الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشهيد العربي التبسي تبسة

كلية العلوم الإقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

مطبوعة محاضرات في

الإحصاء 02

(الإحصاء الرياضي سابقا)

مع أمثلة وتطبيقات محلولة

لطلبة السنة الأولى: قسم التعليم الأساسي

الدكتور: بنشوري عيسى

أستاذ محاضر

ba.aissa@gmail.com

aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

ملاحظة: يتشرف الأستاذ بقبول أي ملاحظة أو تصحيح لخطأ أو نسيان

مستخرج قبول المطبوعة بعد التحكيم

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة العربي التبسي- تبسة / الجزائر
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
Université Larbi Tébessi -Tébessa
Faculté des Sciences Economiques et des Sciences Commerciales et des Siences de Gestion
المجلس العلمي للكلية

رقم:02/11 م ع /ك ع اق تج ع ت/ ج ع ت/2022

تبسة في: 2022/08/29

مستخرج من محضر المجلس العلمي

بموجب محضر المجلس العلمي لكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير في دورته العادية الرابعة،المنعقد بتاريخ السابع عشر من شهر جويلية سنة ألفين واثنان وعشرين (2022/07/17) على الساعة العاشرة صباحا،والمتضمن قبول تحكيم المطبوعة الموسومة بـــ: **محاضرات في مقياس الاحصاء 2 مع أمثلة و تمارين**، والمقدمة من طرف الدكتور **بنشوري عيسى**

والتي تمت إحالتها للتحكيم العلمي من طرف رئيس المجلس العلمي للكلية على الخبراء المذكورين أدناه:

- **د. توبي عبد المالك**: أستاذ محاضر "أ"، جامعة العربي التبسي- تبسة.
- **د. زغدود سهيل**: أستاذ محاضر "أ" ، جامعة باتنة 1-باتنة

وبناء على نتيجة التحكيم الإيجابية، وافق أعضاء المجلس العلمي على قبول المطبوعة واعتمادها كمرجع علمي لطلبة العلوم الاقتصادية، العلوم التجارية وعلوم التسيير.

رئيس المجلس العلمي

رئيس المجلس العلمي للكلية
د.حفيظ عبد الحميد

Adresse: Route de Constantine BP 12002 Tébessa Algérie Conseil Scientifique de la Faculté des Sciences Economiques et Commerciales et des Sciences de Gestion Téléfax : +213 037 58 18 80 Email : csfsecsout@gmail.com

مستخرج تعيين المحكمين

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
جامعة العربي التبسي- تبسة / الجزائر
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير
Université Larbi Tébessi -Tébessa
Faculté des Sciences Economiques et des Sciences Commerciales et des Siences de Gestion
المجلس العلمي للكلية

رقم١٨/ م ع /ك ع اق تج ع ت/ ج ع ت/ 2022 تبسة في: 27-03-2022

مستخرج من محضر المجلس العلمي

بموجب محضر المجلس العلمي لكلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير في دورته العادية الثانية، المنعقد بتاريخ السادس من شهر مارس سنة ألفين واثنين وعشرين (2022/03/06) على الساعة العاشرة صباحا، فقد وفق وصادق المجلس على قبول إحالة المطبوعة الموسومة بـ: **إحصاء 2 أمثلة وتمارين**، والمقدمة من طرف الدكتور **عيسى بنشوري**، على التحكيم أمام اللجنة الموالية:

- د. عبد المالك توبي أستاذ محاضر -أ- جامعة العربي التبسي -تبسة-
- د. سهيل زغدودي أستاذ محاضر -أ- جامعة الحاج لخضر - باتنة

رئيس المجلس العلمي للكلية

رئيس المجلس العلمي للكلية
د. حفيظ عبد [illegible]

Adresse: Route de Constantine BP 12002 Tébessa Algérie Conseil Scientifique de la Faculté des Sciences Economiques et Commerciales et des Sciences de Gestion Téléfax : +213 037 58 18 80 Email : csfsecoutt@gmail.com

البرنامج الوزاري للمادة

(إلى غاية06مارس2022 تاريخ دفع المطبوعة)

السداسي: الثاني
وحدة التعليم : المنهجية
المادة : احصاء2
الرصيد: 4
المعامل: 2

أهداف التعليم (*ذكر ما يفترض على الطالب اكتسابه من مؤهلات بعد نجاحه في هذه المادة، في ثلاثة أسطر على الأكثر*)

التحكم في أدوات الإحصاء الرياضي (الاحتمالات، المتغير العشوائي و التوزيعات الاحتمالية)

المعارف المسبقة المطلوبة (*وصف مختصر للمعرفة المطلوبة والتي تمكن الطالب من مواصلة هذا التعليم، سطرين على الأكثر*)

احصاء 1 ، رياضيات 1.

محتوى المادة:

1- مدخل للاحتمالات
- التجربة العشوائية
- الاحتمال، الاحداث(التلازم ، التنافي ، الاستقلالية، الشرطية)

2- المتغير العشوائي
- المتغير العشوائي المنفصل والمتصل
- التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع الاحتمالي
- الأمل الرياضي والانحراف المعياري

3- التوزيعات الاحتمالية
- التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل
- التوزيعات الاحتمالية للمتغير المتصل

طريقة التقييم: (نوع التقييم و الترجيح)
- مستمر 50 %
- امتحان 50 %

المراجع: (*كتب ومطبوعات ، مواقع انترنت، إلخ*)

1- السعدي رجال، نظرية الإحتمالات : مبادئ الحساب الإحتمالي (دروس وتمارين) الجزء الأول ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر،2008.
2- جانطو جيلالي، الإحصاء مع تمارين ومسائل محلولة، ديوان المطبوعات الجامعية 2002.
3- دومينيك سالفاتور، الاقتصاد القياسي والإحصاء التطبيقي، سلسلة شوم، دار ماك غراو هيل، 1985.
4- نصيب رجم، الإحصاء التطبيقي، دار العلوم للنشر و التوزيع، عنابة، الجزائر، 2004.

شهادة تدريس 1

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
Ministère de l 'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة العربي التبسي-تبسة
كلية العلوم الاقتصادية و العلوم التجارية و علوم التسيير

UNIVERSITÉ LARBI TEBESSI - TÉBESSA
Faculté des Sciences Economiques, Sciences Commerciales et des Sciences de Gestion

قسم التعليم الأساسي
الرقم: ....../ ق ت اس / ك ع إق ع ت ع ت / ج ت / 2021

تبسة في:

شهادة تدريس

يشهد السيد رئيس قسم التعليم الأساسي بأن الأستاذ "بنشوري عيسى" المولود في: 1982/01/26؛ بـ: تكوت ولاية باتنة؛ قد درس على مستوى قسم التعليم الأساسي بصفته أستاذ محاضر "أ" المقاييس التالية:

السنة الجامعية	السداسي الأول	السداسي الثاني
2021/2020	اقتصاد جزئي01	إحصاء 02

رئيس قسم التعليم الأساسي

رئيس قسم التعليم الأساسي
كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية
وعلوم التسيير
د: حلتشي فارح

شهادة تدريس 2

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

جامعة العربي التبسي– تبسة

كلية العلوم الاقتصادية والعلوم التجارية وعلوم التسيير

قسم التعليم الأساسي

رقم: ..../ق ت أ/ ك ع إق ع ت ع ت/ ج ت/2018

تبسة في: 2018/04/24

شهادة تدريس

يشهد رئيس قسم التعليم الأساسي بأن السيد: "بنشوري عيسى" أستاذ محاضر قسم "ب" قد قام بتدريس المقاييس التالية:

السنة الجامعية	السداسي	المقياس المدرس	المستوى
2010/2009	الأول	اقتصاد جزئي 01	سنة أولى ليسانس
	الثاني	اقتصاد جزئي 02	سنة أولى ليسانس
2011/2010	الأول	اقتصاد جزئي 01	سنة أولى ليسانس
	الثاني	اقتصاد جزئي 02	سنة أولى ليسانس
2012/2011	الأول	اقتصاد جزئي 01	سنة أولى ليسانس
	الثاني	//	//
2016/2015	الأول	//	//
	الثاني	الإحصاء 02	سنة أولى ليسانس
2017/2016	الأول	الاقتصاد الجزئي 01	سنة أولى ليسانس
	الثاني	الإحصاء 02	سنة أولى ليسانس

رئيس القسم

سلمت هذه الشهادة بطلب من المعني لاستعمالها في حدود ما يسمح به القانون.

الفهرس

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامِعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التَبِسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

مقدمة

مقدمة

يستمتع البعض منا بموضوعات الرياضيات لاحتوائها على العديد من التحديات الفكرية والجماليات الذهنية، ولكننا باعتبارنا أكاديميين: أساتذة وطلبة؛ نسعى لاستعمال منافعها في الحياة العامة واليومية وحل مشاكل الواقع، وتوفر الرياضيات والاحتمالات مجموعة كبيرة من الأدوات التي نواجه بها هذه المشاكل.

ويعود التطوير الأولي لعلم الاحتمالات والذي هو أساس هذا المقياس إلى بدايات القرن الثامن عشر وكان متصلا بالإجابة عن الأسئلة المطروحة في ألعاب الحظ، وظهرت واحدة من أوائل الحالات المسجلة في حساب الاحتمالات في المراسلات بين اثنين من أشهر علماء الرياضيات (*Blaise Pascal*) و(*Pierre de Fermat*) وكانت القضية على سبيل المثال ما هي أفضل النتيجتين والأكثر ملاءمة لرمي مكعب نرد بالنسبة لمراهن: (1) الحصول على رقم 6 مرة واحدة على الأقل في أربع رميات؛ (2) الحصول على زوج واحد على الأقل من الرقم 6 عند رمي مكعبي نرد متماثلين 24 مرة متتالية؛ فكانت على هذا المنوال ألعاب الحظ هي المجال المفضل والمثمر لتطبيق منهجية الاحتمالات وذلك لحاجة لاعبي البوكر مثلا لمعرفة الاحتمالات والأرجحيات التي يجب التعامل معها في مختلف أيدي اللاعبين الآخرين (مع ملاحظة أن ذلك لا يكفي في مثل هذه الحالة للربح لانطوائها على الكثير من علم النفس) ونفس الشيء يقال عن بقية ألعاب الورق حيث نشر (*Edward O. Thorp*) سنة 1962 كتابه (تغلب على موزع الورق)؛ واستعمل فيه البراهين الاحتمالية لتسلسل توزيع الأوراق والحالات التي يكون فيها احتمال ربح اللاعب أكثر من الموزع وأدى ذلك لتطوير الكازينوهات لطرق توزيع الأوراق كاستعمال عدة توزيعات فظهر ما يمسى بالتقريب المتصل أو المستمر لإيجاد استراتيجيات الرهان الأمثل.

وبالتوازي تطورت نظرية الألعاب كفرع مهم في الرياضيات يهتم أساسا بنمذجة حالات المنافسة، التعاون والصراع؛ وغالبا ما تتطلب تطبيقات الاحتمالات الآلات الحاسبة والبرامج الحاسوبية لحلها لقدرتها على محاكاة الظواهر العشوائية وتحليل النماذج الاحتمالية المعقدة مما يفسر غلاء أسعارها (محاكاة الاحتمالات في محور 7)، وهكذا تطور استعمالها في العديد من الميادين المختلفة ونواحي الحياة الاجتماعية.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

1. مدخل للاحتمالات

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ كُلِّية العلوم الاقتصادية جامِعَة الشيخ العَرْبي التَبَسّي "تبَسَّة" ؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

تمهيد:

يُعتَبَرُ الاحتمال فرعا من الرياضيات ويركز على دراسة العشوائيات وعدم التأكد، فعندما نكون أمام حالة تظهر فيها واحدة أو أكثر من عدة نتائج ممكنة توفر نظرية الاحتمالات وسائل لقياس الحظوظ والفرص المرتبطة بمختلف النتائج؛ ويتم في الحياة العملية استخدام لغة الاحتمالات بطرق مخالفة للقواعد الرسمية في العديد من السياقات المختلفة لغويا وكتابيا ومن الأمثلة على ذلك عبارات مثل: "من المرجح ارتفاع مؤشر داو جونز بحلول نهاية العام"، "هناك فرصة 50-50 بأن يسعى الرئيس الحالي لإعادة الترشح"، "من المحتمل عدم إعادة تقديم هذا الدرس العام القادم"، "ترجح الاحتمالات التوصل إلى تسوية سريعة للإضراب"، "من المتوقع أن يتم بيع ما لا يقل عن 20000 من تذاكر المباراة".

