac{P_x}{\hbar}\right)^{\alpha} e^{i\frac{p_x x}{\hbar}}$$

donc  $\Gamma(\alpha+1) \Gamma(-\alpha) = -\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$

Alors :

$$(2.45) \quad D_{RZ}^{\alpha} e^{i\frac{p_x x}{\hbar}} = -\left(\frac{P_x}{\hbar}\right)^{\alpha} e^{i\frac{p_x x}{\hbar}}$$

La dérivée fractionnaire de **Riesz-Feller** est définie par la relation suivante

$$(2.46) \quad D_F^{\alpha} \iff \frac{{}_L D_+^{\alpha} - {}_L D_-^{\alpha}}{2 \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)} \phi(x)$$

$$(2.47) \quad D_F^{\alpha} f(x) = \Gamma(1+\alpha) \frac{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{f(x+\zeta) - f(x-\zeta)}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta \quad 0 \leq \alpha < 1$$

Dans ce sens, Rosu et Macans ont utilisé la transformée de Fourier de la dérivée de Riesz-Feller  $D_F^{\alpha} = \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$ . Les auteurs se sont inspirés des travaux de Berman et Moiseyev [72] pour leurs études sur les points exceptionnels de l'hamiltonien de Riesz-Feller à la barrière de potentiel rectangulaire impénétrable.

Comme on le sait, la transformée de Fourier et son inversion sont données par

$$(2.48) \quad f(k) = \mathcal{F}[f(x), k] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx,$$

$$(2.49) \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}[f(k), x] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-ikx} dx.$$

La dérivée fractionnaire de Riesz-Feller  ${}_x D_{\theta}^{\alpha}$  est définie par la relation suivante [73]

$$(2.50) \quad \mathcal{F} [{}_x D_{\theta}^{\alpha} \Psi(x), k] = -\Psi_{\alpha}^{\theta}(k) \phi(k)$$

Tab. 2.1 : Les quatre premières formes de  $\tilde{H}_n$

$n$	$\tilde{H}_n$	$\phi_n(k)$
0	1	$\phi_0^\alpha$
1	$2\text{sign}(k) k ^{\alpha/2}$	$-i\tilde{H}_1\phi_0^\alpha$
2	$4 k ^\alpha - \alpha k ^{\alpha/2-1}$	$-\tilde{H}_2\phi_0^\alpha$
3	$\text{sign}(k)\left(8 k ^{3\alpha/2} - 6\alpha k ^{\alpha-1} + \alpha(\alpha/2-1) k ^{\alpha/2-2}\right)$	$-i\tilde{H}_3\phi_0^\alpha$

où

$$(2.51) \quad {}_x D_\theta^\alpha \Psi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_\alpha^\theta(k) e^{-ikx} dx \int \Psi(x') e^{ikx'} dx'$$

et

$$(2.52) \quad \Psi_\alpha^\theta(k) = |k|^\alpha e^{i\text{sign}(k)\frac{\theta\pi}{2}}, 0 < \alpha \leq 2 \text{ and } |\theta| \leq \min\{\alpha, 2-\alpha\}.$$

La région autorisée pour les paramètres  $\alpha$  et  $\theta$  s'avère être un diamant dans le plan  $(\alpha, \theta)$  qui sont appelés le diamant de Feller-Takayasu [71, 72, 74].

Ainsi, les deux équations (2.34) et (2.35) deviennent

$$(2.53) \quad A_{k,\alpha} = \Psi_{\frac{\alpha}{2}}^\theta + i\frac{d}{dk}, B_{k,\alpha} = \Psi_{\frac{\alpha}{2}}^\theta - i\frac{d}{dk}.$$

Les solutions par rapport  $A_{k,\alpha}$  sont

$$(2.54) \quad \phi_0^\alpha = e^{-\frac{2|k|^{\frac{\alpha}{2}+1}}{\frac{\alpha}{2}+1}}.$$

Les autres solutions sont trouvées par l'utilisation répétée de l'opérateur  $B_{k,\alpha}$ . Rosu et Mancas ont prouvé qu'on pouvait écrire

$$(2.55) \quad \phi_n(k) = i^n \tilde{H}_n \phi_0^\alpha,$$

dont  $\tilde{H}_n$  sont les polynômes d'Hermite fonctionnellement déformés (certaines formes de cette fonction sont énumérées dans le tableau. 5.1). Ils l'ont également appelé les polynômes d'Hermite de Riesz-Feller.

## 2.3 Propriétés thermiques de l'oscillateur quantique fractionnaire non-relativiste à 1D

Dans cette section, nous calculons les diverses variables thermodynamiques au moyen de la définition standard de la fonction de partition  $Z$ . Pour obtenir des quantités plus pré-

cises, nous utiliserons les sommes infinies de n-contributions d'énergie multipliées par le facteur  $\beta$ . Par conséquent, il est pratique d'écrire les différentes variables thermodynamiques en matière de ces sommes et d'effectuer un calcul numérique pour chaque variable pour une certaine plage de la température  $T$ .

La fonction de partition est donnée par

$$(2.56) \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(E_n - E_0)} = e^{\beta E_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}.$$

ici  $\beta = 1/k_B T$  avec  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $E_0$  est l'énergie de l'état fondamental correspond à  $n = 0$ .

L'équation (2.56) peut être réécrite également avec la nouvelle variable  $\tau = 1/\beta = k_B T$  comme suivant :

$$(2.57) \quad Z = e^{\frac{1}{\tau} E_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{\tau} E_n}.$$

Pour évaluer la fonction de partition, nous utilisons la formule Euler-Maclaurin [48, 49]

$$(2.58) \quad \sum_{n=0}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2} f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} f^{(2p-1)}(0),$$

où  $B_{2p}$  sont les nombres de Bernoulli, et  $f^{(2p-1)}$  est le dérivé de l'ordre  $(2p - 1)$ .

Comme nous le savons, dans la mécanique statistique standard, le facteur Boltzmann  $e^{-\beta E}$  est un outil essentiel utilisé pour déterminer les quantités thermodynamiques <sup>1</sup> telles que la fonction de partition  $Z(\beta)$ , l'énergie libre  $F(\beta)$ , l'énergie totale  $U(\beta)$ , l'entropie  $S(\beta)$  et la chaleur spécifique  $C(\beta)$ , pour un système donné. Ces quantités sont définies avec la nouvelle variable  $\tau$  comme suit :

$$(2.59) \quad F = -\tau \ln(Z), \quad U = \tau^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial \tau},$$

$$(2.60) \quad \frac{S}{k_B} = \ln(Z) + \tau \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \tau}, \quad \frac{C_v}{k_B} = 2\tau \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \tau} + \tau^2 \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \tau^2}.$$

Après la formulation des différentes relations pour les variables thermodynamiques, nous allons maintenant les implémenter en code informatique à l'aide de Python. Malheureusement, il n'existe aucun algorithme capable de totaliser efficacement une série infinie. Ainsi, la fonction `num()` met en œuvre plusieurs algorithmes différents qui fonctionnent

<sup>1</sup>Notons ici, en cherchant la simplicité, nous n'avons mis que  $\hbar = w = m = c = 1$ .

bien dans différents cas. Pour une sommation de haute précision, si la sommation doit être rapide, il est préférable d'étudier quelle méthode fonctionne le mieux et d'utiliser uniquement cette méthode. Dans notre code, nous utilisons la méthode Euler-Maclaurin pour calculer une approximation exacte dans une tolérance epsilon par défaut. L'avantage de cette méthode est qu'elle opère indépendamment du nombre d'intégration de la fonction  $f$ , dans la mesure où  $f$  est suffisamment lisse. Les quantités thermiques sont indiquées dans la figure. 2.2. Il convient de mentionner que, dans toutes les figures, nous avons utilisé des quantités sans dimension.

Figure. 2.2 montre la variation de toutes les fonctions thermiques par rapport à  $\tau$  pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$ . Nous soulignons que le comportement de l'énergie libre, de l'énergie totale, de l'entropie et de la chaleur spécifique est différent de ceux obtenus pour l'oscillateur harmonique standard. Lorsque  $\alpha$  diminue, ces quantités augmentent. Aussi, à partir de cette figure, nous pouvons confirmer que le paramètre  $\alpha$  joue un rôle significatif dans ses propriétés et que l'effet des paramètres est très important sur les propriétés thermodynamiques. A ce stade, quelques observations sur les courbes thermiques spécifiques peuvent être faites comme suit :

- Premièrement, nous pouvons constater que ces courbes ont le même comportement.
- Ensuite, la limite de saturation est inversement proportionnelle aux valeurs  $\alpha$  (voir figure. 2.2).
- On observe alors que quand  $\alpha = 2$  (région non relativiste) on obtient la limite classique  $C = 1k_B$ . D'autre part, quand  $\alpha = 1$  (région relativiste) cette limite devient le double de la limite précédente ( $C = 2k_B$ ).

En conclusion, comme dans le cas du spectre de l'énergie, les courbes de la chaleur spécifique passent de la région relativiste ( $\alpha = 1$ ) à la région non relativiste ( $\alpha = 2$ ). L'influence du paramètre fractionnaire est donc très évidente. Ce paramètre illustre comment le système peut passer de la région non relativiste à la région relativiste.

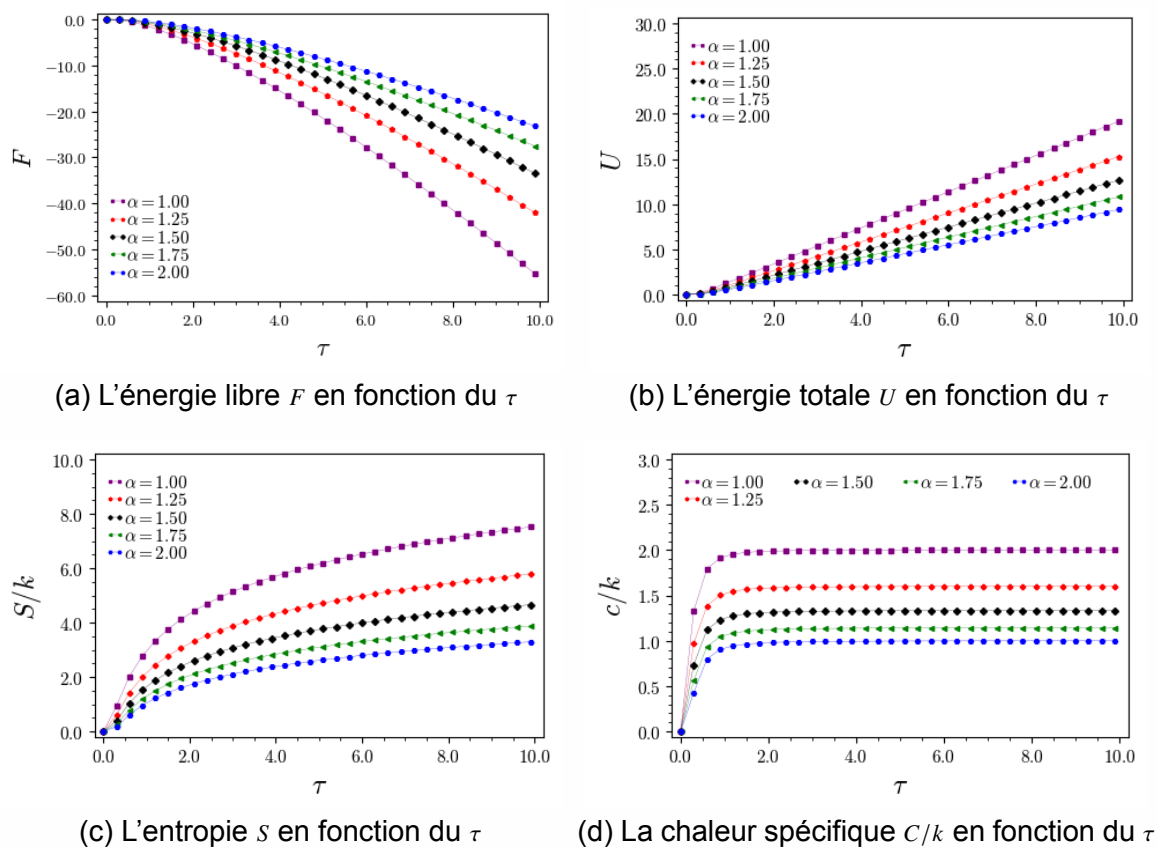


Fig. 2.2 : Les quantités thermodynamiques de l'oscillateur fractionnaire Harmonique à 1D



## CHAPITRE 3

# L'OSCILLATEUR QUANTIQUE FRACTIONNAIRE DE DIRAC À 1D

### 3.1 Les solutions propres de l'oscillateur fractionnaire de Dirac à 1D

#### 3.1.1 Méthode

L'oscillateur de Dirac unidimensionnel ordinaire est donné par [75, 76]

$$(3.1) \quad [c\alpha_x (\hat{p}_x - i\beta m\omega\hat{x}) + \beta mc^2] \Psi_D = E\Psi_D,$$

avec

$$(3.2) \quad \alpha_x = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

étant les matrices de Dirac,  $\Psi_D = (\psi_1 \ \psi_2)^T$ ,  $\hat{p}_x$  est l'opérateur d'impulsion et enfin  $m$  la masse au repos du fermion. Notez que l'équation.(3.1) est obtenue à partir de l'équation libre de Dirac par substitution  $\hat{p}_x \rightarrow \hat{p}_x - i\beta m\omega\hat{x}$  avec  $\omega$  est la constante de fréquence d'oscillation.

La forme fractionnaire de l'équation.(3.1) sera alors :

$$(3.3) \quad \left[ \sigma_x \left( \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} - i\gamma^0 m\omega\hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \right) + \gamma^0 mc \right] \Psi_D = \left( \frac{E}{c} \right) \Psi_D,$$

où  $1 < \alpha \leq 2$ . Dans le cas particulier où  $\alpha = 2$ , on retrouve l'équation standard de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel. Ainsi, en utilisant (3.2), (3.3) devient

$$(3.4) \quad \begin{pmatrix} mc - \left(\frac{E}{c}\right) & \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} + im\omega\hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \\ \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} - im\omega\hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} & -mc - \left(\frac{E}{c}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul simple donne es deux équations couplées suivantes :

$$(3.5) \quad \left( mc - \left( \frac{E}{c} \right) \right) \psi_1 + \left( \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} + im\omega \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \right) \psi_2 = 0,$$

$$(3.6) \quad \left( \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} - im\omega \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \right) \psi_1 + \left( -mc - \left( \frac{E}{c} \right) \right) \psi_2 = 0.$$

Ces deux équations mènent à la relation suivante :

$$(3.7) \quad \psi_2 = \frac{\hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} - im\omega \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}}}{mc + \left( \frac{E}{c} \right)} \psi_1.$$

En insérant (3.7) dans (3.5), on obtient une équation différentielle par rapport à la composante  $\psi_1$  comme suit :

$$(3.8) \quad \left( \left( \frac{E}{c} \right)^2 - m^2 c^2 \right) \psi_1 + \left( -\hat{p}_x^{\alpha} + im\omega \left[ \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}}, \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \right] - m^2 \omega^2 \hat{x}^{\alpha} \right) \psi_1 = 0.$$

À ce stade, avant d'évaluer le commutateur :

$$(3.9) \quad \left[ \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}}, \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \right],$$

Tarasov [5] montre qu'il existe de différentes définitions des dérivées fractionnaires et malheureusement tous ces dérivées fractionnaires ont beaucoup de propriétés inhabituelles. La célèbre loi Leibniz  $D^{\alpha} (fg) = (D^{\alpha} f) g + f (D^{\alpha} g)$  n'est pas satisfaite qu' on peut le voir dans l'équation suivante [3]

$$(3.10) \quad D^{\alpha} (fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(\alpha - k + 1)} (D^{\alpha-k} f) (D^k g).$$

Selon les travaux de Hermann [27, 28], le commutateur (3.9) peut être calculé comme: les coordonnées d'espace de  $x$  et  $p_x$  sont

$$(3.11) \quad xf(x) = x f(x),$$

$$(3.12) \quad pf(x) = -i\partial_x f(x),$$

où  $x$  et  $p$  remplissent la relation de commutation

$$(3.13) \quad [x, p_x] = i\hbar.$$

Hermann [1, 27, 28] généralise ces opérateurs depuis le dérivé entier vers le dérivé arbitraire et introduit deux opérateurs canoniquement conjugués dans la représentation de l'espace comme suit:

$$(3.14) \quad \hat{x} = \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^{(1-\alpha)} x^{\alpha},$$

$$(3.15) \quad \hat{p}_x = -i \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^\alpha mc D_x^\alpha,$$

où les facteurs ci-joints assurent que les unités de longueur et d'impulsion sont correctes. Étant donné que la règle de produit de Leibniz n'est plus valide dans sa forme originale pour les dérivés fractionnaires, les opérateurs conjugués répondent à la relation de commutation suivante (voir Réf. [7, 27, 28, 77, 78]):

$$(3.16) \quad \left[ \hat{x}_x^{\frac{\alpha}{2}}, \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} \right] = i\hbar\eta \left( \frac{\alpha}{2}, \nu \right),$$

dont

$$(3.17) \quad \eta \left( \frac{\alpha}{2}, \nu \right) = \frac{\Gamma \left( 1 + (1 + \nu) \frac{\alpha}{2} \right)}{\Gamma \left( 1 + \nu \frac{\alpha}{2} \right)} - \frac{\Gamma \left( 1 + \nu \frac{\alpha}{2} \right)}{\Gamma \left( 1 + (\nu - 1) \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Donc, en utilisant les équations. (3.14) et (3.15), les relations de commutation  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}_x$  deviennent  $\alpha$ -dépendantes. Hermann [27, 28] a proposé la condition de quantification du paramètre  $\nu = 0, 1, 2, \dots$ . Pour le cas particulier  $\alpha = 2$ ,  $\eta(1, \nu) = 1$ , Eq. (3.13) est bien récupéré. Enfin, nous notons que (3.16) nous fournit la version relativiste de l'oscillateur fractionnaire harmonique non relativiste. Pour autant qu'on le sache, cette extension à la version relativiste n'est pas étudiée dans la littérature.

