



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE



**Université Laarbi Tébessi- Tébessa**

**Faculté des sciences exactes et sciences de la nature et de la vie**

**Département des Mathématiques et Informatique**

## **THESE**

Présentée pour l'obtention du diplôme de

### **Doctorat L.M.D**

**Option : Mathématiques appliquées**

Par

**Lotfi JOUINI**

Intitulée

### **Quantification et synchronisation du chaos dans les systèmes dynamiques discrets**

Soutenue le : 11/02/2021

Devant le Jury composé de :

- Mr. REBAI Belgacem	PROF.	Université de Tébessa	Président
- Mr. OUANNAS Adel	M.C.A	Université de Tébessa	Rapporteur
- Mr. HANNACHI Fareh	M.C.A	Université de Tébessa	Examineur
- Mr. BOUZNEDA Ismail	PROF.	Université de Tébessa	Examineur
- Mr. SAOUDI Khaled	PROF.	Université de Khenchela	Examineur
- Mm. REZZAG Samia	M.C.A	Université d'Oum El Bouaghi	Examineur

Année universitaire : 2020/2021

## ملخص:

في هذه الأطروحة تطرقنا إلى الأنظمة الديناميكية المتقطعة الفوضوية بنوعيتها الصحيحة والكسرية ودراسة فوضويتها اعتمادا على ثوابت ليابونوف وكذلك دراسة استقرارها ومزامنتها حيث تم تطوير أنماط جديدة للمزامنة الفوضوية واستحداث تعميم لنظام فوضوي بسيط إلى نظام كسري باستعمال الحساب الكسري.

**الكلمات المفتاحية:** الأنظمة الديناميكية المتقطعة، الحساب الكسري، الفوضى، الاستقرار، ثوابت ليابونوف، المزامنة.

## Résumé:

Dans cette thèse, nous avons discuté les systèmes dynamiques discrets avec ses deux sortes d'ordre entier et d'ordre fractionnaire en étudiant leur chaoticité à l'aide des exposants de Lyapunov ainsi que leur stabilité et leur synchronisation, de nouveaux modèles de synchronisation anarchique ont été développés et une généralisation d'un système chaotique discret d'ordre fractionnaire a été introduite à partir d'un système discret simple en utilisant le calcul fractionnaire

**Mots clés:** Systèmes dynamiques discrets, calcul fractionnaire, chaos, stabilité, exposants de Lyapunov, synchronisation.

## Abstract

In this thesis, we have discussed discrete dynamical systems with its two kinds of integral order and fractional order by studying their chaoticity using the Lyapunov exponents as well as their stability and synchronization, new models of anarchic synchronization have been developed and a generalization of a fractional order discrete chaotic system was introduced from a simple discrete system using the fractional calculus.

**Key words:** Discrete dynamical systems, fractional calculus, chaos, stability, Lyapunov exponents, synchronization.

# Remerciements

C'est Daniel Defoe qui disait que « *tout nos tourments sur ce qui nous manque [...] semblent procéder du défaut de gratitude pour ce que nous avons.* ». Voilà quelques mots d'une simplicité élémentaire mais d'une profondeur inouïe. Soyons donc reconnaissant et louons Allah tout puissant pour sa miséricorde. Ce travail n'aurait sans doute pas pu aboutir sans Sa grâce.

Ce travail est ensuite la conséquence de l'accompagnement rigoureux dont a fait preuve Dr. OUANNAS Adel. Je lui dois une expérience unique et des apprentissages bien marquants. Nos remerciements sont aussi adressés aux membres du jury. Prof. REBAI Belgacem, Dr. OUANNAS Adel, Dr. HANNACHI Fareh, Prof. BOUZNEDA Ismail, Prof. SAOUDI Khaled et Dr. REZZAG Samia qui ont accepté d'évaluer ce travail.

Nous n'oublions pas le chef du comité scientifique de la faculté Prof. FEHDI Chemseddine et le chef du comité scientifique du département Dr. LAIMECHE Lakhdar ainsi que Prof. BENDJENNA Hakim le chef du laboratoire de recherche LAMIS pour leur assistance administrative et académique.

Nous remercions chaleureusement toutes les personnes qui nous ont aidé pendant l'élaboration de ma thèse et notamment le Prof. GOUAIDIA Layachiet Prof. ZARAI Abderrahmane et Dr. DERAIFIA Alla Eddine et Dr. HAFDALLAH Abdelhakim et Dr. NOUIOUA Tarek, pour leur aide leur intérêt : leur soutien et leurs nombreux conseils durant la rédaction de ma thèse.

L'aboutissement de ce travail, est le produit d'années de formation académique au sein de notre département. Nous remercions donc nos enseignants en conséquence Prof. AKROUT Kamel, Dr. BOUMAAZA Nouri, Prof. HAOUAM Kamel, Prof. ZERAOULIA Elhedj, Dr. DEGAICHIA Hakima, Dr. BOUKHELFAEI Hafsi, Dr. GASRI Ahlem, Dr. MERGHEDI Faycel, Dr. MESLOUB Fatiha, Dr. DEGAICHI Nouar. Ainsi que Dr. AMROUNE Ahmed, Dr. GUETTEL Abdeldjalil et Dr. DJEDDI Chaouki pour ce qu'ils m'ont apporté en matière de programmation.

Enfin, nous remercions nos camarades de promotion et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de cette thèse de doctorat.

# Dédicaces

A mes parents, Brahim et Ghalia, pour vos sacrifices. Je suis heureux de voir combien vous êtes fier de l'homme que vous avez élevé.

A la mémoire de l'irremplaçable et de l'incalculable frère que tu étais. Adel puisses-tu reposer en paix. J'aurai aimé t'avoir à mes côtés pour voir à quel point le sentier que tu m'avais tracé a pris de l'ampleur et de la concrétisation.

A mon épouse, qui m'a épaulé autant que faire se peut et à son père qui m'a encouragé d'une voix qui se voulait paternelle.

A ma sœur unique aussi maternelle à mon égard que ma propre mère, je suis heureux de dessiner sur ton visage un sourire de satisfaction.

A mes frères aînés Lamine et Sadek toujours enthousiastes de me voir gravir les échelons. Aujourd'hui encore vos gestes et vos mots me donnent l'envie et le courage d'avancer plus loin.

A mes frères cadets Abdelhakim et Azzedine, toujours là pour fêter les meilleurs moments de ma vie.

A mes nièces et mes neveux que j'ai vu grandir et que j'espère voir réussir.

Au directeur de mon établissement de fonction, Harketi Tahar, toujours prêt à m'excuser au nom de la quête du savoir mes comportements par moments indisciplinés.

A mes amis, Toufik ; Aziz, Hakim, Hicham, Karim, Abdou que j'affectionne comme des frères.

# Table des figures

2.1	Attracteur étrange de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ . . . . .	27
2.2	L'évolution des états du système de Hénon pour les 100 premières itérations . . .	28
2.3	Diagramme de bifurcation du système de Hénon . . . . .	28
2.4	L'évolution des exposants de Lyapunov du système de Hénon en fonction du pa- ramètre $a$ . . . . .	29
2.5	Les exposants de Lyapunov du système de Hénon pour $a = 1.4$ et $b = 0.3$ . . . . .	29
2.6	L'attracteur hyperchaotique du système de Stefanski pour $\alpha = 1.4$ et $\beta = 0.2$ . . .	30
2.7	L'évolution des états du système de Stefanski pour les 100 premières itérations. . .	31
2.8	Diagramme de bifurcation du système de Stefanski. . . . .	31
2.9	L'évolution d'exposant maximal de Lyapunov du système de Stefanski. . . . .	32
2.10	Les exposants de Lyapunov du système de Stefanski pour $\alpha = 1.4$ et $\beta = 0.2$ . . . .	32
2.11	L'attracteur étrange du système discret fractionnaire de Lozi pour $(x(0), y(0)) =$ $(0, 0)$ , $a = 1.7$ , $b = 0.5$ , $v = 0.98$ . . . . .	33
2.12	L'attracteur étrange du système discret fractionnaire de Rössler pour $(x(0), y(0), z(0)) =$ $(0.1, 0.2, -0.5)$ et $v = 0.903$ . . . . .	35
3.1	L'attracteur chaotique du système (3.13) pour $(a, b) = (-0.1, 0.7)$ . . . . .	44
3.2	L'attracteur hyperchaotique du système incontrôlé(3.14) quand $(c, d) = (1.07, 0.3)$ . .	45
3.3	L'évolution des erreurs de synchronisation $e_1$ et $e_2$ entre le système maître (3.13) et le système esclave (3.14). . . . .	46
3.4	L'attracteur chaotique du système (3.25) pour $(a; b) = (1.25, 0.75)$ . . . . .	48
3.5	L'attracteur chaotique du système incontrôlé (3.26) pour $(c, d) = (1.4, 0.2)$ . . . . .	49
3.6	L'évolution des erreurs de synchronisation $e_1, e_2$ et $e_3$ entre le système maître (3.25) et le système esclave (3.26). . . . .	50

3.7	L'évolution des erreurs de synchronisation (3.34). . . . .	53
3.8	L'évolution des erreurs de synchronisation (3.38). . . . .	55
3.9	(a) L'attracteur chaotique du système (3.39) dans : (a) le plan $x - y$ (b) le plan $x - z$ (c) l'espace $x - y - z$ . . . . .	56
3.10	(a) Le diagramme de bifurcation du système (3.39); (b) L'exposant maximal de Lyapunov . . . . .	56
3.11	(a) Bifurcation du système fractionnaire (3.41) d'ordre fractionnaire $v$ ; (b) Exposant maximal de Lyapunov en fonction d'ordre fractionnaire $v$ . . . . .	58
3.12	Diagramme de bifurcation dans le plan $(a, x)$ pour $b = 0.5$ quand : (a) $v = 0.987$ , (b) $v = 0.975$ . . . . .	59
3.13	L'orbite périodique obtenue pour $n = 2000$ et $v = 0.975$ dans : (a) le plan $x - y$ ; (b) le plan $x - z$ ; (c) l'espace $x - y - z$ . . . . .	59
3.14	L'attracteur chaotique obtenu pour $n = 2000$ et $v = 0.987$ dans : (a) le plan $x - y$ ; (b) le plan $x - z$ ; (c) l'espace $x - y - z$ . . . . .	60
3.15	L'attracteur chaotique obtenu pour $n = 2000$ et $v = 0.9695$ dans : (a) le plan $x - y$ ; (b) le plan $x - z$ ; (c) l'espace $x - y - z$ . . . . .	60
3.16	L'évolution des états du système fractionnaire pour $v = 0.987$ . . . . .	60
3.17	Les états stabilisés et l'attracteur du système fractionnaire (3.41). . . . .	62
3.18	Le comportement chaotique du système fractionnaire (3.48). . . . .	63
3.19	L'évolution des états des systèmes maître et esclave (3.48)-(3.49) après le contrôle. . . . .	65

# Table des matières

Table des figures	i
Table des matières	iii
Introduction	1
<b>1 Systèmes dynamiques discrets : entiers et fractionnaires</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction . . . . .	5
1.2 Systèmes dynamiques discrets entiers . . . . .	5
1.2.1 Notions de base . . . . .	5
1.2.2 Stabilité des systèmes discrets entiers . . . . .	7
1.2.3 Bifurcations . . . . .	10
1.3 Systèmes dynamiques discrets fractionnaires . . . . .	13
1.3.1 Bref historique . . . . .	13
1.3.2 Calcul discret fractionnaire . . . . .	13
1.3.3 Stabilité des systèmes discrets fractionnaires . . . . .	15
1.4 Conclusion . . . . .	18
<b>2 Chaos et synchronisation</b>	<b>20</b>
2.1 Introduction . . . . .	20
2.2 Théorie du chaos . . . . .	21
2.2.1 Définitions du chaos . . . . .	21
2.2.2 Caractéristiques du chaos . . . . .	22
2.2.3 Scénarios de transition vers le chaos . . . . .	25
2.2.4 Exemples des systèmes chaotiques discrets . . . . .	26

2.3	Théorie de synchronisation . . . . .	34
2.3.1	Types de synchronisation . . . . .	35
2.3.2	Méthode du contrôleur actif . . . . .	37
2.4	Conclusion . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Nouveaux résultats et contributions</b>	<b>39</b>
3.1	Introduction . . . . .	39
3.2	synchronisation hybride généralisée . . . . .	40
3.2.1	Définitions des synchronisations FSHPS et IFSHPS . . . . .	41
3.2.2	Coexistence de FSHPS et IFSHPS en 3D . . . . .	45
3.3	Synchronisation développée et réduite . . . . .	50
3.3.1	Système maître et esclave . . . . .	51
3.3.2	Synchronisation en 3D . . . . .	51
3.3.3	Synchronisation en 2D . . . . .	53
3.4	Système fractionnaire tridimensionnel généralisé de Hénon . . . . .	55
3.4.1	La dynamique du système . . . . .	55
3.4.2	Stratégie du contrôle . . . . .	59
3.5	Conclusion . . . . .	64
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>66</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>68</b>



# Introduction

Aussi loin que l'on puisse remonter dans l'histoire, l'existence de l'homme a toujours été apparentée à la prédiction du futur, quoi que d'abord de propension métaphysique. Cette dernière avait pour vocation d'expliquer « le mouvement ». C'est cela qui a constitué les prémices d'une mécanique céleste. Ce sont là historiquement, les premières questions liées aux systèmes dynamiques.

Cette thèse traite une nouvelle classe des systèmes dynamiques dans laquelle le temps est discret. Ces systèmes sont connus sous divers noms notamment équations aux différences, relations de récursivité, fonctions itérées ou simplement systèmes dynamiques discrets et qui se présentent comme un outil d'analyse de stabilité des solutions périodiques des équations différentielles. Les systèmes dynamiques discrets peuvent aussi modéliser des phénomènes naturels. Dans certains contextes scientifiques il est naturel de considérer le temps comme discret. C'est le cas en électronique, économie, finance, mécanique, et dans l'étude de certaines populations animales.

L'étude des systèmes dynamiques est encore à ses balbutiements, mais des progrès passionnants ont été réalisés au cours des vingt dernières années [1, 2, 3, 4], grâce à la disponibilité croissante des calculatrices, puis des ordinateurs, et maintenant de l'infographie. Les systèmes dynamiques sont faciles à simuler numériquement sur des ordinateurs quand le temps est intrinsèquement discret. De telles simulations numériques ont révélé un certain nombre de motifs magnifiques et inattendus dits attracteurs, qui à leur tour ont stimulé de nouveaux développements théoriques [5, 6]. Plus surprenant, les systèmes dynamiques discrets ont généré un certain nombre de prédictions réussies sur les routes de transition vers le chaos dans les semi-conducteurs, les fluides de convection, les cellules cardiaques, les lasers et les oscillateurs chimiques, etc.

Avec le développement rapide du calcul fractionnaire, de nombreux travaux, y compris le

---

chaos, le contrôle et la synchronisation des systèmes continus d'ordre fractionnaire ont été signalés [7 – 14]. Il convient de souligner que les systèmes discrets fractionnaires n'ont pas fait l'objet d'une attention suffisante et n'ont pas proprement été explorés jusqu'à récemment. En 1974, Diaz et Olser ont présenté pour la première fois la différence fractionnaire, qui fait apparaître de nouveaux systèmes discrets d'ordre fractionnaires et des comportements dynamiques plus abondants et complexes. En outre, il a été découvert que les systèmes discrets d'ordre fractionnaire sont sensibles non seulement à la faible perturbation des paramètres et des conditions initiales, mais également à la variation d'ordre fractionnaire, qui est l'avantage unique des systèmes discrets d'ordre fractionnaire, qui fait de ces derniers un objet plus convenable au chiffrement des données et aux communications sécurisées.

Néanmoins, c'est seulement depuis leur introduction dans le domaine de la recherche mathématique au cours du dernier siècle, que l'étude des systèmes dynamiques a réellement suscité un intérêt grandissant [15, 16, 17]. En effet, leur importance tient au fait qu'elles permettent de représenter, puis d'étudier, l'évolution dans le temps d'un véritable système physique, à partir des conditions initiales.

En général un système dynamique est constitué d'un espace des phases. Un espace de phase est un espace dans lequel tous les états possibles d'un système sont représentés. Ces états qui correspondent à un point unique dans cet espace, sont liés entre eux avec une équation dite d'évolution qui décrit l'évolution à court terme des états du système dans l'espace des phases.

On la décrit grâce aux équations différentielles pour les systèmes continus et grâce aux équations de récurrence pour les systèmes discrets et c'est cela qui nous intéresse.

En effet, les équations de récurrence, de part leur aptitude à l'informatisation et leur simplicité mathématique, sont de plus en plus utilisées comme modèles dans de nombreuses disciplines, notamment la génétique, l'épidémiologie, l'écologie, la physiologie, les réseaux de neurones, la psychologie, l'ingénierie, la physique, la chimie et les sciences sociales. Développer les connaissances à ce sujet devient donc une nécessité [18, 19, 20].

L'objectif est de passer d'une explicitation à court terme supposée au départ à une compréhension à long terme et même à très long terme au cas où le calcul nécessiterait des ordinateurs.

Dans les années soixante l'observation faite par le météorologue Lorenz a prouvé que des systèmes déterministes pouvaient être intrinsèquement imprévisibles. En effet, des variations minimes des valeurs initiales des variables de son modèle météorologique informatique à douze variables pouvaient entraîner des schémas météorologiques très divergents. Ainsi, plus on avancerait dans le futur, plus les prévisions deviendraient inexactes et cela à cause de la sensibilité aux conditions initiales. Les systèmes semblables sont chaotiques.

---

A partir de là, savoir que des lois dynamiques simples donneraient naissance à des comportements très compliqués a contribué à la formation de la « science du chaos ». Parallèlement, les résultats des autres disciplines ont appuyé des résultats mathématiques du XIXème siècle . On parle surtout de la théorie fondée par Henri Poincaré.

En 1988, les systèmes discrets chaotiques d'ordre fractionnaire ont été mis en avant puisqu'ils ont été considérés comme une généralisation des systèmes chaotiques discrets d'ordre entier et que le calcul discret fractionnaire soit devenu un sujet d'intérêt [21 – 26]. Alors, il a été prouvé que le rôle d'un paramètre est joué par l'ordre fractionnaire et que ce dernier agissait sur le comportement du système fractionnaire.

Parallèlement aux travaux sur le chaos, une autre branche développée dans le domaine des systèmes dynamiques attire l'intérêt des chercheurs scientifiques, c'est la synchronisation. Ce phénomène est devenu un sujet de recherche active [27 – 30], lié au développement de la télécommunication [31, 32], il a connu des améliorations très remarquables au début du XIXème siècle. En 1990, Carroll et Pecora, pionniers de la synchronisation, ayant comme idée d'employer un signal chaotique entre deux systèmes dynamique identiques. Le premier système produisant le signal chaotique, s'appelle le système émetteur (maître), le deuxième est le système récepteur (esclave), c'était la synchronisation chaotique.

Le sujet principal de cette thèse concerne l'étude et la synchronisation du chaos dans les systèmes dynamiques discrets. Les principales idées visées de cette thèse sont :

- 1- Quantifier le chaos dans quelques systèmes dynamiques discret d'ordre entier et fractionnaire.
- 2- Création des nouveaux systèmes discrets chaotiques d'ordre fractionnaire à partir des systèmes discrets d'ordre entier connus.
3. Développement de nouveaux schémas de synchronisation pour les systèmes discrets chaotiques (hyperchaotiques).
4. Proposition de nouveaux types de synchronisation chaotique dans le cas des systèmes discrets fractionnaires.

Le travail est donc structuré en trois chapitres :

**Le premier chapitre :** est consacré aux systèmes dynamiques discrets d'ordre entier et fractionnaire en discutant : les points fixes, les orbites, les points périodiques, les bifurcations et la stabilité.

**Le deuxième chapitre :** on fait appel dans une première section à la théorie du chaos avec ses multiples caractéristiques enrichie des exemples des systèmes discrets d'ordre entier et fractionnaire. Une deuxième section concerne la théorie de synchronisation chaotique avec ses

---

différents types les plus permanents en traitant que la méthode du contrôleur actif utilisé ici.

**Le troisième chapitre :** présente la partie fondamentale de cette thèse et constitué de trois nouveaux résultats : la synchronisation hybride généralisé, la synchronisation réduite et développée et le système fractionnaire tridimensionnel généralisé de Hénon.

# Chapitre 1

## Systemes dynamiques discrets : entiers et fractionnaires

### 1.1 Introduction

Ce chapitre se divise en deux grandes lignes, une première vise les notions préliminaires et les propriétés élémentaires nécessaires des systèmes dynamiques discrets d'ordre entier, en étudiant leur stabilité dans le cas linéaire et non-linéaire, et en citant les différents types des bifurcations. Une deuxième ligne est consacrée aux systèmes dynamiques discrets d'ordre fractionnaire après avoir cité les définitions et les théorèmes requis du calcul discret fractionnaire et d'analyse de stabilité.

### 1.2 Systemes dynamiques discrets entiers

#### 1.2.1 Notions de base

**Définition 1.1** Soit  $x_k \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$  et  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une application continue. On définit un système dynamique discret par une equation de différence

$$x_{k+1} = F(x_k). \quad (1.1)$$

Si l'application  $F$  dépend d'un paramètre  $c$  on écrit  $F_c(x_k)$  et disons que  $F_c$  est une famille des applications à un paramètre.

Pour un  $x_0$  donné, les itérations successives de l'application  $F$  donnent :

$$x_1 = F(x_0), x_2 = F(x_1) = F(F(x_0)) = F^2(x_0), x_3 = F(x_2) = F(F^2(x_0)) = F^3(x_0), \dots$$

donc après  $n$  itérations  $x_{n+1} = F^n(x_0)$ .

### point fixe

**Définition 1.2** Un point fixe  $x_f$  d'une application  $F$  est un point qui satisfait l'équation

$$x_f = F(x_f). \quad (1.2)$$

**Géométriquement :** Le point fixe est une intersection de la courbe de notre fonction  $y = F(x)$  avec la bissectrice  $y = x$ .

**Remarque 1.1** Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points d'équilibre. Soit  $x_f$  un point fixe de l'équation (1.1),  $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$  les valeurs propres de la matrice jacobienne  $DF(x)$  associée.

1.  $x_f$  un point fixe **hyperbolique** si  $|\lambda_i| \neq 1, \forall i \in [1; n]$ .
2.  $x_f$  un point fixe **elliptique** si  $|\lambda_i| = 1, \forall i \in [1; n]$ .

### Orbite

**Définition 1.3** L'orbite de  $x$  d'un système dynamique  $F$  est définie par :

$$O = \{F^k(x), k \in \mathbb{N}\}. \quad (1.3)$$

### Points périodiques et p-cycles

**Définition 1.4** On dit que  $x$  est un point périodique de période  $p$  s'il existe  $p \geq 1$ , tel que

$$F^p(x) = x. \quad (1.4)$$

L'ensemble  $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$  est un cycle d'ordre  $p$  (ou une orbite périodique d'ordre  $p$ , ou un  $p$ -cycle), vérifiant :

$$\begin{aligned} F(x_i) &= x_{i+1}, i = 0, 1, \dots, p-1, \\ F(x_{p-1}) &= x_0, \\ F^p(x_i) &= x_i, i = 0, 1, \dots, p-1. \end{aligned}$$

**Remarque 1.2 1-** Les  $p$  éléments d'une orbite de période  $p$  correspondent aux points fixes propres de  $F^p$ , c'est-à-dire les points fixes qui ne sont fixes que pour  $F_c^p$ .

2- un point fixe peut être considéré comme un point périodique de période une.

## 1.2.2 Stabilité des systèmes discrets entiers

L'étude du comportement d'un système dynamique discret, correspond à l'étude de stabilité des points fixes et des points périodiques. Soit le système dynamique non-linéaire défini par

$$x_{k+1} = F(x_k), \tag{1.5}$$

dont son point fixe est  $x_f$ .

**Définition 1.5** Le système (1.5) est dit stable au sens de Lyapunov par rapport au point fixe  $x_f$  si pour des conditions initiales  $x_0$  suffisamment proches du point fixe on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0 - x_f\| < \delta \implies \|x_k - x_f\| < \epsilon. \tag{1.6}$$

Pour résumer, un point fixe  $x_f$  est attractif si la suite  $(F^n(x))_{\mathbb{N}}$ ,  $x$  dans un voisinage de  $x_f$ , converge vers  $x_f$  tandis qu'il est répulsif si cette suite s'en éloigne.

### Stabilité des systèmes linéaires

**Définition 1.6** Un système dynamique discret linéaire est une application

$$x_{k+1} = Ax_k, \tag{1.7}$$

dont la solution est une trajectoire donnée par

$$x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) = (x_0, Ax_0, A^2x_0, \dots, A^kx_0, \dots),$$

où  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

**Théorème 1.1** [33] *0 est asymptotiquement stable si et seulement si le module des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $A$  est strictement inférieur à un.*

### Stabilité des systèmes non-linéaires

Si le système dynamique discret est non-linéaire on se sert au procédès de linéarisation au voisinage des points d'équilibre afin de pouvoir prévoir son comportement.

Considérons l'équation non-linéaire unidimensionnelle générale du premier ordre

$$x_{k+1} = F_c(x_k), \tag{1.8}$$

où  $c$  est un paramètre. Le point fixe  $x_f$  satisfait  $x_f = F_c(x_f)$ .

Afin d'étudier le système au voisinage de  $x_f$  on écrit  $x_k = x_f + h_k$  et développons  $F_c$  en séries de Taylor au voisinage de  $x_f$  en prenant seulement les termes linéaires. Donc :

$$x_f + h_{k+1} = F_c(x_f) + \frac{dF_c}{dx}(x_f)h_k, \tag{1.9}$$

ce qui donne

$$h_{k+1} = \frac{dF_c}{dx}(x_f)h_k. \tag{1.10}$$

On appelle cette equation la linéarisation de l'équation  $x_{k+1} = F_c(x_k)$ .

**Théorème 1.2** [33] *Considérons l'équation de linéarisation (1.10).*

- 1- Si  $\left| \frac{dF_c}{dx}(x_f) \right| < 1$ , le point fixe  $x_f$  est stable.
- 2- Si  $\left| \frac{dF_c}{dx}(x_f) \right| > 1$ , le point  $x_f$  est instable.
- 3- Si  $\left| \frac{dF_c}{dx}(x_f) \right| = 1$ , aucune conclusion n'est tirée.