وسنقدم في هذا المحور بعض مفاهيم الاحتمالات الأساسية مع الإشارة إلى كيفية معالجة الاحتمالات وكذلك تبيان كيفية تطبيق قواعد الاحتمالات لحساب حظوظ وفرص مختلف الأحداث؛ حيث تسمح لنا منهجية الاحتمالات بالتعبير بلغة دقيقة علا خلاف التصريحات غير الرسمية كالمذكورة أعلاه.

1.1. التجربة العشوائية، فضاء العينة والأحداث

تشير ما يسمى **بالتجربة العشوائية** ($\mathcal{E}$) في الاحتمالات إلى أية عملية أو نشاط تخضع نتائجه إلى حالة عدم التأكد؛ فمصطلح التجربة يشير عموما إلى تلك الفحوصات المخبرية المخطط لها سابقا والمتحكم فيها بعناية فائقة، ولكننا هنا نستخدم المصطلح بمعنى أوسع من ذلك بكثير فقد تكون التجارب مثل: رمي قطعة نقدية مرة أو عدة مرات، اختيار بطاقة أو اكثر من بطاقات الموزع في لعبة الورق، تحديد وزن رغيف الخبز، قياس زمن التنقل من المنزل للعمل كل صباح، تحديد فصائل الدم لمجموعة كبيرة من الأفراد وكذلك دعوة الأفراد لإجراء استطلاع....الخ؛ مع افتراض أنه: 1) يمكن تكرار التجربة تحت نفس الشروط، 2) نتائج التجربة غير معروفة مسبقا (خاصية العشوائية)، 3) قائمة كل نتائج التجربة الممكنة معروفة.

ففي تجربة رمي قطعة نقود متوازنة فإنه 1) يمكننا إعادة تكرار رميها بشكل لا متناهي تحت نفس الشروط و2) لا يمكننا معرفة نتيجة الظهور مسبقا لأن التجربة عشوائية ولكننا 3) نعلم بأن جميع النتائج الممكنة هي (إما رقم أو صورة فقط).

فتُسَمَّى مجموعة (أو قائمة) القضايا (الحالات أو الأحداث) الممكنة بـ: **فضاء العينة** ويرمز له (Ω).

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ كُلّية العلوم الاقتصادية جامِعَة الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسَّة" ؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

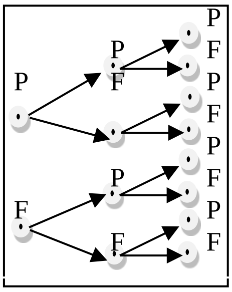
1.1.1. فضاء الإمكانيات لتجربة

تعريف: فضاء العينة لتجربة ما هو مجموعة كل النتائج الممكنة من تلك التجربة ويرمز لها بـ Ω.

مثال 01

إن أبسط التجارب التي ينطبق عليها الاحتمال هي تلك التي لديها نتيجتين ممكنتين فقط مثل رمي قطعة نقود؛ فيكون فضاء العينة لهذه التجربة هو $\Omega=\{P,F\}$ حيث يرمز F للصورة وP للرقم؛ ولو كررنا نفس التجربة ثلاث مرات فسيكون فضاء التجربة هو:

$$\Omega=\{PPP,PPF,PFP,PFF,FPP,FPF,FFP,FFF\}$$



فتنتج لدينا 08 حالات لأن هناك تقاطعات بين حالتين ثم حالتين ثم حالتين 3 مرات (8=2×2×2)؛ أي وباستعمال الفروع لكل رمية: فإن لكل نتيجة من نتائج الرمية الأولى يليها نفس العدد من نتائج الرمية الثانية؛ وكل نتيجة من نتائج الرمية الثانية يليها نفس العدد من نتائج الرمية الثالثة؛ وكل ذلك يتم في نفس الوقت.

مثال 02

تقع محطتي خدمات في تقاطع معين حيث تحوي كل محطة ثلاث مضخات وقود مختلفة؛ ونعتبر التجربة هي: عدد المضخات المستعملة في كل محطة حيث يمكن تمثيل النتائج (فضاء التجربة) كما يلي:

$$\Omega=\{00,01,02,03,10,11,12,13,20,21,22,23,30,31,32,33\}$$

فتنتج لدينا ستة عشر 16 حالة لوجود تقاطعات بين أربع 4 حالات للمحطة الأولى وأربع 4 حالات للمحطة الثانية (4×4).

2.1.1. الحدث(التلاؤم، التنافي، الاستقلالية والشرطية)

نهتم هنا ليس فقط بالنتائج الفردية الممكنة لتجربة ما ولكن نهتم أيضا بمجموعات جزئية من كل النتائج الممكنة للتجربة؛ فعند القيام بتجربة عشوائية معينة: نقول بوقوع الحدث A إذا احتوت نتائج التجربة على نتيجة واحدة أو أكثر من نتيجة واحدة تؤدي لوقوع الحدث A.

تعريف: الحدث هو أي مجموعة فرعية من نتائج فضاء العينة (المجموعة الكلية Ω) لتجربة عشوائية، وقد يكون الحدث **بسيطا** إذا تَكَوَّن من نتيجة واحدة من نتائج التجربة؛ وقد يكون **مركبا** إذا تَكَوَّن من أكثر من نتيجة واحدة من نتائج التجربة.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبِي التَّبسِّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

مثال 03

نعتبر أن تجربة ما هي وجود ثلاث سيارات في طريق عام وتأخذ كل منها مخرجا معينا (يسارا L أو يمينا R) في نهاية الممر؛ فتكون الحالات الممكنة التي تمثل نتائج هذه التجربة هي 8 تشكل المجموعة الكلية

$$\Omega=\{RRR,RRL,RLR,RLL,LRR,LRL,LLR,LLL\}$$

نلاحظ وجود ثمانية أحداث بسيطة (بناءا على وجود 8 نتائج ممكنة للتجربة) من بينها مثلا:

E_1: حدث كل السيارات تتجه يمينا $E_1=\{RRR\}$

E_2: حدث السيارة الأولى تتجه يمينا والبقية تتجه يسارا $E_2=\{RLL\}$

وقد تكون هناك أحداث مركبة (من عدة مجموعات جزئية مختلفة من نتائج التجربة) ومن هذه الأحداث:

E_3: حدث وجود سيارة واحدة فقط تتجه يسارا والباقي لا يهم $E_3=\{LRR,RLR,RRL\}$

E_4: حدث وجود سيارة واحدة على الأكثر تتجه يسارا $E_4=\{RRR,LRR,RLR,RRL\}$

E_5: حدث كل السيارات تتجه في نفس الاتجاه $E_5=\{RRR,LLL\}$

ولنفترض أن الاتجاه فعلا في التجربة هو كل السيارات نحو اليمين؛ فنقول أن الأحداث التي <u>وقعت</u> هي الحدث E_1 وكذلك الحدثين E_4 وE_5 ولكن <u>لم يقع</u> الحدث E_3.

باعتبار أن الحدث ما هو إلا مجموعة تتكون من نتيجة واحدة أو أكثر؛ فإن العلاقات والنتائج من نظرية المجموعات الأساسية يمكن استعمالها لدراسة الأحداث حيث يمكن استعمال العمليات التالية لتشكيل واستنتاج أحداث جديدة بناءا على أحداث معينة معطاة لنا.

تعاريف:

- **متمم حدث** A يرمز له بالرمز $\overline{A}$ وهو مجموعة النتائج الموجودة في المجموعة الكلية Ω والتي لا يتحقق من خلالها الحدث A؛
- **تقاطع حدثين** A وB يرمز له بالرمز $A\cap B$ ويُقرأ: حدوث A و B ويعني كل النتائج التي يتحقق من خلالها الحدثين A وB معا أو في نفس الوقت؛
- **اتحاد حدثين** A وB يرمز له بالرمز $A\cup B$ ويُقرأ: حدوث A أو B ويعني كل النتائج التي يتحقق من خلالها A فقط أو B فقط أو كلاهما (ونقول وقوع حدث واحد على الأقل(A أو B) أو كلاهما)؛
- **فرق حدثين** A وB هو إما مجموعة الأحداث التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B ويرمز له بالرمز $A-(A\cap B)$؛ أو العكس أي تنتمي إلى B ولا تنتمي إلى A ويرمز له بالرمز $B-(B\cap A)$؛
- **الحادث الأكيد** هو الحدث الذي يتحقق في كل تجربة مهما تكررت إلى ما لا نهاية من المرات؛ فلو رمينا قطعة نرد فيمكننا على سبيل المثال تحديد الأحداث الأكيدة التالية: (ظهور رقم أقل من 50، ظهور رقم طبيعي...) ونظريا الحادث الأكيد هو كامل مجموعة نتائج التجربة (Ω)؛

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

- **الحادث المستحيل** هو الحادث الذي لا يمكن ظهوره حتى لو تكررت التجربة إلى ما لا نهاية من المرات فالأحداث المستحيلة عند رمي قطعة نرد مثلا هي: (ظهور رقم 9، ظهور رقم أكبر من 17، ظهور رقم عشري...) مهما تكرر عدد الرميات، ونظريا هو المجموعة الخالية($\emptyset$)؛

مثال 04

نعتبر أن تجربة ما هي رمي قطعة نرد ونسمي بعض الأحداث كما يلي:

A حدث ظهور رقم يقبل القسمة على 3؛

B حدث ظهور رقم فردي؛

C حدث ظهور رقم زوجي؛

فتكون مجموعة النتائج الكلية والممكنة لتجربة رمي النرد هي: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

والأحداث المسماة سابقا هي: $A=\{3,6\}$ و$B=\{1,3,5\}$ و $C=\{2,4,6\}$

والعلاقات المعرفة سابقا أيضا كما يلي:

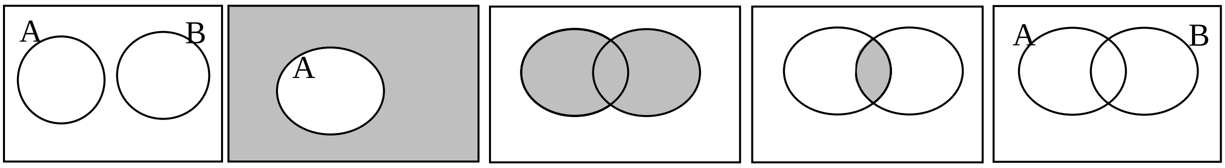
- المتمم: $\bar{A}=\{1,2,4,5\}$ $\quad \bar{B}=\{2,4,6\}$ $\quad \bar{C}=\{1,3,5\}$
- التقاطع: $A\cap B=\{3\}$ $\quad A\cap C=\{6\}$ $\quad B\cap C=\{\ \}=\phi$
- الاتحاد: $A\cup B=\{1,3,5,6\}$ و $A\cup C=\{2,3,4,6\}$ و $B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}=\Omega$
- فرق حدثين: $A-(A\cap B)=\{6\}$ أو $B-(B\cap A)=\{1,5\}$
- "اتحاد متممين" هو نفسه "متمم التقاطع": $\overline{A\cap B}=\{1,2,4,5,6\}=\bar{A}\cup\bar{B}$
- "تقاطع متممين" هو نفسه "متمم الاتحاد": $\overline{A\cup B}=\{2,4\}=\bar{A}\cap\bar{B}$ (انظر تمرين 11 أو 10 هنا)

استنتاج: وهكذا يمكن استنتاج العديد من العلاقات الأخرى من خلال النتائج الموجودة؛ ويسمى القانونين الأخيرين بقوانين (*De Morgan*) ويعني هذين القانونين أن التقاطع والاتحاد يتبادلان تحت النفي عند النشر فيكون متمم التقاطع هو اتحاد المتَمِّمَيْن ومتمم الاتحاد هو تقاطع المتَمِّمَيْن.