Maintenant, En remplaçant (3.16) par (3.8), on obtient :

$$(3.18) \quad \left( \left( \frac{E}{c} \right)^2 - m^2 c^2 \right) \psi_1 + \left( -\hat{p}_x^\alpha + m\omega\hbar\eta \left( \frac{\alpha}{2}, \nu \right) - m^2 \omega^2 \hat{x}^\alpha \right) \psi_1 = 0.$$

L'équation précédente est satisfaite pour l'impulsion d'ordre fractionnaire

$$(3.19) \quad \hat{p}_x^\alpha = \tilde{E} - m^2 \omega^2 \hat{x}^\alpha,$$

où on a établi

$$(3.20) \quad \tilde{E} = \left( \left( \frac{E}{c} \right)^2 - m^2 c^2 \right) + m\omega\hbar\eta \left( \frac{\alpha}{2}, \nu \right).$$

Eq. (3.20) conduit à

$$(3.21) \quad |\hat{p}_x| = \left( \tilde{E} - m^2 \omega^2 \hat{x}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Ici, il est important de noter que l'équation(3.18) peut-être écrit sous la forme de l'équation standard de l'oscillateur harmonique où les niveaux d'énergies sont bien connus et sont donnés par

$$(3.22) \quad \frac{\tilde{E}}{2m} = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

### 3.1.2 Détermination du Spectre d'énergie: quantification de Bohr-Sommerfeld-Wilson [79–81]

L'objectif est maintenant d'évaluer le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac fractionnaire à 1D. Ce travail peut être réalisée par un traitement semi-classique basé sur la soi-disant "la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld(BS)". La condition de quantification BS est donnée par

$$(3.23) \quad \oint p(x) dx = 4 \int_0^{|x|} p(x) dx = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right),$$

où la notation de l'intégrale fermée fait référence à une période complète unique d'un mouvement classique unidimensionnel fini d'une particule dans un puits potentiel où la région accessible  $x$  est limitée par deux points tournants. A  $p = 0$ , le mouvement est possible dans la plage  $|x| \leq x_m$  avec

$$(3.24) \quad x_m = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{m^{\frac{2}{\alpha}} \omega^{\frac{2}{\alpha}}}.$$

Dans ce qui suit, il est pratique de faire un remplacement  $\hat{p}(\hat{x}) \rightarrow p(x)$ . En insérant l'équation.(3.21) dans l'expression BS on trouve

$$(3.25) \quad 4 \int_0^{|x|} \left(\tilde{E} - m^2 \omega^2 x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} dx = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

D'une e manière équivalente

$$(3.26) \quad 4\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{|x|} \left(1 - \frac{m^2 \omega^2}{\tilde{E}} x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} dx = 2\pi\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Introduisons une nouvelle variable

$$(3.27) \quad y = \frac{m^2 \omega^2}{\tilde{E}} x^\alpha.$$

conduit à évaluer l'intégrale à gauche de l'équation(3.26). Ainsi

$$(3.28) \quad x = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{(m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow dx = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha (m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy.$$

Pour le tournant  $|x|$ , on a

$$(3.29) \quad |x| = x_m = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{(m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} y_m^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'injection de (3.24) dans (3.29) conduit à  $y_m = 1$ . À ce stade, l'équation.(3.26) devient

$$(3.30) \quad \pi\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\tilde{E}^{\frac{2}{\alpha}}}{\alpha (m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-y)^{\frac{1}{\alpha}} dy.$$

En utilisant

$$(3.31) \quad B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right) = \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-y)^{\frac{1}{\alpha}} dy,$$

l'équation.(3.30) conduit à :

$$(3.32) \quad \pi\hbar\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\tilde{E}_\alpha^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha(m^2\omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right).$$

Ainsi,

$$(3.33) \quad \tilde{E} = \left(\frac{\alpha\pi\hbar}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} m\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

En utilisant l'équation(3.20), (3.33) devient

$$(3.34) \quad \left(\frac{E}{c}\right)^2 - m^2c^2 + m\omega\hbar\eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right) = \left(\frac{\alpha\pi\hbar}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} m\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

De l'équation (3.34), la forme finale du spectre de l'énergie est :

$$(3.35) \quad E_{n,\alpha,\nu} = \pm mc^2 \sqrt{\left(\frac{\alpha\pi\hbar}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega}{mc^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} + 1 - \frac{\hbar\omega}{mc^2} \eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)}, \quad (n, \nu) = 0, 1, 2, \dots$$

L'équation(3.35) généralise le spectre d'énergie bien connu de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel standard. Cette forme présente l'avantage d'être indépendante du choix d'une définition spécifique du dérivé fractionnaire. De plus, comme dans le cas de l'oscillateur harmonique fractionné, on peut dire que l'oscillateur de Dirac est généralisée en utilisant le calcul fractionnaire pour prendre en compte les effets non locaux. Dans ce formalisme,  $\alpha$  représente la caractéristique non locale des phénomènes physiques alors que  $\nu$  est un paramètre caractéristique du système quantique [77]. Dans la limite  $\alpha = 2$ , où  $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{\pi}{2}$ , nous retrouvons les valeurs propres de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel [75]

$$(3.36) \quad \varepsilon_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2n \frac{\hbar\omega}{mc^2}}.$$

Dans la figure. (3.1) nous traçons le comportement de l'énergie comme une fonction du nombre quantique  $n$  et pour les différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  et  $\nu$ . On constate que le comportement du spectre énergétique est identique. Cette remarque est corroborée par la figure. 3.1d: À partir de cette figure, on observe que pour une valeur fixe de  $n$ , le comportement du spectre de l'énergie par rapport à  $\nu$  est le même que dans les figures 1. (3.1a), (3.1b) et (3.1c).

En outre, à partir de ces figures, nous remarquons que pour  $\alpha \in ]1.75, 2[$ , le niveau

<sup>1</sup>Notons ici, en cherchant la simplicité, nous n'avons mis que  $\hbar = \omega = m = c = 1$

d'espacement de l'énergie est grand et le comportement de branchement peut être facilement vu que lorsque le paramètre fractionnaire augmente. Maintenant, dans l'intervalle  $\alpha \in ]1.5, 1.75[$ , elle se rapproche à un et l'espacement entre les niveaux d'énergie est réduit au minimum: tous les niveaux convergent vers une valeur spécifique. L'influence du paramètre fractionnaire  $\alpha$  sur le spectre d'énergie est remarquable lorsque  $1 \leq \alpha \leq 1.5$  parce qu'un espacement considérable entre les niveaux d'énergie commence à apparaître. Aussi, comme le montre le cas de l'oscillateur harmonique fractionnaire, le spectre de l'énergie transite de la région relativiste extrême ( $\alpha = 1$ ) à la région relativiste ( $\alpha = 2$ ). Cette situation peut être bien montrée dans les courbes de la chaleur spécifique (Cf Chapitre 6)

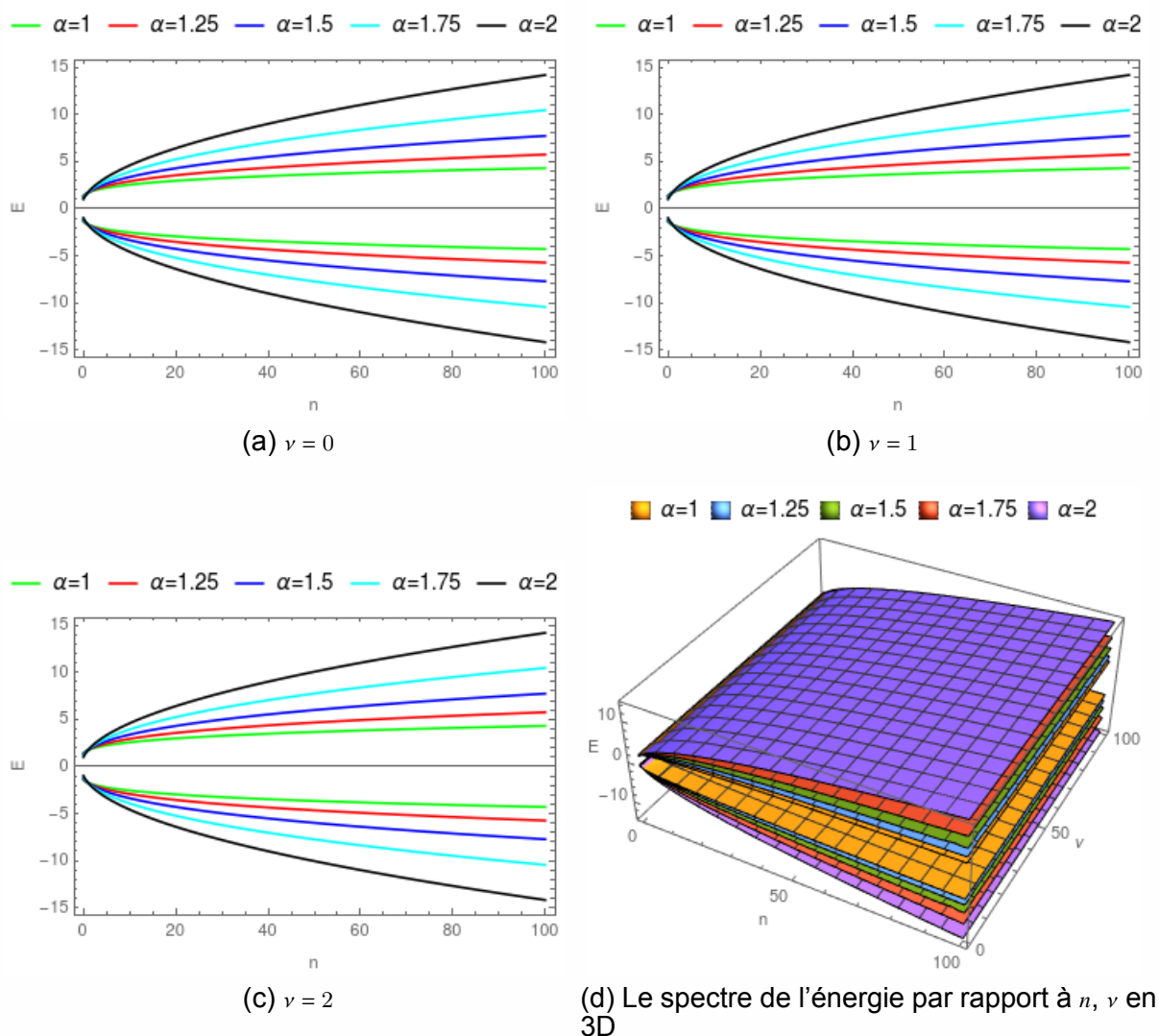


Figure 3.1: Les niveaux énergétiques de l'oscillateur de Dirac en fonction du nombre quantique  $n$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\nu$

### 3.1.3 Détermination de la fonction d'onde via la dérivée fractionnaire de Riesz-Feller

Conformément à la méthode décrite dans le deuxième chapitre, les fonctions propres en fonction de  $x$  peuvent être obtenues en effectuant les transformations de Fourier inverse des fonctions en question. Maintenant, nous sommes prêts à discuter de l'effet du paramètre fractionnaire  $\alpha$  sur les deux composants  $\psi_1$  et  $\psi_2$  de la fonction d'onde  $\psi_D$  de l'oscillateur de Dirac à 1D. Avant cela, nous obtenons d'abord les solutions propres de nos équations en appliquant l'algorithme de factorisation utilisé dans le cas de l'oscillateur harmonique quantique fractionnaire. Cette méthode est proposée par Olivar-Romero et Rosas-Ortiz [71, 82]. Ces auteurs ont été les premiers à appliquer la méthode de factorisation à l'oscillateur harmonique quantique fractionnaire. Ils ont utilisé la dérivée fractionnaire de Riesz avec des résultats intéressants et des suggestions pour les futurs travaux. Amor et al [83] ont obtenu des solutions numériques à des problèmes de mécanique quantique impliquant un Laplacien fractionnaire, au moyen d'une approche de colocation. Leurs résultats relatifs à la condition fondamentale indiquent le même comportement que celui obtenu par [71, 82]. Cela nous a incités à appliquer cette méthode pour étudier le comportement des solutions propres à l'oscillateur Dirac unidimensionnel.

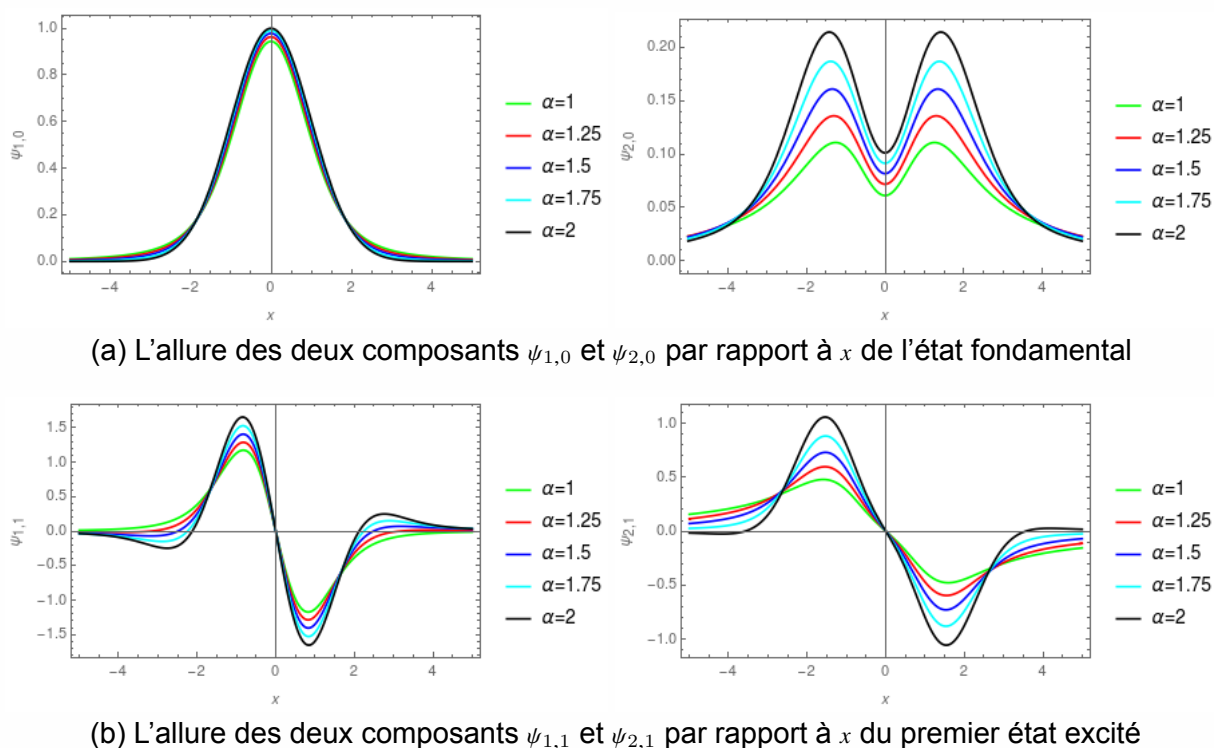


Figure 3.2: Les fonctions propres de l'oscillateur fractionnaire de Dirac à 1 D

La figure. 3.2 représente la forme des deux composantes de la fonction Dirac totale pour les deux premiers états ( $n = 0, 1$ ). La transformation de Fourier des deux premiers états montre qu'elles sont bien influencées par le paramètre  $\alpha$ . Dans le cas limite,  $\alpha = 2$ , les solutions de l'oscillateur quantique de Dirac sont retrouvées.

## CHAPITRE 4

# L'OSCILLATEUR QUANTIQUE FRACTIONNAIRE DE KLEIN-GORDON À 1D

### 4.1 Les solutions propres de l'oscillateur fractionnaire de Klein-Gordon à 1D

L'équation stationnaire décrivant l'oscillateur de Klein–Gordon unidimensionnel est donnée par [75, 84–86]

$$(4.1) \quad \left[ (\hat{p}_x + i\omega\hat{x}) (\hat{p}_x - im\omega\hat{x}) - \left(\frac{E}{c}\right)^2 + m^2c^2 \right] \Psi_{KG} = 0,$$

où  $m$  correspond à la masse au repos et  $\omega$  à la fréquence de l'oscillateur.

La forme fractionnaire de cette équation est alors

$$(4.2) \quad \left[ \left( \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} + im\omega\hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \right) \left( \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} - im\omega\hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \right) - \left(\frac{E}{c}\right)^2 + m^2c^2 \right] \Psi_{KG} = 0, 1 < \alpha \leq 2.$$

L'équation (4.2) peut être exprimée comme suit :

$$(4.3) \quad \left( \hat{p}_x^{\alpha} + im\omega \left[ \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}}, \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} \right] + m^2\omega^2x^{\alpha} - \left(\frac{E}{c}\right)^2 + m^2c^2 \right) \Psi_{KG} = 0.$$

A ce stade, on constate qu'il existe différentes définitions des dérivés fractionnaires et malheureusement tous ces dérivés fractionnaires ont beaucoup de propriétés inhabituelles. La règle de Leibniz bien connu  $D^{\alpha}(fg) = (D^{\alpha}f)g + f(D^{\alpha}g)$  n'est pas satisfait pour la différentiation des ordres non entiers comme on peut le voir dans l'équation suivante [3]

$$(4.4) \quad D^{\alpha}(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} (D^{\alpha-k}f)(D^k g).$$

Maintenant, le commutateur apparu dans (4.3) peut être calculé comme suit : étant donné que la règle de produit de Leibniz n'est plus valable dans sa forme originale pour les dérivées fractionnaires et selon les travaux de Hermann [1, 9, 27, 28, 87, 88], le commu-



Table 4.1: Certaines valeurs de la fonction  $\eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)$

(a) $\nu = 0$						(b) $\nu = 1$					
$\alpha$	1	1.25	1.5	1.75	2	$\alpha$	1	1.25	1.5	1.75	2
$\eta\left(\frac{\alpha}{2}, 0\right)$	0.32	0.47	0.64	0.82	1	$\eta\left(\frac{\alpha}{2}, 1\right)$	0.24	0.36	0.52	0.73	1
(c) $\nu = 2$						(d) $\nu = 3$					
$\alpha$	1	1.25	1.5	1.75	2	$\alpha$	1	1.25	1.5	1.75	2
$\eta\left(\frac{\alpha}{2}, 2\right)$	0.20	0.31	0.47	0.69	1	$\eta\left(\frac{\alpha}{2}, 3\right)$	0.17	0.28	0.43	0.66	1

tateur satisfait à la relation de commutation suivante

$$(4.5) \quad \left[ \hat{x}_x^{\frac{\alpha}{2}}, \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} \right] = i\hbar \eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right),$$

avec

$$(4.6) \quad \eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right) = \frac{\Gamma\left(1 + (1 + \nu)\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \nu\frac{\alpha}{2}\right)} - \frac{\Gamma\left(1 + \nu\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + (\nu - 1)\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Dans la limite  $\alpha = 2$ , la fonction  $\eta(1, \nu) = 1$  et par conséquent  $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ , est bien récupéré.

Dans le tableau. 4.1 nous avons énuméré certaines valeurs de la fonction  $\eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)$ .

En outre, nous pouvons conclure que l'équation. (4.5) nous donne la version relativiste de l'oscillateur fractionnaire harmonique.