On peut se donner à généraliser cette définition pour des systèmes multidimensionnels,

Considérons l'équation non-linéaire générale du premier ordre

$$x_{k+1} = F_c(x_k), \tag{1.11}$$

où  $F : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , avec  $m \in \mathbb{N}$  est une application non-linéaire  $m$ -dimensionnelle différentiable par rapport à toutes les variables d'état du système définies sur un sous-ensemble ouvert autour d'un point fixe  $x_f$ ,  $D$  est un sous ensemble et  $c$  est un vecteur des paramètres.  $x_f$  devient dans ce cas un vecteur en fonction des variables d'état satisfaisant  $x_f = F(x_f)$ . En linéarisant ce système au voisinage de l'équilibre  $x_f$  on obtient

$$h_{k+1} = Ah_k. \tag{1.12}$$



où  $A$  est la matrice jacobienne évaluée en  $x_f$ . Et  $\lambda_i$  avec  $1 \leq i \leq m$ , sont les valeurs propres associées à  $A$ .

**Théorème 1.3** [33] *Soit le système linéarisé dans (1.12) suivant*

$$h_{k+1} = Ah_k,$$

- 1- Si toutes les valeurs propres de  $A$  sont inférieures à un alors  $x_f$  est asymptotiquement stable.
- 2- S'il existe une valeur propre de  $A$  dont le module est supérieur à un alors  $x_f$  est instable.
- 3- S'il existe une valeur propre de  $A$  dont le module est égal à un alors aucune conclusion n'est tirée.

### Fonction de Lyapunov

La base de la théorie de Lyapunov est la fonction de Lyapunov associée à un système dynamique donné d'ordre entier.

**Théorème 1.4** [34] (*Existence d'une fonction de Lyapunov*) *Soit  $x = 0$  un point fixe du système autonome*

$$x_{k+1} = F(x_k),$$

où  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement Lipschitzienne dans  $D \subset \mathbb{R}^n$  et  $0 \in D$ . Supposons qu'il existe une fonction continue  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

$$V(0) = 0, \text{ et } V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\}, \quad (1.13)$$

$$V(F(x)) - V(x) \leq 0, \forall x \in D, \quad (1.14)$$

alors  $x = 0$  est stable. De plus si

$$V(F(x)) - V(x) < 0, \forall x \in D - \{0\}, \quad (1.15)$$

alors  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

**Définition 1.7** Une fonction  $V : D \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant (1.13) et (1.14) est dite une fonction de Lyapunov.

**Théorème 1.5** [34] (*Stabilité asymptotique globale de Lyapunov*) Soit  $x = 0$  un point fixe du système autonome

$$x_{k+1} = F(x_k),$$

où  $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est localement Lipschitzienne dans  $D \subset \mathbb{R}^n$  et  $0 \in D$ . Soit  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue tels que

$$V(0) = 0, \text{ et } V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\}, \quad (1.16)$$

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty, \quad (1.17)$$

$$V(F(x)) - V(x) \leq 0, \forall x \in D, \quad (1.18)$$

alors  $x = 0$  est asymptotiquement globalement stable.

**Remarque 1.3** 1- Notons que ce résultat nous permet de conclure le comportement global d'un système si certaines conditions sont remplies. C'est une conclusion très puissante pour pouvoir décrire son comportement. Les informations contenues dans la linéarisation d'un système ne peuvent généralement que nous renseigner sur le comportement local autour du point fixe sur lequel nous linéarisons.

2- Les résultats globaux sont normalement beaucoup plus difficiles à obtenir. Cependant, les résultats locaux sont bons à avoir et sont souvent satisfaisantes pour des applications données.

3- La définition de la fonction de Lyapunov pour les systèmes dynamiques discrets d'ordre entier est analogue à celle du cas continu, avec la variation servant le rôle dans le cas discret que la dérivée fait pour les systèmes continus.

4- Ces théorèmes explicités, peuvent être appliqués pour un point fixe différent de 0.

### 1.2.3 Bifurcations

**Définition 1.8** Soit le système dynamique défini par

$$x_{k+1} = F_c(x_k), \quad (1.19)$$

avec un point fixe  $x_f$  où  $x_k \in \mathbb{R}^n$  est la variable d'état et  $c \in \mathbb{R}^m$  est un paramètre de contrôle. On dit que le système (1.19) a une bifurcation en  $c = c_0$  s'il existe un changement qualitatif ou quantitatif de sa solution  $x_f$  lorsqu'on modifie le paramètre  $c$ .

**Définition 1.9** *Un diagramme de bifurcation est une représentation des portraits des phases en fonction du paramètre en question.*

### Types des bifurcations

Il existe plusieurs types de bifurcation selon les propriétés des secondes dérivées de la famille des fonctions  $F_c(x_k)$ . Chaque bifurcation est caractérisée par son équation générale typique [35, 36, 37]. Les différents types de bifurcations [38], pour les systèmes dynamiques discrets sont les bifurcations : **noeud-col (ou tangente, ou pli), transcritique, Pitchfork et la bifurcation de doublement de période (ou flip)**.

Considérons l'équation non-linéaire générale du premier ordre

$$x_{k+1} = F_c(x_k), \tag{1.20}$$

où  $F$  est définie de manière à avoir des dérivées continues par rapport à  $x$  et  $c$ . Alors on a les définitions suivantes :

### Bifurcation de type noeud-col (ou tangente, ou pli)

**Définition 1.10** *Nous disons qu'une bifurcation noeud-col s'est produite à  $c_0$  si*

1.  $F_{c_0}(x_f) = x_f$ ,
2.  $\frac{\partial F_{c_0}}{\partial x}(x_f) = 1$ ,
3.  $\frac{\partial^2 F_{c_0}}{\partial x^2}(x_f) \neq 0$ ,
4.  $\frac{\partial F_{c_0}}{\partial c}(x_f) \neq 0$ .

**Remarque 1.4 1-** *Cette bifurcation est aussi appelée point limite, bifurcation de noeud-col ou tangente.*

**2-** *La bifurcation noeud-col nécessite  $\frac{\partial F_c}{\partial c}(x_f) \neq 0$ . Si c'est pas le cas, c'est-à-dire,  $\frac{\partial F_c}{\partial c}(x_f) = 0$  mais autrement les autres conditions sont remplies alors soit une bifurcation transcritique soit une bifurcation Pitchfork peut avoir lieu.*

## Bifurcation transcritique

**Définition 1.11** Nous disons qu'une bifurcation transcritique s'est produite à  $c_0$  si

1.  $F_{c_0}(x_f) = x_f$ ,
2.  $\frac{\partial F_{c_0}}{\partial x_2}(x_f) = 1$ ,
3.  $\frac{\partial F_{c_0}}{\partial x^2}(x_f) \neq 0$ ,
4.  $\frac{\partial F_{c_0}}{\partial c}(x_f) = 0$ .

Sous une bifurcation transcritique deux équilibres distincts échangent leurs caractéristiques de stabilité. Donc si  $x_0$  est un équilibre stable et  $x_1$  un équilibre instable pour  $c < c_0$  où  $c_0$  est une valeur de bifurcation, alors pour  $c > c_0$ ,  $x_1$  serait stable tandis que  $x_0$  perdrait sa stabilité.

## Bifurcation Pitchfork

**Définition 1.12** Nous disons qu'une bifurcation Pitchfork s'est produite à  $c_0$  si

1.  $F_{c_0}(x_f) = x_f$ ,
2.  $\frac{\partial F_{c_0}}{\partial x}(x_f) = 1$ ,
3.  $\frac{\partial F_{c_0}^2}{\partial x^2}(x_f) = 0$ ,
4.  $\frac{\partial F_{c_0}}{\partial c}(x_f) = 0$ .

Dans ce cas, un équilibre stable (respectivement, instable) change sa stabilité et donne deux nouvelles branches d'équilibres qui prennent ses caractéristiques de stabilité antérieures.

## Bifurcation de doublement de période (ou flip)

**Définition 1.13** Nous disons qu'une bifurcation de doublement de période s'est produite à  $c_0$  si

1.  $F_c(x_f) = x_f, \forall c \in ]c_0 - \epsilon, c_0 + \epsilon[$  pour quelques  $c_0$  et  $\epsilon > 0$ ,
2.  $\frac{\partial F_{c_0}}{\partial x}(x_f) = -1$ ,
3.  $\frac{\partial^2 F_{c_0}}{\partial x \partial c}(x_f) \neq 0$ .

## Bifurcation de Neimark-Sacker

**Définition 1.14** La bifurcation correspondante à la présence de  $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ ,  $0 < \theta_0 < \pi$ , est appelée une bifurcation de Neimark-Sacker (ou tore).

**Remarque 1.5** Notons que les bifurcations pli et flip ont lieu si  $n \geq 1$ , mais pour la bifurcation Neimark-Sacker elle nécessite  $n \geq 2$ .

## 1.3 Systèmes dynamiques discrets fractionnaires

### 1.3.1 Bref historique

En 1695, Gottfried Leibniz et Guillaume L'Hôpital ont suscité la curiosité initiale de la théorie du calcul fractionnaire lors d'une correspondance sur la valeur et la signification possibles de dérivées d'ordre non entier. L'Hôpital demanda : "alors quelle serait la dérivée moitié de  $x$  ?" à laquelle a répondu Leibniz que la réponse "conduit à un paradoxe apparent, dont on tirera un jour des conséquences utiles" [39, 40], cette question a attiré les efforts combinés d'un certain nombre de mathématiciens vers la fin du XIXe siècle, notamment Liouville, Granwald, Letnikov et Riemann qui ont produit une théorie assez solide du calcul fractionnaire pour les fonctions d'une variable réelle [41 – 46]. En 1974, Diaz et Osler [47] ont introduit l'opérateur fractionnaire discret considéré comme une généralisation de la formule binomiale d'ordre  $N$  de l'opérateur différentiel  $\Delta^N$ . Le calcul discret fractionnaire a récemment suscité l'intérêt de Atici et Aloe [48, 49] qui ont proposé le calcul fractionnaire discret pour décrire la dynamique du temps discret, certains résultats ont été rapportés. Avec le progrès croissant dans le domaine du calcul fractionnaire, plusieurs études ont été effectuées sur la dynamique, le contrôle et les applications des systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire [50 – 54]. Mais ces dernières années, des applications de systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire dans de nombreux domaines de la science et de l'ingénierie ont été présentées, telles que le système viscoélastique [55], les ondes électromagnétiques [56] et dans le domaine de communication [57, 58, 59], et quelques nouveaux résultats des systèmes dynamiques discrets fractionnaires sont présentés [60 – 67].

### 1.3.2 Calcul discret fractionnaire

Dans cette section, on fait rappel de quelques théories nécessaires liées au sujet du calcul fractionnaire discret et stabilité des systèmes d'ordres fractionnaires.

**Définition 1.15** [68] *La fonction généralisée factorielle décroissante est définie par :*

$$t^{(v)} = \frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(t+1-v)}, \quad (1.21)$$

où  $\Gamma(\cdot)$  représente la fonction d'Euler et  $t + 1 - v$  n'est pas un pôle de la fonction  $\Gamma$ .

**Définition 1.16** [68] *Pour  $v > 0$  et  $u$  définie sur  $\mathbb{N}_a$ . La  $v$ -ième somme fractionnaire de  $\Delta_s u(t)$*

est définie par :

$$\Delta_a^{-v}u(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)}u(s), \quad (1.22)$$

où  $t \in \mathbb{N}_{a+v}$ .

**Définition 1.17** [68] Pour  $v > 0$  et  $u$  définie sur  $\mathbb{N}_a = \{a, a+1, \dots\}$ , la différence de Caputo est définie par :

$$\begin{aligned} {}^C\Delta_a^v u(t) &= \Delta_a^{-(m-v)} \Delta^m u(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-v)} \sum_{s=a}^{t-(m-v)} (t-s-1)^{(m-v-1)} \Delta^m u(s), \end{aligned} \quad (1.23)$$

où  $v \notin \mathbb{N}$  est l'ordre fractionnaire,  $t \in \mathbb{N}_{a+m-v}$ , et  $m = [v] + 1$ .

**Définition 1.18** [68] Pour une fonction donnée  $u : \mathbb{N}_a = \{a, a+1, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$ , l'opérateur de différence fractionnaire de Caputo d'ordre  $v \notin \mathbb{N}$  est donné par :

$${}^C\Delta_a^v u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-v)} \sum_{s=a}^{t-(1-v)} (t-s-1)^{-v} \Delta u(s), \quad (1.24)$$

où  $t \in \mathbb{N}_{a+1-v}$ .

**Théorème 1.6** [69] Pour l'équation de différence fractionnaire

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^v u(t) = f(t+v-1, u(t+v-1)), \\ \Delta^k u(a) = u_k \quad ; \quad n = [v] + 1; k = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (1.25)$$

L'équation intégrale discrète équivalente peut être obtenue par

$$u(t) = u_0(t) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+n-v}^{t-v} (t-s+1)^{v-1} f(s+v-1, u(s+v-1)), t \in \mathbb{N}_{a+n}, \quad (1.26)$$

où

$$u_0(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{(k)}}{\Gamma(k+1)} \Delta^k u(a). \quad (1.27)$$

### 1.3.3 Stabilité des systèmes discrets fractionnaires

Nous présentons dans cette section les théorèmes analysants la stabilité des systèmes discrets d'ordre fractionnaire.

#### Stabilité des systèmes fractionnaires linéaires

**Théorème 1.7** [70] *L'équilibre zéro du système discret d'ordre fractionnaire*

$${}^C\Delta_a^v X(t) = MX(t+v-1), \quad (1.28)$$

où  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ ,  $0 < v \leq 1$ ,  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\forall t \in \mathbb{N}_{a+1-v}$  est asymptotiquement stable si et seulement si

$$\lambda \in \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \left( 2 \cos \frac{|\arg z| - \pi}{2 - v} \right)^v \text{ et } |\arg z| > \frac{v\pi}{2} \right\}, \quad (1.29)$$

pour toutes les valeurs propres  $\lambda$  de  $M$ .

**Exemple 1.1** [71] *Soit le système dynamique discret d'ordre fractionnaire suivant :*

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^v x(t) = y(t-1+v) - x(t-1+v), \\ {}^C\Delta_a^v y(t) = b(-x^3(t-1+v) + x(t-1+v)) + c(-y^3(t-1+v) + y(t-1+v)) \\ \quad - y(t-1+v). \end{cases} \quad (1.30)$$

En basant sur les equations (1.25) et (1.26) du théorème 1.6 on obtient

$$\begin{cases} x(t) = x(a) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)} (y(t-1+v) - x(t-1+v)), \\ y(t) = y(a) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)} (b(-x^3(t-1+v) + x(t-1+v)) \\ \quad + c(-y^3(t-1+v) + y(t-1+v)) - y(t-1+v)). \end{cases} \quad (1.31)$$

Par (1.21), prenant  $a = 0$ , la formule discrète de (1.30) devient :

$$\begin{cases} x(n) = x(0) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} (y(j-1) - x(j-1)), \\ y(n) = y(0) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} (b(-x^3(j-1) + x(j-1)) \\ \quad + c(-y^3(j-1) + y(j-1)) - y(j-1)). \end{cases} \quad (1.32)$$

par un simple calcul, on peut obtenir trois points d'équilibre du système (1.30) qui sont :

$$P_1(0, 0),$$

$$P_{2,3} \left( \pm \sqrt{1 - \frac{1}{b+c}}; \pm \sqrt{1 - \frac{1}{b+c}} \right),$$

où  $b + c > 1$ . Le système (1.30) a un seul point d'équilibre  $P_1(0, 0)$  pour  $b + c \leq 1$ .

La matrice Jacobienne associée au système (1.30) évaluée au point d'équilibre  $P_*(x, y)$  est de la forme

$$J_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ b(-3x^2 + 1) & c(-3y + 1) - 1 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres correspondantes au point  $P_1(0, 0)$  sont

$$\lambda_{1,2} = \frac{c}{2} \pm \frac{\sqrt{4b + c^2}}{2}.$$

Et comme

$$|\arg \lambda_1| = 0 < \frac{v\pi}{2},$$

Alors selon le théorème 1.7 le point  $P_1(0, 0)$  est instable.

Maintenant, afin d'analyser la stabilité des points  $P_{2,3}$  soient

$$\begin{cases} x_2 = y_2 = \sqrt{1 - \frac{1}{b+c}}, \\ x_3 = y_3 = -\sqrt{1 - \frac{1}{b+c}}. \end{cases}$$

Avec les transformations des variables suivantes

$$z_{21}(t - 1 + v) = x(t - 1 + v) - x_2,$$

$$z_{22}(t - 1 + v) = y(t - 1 + v) - y_2,$$

$$z_{31}(t - 1 + v) = x(t - 1 + v) - x_3,$$

$$z_{32}(t - 1 + v) = y(t - 1 + v) - y_3,$$



on obtient deux nouveaux systèmes avec des zéros points d'équilibre correspondants aux points  $P_{2,3}$  et qui sont respectivement :

$$\begin{cases} {}^C \Delta_a^v z_{21}(t) = z_{22}(t-1+v) + y_2 - z_{21}(t-1+v) - x_2, \\ {}^C \Delta_a^v z_{22}(t) = b \left( -(z_{21}(t-1+v) + x_2)^3 + z_{21}(t-1+v) + x_2 \right) + c \left( -(z_{22}(t-1+v) + y_2)^3 + z_{22}(t-1+v) + y_2 \right) - z_{22}(t-1+v) - y_2, \end{cases} \quad (1.33)$$

et

$$\begin{cases} {}^C \Delta_a^v z_{31}(t) = z_{32}(t-1+v) + y_3 - z_{31}(t-1+v) - x_3, \\ {}^C \Delta_a^v z_{32}(t) = b \left( -(z_{31}(t-1+v) + x_3)^3 + z_{31}(t-1+v) + x_3 \right) + c \left( -(z_{32}(t-1+v) + y_3)^3 + z_{32}(t-1+v) + y_3 \right) - z_{32}(t-1+v) - y_3. \end{cases} \quad (1.34)$$

La matrice jacobienne des systèmes (1.33) et (1.34) évaluée au zéro point d'équilibre est

$$\begin{aligned} J_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3bx_2^2 + b & -3cy_2^2 + c - 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3bx_3^2 + b & -3cy_3^2 + c - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les valeurs propres correspondantes à la matrice  $J_2$  sont

$$\lambda_{3,4} = -\frac{2b - c \pm \sqrt{-(2b + 2c - 3)(4b^2 - 2bc^2 + 4bc - 2c^3 + 3c^2)} + 2bc + 2c^2}{2(b + c)}.$$

Pour les valeurs des paramètres  $b = 2.2$  et  $c = 0.95$  et l'ordre fractionnaire  $v = 0.98$ , les valeurs propres correspondantes sont  $\lambda_{3,4} = -1.4976 \pm 1.4343i$ .

Par un simple calcul, on obtient

$$\begin{aligned} |\arg \lambda_i| &= 2.3788 > \frac{v\pi}{2} = 1.5379, i = 3, 4. \\ |\lambda_i| &= 2.0736 > \left( 2 \cos \frac{|\arg \lambda_i| - \pi}{2 - v} \right)^v = 1.4538, i = 3, 4. \end{aligned}$$

Ce qui implique l'instabilité des points d'équilibre  $P_{2,3}$ .

## Stabilité des systèmes fractionnaires non-linéaires

**Théorème 1.8** [72] *S'il existe une fonction de Lyapunov  $V(X(t))$  définie positive telle que*

$${}^C\Delta_a^v V(X(t)) < 0, \forall t \in \mathbb{N}_{a+1-v} \quad (1.35)$$

*alors la solution triviale du système est asymptotiquement stable.*

**Lemme 1.1** [72] *Pour  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T, 0 < v \leq 1$  et  $\forall t \in \mathbb{N}_{a+1-v}$ , on a l'inégalité suivante*

$$\frac{1}{2} {}^C\Delta_a^v (X^T(t)X(t)) \leq X^T(t-1+v) {}^C\Delta_a^v X(t). \quad (1.36)$$

**Exemple 1.2** [72] *Considérons le système discret d'ordre fractionnaire suivant*

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^v x(t) = -x(t-1+v) + y^3(t-1+v), 0 < v \leq 1, \\ {}^C\Delta_a^v y(t) = -x(t-1+v) - y(t-1+v), t \in \mathbb{N}_{a+1-v}. \end{cases} \quad (1.37)$$

*En utilisant la fonction de Lyapunov  $V(x(t), y(t)) = \frac{1}{2}x^2(t) + \frac{1}{4}y^4(t)$ , avec le lemme 1.1 nous avons*

$$\begin{aligned} {}^C\Delta_a^v V(x(t), y(t)) &= \frac{1}{2} {}^C\Delta_a^v x^2(t) + \frac{1}{4} {}^C\Delta_a^v y^4(t) \\ &\leq x(t-1+v) {}^C\Delta_a^v x(t) + \frac{1}{2} y^2(t-1+v) {}^C\Delta_a^v y^2(t) \\ &\leq x(t-1+v) {}^C\Delta_a^v x(t) + y^3(t-1+v) {}^C\Delta_a^v y(t) \\ &= -x^2(t-1+v) - y^4(t-1+v) < 0. \end{aligned}$$

*Par conséquent, le système est asymptotiquement stable selon le théorème 1.8.*

## 1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, ont été mis en exergue les systèmes dynamiques discrets d'ordre entier et fractionnaire. Dans une première section, nous avons étalé d'une part les notions de base sur les systèmes dynamiques discrets tels que : les points fixes, les orbites périodiques, les points périodiques...etc, d'autre part, la stabilité de ces systèmes dans le cas linéaire et non-linéaire, enfin, la théorie de bifurcation. Dans une deuxième section, nous avons abordé en bref l'historique

---

des systèmes dynamiques discrets d'ordre fractionnaire, puis, quelques définitions et généralités du calcul discret fractionnaire, enfin, les théoèmes analysant la stabilité linéaire et non-linéaires enrichis avec des exemples.

# Chapitre 2

## Chaos et synchronisation

### 2.1 Introduction

Le chaos est un phénomène qui apparaît dans la nature, de très grand comme un univers au très petit comme une particule. Les concepts du chaos ont pénétré virtuellement toutes les branches de la science et (engineering-l'ingénierie), Dans le domaine de l'ingénieurs électrique et électronique, des recherches récentes ont un large spectre sur l'analyse du chaos, la stabilisation et la synchronisation du chaos, et sur les applications chaotiques généralement [73 – 77].

Dans la mythologie le mot "chaos" est d'origine grecque " $\chi\alpha\omicron\varsigma$ " qui signifie "the nether abyss, ou infinite darkness," et a été personnifié comme "le plus ancien des dieux". Identiquement, le dieu Chaos a été le créateur de tous l'univers. Il y a beaucoup de mythes qui correspondent au dieu du chaos dans différentes civilisations, comme Grèce, Chine, Égypte, et Inde, mais dans le monde moderne le chaos n'est plus un dieu. En 1997, sa signification dans Oxford English Dictionary Online a été mise à jour comme "Comportement d'un système soumis par des lois déterministes mais il est si imprévisible qu'il apparaît aléatoire grâce à sa sensibilité aux changements des paramètres ou sa dépendance à un grand nombre des variables; un état caractérisé par un tel comportement".

La perception générale du chaos est équivalente au désordre ou plutôt l'aléatoire. Il faut bien noter que le chaos n'est pas exactement le désordre, et son comportement aléatoire est agit par une loi; mathématiquement, un modèle déterministe ou une équation qui n'a aucun élément de chance. Actuellement, ce comportement aléatoire est dû à la grande sensibilité aux conditions initiales.

Le mot "synchronisation" vient du grec " $\sigma\nu\nu$ " (syn) qui signifie "ensemble " et " $\chi\rho\nu\omicron\varsigma$ "

(chronos) qui désigne le "temps. " De plus le dictionnaire la définit comme acte de faire s'accomplir simultanément (plusieurs faits, plusieurs actions appartenant à des séries différentes). La physique se pencha sur la « synchronisation » en tant que sujet de recherche dès ses prémices [78, 79]. En effet, c'est au dix-septième siècle, que le scientifique hollandais, Christian Huygen avait constaté que deux de ses horloges à balancier, supportées par une même planche en bois en opposition de phase, convergeaient rapidement vers un mouvement identique en phase et en fréquence. En d'autres termes, les deux horloges finissaient par avoir une parfaite synchronisation. S'il les perturbait, elles se resynchronisaient en une demi-heure mais seulement si elles étaient proches. Huygens devina que cet effet, qu'il nomma sympathie, était dû à d'imperceptibles mouvements que les pendules transmettaient à leur support [80, 81].

Beaucoup de recherches se sont tendus vers une réflexion sur la synchronisation [82 – 86], mais notre intérêt principal est d'étudier son rapport avec les systèmes chaotiques. En effet, plusieurs types de synchronisation ont été étudiés, et beaucoup de méthodes de recherche ont été proposées débouchant ainsi sur des résultats intéressants [87, 88, 89, 90].

Nous traitons dans ce chapitre, d'une part, la notion du chaos avec ses multiples caractéristiques et scénarios illustrés par des exemples des systèmes chaotiques entiers et fractionnaires. D'autre part, on discutera les différents types de synchronisation en mettant la lumière sur qu'une seule méthode de synchronisation utilisée dans le troisième chapitre : la méthode du contrôleur actif.

## 2.2 Théorie du chaos

Dans cette présente section, nous donnons une brève étude quantitative sur le chaos. Définitions du chaos, quelques outils mathématiques de quantification du chaos et différentes routes vers le chaos sont les grandes lignes de cette section.

### 2.2.1 Définitions du chaos

Plusieurs définitions du chaos sont connues bien qu'elles ne soient pas mathématiques jusqu'à ce que **R.L Devaney** propose une définition basée sur les définitions suivantes [91, 92] :

Soit  $(I \subset \mathbb{R}, d)$  désignant un espace métrique compact ( $d$  est une distance), et soit  $F$  la fonction

$$F : I \rightarrow I, x_{k+1} = F(x_k), x_0 \in I. \tag{2.1}$$

**Définition 2.1** *Supposons que  $X$  est un ensemble et  $Y$  un sous-ensemble de  $X$ .  $Y$  est dense dans  $X$  si, pour n'importe quel élément  $x \in X$ , il existe un élément  $y$  dans le sous-ensemble  $Y$  arbitrairement proche de  $x$ , c'est-à-dire si la fermeture de  $Y$  est égale à  $X$  :  $\overline{Y} = X$ . Ce qui revient à dire que  $Y$  est dense dans  $X$  si pour tout  $x \in X$  on peut trouver une séquence de points  $\{y_n\} \in Y$  qui convergent vers  $x$ .*

**Définition 2.2**  *$F$  est dite avoir la propriété de sensibilité aux conditions initiales s'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour  $x(0) \in I$  et tout  $\varepsilon > 0$  il exist un point  $y(0) \in I$  et un entier  $j \geq 0$  satisfaisant :  $d(x_0, y_0) < \varepsilon \Rightarrow d(F^j(x_0), F^j(y_0)) > \delta$ , où  $d$  représente la distance et  $F^j$  la  $j$ -ème itération de  $F$ .*

**Définition 2.3**  *$F$  est dite topologiquement transitive si  $U$  et  $V$  étant deux ensembles non vides ouverts dans  $I$ , il exist  $x_0 \in U$  et un indice  $j \in \mathbb{Z}^+$ , tel que pour  $F^j(x_0) \in V$  ou, de façon équivalente, il existe un indice  $j \in \mathbb{Z}^+$ , tel que pour  $F^j(U) \cap V \neq \emptyset$ .*

On est maintenant en position d'énoncer la défintion du chaos, au sens de Devaney [93].