- عندما لا يكون هناك نتائج مشتركة بين حدثين A و B داخل نفس المجموعة فيقال عنهما أنهما **حدثان متعارضان** (متنافيان) ويُعَبَّرُ عن التقاطع بينهما كما يلي $B\cap C=\phi$ (كما رأينا أعلاه) ويشير الرمز ϕ إلى المجموعة الخالية وهي التي لا تحتوي على أية نتيجة من المجموعة الكلية وتسمى الحدث الفارغ أو المستحيل أو المعدوم، مثل حدث ظهور رقم فردي وزوجي في نفس الوقت حسب المثال السابق $B\cap C=\phi$؛
- يمكن توسيع هذه العلاقات لأكثر من حدثين فتكون مجموعة النتائج التي تحقق كل الأحداث الثلاثة A,B,C في نفس الوقت هي $A\cap B\cap C$ بينما مجموعة النتائج التي تحقق على الأقل أحد الأحداث الثلاث هي $A\cup B\cup C$ ، ونقول عنها أنها أحداث متنافية عند عدم وجود نتائج مشتركة بينهما.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

- يتم الحصول على تمثيل مصور للأحداث ومعالجتها باستعمال ما يُسَمَّى بمخطط فين (*Venn diagrams*)؛ ولإنشائه نرسم مستطيلا يمثل فضاء العينة Ω ثم يتم تمثيل أي حدث A أو B كمنحنى مغلق (غالبا ما يكون دائرة) محتوى داخل المستطيل الذي يمثل Ω ؛ وتمثل الأشكال من اليمين لليسار على الترتيب: حدثين؛ وتشير المساحة المظللة إلى: التقاطع بينهما، اتحادهما، متمم A ثم حدثان متعارضان؛



د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامِعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التَّبَسِّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

3.1.1. تمارين المحور الأول (التجربة العشوائية فضاء العينة والأحداث) [1]

01: يتقدم رامي وسناء لعدة وظائف جامعية وليكن A حدث أن رامي قد تم توظيفه وB حدث أن سناء قد تم توظيفها: عبر بالرموز عن الأحداث التالية:

- تم توظيف سناء أما رامي فلم يتم توظيفه؛ $\bar{A}\cap B$
- تم توظيف واحد منهما فقط؛ $(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)$
- تم توظيف واحد منهما على الأقل. $(A\cap\bar{B})\cup(\bar{A}\cap B)\cup(A\cap B)$

02: يتقدم مواطنان x وy لمركز الانتخابات ليختارا بين ثلاث مترشحين A، B وC لمجلس البلدية:

- حدد جميع عناصر (نتائج) المجموعة Ω التي تمثل خيارات المواطنَيْن؛
- حدد النتائج التي تشير لحدث اختيار كلا المواطنين لنفس المترشح؛
- حدد النتائج التي تشير لحدث عدم اختيار المواطنين للمترشح B.

03: تشارك 4 جامعات في دورة كرة القدم؛ ويتم اللعب عن طريق الجولات في الدور الأول (1تلعب مع2 و3تلعب مع4)؛ وفي الدور الثاني يلعب الفائزان من أجل اللقب ويلعب الخاسران من المركز الثالث(كل نتيجة ممكنة تكتب بالترتيب التالي:1324 إذا كان1فاز على2 و3فازت على4 في الدور الأول وفي نفس الوقت1فازت على3 و2فازت على4):

- حدد جميع عناصر (نتائج) المجموعة Ω التي تمثل نتائج اللعب في الدورين؛ (08حالات)
- حدد الحدث A والذي يمثل جميع النتائج التي تفوز فيها الجامعة 1 باللقب؛ (أربع حالات)
- حدد الحدث B والذي يمثل جميع النتائج التي تصل فيها الجامعة 2 للعب المباراة النهائية؛ (08حالات)
- حدد $(A\cap B)$، $(A\cup B)$ و$(\bar{A})$.

04: في طريق عام توجد ثلاثة مخارج: يمينا، يسارا ومباشرة؛ فإذا كان 03سيارات تسير متتابعة: (3×3×3حالة)

- حدد الحدث A أين تتجه السيارات كلها في نفس الاتجاه؛ (3×1×1حالات)
- حدد الحدث B اين تتجه السيارات الثلاث في اتجاهات مختلفة؛ (3×1×1حالات)
- حدد الحدث C أين تتجه سيارتان فقط نحو اليمين؛ (2×1×1+1×2×1+1×1×2 =6حالات)
- حدد الحدث D أي تتجه سيارتان في نفس الاتجاه؛ (3×1×3+3×3×1+1×3×3=18حالة)
- حدد $(C\cap D)$، $(C\cup D)$ و$(\bar{C})$.

[1] - وللاستفادة أكثر يمكن العودة لفيديو "التجربة والحدث" على قناة اليوتيوب "للأستاذ: بنشوري.ع" على الرابط التالي:
https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

05: يقدم بنك ما أربعة أنواع من القروض دفعة واحدة لشخص ما؛ فيختار لكل قرض إما ذات فائدة ثابتة (F) أو ذات فائدة متغيرة (V)؛ استخدم مخطط الشجرة

- ما هي مجموعة النتائج الممكنة الكلية لاختياراته؛ (16 حالة)
- حدد مجموعة النتائج التي تشكل حدث A يمثل اختيار 03 قروض ذات فائدة ثابتة؛ (5حالات)
- حدد مجموعة النتائج التي تكوِّن حدث B يمثل اختيار أربعة قروض من نفس نوع الفائدة؛
- حدد مجموعة النتائج التي تكوّن حدث C يمثل اختيار قرض واحد على الأكثر ذو فائدة متغيرة؛
- حدد $(B\cup C)$؛ و $(B\cap C)$؛
- حدد $(A\cup B)$، و $(A\cap B)$.

06: تتكون عائلة من03أفراد؛ يقومون بزيارة عيادة فيها03 أطباء مرة في الشهر؛ فيختار كل منهم طبيبا عشوائيا؛

- ما هي مجموعة النتائج الممكنة الكلية لاختياراتهم (فضاء العينة او فضاء التجربة)؛ (27حالة)
- حدد الحدث A أين يختار الأفراد الثلاث نفس الطبيب؛ (3×1×1)
- حدد الحدث B أين يختار الأفراد الثلاث أطباء مختلفين؛ (3×2×1)
- حدد الحدث C أين لا يختار الأفراد الثلاث الطبيب 02.(2×2×2)

07: تمتلك جامعة تبسة نسختين من كتاب آدم سميث(1، 2) وثلاث نسخ من كتاب كارل ماركس (3، 4 و5)؛ فيفحص أحد الطلبة هذه النسخ الخمسة بالترتيب العشوائي حيث يتوقف عند فحصه لنسخة واحدة من كتاب كارل ماركس؛

- ما هي مجموعة النتائج الممكنة الكلية للفحص (فضاء العينة او فضاء التجربة)؛
- حدد الحدث A أين يفحص الطالب نسخة واحدة فقط؛(3)
- حدد الحدث B أين يفحص الطالب النسخة رقم 5؛ (5حالات)
- حدد الحدث C أين لا يفحص الطالب النسخة رقم 1.(9حالات)

08: تم انتخاب عضو واحد للانضمام للمجلس العلمي للكلية من بين أستاذين مساعدين عن طريق الاقتراع السري؛ فاحتوى صندوق الاقتراع على أربع قسائم اقتراع بالنسبة للأستاذ A وثلاث قسائم اقتراع للأستاذ B؛ وإذا افترضنا أن سحب القسائم من الصندوق يتم واحدة بواحدة على التوالي:

- حدد مجموعة النتائج الممكنة الكلية للسحب (فضاء العينة أو فضاء التجربة).

09: تعمل شركة بناء على تحضير ثلاث مبان مختلفة؛ وليكن الحدث Ai هو اكتمال المبنى i بالتاريخ المحدد في العقد، وباستعمال عمليات التقاطع، الاتحاد والمتمم؛ قم بوصف الأحداث التالية بالرموز ثم باستخدام مخطط Venn قم برسم نفس الأحداث مظللا الحدث المعني:

- E1 حدث اكتمال مبنى واحد على الأقل بتاريخ العقد؛

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

- E2 حدث اكتمال كل المباني بتاريخ العقد؛
- E3 حدث اكتمال المبنى الأول فقط بتاريخ العقد؛
- E4 حدث اكتمال مبنى واحد فقط بتاريخ العقد؛
- E5 حدث اكتمال المبنى الأول فقط أو المبنيين الثاني والثالث فقط؛
- حدد من الأحداث السابقة ثلاث أحداث تتنافى مثنى مثنى (عدم وجود نتائج مشتركة بين الأحداث)؛

10: باستخدام مخطط Venn قم بالتأكد من قوانين (*De Morgan*) التالية[1]:

- $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
- $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

[1]- وللاستفادة أكثر يمكن العودة لفيديو "قوانين ديمورجان" على قناة اليوتيوب "للأستاذ: بنشوري.ع" على الرابط التالي:
https://www.youtube.com/watch?v=u3hxsOywCPo&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA&index=2

2.1. طرق العد التقليدي

عنما يكون لجميع نتائج تجربةٍ ما نفس احتمال الظهور (مثل نتائج رمي قطعة نقود ½ أو رمي قطعة نرد 1/6) فإن مهمة حساب الاحتمالات تؤول إلى طريقة العد التقليدي؛ وكما رأينا في المحور السابق فإذا كان N هو عدد نتائج وفضاء المعاينة لتجربة ما و$N(A)$ هو عدد النتائج التي تؤدي لوقوع حدثA فإن احتمال وقوع هذا الحادث من بين جميع نتائج التجربة يعبر عنه بالعلاقة التالية:

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}$$ **معادلة 01**

وعند كون عدد نتائج التجربة صغيرا فنستعمل العلاقة السابقة (**معادلة 01**) دون الحاجة لمبادئ طرق العد التقليدي، وعند كبر عدد النتائج نستعمل بعض قواعد العد التقليدي والتي تفيدنا غالبا عند كون احتمالات نتائج تجربة معينة غير متساوية والعديد من هذه القواعد ستستعمل في دراسة التوزيعات الاحتمالية في المحاور القادمة.

1.2.1. مبدأ العد الأساسي

إن أبسط قاعدة في العد هي تلك التي تنطبق على الأحداث المرتبة في أزواج مثنى مثنى من النتائج؛ بحيث يكون الهدف هو حساب عدد هذه الأزواج، ونعني بالأزواج المرتبة عند وجود نتيجتين في تجربة معينة تتكرر عدة مرات (مثل رمي قطعة نقود مرتين مثلا) فيكون ترتيب كل الأزواج الممكنة $\{PP,FF,FP,PF\}$ ؛

تعريف: إذا كان لتجربة ما عدد نتائج هو(n_1)، ولتجربة أخرى عدد(n_2) من النتائج؛ وبما أن التجربتين مستقلتين فكل نتيجة من(n_1) تقابلها كل نتائج(n_2) وعدد كل الأزواج هو ضرب العددين؛ أو بعبارة أخرى إذا أمكن اختيار عنصر من الأزواج السابقة بـ(n_1) طريقة؛ ولكل طريقة منها يمكن اختيار العنصر الثاني بـ(n_2) طريقة فيكون عدد كل الأزواج الممكنة والممثلة للتجربة إجمالا هو$(N=n_1\times n_2)$.