La substitution de (4.5) dans (4.3) donne

$$(4.7) \quad \left( \hat{p}_x^\alpha - m\omega\hbar\eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right) + m^2\omega^2x^\alpha - \left(\frac{E}{c}\right)^2 + m^2c^2 \right) \Psi_{KG} = 0.$$

L'équation. (4.7) conduit à :

$$(4.8) \quad \hat{p}_x^\alpha = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - m^2c^2 + m\omega\hbar\eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right) - m^2\omega^2x^\alpha.$$

En exploitant les résultats concernant l'oscillateur de Dirac, on constate

$$(4.9) \quad |\hat{p}_x| = \left( \tilde{E} - m^2\omega^2\hat{x}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

où

$$(4.10) \quad \tilde{E} = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - m^2c^2 + m\omega\hbar\eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right).$$

#### 4.1.1 Détermination du Spectre d'énergie via la règle de quantification de Bohr-Sommerfeld

La règle de condition de quantification de Bohr-Sommerfeld implique que

$$(4.11) \quad \oint p(x)dx = 4 \int_0^{|x|} p(x)dx = 2\pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

La substitution de l'équation.(4.10) dans (4.11) donne

$$(4.12) \quad 4 \int_0^{|x|} \left( \tilde{E} - m^2 \omega^2 x^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} dx = 2\pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

où,

$$(4.13) \quad 4\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{|x|} \left( 1 - \frac{m^2 \omega^2}{\tilde{E}} x^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} dx = 2\pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

L'Introduction de la nouvelle variable

$$(4.14) \quad y = \frac{m^2 \omega^2}{\tilde{E}} x^\alpha$$

Permet d'évaluer l'intégrale à gauche de l'équation.(4.13).

Ainsi,

$$(4.15) \quad x = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{(m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow dx = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha (m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy,$$

A  $p = 0$ , le mouvement est possible dans la plage de  $|x| \leq x_m$  avec

$$(4.16) \quad x_m = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{m^{\frac{2}{\alpha}} \omega^{\frac{2}{\alpha}}}.$$

Pour le point tournant  $|x|$  on a,

$$(4.17) \quad |x| = x_m = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{(m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} y_m^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'utilisation de l'équation (4.16) conduit à  $y_m = 1$ . Dans ce cas, L'équation.(4.13) devient

$$(4.18) \quad \pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right) = \frac{2\tilde{E}^{\frac{2}{\alpha}}}{\alpha (m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-y)^{\frac{1}{\alpha}} dy.$$

Il est facile de remarquer que l'intégrale sur  $dy$  est équivalente à la fonction bêta [48, 49]. On écrit

$$(4.19) \quad B \left( \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1 \right) = \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-y)^{\frac{1}{\alpha}} dy.$$

En utilisant cette équation, on réécrit l'équation (4.18) comme

$$(4.20) \quad \pi\hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\tilde{E}^{\frac{2}{\alpha}}}{\alpha (m^2\omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right).$$

Ainsi, on obtient

$$(4.21) \quad \tilde{E} = \left(\frac{\alpha\pi\hbar}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} m\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

où

$$(4.22) \quad \left(\frac{E_n}{c}\right)^2 - m^2c^2 + m\omega\hbar\eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right) = \left(\frac{\alpha\pi\hbar}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} m\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

L'organisation et la simplification de l'équation. (4.22) donne

$$(4.23) \quad E_n = \pm mc^2 \sqrt{\left(\frac{\alpha\pi\hbar}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega}{mc^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} + 1 - \frac{\hbar\omega}{mc^2}\eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)}, \quad (n, \nu) = 0, 1, 2, 3, \dots$$

L'équation. (4.23) est le spectre énergétique de l'oscillateur fractionnaire de Klein-Gordon à 1D <sup>1</sup>. Cette forme a l'avantage d'être indépendante du choix d'une définition précise du dérivé fractionnaire puisqu'elle est dérivée dans le cadre de l'approximation semi-classique. Dans la limite  $\alpha = 2$ , on retrouve les résultats connus concernant les valeurs propres de l'oscillateur unidimensionnel Klein-Gordon qui est donné par [75, 85, 89]

$$(4.24) \quad E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2n \frac{\hbar\omega}{mc^2}},$$

La figure. 4.1 montre les énergies de différents niveaux en fonction du paramètre  $\alpha$ . Ce dernier représente la caractéristique non locale des phénomènes physiques. Le comportement est le même pour les niveaux  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  et l'effet de  $\alpha$  est significatif d'un niveau à l'autre.

La figure. (4.2), représente le spectre d'énergie en fonction du nombre quantique  $n$  pour différentes valeurs des deux paramètres  $\alpha$  et  $\nu = 0, 1, 2, 3$ . A partir de cette figure, on observe que

- Pour  $\alpha \in ]1.75, 2[$ , le niveau d'espacement d'énergie est important et le comportement de branchement peut être facilement vu que lorsque  $\alpha$  augmente.
- Pour l'intervalle  $\alpha \in ]1.5, 1.75[$ , en se rapprochant de la valeur de  $\alpha = 1$ , l'espacement entre les niveaux d'énergie est réduit au minimum et tous les niveaux convergent vers une valeur précise.

De ce fait, il est très clair que l'influence du paramètre  $\alpha$  sur le spectre d'énergie est remarquable lorsque  $1 < \alpha \leq 1.5$  car un espacement considérable entre les niveaux

<sup>1</sup>Notons ici, en cherchant la simplicité, nous n'avons mis que  $\hbar = \omega = m = c = 1$

d'énergie commence à apparaître.

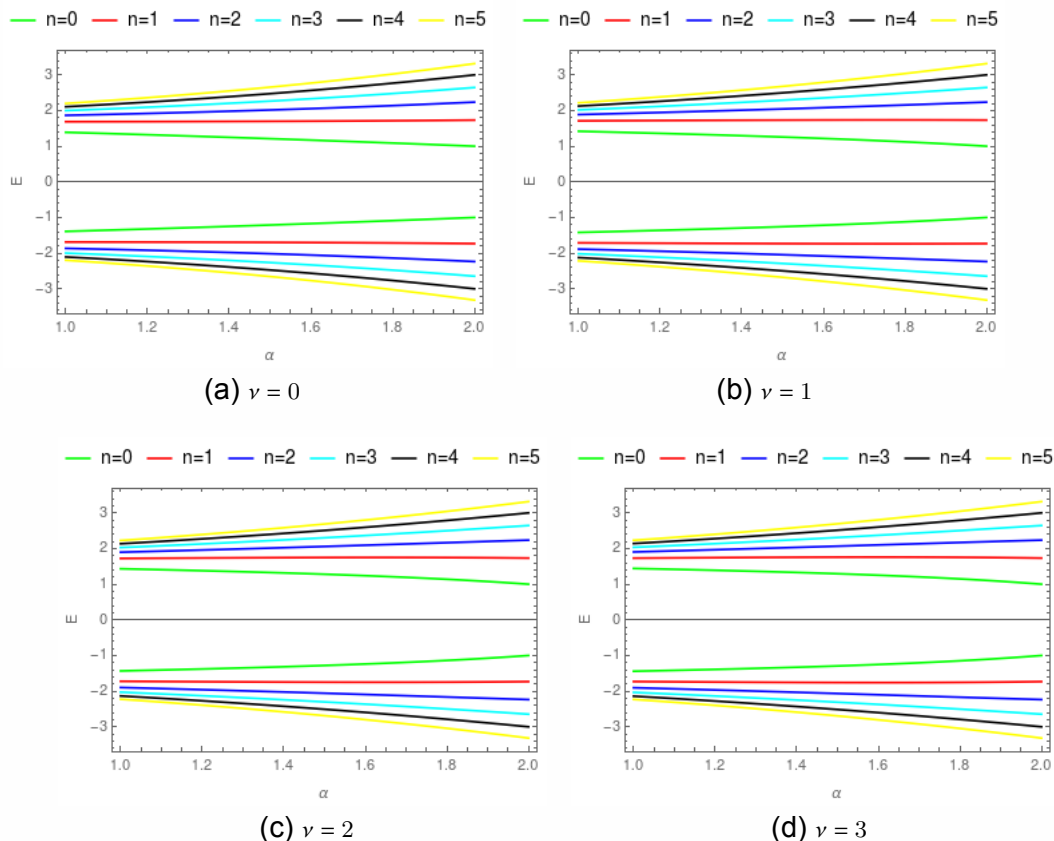


Figure 4.1: Énergies des différents niveaux  $n$  en fonction du paramètre  $\alpha$

#### 4.1.2 Détermination de la fonction d'onde via la dérivée fractionnaire de Riesz-Feller

Concernant les fonctions propres de l'oscillateur fractionnaire de Klein-Gordon, nous suivons la même méthode basée sur la dérivée fractionnaire de Riesz-Feller. Soit l'équation suivante [71, 82]

$$(4.25) \quad \left[ -\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} + x^2 \right] \psi_{KG}(x) = \tilde{E} \psi_{KG}(x),$$

Les solutions de (4.25) dans l'espace  $k$  sont (Cf chapitre 2)

$$(4.26) \quad (\phi_n)_{KG} = i^n \tilde{H}_n \phi_0^\alpha,$$

dont

$$(4.27) \quad \phi_0^\alpha = e^{-\frac{|k|^{\alpha/2+1}}{\alpha/2+1}},$$

et  $\tilde{H}_n$  sont les polynômes d'Hermite déformés. Dans la configuration spatiale  $\{x\}$ , la fonction  $(\psi_n)_{KG}$  peut être obtenu en appliquant les transformées de Fourier inverses des

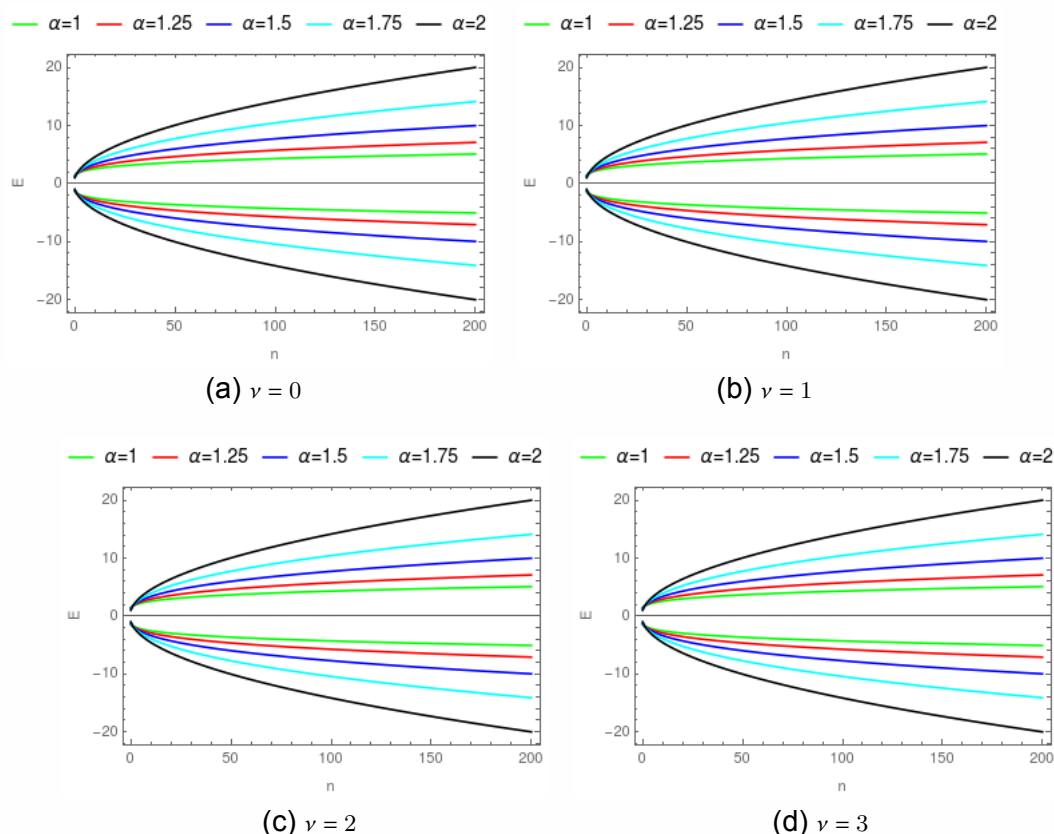


Figure 4.2: Les niveaux d'énergie de l'oscillateur fractionnaire de Klein-Gordon à 1D en fonction du nombre quantique  $n$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  et  $\nu$

fonctions  $(\phi_n)_{KG}$ . Afin de tester l'influence du paramètre  $\alpha$  sur ces fonctions propres, nous avons tracé les fonctions d'onde aussi bien que la densité de probabilité de quatre niveaux  $n = 0, 1, 2, 3$  pour des valeurs fixes du paramètre  $\alpha$ . La densité de probabilité de l'équation de Klein-Gordon est donnée par

$$(4.28) \quad \rho_{KG} = \frac{1}{2i} \left( \Psi(x, t) \frac{\partial \Psi^*(x, t)}{\partial t} - \Psi^*(x, t) \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} \right),$$

dont

$$(4.29) \quad \Psi(x, t) = e^{iEt} \psi(x).$$

Posons (4.29) dans (4.28) conduit à

$$(4.30) \quad \rho_{KG} = E \psi^*(x) \psi(x).$$

La figure. 4.3 montre les fonctions propres de l'état fondamental et les trois premières fonctions propres excitées ainsi que la densité de probabilité dans les coordonnées  $x$ . Dans tous les cas, les résultats classiques de l'oscillateur quantique sont récupérés si  $\alpha = 2$ . Outre les variations de la condition fondamentale qui sont quasi négligeables, la dépendance des fonctions d'onde sur le paramètre fractionnaire  $\alpha$  commence à être

significative pour les états excités. Ce résultat est aisément perceptible par les courbes de densité de la probabilité. L'influence sur ces courbes est bien observée.

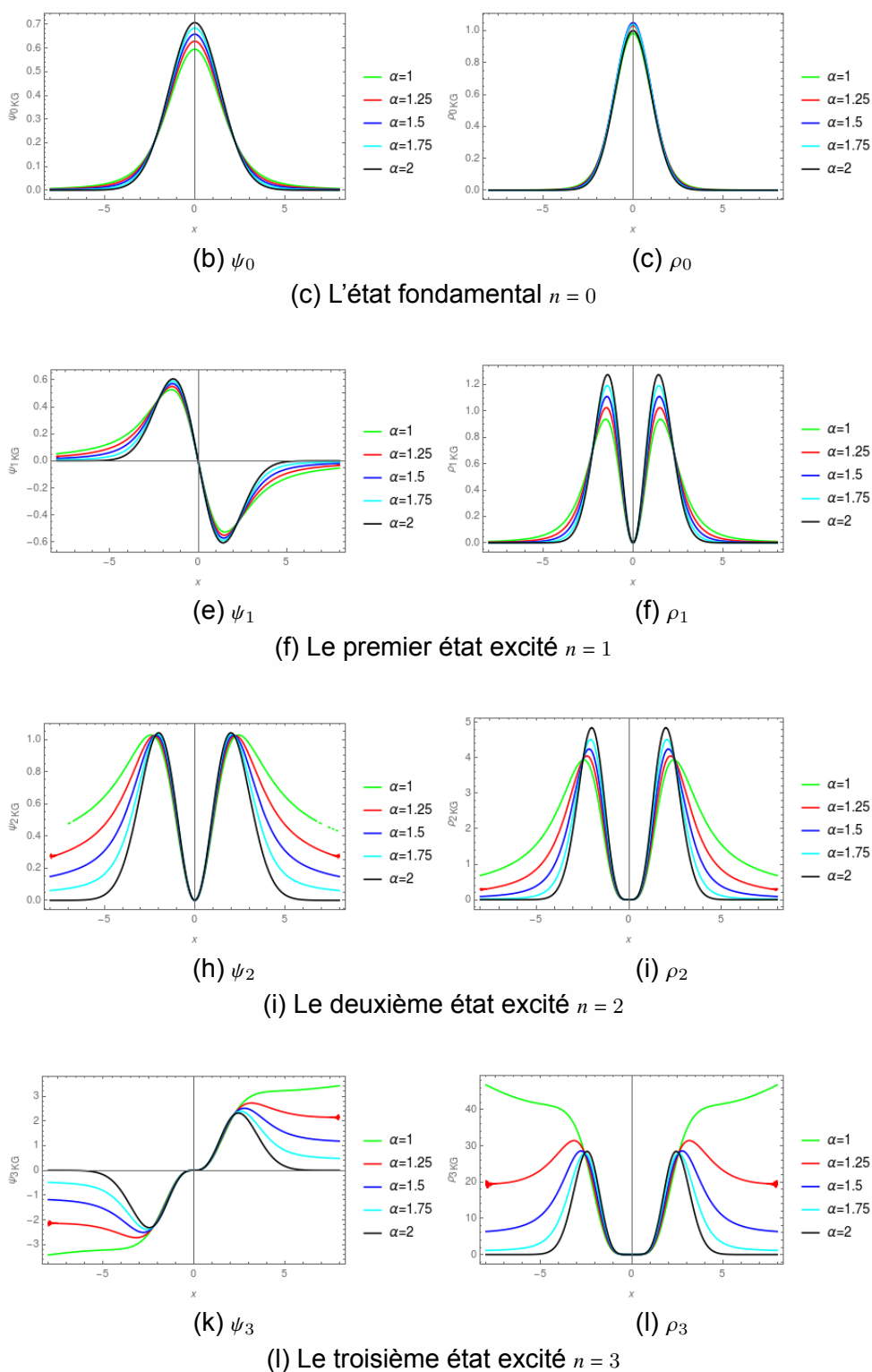


Figure 4.3: L'allure de la fonction d'onde  $(\psi_n)_{KG}$  ainsi que la densité de probabilité  $(\rho_n)_{KG}$  pour les niveaux  $n = 0, 1, 2, 3$

## CHAPITRE 5

# L'OSCILLATEUR QUANTIQUE FRACTIONNAIRE DE DUFFIN-KEMMER-PETIAU À 1D

### 5.1 L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau à une dimension

L'équation libre de DKP s'écrit par [90–99]

$$(5.1) \quad (\beta^0 E - c\beta^1 \hat{p}_x - mc^2) \Psi_{\text{DKP}} = 0,$$

où  $\psi_{\text{DKP}}$  est la fonction d'onde des bosons,  $m$  la masse et  $\beta$  sont des matrices vérifiant la relation suivante :

$$(5.2) \quad \beta^\mu \beta^\rho \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\rho \beta^\mu = g^{\mu\rho} \beta^\sigma + g^{\rho\sigma} \beta^\mu, \quad \mu, \rho, \sigma = 0, 1, 2, 3,$$

dont  $g^{\mu\rho} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  est la métrique de l'espace de Minkowski. L'algèbre définie par l'équation (5.2) donne 126 éléments linéairement indépendants (pour plus de détails, voir Réf. ([95])). Le rang des matrices s'avère être 16 et la représentation correspondante peut être décomposée en trois représentations irréductibles des dimensions 1, 5 et 10. La représentation unidimensionnelle est triviale, tandis que les représentations à cinq et dix dimensions décrivent respectivement des particules scalaires (spin-0) et vectorielles (spin-1). L'avantage de l'équation DKP est qu'elle donne une description unifiée des systèmes spin-0 et spin-1. Les  $\beta$  sont des matrices  $5 \times 5$  dans la représentation spin-0 et des matrices  $10 \times 10$  dans la représentation spin-1. Dans notre cas, les  $\beta^\mu$  matrices sont choisies comme suit [92–94]:

- Pour la représentation en 5 dimensions

$$(5.3) \quad \beta^0 = \begin{pmatrix} \theta_{2 \times 2} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{2 \times 3} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \rho_{3 \times 3}^i \\ -\rho_{3 \times 2}^{i'} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2),$$

avec

$$(5.4) \quad \theta_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Pour la représentation en 10 dimensions

$$(5.5) \quad \beta^0 = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1}^\dagger \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1}^\dagger \\ -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^k = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & ik^{l\dagger} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & S_{3 \times 3}^l & 0_{3 \times 1}^\dagger \\ 0_{3 \times 3} & iS_{3 \times 3}^l & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1}^\dagger \\ ik^l & 0_{1 \times 3} & 0_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix}, \quad (l = 1, 2, 3),$$

dont

$$(5.6) \quad 0_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec

$$(5.7) \quad S^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$(5.8) \quad k^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 5.2 Les solutions propres de l'oscillateur quantique fractionnaire de DKP unidimensionnel

### 5.2.1 Cas de Spin-1

L'équation fractionnaire de DKP unidimensionnelle s'écrit par :

$$(5.9) \quad \left( \beta^0 E - c \beta^1 \left( \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} - imw\eta^0 \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \right) - mc^2 \right) \Psi_{DKP} = 0,$$

dont

$$(5.10) \quad \Psi_{DKP} = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})^T,$$

est la fonction d'onde des bosons. Ici,  $\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - \hat{l}$  avec  $(\eta^0)^2 = \hat{l}_{10 \times 10}, \hat{l}_{10 \times 10}$  est la matrice unitaire  $10 \times 10$ . Pour assurer les unités de longueur et d'impulsion correctes, Hermann [27, 28, 88, 100] généralise ces opérateurs de la dérivée d'ordre entier à la dérivée d'ordre arbitraire comme suit: Il présente les deux opérateurs canoniquement conjugués par :

$$(5.11) \quad \hat{x} = \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^{(1-\alpha)} x^\alpha,$$



$$(5.12) \quad \hat{p}_x = -i \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^\alpha mc D_x^\alpha.$$

dont les facteurs attachés donnent les unités correctes pour l'équation (5.9).