**Définition 2.4** *La fonction  $F$  est dite constituée d'une dynamique chaotique si :*

- (i)  $F$  possède une sensibilité aux conditions initiales,
- (ii)  $F$  est topologiquement transitive,
- (iii) L'ensemble des points périodiques de  $F$  est denses dans  $I$ .

## 2.2.2 Caractéristiques du chaos

### Sensibilité aux conditions initiales

A partir de la fin de 19ième siècle, le célèbre Henri Poincaré découvrit la sensibilité aux conditions initiales pour la première fois, puis en 1963 avec l'appartition des ordinateurs, le météorologue Edward Lorenz affirma cette découverte par un calcul très précis. Cette découverte joue un rôle très important dans plusieurs travaux scientifiques, et notamment dans le domaine des mathématiques. Cette sensibilité dsigne qu'un petit changement des valeurs des variables d'état initial d'un système ayant un comportement chaotique peut conduire aux états finaux imprévisibles sur le long terme [94, 95].

## Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov sont un outil qui sert à mesurer la divergence entre deux orbites qui découlent des conditions initiales très proches voisines. Les exposants de Lyapunov permettent d'affirmer la sensibilité aux conditions initiales d'un système chaotique. Un système dynamique discret de dimension  $n$  admet  $n$  exposants de Lyapunov [96]. Considérons le système dynamique non-linéaire discret suivant :

$$x_{k+1} = F(x_k), \quad (2.2)$$

où  $x_k \in \mathbb{R}^n$ . On assume que la trajectoire issue d'un état initial  $x_0$  atteint un attracteur.

**Théorème 2.1** [97] *Les exposants du Lyapunov du système (2.2) sont représentés par la formule suivante :*

$$\lambda_L^{(i)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |\lambda_i(J_k \dots J_1)|, i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.3)$$

avec  $J_k = DF(x_{k-1}) \dots DF(x_0)$ , et  $DF(x_i)$  est la matrice jacobienne de  $F$  évaluée en  $x_i$  suivante :

$$DF(x_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_{1i}} & \dots & \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_{ni}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_{1i}} & \dots & \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_{ni}} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

**Preuve** On choisit deux conditions initiales voisines, notées  $x_0$  et  $x'_0$  et on constate le comportement des trajectoires qui en découlent. On suppose que les deux trajectoires  $x_k$  et  $x'_k$  s'éloignent de manière exponentielle, donc après  $k$  itérations on aura :

$$|x_k - x'_k| = |x_0 - x'_0| e^{\lambda k}, \quad (2.5)$$

$\lambda$  désigne le taux de divergence des deux trajectoires, et par un simple calcul on aura :

$$\lambda = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{x_k - x'_k}{x_0 - x'_0} \right|, \quad (2.6)$$

Prenant  $\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \lambda$ , on obtient :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \ln \left| \frac{x_k - x'_k}{x_0 - x'_0} \right|, \quad (2.7)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \frac{1}{k} \ln \left| \frac{x_k - x'_k}{x_{k-1} - x'_{k-1}} \times \frac{x_{k-1} - x'_{k-1}}{x_{k-2} - x'_{k-2}} \times \dots \times \frac{x_1 - x'_1}{x_0 - x'_0} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{x_{i+1} - x'_{i+1}}{x_i - x'_i} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{F(x_i) - F(x'_i)}{x_i - x'_i} \right|.\end{aligned}$$

On aura finalement que :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{dF(x_i)}{dx_i} \right|. \quad (2.8)$$

En remplaçant la dérivée partielle  $\frac{dF(x_i)}{dx_i}$  par la matrice jacobienne  $DF(x)$  calculée à  $x_i$  définit dans (2.4) et prenant  $J_k = DF(x_{k-1}) \dots DF(x_0)$ , avec  $J_0 = DF(x_0)$ , on obtient la formule générale des exposants de Lyapunov :

$$\lambda_L^{(i)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |\lambda_i(J_k \dots J_1)|, i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

■

**Théorème 2.2** [98] *On calcule les exposants de Lyapunov du système (2.2) on peut conclure de sa stabilité comme suit :*

- **Si**  $\lambda_L^{(n)} < \dots < \lambda_L^{(1)} < 0$ , il existe des points fixes asymptotiquement stables.
- **Si**  $\lambda_L^{(1)} = 0$ ,  $\lambda_L^{(n)} < \dots < \lambda_L^{(2)} < 0$ , l'attracteur est un cycle limite asymptotiquement stable.
- **Si**  $\lambda_L^{(1)} = \dots = \lambda_L^{(k)} = 0$ ,  $\lambda_L^{(n)} < \dots < \lambda_L^{(k+1)} < 0$ , l'attracteur est un tore de dimension  $k$ , c'est-à-dire quasi-périodique.
- **Si**  $\lambda_L^{(1)} > 0$ ,  $\sum_i \lambda_L^{(i)} < 0$ , l'attracteur est chaotique.
- **Si**  $\lambda_L^{(1)} > \dots > \lambda_L^{(k)} > 0$ ,  $\sum_i \lambda_L^{(i)} < 0$ , l'attracteur est hyperchaotique.

## Dimension fractale

Il existe plusieurs types de dimensions fractales, parmi celle-ci on peut citer la dimension de Lyapunov :



**Définition 2.5** [99] *La dimension de Lyapunov est définie par :*

$$D_L = \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} + j, \quad (2.10)$$

où  $\lambda_n, \dots, \lambda_1$  sont les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique avec  $j$  le grand entier naturel tel que :  $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$ .

### Attracteur étrange

L'expression d'un attracteur étrange a été utilisée pour la première fois en 1971 par Ruelle et Takens, il désigne une figure dans l'espace des phases représentant le comportement d'un système dynamique.

**Définition 2.6** [100] *Un sous-ensemble borné  $A$  de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation  $T$  de l'espace s'il existe un voisinage  $U$  de  $A$ , c'est à dire que pour tout point de  $A$  il existe une boule contenant ce point et contenue dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :*

- 1)  *$U$  est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par  $T$  dont le point initial est dans  $U$  est entièrement contenue dans  $U$ . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de  $A$  que l'on veut.*
- 2) *Les orbites dont le point initial est dans  $\mathbb{R}$  sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.*
- 3)  *$A$  est un objet fractal.*
- 4) *Pour tout point de  $A$ , il existe des orbites démarrées dans  $\mathbb{R}$  qui passent aussi près que l'on veut de ce point.*

### 2.2.3 Scénarios de transition vers le chaos

L'analyse de la transition vers le chaos consiste à étudier les bifurcations successives de la dynamique d'un système, lorsque les valeurs des paramètres du système sont modifiées ; il s'agit surtout de phénomènes dissipatifs et de transition vers un chaos dissipatif. Le comportement chaotique, n'est pas l'objet des recherches. Cependant, les relations du chaos à la transition vers le chaos sont importantes et font l'objet de cette section. On peut citer trois scénarios de transition d'une dynamique régulière à une dynamique chaotique lors de la variation d'un paramètre :

### Cascade de doublement de la période

Durant les années 60, R. May a observé en étudiant l'évolution d'une population grâce à l'application logistique une succession de bifurcation de fourches est que la période d'un système est multipliée par 2, puis par 4, puis par 8, etc, et Ces doublements de périodes sont de plus en plus rapprochés. Lorsque la période est infinie, le système devient chaotique [101]. C'est bien le scénario de doublement de la période. C'est à partir de cet exemple que Feigenbaum pressentit l'existence d'une forme d'universalité dans cette transition vers le chaos sous forme de cascade de doublement de période.

### Par intermittence

L'intermittence suppose en particulier que le cycle limite (correspondant à l'état périodique d'où est issu ce phénomène de transition) bifurque de façon sous-critique et qu'il n'y ait pas d'attracteur à proximité. Un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine [102].

### Scénarios de Ruelle et Takens

Ce scénario via la quasi-périodicité a été mis en évidence par les travaux théoriques de Ruelle et Takens [103]. Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence, si nous changeons un paramètre alors il apparaît une deuxième fréquence. Si le rapport entre les deux fréquences est rationnelle le comportement est périodique. Mais, si le rapport est irrationnel, le comportement est quasi périodique. Alors, on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos.

## 2.2.4 Exemples des systèmes chaotiques discrets

### Systèmes chaotiques d'ordre entier

**Système de Hénon** En 1976, Mitchel Hénon [104] a introduit le système dynamique discret bidimensionnel défini par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + y_k - ax_k^2, \\ y_{k+1} = bx_k. \end{cases} \quad (2.11)$$

L'attracteur chaotique observé dans ce système est pour les valeurs dans l'espace des paramètres  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ , voir figure 2.1.

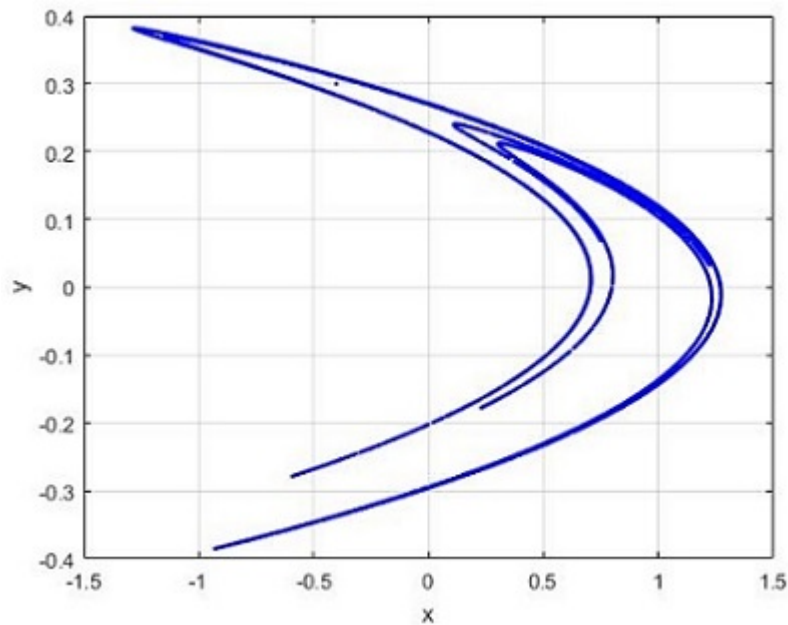


FIG. 2.1 – Attracteur étrange de Hénon pour  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ .

On peut également assurer l'irrégularité du système (2.11) via l'évolution de ses variables d'état, voir figure 2.2 qui stipule la non périodicité dans l'espace des phases qui se justifie par le diagramme de bifurcation résumant le comportement global du système (2.11), voir figure 2.3 et en utilisant un moyen technique via l'exposant de Lyapunov maximal, voir figure 2.4. Il est clair que pour  $b = 0.3$ , le système de Hénon se comporte régulièrement pour  $a \in [0, 1.06]$ , et remarquant que l'exposant de Lyapunov maximal dans l'intervalle  $]1.06, 1.4[$  change son signe deux fois au négatif ce qui signifie qu'il avait des phases transitoires du comportement chaotique vers des cycles périodiques et vice versa. Enfin, pour  $a = 1.4$  le système est purement chaotique.

On peut également à l'aide de l'algorithme de Alan Wolf [105] calculer les exposants de Lyapunov correspondants pour les valeurs dans l'espace des paramètres  $(a, b) = (1.4, 0.3)$ . Après 20000 itérations, on trouve bien évidemment que le système a deux exposants de Lyapunov, (voir figure 2.5)  $Le_1 = 0.42311$  et  $Le_2 = -1.62671$  et une dimension de Lyapunov  $D_L = 1.26$ .

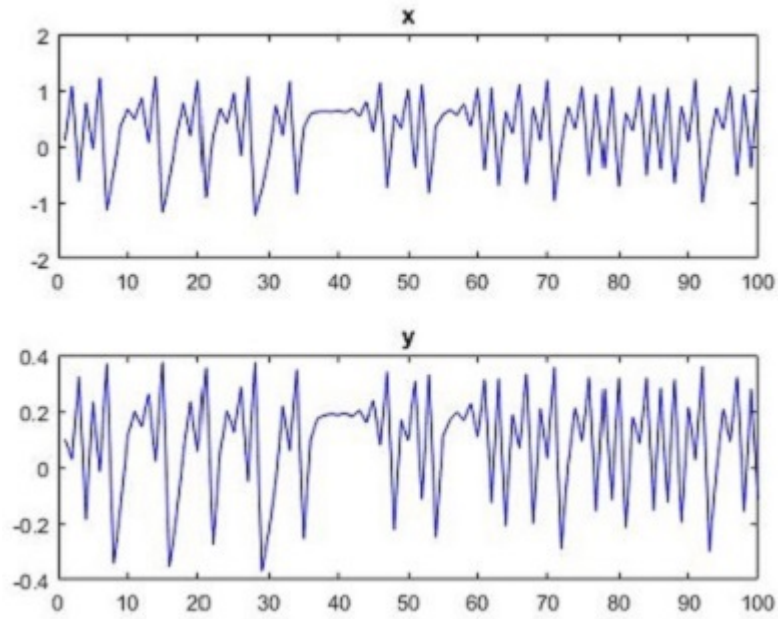


FIG. 2.2 – L'évolution des états du système de Hénon pour les 100 premières itérations

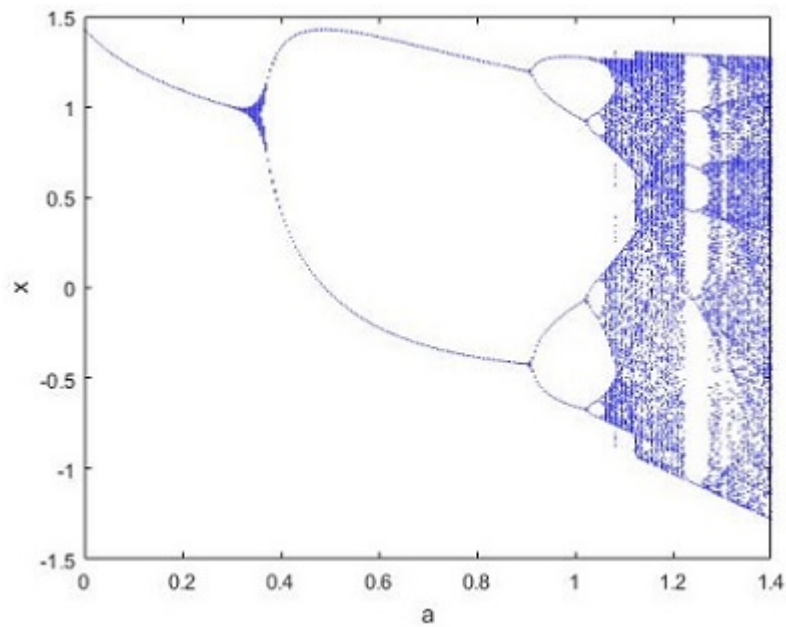


FIG. 2.3 – Diagramme de bifurcation du système de Hénon

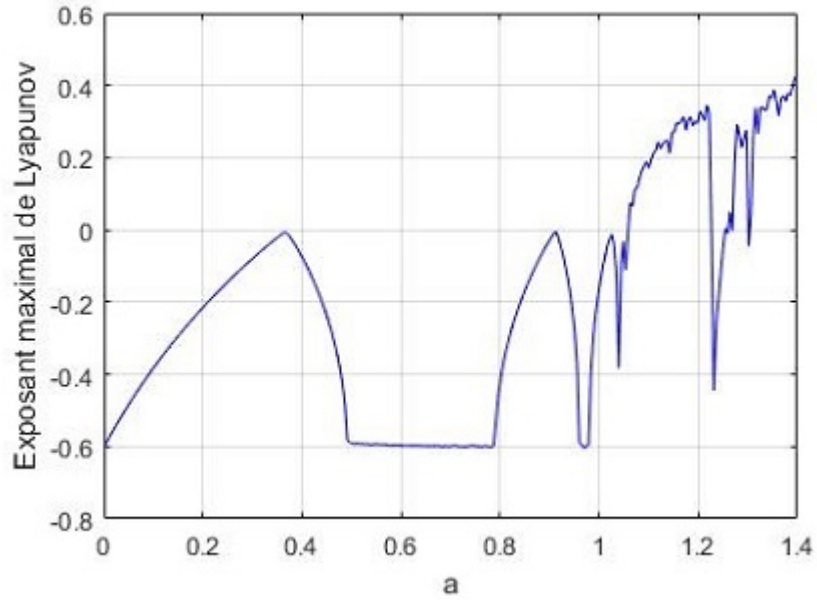


FIG. 2.4 – L'évolution des exposants de Lyapunov du système de Hénon en fonction du paramètre  $a$ .

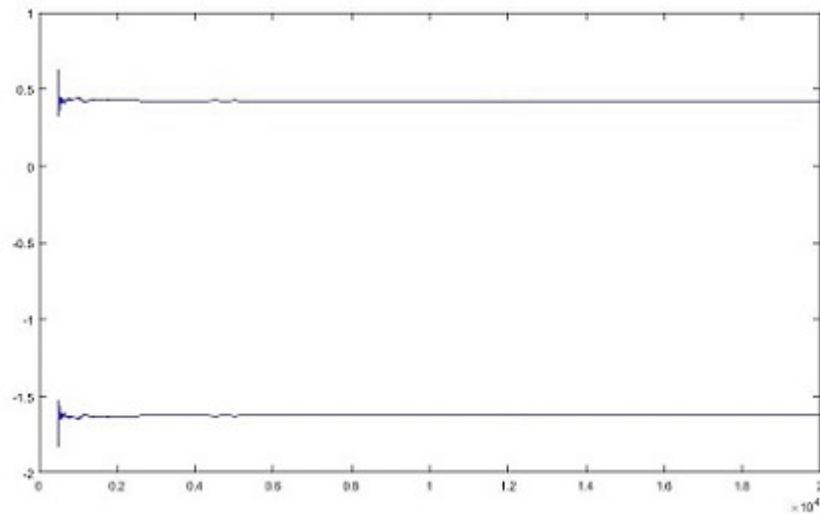


FIG. 2.5 – Les exposants de Lyapunov du système de Hénon pour  $a = 1.4$  et  $b = 0.3$ .

**Système de Stefanski** Stefanski [106] a présenté un système discret en 3D comme suit :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + z_k - \alpha y_k^2, \\ y_{k+1} = 1 + \beta y_k - \alpha x_k^2, \\ z_{k+1} = \beta x_k. \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans la figure 2.6 l'attracteur hyperchaotique de Stefanski est obtenu dans le cas où  $\alpha = 1.4$  et  $\beta = 0.2$ .

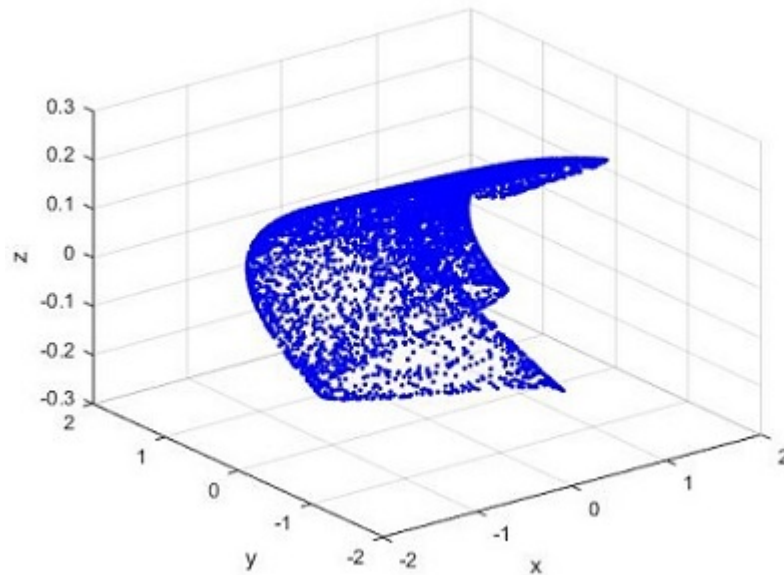


FIG. 2.6 – L'attracteur hyperchaotique du système de Stefanski pour  $\alpha = 1.4$  et  $\beta = 0.2$ .

La figure 2.7 affirme que l'attracteur obtenu du système (3.23) est un attracteur étrange en nous renseignant sur l'évolution de ses variables d'états dans l'espace des phases. De même, la figure 2.10 interprète l'évolution des exposants de Lyapunov correspondants aux conditions initiales  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$  après 1000 itérations, on remarque que le système (3.23) a trois exposants de Lyapunov qui sont respectivement,  $Le_1 = 36.31318$  et  $Le_2 = 23.28062$  et  $Le_3 = -381.4814$  et une dimension de Lyapunov  $D_L = 2.1562$ . On peut voir aussi sur la figure 2.9 que lorsque  $\beta = 0.2$  et  $\alpha \in [0; 1.22[$  le système (3.23) admet un exposant de Lyapunov maximal négatif qui signifie qu'on a un attracteur régulier et lorsque  $\alpha \in [1.22; 1.4]$  l'exposant maximal de Lyapunov prend des valeurs positives d'où l'attracteur devient hyperchaotique. Le comportement global du système (3.23) est résumé par la diagramme de bifurcation associé dans la figure 2.8.

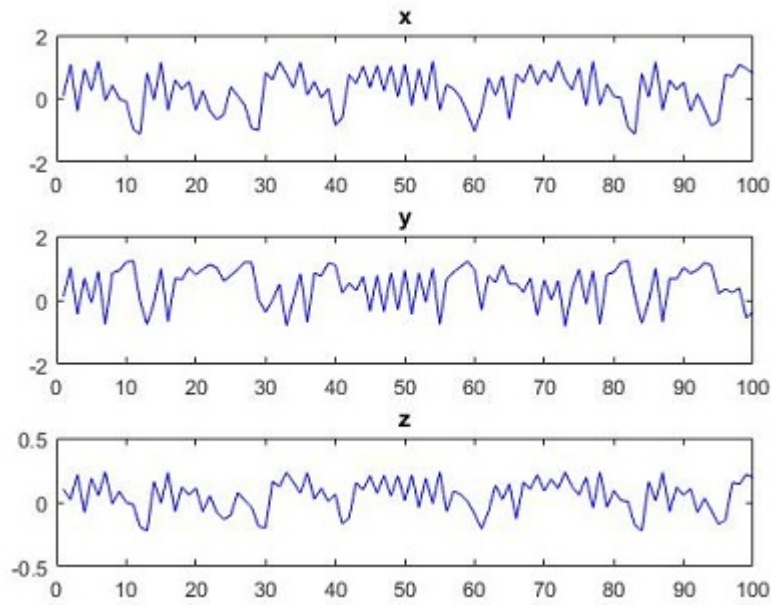


FIG. 2.7 – L'évolution des états du système de Stefanski pour les 100 premières itérations.

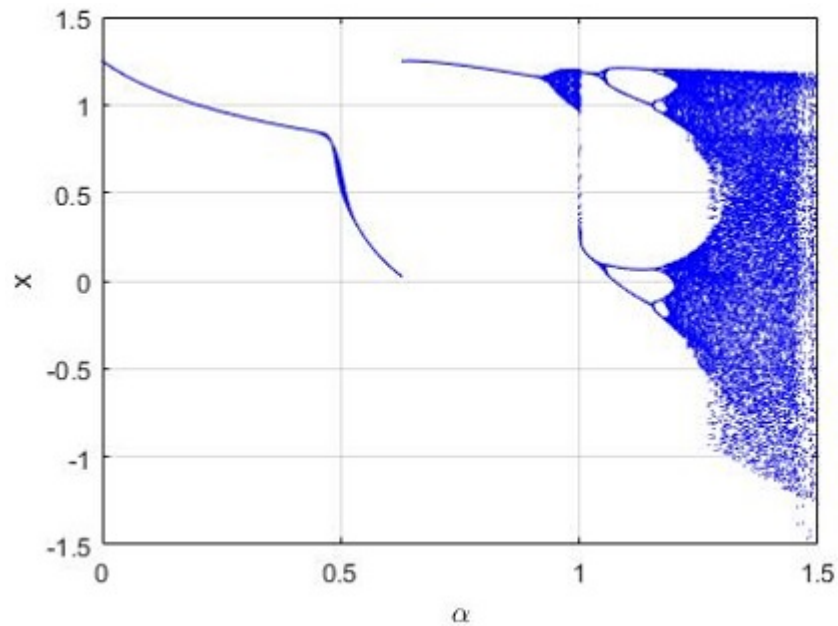


FIG. 2.8 – Diagramme de bifurcation du système de Stefanski.

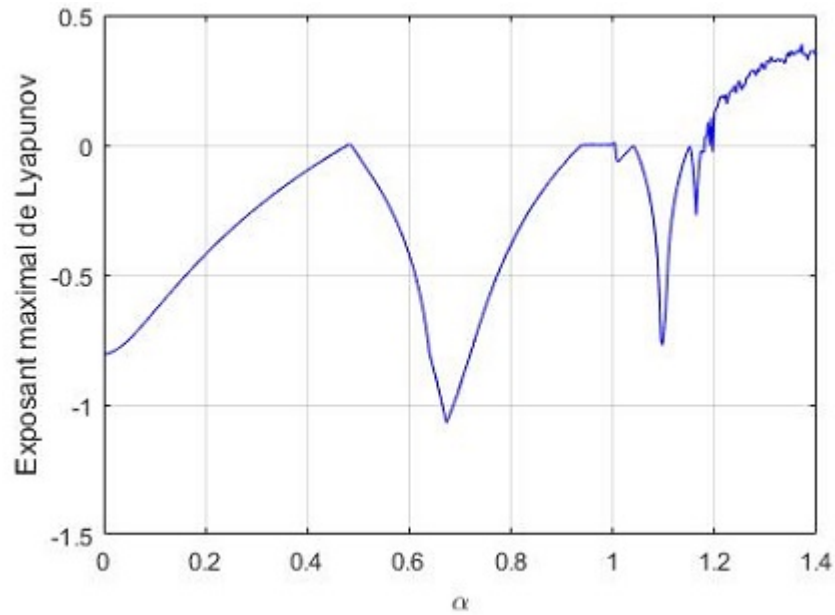


FIG. 2.9 – L'évolution d'exposant maximal de Lyapunov du système de Stefanski.