مثال 05

أراد صاحب منزل ترميم منزله من حيث السباكة والبِنَاء، ويتوفر لديه للاختيار بين 12 سبَّاكا و9 بَنَّائين؛ حيث يجب أن يتم اختيار بَنَّاء وسبَّاك معا (توليفة أو ثنائية)، فبكم طريقة يمكنه اختيار التوليفة (بَنَّاء وسبَّاك) من بين جميع الحرفيين المتوفرين؟

إذا رمزنا للسبَّاكين بـ: $P_1,P_2,....P_{12}$، وللبَنَّائين بـ: $B_1,B_2,....B_{09}$؛ ثم أردنا اختيار توليفة معينة (P_i,B_j) وبما أنه لدينا $n_1=12$ و $n_2=9$ فإن عدد الأزواج الممكن اختيارها والممثلة لجميع نتائج التجربة هو: $N=n_1\times n_2=12\times 9=108$ أي 108 توليفة ممكنة من الحرفيين (بَنَّاء وسبَّاك).

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

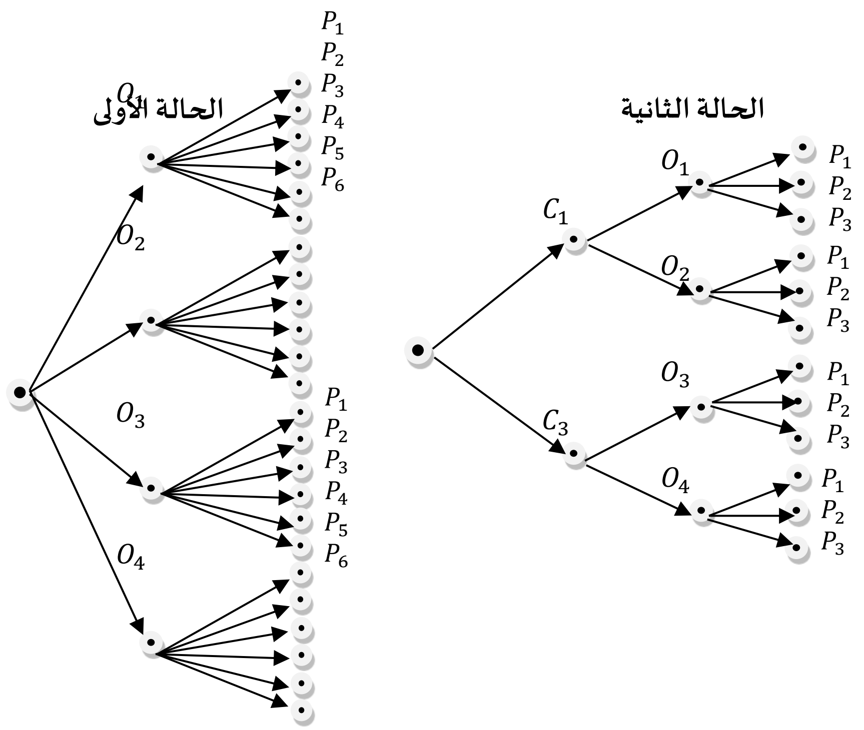
في هذا المثال لا يعتمد اختيار أي بَنَّاء B_j في التوليفة على أول سبَّاك فقط P_1 يتم اختياره طالما هناك نفس الخيارات من البنائين بالنسبة للسباك الثاني P_2 والثالث وهكذا، يمكن القول نفس الشيء إذا بدأنا بالبنائين.

مثال 06

تنتقل عائلة إلى مدينة جديدة يتوفر فيها عيادتان طبيتان (*Clinic*) وفي كل عيادة 02 طبيب نساء (*Obstetrician*) و03 أطباء للأطفال (*Pediatrician*)، ولتسفيد العائلة من الخدمات الطبية يجب علها اختيار توليفة من طبيب نساء O_i وطبيب أطفال P_j؛ ولدينا هنا حالتين:

الحالة الأولى: إذا كان الاختيار يتم بين العيادات C_k عشوائيا (أي توليفة من طبيبان (O_i, P_j) لا يشترط فيهما الانتماء لنفس العيادة) فلدينا عدد خيارات أطباء النساء O_i هو: $n_1=04$؛ وعدد خيارات أطباء الأطفال P_j هو: $n_2=06$؛ فتكون عدد التوليفات أو الخيارات هي: $N=n_1\times n_2=04\times 06=24$؛

الحالة الثانية: أما إذا كان الاختيار يجب أن يتم في نفس العيادة فيكون لدينا توليفة من طبيبان وعيادة (C_k, O_i, P_j)؛ فيكون عدد خيارات العيادة $n_1=02$ وعدد خيارات أطباء النساء هو: $n_2=02$؛ وعدد خيارات أطباء الأطفال هو: $n_3=03$؛ فتكون عدد التوليفات أو الخيارات هي: $N=n_1\times n_2\times n_3=02\times 02\times 03=12$؛



توضيح: عند رمي مكعب نرد خمس مرات متتالية تكون كل نتيجة ممكنة هي عبارة عن توليفة مرتبة من خمسة أرقام مثل: $\{1,3,1,5,2\}$ أو $\{2,4,4,3,1\}$ ونسمي ترتيب كل توليفة بالصفوف (فالتوليفة من عنصرين هي ثنائية صفوف والتوليفة من 3 عناصر هي ثلاثية صفوف) وهنا تكون لدينا خماسية صفوف مع 06 احتمالات وبالتالي يكون عدد نتائج التجربة هو: $N=n_1\times n_2=06\times 05=25$، وعند كبر عدد الصفوف أي

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

عدد العناصر داخل كل توليفة فيتم حساب عدد النتائج بتعميم هذا المبدأ إلى k عنصرا بما يسمى بمبدأ العد الأساسي.

تعريف: في تجربة معينة إذا أمكن تكوين توليفات تحوي كل توليفة k عنصرا؛ وكان للعنصر الأول عدد معين من احتمالات الظهور هو n_1 ولكل احتمال أو خيار بالنسبة للعنصر الأول يوجد عدد معين من احتمالات الظهور للعنصر الثاني وهو n_2 ،.....وهكذا بالنسبة للعنصر ما قبل الأخير $k-1$ يقابله عدد معين من احتمالات الظهور للعنصر الأخير (k هو n_k)؛ فيكون عدد التوليفات الكلية الممكنة هو: $n_1 \times n_2 \times n_3 \times .....\times n_k$

بالعودة **للمثال 05** وافترضنا أنه يتم أولا شراء معدات للمطبخ كلها من تاجر واحد ويتوفر لدى صاحب المنزل الاختيار بين خمس تجار ($D_1, D_2..D_5$) فيصبح عدد التوليفات الكلية المشكلة من 03 عناصر (P_i, B_j, D_k) هو: $N = n_1 \times n_2 \times n_3 = 12 \times 09 \times 05 = 540$ ، أي 540 طريقة لاختيار سَبَّاك، بَنَّاء وتاجر.

وبالعودة **للمثال 06** وافترضنا أن هناك في كلا العيادتان أيضا 03 جراحين و02 أطباء للأمراض الباطنية فيكون: في <u>الحالة الأولى</u>: $N = n_1 \times n_2 \times n3 \times n4 = 04 \times 06 \times 06 \times 04 = 576$ ؛

وفي <u>الحالة الثانية</u>: $N = n_1 \times n_2 \times n_3 \times n4 \times n5 = 02 \times 02 \times 03 \times 03 \times 02 = 72$.

2.2.1. مخطط الشجرة

يمكن استعمال في العديد من مسائل العد والاحتمالات ما يسمى بمخطط الشجرة وهو تكوين يسمح بالتمثيل التصويري لجميع الاحتمالات الممكنة في التجربة؛ فمن الشكل السابق وابتداء من أول نقطة على اليسار في كلا الحالتين توجد عدة إمكانيات للاختيار للعنصر الأول n_1 تعتبر فرعا للجيل الأول؛ وفي كل إمكانية للعنصر الأول توجد عدة إمكانيات للاختيار من العنصر الثاني n_2 تعتبر فرعا للجيل الثاني؛ وهكذا في الحالة الأولى عند عدم أهمية اختيار العيادات لدينا جيلين فقط أما عندما يكون لاختيار العيادة أهمية يصبح لدينا ثلاثة أجيال.

وهكذا فإن مبدأ العد الأساسي يمكن توضيحه أيضا بمخطط الشجرة وذلك ببساطة بإضافة فروع الجيلين الثالث والرابع لمخطط الشجرة وصولا لفروع الجيل رقم (k).

ولا يشترط عند رسم مخطط الشجرة تساوي عدد الفروع في كل جيل ففي **المثال 05** يتوفر في الجيل الأول (سبَّاكين) 12 فرعا بينما يتوفر في الجيل الثاني (بَنَّائين) 9 فروع فقط؛ وبالتالي فإن مخطط الشجرة يمكن استعماله بشكل أوسع حتى في الحالات التي لا يمكن فيها استعمال مبدأ العد الأساسي.

3.2.1. الترتيبات

تعريف: إن أي ترتيب أو تسلسل لـk عنصرا مسحوبا من مجموعة فيها n عنصرا مختلفا تسمى **ترتيبة حجمها** k عنصرا؛ ويرمز لها بـ: ${}_nA_k$ أو A_n^k ومعنى مرتبة أو أن اختلاف الترتيب يؤدي لاختلاف طريقة السحب (اختلاف المجموعة الجزئية المسحوبة) فنقول بأن **الترتيب مهم**.

أ. ترتيبة بالتكرار

إن الاختيارات السابقة للعناصر كانت تتم دون تكرار العناصر فعند رمي قطعة نرد تكون كل النتائج الممكنة هي 6، بينما عند رميه مرتين فتكون النتائج الممكنة هي 6×6=36 (على أساس أن الترتيب مهم أي (2،3) ليست نفسها (3،2))؛ وبصفة عامة إذا قمنا باختيار k عنصرا من مجموعة فيها n من العناصر المختلفة مع إمكانية التكرار (الاستبدال)؛ فيكون عدد النتائج الممكنة لسحب k مع إمكانية تكرار نفس العنصر هو:

$$\boxed{A_n^k = n^k = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k}$$ معادلة 02

مثال 07

يشترط موقع إلكتروني للتسجيل فيه تشكيل كلمة سر لبريد إلكتروني من 04 أرقام و03 حروف معا فما هي عدد الكلمات الممكن تشكيلها لذلك مع إمكانية تكرار نفس الرقم أو الحرف أكثر من مرة.

- إن اختيار الأرقام يتم من بين عشرة أرقام ممكنة (0،1،2.....8،9) وبحسب بالقانون السابق كما يلي:

$$A_n^k = A_{10}^4 = n^k = 10^4 = 10\times10\times10\times10 = 10000$$

- بينما سيتم اختيار الحروف من 26 حرفا ممكنا (a,b,c,.....z) وبحسب بالقانون السابق كما يلي:

$$A_n^k = A_{26}^3 = n^k = 26^3 = 26\times26\times26 = 17576$$

فيكون عدد الكلمات السرية الممكن تشكيلها هو: 10000x17576=175760000

وسنفرق فيما يلي بين مجموعة ثابتة تتكون من n عنصرا مختلفا ونفترض أن السحب من هذه العناصر يتم دون تكرار (الاستبدال)؛

ب. ترتيبة دون تكرار

إن إمكانية ظهور كل عنصر في الاختيار أو السحب k مرة دون تكرار أو إرجاع أو استبدال لنفس العنصر يؤدي لكون عدد الترتيبات الممكنة مأخوذا من مبدأ العد الأساسي حيث يكون عدد طرق اختيار:

العنصر الأول: n طريقة لاختياره؛

العنصر الثاني: $n-1$ طريقة لاختياره؛

العنصر الثالث: $n-2$ طريقة لاختياره؛

العنصر الرابع: $n-3$ طريقة لاختياره؛

....