L'injection de (5.4) dans (5.9) donne les équations algébriques suivantes [101, 102]:

$$(5.13) \quad \psi_2 = -\frac{E}{mc^2} \psi_9, \quad \psi_3 = -\frac{E}{mc^2} \psi_8, \quad \psi_4 = 0, \quad \psi_5 = \frac{p_x^{\frac{\alpha}{2}} - im\omega x^{\frac{\alpha}{2}}}{mc} \psi_9,$$

$$(5.14) \quad \psi_6 = \frac{p_x^{\frac{\alpha}{2}} - im\omega x^{\frac{\alpha}{2}}}{mc} \psi_8, \quad \psi_7 = -\frac{E}{mc^2} \psi_1, \quad \psi_{10} = \frac{p_x^{\frac{\alpha}{2}} - im\omega x^{\frac{\alpha}{2}}}{mc} \psi_1.$$

La fonction d'onde  $\Psi'$  ( $= \psi_1, \psi_8, \psi_9$ ) sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$(5.15) \quad \left( \left( \frac{E}{c} \right)^2 - m^2 c^2 \right) \psi_1 + \left( -\hat{p}_x^\alpha + im\omega \left[ \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}}, \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \right] - m^2 \omega^2 \hat{x}^\alpha \right) \Psi' = 0.$$

Dans notre cas, nous choisissons de résoudre cette équation par rapport à la composante  $\psi_1$ . D'après (5.15) on a

$$(5.16) \quad \left( \left( \frac{E}{c} \right)^2 - m^2 c^2 \right) \psi_1 + \left( -\hat{p}_x^\alpha + im\omega \left[ \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}}, \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \right] - m^2 \omega^2 \hat{x}^\alpha \right) \psi_1 = 0.$$

De la même façon décrite dans les deux précédents chapitres, le commutateur  $\left[ \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}}, \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}} \right]$  est donné par

$$(5.17) \quad \left[ \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}}, \hat{p}_x^{\frac{\alpha}{2}} \right] = i\hbar\eta \left( \frac{\alpha}{2}, \nu \right),$$

avec

$$(5.18) \quad \eta \left( \frac{\alpha}{2}, \nu \right) = \frac{\Gamma \left( 1 + (1 + \nu) \frac{\alpha}{2} \right)}{\Gamma \left( 1 + \nu \frac{\alpha}{2} \right)} - \frac{\Gamma \left( 1 + \nu \frac{\alpha}{2} \right)}{\Gamma \left( 1 + (\nu - 1) \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

Lorsque  $\alpha = 2$ ,  $\eta(1, \nu) = 1$  et  $[x, p_x] = i\hbar$  est bien récupérer.

À ce stade, quelques remarques peuvent être faites [9]

- En mécanique quantique fractionnaire, tous les calculs dépendent de la représentation précise de l'espace de Hilbert, sur laquelle agissent les opérateurs fractionnaires.
- La connaissance explicite de l'ensemble de fonctions correspondant constitue le minimum requis pour l'algèbre des opérateurs fractionnaires.
- L'équation (5.18) n'est valide que sur l'ensemble des fonctions propres carrées intégrables  $|\Phi\rangle = |\nu\rangle$  [77].

L'introduction de (5.17) dans (5.16) mène à ce qui suit :

$$(5.19) \quad \left( \left( \frac{E}{c} \right)^2 - m^2 c^2 \right) \psi_1 + \left( -\hat{p}_x^\alpha + m\omega\hbar\eta \left( \frac{\alpha}{2}, \nu \right) - m^2 \omega^2 \hat{x}^\alpha \right) \psi_1 = 0.$$

Selon cette équation, la quantité de mouvement fractionnaire est

$$(5.20) \quad p_x^\alpha = \tilde{E} - m^2 \omega^2 \hat{x}^\alpha,$$

dont

$$(5.21) \quad \tilde{E} = \left( \frac{E}{c} \right)^2 - m^2 c^2 + m \omega \hbar \eta \left( \frac{\alpha}{2}, \nu \right).$$

D'où

$$(5.22) \quad |\hat{p}_x| = \left( \tilde{E} - m^2 \omega^2 \hat{x}^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'objectif est désormais d'évaluer le spectre d'énergie de l'oscillateur monodimensionnel fractionné DKP. Selon Laskin [2, 8, 18, 19, 29–31], ceci peut être réalisé par un traitement semi-classique qui est basé sur la règle de quantification appelée Bohr Sommerfeld. La règle de condition de quantification de Bohr–Sommerfeld–Wilson (Voir Annexe C) implique que

$$(5.23) \quad \oint p(x) dx = 4 \int_0^{|x|} p(x) dx = 2\pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

La substitution de (5.26) dans la condition de quantification BSW donne

$$(5.24) \quad 4 \int_0^{|x|} \left( \tilde{E} - m^2 \omega^2 x^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} dx = 2\pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right),$$

ou

$$(5.25) \quad 4\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}} \int_0^{|x|} \left( 1 - \frac{m^2 \omega^2}{\tilde{E}} x^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} dx = 2\pi\hbar \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

L'introduction de la variable

$$(5.26) \quad y = \frac{m^2 \omega^2}{\tilde{E}} x^\alpha,$$

permet d'évaluer l'intégrale à gauche de l'équation (5.25). Ainsi,

$$(5.27) \quad x = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{(m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}} \Rightarrow dx = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{\alpha (m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} y^{\frac{1}{\alpha}-1} dy.$$

Pour le cas  $p = 0$ , le mouvement est possible dans la plage  $|x| \leq x_m$  dont

$$(5.28) \quad x_m = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{m^{\frac{2}{\alpha}} \omega^{\frac{2}{\alpha}}}.$$

Pour le point tournant  $|x|$ , on a

$$(5.29) \quad |x| = x_m = \frac{\tilde{E}^{\frac{1}{\alpha}}}{(m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} y_m^{\frac{1}{\alpha}}.$$

L'utilisation de (5.28) conduit à  $y_m = 1$ .

Dans ce cas, l'équation (5.25) devient

$$(5.30) \quad \pi \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\tilde{E}_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}}{\alpha (m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-y)^{\frac{1}{\alpha}} dy.$$

Il est facile de remarquer que l'intégrale sur  $dy$  est équivalente à la fonction bêta [48, 49, 103]. On écrit alors

$$(5.31) \quad \begin{aligned} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right) &= \int_0^1 y^{\frac{1}{\alpha}-1} (1-y)^{\frac{1}{\alpha}} dy \\ &= \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right)}. \end{aligned}$$

À partir de cette équation, nous réécrivons (5.30) comme suit

$$(5.32) \quad \pi \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\tilde{E}_\alpha^{\frac{2}{\alpha}}}{\alpha (m^2 \omega^2)^{\frac{1}{\alpha}}} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right).$$

D'après (2.38), on trouve

$$(5.33) \quad \tilde{E} = \left(\frac{\alpha \pi \hbar}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} m \omega \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}},$$

ou

$$(5.34) \quad \left(\frac{E_n}{c}\right)^2 - m^2 c^2 + m \omega \hbar \eta \left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right) = \left(\frac{\alpha \pi \hbar}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} m \omega \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Enfin, la forme finale du spectre d'énergie est

$$(5.35) \quad E_n = \pm m c^2 \sqrt{\left(\frac{\alpha \pi \hbar}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega}{m c^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} + 1 - \frac{\hbar \omega}{m c^2} \eta \left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)}, \quad (n, \nu) = 0, 1, 2, \dots$$

## 5.2.2 Cas de spin-0

L'oscillateur fractionnaire de DKP unidimensionnel s'écrit par :

$$(5.36) \quad \left(\beta^0 E - c \beta^1 \left(\hat{P}_x^{\frac{\alpha}{2}} - i m \omega \eta \hat{x}^{\frac{\alpha}{2}}\right) - m c^2\right) \Phi = 0.$$

L'état stationnaire est une fonction d'onde à cinq composantes de l'équation de DKP, donné par

$$(5.37) \quad \Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_5)^T.$$

En remplaçant (5.37) par (5.36), on obtient facilement l'équation algébrique suivante :

$$(5.38) \quad -m\phi_1 + E\phi_2 + \left(p_x^{\frac{\alpha}{2}} + im\omega x^{\frac{\alpha}{2}}\right)\phi_3 = 0,$$

$$(5.39) \quad -m\phi_2 + E\phi_1 = 0,$$

$$(5.40) \quad \phi_4 = \phi_5 = 0,$$

$$(5.41) \quad \left(p_x^{\frac{\alpha}{2}} - im\omega x^{\frac{\alpha}{2}}\right)\phi_1 + m\phi_3 = 0.$$

Le découple de ces équation conduit à :

$$(5.42) \quad \phi_2 = \frac{E}{m}\phi_1, \quad \phi_4 = \phi_5 = 0,$$

$$(5.43) \quad \phi_3 = -\frac{\left(p_x^{\frac{\alpha}{2}} - im\omega x^{\frac{\alpha}{2}}\right)}{m}\phi_1.$$

La fonction d'onde  $\phi_1$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(5.44) \quad \left(\left(\frac{E}{c}\right)^2 - m^2c^2\right)\phi_1 + \left(-p_x^\alpha + im\omega \left[p_x^{\frac{\alpha}{2}}, x^{\frac{\alpha}{2}}\right] - m^2\omega^2x^\alpha\right)\phi_1 = 0.$$

Comme nous le voyons, l'équation différentielle (5.44) est semblable à celle de l'équation (5.19), de sorte que les résultats obtenus sont les mêmes que ceux de la section précédente.

Ainsi, le spectre d'énergie de l'oscillateur fractionnaire de DKP unidimensionnel pour les particules de spin-0 est donné par

$$(5.45) \quad E_n = \pm mc^2 \sqrt{\left(\frac{\alpha\pi\hbar}{2B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1\right)}\right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega}{mc^2} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{2}} + 1 - \frac{\omega\hbar}{mc^2} \eta\left(\frac{\alpha}{2}, \nu\right)}, \quad (n, \nu) = 0, 1, 2, \dots,$$

Maintenant, après l'obtention du spectre énergétique des deux particules de spin-0 et spin-1, certaines remarques peuvent être faites ici.:

- Les équations (5.35) et (5.45) sont le spectre d'énergie de l'oscillateur fractionnaire de DKP unidimensionnel des deux particules de spin-0 et de spin-1. Ainsi, on peut dire que l'oscillateur de DKP est généralisé en utilisant le calcul fractionnaire pour prendre en compte les effets non locaux. Comme dans le cas de l'oscillateur quantique harmonique [77],  $\alpha$  représente la caractéristique non locale des phénomènes physiques tandis que  $\nu$  est un paramètre caractéristique du système quantique.
- Les deux spectres d'énergie sont les mêmes. Leur forme a l'avantage d'être indépendante du choix de la définition de la dérivée fractionnaire (voir annexe A).

En effet, les deux équations ont été dérivées dans le cadre de l'approximation semi-classique. La même remarque a été observée récemment lors de l'utilisation de cette approximation sur l'étude des oscillateurs de Dirac et de Klein-Gordon [104, 105].

- A la limite ou  $\alpha = 2$ , on retrouve le spectre d'énergie de l'oscillateur de DKP unidimensionnel qui est donné par [85, 97, 101]

$$(5.46) \quad E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2n \frac{\hbar\omega}{mc^2}}.$$

Dans ce qui suit, nous traçons le spectre d'énergie en fonction du nombre quantique  $n$  pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha$  et  $\nu = 0, 1, 2, 3$ . Cela consiste à vérifier l'influence du paramètre  $\alpha$ , qui représente la caractéristique non locale des phénomènes physiques, sur les niveaux d'énergie du problème en question. Tous les résultats sont illustrés dans la figure. 1 pour certaines valeurs de  $n$  et  $\nu$ . Notons ici, en cherchant la simplicité, nous n'avons mis que  $\hbar = m = c = 1$ .

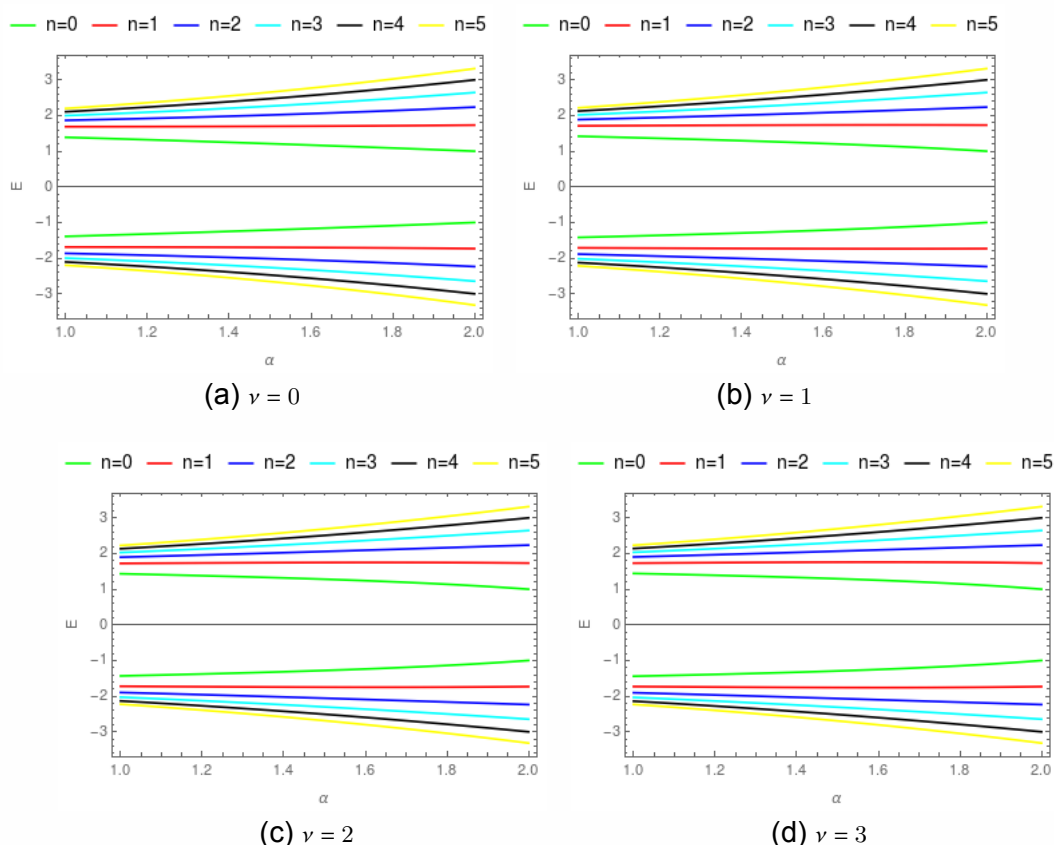


Figure 5.1: Spectre d'énergie pour les niveaux  $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  en fonction du paramètre  $\alpha$

Comme on peut le voir, le comportement est le même que dans l'oscillateur de Klein-Gordon [105], et l'effet de  $\alpha$  est significatif d'un niveau à l'autre.

## 5.3 Fonctions propres de l'oscillateur fractionnaire de DKP à 1D

### 5.3.1 La dérivée fractionnaire de Riesz-Feller

Olivar-Romero et Rosas-Ortiz [82] ont été les premiers à appliquer la méthode de factorisation pour l'oscillateur fractionnaire harmonique à 1D. Rosu et Mancas [71] ont généralisé leurs méthode en utilisant la dérivée fractionnaire de Riesz-Feller  $d^\alpha/dx^\alpha$ .