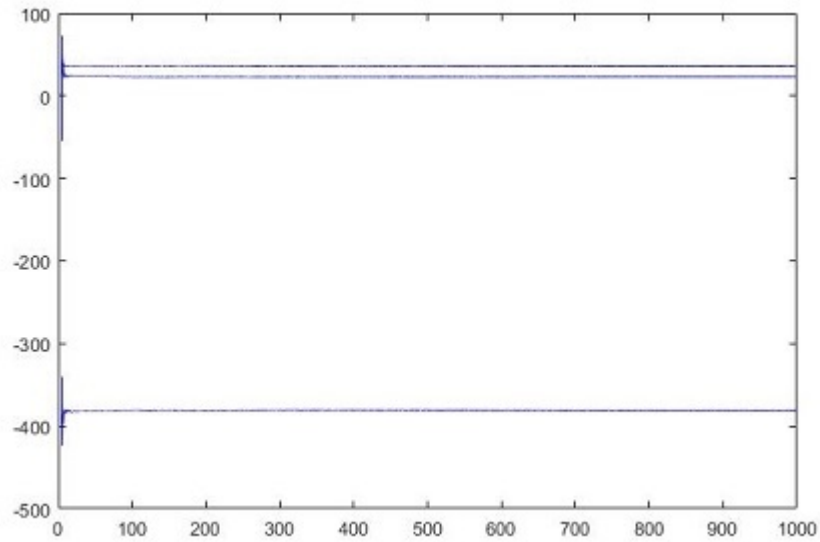


FIG. 2.10 – Les exposants de Lyapunov du système de Stefanski pour  $\alpha = 1.4$  et  $\beta = 0.2$ .



### Systèmes chaotiques d'ordre fractionnaire

**Le système fractionnaire de Lozi** La version fractionnaire du système discret de Lozi [107] est définie par :

$$\begin{cases} {}^C \Delta_a^v x(t) &= -a|x(t-1+v)| + y(t-1+v) + 1 - x(t-1+v), \\ {}^C \Delta_a^v y(t) &= bx(t-1+v) - y(t-1+v), \end{cases} \quad (2.13)$$

où  $t \in \mathbb{N}_{a+1-v}$ ,  $0 < v \leq 1$  et  $a = 1.7, b = 0.5$ . La formule numérique correspondante selon le théorème 1.6 est donné par :

$$\begin{cases} x(n) &= x(a) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} (-a|x(j-1)| + y(j-1) + 1 - x(j-1)), \\ y(n) &= y(a) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} (bx(j-1) - y(j-1)), \end{cases} \quad (2.14)$$

Prenant  $a = 0, (x(0), y(0)) = (0, 0), a = 1.7, b = 0.5$  et  $v = 0.98$ . La figure 2.11 montre l'attracteur étrange du système (2.13) obtenu par les valeurs des paramètres et les conditions initiales précitées.

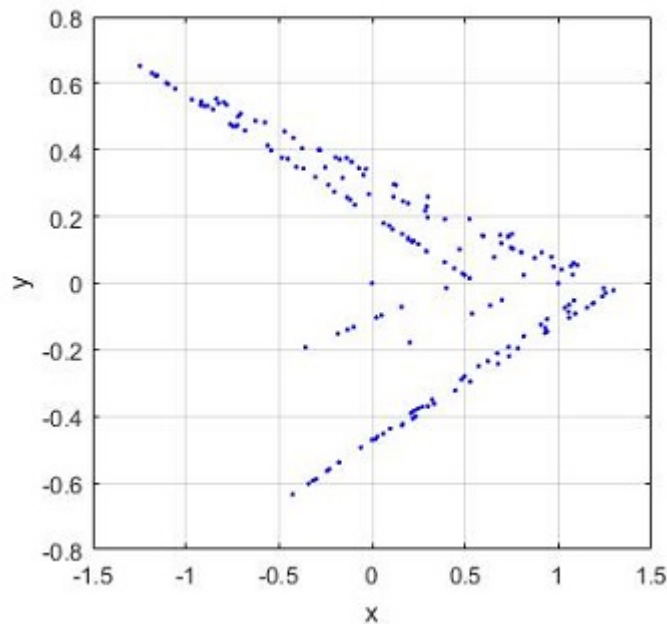


FIG. 2.11 – L'attracteur étrange du système discret fractionnaire de Lozi pour  $(x(0), y(0)) = (0, 0), a = 1.7, b = 0.5, v = 0.98$ .

**Le système fractionnaire de Rössler** Le système discret fractionnaire de Rössler [108] est défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^C \Delta_a^v x(t) = b_1 x(t-1+v) (1-x(t-1+v)) \\ \quad - b_2 ((z(t-1+v) + b_3) (1-2y(t-1+v))) - x(t-1+v), \\ {}^C \Delta_a^v y(t) = b_4 y(t-1+v) (1-y(t-1+v)) + b_5 z(t-1+v) \\ \quad - y(t-1+v), \\ {}^C \Delta_a^v z(t) = b_6 (1-b_7 x(t-1+v)) \\ \quad \times ((z(t-1+v) + b_3) (1-2y(t-1+v)) - 1) - z(t-1+v). \end{array} \right. \quad (2.15)$$

où  $t \in \mathbb{N}_{a+1-v}$ ,  $0 < v \leq 1$  et  $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7) = (3.8, 0.05, 0.35, 3.78, 0.2, 0.1, 1.9)$ . La formule numérique correspondante selon le théorème 1.6 est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(n) = x(a) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} \\ \quad \times (b_1 x(j-1) (1-x(j-1)) - b_2 (z(j-1) + b_3 (1-2y(j-1))) - x(j-1)), \\ y(n) = y(a) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} \\ \quad \times (b_4 y(j-1) (1-y(j-1)) + b_5 z(j-1) - y(j-1)), \\ z(n) = z(a) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} \\ \quad \times (b_6 (1-b_7 x(j-1)) ((z(j-1) + b_3) (1-2y(j-1)) - 1) - z(j-1)). \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Prenant  $a = 0$ ,  $(x(0), y(0), z(0)) = (0.1, 0.2, -0.5)$ . Le système (2.14) est chaotique pour  $v = 0.903$ , comme illustré dans la figure 2.12.

## 2.3 Théorie de synchronisation

Pour étudier la synchronisation de deux systèmes identiques ou non, l'un d'eux un système maître, et l'autre un système esclave ou contrôlé, il s'avère nécessaire de vérifier la convergence de la mesure de l'écart de leurs états de phases. Pour y arriver, une solution consiste à mettre en oeuvre une condition de stabilité pour le système d'erreur entre les états de phase des systèmes chaotiques étudiés.

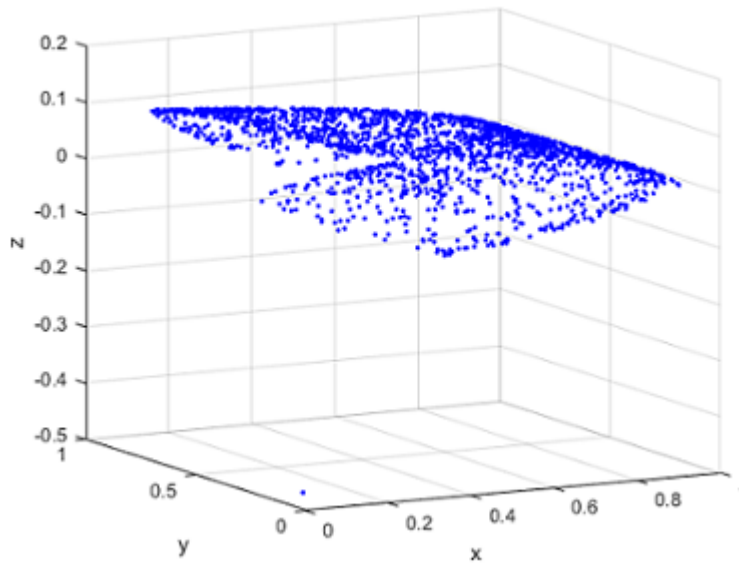


FIG. 2.12 – L'attracteur étrange du système discret fractionnaire de Rössler pour  $(x(0), y(0), z(0)) = (0.1, 0.2, -0.5)$  et  $\nu = 0.903$ .

### 2.3.1 Types de synchronisation

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation FSHP, la synchronisation généralisée, et la synchronisation Q-S.

On considère les deux systèmes chaotiques maître et esclave respectivement suivants

$$X_{k+1} = F(X_k), \quad (2.17)$$

$$Y_{k+1} = G(Y_k) + U, \quad (2.18)$$

d'où  $X_k \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système (2.17) et  $Y_k \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système (2.18),  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un vecteur de contrôle à déterminer.

#### Synchronisation complète

**Définition 2.7** [109] *On parle d'une synchronisation complète des systèmes (2.17) et (2.18) si le vecteur  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  est déterminé de façon que*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\| = 0, \quad (2.19)$$

où  $e(k) = Y_k - X_k$  définit l'erreur de synchronisation complète et  $\|\cdot\|$  une norme euclidienne.

### Anti-Synchronisation

**Définition 2.8** [110] On parle d'une anti-synchronisation des systèmes (2.17) et (2.18) si :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|Y_k + X_k\| = 0. \quad (2.20)$$

### Synchronisation décalée

**Définition 2.9** [111] On parle d'une synchronisation décalée des systèmes (2.17) et (2.18) si :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y_k - X_{k-\tau}\| = 0, \text{ (ou } \lim_{k \rightarrow \infty} \|Y_k - X_{k+\tau}\| = 0), \forall X_0, \quad (2.21)$$

avec  $\tau$  est un nombre positif suffisamment petit.

### Synchronisation projective

**Définition 2.10** [112] On parle d'une synchronisation projective des systèmes (2.17) et (2.18) si :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{k \rightarrow \infty} |y_i(k) - \alpha_i x_i(k)| = 0, \forall (x(0), y(0)), i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (2.22)$$

avec  $\alpha_i$ , est une constante multiple.

**Remarque 2.1** 1- Si  $\alpha_i = 1, 0 \leq i \leq n$ , on parle d'une synchronisation complète.  
2- Si  $\alpha_i = -1, 0 \leq i \leq n$ , on parle d'anti-synchronisation.

### Synchronisation FSHP

**Définition 2.11** [113] On parle d'une synchronisation FSHP (en anglais Full State Hybrid Projective Synchronization) des systèmes (2.17) et (2.18) si :

$$\exists (\beta)_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lim_{k \rightarrow \infty} \left| y_i(k) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j(k) \right| = 0, \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.23)$$

**Remarque 2.2** La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective.

## Synchronisation généralisée

**Définition 2.12** [114] *Considérons le couple des systèmes maître-esclave défini par*

$$\begin{cases} X_{k+1} = F(X_k), \\ Y_{k+1} = G(Y_k) + U, \end{cases} \quad (2.24)$$

où  $X_k \in \mathbb{R}^n$ ;  $Y_k \in \mathbb{R}^m$  sont les état des systèmes maître et esclave respectivement,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$  est un contrôleur. On parle alors d'une synchronisation généralisée s'il existe un contrôleur  $U$  et une fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ; tels que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y_k - \phi(X_k)\| = 0, \forall x(0), \forall y(0). \quad (2.25)$$

**Remarque 2.3** 1- Si  $\phi(X_k) = \Lambda X_k$  avec  $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{m \times n}$ , on dit qu'on a une synchronisation FSHP.

2- La synchronisation généralisé peut tenir lieu de la généralisation de la synchronisation complète, de l'anti-synchronisation et de la synchronisation projective.

## Synchronisation Q-S

**Définition 2.13** [115] *Nous disons que le couple des systèmes maître-esclave (2.24) est en synchronisation Q-S s'il existe un contrôleur  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$  et deux fonctions  $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisont :*

$$e_k = Q(X_k) - S(Y_k), \quad (2.26)$$

avec  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|e_k\| = 0$ .

**Remarque 2.4** *La synchronisation Q-S est une généralisation de tous les types de synchronisation discutés dans cette section.*

### 2.3.2 Méthode du contrôleur actif

Cette section est consacrée à la méthode de synchronisation des systèmes chaotiques la plus performante et rencontrée ultérieurement dans nos recherches : la méthode du contrôleur actif. Soient deux systèmes chaotiques à synchroniser maître et esclave suivants :

$$X_{k+1} = f(X_k), \quad (2.27)$$

---


$$Y_{k+1} = G(Y_k) + U, \quad (2.28)$$

où  $X_k \in \mathbb{R}^n$  et  $Y_k \in \mathbb{R}^n$  sont les états des systèmes (2.27) et (2.28) , respectivement ,  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un vecteur de contrôle à déterminer.

L'erreur de cette méthode peut être calculée comme suit :

$$e_{k+1} = Ae_k + N(X_k, Y_k) + U, \quad (2.29)$$

où  $Ae_k + N(X_k, Y_k) = G(Y_k) - F(X_k)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante et  $N$  une fonction non linéaire.

Le contrôleur  $U$  est proposé comme suit :

$$U = V - N(X_k, Y_k), \quad (2.30)$$

avec  $V$  est le contrôleur actif, exprimé par :

$$V = -Le_k, \quad (2.31)$$

où  $L$  est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$e_{k+1} = (A - L)e_k. \quad (2.32)$$

**Théorème 2.3** [116] *Les systèmes (2.27) et (2.28) sont globalement synchronisés sous la loi de controle (2.30) si et seulement si  $L$  est choisit de telle façon que les valeurs propres de  $A - L$  soient à l'intérieur du disque unité.*

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le chaos et la synchronisation. En premier lieu, nous avons commencé par donner quelques définitions du chaos. Puis nous avons cité les différents caractéristiques et scénarios de transition vers le chaos en citant quelques exemples des systèmes chaotiques d'ordre entier et fractionnaire dans le plan et dans l'espace, respectivement. En deuxième lieu, nous avons présenté la théorie de synchronisation avec ses divers types en mettant en relief la méthode du contrôleur actif.

# Chapitre 3

## Nouveaux résultats et contributions

### 3.1 Introduction

Depuis la dernière décennie, bien que l'on ait schématisé plusieurs autant de modèle pour la synchronisation du chaos [117 – 119], il n'en reste pas moins que l'on s'est plus concentré sur les systèmes chaotiques continus que sur les systèmes discrets. Ces derniers jouent pourtant un rôle très important et l'on commence à les mettre plus en exergue [120]. Ceci s'explique entre autre par le fait qu'il permettent de décrire bon nombre de modèles mathématiques, de processus physiques [121, 122, 123], de phénomènes biologiques [124], de réactions chimiques [125] et même des systèmes économiques [126]. A l'heure actuelle, on étudie la synchronisation des systèmes chaotiques discrets pour ses applications potentielles dans la sécurité des communications et la cryptographie [127 – 130].

Pour aborder la synchronisation chaotique (hyperchaotique) discrets diverses approches existent telles que : la synchronisation complète [131], la synchronisation retardée et anticipée [132], la synchronisation impulsive [133], l'anti-synchronisation et hybride synchronisation [134], la synchronisation projective [135], la synchronisation projective fonctionnelle [136], la synchronisation projective matricielle [137], la synchronisation full state hybrid projective [138], la synchronisation fonction-cascade [139], la synchronisation généralisée [140], la synchronisation Q-S [141]. Par ailleurs, l'étude des synchronisations de types inverses : la synchronisation projective inverse [142], la synchronisation projective matricielle inverse [143], la synchronisation full state hybrid projective inverse [144], la synchronisation retardée inverse [145] et la synchronisation généralisée inverse [146], etc., sont tout aussi importants. Avec le développement du calcul discret fractionnaire beaucoup de travaux de synchronisation des systèmes fractionnaires [147 – 154]

ainsi que ceux de quelques nouveaux systèmes discrets fractionnaires [155 – 159] mais aussi de nouveaux schémas de synchronisation de modèles discrets ont été développés [160 – 173].

Dans ce chapitre, une première section présente un nouveau type généralisé de synchronisation hybride basé sur la coexistence de FSHPS et IFSHPS entre les systèmes chaotiques bidimensionnels maîtres et les systèmes chaotiques tridimensionnels esclaves. En basant sur la théorie de la stabilité des systèmes linéaires discrets, la coexistence de FSHPS et IFSHPS va être prouvée en 2D. En outre, en utilisant la théorie de la stabilité de Lyapunov, la coexistence de FSHPS et IFSHPS en 3D va être démontrée. La faisabilité de cette approche va être illustrée par des exemples de synchronisation.

Dans la deuxième section, en combinant la synchronisation généralisée (GS) et la synchronisation généralisée inverse (IGS), de nouveaux schémas de synchronisation développée et réduite entre les différents systèmes chaotiques discrets y seront proposés. Sur la base de la théorie de la stabilité de Lyapunov, deux lois de contrôle y seront proposées pour prouver la coexistence de GS et IGS en 3D et 2D respectivement, entre un système maître tridimensionnel général et un système esclave bidimensionnel. La simulation numérique y sera confirmée les conclusions de notre approche.

Enfin, dans une dernière section, on va examiner un nouveau système chaotique en temps discret d'ordre fractionnaire. Le système proposé est considéré comme une extension fractionnaire du système généralisé tridimensionnel de Hénon. Un calcul fractionnaire discret y sera utilisé pour analyser la dynamique du nouveau système fractionnaire. On va également proposer une stratégie de stabilisation du système fractionnaire proposé. De plus, nous proposons un schéma de synchronisation dans lequel le système fractionnaire proposé est considéré comme esclave et le système maître est un autre système fractionnaire tridimensionnel. Tout au long de la section, des solutions numériques seront présentées pour confirmer les conclusions et vérifier la faisabilité des lois proposées.

## **3.2 synchronisation hybride généralisée**

Dans cette section, en combinant la synchronisation projective hybride (FSHPS) et la synchronisation projective hybride inverse (IFSHPS), nous généralisons l'idée de la synchronisation chaotique hybride en temps discret. En basant sur la théorie de la stabilité des systèmes linéaires discrets et de la théorie de la stabilité de Lyapunov, de nouvelles approches sont proposées pour étudier le nouveau type de synchronisation hybride entre des systèmes chaotiques de différentes dimensions. Plusieurs exemples numériques ont mis en évidence l'efficacité des nouvelles ap-



proches développées ici. Le contenu de cette section a fait l'objet d'une publication : **On New Generalized Hybrid Synchronization in Chaotic and Hyperchaotic Discrete-time Dynamical Systems**, Journal of Applied Nonlinear Dynamics 8(3) (2019) 435-445 [174].

### 3.2.1 Définitions des synchronisations FSHPS et IFSHPS

Considérons les systèmes chaotiques maître et esclave suivants

$$x_i(k+1) = F_i(X(k)), i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

$$y_i(k+1) = G_i(Y(k)) + u_i, i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.2)$$

où  $X(k) = (x_i(k))_{1 \leq i \leq n}$ ,  $Y(k) = (y_i(k))_{1 \leq i \leq m}$  sont les états du système maître et esclave, respectivement,  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $1 \leq i \leq n$ ),  $G_i : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $1 \leq i \leq m$ ), et  $u_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  sont des contrôleurs à déterminer.

**Définition 3.1** [113] *Le couplet des systèmes maître-esclave (3.1)-(3.2) est en synchronisation complète projective hybride (FSHPS) lorsque, pour une condition initiale, il existe des contrôleurs  $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$  et des constantes réelles données  $(\alpha_{ij})_{m \times n}$  de telle sorte que les erreurs de synchronisations*

$$e_i(k) = y_i(k) - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j(k), i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.3)$$

satisfont que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_i(k) = 0$ .

**Définition 3.2** [175] *Le couplet des systèmes maître-esclave (3.1)-(3.2) est en synchronisation complète projective hybride inverse (IFSHPS) lorsque, pour une condition initiale, il existe des contrôleurs  $(u_i)_{1 \leq i \leq m}$  et des constantes réelles données  $(\beta_{ij})_{n \times m}$  de telle sorte que les erreurs de synchronisations*

$$e_i(k) = x_i(k) - \sum_{j=1}^m \beta_{ij} y_j(k), i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4)$$

satisfont que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_i(k) = 0$ .

#### Coexistence de FSHPS et IFSHPS en 2-D

### Description des systèmes maître et esclave

Considérons le système maître suivant

$$x_i(k+1) = \sum_{j=1}^2 a_{ij}x_j(k) + f_i(X(k)), i = 1, 2. \quad (3.5)$$

Où  $X(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$  et le vecteur d'état du système maître,  $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  est la partie linéaire du système maître,  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 2$ , sont des fonctions non-linéaires. Comme un système esclave, nous considérons le système suivant :

$$y_i(k+1) = g_i(Y(k)) + u_i, i = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Où  $Y(k) = (y_1(k), y_2(k), y_3(k))^T$  et le vecteur d'état du système esclave,  $g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u_i$  sont des contrôleurs à déterminer.

### Formulation du problème

On dit qu'une synchronisation FSHPS et IFSHPS coexistent pour la synchronisation du système maître (3.5) et le système esclave (3.6) en 2-D, s'il existe des contrôleurs  $u_i, i = 1, 2, 3$ , et des nombres réels  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ , de telle sorte que les erreurs de synchronisation

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - \alpha_1 x_1(k) - \alpha_2 x_2(k), \\ e_2(k) = x_2(k) - \beta_1 y_1(k) - \beta_2 y_2(k) - \beta_3 y_3(k), \end{cases} \quad (3.7)$$

satisfont  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_i(k) = 0$ , pour  $i = 1, 2$ .

### Résultats analytiques

Le système des erreurs (3.7) entre le système maître (3.5) et le système esclave (3.6) peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} e_1(k+1) = R_1 + u_1, \\ e_2(k+1) = R_2 - \beta_1 u_1 - \beta_2 u_2 - \beta_3 u_3, \end{cases} \quad (3.8)$$

où

$$\begin{cases} R_1 = g_1(Y(k)) - \alpha_1 \sum_{j=1}^2 a_{1j}x_j(k) - \alpha_1 f_1(X(k)) - \alpha_2 \sum_{j=1}^2 a_{2j}x_j(k) - \alpha_2 f_2(X(k)), \\ R_2 = \sum_{j=1}^2 a_{2j}x_j(k) + f_2(X(k)) - \beta_1 g_1(Y(k)) - \beta_2 g_2(Y(k)) - \beta_3 g_3(Y(k)). \end{cases} \quad (3.9)$$

Le système des erreurs (3.8) peut être décrit sous la forme suivante

$$e(k+1) = R + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & -\beta_2 & -\beta_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Où  $e(k+1) = (e_1(k+1), e_2(k+1))^T$  et  $R = (R_1, R_2)^T$ .

Pour achever une synchronisation entre le système maître (3.5) et le système esclave (3.6), on suppose que  $\beta_2 \neq 0$ . Donc nous avons le résultat suivant :

**Théorème 3.1** *Les synchronisations FSHPS et IFSHPS coexistent entre le système maître (3.5) et le système esclave (3.6) sous les conditions suivantes*

- (i)  $(u_1, u_2)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\beta_1}{\beta_2} & -\frac{1}{\beta_2} \end{pmatrix} [(A - C)e(k) - R]$  et  $u_3 = 0$ , où  $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$  et  $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .
- (ii) La matrice de contrôle  $C$  est choisie de telle sorte que les valeurs propres de  $A - C$  sont strictement à l'intérieur du disque unitaire.

**Preuve** En utilisant  $u_3 = 0$ , le système des erreurs (3.10) peut être décrit comme

$$e(k+1) = R + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\beta_1 & -\beta_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

et en substituant la loi du contrôle décrite en (i) dans (3.11), on aura

$$e(k+1) = (A - C)e(k). \quad (3.12)$$

Dans ce cas, la matrice de contrôle  $C$  est choisie de telle sorte que les valeurs propres de  $A - C$  sont strictement à l'intérieur du disque unitaire. Selon la théorie de stabilité des systèmes discrets linéaires, on conclut que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_i(k) = 0, i = 1, 2$ . ■

### Application numérique

Considérons le système bidimensionnel de Fold [176] comme un système maître et le système tridimensionnel généralisé de Hénon comme un système esclave. Le système maître est définie par

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) + ax_1(k), \\ x_2(k+1) = b + x_1^2(k), \end{cases} \quad (3.13)$$

Le système (3.13) a un attracteur chaotique, comme montré dans la figure 3.1 pour  $(a, b) = (-0.1, 0.7)$ .

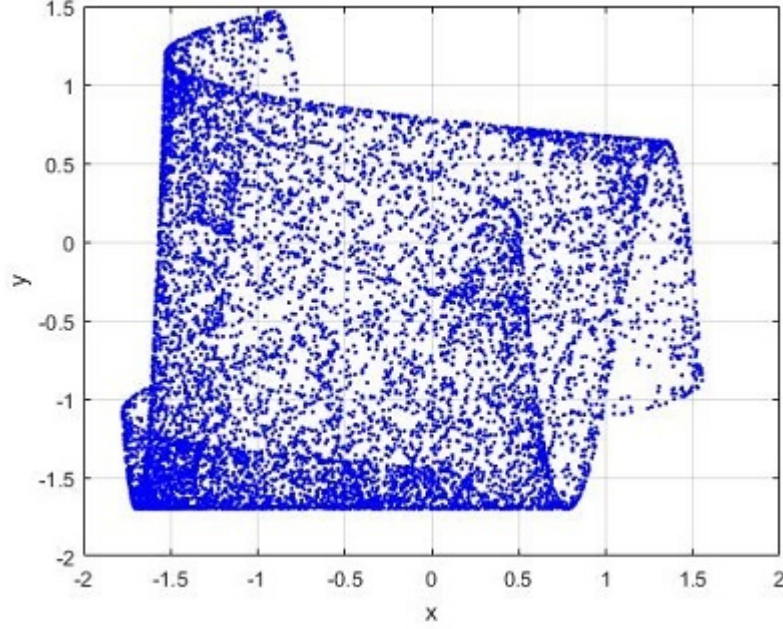


FIG. 3.1 – L'attracteur chaotique du système (3.13) pour  $(a, b) = (-0.1, 0.7)$ .