العنصر رقم k: $n-(k-1)$ طريقة لاختياره أي $n-k+1$ طريقة؛

وهكذا في كل مرة عند اختيار العنصر التالي يتم استبعاد العنصر السابق من الاختيار لأن السحب يتم دون تكرار؛ وعندما نصل للعنصر الأخير وهو (k) فإن عدد طرق اختياره هو ($n-(k-1)$)؛ فيكون قانون الترتيبة في هذه الحالة: $A_n^k = n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\ldots\times(n-k+2)\times(n-k+1)$ ؛ أو بطريقة أخرى وبعد اختزال القانون يصبح:

معادلة 03

$$A_n^k=\frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال 08

يتوفر في كلية الاقتصاد بجامعة "تبسة" 10أساتذة محاضرين لتحضير امتحان تعويضي في مادة الإحصاء02 من 04أسئلة؛ يرغب مسؤول المقياس في اختيار أستاذ واحد لتحضير سؤال واحد؛ فما هو عدد الطرق الممكنة لذلك.

الحل: عدد الأساتذة من معطيات المثال $n=10$ وعدد الأسئلة $k=4$ وهو أيضا عدد الاختيارات الممكنة من الأساتذة فلا نستطيع اختيارهم كلهم لذا يتم اختيار أو سحب 4 أساتذة فقط؛ فيكون عدد الطرق الممكنة لاختيار 4 أساتذة من عشرة هو A_{10}^4؛ وبما أن الاختيار يتم دون تكرار[1] فنستعمل القانون الثاني: $A_{10}^4=10\times9\times8\times7=5040$ أو هكذا

$A_{10}^4=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10\times9\times8\times7\times6!}{6!}=10\times9\times8\times7=5040$؛ أي 5040 طريقة؛ أما لو كان الاختيار ممكنا بالتكرار أي يمكن لكل أستاذ تحضير أكثر من سؤال فيكون عدد الترتيبات حسب القانون الأول وهو: $P_{10}^4=10^4=10\times10\times10\times10=10000$ أي 10000 طريقة للاختيار.

وإن بعض خصائص **العاملي** هي: $0!=1,\quad 1!=1$

4.2.1. التبديلات

تبعا لنفس العنصرين السابقين وفي حالة عدد العناصر المسحوبة هو نفسه عدد عناصر المجموعة الكلية $k=n$ فإن **الترتيبات** تسمى **تبديلات** وتصبح قوانينها كما يلي: (مع ملاحظة أن الرمز يصبح $\boxed{P_n}$)

أ. **تبديلة بالتكرار**: في حالة إمكانية تكرار العناصر $\boxed{P_n^k=P_n^n=n^k=n^n=n_1\times n_2\times..\times n_n}$؛

ب. **تبديلة بعدم التكرار**: في حالة عدم إمكانية تكرار العناصر $\boxed{P_n^k=P_n^n=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{(0)!}=\frac{n!}{1}=n!}$

ج. **حالات خاصة في التبديلة**: (وتصلح في التبديلات فقط ولا تصلح في الترتيبات)

- **تبديلة مع تشابه بعض العناصر في خاصيات معينة**:

تُهمِل القوانين السابقة إمكانية وجود بعض العناصر في المجموعة n الكلية تتشابه في خصائص معينة مثل (مجموعة من الطلبة بعضهم سنة أولى والبعض سنة ثانية وهكذا...) أو (مجموعة أشخاص يراد معرفة كيفية ترتيبهم دون تكرار ولكن توجد خاصية معينة يتشابهون فيها مثل سنة ميلادهم 1997/1998/1999)؛ أي أن التكرار هنا ليس للعناصر ذاتها وإنما في خاصية معينة تشمل بعض العناصر في المجموعة الكلية؛ فيصبح قانون التبديلة كما يلي:

$$\boxed{P_n^{k_1,k_2,k_3,....k_m}=\frac{n!}{k_1!\times k_2!\times k_3!\times\ldots\times k_m!}}$$

[1]- من صيغة السؤال لا يمكن لأستاذ واحد أن يُحَضِّرَ سؤالين(أي عدم إمكانية تكرار العنصر المسحوب وهو الأستاذ).

ويشترط أن: $k_1+k_2+k_3+...+k_m=n$؛

<u>مثال 09</u>

ما هي عدد طرق جلوس مجموعة من 15 طالبا في صف معين بناءا على السنة التي يدرسون بها حيث أن 06 من هؤلاء الطلبة سنة أولى، و04 سنة ثانية و05 سنة ثالثة؛ فنلاحظ أن التكرار ليس في الطلبة وإنما تشابههم في خاصيات معينة هي السنة التي يدرسون بها فتكون النتيجة:

$$P_n^{k_1,k_2,k_3}=P_{15}^{6,4,3}=\frac{n!}{k_1!\times k_2!\times k_3!}=\frac{15!}{6!\times 4!\times 5!}=630630$$

- **<u>التبديلة الدائرية</u>**:

إذا كنا بصدد تبديلة دائرية لمجموعة من العناصر دون تكرار فإنه لا يتم التمييز بين البداية والنهاية لهذه العناصر مثل الجلوس في طاولة مستديرة؛ فتكون طريقة جلوس نفس العنصر مع زملائه مكررا n مرة لذا يتم قسمة عدد التبديلات (دون تكرار) على n فتصبح: $\boxed{\frac{P_n^n}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)!}$؛

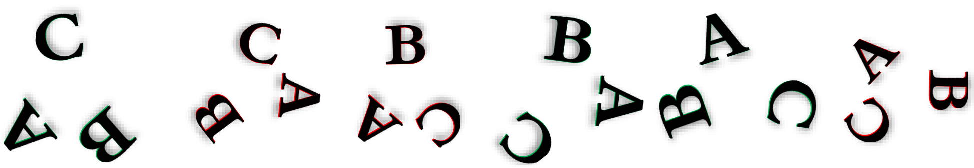
<u>مثال 10</u>

ما هي عدد طرق جلوس 03 زملاء بشكل مستقيم، ثم بشكل دائري؛

إن الجلوس بشكل مستقيم (دون تكرار للعناصر ولا لتشابه خاصيات معينة) يكون $ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$ ؛ أي عدد طرق الجلوس هي 06 وكما يبينها القانون التالي: $P_3=3!=6$

.

أما لو كان الجلوس بشكل دائري لكان عدد طرق الجلوس 02 فقط:



نلاحظ في الشكل السابق أن عدد طرق الجلوس ستكون هي نفسها ($ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$) ولأن الجلوس في شكل دائري فإن بعض الدوائر متشابهة (الأولى الرابعة والخامسة، وكذا الثانية والثالثة والسادسة) ولا يمكن التمييز بينها لعدم معرفة نقطة البداية والنهاية فيتم حذف المكررة منها فتبقى 2 فقط، وكذلك من القانون: $\frac{P_n}{n}=\frac{3!}{3}=(3-1)!=2!=2$.

1.2.5. التوفيقات

إن اختيار العناصر في الحالة السابقة يتم على أساس أن هذه العناصر تكون مرتبة في ترتيب معين وتغير هذا الترتيب يعطينا توليفة مغايرة مثل (أرقام لوحات السيارات.....)؛ وغالبا ما يراد سحب مجموعة

من العناصر مع إهمال الترتيب (أي لا يهمنا طريقة ترتيبها) فتكون التوليفة (2،3) هي نفسها (3،2) فتحذف إحداهما ومثل سحب لجنة أشخاص من فوج معين لا يهمنا ترتيبهم.

تعريف: إن أي مجموعة جزئية فيها k عنصرا لا يهمنا ترتيبها مسحوبة من مجموعة فيها n عنصرا مختلفا تسمى **توفيقة** حجمها k عنصرا؛ ويرمز لها بـ: ${}_nC_k$ أو C_n^k؛ ومعنى لا يهمنا ترتيبها أن اختلاف الترتيب لا يؤدي لاختلاف طريقة سحب المجموعة الجزئية فنقول بأن **الترتيب غير مهم**.

إن عدد التوليفات أو المجموعات الجزئية ذات k عنصرا والمسحوبة من مجموعة معينة هي أقل من عدد الترتيبات بسبب عدم أهمية الترتيب في الثانية فتكون بعض الترتيبات متشابهة وتمثل نفس التوفيقة؛ فعند سحب $k=3$ عنصرا A,B,C من مجموعة فيها $n=5$ عناصر A,B,C,D,E فإن عدد الترتيبات الممكن تشكيلها دون تكرار هو: $A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5\times4\times3\times2!}{2!}=5\times4\times3=60$؛ بينما نلاحظ أن هناك مثلا 6 ترتيبات $(ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA)$ هي في الحقيقة تشير إلى نفس المجموعة من العناصر؛ ولأن الترتيب مهم في **الترتيبات** فإنها تحسب كلها؛ أما لو كنا بصدد **التوفيقات** فنقول بأنها تمثل نفس التوفيقة أو التوليفة أو المجموعة فيتم اختيار واحدة منها فقط وحذف الباقي لعدم أهمية الترتيب في **التوفيقات**؛ وهكذا بالنسبة لباقي **التوفيقات** من 3 عناصر فهي تتكون من $3!=6$ $(k!)$ من **الترتيبات** المتكونة من نفس العناصر وهكذا لإيجاد عدد **التوفيقات** من 3 عناصر في مجموعة من 5 عناصر فإنه يتم قسمة عدد **الترتيبات** على عاملي عدد العناصر في كل ترتيبة أي $\frac{60}{3!}=10$ عشرة توفيقات عند عدم أهمية الترتيب وهي:

$ABC,ABD,ABE,ACD,ACE,ADE,BCD,BCE,BDE,CDE$.

أ. توفيقة دون تكرار

كتلخيص لما سبق فإنه وفي مجموعة كلية فيها n عنصرا يكون "عدد الترتيبات من حجم k عنصرا الممكن تشكيلها بأهمية الترتيب" هو نفسه "عدد التوفيقات من k عنصرا لا يهم ترتيبه مضروبا في $k!$" أي أن:

$$C_n^k=\frac{A_n^k}{P_k}=\frac{n!/(n-k)!}{k!}=\frac{n!}{(n-k)!\times k!}$$

معادلة 04

مثال 11

عدد حروف اللغة الإنجليزية هو 27 حرفا نرغب بسحب ثلاثة عناصر دون إرجاع (أي دون تكرار نفس الحرف) فإذا كان **ترتيب** هذه الحروف **غير مهم** فما هو عدد الحالات والطرق الممكنة لهذا السحب؛

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

الحل: لدينا $n=27$ و $k=3$ فيكون عدد التوفيقات (لأن الترتيب غير مهم) هو: $C_{27}^{3}=\frac{27!}{(27-3)!\times 3!}=2925$ ؛ ولو كنا نبحث عن عدد الترتيبات لكان: $A_{27}^{3}=\frac{27!}{(27-3)!}=17550$ ؛

ب. توفيقة بالتكرار

إن الحالات الواقعية عند تشكيل توفيقات **نادرا** ما يكون فيها تكرار ولكن هناك حالات مثل سحب مجموعة جزئية دون أهمية الترتيب مع إمكانية تكرار أو إرجاع العنصر عند السحب مثل سحب كرية أولى من صندوق وإرجاعها قبل سحب الكرية الثانية أو تشكيل لجنة أشخاص حيث يمكن لنفس الشخص أن يشغل أكثر من منصب في نفس اللجنة؛ فيصبح القانون كما يلي (نفس قانون التوفيقة بالتكرار فقط n تصبح $n+k-1$ ؛ وذلك لأن العناصر المختارة k يتم إعادتها للمجموعة الأصلية فتصبح المجموعة المسحوب منها نظريا هي $n+k$ وبما أن العنصر المسحوب آخرا لا نرده للمجموعة فنطرحه من المسحوبات النظرية $n+k-1$) فيصبح القانون:

معادلة 05

$$C_{n+k-1}^{k}=\frac{(n+k-1)!}{((n+k-1)-k)!\times k!}=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\times k!}$$

مثال 12

ترشح عشرون أستاذا لانتخابهم في اللجنة المتساوية الأعضاء ويتم اختيار 03 منهم فقط حيث يمكن لنفس الأستاذ أن يشغل أكثر من منصب في اللجنة؛

عدد طرق تشكيل اللجنة هو: $C_{20+3-1}^{3}=\frac{(20+3-1)!}{(20-1)!\times 3!}=1540$

ج. خصائص التوفيقات

- $C_n^n=C_n^0=1$ وتعني أن هناك طريقة واحدة لاختيار مجموعة جزئية ذات حجم $k=n$ أو $k=0$ ؛
- $C_n^k=C_n^{n-k}$ على أساس أن المجموعة الجزئية المسحوبة ذات حجم k هي متمم $n-k$ ؛
- $C_n^{n-1}=C_n^1=n$ هذه الخاصية مستخرجة من السابقة وتعني أن هناك n طريقة لاختيار مجموعة جزئية ذات حجم $k=n-1$ ، أو ذات حجم $k=1$ ؛

6.2.1. تمارين المحور الثاني(طرق العد التقليدي: الترتيبات والتوفيقات)[1]

01: أثبت أن $C_n^k = C_n^{n-k}$؛

02: يتكون الرقم السري الشخصي PIN للسحب من جهاز الصراف الآلي ATM من تسلسل مكون من أربعة أرقام؛

- ماهو عدد الأرقام السرية الممكن تشكيلها دون قيود على اختيار الأرقام؛
- إذا كانت هناك بعض القيود على اختيار الأرقام مثل: عدم تطابق الأرقام الأربعة.