Comme on le sait, la transformée de Fourier et son inversion sont données par

$$(5.47) \quad f(k) = \mathcal{F}[f(x), k] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx,$$

$$(5.48) \quad f(x) = \mathcal{F}^{-1}[f(k), x] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k) e^{-ikx} dx.$$

La dérivée fractionnaire de Riesz-Feller  ${}_x D_\theta^\alpha$  est définie par [73]

$$(5.49) \quad \mathcal{F} [{}_x D_\theta^\alpha \psi(x), k] = -\Psi_\alpha^\theta(k) \Phi(k),$$

où

$$(5.50) \quad {}_x D_\theta^\alpha \psi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_\alpha^\theta(k) e^{-ikx} dx \int \psi(x') e^{ikx'} dx',$$

avec

$$(5.51) \quad \Psi_\alpha^\theta(k) = |k|^\alpha e^{i \text{sign}(k) \frac{\theta\pi}{2}}, \quad 0 < \alpha \leq 2, \text{ and } |\theta| \leq \min\{\alpha, 2 - \alpha\}.$$

La région autorisée pour les paramètres  $\alpha$  et  $\theta$  s'avère être un diamant dans le plan  $(\alpha, \theta)$  qui sont appelés le diamant de Feller-Takayasu [71, 72, 74]. Rosu et Mancas [71] ont également prouvé que les solutions dans l'espace  $|k|$  peuvent s'écrire par

$$(5.52) \quad \phi_n(k) = i^n \tilde{H}_n \phi_0^\alpha,$$

dont

$$(5.53) \quad \phi_0^\alpha = e^{-\frac{|k|^{\alpha/2+1}}{\alpha/2+1}}.$$

Ici  $\tilde{H}_n$  sont les polynômes d'Hermite déformés (certaines formes de cette fonction sont répertoriées dans le tableau. 5.1). Ils sont aussi appelés polynômes d'Hermite de Riesz-Feller. L'expression générale de  $\tilde{H}_n$  est

$$(5.54) \quad \tilde{H}_n = (-1)^n \text{sign}(k)^n e^{2\frac{|k|^{\alpha/2+1}}{\alpha/2+1}} \frac{d^n}{dk^n} e^{-2\frac{|k|^{\alpha/2+1}}{\alpha/2+1}}.$$

Pour le cas  $\alpha = 2$ , on passe aux polynômes d'Hermite standard. Enfin, les fonctions propres en coordonnée  $x$  peuvent être obtenues en effectuant les transformées de Fourier inverse des fonctions  $\phi_n(k)$ .

Table 5.1: Les quatre premières formes de  $\tilde{H}_n$

$n$	$\tilde{H}_n$	$\phi_n(k)$
0	1	$\phi_0^\alpha$
1	$2\text{sign}(k)  k ^{\alpha/2}$	$-i\tilde{H}_1\phi_0^\alpha$
2	$4  k ^\alpha - \alpha  k ^{\alpha/2-1}$	$-\tilde{H}_2\phi_0^\alpha$
3	$\text{sign}(k) \left( 8  k ^{3\alpha/2} - 6\alpha  k ^{\alpha-1} + \alpha(\alpha/2 - 1)  k ^{\alpha/2-2} \right)$	$-i\tilde{H}_3\phi_0^\alpha$

### 5.3.2 Les solutions propres

Au début, nous pouvons voir que les deux équations différentielles (5.19) et (5.44) sont les mêmes. Nous commençons par l'équation différentielle générale ( $\hbar = c = 1$ )

$$(5.55) \quad (E^2 - m^2) \chi_1(x) + \left( -\hat{p}_x^\alpha + m\omega\eta \left( \frac{\alpha}{2}, \nu \right) - m^2\omega^2\hat{x}^2 \right) \chi(x) = 0,$$

dont  $\chi = \psi_1(\phi_1)$  pour les bosons vecteurs (pour les scalaires) respectivement. La réorganisation de l'équation. (5.55) donne

$$(5.56) \quad \left[ -\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} + m^2\omega^2x^2 \right] \chi(x) = \tilde{E}\chi(x).$$

Les solutions dans l'espace  $|k|$  sont

$$(5.57) \quad \tilde{\chi}_n(k) = i^n \tilde{H}_n \chi_0^\alpha,$$

où

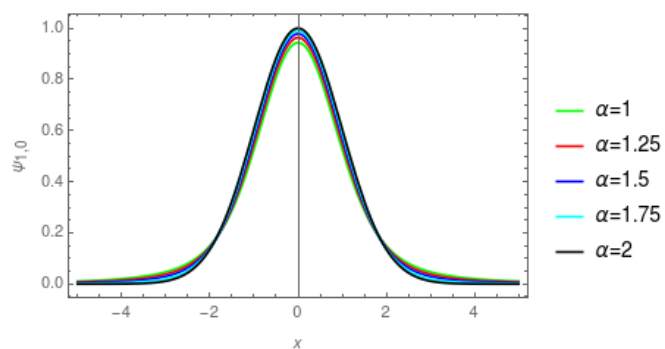
$$(5.58) \quad \chi_0^\alpha = e^{-\frac{|k|^{\alpha/2+1}}{\alpha/2+1}}.$$

Les fonctions propres peuvent être obtenues en effectuant les transformées de Fourier inverse des fonctions  $\phi$ .

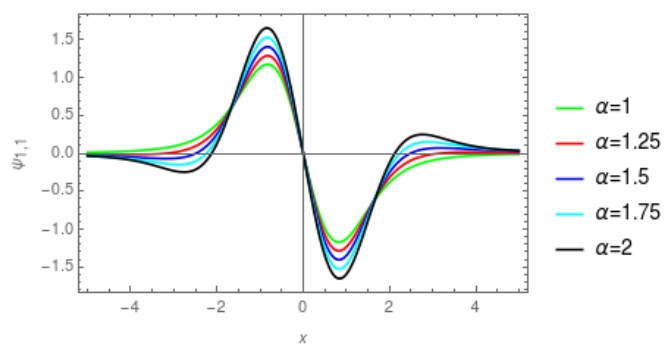
Sur la figure. 5.2, nous présentons respectivement les fonctions propres de l'état fondamental et les trois premières fonctions propres excitées dans les coordonnées  $x$ .

A partir de cette figure, le comportement des fonctions d'onde des deux premiers états indique que ces fonctions sont quasiment claires. Les solutions de l'oscillateur quantique DKP sont trouvées si  $\alpha = 2$  [89, 101].

Les autres composantes peuvent être dérivées à l'aide d'équations (5.13) et (5.14) pour les particules vectorielles. En revanche, les équations (5.42) et (5.43) sont utilisées pour obtenir ses composants dans le cas des particules scalaires.



(a) La composante  $\psi_{1,0}$  de l'état fondamental  $n = 0$



(b) La composante  $\psi_{1,1}$  du premier état excité pour  $n = 1$

Figure 5.2: L'allure des deux composantes  $\psi_{1,0}$  et  $\psi_{1,1}$  en fonction de  $x$



## CHAPITRE 6

# LES PROPRIÉTÉS THERMIQUES DES OSCILLATEURS FRACTIONNAIRES RELATIVISTES À 1D

### 6.1 Les propriétés thermodynamiques des oscillateurs fractionnaires relativistes

Dans cette section, nous allons calculés les différentes variables thermodynamiques en utilisant la définition standard de la fonction de partition  $Z$  [105–107]. Cette dernière est donnée par

$$(6.1) \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(E_n - E_0)} = e^{\beta E_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n},$$

Ici  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ ,  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $E_0$  est l'énergie de l'état fondamental correspond à  $n = 0$ .

Soit la nouvelle variable  $\tau = \frac{1}{\beta} = k_B T$ , alors (6.1) se transforme à:

$$(6.2) \quad Z = e^{\frac{1}{\tau} E_0} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{\tau} E_n}.$$

Pour évaluer la fonction de partition, nous avons utilisé la formule d'Euler-Maclaurin [48, 49, 89]. Cette formule d'Euler-Maclaurin est bien utiliser pour approximer les intégrales par des sommes finies, ou pour évaluer des séries infinies en utilisant des intégrales. Elle est donnée par

$$(6.3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2} f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} f^{(2p-1)}(0),$$

dont  $B_{2p}$  représente les nombres de Bernoulli et  $f^{(2p-1)}$  est la dérivée de l'ordre  $(2p-1)$ .

Comme nous le savons en mécanique statistique, le facteur Boltzmann habituel  $e^{-\beta E}$  est

un outil essentiel utilisé pour déterminer les quantités thermodynamiques<sup>1</sup> telles que la fonction de partition  $Z(\beta)$ , l'énergie libre  $F(\beta)$ , l'énergie totale  $U(\beta)$ , l'entropie  $S(\beta)$  et la chaleur spécifique  $C(\beta)$ , pour un système donné. Ces quantités sont définies avec la nouvelle variable  $\tau$  comme

$$(6.4) \quad F = -\tau \ln(Z), \quad U = \tau^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial \tau},$$

$$(6.5) \quad \frac{S}{k_B} = \ln(Z) + \tau \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \tau}, \quad \frac{C}{k_B} = 2\tau \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \tau} + \tau^2 \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \tau^2}.$$

Dans ce qui suit, nous allons calculer les propriétés thermodynamiques des oscillateurs fractionnaires harmoniques relativistes à l'aide de l'algorithme **num()** et tracer les différentes quantités en fonction de la température réduite  $\tau$ . Pour garantir l'exactitude de notre calcul, il est préférable de calculer numériquement la fonction de partition  $Z$  à l'aide de la fonction **num()**, module bien connu dans le langage de programmation Python [108]. Ces propriétés ont été trouvés via le spectre d'énergie suivant

$$(6.6) \quad E_n = \pm mc^2 \sqrt{\left( \frac{\alpha \pi \hbar}{2B \left( \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha} + 1 \right)} \right)^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\omega}{mc^2} \left( n + \frac{1}{2} \right)^{\frac{\alpha}{2}} + 1 - \frac{\hbar \omega}{mc^2} \eta \left( \frac{\alpha}{2}, \nu \right)}, \quad (n, \nu) = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Il est à noter que dans tous les figures nous avons utilisé des quantités sans dimension. Dans ce qui suit, toutes les caractéristiques thermodynamiques des oscillateurs harmoniques relativistes ont été déterminées dans le cas particulier où  $\nu = 0$ .

## 6.2 Propriétés thermiques de l'oscillateur quantique fractionnaire de Dirac

Les quantités thermiques sont indiquées dans la figure 6.1. Il faut mentionner que, dans toutes les figures, nous avons utilisé des quantités sans dimensions.

Figures. 6.1 montre toutes les quantités thermiques relatives à la température  $\tau$  pour diverses valeurs du paramètre  $\alpha$ . Les mêmes conclusions générales quant au comportement de ses propriétés de l'oscillateur fractionnaire harmonique à 1D sont également tirées ici: On remarque que le comportement de l'énergie libre, de l'énergie totale, de l'entropie et de la chaleur spécifique n'est pas identique à ceux obtenus pour l'oscillateur de Dirac standard [85]. Lorsque  $\alpha$  diminue, ces quantités augmentent. Sur la base de cette figure, nous pouvons confirmer que le paramètre  $\alpha$  joue un rôle important dans ses propriétés et que l'effet des paramètres est très important sur les propriétés thermodynamiques.

A ce stade, une remarque sur la limite classique dans des courbes de chaleur spécifiques semble importante à faire: dans les courbes de chaleur spécifique, la limite de saturation dépend inversement des valeurs d'alpha (voir figure. 6.2): Sur cette figure nous pouvons observer que quand  $\alpha = 2$  nous obtenons la limite classique  $C = 2k_B$ .

<sup>1</sup>Notons ici, en cherchant la simplicité, nous n'avons mis que  $\hbar = \omega = m = c = 1$ .

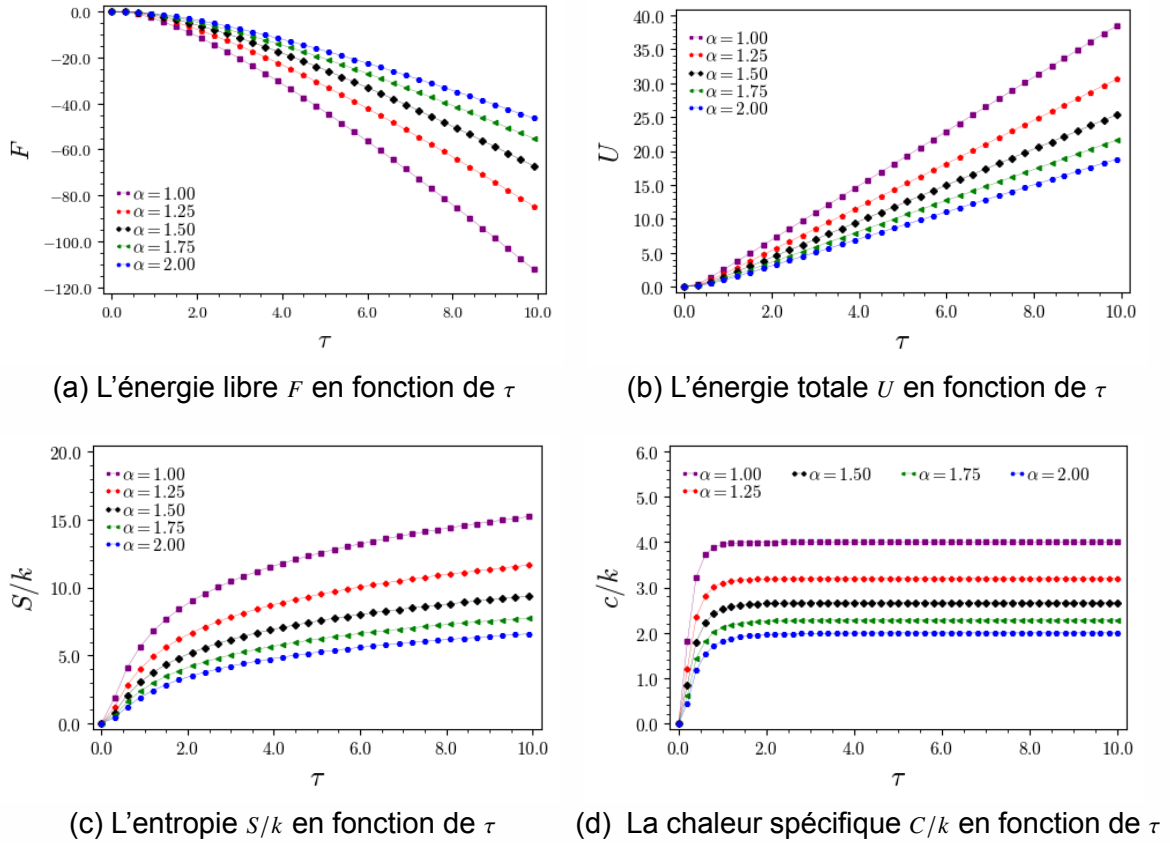


Figure 6.1: Les quantités thermodynamiques de l'oscillateur fractionnaire de Dirac à 1D

D'un autre côté, dans l'autre limite, à savoir,  $\alpha = 1$ , cette limite devient le double de la limite précédente,  $C = 4k_B$ . Ainsi, le paramètre  $\alpha$  joue un rôle de paramètre qui a pris le système de la région relativiste ( $\alpha = 2$  avec  $C = 2 k_B$ ) à la région relativiste extrême ( $\alpha = 1$  avec  $C = 2 k_B$ ).

Dans la figure. 6.3, nous montrons une comparaison entre les courbes thermiques spécifiques de l'oscillateur de Dirac et l'oscillateur harmonique seulement. À partir de cette figure, on voit également que la capacité thermique de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel standard ( $\alpha = 2$ ) est la même que celle de l'oscillateur harmonique dans la région relativiste ( $\alpha = 1$ ). Cette figure confirme la raison pour laquelle on a appelé cette région une région relativiste pour l'oscillateur fractionnaire harmonique.

### 6.3 Propriétés thermiques de l'oscillateur quantique fractionnaire de Klein-Gordon

La figure. 6.4 montre toutes les grandeurs thermiques contre la température réduite  $\tau$  pour différentes valeurs du paramètre fractionnaire  $\alpha$ . On constate que le comportement de l'énergie libre, de l'énergie totale, de l'entropie et de la chaleur spécifique n'est pas identique à celui obtenu pour l'oscillateur harmonique standard. Lorsque  $\alpha$  diminue, ces quantités augmentent. Selon cette figure, on peut confirmer que le paramètre  $\alpha$  joue

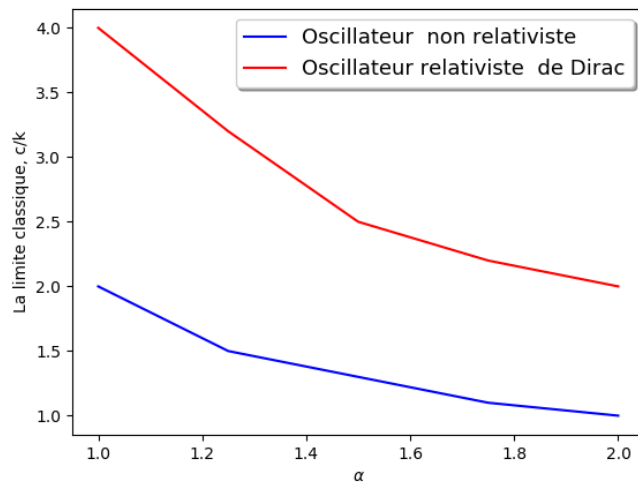


Figure 6.2: La limite classique de la chaleur spécifique pour les deux oscillateurs non relativiste et relativiste

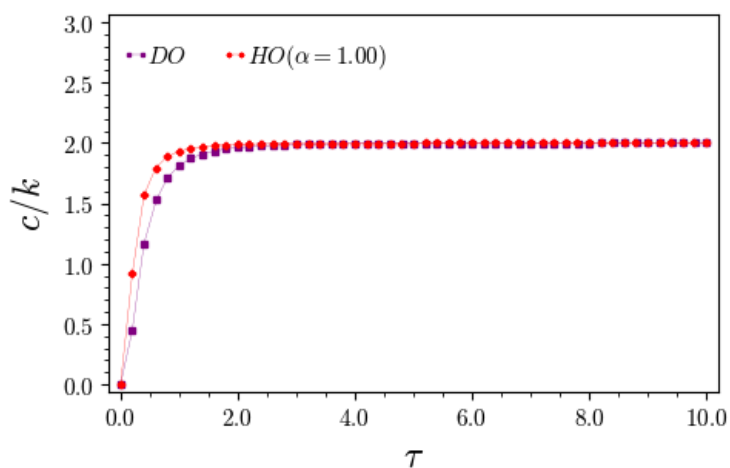


Figure 6.3: La chaleur spécifique des deux oscillateurs fractionnaires non relativiste ( $\alpha = 1$ ) et relativiste de Dirac ( $\alpha = 2$ )