Le système esclave est décrit par

$$\begin{cases} y_1(k+1) = -dy_2(k) + u_1, \\ y_2(k+1) = y_3(k) + 1 - cy_2^2(k) + u_2, \\ y_3(k+1) = dy_2(k) + y_1(k) + u_3, \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $U = (u_1, u_2, u_3)^T$  est le vecteur des contrôles. Le système incontrôlé (3.14) a un attracteur hyperchaotique[141], comme montré dans la figure 3.2, pour  $(c, d) = (1.07, 0.3)$ .

Dans cet exemple, le système des erreurs entre les systèmes (3.13) et (3.14) est donné par

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - \alpha_1 x_1(k) - \alpha_2 x_2(k), \\ e_2(k) = x_2(k) - \beta_1 y_1(k) - \beta_2 y_2(k) - \beta_3 y_3(k), \end{cases} \quad (3.15)$$

où  $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \beta_1 = -2, \beta_2 = 3$  et  $\beta_3 = -2$ . Donc selon notre approche présentée dans la précédente subsection, la matrice  $A$  est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et la matrice de contrôle  $C$  peut être choisie comme suit

$$C = \begin{pmatrix} 0.3 & 1 \\ 0 & 0.82 \end{pmatrix}.$$

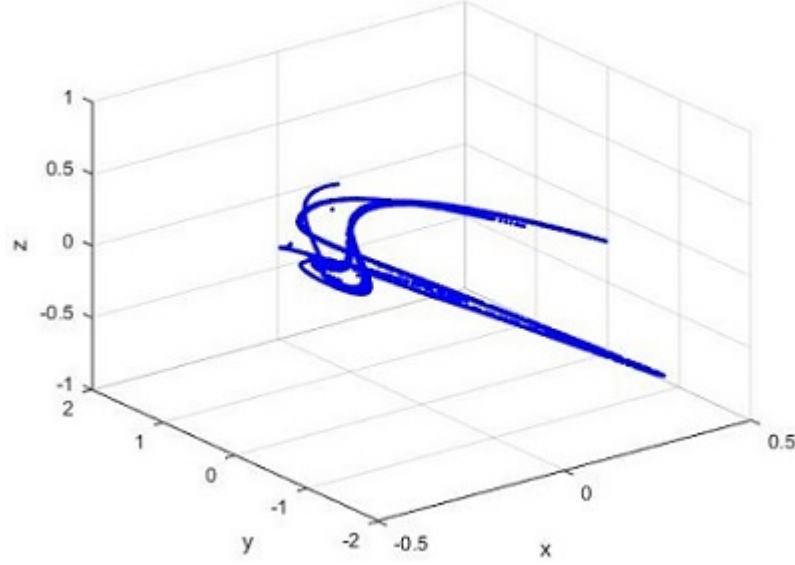


FIG. 3.2 – L'attracteur hyperchaotique du système incontrôlé(3.14) quand  $(c, d) = (1.07, 0.3)$ .

Les contrôleurs  $u_1, u_2$  et  $u_3$  sont désignés comme suit

$$\begin{cases} u_1 = -0.1e_1(k) + x_2(k) + ax_1(k) + 2b + 2x_1^2(k), \\ u_2 = -\frac{4}{15}e_1(k) + \frac{41}{150}e_2(k) - \frac{1}{2}x_2(k) - \frac{a}{2}x_1(k) - \frac{3}{2}x_1^2(k) + \frac{3}{2}y_3(k) \\ \quad - \frac{3c}{2}y_2^2(k) + y_1(k) + \frac{3}{2}(1 - b), \\ u_3 = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Il est clair de voir que toutes les valeurs propres de  $A - C$  sont strictement à l'intérieur du disque unitaire. Donc, dans ce cas, les systèmes (3.13) et (3.14) sont synchronisés en 2D. L'évolution des fonctions des erreurs est montrée dans la figure 3.3

### 3.2.2 Coexistence de FSHPS et IFSHPS en 3D

#### Description des systèmes maître et esclave

Maintenant, nous considérons les systèmes maître et esclave chaotiques dans la forme suivante

$$x_i(k+1) = f_i(X(k)), i = 1, 2, \quad (3.17)$$

$$y_i(k+1) = \sum_{j=1}^3 b_{ij}y_j(k) + g_i(Y(k)) + u_i, i = 1, 2, 3, \quad (3.18)$$

où  $X(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$  et  $Y(k) = (y_1(k), y_2(k), y_3(k))^T$  sont les vecteurs d'états du système maître et esclave respectivement,  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 2, (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la partie linéaire du

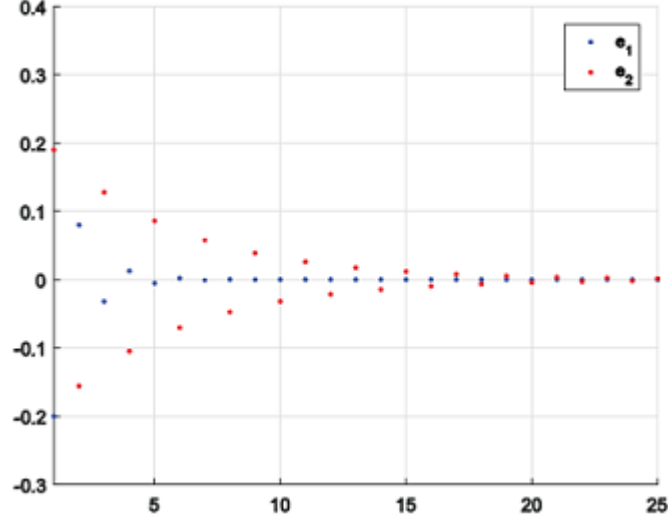


FIG. 3.3 – L'évolution des erreurs de synchronisation  $e_1$  et  $e_2$  entre le système maître (3.13) et le système esclave (3.14).

système esclave,  $g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , sont des fonctions non-linéaires et  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sont des contrôleurs à déterminer.

### Formulation du problème

Le problème de coexistence d'une synchronisation FSHPS et IFSHPS entre le système maître (3.17) et le système esclave (3.18) en 3D, est de déterminer les contrôleurs  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , et des nombres réels  $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq 2}$ ,  $(\delta_i)_{1 \leq i \leq 3}$ ,  $(\epsilon_i)_{1 \leq i \leq 2}$ , de telle sorte que les erreurs de synchronisation

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - \gamma_1 x_1(k) - \gamma_2 x_2(k), \\ e_2(k) = x_2(k) - \delta_1 y_1(k) - \delta_2 y_2(k) - \delta_3 y_3(k), \\ e_3(k) = y_3(k) - \epsilon_1 x_1(k) - \epsilon_2 x_2(k), \end{cases} \quad (3.19)$$

satisfont  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_i(k) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

### Résultat analytique

Le système d'erreur (3.19), entre le système maître (3.17) et le système esclave (3.18), peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} e_1(k+1) = T_1 + u_1, \\ e_2(k+1) = T_2 - \delta_1 u_1 - \delta_2 u_2 - \delta_3 u_3, \\ e_3(k+1) = T_3 + u_3, \end{cases} \quad (3.20)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1 = \sum_{j=1}^3 b_{1j}y_j(k) + g_1(Y(k)) - \gamma_1 f_1(X(k)) - \gamma_2 f_2(X(k)), \\ T_2 = f_2(X(k)) - \delta_1 \sum_{j=1}^3 b_{1j}y_j(k) - \delta_1 g_1(Y(k)) - \delta_2 \sum_{j=1}^3 b_{2j}y_j(k) - \delta_2 g_2(Y(k)) \\ \quad - \delta_3 \sum_{j=1}^3 b_{3j}y_j(k) - \delta_3 g_3(Y(k)), \\ T_3 = \sum_{j=1}^3 b_{3j}y_j(k) + g_3(Y(k)) - \epsilon_1 f_1(X(k)) - \epsilon_2 f_2(X(k)). \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Le système des erreurs (3.21) peut être décrit dans la forme suivante

$$e(k+1) = T + M \times U, \quad (3.22)$$

où  $e(k+1) = (e_1(k+1), e_2(k+1), e_3(k+1))^T$ ,  $T = (T_1, T_2, T_3)^T$ ,  $U = (u_1, u_2, u_3)^T$  et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\delta_1 & -\delta_2 & -\delta_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour achever une synchronisation entre le système maître (3.17) et le système esclave (3.18), on suppose que  $\delta_2 \neq 0$  et le contrôle  $U$  peut être construit comme suit

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\delta_1}{\delta_2} & \frac{1}{\delta_2} & -\frac{\delta_3}{\delta_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [(B - L)e(k) - T], \quad (3.23)$$

où  $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$  et  $L \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la matrice de contrôle à déterminer ultérieurement. En substituant la loi de contrôle (3.23) dans (3.22), le système des erreurs peut être décrit comme suit :

$$e(k+1) = (B - L)e(k). \quad (3.24)$$

On construit une fonction de Lyapunov  $V(e(k)) = e^T(k)e(k)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= e^T(k+1)e(k+1) - e^T(k)e(k) \\ &= e^T(k)(B - L)^T(B - L)e(k) - e^T(k)e(k) \\ &= e^T(k) [(B - L)^T(B - L) - I] e(k). \end{aligned}$$

Dans ce cas, la matrice de contrôle  $L$  est choisie de telle sorte que  $(B - L)^T(B - L) - I$  est une matrice définie négative. Donc, de la théorie de stabilité de Lyapunov, il est immédiat que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_i(k) = 0$ , alors les systèmes (3.17) et (3.18) sont globalement synchronisés en 3D. Donc, nous avons prouvé le résultat suivant :

**Théorème 3.2** *Les synchronisations FSHPs et IFSHPS coexistent entre le système maître (3.17) et le système esclave (3.18) sous les conditions suivantes :*

$$(i) (u_1, u_2, u_3)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\delta_1}{\delta_2} & -\frac{1}{\delta_2} & -\frac{\delta_3}{\delta_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} [(B - L)e(k) - T],$$

(ii) *La matrice de contrôle  $L$  est choisie de telle sorte que  $(B - L)^T(B - L) - I$  est une matrice définie négative.*

### Application numérique

Considérons le système discret bidimensionnel de Lorenz [162] comme le système maître et le système tridimensionnel de Hénon-like comme le système esclave. Le système maître est donné par

$$\begin{cases} x_1(k+1) = (1 + ab)x_1(k) - bx_1(k)x_2(k), \\ x_2(k+1) = (1 - b)x_2(k) + bx_1^2(k). \end{cases} \quad (3.25)$$

Le système (3.25) a un attracteur chaotique, comme montré dans la figure 3.4 pour  $(a; b) = (1.25, 0.75)$ .

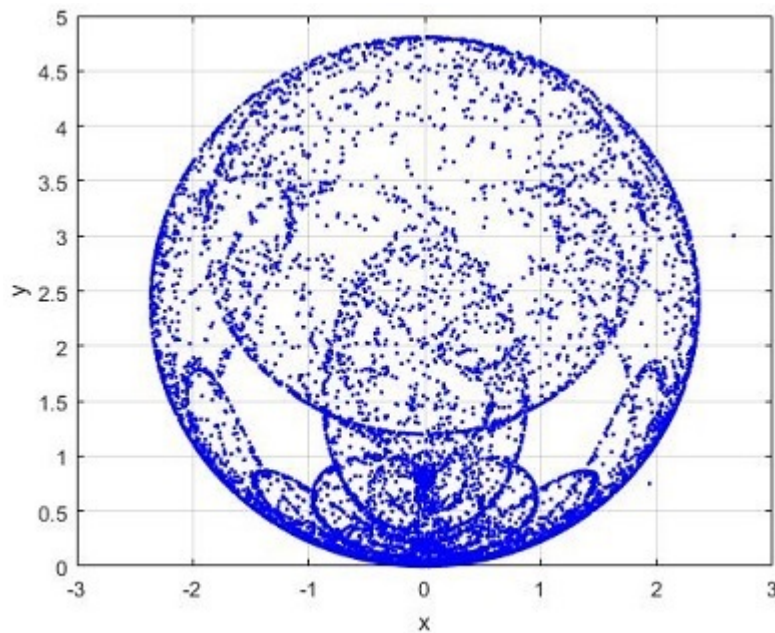


FIG. 3.4 – L'attracteur chaotique du système (3.25) pour  $(a; b) = (1.25, 0.75)$ .



Le système esclave est donné par :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = 1 + y_3(k) - cy_2^2(k) + u_1, \\ y_2(k+1) = 1 + dy_2(k) - cy_1^2(k) + u_2, \\ y_3(k+1) = dy_1(k) + u_3, \end{cases} \quad (3.26)$$

où  $U = (u_1, u_2, u_3)^T$  est le vecteur contrôleur. Le système incontrôlé (3.26) a un attracteur chaotique [141], comme montré dans la figure 3.5, quand  $(c, d) = (1.4, 0.2)$ .

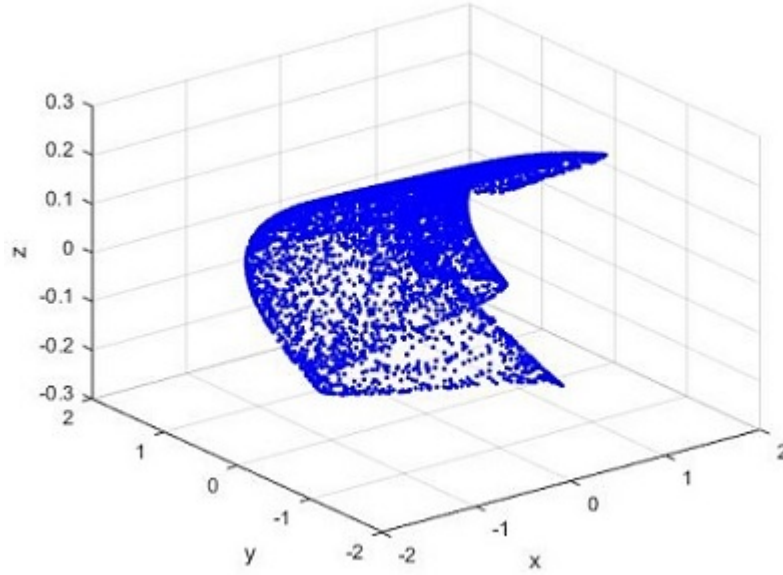


FIG. 3.5 – L’attracteur chaotique du système incontrôlé (3.26) pour  $(c, d) = (1.4, 0.2)$ .

Dans cet exemple, le système des erreurs entre les systèmes (3.25) et (3.26) est donné comme suit

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - \gamma_1 x_1(k) - \gamma_2 x_2(k), \\ e_2(k) = x_2(k) - \delta_1 y_1(k) - \delta_2 y_2(k) - \delta_3 y_3(k), \\ e_3(k) = y_3(k) - \epsilon_1 x_1(k) - \epsilon_2 x_2(k), \end{cases} \quad (3.27)$$

où  $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = 2, \delta_1 = 3, \delta_2 = 2, \delta_3 = 1, \epsilon_1 = -1$  and  $\epsilon_2 = -2$ . Donc selon notre approche présentée dans la sous-section précédente, la matrice  $B$  est donnée par

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et la matrice du contrôle  $L$  peut être choisie comme suit

$$L = \begin{pmatrix} -0.44 & 0 & 1 \\ 0 & -0.7 & 0 \\ 0.2 & 0 & -0.13 \end{pmatrix},$$

Les contrôleurs  $u_1, u_2$  et  $u_3$  sont donnés par

$$\begin{cases} u_1 = 0.44e_1(k) - 1 - y_3(k) + cy_2^2(k) + (1 + ab)x_1(k) - bx_1(k)x_2(k) \\ \quad + 2(1 - b)x_2(k) + 2bx_1^2(k), \\ u_2 = -0.66e_1(k) - 0.45e_2(k) - 0.065e_3(k) + 3y_3(k) - 3cy_2^2(k) + dy_2(k) - cy_1^2(k) \\ \quad - 2(1 + ab)x_1(k) + 3bx_1(k)x_2(k) - \frac{9}{2}(1 - b)x_2(k) - \frac{9}{2}bx_2^2(k) + 7, \\ u_3 = 0.13e_3(k) + dy_1(k) + (1 + ab)x_1(k) - bx_1(k)x_2(k) + 2(1 - b)x_2(k) \\ \quad + 2bx_1^2(k). \end{cases} \quad (3.28)$$

Par des calculs simples, on peut voir que  $(B - L)^T(B - L) - I$  est une matrice définie négative. Par conséquent, dans ce cas, les systèmes (3.25) et (3.26) sont synchronisés en 3D. L'évolution des fonctions des erreurs est montrée dans la figure 3.6.

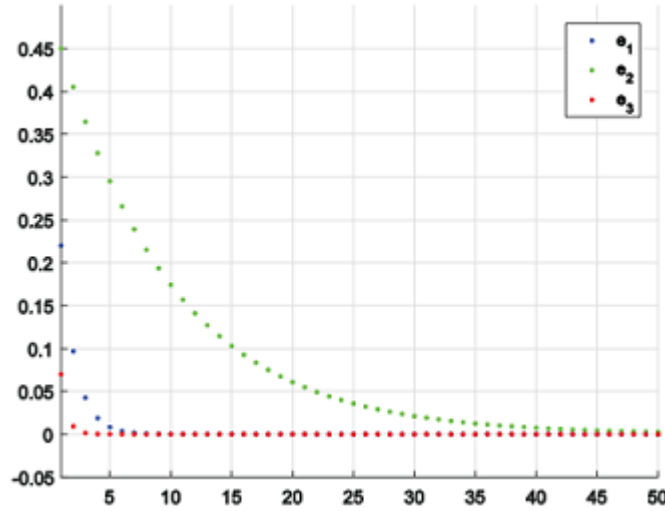


FIG. 3.6 – L'évolution des erreurs de synchronisation  $e_1, e_2$  et  $e_3$  entre le système maître (3.25) et le système esclave (3.26).

### 3.3 Synchronisation développée et réduite

Cette section est consacrée aux nouveaux schémas de synchronisation réduite et développée entre les systèmes chaotiques discrets de dimensions différentes. En basant sur la théorie de

stabilité de Lyapunov, deux lois de contrôle sont proposées afin de prouver la coexistence de GS et IGS entre un système maître tridimensionnel et un système esclave bidimensionnel en 2D et en 3D respectivement. Le contenu de cette section fait l'objet d'une publication : **Increased and Reduced Synchronization between Discrete-Time Chaotic and Hyperchaotic Systems**, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, 19 (2) (2019) 313-318 [177].

### 3.3.1 Système maître et esclave

Considérons le système maître suivant

$$\begin{cases} x_1(k+1) = f_1(x_1(k), x_2(k)), \\ x_2(k+1) = f_2(x_1(k), x_2(k)), \end{cases} \quad (3.29)$$

où  $(x_1(k), x_2(k))^T$  est le vecteur d'état du système maître,  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 2$ . Et pour le système esclave considérons le système hyperchaotique suivant

$$\begin{cases} y_1(k+1) = \sum_{j=1}^3 b_{1j}y_j(k) + g_1(y_1(k), y_2(k), y_3(k)) + u_1, \\ y_2(k+1) = \sum_{j=1}^3 b_{2j}y_j(k) + g_2(y_1(k), y_2(k), y_3(k)) + u_2, \\ y_3(k+1) = \sum_{j=1}^3 b_{3j}y_j(k) + g_3(y_1(k), y_2(k), y_3(k)) + u_3, \end{cases} \quad (3.30)$$

où  $(y_1(k), y_2(k), y_3(k))^T$  est le vecteur d'état du système esclave,  $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  est la partie linéaire du système esclave,  $g_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq 3$ , sont des fonctions non-linéaires et  $u_i, 1 \leq i \leq 3$ , sont les contrôleurs à déterminer.

### 3.3.2 Synchronisation en 3D

Le problème de la synchronisation développée en 3D entre le système maître (3.29) et le système esclave (3.30), est de trouver les contrôleurs  $u_i, 1 \leq i \leq 3$ , et les fonctions  $\phi, \chi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de façon que les erreurs de synchronisation

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - \phi(x_1(k), x_2(k)), \\ e_2(k) = x_2(k) - \varphi(y_2(k)), \\ e_3(k) = y_3(k) - \chi(x_1(k), x_2(k)), \end{cases} \quad (3.31)$$

satisfont  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_i(k) = 0$ , pour  $i = 1, 2, 3$ .

**Remarque 3.1** Du système d'erreur (3.31) , il est clair que  $y_1$  et  $(x_1, x_2)^T$  sont généralement synchronisés,  $x_2$  et  $y_2$  sont généralement inversement synchronisés et  $y_3$  est en synchronisation générale avec  $x_1$  et  $x_2$ . Par conséquent, une synchronisation généralisée et une synchronisation généralisée inverse coexistent dans la synchronisation des systèmes (3.29) et (3.30) en 3D.

Supposons que  $\varphi$  est une fonction inversible et son inverse est noté  $\varphi^{-1}$ . Donc nous avons prouvé le résultat suivant.

**Théorème 3.3** La synchronisation développée en 3D entre les systèmes (3.29) et (3.30) est achevée sous la les lois de contrôle suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = - \sum_{j=1}^3 b_{1j} y_j(k) - g_1(Y(k)) + \phi(f_1(X(k)), f_2(X(k))) + \frac{1}{2}e_1(k) + \frac{2}{5}e_2(k) - \frac{2}{3}e_3(k), \\ u_2 = - \sum_{j=1}^3 b_{2j} y_j(k) - g_2(Y(k)) + \varphi^{-1} \left( \frac{1}{2}e_1(k) + \frac{2}{5}e_2(k) + \frac{2}{3}e_3(k) - f_2(X(k)) \right), \\ u_3 = - \sum_{j=1}^3 b_{3j} y_j(k) - g_3(Y(k)) + \chi(f_1(X(k)), f_2(X(k))) + \frac{1}{2}e_1(k) - \frac{4}{5}e_2(k), \end{array} \right. \quad (3.32)$$

où  $X(k) = (x_1(k), x_2(k))^T$  et  $Y(k) = (y_1(k), y_2(k), y_3(k))^T$ .

**Preuve** Le système d'erreur (3.31) peut être décrit

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1(k+1) = \sum_{j=1}^3 b_{1j} y_j(k) + g_1(Y(k)) + u_1 - \phi(f_1(X(k)), f_2(X(k))), \\ e_2(k+1) = f_2(X(k)) - \varphi \left( \sum_{j=1}^3 b_{2j} y_j(k) + g_2(Y(k)) + u_2 \right), \\ e_3(k+1) = \sum_{j=1}^3 b_{3j} y_j(k) + g_3(Y(k)) - \chi(f_1(X(k)), f_2(X(k))), \end{array} \right. \quad (3.33)$$

substituant la loi de contrôle (3.32) dans (3.33) on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1(k+1) = \frac{1}{2}e_1(k) + \frac{2}{5}e_2(k) - \frac{2}{3}e_3(k), \\ e_2(k+1) = \frac{1}{2}e_1(k) + \frac{2}{5}e_2(k) + \frac{2}{3}e_3(k), \\ e_3(k+1) = \frac{1}{2}e_1(k) - \frac{4}{5}e_2(k). \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Construisons une fonction de Lyapunov de la forme  $V(e_1(k), e_2(k), e_3(k)) = e_1^2(k) + e_2^2(k) + e_3^2(k)$ .

$$\begin{aligned} \Delta V &= e_1^2(k+1) + e_2^2(k+1) + e_3^2(k+1) - e_1^2(k) - e_2^2(k) - e_3^2(k) \\ &= -\frac{1}{4} \left( e_1^2(k) + \frac{17}{25} e_2^2(k) + \frac{1}{9} e_3^2(k) \right) < 0. \end{aligned}$$

Il est immédiat que toutes les solutions du système d'erreur (3.34) tendent vers zéro quand  $k \rightarrow +\infty$ . Par conséquent, les systèmes (3.29) et (3.30) sont globalement synchronisés en 3D. ■

Le résultat de la simulation numérique du système d'erreur (3.34) est illustré dans la figure 3.7.

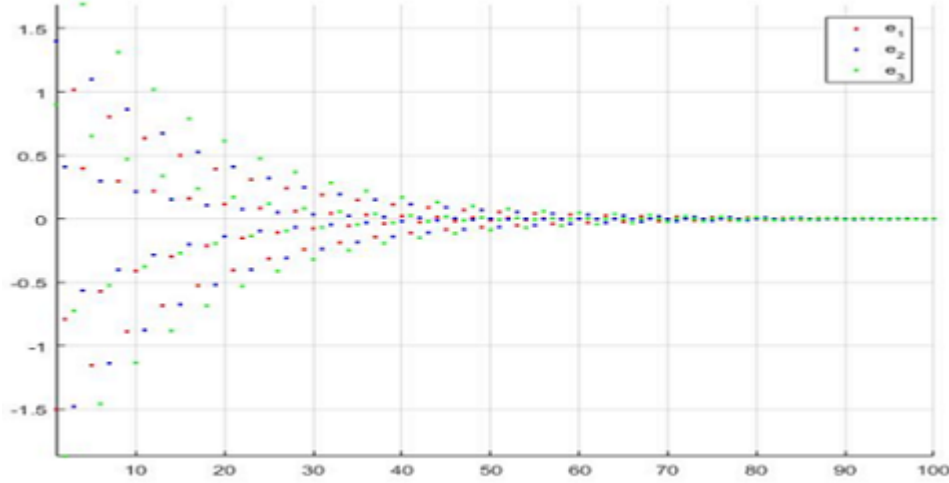


FIG. 3.7 – L'évolution des erreurs de synchronisation (3.34).

### 3.3.3 Synchronisation en 2D

Le problème de la synchronisation réduite en 2D entre le système maître (3.29) et le système esclave (3.30), est de trouver les contrôleurs  $u_i, i = 1, 2, 3$ , et des fonctions  $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \lambda, \omega :$

$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de telle sorte que les erreurs de synchronisation

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - \psi(x_1(k), x_2(k)), \\ e_2(k) = x_2(k) - \lambda(y_2(k)) - \omega(y_3(k)), \end{cases} \quad (3.35)$$

satisfont que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_i(k) = 0$ , pour  $i = 1, 2$ . On suppose que les fonctions  $\lambda$  et  $\omega$  sont inversibles.

**Remarque 3.2** Du système des erreurs (3.35), il est clair que  $y_1$  est généralement synchronisé avec  $x_1$  et  $x_2$ , et  $x_2$  est inversement généralement synchronisé avec  $y_2$  et  $y_3$ . Par conséquent, une synchronisation généralisée et généralisée inverse co-existent pour la synchronisation des systèmes (3.29) et (3.30) en 2D.