03: تتشكل لجنة الدفاع عن الطلبة في المجلس التأديبي للكلية من خمسة طلبة يمثلون طلبة الأقسام الخمسة في الكلية(اقتصاد، تجارة،تسيير، مالية وجذع مشترك)، ماهي عدد الطرق التي يمكن بها:

- اختيار ممثل واحد للطلبة ونائبه لحضور دورات المجلس؛
- اختيار ممثل ونائب وأمين عام؛
- يختار العميد عضوين من الأعضاء الخمسة ليمثلا الطلبة.

04: يحتوي صندوق على 8كريات حمراءZ و10كريات زرقاءM و12كرة صفراءC:

- ما هو عدد طرق اختيار 3 كريات حمراء؟؛
- ما هو عدد طرق اختيار 6كريات عشوائيا؟؛
- ما هو عدد طرق اختيار 6 كريات عشوائيا بحيث نحصل على كريتين من كل لون؟؛
- إذا تم اختيار 6كريات بشكل عشوائيا، فما هو احتمال أن يتم اختيار كريتين من كل صنف؟؛
- إذا تم اختيار 6 زجاجات عشوائيًا، فما هو احتمال أن تكون جميعها من نفس النوع؟.

05: كتب بيتهوفن 9سيمفونيات وكتب موزارت 27قطعة موسيقى للبيانو؛ إذا رغب مذيع محطة إذاعية جامعية في إذاعة سيمفونية بيتهوفن أولاً ثم قطعة لموزارت، فكم عدد الطرق التي يمكن القيام بها؟. قرر مذيع المحطة أن يذيع كل ليلة دون توقف سيمفونية لبيتهوفن وفي الليلة الموالية قطعة لموزارت وفي التي تليها إحدى مقاطع شوبرت الرباعية الوترية (ويوجد منها 15)؛ فكم سنة ستستمر هذه السياسة الإذاعية حتى يتكرر نفس البرنامج بالضبط؟.

06: تتكون التشكيلة الأساسية لأي فريق كرة سلة من حارسين (02)، مهاجمين (02) ولاعب وسط (01)؛:

- يتوفر لدى فريق الجامعة خمسة حراس، أربعة مهاجمين و03 لاعبي وسط؛ فما هو عدد التشكيلات الممكن تكوينها؟؛
- يضم الفريق المنافس بين صفوفه ثلاثة لاعبي وسط؛ أربع حراس؛ أربعة مهاجمين وفرد آخر يمكنه أن يلعب حارسا أو مهاجما؛ فما هو عدد التشكيلات التي يمكن للفريق المنافس تشكيلها؟؛

[1]- وللاستفادة أكثر يمكن العودة لفيديو "طرق العد02: التوفيقات والترتيبات" على قناة اليوتيوب "للأستاذ:"بنشوري. ع" على الرابط التالي:
https://www.youtube.com/watch?v=-WpE5j_sHec&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA&index=4

- لنفترض أن فريق يمتلك أربع04 حراس وأربع04 مهاجمين ولاعبي02 وسط ولاعبين يمكن لكل منهما أن يلعب حارسا أو مهاجما؛ فإذا كان اللاعب الخامس يتم اختياره عشوائيا فما هو عدد التشكيلات الممكنة؛

07: يجلس ستة 06 طلاب (وهم أصدقاء مثنى مثنى) في ستة 06 مقاعد؛ فما هو احتمال أن يجلس الصديقان (أيمن وأحمد) في مقعدين أقصى اليسار؟؛ وما هو احتمال أن يجلس الصديقان (أيمن وأحمد) بجنب بعضهما؟؛ وما هو احتمال أن يجلس كل صديقين بجنب بعضهما؟

08: هذا التمرين كنوع من التحدي: ماهو عدد لوحات السيارات التي يمكن تشكيلها من 06 أرقام بشرط تكرار رقم واحد فقط؟

09: توجد أربع أنواع من الحلقات A B C وD ويتوفر في كل منها عدد3؛ وترتبط الحلقات الإثناعشر بسلسلة واحدة؛

- ماهو عدد السلاسل الممكن تشكيلها دون تمييز للحلقات؟؛
- ماهو عدد السلاسل الممكن تشكيلها بحيث تكون الحلقات من نفس النوع متجاورة؟

10: ورد لمركز اتصال 15 اتصالا منها 05 اتصالات خلوية و05 سلكية و05 لا سلكية؛ وكلها مرقمة عشوائيا من 01 حتى 15؛

- ما هو عدد الحالات التي تكون فيها الاتصالات اللاسلكية في العشر الأوائل؛
- حدد الحدث أين يكون بعد عشر اتصالات يتبقى نوعين فقط من الاتصالات؛
- حدد الحدث أين يكون في الست اتصالات الأولى اتصالين من كل نوع.

11: يتم اختيار ثلاثة مصابيح من مخزن فيه ثلاثة أنواع (4 من النوع الأول و5 من النوع الثاني و6 من النوع الثالث)؛

- ما هو عدد الحالات أن يكون اثنان من المصابيح المختارة من النوع الأول؟؛
- ما هو عدد الحالات أين تكون كل المصابيح المختارة من نفس النوع؟
- ما هو عدد الحالات أين يتم اختيار مصباح من كل نوع؟
- يتم اختيار المصابيح بالترتيب ودون إرجاع حتى نختار المصباح من النوع الثالث؛ حدد مجموعة النتائج التي تشكل حدث فحص 06 مصابيح على الأقل؛

12: في قسم به 10 طلبة؛ ماهو عدد الحالات التي لا يشترك فيها أي طالبين في تاريخ ميلادهما (على أساس أن السنة فيها 365 يوم)؛

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

3.1. بديهيات وخصائص الاحتمال

في تجربة ما فضاء عينتها هو Ω، فإن هدف الاحتمالات هو إسناد لكل حدث A قيمة ما تسمى احتمال وقوع الحدث $P(A)$ والذي يمدنا بقياس دقيق لفرصة ظهور الحدث A.

احتمال حدث ما A في تجربة معينة هو عدد الحالات أو النتائج الملائمة لظهور هذا الحدث $N(A)$ مقسوما على عدد الحالات الكلي أو العدد الإجمالي لنتائج نفس التجربة N أي: $P(A)=\frac{N(A)}{N}$؛ وهذا ما يسمى بصيغة (لابلاس).

ويتميز مفهوم الاحتمال عموما بالبديهيات والخصائص الأساسية التالية:

- لكل حدث A يظهر في واحدة أو أكثر من نتائج التجربة فإن: $0\leq P(A)\leq 1$.
- إن **مجموع** احتمالات كل نتائج التجربة منفردة هو احتمال المجموعة الكلية للتجربة: $P(\Omega)=1$.
- إن احتمال وقوع الحدث **المستحيل** قيمته معدومة: $P(\emptyset)=0$.
- احتمال اتحاد أحداث **متنافية** هو مجموع احتمالاتها منفردة: $P(A_1\cup A_2\cup....\cup A_\infty)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$. مثل احتمال ظهور عدد زوج واحتمال ظهور عدد فردي؛
- **قاعدة المتمم**: لأي حدث A فإن: $P(A)=1-P(\bar{A})$ لأن: $P(\Omega)=1=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$؛
- لكل حدثين A وB غير متنافيين(غير متعارضين) فإن: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$؛ وحين يكونان متعارضين تصبح العلاقة السابقة: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-0$ لأن التقاطع بينهما معدوم.

<u>مثال 13</u>

يتحصل 60% من مجموع الأسر في ولاية تبسة على خدمة الإنترنت؛ ويتحصل 80% من مجموع الأسر على خدمة التلفاز من نفس الشركة ويتحصل 50% من مجموع الأسر على خدمتي التلفاز والأنترنت معا؛

- إذا تم اختيار إحدى الأسر عشوائيا فما هو احتمال أن تتحصل على خدمة واحدة على الأقل؟؛

- ما هو احتمال حصولها على خدمة واحدة فقط؟.

<u>الحل</u>: إذا اعتبرنا الحدث A هو الحصول على خدمة الأنترنت من الشركة وB هو حدث الحصول على خدمات التلفاز من الشركة؛ ولدينا من المعطيات أن: $P(A)=0.6$ و$P(B)=0.8$ و$P(A\cap B)=0.5$؛

فيكون احتمال "الحصول على خدمة واحدة على الأقل أي تحقق A أو B" هو:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

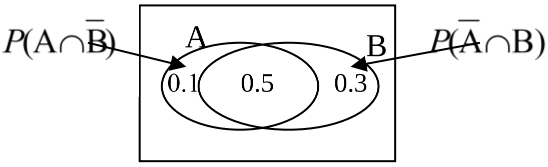
ومنه: $P(A\cup B)=0.6+0.8-0.5=0.9$

أما احتمال "الحصول على خدمة واحدة فقط هي التلفاز أو الإنترنت" هو:

$$\begin{aligned}P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B)&=[P(A)-P(A\cap B)]+[P(B)-P(A\cap B)]\\&=[0.6-0.5]+[0.8-0.5]\\&=0.1+0.3=0.4\end{aligned}$$

أو بطريقة أخرى اعتمادا على جواب السؤال الأول أن $P(A\cup B)=0.9$:

$$\begin{aligned}P(A\cap\bar{B})+P(\bar{A}\cap B)&=\left[P(A\cup B)-P(B)\right]+\left[P(A\cup B)-P(A)\right]\\&=\left[0.9-0.8\right]+\left[0.9-0.6\right]\\&=0.1+0.3=0.4\end{aligned}$$



وبنفس الطريقة يمكن حساب احتمال أكثر من حادثين:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

حيث وعند حساب $P(A\cup B\cup C)$ يتم جمع الاحتمالات الثلاث $P(A),P(B),P(C)$ ونكون قد حسبنا التقاطعات الثنائية بين الأحداث مرتين لذا يتم طرح هذه التقاطعات الثنائية مرة واحدة لتبقى المعادلة صحيحة وهنا نكون قد طرحنا التقاطع الثلاثي $P(A\cap B\cap C)$ تماما من المعادلة (جمعناه ثلاث مرات مع الأحداث المنفصلة وطرحناه ثلاث مرات مع التقاطعات الثنائية) لذا يتم إرجاعه للمعادلة بإضافته مرة واحدة.

ويمكن استنتاج قاعدة الإضافة بعدة طرق (أنظر تمرين30) وكذا تتم كل العلاقات السابقة في حساب الاحتمالات بالطرح والجمع واستخلاص الاحتمالات أو ما يسمى غالبا بمبدأ **الإدراج والاستبعاد**.