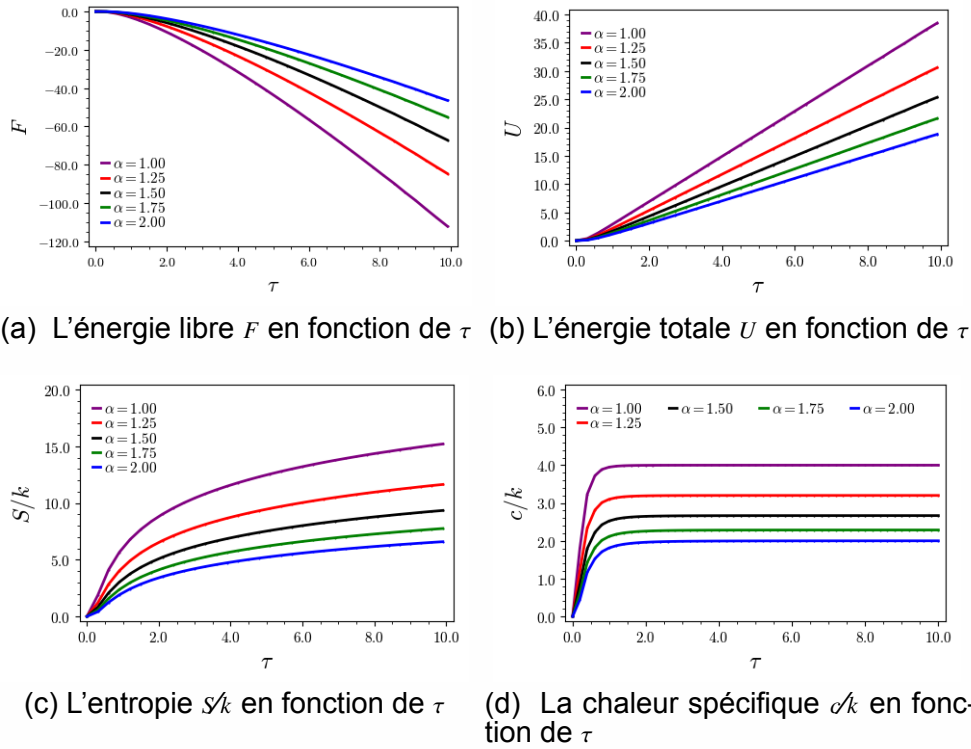


Figure 6.4: Les quantités thermodynamiques de l'oscillateur fractionnaire de Klein-Gordon à 1D

un rôle important dans ces propriétés, et l'effet des paramètres est très important sur les propriétés thermodynamiques. Plus précisément, les courbes de chaleur spécifique montrent un comportement important sur leur limite classique. On voit que la limite de saturation dépend inversement du paramètre  $\alpha$ . Lorsque  $\alpha = 2$ , on obtient la limite classique  $c = 2k_B$  et nous récupérons le résultat bien connu pour les propriétés thermiques de l'oscillateur de Klein-Gordon standard. Par contre, lorsque  $\alpha$  diminue, cette limite augmente jusqu'à devenir  $c = 4k$  lorsque  $\alpha = 1$ . Cette situation peut être remise en question en suivant les travaux de Wei [16, 17] sur l'oscillateur fractionnaire harmonique à 1D. Il a démontré que dans la limite  $\alpha = 1$ , l'énergie cinétique fractionnaire est approximativement la même que dans le cas extrêmement relativiste. En étendant ce résultat dans notre cas, on peut dire que l'oscillateur fractionnaire de Klein-Gordon à 1D donne un phénomène d'existence d'une transition de la région relativiste ( $\alpha = 2$ ) à la région extrêmement relativiste ( $\alpha = 1$ ).

## 6.4 Propriétés thermiques de l'oscillateur quantique fractionnaire de DKP

Les quantités thermiques de cet oscillateur en question sont extraites numériquement à l'aide de la formule Euler-Maclaurin.

La figure. 6.5 affiche toutes les grandeurs thermiques relatives à la température  $\tau$  pour diverses valeurs du paramètre  $\alpha$ . A partir du spectre énergétique, les mêmes con-

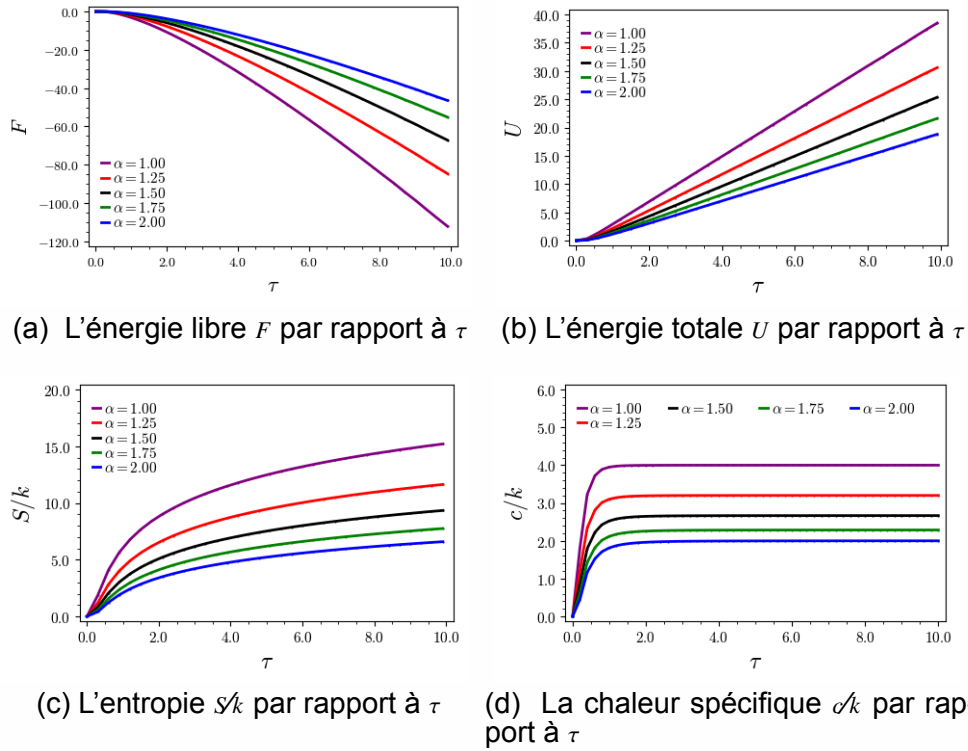


Figure 6.5: Les quantités thermodynamiques de l'oscillateur fractionnaire de DKP à 1D pour les deux particules de spin 0 et spin 1

conclusions générales sur le comportement des propriétés thermiques de ces oscillateurs sont également dégagées ici. Ainsi, on constate que lorsque  $\alpha$  décroît, toutes les fonctions thermiques augmentent. En conséquence, ce paramètre joue un rôle significatif dans ses propriétés et son effet est très clair.

Figure. 6.6 représente le tracé de la limite thermique spécifique classique pour les oscillateurs de DKP et Harmonic pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Cette figure a pour objet de comprendre les transitions entre les frontières extrêmes de ce paramètre. Cette discussion a été soigneusement prise en compte dans le cas de l'oscillateur de Dirac. En outre, selon cette figure, on constate que la limite de saturation est inversement dépendante des valeurs de  $\alpha$ . Cette observation s'applique également aux oscillateurs Dirac et Harmonic. La valeur de la limite classique  $C = 2k_B$  quand  $\alpha = 2$  contrairement à  $\alpha = 1$  quand on a  $C = 4k_B$ . Comme extension de notre cas, nous pouvons affirmer que l'introduction du dérivé fractionnaire dans l'oscillateur de DKP a pris le système de la région relativiste ( $\alpha = 1$  avec  $C = 4k_B$ ) à la région relativiste extrême ( $\alpha = 1$  avec  $C = 4k_B$ ). C'est aussi le cas des oscillateurs de Dirac, Klein-Gordon et Harmonic.

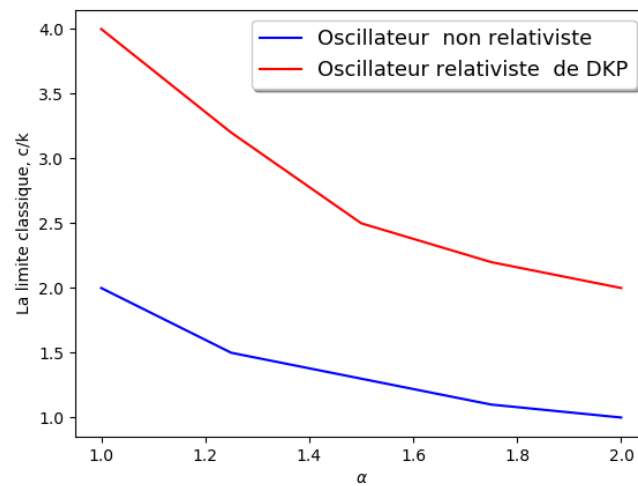


Figure 6.6: La limite classique de la chaleur spécifique pour les deux oscillateurs non relativiste et relativiste

La présente thèse est consacrée au calcul des propriétés thermodynamiques des oscillateurs fractionnaires relativistes à une dimension. Comme nous le savons, il est essentiel d'identifier le spectre et les états d'un système quantique. Comprendre le comportement de ce système quantique exige d'étudier les observables thermodynamiques d'un état bien défini. La structure mathématique qui encode les grandeurs thermiques d'un processus donné est la fonction de partition  $Z$ . Il est possible d'obtenir toutes les observables thermodynamiques tout au long de la fonction de partition. Cependant, l'obtention des différentes quantités dans un cadre analytique est parfois difficile, surtout lorsqu'il s'agit d'un spectre d'énergie dont l'expression est difficile et qui ne peut pas être utilisé pour trouver une formule convergente pour la fonction de partition.

Pour élaborer une analyse thermodynamique pour un système quantique donné, de multiples méthodes peuvent être utilisées pour estimer la fonction de partition. Parmi celles-ci, citons la formule Euler-Maclaurin ainsi que la fonction zeta de Hurwitz. Les deux méthodes se distinguent principalement par leur structure mathématique comme le rôle de la formule de sommation Euler-Maclaurin (EM) se rapproche de la somme  $\sum_{k=0}^{\infty} f^{(j)}$ , une intégrale correspondante de  $f$  et les valeurs de ses dérivés d'ordre supérieur  $f^{(j)}$ . La fonction zêta de Hurwitz sert à absorber les divergences qui apparaissent dans la fonction de partition et ainsi régularisé toutes les propriétés thermodynamiques qui peuvent être obtenues grâce à cette fonction (pour plus de détails sur l'utilisation des deux méthodes voir Réf. [85]) Pour ce faire, on a d'abord résolu les équations différentielles de ces oscillateurs relativistes et non relativistes à une dimension. Nous avons ensuite étudié l'influence du paramètre  $\alpha$  sur les solutions propres de ces oscillateurs. A partir de la forme de son spectre, toutes les propriétés thermiques seront obtenues et l'influence du paramètre  $\alpha$  est bien traitée.

Afin d'obtenir les propriétés thermodynamiques de ces oscillateurs, nous avons adopté une approche numérique, fondée sur le langage de programmation Python. Nous avons notamment utilisé un module bien implémenté dans la librairie Python appelé **num()**. Ce module sert à estimer la somme infinie, les produits et les autres limites des séries. En effet, il fournit une interface directe aux algorithmes d'extrapolation et fonctionne en appelant des fonctions spéciales avec un nombre croissant de termes jusqu'à ce que la limite extrapolée soit suffisamment précise. Ce travail montre que l'utilisation de méth-



odes numériques pour calculer les quantités thermodynamiques est un moyen utile de vérifier la précision des résultats obtenus à partir de calculs analytiques.

Plusieurs résultats intéressants ont été obtenus grâce à ces calculs. Ces résultats peuvent être récapitulés comme suit :

- Pour le cas de l'oscillateur fractionnaire harmonique non relativiste, les principaux résultats sont les suivants :
  - le spectre d'énergie a été déterminé à l'aide d'une méthode semi-classique (BSW ou EBK).
  - Dans le cas particulier  $\alpha = 2$ , on détecte la présence de la région non relativiste de l'oscillateur harmonique.
  - Maintenant, quand  $\alpha = 1$ , l'énergie cinétique fractionnaire est identique à l'énergie cinétique dans la région extrêmement relativiste: Le spectre d'énergie transite de la région relativiste ( $\alpha = 1$ ) à la région non relativiste ( $\alpha = 2$ ).
  - Cette situation est bien expliquée dans les courbes de la chaleur spécifique : le système bascule de la région non relativiste ( $\alpha = 2$  et  $c = 1 k_B$ ) à la région relativiste ( $\alpha = 1$  et  $c = 2 k_B$ ).
- Pour le cas de l'oscillateur fractionnaire de Dirac à 1D,
  - Le spectre d'énergie a été bien trouvé.
  - Les deux composantes  $\psi_1$  et  $\psi_2$  en fonction de  $x$  du premier état excité pour différentes valeurs de  $\alpha$  ont été discutées. L'influence du paramètre  $\alpha$  sur ces composantes est très claire.
  - Enfin, les courbes de la chaleur spécifique montrent que le système transite de la région relativiste ( $\alpha = 2$  et  $c = 2k$ ) à la région relativiste extrême ( $\alpha = 1$  et  $c = 4k$ ).
- Le cas de l'oscillateur quantique fractionnaire de Klein-Gordon quantique à une dimension donne les résultats suivants :
  - Le spectre d'énergie a été bien trouvé.
  - Les solutions propres ont également été obtenues et l'influence du paramètre  $\alpha$  sur les fonctions d'onde et la densité probabiliste a été testée.
  - En outre, il a été montré que l'introduction de la dérivée fractionnaire affecte significativement les propriétés thermodynamiques de cet oscillateur.
  - Finalement, les résultats ont montré que cet oscillateur passe d'une région relativiste ( $\alpha = 2$ ) à la région extrêmement relativiste ( $\alpha = 1$ ) comparée à l'oscillateur harmonique non relativiste.
- Enfin, l'oscillateur fractionnel de DKP à 1D a également été pris en compte. Les résultats atteints sont les suivants:
  - Les solutions propres ont été déterminées pour les particules vectorielles et scalaires.

- Le spectre d'énergie a été obtenu en utilisant l'approximation semi-classique basée sur la règle de quantification de BSW ou EBK.
- En ce qui concerne les solutions propres, elles ont été trouvées en utilisant une méthode récente fondée sur le dérivé fractionnaire de Riesz-Feller.
- L'influence de l'introduction de la dérivée fractionnaire sur les propriétés thermodynamiques de cet oscillateur a été étudiée. On a démontré que cela a un effet significatif sur ses propriétés. En conséquence, nous avons montré que l'oscillateur de DKP à 1D transit d'une région relativiste ( $\alpha = 2$ ) à la région extrêmement relativiste ( $\alpha = 1$ ).

En concluant, les oscillateurs relativistes subissent tous le même comportement au cours de l'introduction du concept de la dérivée fractionnaire dans l'étude de leurs propriétés thermodynamiques: On assiste toujours à un passage d'une phase non relativiste à une autre phase extrêmement relativiste. En perspective, nous cherchons à élargir l'effet de l'introduction du concept de la dérivée fractionnaire pour l'étude de certains phénomènes physiques tels que l'information quantique (les deux paramètres de Fisher et Shannon).

- [1] R. Herrmann, *Fractional Calculus : An Introduction For Physicists (2nd edition)*,, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2014., 2014.
- [2] N. Laskin, *Fractional Quantum Mechanics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2018.
- [3] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [4] V. E. Tarasov, *Handbook of fractional calculus with applications*, Walter de Gryter, 2019.
- [5] V. E. Tarasov, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simil*, 2013, **18**, 2945–2948.
- [6] V. E. Tarasov, *Phys. A*, 2021, **574**, 126009.
- [7] B. B. P. Rozmej, *Comp. Method. Sci. Tech*, 2010, **16**, 191–194.
- [8] N. Laskin, *Fractional Dynamics : Recent Advances*, World Scientific, 2012, chapter 17, p. 393.
- [9] R. Herrmann, *Fractional Calculus : An Introduction For Physicists (2nd edition)*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2014.
- [10] A. Lomin, *Chaos, Solitons and Fractals : X*, 2019, **1**, 100001.
- [11] A. Iomin, *Phys. Rev. E*, 2009, **80**, 022103.
- [12] E. Schrödinger, *Phys. Rev.*, 1926, **28**, 1046.
- [13] E. Schrödinger, *Ann. Phys*, 1926, **384**, 361.
- [14] S. S. Bayin, *J. Math. Phys*, 2012, **53**, 042105.
- [15] S. S. Bayin, *J. Math. Phys*, 2012, **53**, 084101.
- [16] Y. Wei, *Int. J. Theo. Math. Phys*, 2015, **5**, 87–111.

- [17] Y. Wei, *Phys. Rev. E*, 2016, **93**, 066103.
- [18] N. Laskin, *Phys. Rev. E*, 2000, **62**, 3135.
- [19] N. Laskin, *Phys. Lett. A*, 2000, **268**, 298–305.
- [20] M. Hasan, B. P. Mandal, *Ann. Phys*, 2018, **396**, 371–385.
- [21] M. Hasan, B. P. Mandal, *Phys. Lett. A*, 2018, **382**, 248–252.
- [22] M. Moreno, A. Zentella, *J. Phys. A : Math. Gen*, 1989, **22**, L821.
- [23] S. I. Muslih, O. P. Agrawal, D. Baleanu, *J. Phys. A : Math. Theor*, 2010, **43**, 055203.
- [24] S. Longhi, *Opt. Lett.*, 2015, **40**, 1117–1120.
- [25] Z. Korichi, M. T. Meftah, *J. Math. Phys*, 2014, **55**, 033302.
- [26] F.-G. Bouzenna, Z. Korichi, M. T. Meftah, *Rep. Math. Phys*, 2020, **85**, 57–67.
- [27] R. Hermann, *Gam. Ori. Chron. Phys*, 2013, **1**, 13–176.
- [28] R. Hermann, *Int. J. Mod. Phys. B*, 2013, **27**, 1350019.
- [29] N. Laskin, *Chaos*, 2000, **10**, 780.
- [30] N. Laskin, *Phys. Rev. E*, 2016, **93**, 066104.
- [31] N. Laskin, G. Zaslavsky, *Physica. A*, 2006, **368**, 38–54.
- [32] A. Raspini, *Phys. Scr*, 2001, **64**, 20–22.
- [33] P. Zavada, *J. Appl. Math*, 2002, **2**, 163–197.
- [34] S.-K. Luo, J.-M. He, Y.-L. Xu, X. T. Zhang, *Found. Phys*, 2016, **46**, 776–786.
- [35] D. Ito, K. Mori, E. Carriere, *N. C. A*, 1967, **51**.
- [36] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen*, 1989, **22**, L817.
- [37] M. Moshinsky, Y. F. Smirnov, *The harmonic oscillator in modern physics*, Harwood academic publishers, 1996.
- [38] C. Quesne, M. Moshinsky, *J. Phys. A : Math. Gen*, 1990, **23**, 2263–2272.
- [39] R. P. Martinez-Romero, A. L. Salas-Brito, *J. Math. Phys*, 1992, **33**, 1831.
- [40] R. P. MartinezyRomero, H. N. Nunez-Yepe, A. L. Salas-Brito, *Eur. J. Phys*, 1995, **16**, 135–141.
- [41] J. Benitez, P. R. M. Romero, H. N. Nunez-Yepe, A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64**, 1643.
- [42] O. Castanos, A. Frank, R. Lopez, L. F. Urrutia, *Phys. Rev. D*, 1991, **43**, 544–547.
- [43] C. Quesne, V. M. Tkachuk, *J. Phys. A : Math. Gen*, 2005, **41**, 1747.