Le système d'erreurs (3.35) peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \sum_{j=1}^3 b_{1j}y_j(k) + g_1(Y(k)) + u_1 - \psi(f_1(X(k)), f_2(X(k))), \\ e_2(k+1) = f_2(X(k)) - \lambda \left( \sum_{j=1}^3 b_{2j}y_j(k) + g_2(Y(k)) + u_2 \right) - \omega \left( \sum_{j=1}^3 b_{3j}y_j(k) + g_3(Y(k)) + u_3 \right). \end{cases} \quad (3.36)$$

Dans ce cas, la loi de contrôle  $U$  peut être construite comme suit

$$\begin{cases} u_1 = - \sum_{j=1}^3 b_{1j}y_j(k) - g_1(Y(k)) - u_1 + \psi(f_1(X(k)), f_2(X(k))) - e_1(k) - e_2(k), \\ u_2 = - \sum_{j=1}^3 b_{2j}y_j(k) - g_2(Y(k)) + \lambda^{-1}(e_1(k) - e_2(k)), \\ u_3 = - \sum_{j=1}^3 b_{3j}y_j(k) - g_3(Y(k)) + \omega^{-1}(f_2(X(k))), \end{cases} \quad (3.37)$$

où  $\lambda^{-1}$  et  $\omega^{-1}$  sont les fonctions inverses de  $\lambda$  et  $\omega$ , respectivement. En substituant la de contrôle(3.37) dans (3.36), le système d'erreurs peut être décrit comme suit

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \frac{1}{2}e_1(k) + \frac{1}{2}e_2(k), \\ e_2(k+1) = \frac{1}{2}e_1(k) - \frac{1}{2}e_2(k). \end{cases} \quad (3.38)$$

On construit une fonction de Lyapunov de la forme  $V(e_1(k), e_2(k)) = e_1^2(k) + e_2^2(k)$ ,

$$\begin{aligned} \Delta V &= e_1^2(k+1) + e_2^2(k+1) - e_1^2(k) - e_2^2(k) \\ &= -\frac{1}{2}(e_1^2(k) + e_2^2(k)) < 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, de la théorie de stabilité de Lyapunov, il est immédiat que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_i(k) = 0$ , ( $i = 1, 2$ ). D'où nous avons proposé le résultat suivant

**Théorème 3.4** Le système maître (3.29) et le système esclave (3.30) sont réduits synchronisés en 2D sous la loi de contrôle (3.37).

Le résultat de la simulation numérique du système d'erreurs (3.38) est illustré dans la figure 3.8.

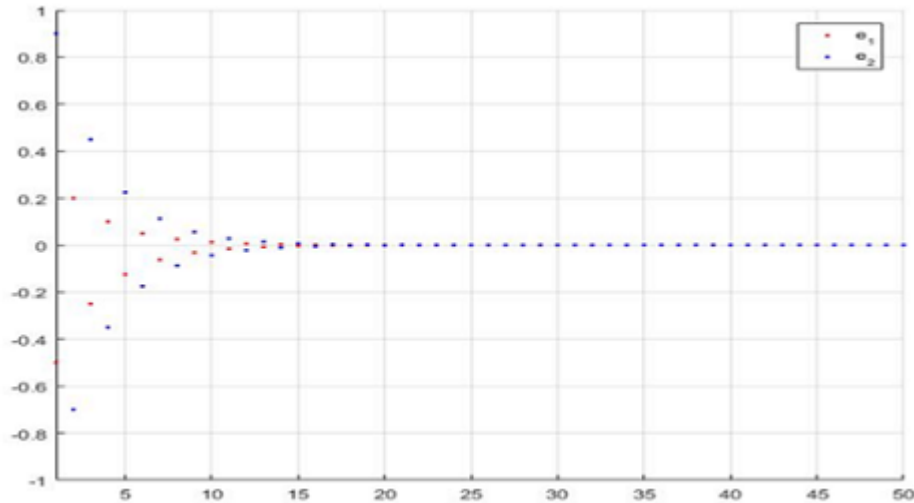


FIG. 3.8 – L'évolution des erreurs de synchronisation (3.38).

### 3.4 Système fractionnaire tridimensionnel généralisé de Hénon

Dans cette section, nous proposons une forme fractionnaire d'un nouveau système tridimensionnel généralisé de Hénon en étudiant l'existence du chaos et son contrôle. A l'aide des diagrammes de bifurcation, des portraits de phases et des exposants de Lyapunov, nous montrons que le comportement général du système fractionnaire proposé dépend de l'ordre fractionnaire. Nous présentons également deux schémas de contrôle du système en question. Cette section a fait l'objet d'une publication : **The fractional form of a new three-dimensional generalized Hénon map**, *Advances in Difference Equations* (2019) 2019 :122 [178].

#### 3.4.1 La dynamique du système

Considérons le nouveau système tridimensionnel généralisé de Hénon [179] suivant :

$$\begin{cases} x(n+1) = a - y^2(n) + bz(n), \\ y(n+1) = x(n), \\ z(n+1) = y(n), \end{cases} \quad (3.39)$$

où  $a$  et  $b$  sont les paramètres de bifurcation. Ce système est chaotique, par exemple, lorsque  $(a, b) = (0.7281, 0.5)$  et  $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 0)$ , comme illustré par les portraits des phases montrés dans la figure 3.9.

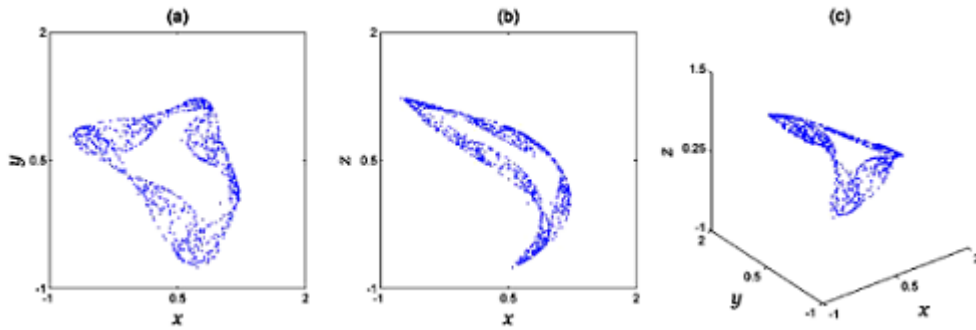


FIG. 3.9 – (a) L'attracteur chaotique du système (3.39) dans : (a) le plan  $x - y$  (b) le plan  $x - z$  (c) l'espace  $x - y - z$ .

Il est toujours nécessaire d'analyser le diagramme de bifurcation correspondant au paramètre spécifique et critique afin de mieux cerner le comportement (la dynamique) du système chaotique, voir figure 3.10.

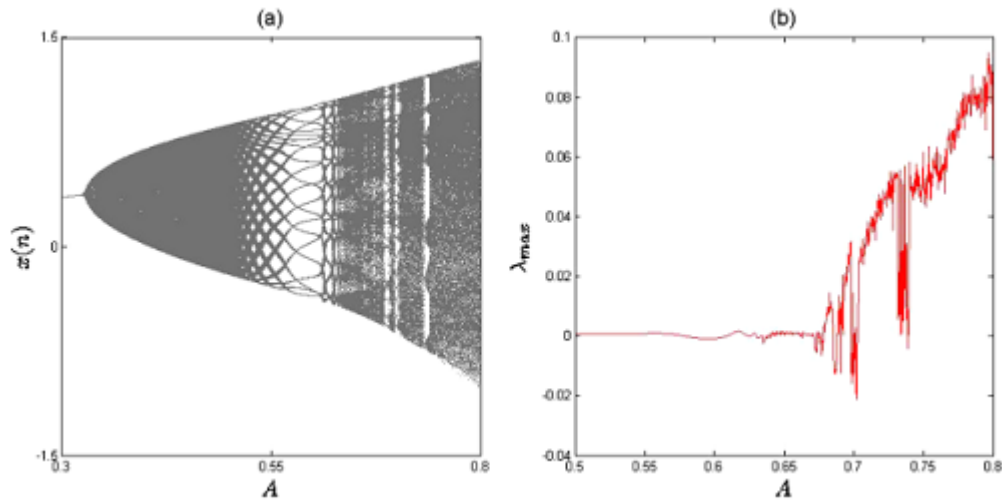


FIG. 3.10 – (a) Le diagramme de bifurcation du système (3.39); (b) L'exposant maximal de Lyapunov

Le système (3.39) peut être réécrit sous une forme de différence du premier ordre comme suit

$$\begin{cases} \Delta x(n) = a - y^2(n) + bz(n) - x(n), \\ \Delta y(n) = x(n) - y(n), \\ \Delta z(n) = y(n) - z(n). \end{cases} \quad (3.40)$$

Introduisons la delta différence de Caputo-like définie dans (1.22) on se ramène au système



d'ordre fractionnaire

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^v x(t) &= a - y^2(t-1+v) + bz(t-1+v) - x(t-1+v), \\ {}^C\Delta_a^v y(t) &= x(t-1+v) - y(t-1+v), \\ {}^C\Delta_a^v z(t) &= y(t-1+v) - z(t-1+v), \end{cases} \quad (3.41)$$

où  $t \in \mathbb{N}_{a+1-v}$ ,  $0 < v < 1$  désigne l'ordre fractionnaire, et  $a$  est le point initial. La formule intégrale discrete décrite dans Théorème 1.6, nous donne le système équivalent

$$\begin{cases} x(t) &= x(a) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1-v}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)} (a - y^2(s-1+v) + bz(s-1+v) - x(s-1+v)), \\ y(t) &= y(a) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1-v}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)} (x(s-1+v) - y(s-1+v)), \\ z(t) &= z(a) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{s=a+1-v}^{t-v} (t-s-1)^{(v-1)} (y(s-1+v) - z(s-1+v)), \end{cases} \quad (3.42)$$

où  $t \in \mathbb{N}_{a+1-v}$ . Prenant en compte que  $(t-s-1)^{(v-1)} = \frac{\Gamma(t-s)}{\Gamma(t-s-v+1)}$  est une fonction discrète de Kernel, et avec un point de départ  $a = 0$ , il en résulte les formules numériques suivantes

$$\begin{cases} x(n) &= x(0) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} (a - y^2(j-1) + bz(j-1) - x(j-1)), \\ y(n) &= y(0) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} (x(j-1) - y(j-1)), \\ z(n) &= z(0) + \frac{1}{\Gamma(v)} \sum_{j=1}^n \frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)} (y(j-1) - z(j-1)). \end{cases} \quad (3.43)$$

Par les mêmes valeurs des conditions initiales et des paramètres de bifurcation adoptés dans la figure 3.9 ci-dessus, des simulations sur ordinateur ont été utilisées pour évaluer les formules numériques (3.43) afin d'avoir une perspective autour de la dynamique du système fractionnaire (3.41). Le diagramme de bifurcation et l'exposant de Lyapunov maximal correspondant pour  $v \in [0.96, 1]$  sont montrés dans la figure 3.11 On pose  $n = 700$  et on illustre seulement les 200 dernières itérations. L'exposant de Lyapunov maximal a été calculé en utilisant l'algorithme de la matrice jacobienne proposé dans [180]. Les figures 3.11(a) et 3.11(b) visualisent comment le comportement du système régi par l'ordre fractionnaire  $v$ . D'abord, notons que si  $0 \leq v \leq 0.969$  le système fractionnaire diverge vers l'infini. En revanche, on peut observer qu'il existe des lignes verticales avec un exposant de Lyapunov maximal positif quand  $v \in ]0.969, 0.97[$ . Dans ce cas, la solution  $x(n)$  converge vers un attracteur chaotique.

Dans les figures 3.11(a) et figure 3.11(b), on peut voir qu'il y a une transition du chaos vers des cycles périodiques, suivie par des series d'apparition et de disparition de chaos, ce qui signifie que l'exposant de Lyapunov maximal change leurs valeurs entre des nombres et négatifs et positifs quand  $v \in [0.97, 0.986]$ . Finalement, quand  $v \in ]0.986, 1]$ , la solution  $x(n)$  converge toujours vers un attracteur étrange.

Dans ce qui suit, on illustre le diagramme de bifurcation pour  $a \in [0.3, 0.8]$ , voir figure 3.14. Pour avoir ces diagrammes on pose  $n = 2000$  et fixons  $b = 0.5$ . Puis enlevant les 1700 premiers resultats, et les 300 derniers points sont illustrés dans les figures 3.14(a) et 3.14(b), correspondantes aux valeurs d'ordre fractionnaire  $v = 0.987$  et  $v = 0.975$ , respectivement. Quand  $a$  passe à l'intervall  $[0.66, 0.7885]$ , des cycles périodiques et des régions chaotiques sont apparus. Toutefois, quand  $v = 0.975$ , on peut observer une transition du comportement chaotique vers orbite périodique de période 3 qui soudainement se transforme vers 3 petits attracteurs quand  $a = 0.326$ . En incrémentant le paramètre  $a$ , le système fractionnaire passe directement vers un régime purement chaotique. Il est imporant de montrer qu'un système dynamique fractionnaire ne jamais reproduit le même exposant maximal de Lyapunov deux fois de suite, on conclut que chaque valeur de  $v$  avait son propre attracteur.

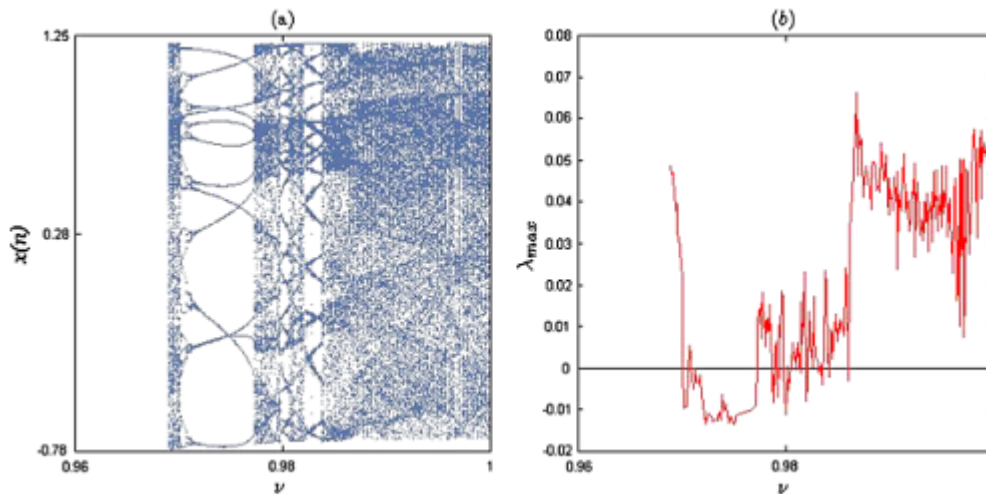


FIG. 3.11 – (a) Bifurcation du système fractionnaire (3.41) d'ordre fractionnaire  $v$ ; (b) Exposant maximal de Lyapunov en fonction d'ordre fractionnaire  $v$ .

Dans la figure 3.13, un attracteur qui contient une orbite périodique est illustré. Les figures 3.14 et 3.15 montrent des attracteurs chaotiques des systèmes fractionnaires correspondants aux valeurs  $v = 0.987$  et  $v = 0.9695$ , respectivement. Finalement, la figure 3.16 illustre les états du système fractionnaire avec 2000 itérations,  $(a, b) = (0.7281, 0.5)$ ,  $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 0)$  et

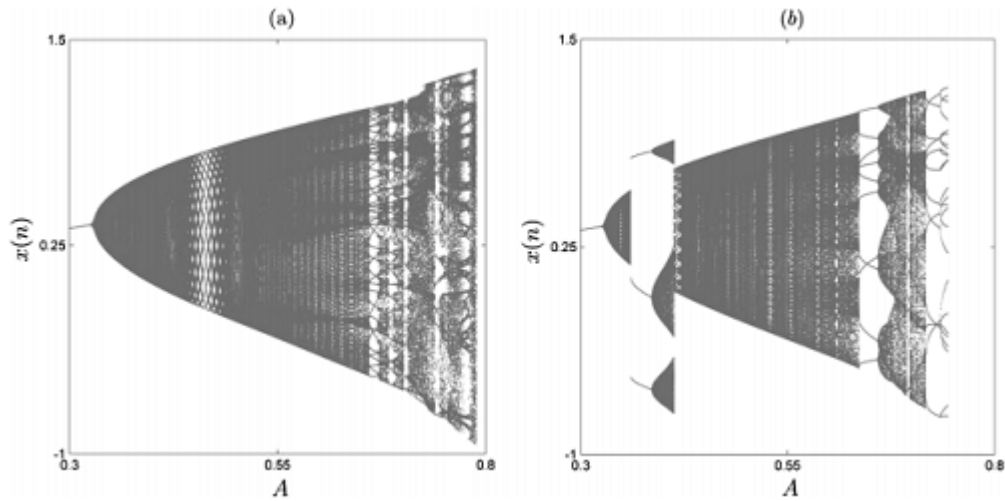


FIG. 3.12 – Diagramme de bifurcation dans le plan  $(a, x)$  pour  $b = 0.5$  quand : **(a)**  $v = 0.987$ , **(b)**  $v = 0.975$ .

$v = 0.987$ .

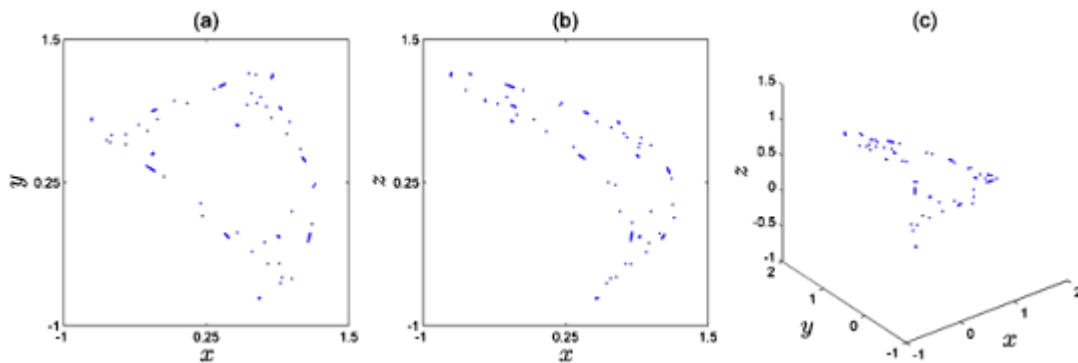


FIG. 3.13 – L'orbite périodique obtenue pour  $n = 2000$  et  $v = 0.975$  dans : **(a)** le plan  $x - y$ ; **(b)** le plan  $x - z$ ; **(c)** l'espace  $x - y - z$ .

### 3.4.2 Stratégie du contrôle

L'un des aspects les plus importants dans l'étude des systèmes dynamiques est le développement de stratégie de contrôle pour achever une stabilisation. Un autre aspect intéressant est la synchronisation d'un système chaotique avec un autre. Dans cette section, on introduit deux lois de contrôle ayant pour objectif de stabiliser et synchroniser le système fractionnaire proposé.

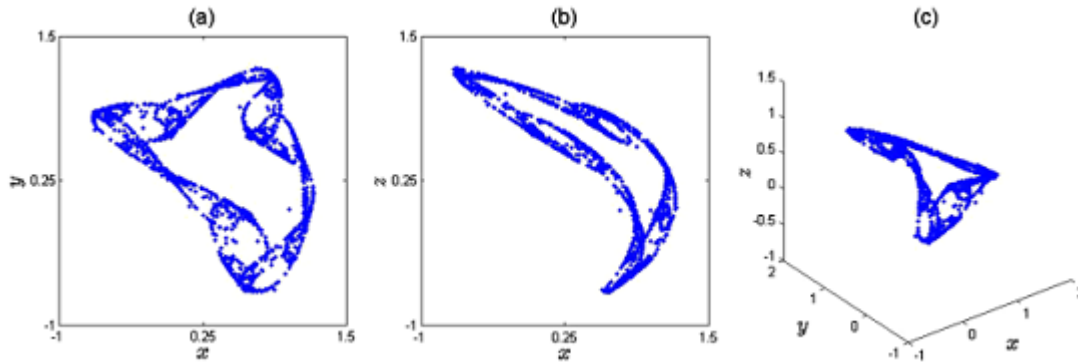


FIG. 3.14 – L’attracteur chaotique obtenu pour  $n = 2000$  et  $v = 0.987$  dans : (a) le plan  $x - y$  ; (b) le plan  $x - z$  ; (c) l’espace  $x - y - z$ .

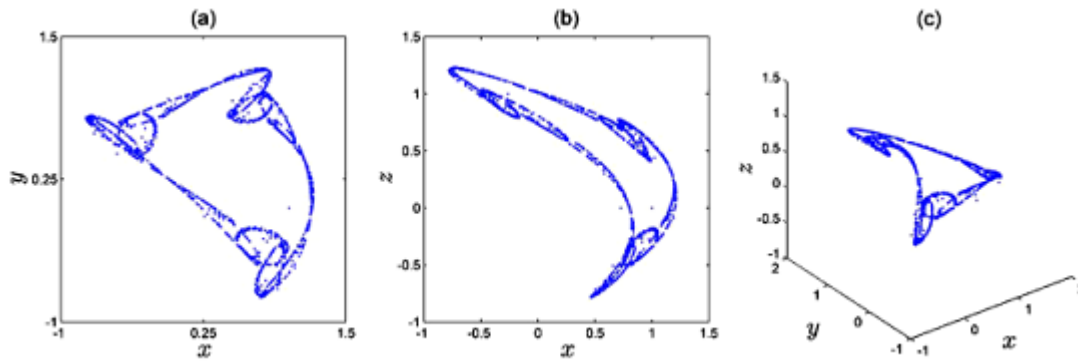


FIG. 3.15 – L’attracteur chaotique obtenu pour  $n = 2000$  et  $v = 0.9695$  dans : (a) le plan  $x - y$  ; (b) le plan  $x - z$  ; (c) l’espace  $x - y - z$ .

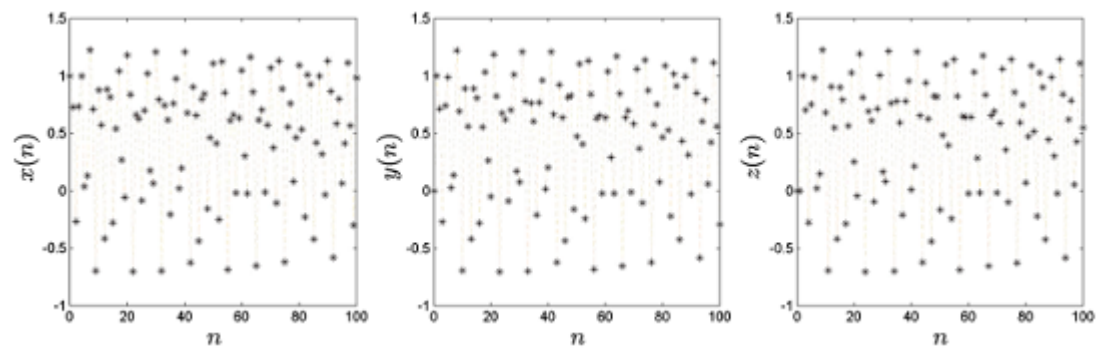


FIG. 3.16 – L’évolution des états du système fractionnaire pour  $v = 0.987$ .

## Stabilisation

L'objectif de stabiliser le système proposé est de trouver une loi de contrôle adaptative de façon que les états du système sont stabilisés vers zéro. Les théorèmes suivants présentent nos résultats.

**Théorème 3.5** *Le système d'ordre fractionnaire (3.41) peut être stabilisé sous la loi de contrôle unidimensionnelle suivante :*

$$u(t) = -a + y^2(t) - bz(t). \quad (3.44)$$

**Preuve** Le système d'ordre fractionnaire contrôlé (3.41) peut être décrit

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^v x(t) &= a - y^2(t-1+v) + bz(t-1+v) - x(t-1+v) + u(t-1+v), \\ {}^C\Delta_a^v y(t) &= x(t-1+v) - y(t-1+v), \\ {}^C\Delta_a^v z(t) &= y(t-1+v) - z(t-1+v). \end{cases} \quad (3.45)$$

Substituant la loi de contrôle proposée (3.44) dans (3.45) on aura

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^v x(t) &= -x(t-1+v), \\ {}^C\Delta_a^v y(t) &= x(t-1+v) - y(t-1+v), \\ {}^C\Delta_a^v z(t) &= y(t-1+v) - z(t-1+v). \end{cases} \quad (3.46)$$

Le système (3.46) peut être écrit sous la forme

$${}^C\Delta_a^v (x(t), y(t), z(t))^T = M \times (x(t-1+v), y(t-1+v), z(t-1+v))^T, \quad (3.47)$$

où

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Notre objectif est de montrer que le zéro équilibre de (3.47) est asymptotiquement stable, que signifie que les états du système converge vers zéro. La stabilité asymptotique peut être établie en utilisant la méthode de linéarisation décrite dans Théorème 1.7. Maintenant il est facile de voir que toutes les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  de la matrice  $M$  satisfont

$$|\arg \lambda_i| = \pi > \frac{v\pi}{2} \text{ et } |\lambda_i| = 1 < 2 \cos \left( \frac{|\arg \lambda_i| - \pi}{2 - v} \right)^v, \quad i = 1, 2, 3.$$

Selon le Théorème 1.7 il est évident que la zéro solution de (3.47) est asymptotiquement stable et, par conséquent, le système d'ordre fractionnaire (3.41) est stabilisé.

■

Une simulation numérique a été effectuée pour illustrer le résultat du Théorème 3.5. On a choisi les paramètres  $(a, b) = (0.7281, 0.5)$ , et les conditions initiales  $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 0, 0)$ , et l'ordre fractionnaire  $v = 0.98$ . Supposant  $a = 0$ , l'évolution des états vers zéro est illustrée dans la figure 3.17, ce qui confirme le contrôle théorique proposé dans Théorème 3.5.