1.3.1. التعريف النظامي للاحتمال

عند كبر عدد النتائج الممكنة لتجربة معينة (الأحداث البسيطة) فستنتج أيضا عدة أحداث مركبة؛ ولقد عرفنا من خصائص وبديهيات الاحتمال السابقة أن احتمال كل حدث بسيط E_i يرمز له بالرمز $P(E_i)$ وهو غير سالب وأقل أو يساوي الواحد الصحيح $0\le P(E_i)\le 1$ ؛ وأن مجموع جميع احتمالات الأحداث البسيطة يساوي الواحد الصحيح $\sum_{all\,i} P(E_i)=1$ ؛ فيكون احتمال أي حدث مركب A يحسب بجمع احتمالات جميع النتائج أو الأحداث البسيطة E_i التي فقط تحقق الحدث A فيكون: $P(A)=\sum_{all_i/E_i\,in A} P(E_i)=1$ ؛

<u>مثال 14</u>

عند رمي حجري نرد مرة واحدة وحسب طريقة العد التقليدي أو مخطط الشجرة فسيكون لدينا 36 نتيجة ممكنة (6×6)؛ وباعتبار أن النردين نظاميين وليس بهما عيوب وباعتبار كل نتيجة ممكنة حدثا بسيطا مستقلا عن غيره من الأحداث فإن احتمال كل حدث بسيط هو: $P(E_i)=\frac{1}{36}$ ؛

ولو اعتبرنا الحدث A مثلا هو "أن مجموع الرقمين الظاهرين على النردين هو 8" فستكون لدينا خمس حالات: $E_i=\{(2;6),(3;5),(4;4),(5;3),(6;2)\}$ ؛ ومنه: $P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{5}{36}$

وسنفصل في المحور التالي في طريقة العد؛

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

-- المنهج التجريبي: التعريف التكراري tribut242

لتبسيط نمذجة فكرة العشوائية يجب تنظيم رميات متكررة؛ فمثلا لو رمينا قطعة نقدية 100 مرة وافترضنا أن النتائج الظاهرة هي 52 مرة بالنسبة للرقم و48 مرة بالنسبة للوجه فسيكون

تكرار الرقم يساوي (عدد الأرقام الظاهرة / عدد التجارب المجراة) أي $\frac{52}{100}=52\%$ ؛

وماذا لو رمينا القطعة مرة أخرى (أي 101 مرة) فسيصبح الاحتمال كما يلي:

إذا ظهر الرقم في الرمية 101 فإن تكرار الرقم يصبح: $\frac{53}{101}=52.475\%$

إذا ظهرت الصورة في الرمية 101 فإن تكرار الرقم يصبح: $\frac{52}{101}=51.485\%$

رغم أن نتائج التكرارات مختلفة إلا أنها قريبة جدا من بعضها وهو ما يسمى باحتمال ظهور الرقم؛ ورغم أن المقاربة التكرارية لا تحدد بدقة مفهوم الاحتمال إلا أنها تعطينا قيمة رقمية لاحتمال وقوع حدث ما.

-- المنهج النظري: التعريف البديهي المبسط (لـ: كولموجوروف)

ويكون التعريف البديهي المبسط مبني على مسلمات وقواعد معينة تساعد على التوصل لتحديد الاحتمال على الشكل التالي:

إذا كانت لتجربة عشوائية قائمة n من القضايا فسيتم نمذجتها عن طريق فضاء العينة أو فضاء الإمكانيات $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\ldots\omega_n\}$ ؛ وكان $P(\Omega)$ يمثل كل أجزاء المجموعة (Ω) حيث أن مجموع احتمالات كل أجزاء المجموعة هو احتمال كامل المجموعة أو الاحتمال الكلي ويساوي الواحد الصحيح؛ وأن احتمال وقوع حادث معين A هو مجموع احتمالات جميع النتائج التي تؤدي لوقوع الحادث A.

ويتمثل الهدف العملي في ربط حدث واقعي باحتمال رقمي محصور بين 0 و 1 فيكون احتمال حدث ما هو مجموع النتائج المؤدية لوقوع هذا الحادث مقسوما على جميع النتائج وهذا ما يسمى بصيغة (لابلاس).

مثال 15

تركز تجربة على اختيار شخص واحد على الأقل أو عدم الاختيار تماما من مجموعة تتكون من رجال، نساء وأطفال؛ فتكون المجموعة الكلية أو فضاء الإمكانيات كما يلي: $\Omega=\{H,F,E\}$ ؛ فما هي جميع الاختيارات الممكنة: - عدم اختيار ولا شخص – اختيار رجل – اختيار امرأة – اختيار طفل – اختيار رجل وامرأة – اختيار رجل وطفل – اختيار امرأة وطفل – اختيار رجل وامرأة وطفل $\Omega=\{\varnothing;H;F;E;HF;HE;FE;HFE\}$ ؛ (ظهور أو عدم ظهور أي عدد الحالات)

احتمال جميع نتائج التجربة هو 1

احتمال المجموعة الخالية أو الحادث المستحيل هو 0

مجموع احتمال حدثين مكملين فيما بينهما ويشكلان معا المجموعة الكلية هو 1

احتمال وقوع حدث واحد على الأقل من حدثين هو مجموع احتمالهما على حدى وإذا كان تقاطعهما خاليا فإن اتحادهما هو مجموعهما

قانون الجمع إن احتمال وقوع حدث أو آخر غير متعارضين هو مجموع احتمالهما على حدى مطروحا منه احتمال تقاطعهما

-- المنهج النظري: التعريف البديهي المسط (ل:)

إن التعريف السابق (كولموجوروف) الذي يقول بأن مجموع احتمالات جميع النتائج لتجربة ما يساوي 1 وأن احتمال وقوع حادث ما A يساوي مجموع احتمالات جميع النتائج المؤدية لوقوع الحادث A في تجربة معينة؛

وإن هذا التعريف لا يصلح إلا عندما يكون فضاء العينة لهذه التجربة منتهيا؛ ولتعميم مفهوم الاحتمال على الفضاءات غير المنتهية يجب إدخال مفهوم السمات والصفات لتحديد الفضاء الاحتمالي (مجموع نتائج التجربة منتمي لهذه السمة؛ السمة مستقرة بالنسبة للمتمم؛ والسمة مستقرة لبقية الاتحادات المحسوبة وكلها تنتمي للسمة).

الاحتمال الشرطي والاستقلالية في الاحتمالات: (Tribout 242)

الاحتمال الشرطي:

يستعمل الاحتمال الشرطي في كثير من الحالات أين يكون لصاحب التجربة حادث ما يتحقق فعلا من بين نتائج التجربة؛ فلو كان الرهان حول قيمة الورقة المسحوبة عشوائيا من لعبة ورق (32 ورقة) فإذا راهن اللاعب على ظهور ورقة الملكة ذات القلب (وقد رآها غشا بانعكاس صورتها من مرآة بأنها ورقة حمراء)؛ فبعد أن كان احتمال سحب الورقة هو 32/1 يصبح 16/1 لأنه استبعد جميع الأوراق السوداء.

ومن أجل نمذجة مفهوم الاحتمال الشرطي ليكن لدينا المثال التالي:

	نعم	لا	المجموع
رجال	88	42	130
نساء	22	28	50
المجموع	110	70	180

مثال 16

يصوت نواب البرلمان على مادة في القانون تقر بالمساواة في الميراث؛ ويفترض بعض الباحثين أن تصويت النواب على هذا القانون مرتبط بجنس البرلماني (رجل / امرأة) كما تشير النتائج في الجدول المقابل؛

فما هو عشوائيا احتمال أن يصوت البرلماني بـ"نعم"؟؛ وإذا افترضنا أن البرلماني هو رجل فما هو احتمال أن يكون قد صوت بـ"نعم"؟؛ فيكون الهدف هو تبني منهج بديهي لنمذجة مفهوم الاحتمال الشرطي:

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

الحل: من خلال المنهج البديهي:

يصوت 110 بـ"نعم" من أصل 180 برلماني؛ فيكون الاحتمال العشوائي أن يصوت برلماني بــ"نعم" هو $\frac{110}{180}=61.1\%$؛ ومن بين 130 رجلا يصوت 88 منهم بـ"نعم"؛ فيكون احتمال أن يصوت برلماني بـ"نعم" مع علمنا أنه رجل هو $\frac{88}{130}=67.7\%$،

ومقارنة النتائج تثبت بأن النتيجتين مختلفتين؛

ونعلم أن عملية سحب برلماني تتم من بين 180 شخص وبالتالي فإن فضاء التجربة أو العينة أو الإمكانات يساوي 180 عنصر وباستعمال المفاهيم السابقة للاحتمال يمكننا استخراج الأحداث التالية:

احتمال حدث سحب برلماني رجل H $\frac{130}{180}$

احتمال حدث سحب برلماني امرأة F $\frac{50}{180}$

احتمال حدث سحب برلماني صوت بـ"نعم" A $\frac{110}{180}$

احتمال حدث سحب برلماني صوت بـ"لا" $\bar{A}$ $\frac{70}{180}$

- وبما أن احتمال ظهور أي برلماني هو: $P(\varepsilon)=1/180$
- واحتمال ظهور أي برلماني ويكون قد صوَّت بـ"نعم" هو: $P(A)=1/180+1/180+\ldots+1/180=110/180=61.1\%$

وذلك لوجود 110 برلمانيين صوتو بـ"نعم"

- فإذا حددنا $P(A/H)$ ومعناه احتمال وقوع الحادث A (التصويت بـ"نعم") مع علمنا مسبقا بأن البرلماني المختار هو فعلا رجل فسيكون هذا الاحتمال مساويا لـ: $\frac{88}{130}=67.7\%$ وقد أتت هذه القسمة من قسمة احتمال (تقاطع حدث صوت بنعم وحدث أنه رجل $\frac{88}{180}$) على احتمال (حدث أنه رجل فعلا $\frac{130}{180}$) فتكون النتيجة $\frac{88}{130}=\frac{88/180}{130/180}=\frac{P(A\cap H)}{P(H)}$

وهذا مع علما من خلال الجدول بأن المجموعة $(A\cap H)$ تحتوي فقط 88 رجلا صوت بنعم وأن المجموعة (H) تحتوي على 130 رجلا.

تعريف: إذا كانت Ω هي مجموعة نتائج تجربة معينة وكان A حدثا معينا؛ وكان B حدثا يتحقق مع علمنا بأن الحدث A قد تحقق فعلا فنسمي الاحتمال الشرطي هو تحقق B علما أن A قد تحقق فعلا ونرمز له بالرمز $P(B/A)$؛ ويعرف بالقاعدة التالية: $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

ونفسر القاعدة السابقة حرفيا بأنها: احتمال تحقق الحادث B علما أن الحادث A قد تحقق فعلا؛ مما يقودنا للتساؤل حول الاستقلالية وعدم الاستقلالية لحدثين (أو أكثر).

قضية: إذا كان A وB حدثين غير معدومين فإن: $P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)=P(B/A)\times P(A)$

أي: $P(A\cap H)=P(A/H)\times P(H)=\frac{88}{130}\times\frac{130}{180}=P(H/A)\times P(A)=\frac{88}{110}\times\frac{110}{180}=\frac{88}{180}$

الاستقلالية بين حدثين:

مديرة مدرسة حضانة يحاورها الآباء حول مدى احتفاظ أولادهم على لُعَبِهم للنوم معها في فترة القيلولة؛ ويفترض بعض الآباء بأن جنس الطفل (ولد أم بنت) له علاقة بالاحتفاظ باللعبة؛ وتم تلخيص الحوار في الجدول المقابل؛ وطُلب من المديرة إثبات ذلك بالسحب العشوائي لأحد الأولاد؛

	ولد	بنت	المجموع
يحتفظ	40	50	90
لا يحتفظ	8	22	30
المجموع	48	72	120

فحددت المديرة بأن الحدثين التاليين (سحب بنت F) (سحب طفل يحتفظ yes) هما حدثان غير مستقلان أي قد يرتبطان ببعضهما البعض؛

فيكون من خلال معطيات الجدول أن: $P(yes)=\frac{90}{120}=0.75$ وأن $P(yes/F)=\frac{50}{72}=0.69$.