- [44] M. H. Pacheco, R. R. Landim, C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. A*, 2010, **311**, 93–96.
- [45] M. H. Pacheco, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, R. R. Landim, *EPL.*, 2014, **108**, 10005.
- [46] S. Das, *Fractional calculus for system identification and controls*, 2008.
- [47] E. Artin, *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, BG Teubner, 1931.
- [48] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge : Cambridge University Press, 1999.
- [49] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, 2001.
- [50] I. Gradshteyn, I. Ryzhik, A. Jeffrey, D. Zwillinger, NY : *Academic Press.[Google Scholar]*, 2007.
- [51] K. S. Miller, B. Ross, *An Introduction to the Fractional Integrals and Derivatives-Theory and Applications*, Wiley, New York, 1993.
- [52] D. Zwillinger, A. Jeffrey, *Table of integrals, series, and products*, Elsevier, 2007.
- [53] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Academic Press, 1999.
- [54] M. Bramwell, *The Mathematical Gazette*, 1979, **63**, 137–138.
- [55] T. Bag, S. K. Samanta, *Fuzzy sets and Systems*, 2005, **151**, 513–547.
- [56] A. Tversky, I. Gati, *Psychological review*, 1982, **89**, 123.
- [57] D. Bárcenas, *Divulgaciones matemáticas*, 2000, **8**, 75–85.
- [58] A. Kilbas, *Theory and applications of fractional differential equations*, Vol. 204, Elsevier, 2006.
- [59] O. KB, Idham, J. S panier, *The fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [60] A. C. Millard, *Non-Commutative Methods in Quantum Mechanics*, F. of Princeton University (Ed.), Department of Physics, , Faculty of Princeton University, 1997.
- [61] O. KB, Idham, J. S panier, *The fractional Calculus*, 1974.
- [62] S. Samko, A. Kilbas, O. Marichev, *Fractional integrals and derivatives : theory and applications*, Gordon and Breach Science, 1993.
- [63] W. Greiner, *Quantum Mechanics : An Introduction*, S. V. 4th ed (Ed.), Springer-Verlag, Berlin., 2001.
- [64] S. Flugge, *American Journal of Physics*, 1973, **41**, 140–140.
- [65] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, B. Springer (Ed.), 1974.

- [66] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics*, 1990.
- [67] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics wave equations*, Springer-Verlag, 2000.
- [68] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier (Ed.), Academic Press., 1995.
- [69] A. Boumali, S. Dilmi, H. Hassanabadi, Z. Soroush, *Karbala Int. J. Mod. Sci.*, 2017, **3**, 191–201.
- [70] A. Boumali, L. Chetouani, *Phys. Lett. A*, 2005, **346**, 261–268.
- [71] H. C. Rosu, S. C. Mancas, *J. Phys : Conf. Series*, 2020, **1540**, 012005.
- [72] M. Berman, N. Moiseyev, *Phys. Rev. A*, 2018, **98**, 042110.
- [73] F. Mainardi, Y. Luchko, G. Pagnini, *Fract. Calc. Appl. Anal*, 2001, **4**, 153.
- [74] H. Takayasu, *Fractals in the Physical Sciences, Nonlinear Science : Theory and Applications*, Manchester University Press, Manchester, New York, 1989.
- [75] A. Boumali, A. Hafdallah, A. Toumi, *Phys. Scr*, 2011, **84**, 037001.
- [76] A. Boumali, *Phys. Scr*, 2015, **90**, 045702.
- [77] K. G. Atman, H. U. Sirin, *Rep. Math. Phys*, 2020, **86**, 263–270.
- [78] P. Rozmej, R. Arvieu, *J. Phys. A : Math. Gen*, 1999, **32**, 5367–5382.
- [79] N. Bohr, *Philos. Mag.*, 1913, **26**, 476–502.
- [80] A. Sommerfeld, *Ann. Phys.*, 1916, **51**, 125–167.
- [81] W. Wilson, *Philos. Mag.*, 1915, **29**, 795–802.
- [82] F. Olivar-Romero, O. Rosas-Ortiz, *J. Phys : Conf. Series*, 2016, **698**, 012025.
- [83] P. Amore, F. M. Fernández, C. P. Hofmann, R. A. Sáenz, *J. Math. Phys*, 2010, **51**, 122101.
- [84] A. Boumali, N. Messai, *Can. J. Phys*, 2014, **92**, 1460–1463.
- [85] A. Boumali, *EJTP*, 2015, **12**, 32.
- [86] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Z. Naturforsch.*, 2015, **70**, 619–627.
- [87] R. Herrmann, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys*, 2007, **34**, 607.
- [88] R. Herrmann, *Phys. A*, 2010, **389**, 4613–4622.
- [89] H. H. A. Boumali, *Eur. Phys. J. Plus*, 2013, **128**, 124.
- [90] R. J. Duffin, *Phys. Rep. 54*, 1939, **54**, 1114.

- [91] G. Petiau, Ph.D. thesis, University of Paris, Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect. 8, 16, 1936.
- [92] Y. Nedjadi, R. C. Barret, *J. Phys. G*, 1993, **19**, 87.
- [93] Y. Nedjadi, R. C. Barrett, *J. Phys. A*, 1994, **27**, 4301.
- [94] Y. Nedjadi, R. C. Barrett, *J. Math. Phys.*, 1994, **35**, 4517.
- [95] R. I. A. del Castillo Astiazanln, Ph.D. thesis, Faculty of Graduate Studies and Research, Canada, 1991.
- [96] H. Aounallah, A. Boumali, *Phys. Particles and Nuclei Letters*, 2019, **16**, 195–205.
- [97] A. Boumali, Ph.D. thesis, Universite d'Annaba, 2006.
- [98] N. Messai, A. Boumali, *Eur. Phys. J. Plus*, 2015, **130**, 140.
- [99] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. London.*, 1939, **173**, 91–116.
- [100] R. Herrmann, *Fractional Calculus : An Introduction For Physicists (2nd edition)*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 2014.
- [101] A. Boumali, *J. Math. Phys.*, 2008, **49**, 022302.
- [102] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur Phys. J Plus.*, 2013, **128**, 124.
- [103] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, 1965.
- [104] N. Korichi, A. Boumali, H. hassanabadi, *Physica. A.*, 2022, **587**, 126508.
- [105] N. Korichi, A. B. Y. Chargui, *J. Low. Temp. Phys.*, 2021, **206**, 32–50.
- [106] K. Chabi, A. Boumali, *Revista mexicana de fisica*, 2020, **66**, 110–120.
- [107] H. Hassanabadi, Z. Molaei, A. Boumali, *Found. Phys.*, 2013, **43**, 225–235.
- [108] V. R. Guido, J. Drake, L. Fred, *Python tutorial*, Centrum voor Wiskunde en Informatica Amsterdam, The Netherlands, 1995.
- [109] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.
- [110] P. R. M. R. J. Benitez, H. N. Nunez-Yopez, A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett*, 1990, **64**, 1643.
- [111] J. S. Montanez-Moyano, C. J. H. Quimbay, *arXiv :2005.09061v2*, 2020.
- [112] C. Li, D. Qian, Y. Chen, *Discrete Dyn Nat Soc*, 2011, **2011**.
- [113] L. Landau, E. Lifchitz, *Physique théorique : mécanique quantique, Tome 3*, Editions MI MOSCOU, 1975, 1975.
- [114] A. Einstein, *Verh.Dtsch. Phys. Ges.*, 1917, **19**, 82–92.

- [115] L. Brillouin, *J. Phys. Radium*, 1926, **7**, 353–368.
- [116] J. B. Keller, *Ann. Phys. N.Y.*, 1958, **4**, 180–188.
- [117] V. P. Maslov, *Theorie des Perturbations et Methods Asymptotiques De-nod*, Gauthier-Villars, Paris, 1972., Denod, Gauthier-Villars, Paris, 1972.
- [118] L. J. Curtis, D. G. Ellis, *Amer. J. Phys.*, 2004, **72**, 1521–1523.



## ANNEXE A

### L'OSCILLATEUR QUANTIQUE FRACTIONNAIRE DE DIRAC

L'équation de Dirac avec une interaction d'oscillateur de Dirac est [36–38]

$$(A.1) \quad \{\alpha (p - im\omega\gamma^0 r) + \beta m\} \Psi = E\Psi,$$

où  $m$  est la masse,  $\omega > 0$  est la fréquence constante de l'oscillateur, les  $4 \times 4$  matrices de Dirac sont données par [109]

$$(A.2) \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dont  $\sigma$  sont les matrices de spin de Pauli.

D'après Martinez et al. [39,40], il a été démontré que l'équation peut être réécrit sous la forme manifestement covariant de Lorentz comme suit [39,40,110]:

$$(A.3) \quad \left( \gamma^\mu p_\mu - m + \frac{\kappa e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \Psi = 0,$$

dont

$$(A.4) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \sigma^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} [\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu],$$

est le potentiel électromagnétique associé à l'interaction de l'oscillateur de Dirac. Récemment, Montanez-Moyano et al. [111] ont utilisé une méthode basée sur la densité Lagrangienne pour obtenir la forme de l'équation de l'oscillateur de Dirac à une et deux dimensions. Dans cette direction, nous voulons étendre leurs travaux au cas de trois dimensions avec dérivée fractionnaire. Tout d'abord, nous définissons l'extension fractionnaire du tenseur d'intensité de champ standard comme suit [9]

$$(A.5) \quad F_{\mu\nu}^\beta = \partial_\mu^\beta A_\nu - \partial_\nu^\beta A_\mu.$$

Dans ce cas, l'équation. (A.3) devient [1,23,32]

$$(A.6) \quad \left( \gamma^\mu p_\mu^\beta - m + \frac{\kappa e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^\beta \right) \Psi = 0$$

Maintenant, considérez une sphère diélectrique uniformément chargée de rayon  $R$ , le champ électrique produit à l'intérieur de la sphère varie comme  $E = -\lambda r$  ( $\lambda$  est une constante), alors que le champ magnétique disparaît partout  $B = 0$ . Nous pouvons toujours considérer une très grande sphère pour ignorer en toute sécurité les effets de bord. Dans le cadre approprié de la sphère, nous introduisons le potentiel électromagnétique fractionnaire comme suit [9]

$$(A.7) \quad A_{\mu}^{\beta} = \lambda \left( t |r|^{\beta}, 0 \right).$$

Ce potentiel fractionnaire est réécrit sous forme compacte en tant que

$$(A.8) \quad A_{\mu}^{\beta} = \frac{1}{4} \left( 2\chi_{\mu}^{\beta} (u \cdot \chi) - \chi^2 u_{\mu} \right).$$

Suivant (A.7), l'équation. (A.5) devient

$$(A.9) \quad F_{\mu\nu}^{\beta} = \lambda \left( u_{\mu}^{\beta} \chi_{\nu} - u_{\nu}^{\beta} \chi_{\mu} \right).$$

Ce formulaire nous aide à écrire le terme d'interaction de (A.6) comme

$$(A.10) \quad \frac{\kappa e}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{\beta} = \frac{\kappa e}{4m} \lambda \left( i\alpha \cdot |r|^{\beta} \right).$$

Les densités fractionnaires Lagrangiennes sont des fonctions des champs fractionnaires et de leurs dérivés fractionnaires [9].

Ils ont la forme suivante

$$(A.11) \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_{\mu}^{\beta} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu}^{\alpha} \phi} \right) = 0, \quad (\phi = \Psi, \text{ ou } \psi^{\dagger}).$$

Ainsi, la densité lagrangienne fractionnaire du système est

$$(A.12) \quad \begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_I \\ &= \bar{\psi} \left( \gamma^{\mu} p_{\mu}^{\beta} - m \right) \psi + \frac{\kappa e}{4m} \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{\beta} \psi \\ &= \bar{\psi} \left( \gamma^{\mu} p_{\mu}^{\beta} - m \right) \psi + \frac{i\kappa e}{4m} \lambda \bar{\psi} \left( \alpha \cdot |r|^{\beta} \right) \psi \\ &= \psi^{\dagger} \gamma^0 \left( \gamma^{\mu} p_{\mu}^{\beta} - m \right) \psi + \frac{i\kappa e}{4m} \lambda \bar{\psi}^{\dagger} \left( \gamma^0 \alpha \cdot |r|^{\beta} \right) \psi \\ &= \psi^{\dagger} \gamma^0 \left( \gamma^{\mu} p_{\mu}^{\beta} - m \right) \psi + imw \psi^{\dagger} \left( \gamma^0 \alpha \cdot |r|^{\beta} \right) \psi, \end{aligned}$$

avec

$$(A.13) \quad \lambda = \frac{2m^2 \omega}{ek}, \quad \bar{\psi} = \psi^{\dagger} \gamma^0.$$

Enfin

$$(A.14) \quad \mathcal{L}_{f.O.D} = \psi^{\dagger} \left( i \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \cdot |p|^{\beta} - \gamma^0 m \right) \psi + imw \psi^{\dagger} \left( \gamma^0 \alpha \cdot |r|^{\beta} \right) \psi$$

---

Ainsi, lorsque nous utilisons les équations d'Euler-Lagrange fractionnaires pour les champs  $\psi$  et  $\psi^\dagger$ , nous obtenons les équations de mouvement de l'oscillateur de Dirac fractionnaire en trois dimensions : donc pour le champ  $\psi^\dagger$ , on a

$$(A.15) \quad i\dot{\psi} = \left[ \alpha \left( |p|^\beta - imw\gamma^0 |r|^\beta \right) + \gamma^0 m \right] \psi$$

L'expression (A.15) correspond à l'équation de Dirac en présence d'un potentiel linéaire en trois dimensions.

La forme de l'hamiltonien de cet oscillateur est écrite maintenant par

$$(A.16) \quad H_{\beta,D} = \alpha \left( |p|^\beta - imw\gamma^0 |r|^\beta \right) + \gamma^0 m$$

## ANNEXE B

# LES DÉRIVÉS FRACTIONNAIRES DE RIEMANN-LIOUVILLE ET CAPUTO

### B.1 La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville

La dérivée de Riemann-Liouville d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de la fonction  $x(t)$  est donnée par [1, 62, 112]

$$(B.1) \quad \begin{aligned} \text{RL} D_{0,t}^{\alpha} x(t) &= \frac{d^n}{dt^n} D_{0,t}^{-(n-\alpha)} \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} x(t) dt, \end{aligned}$$

où  $n-1 < \alpha < n \in \mathbb{Z}$ .

Dans cette notation,  $\alpha$  est un nombre réel positif, les indices sont les bornes d'intégration et RL désigne le Riemann-Liouville. L'équation (B.1) est obtenue en divisant l'opérateur de dérivée fractionnaire

$$(B.2) \quad D^{\alpha} f(x) = D^n (D^{-\nu} f(x)),$$

Ici, nous avons supposé que  $\nu = n - \alpha$  dont  $0 < \nu < 1$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Équation (B.2) signifie qu'une dérivée fractionnaire peut être interprétée comme une intégrale fractionnaire suivie d'une dérivée standard ordinaire. Une fois qu'une définition de l'intégrale fractionnaire est donnée, la dérivée fractionnaire est également déterminée.

Revenons maintenant dans notre cas : en choisissant les relations de commutation sur l'ensemble des fonctions spécifiques  $|v\rangle = x^{\alpha\nu}$ , on a :

$$(B.3) \quad -i\hbar [x^{\alpha}, D^{\alpha}] x^{\alpha\nu} = -i\hbar (x^{\alpha} D^{\alpha} x^{\alpha\nu} - D^{\alpha} (x^{(1+\nu)\alpha})).$$

En posant que  $\beta = \alpha\nu$ , l'équation. (B.2) devient

$$(B.4) \quad \begin{aligned} D^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^\beta dt, \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n x^{n-\alpha-1}}{dt^n} \int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} t^\beta dt, \end{aligned}$$

En utilisant la nouvelle variable

$$(B.5) \quad y = \frac{t}{x},$$

L'équation. (B.4) se transformera en

$$(B.6) \quad \begin{aligned} D^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n x^{n+\beta-\alpha}}{dt^n} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} y^\beta dy \\ &= \frac{B(n-\alpha, 1+\beta)}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n x^{n+\beta-\alpha}}{dt^n}. \end{aligned}$$

Mais

$$(B.7) \quad B(n-\alpha, 1+\beta) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+n+\beta-\alpha)},$$

$$(B.8) \quad \frac{d^n x^\gamma}{dt^n} = \frac{\gamma!}{(\gamma-n)!} x^{\gamma-n} = \frac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma-n)} x^{\gamma-n}, \text{ with } \gamma = n + \beta - \alpha$$

Alors

$$(B.9) \quad \begin{aligned} D^\alpha x^\beta &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+n+\beta-\alpha)} \frac{\Gamma(1+n+\beta-\alpha)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$(B.10) \quad D^\alpha x^{\alpha\nu} = \frac{\Gamma(1+\alpha\nu)}{\Gamma(1+(\nu-1)\alpha)} x^{(\nu-1)\alpha}.$$

Avec la même procédure, le deuxième terme de l'équation. (B.3) devient

$$(B.11) \quad D^\alpha (x^{(1+\nu)\alpha}) = \frac{\Gamma(1+(1+\nu)\alpha)}{\Gamma(1+\nu\alpha)} x^{\nu\alpha}.$$

Enfin, l'équation (B.3) peut s'écrire comme suit :

$$(B.12) \quad -i\hbar [x^\alpha, D^\alpha] = -i\hbar \text{RL}_\eta(\nu, \alpha).$$

Avec

$$(B.13) \quad \text{RL}_\eta(\nu, \alpha) = \frac{\Gamma(1+\alpha\nu)}{\Gamma(1+(\nu-1)\alpha)} - \frac{\Gamma(1+(1+\nu)\alpha)}{\Gamma(1+\nu\alpha)}.$$

## B.2 La dérivée fractionnaire de Caputo

La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre  $\alpha$  de la fonction  $x(t)$  est définie par

$$(B.14) \quad {}_C D_{0,x}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n x(t)}{dt^n} dt$$

Ainsi,

$$(B.15) \quad {}_C D_{0,x}^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{d^n t^\beta}{dt^n} dt$$

Mais

$$(B.16) \quad \frac{d^n t^\beta}{dt^n} = \frac{\beta!}{(\beta-n)!} t^{\beta-n}$$

En mettant (B.16) dans (B.15) on obtient

$$(B.17) \quad \begin{aligned} {}_C D_{0,x}^\alpha x^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} \frac{\beta!}{(\beta-n)!} t^{\beta-n} dt \\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\beta-n)} \int_0^x (x-t)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt \\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)x^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\beta-n)} \int_0^x \left(1-\frac{t}{x}\right)^{n-\alpha-1} t^{\beta-n} dt. \end{aligned}$$

En utilisant que

$$(B.18) \quad y = \frac{t}{x} \implies t = xy,$$

l'équation. (B.17) devient

$$(B.19) \quad \begin{aligned} {}_C D_{0,x}^\alpha x^\beta &= \frac{\Gamma(1+\beta)x^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\beta-n)} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} (xy)^{\beta-n} x dy \\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\beta-n)} \int_0^1 (1-y)^{n-\alpha-1} (y)^{\beta-n} dy \\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\beta-n)} B(n-\alpha, \beta-n+1) \\ &= \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(1+\beta-n)} \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)}{\Gamma(-\alpha+\beta+1)} x^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

L'équation. (B.19) peut être écrite comme

$$(B.20) \quad {}_C D_{0,x}^\alpha x^\beta = \frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(1+\beta-\alpha)} x^{\beta-\alpha},$$

ou

$$(B.21) \quad {}_C D_{0,x}^\alpha x^{\alpha\nu} = \frac{\Gamma(1+\alpha\nu)}{\Gamma(1+(\nu-1)\alpha)} x^{(\nu-1)\alpha}.$$

Avec la même procédure on montre facilement que

$$(B.22) \quad {}_C D_{0,x}^\alpha x^{(1+\nu)\alpha} = \frac{\Gamma(1+(1+\nu)\alpha)}{\Gamma(1+\nu\alpha)} x^{\nu\alpha}.$$

Enfin, l'équation (B.3) peut être écrite comme

$$(B.23) \quad -i\hbar [x^\alpha, D^\alpha] = -i\hbar {}^C C_\eta(\nu, \alpha).$$

Avec

$$(B.24) \quad {}^C C_\eta(\nu, \alpha) = \frac{\Gamma(1+\alpha\nu)}{\Gamma(1+(\nu-1)\alpha)} - \frac{\Gamma(1+(1+\nu)\alpha)}{\Gamma(1+\nu\alpha)}.$$

Comme on peut le voir,

$$(B.25) \quad {}^C C_\eta(\nu, \alpha) = {}^{RL} \eta(\nu, \alpha).$$

## C.1 Préambule

En physique, la quantification semi-classique est un procédé simplifié de quantification d'un système physique basé sur ses ingrédients classiques, incluant ses trajectoires. Cette procédure simplifiée, qui ne fait pas appel à l'appareil mathématique complet de la mécanique quantique, est considérée comme valide dans le régime semi-classique.