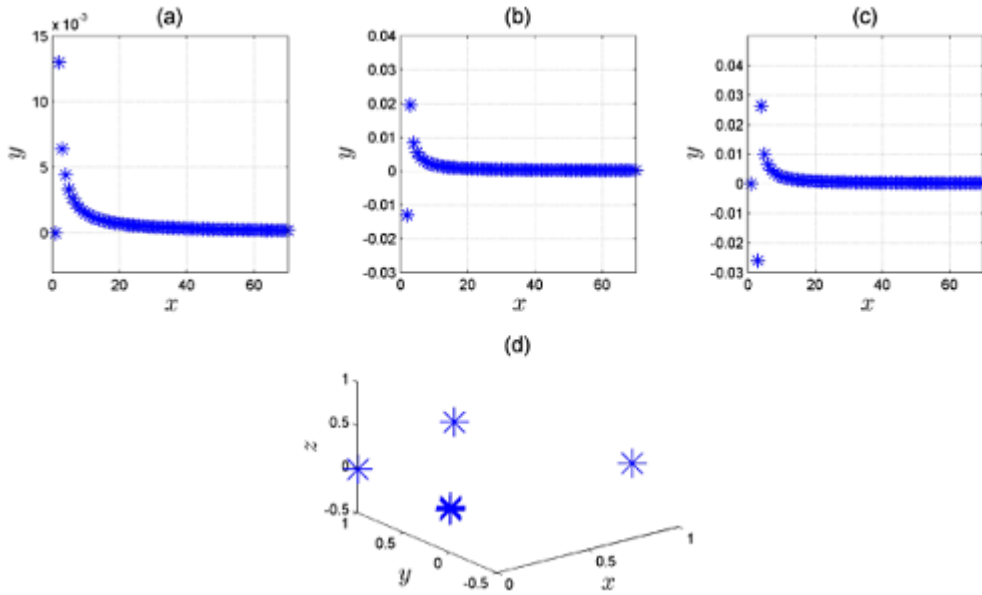


FIG. 3.17 – Les états stabilisés et l'attracteur du système fractionnaire (3.41).

## Synchronisation

La synchronisation renvoie à l'addition d'un paramètre de contrôle au système chaotique contrôlé et l'adaptation de contrôle de manière que les états du système soient synchronisés. Pour le système maître, on choisit le système fractionnaire tridimensionnel proposé dans [181]. Le système maître est décrit pour  $t \in \mathbb{N}_{a+1-v}$  par

$$\begin{cases} {}^C \Delta_a^v x_m(t) &= -x_m(t-1+v) - \beta z_m(t-1+v), \\ {}^C \Delta_a^v y_m(t) &= \beta z_m(t-1+v) + x_m(t-1+v) - y_m(t-1+v), \\ {}^C \Delta_a^v z_m(t) &= 1 + y_m(t-1+v) - \alpha z_m^2(t-1+v) - z_m(t-1+v). \end{cases} \quad (3.48)$$

Pour  $(\alpha, \beta) = (0.99, 0.2)$ ,  $a = 0$  et  $v = 0.984$ , le système fractionnaire (3.48) est chaotique comme illustré dans la figure 3.18. Notons que l'indice  $m$  dans les états désigne le système maître.

De manière analogue, l'indice  $s$  est utilisé pour désigner les états du système esclave. Le système esclave, est alors décrit par

$$\begin{cases} {}^C \Delta_a^v x_s(t) &= a - y_s^2(t-1+v) + bz_s(t-1+v) - x_s(t-1+v) + u_1(t-1+v), \\ {}^C \Delta_a^v y_s(t) &= x_s(t-1+v) - y_s(t-1+v) + u_2(t-1+v), \\ {}^C \Delta_a^v z_s(t) &= y_s(t-1+v) - z_s(t-1+v) + u_3(t-1+v), \end{cases} \quad (3.49)$$

où les fonctions  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  désignent les contrôleurs de synchronisation.

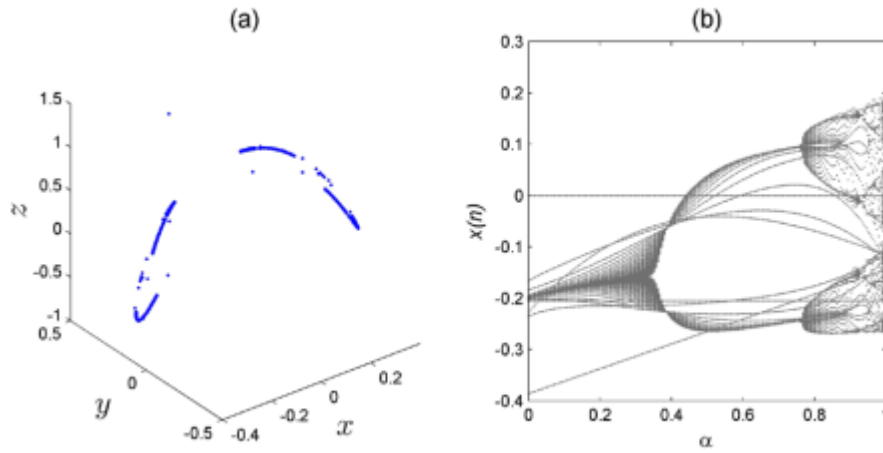


FIG. 3.18 – Le comportement chaotique du système fractionnaire (3.48)

Le système d'erreur correspondant à la stratégie de synchronisation est défini par

$$\begin{cases} e_1(t) &= x_m(t) - x_s(t), \\ e_2(t) &= y_m(t) - y_s(t), \\ e_3(t) &= z_m(t) - z_s(t). \end{cases} \quad (3.50)$$

Pour réaliser une synchronisation complète entre le système maître (3.48) et le système esclave (3.49), on discute la stabilité asymptotique de la zéro solution du système d'erreur donné dans (3.50).

D'une autre manière, on trouve les contrôleurs  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  pour lesquels la solution du système d'erreur (3.50) tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. Le théorème suivant présente la loi de contrôle proposée pour ce schéma de synchronisation.

**Théorème 3.6** *Pour*

$$\begin{cases} u_1(t) &= -a + y_s^2(t) - bz_s(t) - \beta z_m(t), \\ u_2(t) &= \beta z_m(t), \\ u_3(t) &= 1 - \alpha z_m^2(t), \end{cases} \quad (3.51)$$

le système maître (3.48) et le système esclave (3.49) sont synchronisés.

**Preuve** Le système d'erreur (3.50) a une différence fractionnaire de Caputo

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^v e_1(t) &= a - y_s^2(t-1+v) + bz_s(t-1+v) - x_s(t-1+v) + u_1(t-1+v) \\ &\quad + x_m(t-1+v) + \beta z_m(t-1+v), \\ {}^C\Delta_a^v e_2(t) &= x_s(t-1+v) - y_s(t-1+v) + u_2(t-1+v) - \beta z_m(t-1+v) \\ &\quad - x_m(t-1+v) + y_m(t-1+v), \\ {}^C\Delta_a^v e_3(t) &= y_s(t-1+v) - z_s(t-1+v) + u_3(t-1+v) - 1 - y_m(t-1+v) \\ &\quad + \alpha z_m^2(t-1+v) + z_m(t-1+v), \end{cases} \quad (3.52)$$

Substituant la loi de contrôle (3.51) dans (3.52) on aura

$$\begin{cases} {}^C\Delta_a^v e_1(t) &= -e_1(t-1+v), \\ {}^C\Delta_a^v e_2(t) &= e_1(t-1+v) - e_2(t-1+v), \\ {}^C\Delta_a^v e_3(t) &= -e_2(t-1+v) - e_3(t-1+v). \end{cases} \quad (3.53)$$

Les valeurs propres de la partie linéaire du système (3.53) satisfont les conditions de stabilité

$$|\arg \lambda_i| > \frac{v\pi}{2} \text{ et } |\lambda_i| < 2 \cos \left( \frac{|\arg \lambda_i| - \pi}{2 - v} \right)^v, \quad i = 1, 2, 3.$$

Selon le Théorème 1.7, nous avons que la zéro solution de (3.53) est asymptotiquement globalement stable et, par conséquent, les systèmes (3.48) et (3.49) sont synchronisés. ■

La loi de contrôle citée dans Théorème 3.6 est confirmée par des simulations numériques. La figure 3.19 illustre l'évolution en fonction du temps des systèmes maîtres et esclave (3.48)-(3.49) après le contrôle. Les erreurs tendent clairement vers zéro, indiquant que la synchronisation décrite est réussite.

## 3.5 Conclusion

Ce chapitre repasse en revue toutes les recherches essentielles de la thèse qui seraient exposées en trois sections. Une première section a pour vocation d'assurer qu'une coexistence entre



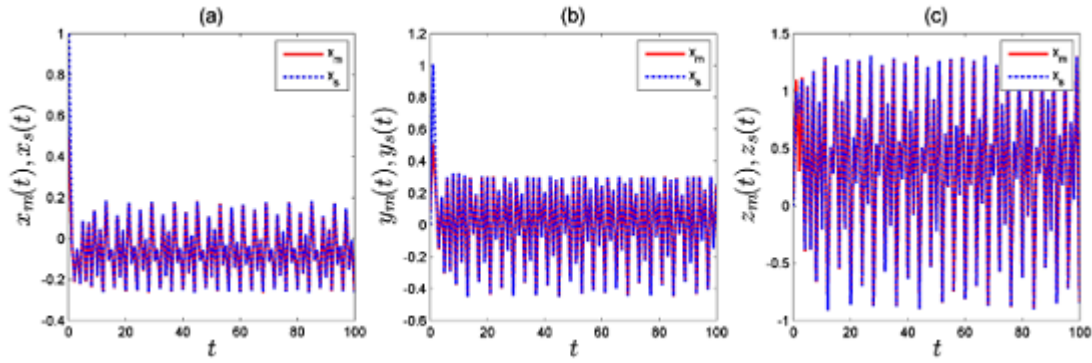


FIG. 3.19 – L'évolution des états des systèmes maître et esclave (3.48)-(3.49) après le contrôle.

d'une part une nouvelle synchronisation généralisée hybride des systèmes dynamiques discrets chaotiques et d'autre part des systèmes hyperchaotiques d'ordre entier suivie d'une application numérique qui explicite le schéma de synchronisation proposé. Alors que dans la deuxième, sera vouée à la synchronisation développée et réduite entre des systèmes discrets chaotiques et hyperchaotiques d'ordre entier en 2D et en 3D. Ainsi, les deux lois de contrôle y seront développées non sans simulations numériques. La troisième y sera présentée tout en appliquant le calcul fractionnaire, (voir chapitre 2) la forme fractionnaire du système tridimensionnel généralisé chaotique de Hénon et il y sera exposé en clarté les deux nouveaux schémas de contrôle stabilisant et synchronisant ce nouveau système.

# Conclusion générale et perspectives

Les équations de différence sont de plus en plus utilisées comme modèles mathématiques dans de nombreuses disciplines, notamment la génétique, l'écologie, la physiologie, les réseaux neuronaux, la psychologie, l'ingénierie, la physique, la chimie et les sciences sociales...etc. Leur aptitude à l'informatisation et leur simplicité mathématique ont attiré des chercheurs d'un large éventail de disciplines. Les équations de différence sont générées par des fonctions ou par la discrétisation d'une équation différentielle. Les algorithmes de discrétisation font partie d'une discipline appelée analyse numérique qui appartient à la fois aux mathématiques et à l'informatique. Comme la plupart des équations différentielles sont insolubles, il faut recourir aux ordinateurs pour obtenir de l'aide. Cependant, les ordinateurs ne comprennent que les récursions ou les équations de différence, d'où la nécessité de discrétiser les équations différentielles.

Edward Lorenz est l'un des pionniers les plus anciens et les plus influents de la théorie du chaos. Malgré que sa formation ait été en météorologie, il a une compréhension approfondie des équations différentielles. En 1960, il a commencé un projet pour simuler des modèles météorologiques modélisés par un système de trois équations différentielles (maintenant nommé d'après lui). Déconcerté par ses résultats, il découvrit qu'à chaque fois qu'il modifiait légèrement les conditions initiales, les modèles météorologiques simulés changeaient radicalement. Cela l'a conduit à la découverte de l'une des caractéristiques du chaos, à savoir la dépendance sensible aux conditions initiales, populairement connue sous le nom d'effet papillon.

L'idée de synchroniser deux systèmes chaotiques identiques qui partent de conditions initiales différentes a été introduite par Pecora et Carroll. En utilisant un signal transmis, ils ont montré que la synchronisation se produit lorsque les éléments de Lyapunov pour le sous-système esclave sont tous négatifs. Depuis cette recherche fondatrice, la question de la synchronisation du chaos a suscité un grand intérêt dans la science et l'ingénierie non linéaire. Au début, en modifiant le

schéma de Pecora et Carroll, la plupart des méthodes se sont concentrées sur une synchronisation complète (identique). Par la suite, différents types de synchronisation ont été proposés dans la littérature, tant pour les systèmes continus que pour les systèmes discrets.

Ces dernières années, les chercheurs se sont intéressés aux systèmes fractionnaires correspondants aux systèmes d'ordre entier les plus connus. L'idée de base est que les équations aux différences fractionnaires ont une mémoire infinie, ce qui améliore à la fois la flexibilité du modèle dynamique dans la représentation des phénomènes physiques et possède la propriété intéressante de la mémoire infinie. Le calcul fractionnaire en temps continu existe depuis des siècles. Cependant, son homologue discret est relativement nouveau. Des études récentes ont tenté de formuler un cadre pour le calcul fractionnaire en temps discret dans lequel sa stabilité et sa théorie de transformation sont établies.

Cette thèse est un traité d'introduction sur les modèles discrets chaotiques d'ordre entier et fractionnaire et leurs dynamiques et synchronisations. Il fournit une introduction à la dynamique des modèles discrets. Cette thèse comporte trois chapitres, dont le premier chapitre est consacré aux systèmes dynamiques discrets d'ordre entier et fractionnaire et l'analyse de stabilité des points fixes et  $p$ -cycles des modèles discrets non-linéaires unidimensionnels et multidimensionnels. Ensuite, une brève discussion des notions de bifurcation est présentée. Par la suite, une généralisation des systèmes discrets d'ordre entier universels bien connus aux systèmes discrets d'ordre fractionnaire a été donnée et dont les états sont avec mémoire en indiquant que l'ordre de différence se prend comme un paramètre et agissant au comportement de ses systèmes. Le deuxième chapitre est consacré au chaos et synchronisation, définissant le phénomène du chaos ainsi que ses multiples quantificateurs enrichi par des exemples connus illustrés chacun d'eux par les simulations numériques appropriées. Ensuite, la théorie de synchronisation y a été abordé en parlant de ses différents types les plus performants et mettant en exergue la méthode du contrôleur actif qui est la plus favorable dans ce contexte. Enfin, dans le troisième et le dernier chapitre, nous présentons nos résultats essentiels de cette thèse composé de trois sections élaborant chacune un résultat basé sur les théories discutées aux derniers chapitres.

Notre plan pour les travaux futurs comprend une enquête sur de nouveaux systèmes discrets d'ordre entier et fractionnaire et leur applicabilité dans le cryptage et la communication sécurisée. Les résultats pourront aussi déboucher sur de nouveaux schémas de synchronisations des systèmes chaotiques discrets et d'autres algorithmes menant à quantifier et synchroniser le chaos dans ces systèmes.

# Bibliographie

- [1] Ouannas, A., Bendoukha, S., Volos, C., Karouma, A. (2019), Synchronization of Commensurate and Incommensurate Fractional Hyperchaotic Rabinovich Systems via Linear and Nonlinear Control Law. *International Journal of Control, Automation and Systems*, 17 (9), 2211-2219.
- [2] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Grassi, G., Bendoukha, S., (2019) On chaos in the fractional-order Grassi–Miller map and its control. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 358, 293-305.
- [3] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Odibat, Z., Pham, V.-T., Grassi, G., (2019) On the dynamics, control and synchronization of fractional-order Ikeda map. *Chaos, Solitons & Fractals* 123, 108-115.
- [4] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Momani, S., Pham, V.-T., (2020) The discrete fractional duffing system : Chaos, 0–1 test, C0 complexity, entropy, and control. *Chaos : An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 30 (8), 083131.
- [5] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Odibat, Z. , Pham, V.-T.,(2020) Grassi, G., On the Three-Dimensional Fractional-Order Hénon Map with Lorenz-Like Attractors *International Journal of Bifurcation and Chaos* 30 (11), 2050217.
- [6] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Wang, X., Pham, V.-T., Boulaaras, S., Momani, S., (2020) .Bifurcation and chaos in the fractional form of Hénon-Lozi type map. *The European Physical Journal Special Topics* 229 (12), 2261-2273.
- [7] Ouannas, A., Wang, X., Pham, V.-T., Ziar, T., Dynamic Analysis of Complex Synchronization Scheme between Integer-Order and Fractional-Order Chaotic Systems with Different Dimensions. *Complexity*. Vol. 2017, Article ID 4948392, 12 pages.

- 
- [8] Ouannas, A., Grassi, G., Ziar, T., Odibat, Z., (2017) On a Function Projective Synchronization Scheme between non-identical Fractional-order chaotic (hyperchaotic) systems with different dimensions and orders. *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, 136 ,513–523.
- [9] Ouannas, A., Abdelmalek, S., Bendoukha, S., (2017) Coexistence of some chaos synchronization types in fractional-order differential equations. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2017 no. 128, pp. 1-15.
- [10] Ouannas, A., Odibat, Z., (2017) Fractional Analysis of Co-existence of Some Types of Chaos Synchronization. *Chaos, Solution and Fractal*. Vol. 105, p. 215-223.
- [11] Pham, V.-T., Ouannas, A., Volos, C., Kapitaniak, T., (2018) A simple fractional-order chaotic system without equilibrium and its synchronization. *I. J. Electronics and Communication*. 86, 67-79.
- [12] Wang, X., Ouannas, A., Pham, V.-T., Abdolmohammadid, H.R., (2018) A fractional-order form of a system with stable equilibria and its synchronization. *Advances in Difference Equations*. 2018 :20 <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1479-0>.
- [13] Ouannas, A., Zehrou, O., Laadjal, Z., (2018) Nonlinear Methods To Control Synchronization Between Fractional-Order and Integer-Order Chaotic Systems. *Nonlinear Studies*. Vol. 25, No. 1, pp. 1-13.
- [14] Ouannas, A., Grassi, G., Pham, V.-T., Ziar, T., (2018) Co-existence of function-based hybrid synchronization types between non-identical fractional-order chaotic systems. *Advances in Difference Equations*, (1), 1-16.
- [15] Ouannas, A., Wang, X., Pham, V.-T., Grassi, G., Ziar, T., Karouma, A., (2018) New Type of Chaos Synchronization in discrete-time systems : the F-M synchronization. *Open Physics*, 16 (1), 174-182.
- [16] Grassi, G., Ouannas, A., Pham, V.-T., (2018) A General Unified Approach to Chaos Synchronization in Continuous-time Systems (with or without equilibrium points) as well as in Discrete-time Systems. *Archive of Control Sciences*, 28.
- [17] Ouannas, A., Azar, A.T., Abu-Saris, R., A new type of hybrid synchronization between arbitrary hyperchaotic maps, *International journal of Learning Machine and Cybernetic*, pp. 1-8, Doi :10.1007/s13042-016-0566-3.
- [18] Ouannas, A., Wang, X., Pham, V.-T., Grassi, G., Ziar, T., (2018) Co-existence of some synchronization types between non-identical commensurate and incommensurate fractional-

- order chaotic systems with different dimensions. *Advances in Difference Equations*. 2018 :21  
<https://doi.org/10.1186/s13662-018-1485-2>.
- [19] Khennaoui, A.A., Ouannas, A., Bendoukha, S., Grassi, G., Lozi, R.P., Pham, V.-T., (2019) On fractional-order discrete-time systems : Chaos, stabilization and synchronization *Chaos, Solitons & Fractals* 119, 150-162.
- [20] Ouannas, A., Odibat, Z., Shawagfeh, N. Universal chaos synchronization control laws for general quadratic discrete systems. *Applied mathematical modeling* Vol.45. pp.636-641 doi : 10.1016/j.apm.2017.01.012.
- [21] Ouannas, A., Bendoukha, S., (2018) Generalized and inverse generalized synchronization of fractional-order discrete-time chaotic systems with non-identical dimensions. *Advances in Differences Equations*, (1), 1-14.
- [22] Ouannas, A., Wang, X., Khennaoui, A.A., Bendoukha, S., Pham, V.-T., FE Alsaadi. (2018) Fractional form of a chaotic map without fixed points : Chaos, entropy and control. *Entropy* 20 (10), 720.
- [23] Bendoukha, S., Ouannas, A., X Wang, Khennaoui, A.A., Pham, V.-T., Grassi, G., (2018) The Co-existence of Different Synchronization Types in Fractional-order Discrete-time Chaotic Systems with Non-identical Dimensions and Orders. *Entropy* 20 (9), 710.
- [24] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., S Bendoukha , Pham, V.-T., Huynh, V., (2018) The Fractional Form of the Tinkerbell Map Is Chaotic. *Applied sciences*, 8(12), 2640.
- [25] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., S Bendoukha, Grassi, G., (2019) On the Dynamics and Control of a Fractional Form of the Discrete Double Scroll International. *Journal of Bifurcation and Chaos* 29 (06), 1950078.
- [26] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Zehrou, O., S Bendoukha, Grassi, G., Pham, V.-T., (2019) Synchronisation of integer-order and fractional-order discrete-time chaotic systems. *Pramana* 92 (4), 52.
- [27] Ouannas, A., Odibat ,Z., (2018) A study on Q-S synchronization in coupled chaotic incommensurate fractional order systems. *Chin J Phys*, 56 (5), 1940-1948.
- [28] Ouannas, A., Bendoukha, S., Karouma, A., Abdelmalek, S., (2019) A General Method to Study the Co-Existence of Different Hybrid Synchronizations in Fractional-Order Chaotic Systems. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 20 (3-4), 351-359.

- 
- [29] Ouannas, A., Azar, A.T., Ziar, T., (2019) Continuous-Time Chaotic (Hyperchaotic) Systems : F-M Synchronization. *International Journal of Automation and Control*. 13(2) :226, 2019.
- [30] Ouannas, A., Odibat, Z., Grassi, G., Wang, X., Pham, V.-T., Abdelli, M., Alsaedi, A., (2019) Synchronization Control in Reaction-Diffusion Systems : Application to Lengyel-Epstein System. *Complexity*, 1-8.
- [31] Ouannas, A., Debbouche, N., Wang, X., Pham, V.T., Zehrou, O., (2018) Secure Multiple-Input Multiple-Output Communications Based on F–M Synchronization of Fractional-Order Chaotic Systems with Non-Identical Dimensions and Orders. *Applied Sciences* 8 (10), 1746.
- [32] Ouannas, A., Karouma, A., Grassi, G., Pham, V.-T., Luong, V.S., (2020) A novel secure communications scheme based on chaotic modulation, recursive encryption and chaotic masking. *Alexandria Engineering Journal*, doi.org/10.1016/j.aej.2020.11.035.
- [33] Elaydi, S. (2005), *An Introduction to Difference Equations*, Third Edition, Trinity University San Antonio, Texas 78212, USA.
- [34] Khalil, H. K. (1996), *Nonlinear systems*, Third Edition, Prentice Hall New Jersey.
- [35] Guckenheimer, J., Holmes, P. (1983), *Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences. Springer verlag édition.
- [36] Hale, J.K., Kocak, H. (1991), *Dynamics and Bifurcations*. Applied Mathematics, Publisher SpringerVerlag New York.
- [37] Dang-Vu, H., Delcarte, C. (2000), *Bifurcations et Chaos*. Paris, Ellipses.
- [38] Kuznetsov, Y. (2004), *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York.
- [39] Miller, K.S., Ross, B. (1988) *Fractional Difference Calculus*, Proceedings of the International Symposium on Univalent Functions, Fractional Calculus and their Applications, Nihon University, Koriyama, Japan, pp.139–152.
- [40] Oldham, K., Spanier, J. (2002), *The Fractional Calculus : Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- [41] Riemann, B. (1876), *Versuch einer allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation*, *Gesammelte Werke*, pp.62.

- 
- [42] Podlubny, I. (1999) Fractional differential equations, Academic Press, San Diego.
- [43] Idham, K.B.O, Spanier, J. (1974), The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to Arbitrary Order, Academic press, INC, USA.
- [44] Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I. (1993), Fractional integrals and derivatives : theory and applications, Gordon and Breach, Amsterdam.
- [45] Butzer, P. L., Westphal, U. (2000), An introduction to fractional calculus. In : Hilfer R, editor. Applications of fractional calculus in physics, World Scientific, Singapore.
- [46] Monje, C.A., Chen, Y.Q., Vinagre, B. M., Xue, D., Feliu, V. (2010), Fractional-order Systems and Controls Fundamentals and Applications, Springer-Verlag London Limited.
- [47] Diaz, J., Olser, T. (1974), Differences of Fractional Order, Mathematics of Computation, 28(125), pp.185-202.
- [48] Atici, F.M., Eloe, F.M. (2007), A Transform Method in Discrete Fractional Calculus, International Journal of Difference Equations, Vol. 2(2), pp.165–176.
- [49] Atici, F.M., Eloe, P.W. (2009), Initial Value Problems in Discrete Fractional Calculus, Proc.Amer. Math. Soc., Vol. 137(3), pp.981–989.
- [50] Wu, G.C., Baleanu, D. (2013), Discrete fractional logistic map and its chaos. Nonlinear Dyn., Vol. 75(1-2), pp.283–287.
- [51] Hu, T. (2014), Discrete Chaos in Fractional Henon Map. Appl. Math., Vol. 5(15), pp.2243–2248.
- [52] Wu, G.C., Baleanu, D. (2015), Discrete chaos in fractional delayed logistic maps. Nonlinear Dyn., Vol. 80, pp.1697–1703. <https://doi.org/10.1007/s11071-014-1250-3>.
- [53] Wu, G., Baleanu, D. (2014), Chaos synchronization of the discrete fractional logistic map. Signal Process., Vol. 102, pp.96–99.
- [54] Wu, G., Baleanu, D., Xie, H., Chen, F. (2016), Chaos synchronization of fractional chaotic maps based on the stability condition. Physica A, Vol. 460(C), pp.374–383.
- [55] Ichise, M., Nagayanagi, Y., Kojima, T. (1971), An analog simulation of noninteger order transfer functions for analysis of electrode process. Journal of Electroanalytical Chemistry, Vol. 33(2), pp.253-265.
- [56] Sun, H.H., Abdelwahad, A.A., Onaral, B. (1984), Linear approximation of transfer function with a pole of fractional order. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 29(5), pp.441-444.