## C.2 Approximation WKB (Wentzel, Kramers et Brillouin)

L'approximation WKB est un outil facile et efficace pour l'étude de systèmes complexes et les prévisions analytiques en physique atomique, moléculaire et nanophysique ainsi que la description du rayonnement HAWKING dans les trous noirs. Elle permet également de généraliser le concept de trajectoire pour une particule dans laquelle, en mécanique quantique "pure", ce concept est absent. Il constitue ainsi une passerelle entre la mécanique classique et la mécanique quantique [113].

Cette approximation est fondée sur le fait que les solutions de l'équation de Schrödinger [12, 13] peuvent être approchées par une fonction comportant des quantités généralement classiques.

Soit l'équation de Schrödinger à 1D suivante :

$$(C.1) \quad \left( -\frac{\hbar}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \psi(x) = E \psi(x).$$

Posons que :

$$(C.2) \quad \psi(x) = e^{-\frac{if(x)}{\hbar}},$$

dont  $f(x)$  une fonction par rapport à la variable  $x$ , alors on obtient

$$(C.3) \quad \frac{i\hbar}{2m} f'' - \frac{1}{2m} f'^2 + E - V = 0.$$



Dans l'approximation WKB, à la limite classique, la fonction  $f$  oscille très rapidement, ce qui revient à faire tendre  $\hbar \rightarrow 0$ . Ainsi, cette fonction peut être définie comme une série de puissance de  $\hbar$  comme suit :

$$(C.4) \quad f = f_0 + \frac{\hbar}{i} f_1 + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 f_2 + \dots + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^n f_n.$$

Dans l'approximation d'ordre zéro, c-a-d  $f = f_0$ , en injectant dans (C.3) on trouve

$$(C.5) \quad \frac{i\hbar}{2m} f_0'' - \frac{1}{2m} f_0'^2 + E - V = 0.$$

Dans la limite classique où  $\hbar \rightarrow 0$ , la forme de (C.5) se réduit à :

$$(C.6) \quad -\frac{1}{2m} f_0'^2 + E - V = 0.$$

La solution de (C.6) est triviale : on a donc

$$(C.7) \quad \begin{aligned} f_0(x) &= \pm \int \sqrt{2m(E - V)} dx \\ &= \int p dx. \end{aligned}$$

dont  $p$  est l'impulsion classique de la particule.

Passons maintenant à l'approximation d'ordre 1 dont

$$(C.8) \quad f = f_0 + \frac{\hbar}{i} f_1,$$

alors on trouve

$$(C.9) \quad \frac{i\hbar}{2m} \left(f_0 + \frac{\hbar}{i} f_1\right)'' - \frac{1}{2m} \left(f_0 + \frac{\hbar}{i} f_1\right)'^2 + E - V = 0,$$

où

$$(C.10) \quad \frac{i\hbar}{2m} \left(\frac{f_0''}{2} + f_0' f_1'\right) - \frac{1}{2m} f_0'^2 + E - V = 0.$$

La connaissance des solutions de (C.6) conduit à :

$$(C.11) \quad \frac{f_0''}{2} + f_0' f_1' = 0,$$

donc

$$(C.12) \quad f_1' = -\frac{f_0''}{2f_0'} = -\frac{p'}{p}.$$

Ainsi

$$(C.13) \quad f_1 = \frac{-1}{2} \ln p.$$

Cette procédure de solutions est répétée de la même manière pour les ordres supérieurs. Dans l'approximation d'ordre 1, la fonction d'onde  $\psi(x)$  s'écrit par :

$$(C.14) \quad \psi(x) = \frac{N_{\text{norm}}}{\sqrt{p}} e^{\pm \frac{i}{\hbar} \int p dx}.$$

Pour le cas des énergies dont  $E < V$ , la fonction  $p = \sqrt{2m(E - V)}$  est imaginaire pure. Alors

$$(C.15) \quad \psi(x) = \frac{N_{\text{norm}}}{\sqrt{p}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p| dx}.$$

est une exponentielle réelle.

Notez ici que l'accès aux valeurs propres se fait en espace de phase  $(x, p_x)$  : Les niveaux énergétiques peuvent être représentés par une trajectoire dans l'espace des phases  $(x, p_x)$ . En effet, l'énergie d'un système périodique est écrite dans son ensemble par :

$$(C.16) \quad E = \frac{p^2}{2m} + V$$

Bohr, Sommerfeld et Wilson [79–81] ont admis que seulement certaines énergies sont tolérées, celles dont l'aire de trajectoire associée, et par conséquent l'action, sont des multiples entiers de  $\hbar$ .

### C.3 Règle de quantification : Bohr-Sommerfeld-Wilson (BSW) et Einstein-Brillouin-Keller (EBK)

Le modèle de Bohr-Sommerfeld envisageait d'ajouter une restriction à la quantification de l'impulsion angulaire de l'électron avec une restriction supplémentaire sur la quantification du rayon déterminé par "Wilson-Sommerfeld quantification restriction formula" : La formule de Wilson-Sommerfeld visait à améliorer le modèle de Bohr de l'atome, conduisant à la définition d'un modèle de Bohr-Sommerfeld. En ce qui concerne la quantification de l'atome d'hydrogène, elle est attribuable à Bohr (1913) [79], donnant lieu au célèbre « modèle de Bohr » à orbites circulaires. Ce procédé a été élargi par Sommerfeld pour inclure des orbites elliptiques [80, 81].

Donc, la quantification BSW consiste à n'autoriser que des actions multiples entières (à une constante) du quantum d'action  $\hbar$  et on pose que [79–81]

$$(C.17) \quad \oint p dx = n\hbar.$$

En 1917, Einstein [114] a généralisé la procédure Bohr-Sommerfeld-Wilson à un système conservateur intégrable. La méthode générale d'Einstein a été clarifiée par Brillouin [115], puis Keller [116], entraînant la quantification de EBK (Einstein-Brillouin-Keller) [114–116].

La quantification EBK consiste à ne permettre que des actions multiples entières (à une constante) du quantum d'action ;  $C_i$  est un contour fermé sur le tore invariant, on

pose :

$$(C.18) \quad \int_{C_i} p_i dq_i = \left( n + \frac{\alpha_i}{4} \right) 2\pi\hbar,$$

Les entiers positifs  $\alpha_i$  sont des indices de Maslov [117].

La quantification semi-classique Einstein-Brillouin-Keller (EBK) [114–116] et l'index topologique de Maslov [117] permettent de déduire les valeurs quantiques correctes pour l'énergie d'un atome d'un électron tant relativiste que non relativiste. La quantification EBK a été appliquée aux exemples unidimensionnels, aux formulations de défauts quantiques, aux oscillateurs harmoniques unidimensionnels, aux atomes dans un fort champ magnétique, etc. (voir l'article suivant [118]).

En conclusion, une méthode simple et semi-classique pour obtenir des résultats corrects en mécanique quantique sans évoquer les mathématiques complètes de l'équation de Schrödinger est fourni par la quantification de l'action d'Einstein-Brillouin-Keller. Même si cette approche est un outil bien connu dans la théorie atomique et moléculaire, son utilité et sa valeur ont été largement négligées dans la littérature.

## ANNEXE D

### LISTE DES ARTICLES

- N. Korichi, A. Boumali, H. hassanabadi, *Physica. A* 2022, **587**, 126508.
- N. Korichi, A. Boumali, Y. Chargui, *J. Low Temp. Phys.* 2022, **206**, 32–50.
- A. Boumali, N. Korichi, *Phys. Part. Nuclei Lett.* (2023), **20** (published soon)



# Thermal properties of the one-dimensional space quantum fractional Dirac Oscillator

Nabil Korichi<sup>a</sup>, Abdelmalek Boumali<sup>a,\*</sup>, Hassan Hassanabadi<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique, Université Larbi-Tébessi- Tébessa, Algeria

<sup>b</sup> Faculty of Physics, Shahrood University of Technology, Shahrood, P. O. Box: 3619995161-316, Iran

## ARTICLE INFO

### Article history:

Received 24 April 2021

Received in revised form 10 August 2021

Available online 13 October 2021

### Keywords:

Fractional formalism

Dirac oscillator

Fractional Harmonic oscillator

Semi-classical approximation

## ABSTRACT

In this paper, we investigate the fractional version of the one-dimensional relativistic oscillators. We apply some important definitions and properties of a new kind of fractional formalism on the Dirac oscillator (DO). By using a semiclassical approximation, the energy eigenvalues have been determined for the oscillator. The obtained results show a remarkable influence of the fractional parameter on the energy eigenvalues. By considering a unique energy spectrum, we present a simple numerical computation of the thermal properties of a defined energy spectrum of a system. the Euler–Maclaurin formula has been used to calculate the partition function and therefore the associated thermodynamics quantities. In addition, the eigensolutions of the fractional Dirac oscillator, based on the factorization method, have been determined.

© 2021 Elsevier B.V. All rights reserved.

## 1. Introduction

Over the recent few years, a lot of attention has been given by both physicists and mathematicians to different generalizations of the Schrödinger equation to the case of the fractional order differential operators. The fractional calculus provides a set of axioms and methods to extend the coordinate and corresponding derivative definitions from integer  $n$  to arbitrary order  $\alpha$ ,  $\left\{x^n, \frac{\partial^n}{\partial x^n}\right\} \rightarrow \left\{x^\alpha, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right\}$ ,  $x > 0$  in a reasonable way [1].

The concept of fractional calculus originated from Leibniz, has gained increasing interest during the last two decades. However, only during the last decade have scientific papers concerning fractional quantum mechanics appeared. Application of the fractional calculus to standard quantum mechanics is a new and fast-developing part of quantum physics and the fractional calculus with a variety of applications is a well-developed and well-established field that was extensively reviewed [2–11].

The idea of using fractional concepts has attracted many researchers in numerous fields of physics and mathematics. Moreover, a huge number of applications have been extended to other disciplines including cosmology, engineering, finance, and biology [9]. Among them, we can cite the following works: (i) the problem of the fractional Schrödinger equation for the infinite potential [12–15] well, (ii) the fractional Bohr atom [16–18], (iii) the fractional Schrödinger equation for three-dimensional motion, (iv) New scattering features in non-Hermitian space fractional quantum mechanics [19], (v) Tunneling time in space fractional quantum mechanics [20], (vi) Fractional evolution in quantum mechanics [10], (vii) A fractional Dirac equation and its solution [21], fraction quantum optics [22], statistical mechanics [23] and solutions of some quantum systems [24] and Infrared spectroscopy of diatomic molecules [25].

\* Corresponding author.

E-mail addresses: [nabil.korichi@univ-tebessa.dz](mailto:nabil.korichi@univ-tebessa.dz) (N. Korichi), [abdelmalek.boumali@univ-tebessa.dz](mailto:abdelmalek.boumali@univ-tebessa.dz) (A. Boumali), [hha1349@gmail.com](mailto:hha1349@gmail.com) (H. Hassanabadi).



# Statistical Properties of the 1D Space Fractional Klein–Gordon Oscillator

Nabil Korichi<sup>1</sup> · Abdelmalek Boumali<sup>1</sup> · Yassine Chargui<sup>2</sup>

Received: 26 April 2021 / Accepted: 11 October 2021

© The Author(s), under exclusive licence to Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2021

## Abstract

In this paper, we investigate the quantum fractional of the one-dimensional Klein–Gordon oscillator. By using a semiclassical approximation, the energy eigenvalues have been determined for oscillators. The obtained results show a remarkable influence of the fractional parameter  $\alpha$  on the energy eigenvalues. By considering a unique energy spectrum, we present a simple numerical computation of the thermal properties of a defined energy spectrum of a system. The Euler–Maclaurin formula has been used to calculate the partition function and therefore the associated thermodynamics quantities. Besides this, we also calculate the eigenfunctions of our problem. The influence of the parameter  $\alpha$  on these functions as well as the probability of density has been tested.

**Keywords** Fractional formalism · Klein–Gordon oscillator (KGO) · Semiclassical approximation

## 1 Introduction

Fractional calculus was established as an attempt to answer the question: Is it meaningful to have a non-integer derivative (or even integral) orders? So, it is concerned with the generalization of differentiation and integration to fractional orders. The

---

✉ Abdelmalek Boumali  
abdelmalek.boumali@univ-tebessa.dz; boumali.abdelmalek@gmail.com

Nabil Korichi  
nabil.korichi@univ-tebessa.dz; marthipmarthip23011991@gmail.com

Yassine Chargui  
yassine.chargui@gmail.com

<sup>1</sup> Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique, Université Larbi-Tébessi- Tébessa, Tébessa, Algeria

<sup>2</sup> Department of Physics, College of Science and Arts at Ar Rass, Qassim University, PO Box 53, Ar Rass 51921, Saudi Arabia

# On the Thermal Properties of the One-Dimensional Space Fractional Duffin–Kemmer–Petiau Oscillator

Abdelmalek Boumali<sup>a, \*, \*\*</sup> and Nabil Korichi<sup>a, \*\*\*, \*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup> *Laboratory of Applied and Theoretical Physics, Larbi-Tebessi University, Tebessa, Algeria*

\**e-mail: abdelmalek.boumali@univ-tebessa.dz*

\*\**e-mail: boumali.abdelmalek@gmail.com*

\*\*\**e-mail: nabil.korichi@univ-tebessa.dz*

\*\*\*\**e-mail: marthipmarthip23011991@gmail.com*

Received March 18, 2022; revised November 15, 2022; accepted November 18, 2022

**Abstract**—In this paper, we investigate the fractional version of the Duffin–Kemmer–Petiau oscillator (DKP) in one dimension. By using a semi-classical approximation, the eigenvalues of the oscillator in question have been determined. The results obtained show a remarkable influence of the fraction parameter on the energy spectrum of scalar and vector particles. With the help of the form of the spectrum of energy, we will have direct access to the numerical calculation of the thermodynamic quantities of our system concerned. These quantities were obtained on the basis of the Euler–Maclaurin formula. Additionally, on the basis of the fractional derivative of Riesz–Feller, the eigensolutions were also determined. The influence of the parameter  $\alpha$  on these functions has been tested.

**DOI:** 10.1134/S1547477123020127

## 1. INTRODUCTION

In relativistic quantum mechanics, the exact solutions of motion equations are very important in the understanding of physics that may be provided by such solutions.

After the success of the Dirac equation in describing the relativistic particles of spin-1/2, many people began to work on trying to find a similar first order wave equation for spin-0 particles and spin-1 particles. They thought that such a formalism would be preferable to the second order Klein–Gordon equation for spin-0 particles and to the second order Proca equation for spin-1 particles [1].

The first major effort was initiated by de-Broglie, who based his original investigations on  $16 \times 16$  matrices that were products of Dirac  $\gamma$  matrix spaces. Petiau [2] worked on the problem and was the first to obtain the  $16 \times 16$  DKP algebra. Geheniav decomposed the algebra into the five, ten and trivial one dimensional representations. Kemmer realized that the Proca equations could be described as a set of coupled first-order equations. Finally, Duffin [3] put the spin-0 and spin-1 equations in a first order  $\beta$ -matrix form. Kemmer [4] extend his theory and write his well known paper.

In the conventional relativistic approach, the interaction of  $S = 0$  and  $S = 1$  hadrons with different nuclei has been described by the second-order Klein–

Gordon (KG) equation for  $S = 0$  and Proca equation for  $S = 1$  particles. In recent years, considerable interest in has been devoted to examining the interactions of particles have the spin  $S = 0$  and  $S = 1$  by using the first-order relativistic Duffin–Kemmer–Petiau equation [5–26]. These examples, among others in the literature, in some cases break the equivalence between the theories based on the DKP and KG and Proca equations.

Over the recent few years, a lot of attention has been given by both physicists and mathematicians to different generalizations of the Schrödinger equation to the case of the fractional order differential operators. The fractional calculus provides a set of axioms and methods to extend the coordinate and corresponding derivative definitions from integer  $n$  to arbitrary order  $\alpha$ ,  $\left\{x^n, \frac{\partial^n}{\partial x^n}\right\} \rightarrow \left\{x^\alpha, \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right\}$ ,  $x > 0$  in a reasonable way [27].

The concept of fractional calculus originated from Leibniz, has gained increasing interest during the last two decades. However, only during the last decade have scientific papers concerning fractional quantum mechanics appeared. Application of the fractional calculus to standard quantum mechanics is a new and fast-developing part of quantum physics and the fractional calculus with a variety of applications is a well developed and well established field that was exten-