- 
- [57] Chakraborty, S., Seal, A., Roy, M., Mali, K. (2016) A novel lossless image encryption method using DNA substitution and chaotic logistic map *Int. J. Secur. Appl.*, Vol. 10(2), pp. 205-216.
- [58] Li, Y., Wang, C., Chen, H. (2017), A hyper-chaos-based image encryption algorithm using pixel-level permutation and bit-level permutation *Opt. Lasers Eng.*, Vol. 90, pp. 238-246. <https://doi.org/10.1016/j.optlaseng.2016.10.020>.
- [59] Holm, M.T. (2011), The Laplace transform in discrete fractional calculus. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 62(3), pp.1591-1601.
- [60] Ouannas, A., Azar, A.T., Vaidyanathan, S., (2017) A new fractional hybrid Chaos synchronization. *Int. J. Modelling, Identification and Control*, Vol. 27, No. 4.
- [61] Ouannas, A., Wang, X., Pham, V.T., Grassi, G., Huynh, V.V., (2019) Synchronization results for a class of fractional-order spatiotemporal partial differential systems based on fractional Lyapunov approach. *Boundary Value Problems* 2019 (1), 1-12.
- [62] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Bendoukha, S., Wang, Z., Pham, V.T., (2020) The Dynamics and Control of the Fractional Forms of Some Rational Chaotic Maps. *Journal of Systems Science and Complexity*, 1-20.
- [63] Khennaoui, A.A., Ouannas, A., Boulaaras, S., Pham, V.T., Azar, A.T., (2020) A fractional map with hidden attractors : chaos and control. *The European Physical Journal Special Topics* 229, 1083-1093.
- [64] Hadjabi, F., Ouannas, A., Shawagfeh, N., Khennaoui, A.A., Grassi, G., (2020) On Two-Dimensional Fractional Chaotic Maps with Symmetries. *Symmetry* 12 (5), 756.
- [65] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Momani, S., Pham, V.T., El-Khazali, R., (2020) Hidden attractors in a new fractional-order discrete system : Chaos, complexity, entropy and control. *Chinese Physics B*, 1,.
- [66] Chougui, Z., Ouannas, A., (2020) A new generalized synchronization scheme to control fractional chaotic dynamical systems with different dimensions and orders. *Nonlinear Studies* 27 (3).
- [67] Gasri, A., Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Bendoukha, S., Pham, V.T., (2020) On the Dynamics and Control of Fractional Chaotic Maps with Sine Terms. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 1.

- 
- [68] Anastassiou, G.A. (2010), Nabla discrete fractional calculus and nabla inequalities. *Mathematical and Computer Modeling*, Vol. 51(5-6), pp.562-571. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2009.11.006>.
- [69] Abdeljawad, T. (2011), On Riemann and Caputo fractional differences. *Computers and Mathematics with Applications*, Vol. 62(3), pp.1602-1611. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2011.03.036>.
- [70] Cermak, J., Gyori, I., Nechvatal, L. (2015), On explicit stability condition for a linear fractional difference system. *Fract. Calc. Appl. Anal.* Vol. 18(3), pp.651-672.
- [71] Liu, X., Hong, L., Yang, L., Tang, D. (2020), A Fractional-Order Discrete Noninvertible Map of Cubic Type : Dynamics, Control, and Synchronization. *Complexity*, vol. 2020, Article ID 2935192, 21 pages. <https://doi.org/10.1155/2020/2935192>.
- [72] Baleanu, D., Wu, G., Bai, Y., Chen, F. (2017), Stability analysis of Caputo-Like discrete fractional systems. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, Vol.48, pp.520-530. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.01.002>
- [73] Ouannas, A., (2013) A new Q-S synchronization scheme for discrete chaotic systems. *Far East Journal of Applied Mathematics*, Vol. 84 (2), pp. 89-94, 2013.
- [74] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Grassi, G., Bendoukha, S., (2018) Q-S Chaos Synchronization of Different Dimensional Systems. *Discrete Dynamics in nature and social*, 2018.,
- [75] Ouannas, A., Wang, X., Pham, V.T., Nguyen, X.Q., Alsaadi, F.E. (2019) Chaotic map with no fixed points : entropy, implementation and control. *Entropy* 21 (3), 279, 2019.,
- [76] Thoai, V.P., Kahkeshi, M.S., Huynh, V.V., Ouannas, A., Pham, V.T., (2020) A Nonlinear Five-Term System : Symmetry, Chaos, and Prediction. *Symmetry* 12 (5), 865, 2020.,
- [77] Almatroud, A.O., Khennaoui, A.A., Ouannas, A., Grassi, G., Al-sawalha, M.M., Gasri, A., (2020) Dynamical Analysis of a New Chaotic Fractional Discrete-time System and its Control. *Entropy*, 22(12), 1344; <https://doi.org/10.3390/e22121344>.
- [78] Boccaletti, S., Kurthsc, J., Osipovd, G., Valladaresb, D.L., Zhouc, C.S. (2002), The synchronization of chaotic systems, *Phys. Repor.* Vol. 366(1-2), pp.1–101.
- [79] Boccaletti, S. (2008), *The Synchronized Dynamics of Complex Systems*, Published Elsevier, Vol. 6, pp.1–258.
- [80] Pikovsky, A., Roseblum, M., Kurths, J. (2001), *Synchronization : A Universal Concept in Nonlinear Sciences*, Cambridge Nonlinear Science Series.

- 
- [81] Gonzalez-Miranda, J. M. (2004), Synchronization and Control of Chaos. An introduction for scientists and engineers, Imperial College Press.
- [82] Ouannas, A., Abu-Saris, R., (2015) A Robust Control Method for Q-S Synchronization between Different Dimensional Integer-Order and Fractional-Order Chaotic Systems, Journal of Control Science and Engineering, Vol. 2015, Article ID 703753, pp. 1-7.,
- [83] Ouannas, A., Al-Sawalha, M.M, (2015) A new approach to synchronize different dimensional chaotic maps using two scaling matrices, Nonlinear Dynamics and Systems Theory, Vol. 15 (4), pp. 400–408.
- [84] Ouannas, A., Azar, A.T., Vaidyanathan, S., (2017) A robust method for New fractional hybrid chaos synchronization, Mathematical Methods in the Applied Sciences, Vol. 40, pp. 1804–1812.,
- [85] Ouannas, A., Karouma, A., Different generalized synchronization schemes between integer-order and fractional-order chaotic systems with different dimensions, Differential Equations and Dynamical Systems, pp. 1-13, DOI 10.1007/s12591-016-0317-7.,
- [86] Ouannas, A., Azar, A.T., Vaidyanathan, S., (2017) New hybrid synchronization schemes based on coexistence of various types of synchronization between master-slave hyperchaotic systems, International Journal of Computer Applications in Technology. Vol. 55, n 2 pp. 112–120. 2017.
- [87] Fujisaka, H., Yamada, T. (1983), Stability theory of synchronized motion in coupled oscillator systems, Prog. Theor. Phys. Vol. 69 (1), pp. 32-47.
- [88] Afraimovich, V.S., Verichev, N.N., Rabinovich, M.I. (1986), Stochastic synchronization of oscillation in dissipative systems, Radiophysics and Quantum Electronics, Vol. 29 (9), pp. 1050-6.
- [89] Pecora, L.M., Carroll, T.L. (1990), Synchronization in chaotic systems, Phys. Rev. Lett., Vol. 64(8), pp. 821-824.
- [90] Rulkov, N.F., Sushchik, M.M., Tsimring, L.S., Abarbanel, H.D.I. (1995), Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems, Phys. Rev. E , Vol. 51(2), pp. 980-994. doi : 10.1103/physreve.51.980.
- [91] Lakshmanan, M., Rajaseekar, S. (2003), Nonlinear Dynamics Integrability, Chaos and Patterns. Advanced Texts in Physics, Publisher Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [92] Wiggins, S. (2003), Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag New York.

- 
- [93] Devaney, R.L. (1989), An introduction to chaotic dynamical systems. In Addison-Wisley, Redwood City, CA.
- [94] Mira, C., Gardini, L., Bugola, A., Cathala, J-C. (1996), Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps. World Scientific Publishing Company.
- [95] Alligood, K.T., Sauer, T.D., Yorke, J.A. (1996), Chaos : an Introduction to Dynamical Systems, Springer-Verlag édition.
- [96] Rosenstein, M., Collins, J., DeLuca, C. (1993), A practical method for calculating largest Lyapunov exponents for small data sets, *Physica*, Vol. 65(1-2), pp. 117-134.
- [97] Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., Vastano, J. (1985), Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica*, Vol. 16(3), pp. 285-317.
- [98] Parker, T.S., Chua, L.O. (1989), Practical Numerical Algorithms For Chaotic Systems. Edition Springer-Verlay.
- [99] Li, T-Y., York, J.A. (1975), Period three implies chaos, *Amer. Math. Mon.*, Vol. 82(10), pp. 985-992.
- [100] Guckenheimer, J., Holmes, P. (1986), Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, New York Springer-Verlag.
- [101] Kaplan, D., Glass, L. (1995), Finite-difference equations. Understanding nonlinear dynamics. New-York Springer-Verlag.
- [102] Pomeau, Y., Manneville, P. (1980), Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems, *Commun. Math. Phys.*, Vol. 74(2), pp. 189–197.
- [103] Ruelle, D., Takens, F. (1971), On the nature of turbulence, *Commun. Math. Phys.*, Vol. 20, pp. 167-192. <https://doi.org/10.1007/BF01646553>.
- [104] Hénon, M. (1976), A Two Dimensional Mapping with a Strange Attractor, *Comm. Math. Phys.* Vol. 50(1), pp.69-76.
- [105] Wolf, A. (1984), Determining Lyapunov exponents from a time series, Department of Physics, University of Texas, Austin, Texas 78712, USA.
- [106] Stefanski, K. (1998), Modelling chaos and hyperchaos with 3D maps, *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 9(1-2), pp. 83-93.
- [107] Khennaoui, A.-A., Ouannas, A., Bendoukha, S., Wang, X., Pham, V.-T. (2018), On Chaos in the Fractional-Order Discrete-Time Unified System and Its Control Synchronization. *Entropy*, 20(7), 530. <https://doi.org/10.3390/e20070530>.

- 
- [108] Khennaoui, A.-A., Ouannas, A., Bendoukha, S., et al., (2019), Chaos, control, and synchronization in some fractional-order difference equations. *Adv. Differ. Equ.*,412, <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2343-6>.
- [109] Ouannas, A., Odibat, Z. (2015), Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems in discrete time, *Nonlinear Dyn.* 81(1-2), pp. 765–771.
- [110] Ouannas, A., Azar, A.T., Radwan, AG. (2016), On inverse problem of generalized synchronization between different dimensional integer-order and fractional-order chaotic systems. 2016 28th International Conference on Microelectronics (ICM), Giza, pp. 193-196.
- [111] Singh, S., Azar, A.T., Ouannas A., Zhu, Q., Zhang, W., Na, J. (2017), Sliding mode control technique for multi-switching synchronization of chaotic systems, 2017 9th International Conference on Modelling, Identification and Control (ICMIC), Kunming, pp. 880-885.
- [112] Ouannas, A., Raghieb, A. S. (2016), On Matrix Projective Synchronization and Inverse Matrix Projective Synchronization for Different and Identical Dimensional Discrete-Time Chaotic Systems, *Journal of Chaos*, Volume 2016, 7 pages.
- [113] Ouannas, A. (2014), On full-state hybrid projective synchronization of general discrete chaotic systems. *Journal of Nonlinear Dynamics*, vol. 2014, Article ID 983293, <https://doi.org/10.1155/2014/983293>
- [114] Gasri, A., Ouannas, A., Ojo, K. S., Pham, V.-T. (2018) Coexistence of generalized synchronization and inverse generalized synchronization between chaotic and hyperchaotic systems, *Nonlinear Analysis : Modelling and Control*, 23(4), pp. 583-598.
- [115] Ouannas, A. (2013), A new QS synchronization scheme for discrete chaotic systems. *Nonlinear Analysis*, Vol. 69(4), pp. 1091-1099.
- [116] Bai, E., Lonngren, K.E. (2008), Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control, *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 11(7), pp. 1041-1044.
- [117] Ouannas, A., (2014), Synchronization and inverse synchronization of different dimensional discrete chaotic systems via scaling matrix. *International Journal of Chaos, Control, Modelling and Simulation*, Vol. 3 (4), pp. 1-12.
- [118] Gasri, A., Ouannas, A., (2015) A general control method for inverse hybrid function projective synchronization of class of chaotic systems, *Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 9 (9), pp. 429 – 436.

- 
- [119] Ouannas, A., (2015), A new generalized-type of synchronization for discrete chaotic dynamical systems, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, Vol. 10 (6), pp. 061019-5.
- [120] Ouannas, A., Al-sawalha, M.M, (2016), Synchronization between different dimensional chaotic systems using two scaling matrices, *Optik -International Journal for Light and Electron Optics*, Vol. 127, pp. 959–963.
- [121] Matsumoto, T., Chua, L. O., Kobayashi, K. (1986), Hyperchaos : laboratory experiment and numerical confirmation, *IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-33* Vol. (11), pp. 1143-1147.
- [122] Stoop, R., Meier, P. F. (1988), Evaluation of Lyapunov exponents and scaling functions from time series, *Journal of the Optical Society of America B*, Vol. 5(5), pp-1037-1045.
- [123] Stoop, , R., Peinke, J., Parisi, J., Röhricht, B., .Hübener, R.P. (1989), A p-Ge semiconductor experiment showing chaos and hyperchaos, *Physica D*, Vol. 35(3), pp. 425-435.
- [124] Eiswirth, M., Krueel, Th.-M., Ertl, G., Schneider, F. W. (1992), Hyperchaos in a chemical reaction, *Chem. Phys. Lett.*, Vol. 193(4), pp. 305-310.
- [125] Eduardo, L., Ruiz-Herrera, A. (2012), Chaos in discrete structured population models, *J. Appl. Dyn. Syst.*, Vol. 11(4), pp. 1200–1214.
- [126] Zhang, W.B. (2006), *Discrete Dynamical Systems, Bifurcations, and Chaos in Economics* (Ed. 1, Vol. 204). Elsevier, Boston.
- [127] Aguilar-Bustos, A. Y., Cruz-Hernández, C. (2006), Synchronization of discrete-time hyperchaotic Systems through extended Kalman filtering, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 6(4), pp 319–336.
- [128] Aguilar Bustos, A. Y., Cruz Hernández, C., López Gutiérrez, R. M., Posadas Castillo, C. (2008), Synchronization of different hyperchaotic maps for encryption, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 8(3), pp. 221-236.
- [129] Aguilar Bustos, A. Y., Cruz Hernández, C. (2008), Synchronization of discrete-time hyperchaotic systems : An application in communications, *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 41(3), pp. 1301-1310.
- [130] Cruz Hernandez, C., Lopez Gutierrez, R. M., Aguilar Bustos, A. Y., Posadas Castillo, C. (2010), Communicating encrypted information based on synchronized hyperchaotic maps, *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul*, Vol. 11(5), pp. 337-349.

- 
- [131] Ouannas, A. (2014), Some synchronization criteria for N-dimensional chaotic dynamical systems in discrete-time, *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, Vol. 6(4), pp. 1-9.
- [132] Chai, Y., Lü, L., and Zhao, H.Y., (2010), Lag Synchronization Between Discrete Chaotic Systems with Diverse Structure, *Appl. Math. Mech-Engl.*, Vol. 31(6), pp. 733-738.
- [133] Yanbo. G, Xiaomei. Z, Guoping. L, Yufan Z. (2011), Impulsive synchronization of discrete-time chaotic systems under communication constraints, *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, Vol. 16(1), pp. 1580-1588.
- [134] Filali, R.L., Hammami, S., Benrejeb, M., Borne, P. (2012), On synchronization, anti-synchronization and hybrid synchronization of 3D discrete generalized Hénon map, *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 12(1), pp. 81-95.
- [135] Xin, B., Wu, Z. (2015), Projective synchronization of chaotic discrete dynamical systems via linear state error feedback control, *Entropy*, Vol. 17(5), pp. 2677-2687.
- [136] Jin, Y.L., Xin, L., Yong, C. (2008), Function projective synchronization of discrete-time chaotic and hyperchaotic systems Using Backstepping Method, *Commun. Theor. Phys.*, Vol. 50(1), pp. 111–116.
- [137] Ouannas, A. (2014), Synchronization of discrete chaotic systems via double scaling matrix in different dimensions, *J. Appl. Math. Comput.*, Vol. 3 (7), pp. 1-5.
- [138] Ouannas, A. (2014), On full-state hybrid projective synchronization of general discrete chaotic systems, *J. Nonlinear Dynamics*, Vol. 2014, Article ID 983293, pp. 1-6, <https://doi.org/10.1155/2014/983293>.
- [139] An, H.L., Chen, Y. (2009), The function cascade synchronization scheme for discrete-time hyperchaotic systems, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, Vol. 14(4), pp. 1494–1501.
- [140] Grassi, G. (2012), Generalized synchronization between different chaotic maps via deadbeat control, *Chinese Phys. B*, Vol. 21 (5), pp. 050505.
- [141] Yan, Z.Y. (2005), Q-S synchronization in 3D Hénon-like map and generalized Hénon map via a scalar controller, *Phys. Lett. A.*, Vol. 342(4), pp. 309-317.
- [142] Chai, Y., Chen, L., Wu, R. (2012), Inverse Projective Synchronization between Two Different Hyperchaotic Systems with Fractional Order, *J. Appl. Math.*, Vol. 2012, ID 762807, <https://doi.org/10.1155/2012/762807>.

- 
- [143] Ouannas, A., Mahmoud, E.E., (2014), Inverse Matrix Projective Synchronization for Discrete Chaotic Systems with Different Dimensions, *J. Comput. Intell. Electron. Syst.*, Vol. 3(3), pp. 188-192.
- [144] Ouannas, A., Al-sawalha, M.M. (2015), On inverse Full State Hybrid Projective Synchronization of Chaotic Dynamical Systems in Discrete-Time, *Inter. J. Dyn. Control.*, Vol. 5(2), DOI : 10.1007/s40435-015-0183-0.
- [145] Li, G.H. (2009), Inverse lag synchronization in chaotic systems, *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 40(3), pp. 1076–1080.
- [146] Ouannas, A., Odibat, Z. (2015), On inverse generalized synchronization of continuous chaotic dynamical systems, *Internat. J. Appl. Comput. Math.*, Vol. 2, pp. 1-11, DOI 10.1007/s40819-015-0040-z.
- [147] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Momani, S., Grassi, G., Pham, V.T. (2020) Chaos and control of a three-dimensional fractional order discrete-time system with no equilibrium and its synchronization. *AIP Advances* 10 (4), 045310.
- [148] Ouannas, A., Khennaoui, A.A., Momani, S., Grassi, G., Pham, V.T., El-Khazali, R., (2020) A Quadratic Fractional Map without Equilibria : Bifurcation, 0–1 Test, Complexity, Entropy, and Control. *Electronics* 9 (5), 748.
- [149] Ouannas, A., Almatroud, O.A., Khennaoui, A.A., Al-sawalha, M.M., Baleanu, D. (2020) Bifurcations, Hidden Chaos and Control in Fractional Maps. *Symmetry* 12 (6), 879.
- [150] Mesdoui, F., Ouannas, A., Shawagfeh, N., Grassi, G., Pham, V.T. (2020) Synchronization Methods for the Degn-Harrison Reaction-Diffusion Systems. *IEEE Access* 8, 91829-91836.
- [151] Mesdoui, F., Shawagfeh, N., Ouannas, A., (2020) Global synchronization of fractional-order and integer-order N component reaction diffusion systems : Application to biochemical models. *Mathematical methos in Applied sciences*, <https://doi.org/10.1002/mma.6807>.
- [152] Ouannas, A., Wang, X., Pham, V.T., Ziar, T.,(2020) On Fractional  $\Lambda - \varphi$  Generalized Chaos Synchronization. *Automatika*, 61 (4), 554-563.
- [153] Ouannas, A., Azar, A.T., Ziar, T. (2020) Fractional inverse full state hybrid projective synchronisation. *International Journal of Advanced Intelligence Paradigms* 17 (3-4), 279-298.
- [154] Talb, I., Ouannas, A., Khennaoui, A-A, Berkane, A., Batiha, I.M., Grassi, G., Pham, V-T., (2020) Different dimensional fractional-order discrete chaotic systems based on the



- Caputo h-difference discrete operator : dynamics, control, and synchronization. *Advances in Difference Equations* 2020 :624.
- [155] Ouannas, A., A New Fractional Discrete-Time Chaotic System with Only Two Quadratic Nonlinearities and Without Equilibria. *Electronics* 9 (12), 2179.
- [156] Khennaoui, A.A., Almatroud, A.O., Ouannas, A., Al-sawalha, M.M., Grassi, G., (2021) An Unprecedented 2-Dimensional Discrete-Time Fractional-Order System and Its Hidden Chaotic Attractors *Mathematical Problems in Engineering*.
- [157] Almatroud, A.O., Khennaoui, A.A., Ouannas, A., Grassi, G., Al-Sawalha, M.M. Dynamical Analysis of a New Chaotic Fractional Discrete-Time System and Its Control Entropy 22 (12), 1344.
- [158] Talb, I., Ouannas, A., Grassi, G., Baleanu D., (2020), Fractional Grassi-Miller Map based on the Caputo h-Difference Operator : Linear Methods for Chaos Control and Synchronization. *Discrete Dynamics in Nature and Society*.
- [159] Djenina, N., Ouannas, A., Batiha, I. M., Grassi, G., Pham, V-T., (2020), On the Stability of Linear Incommensurate Fractional-Order Difference Systems. *Mathematics* 8 (10), 1754. <https://doi.org/10.3390/math8101754>
- [160] Ouannas, A., (2013) Co-existence of Complete Synchronization and Anti-Synchronization in a Class of Discrete Rational Chaotic Systems. *Far East Journal of Dynamical Systems*, Vol. 23 (1-2), pp. 41-48.
- [161] Ouannas, A., Odibat, Z. (2015) Generalized synchronization of different dimensional chaotic dynamical systems in discrete-time, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 81 (1), 765-771.
- [162] Ouannas, A., Al-sawalha, M.M, (2016) On  $\Lambda - \varphi$  generalized synchronization of chaotic dynamical systems in continuous-time, *The European Physical Journal Special Topics*, Vol. 225 (1), pp. 187-196.
- [163] Ouannas, A., Grassi, G. (2016). Inverse Full State Hybrid Projective Synchronization for Chaotic Maps with Different Dimensions, *Chinese Physics B*, Vol. 25 (9), pp. 090503-6.
- [164] Ouannas, A., (2016). Co-existence of various synchronization-types in hyperchaotic maps, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Vol. 16 (3), pp. 312-321.
- [165] Ouannas, A., Al-sawalha, M.M., Ziar, T., (2016) Fractional chaos synchronization schemes for different dimensional systems with non-identical fractional-orders via two scaling matrices, *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, Vol. 127 (20), pp. 8410-8418.

- 
- [166] Ouannas, A., Grassi, G. (2016). A new approach to study co-existence of some synchronization types between chaotic maps with different dimensions, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 86 (2), pp. 1319–1328.
- [167] Ouannas, A., Odibat, Z., Shawagfeh, N. A new Q–S synchronization result for discrete chaotic systems, *Differential Equations and Dynamical Systems*, pp 1-10, DOI 10.1007/s12591-016-0278-x.
- [168] Ouannas, A., Azar, A.T., Vaidyanathan, S. On A Simple Approach for Q-S Synchronization of Chaotic Dynamical Systems in Continuous-Time. *International Journal of Computing Science and Mathematics*. Vol. 8 , n (1), pp. 20–27.
- [169] Ouannas, A., Azar, A.T., Ziar, T. On Inverse Full State Hybrid Function Projective Synchronization For Continuous-time Chaotic Dynamical Systems with Arbitrary Dimensions. *Differential Equations and Dynamical Systems*. pp. 1-14. DOI 10.1007/s12591-017-0362-x.
- [170] Ouannas, A., Gasri, A., Ojo, K.S., Pham, V.-T. (2018), Co-existence of Generalized Synchronization and Inverse Generalized Synchronization Between Chaotic and Hyperchaotic Dynamical Systems. *Nonlinear Analysis : Modeling and control*, 23 (4), 583.
- [171] Boudiar, S., Ouannas, A., Bendoukha, S., Zaraï, A., (2019), Coexistence of Some Types of Chaos Synchronization between Non-Identical and Different Dimensional Systems. *Nonlinear Dynamics and System Theory*, 18(3), 253-258.
- [172] Ouannas, A., Bendoukha, S., Khennaoui, A.-A., Grassi, G., Wang, X., Pham, V.-T., (2019), Chaos synchronization of fractional–order discrete–time systems with different dimensions using two scaling matrices. *Open Physics* 17 (1), 942-949.
- [173] Khennaoui, A.-A., Othman, O.A., Almatroud, Ouannas, Al-sawalha, A.M., Pham, V.-T. The effect of caputo fractional difference operator on a novel game theory model. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - B*, doi : 10.3934/dcdsb.2020302.
- [174] Ouannas, A., Jouini, L., Zehrou, O. (2019), On New Generalized Hybrid Synchronization in Chaotic and Hyperchaotic Discrete-time Dynamical Systems, *Journal of Applied Nonlinear Dynamics*, Vol. 8(3), pp. 435-445.
- [175] Ouannas, A., Al-sawalha, M.M. (2017), On inverse full state hybrid projective synchronization of chaotic dynamical systems in discrete-time. *International Journal of Dynamics and Control* 5 (2), pp. 252-258.
- [176] Itoh, M., Yang, T., Chua, L.O. (2001), Conditions for impulsive synchronization of chaotic and hyperchaotic systems, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, Vol. 11(2), pp. 551-560.

- [177] Jouini, L., Ouannas, A. (2019), Increased and Reduced Synchronization between Discrete-Time Chaotic and Hyperchaotic Systems, *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*, Vol. 19(2), pp. 313-318.
- [178] Jouini, L., Ouannas, A., Khennaoui, A.-A. et al. (2019), The fractional form of a new three-dimensional generalized Hénon map. *Adv. Differ. Equ.*, 122. <https://doi.org/10.1186/s13662-019-2064-x>.
- [179] Zheng, J., Wang, Z., Li, Y., Wang, J. (2018), Bifurcations and chaos in a three-dimensional generalized Hénon map. *Adv. Differ. Equ.* 2018, 185. <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1622-y>.
- [180] Wu, G., Baleanu, D. (2015), Jacobian matrix algorithm for Lyapunov exponents of the discrete fractional maps. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* Vol. 22(1-3), pp. 95–100.
- [181] Shukla, M., Sharma, B. (2017), Investigation of chaos in fractional order generalized hyperchaotic Henon map. *Int. J. Electron. Commer.* Vol. 78, 265–273. <https://doi.org/10.1016/j.aeue.2017.05.009>.