ويرى البعض بأنه بمجرد أن علمنا أن المسحوب هو "ولد" أي تحقق حدث ظهور "ولد"؛ فإن احتمال حدث "الطفل يحتفظ بدميته" يتغير، ولذلك يعتمد مفهوم الارتباط بين حدثين على هذه "البديهية".

فماذا لو تغيرت معطيات الجدول لتصبح كما يلي:

	ولد	بنت	المجموع
يحتفظ	36	54	90
لا يحتفظ	12	18	30
المجموع	48	72	120

فإن $P(yes)=\frac{90}{120}=0.75$ لا يتغير؛ بينما: $P(yes/M)=\frac{54}{72}=0.75$

ومن هنا فإن معرفة أن المسحوب هو "ولد" لا يغير من احتمال حدث "الطفل يحتفظ بدميته"؛ ومع هذه المعطيات الجديدة نخلص إلى أن الحدثين "الاحتفاظ بالدمية" و"المسحوب طفل" مستقلين؛ عكس الجدول الأول؛ فنقول بديهيا بأن حدثين A وB يعتبران مستقلين إذا كان تحقق أحدهما لا يغير من قيمة احتمال تحقق الثاني؛

وباستعمال مصطلحات الاحتمال الشرطي فإنه إذا كان احتمال تحقق حادث A مع علمنا مسبقا بتحقق حادث آخر B مساوي لتحقق الحادث A دون علمنا بتحقق B؛ فنقول بأن الحدثين مستقلين ونكتب: $P(A/B)=P(A)$ ونقول أيضا بأن: $P(A\cap B)=P(A)*P(B)$

وإن مفهومي الاستقلالية والتنافي مفهومين مختلفين ولا ينبغي الخلط بينهما؛ فمفهوم الاستقلال مفهوم احتمالي ومفهوم التنافي مفهوم مجموعي (من المجموعات)؛ وإن تنافي حدثين يؤدي لعدم استقلاليتهما؛ وإذا كان حدثين متنافيين واحتمالهما غير معدوم فإن $P(A\cap B)=P(A)*P(B)=P(\phi)=0$.

كيفية معرفة استقلالية حدثين من عدمها:

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

وذلك إما بتطبيق إحدى القاعدتين: $P(A/B)=P(A)$ أو $P(A\cap B)=P(A)*P(B)$ فإذا تساوى الطرفين في إحدى العلاقتين السابقتين فنقول بأن الحدثين مستقلين؛ ولكن في غالب الأحيان ما يكون الطرفين غير متساويين ورغم ذلك لا نعلم مدى استقلال الحدثين فيتم معرفة ذلك باختبار الاستقلالية (كاي مربع) وغير مطلوب في هذا المستوى؛ بينما في غالب الأحيان ما يكون الاستقلال بين الحوادث يأتي مباشرة من وصف التجربة العشوائية: فمثلا لو تم إلقاء قطعتين نقديتين فكان A حدث ظهور الوجه في الرمية الأولى وB ظهور الوجه في الرمية الثانية، فإن تحقق A من عدمه لا يؤثر تماما في تحقق B من عدمه فنقول بأن الحدثين مستقلين.

<u>**قانون الاحتمال الشرطي**</u>: لأي حدثين A وB يكون الاحتمال الشرطي لوقوع A علما أن B قد وقع فعلا يرمز له بالرمز $P(A/B)$ ويعرَّف كما يلي: $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$؛

<u>**مثال 17**</u>

يشتري الأفراد هواتف ذكية: تتضمن 60% من الهواتف بطاقة ذاكرة؛ وتتضمن 40% من الهواتف بطارية إضافية؛ وتتضمن 30% من الهواتف بطاقة ذاكرة وبطارية إضافية معا؛ وعند اختيار مشتري عشوائي (أو اختيار هاتف عشوائي) وليكن A حدث شراء هاتف ببطاقة ذاكرة؛ وB حدث شراء هاتف ببطارية إضافية؛ فيكون $P(A)=0{,}60$ و$P(B)=0{,}40$ و$P(A\cap B)=0{,}30$؛ فإذا علمت أن الهاتف المشترى فيه بطارية إضافية فاحتمال أن يكون هذا الهاتف ببطاقة ذاكرة هو:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}30}{0{,}40}=0{,}75$$

وهذا يعني أنه عند شراء هاتف ببطارية إضافية فهذا يعني أن 75% من المشتريات تحوي بطاقة ذاكرة في نفس الوقت.

ولو كان العكس: أي أنه لو علمنا أن الهاتف المشترى فيه بطاقة ذاكرة فما هو احتمال أن يكون هذا الهاتف ببطارية إضافية: $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0{,}30}{0{,}60}=0{,}50$

نلاحظ اختلاف <u>$P(A/B)\neq P(A)$ و $P(B/A)\neq P(B)$ وكذلك $P(A/B)\neq P(B/A)$</u> وهما يمثلان احتمالين شرطيين مختلفين بناءا على معلومات مختلفة من (علما أن).

قاعدة الضرب:

إن تعريف الاحتمال الشرطي يؤدي بنا لاستنتاج قاعدة الضرب وذلك بضرب طرفي المعادلة السابقة في $P(B)$ فنحصل على: $P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)$.

ونستعمل القاعدة السابقة عند توفر المعطيات : $P(B)$ و $P(A/B)$؛ ويمكن عكس الحدثين فنحصل على قاعدة الضرب كما يلي: $P(A\cap B)=P(B/A)\times P(A)$.

<u>**مثال 18**</u>

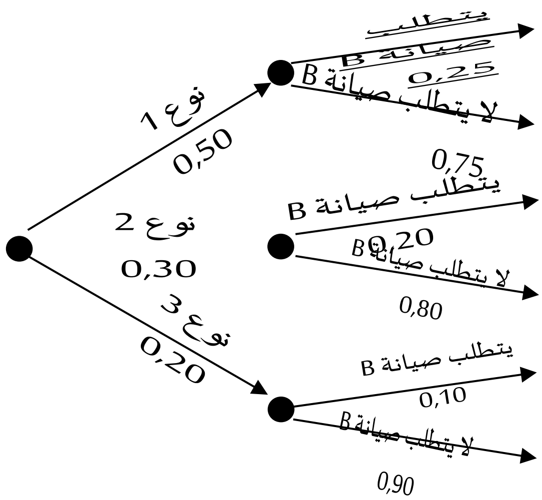
د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

تبيع مؤسسة ثلاثة أنواع من الهواتف فكانت 50% من مبيعاتها من النوع 1 و30% من النوع الثاني و20% من النوع الثالث؛ ويتطلب 25% النوع الأول عملية صيانة بعد العام الأول؛ بينما يتطلب النوع الثاني والثالث عملية صيانة بنسبة 20% و10% على التوالي.

- ما هو احتمال اختيار هاتف عشوائي يكون من النوع 1 ويتطلب عملية صيانة في نفس الوقت؛
- ما هو احتمال اختيار هاتف عشوائي ويتطلب عملية صيانة؛
- إذا علمنا أن الهاتف المختار يحتاج لصيانة فما هو احتمال أن يكون من النوع 1؛ أو 2 أو 3؛

ليكن الحدث A نوع الهاتف (A1, A2, A3) وليكن الحدث B يتطلب الصيانة B (لا يتطلب صيانة $\bar{B}$)

فتكون المعطيات؛



$$P(A_1\cap B)=P(A_1)*P(B/A_1)=0{,}50*0{,}25=0{,}125$$
$$P(A_1\cap\bar{B})$$
$$P(A_2\cap B)=P(A_2)*P(B/A_2)=0{,}30*0{,}20=0{,}06$$
$$P(A_2\cap\bar{B})$$
$$P(A_3\cap B)=P(A_3)*P(B/A_3)=0{,}20*0{,}10=0{,}02$$
$$P(A_3\cap\bar{B})$$
$$P(B)\;=P(A_3\cap B)+P(A_3\cap B)+P(A_3\cap B)$$
$$0{,}125+0{,}06+0{,}02=0{,}205$$

فيكون الجواب على السؤال 1: اختيار هاتف عشوائي (يكون من النوع 1 ويتطلب الصيانة في نفس الوقت):

$$P(A_1\cap B)=P(B/A_1)*P(A_1)=0{,}25*0{,}50=0{,}125$$

فيكون الجواب على السؤال 2: اختيار هاتف عشوائي يتطلب عملية الصيانة:

$$\begin{aligned}P(B)\;&=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+P(A_3\cap B)\\&=0{,}125+0{,}06+0{,}02\\&=0{,}205\end{aligned}$$

أما الإجابة على السؤال 3: احتمال أن يكون الهاتف من النوع 1 (علما أنه يتطلب للصيانة) أي $P(A_1/B)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}P(A_1\cap B)\;&=P(B/A_1)*P(A_1)\\&=P(A_1/B)*P(B)\end{aligned}$$

وباستعمال العلاقة الثانية (بما أنهما متساويان) نستخرج:

$$P(A_1/B)=\frac{P(A_1\cap B)}{P(B)}$$

ومنه:

$$P(A_1/B)=\frac{0{,}125}{0{,}205}=0{,}6098$$

وبنفس الطريقة:

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}06}{0{,}205}=0{,}2927$$

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

و: $P(A_3/B)=\frac{P(A_3\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}02}{0{,}205}=0{,}0976$ أو: $P(A_3/B)=1-P(A_1/B)-P(A_2/B)$

مثال 19

استجاب أربعة أفراد لنداء التبرع بالدم لأول مرة في حياتهم أي أنهم لا يعرفون زمرتهم الدموية؛ ويوجد فرد واحد فقط يمتلك الزمرة +O وهي المطلوبة في التبرع؛ فإذا تم اختيار المتبرعين المحتملين عشوائيا للتبرع فماهو احتمال أن يكون ثلاثة منهم على الأقل يتبرعون للحصول على الزمرة المطلوبة؛ أي نحصل على المطلوب في السحب الثالث أو الرابع:A هو عدم حصولنا على المطلوب في السحب الأول وB عدم حصولنا على المطلوب في السحب الثاني؛ وبما أن الثلاثة من أربعة أفراد ليسو ذوي زمرة مطلوبة فإن$P(B)=3/4$ واثنان من الثلاثة المتبقين ليسو من الزمرة المطلوبة وبالتالي: $P(A/B)=2/3$ فتعطينا قاعدة الضرب مايلي:

احتمال سحب ثلاثة أفراد على الأقل= احتمال أن يكون الفردين الأولين غير مطلوبين

أي $P(A\cap B)=$

و $P(A/B)\times P(B)=$

و $(2/3)\times(3/4)=0.5$

وتكون قاعدة الضرب مفيدة أكثر حين تكون لدينا عدة مراحل متتابعة؛ فالحدث الشرطيB يصف حينها نتائج المرحلة الأولى والحدثA يصف نتاج المرحلة الثانية؛ لذلك يكون $P(A/B)$ يشترط مايحدث أولا غالبا مايكون معروفا؛ فيتم توسيع قاعدة الضرب بسهولة للتجارب التي تحتوي أكثر من مرحلتين كما يلي:

$$\begin{aligned}P(A\cap B\cap C) &= P(C/A\cap B)\times P(A\cap B)\\ &= P(C/A\cap B)\times P(B/A)\times P(A)\end{aligned}$$

حيث يظهرA أولا ثمB

ولو تابعنا المثال السابق وقلنا بأن:

احتمال (السحب الثالث هو الزمرة المطلوبة) =احتمال (الثالث مطلوب علما أن/الأول والثاني غير مطلوبين)

× احتمال (الثاني غير مطلوب علما أن / الأول غير مطلوب) × احتمال (الأول غير مطلوب)

أي $P(A\cap B\cap C)=$

و $P(C/A\cap B)\times P(A\cap B)=$

و $P(C/A\cap B)\times P(A/B)\times P(B)=$

و $(1/2)\times(2/3)\times(3/4)=0.25$

عندما تحتوي التجربة على سلسلة من مراحل متعددة فمن الملائم تمثيلها بمخطط شجرة وبمجرد حصولنا على مخطط الشجرة المناسب فيمكن إدخال الاحتمالات والاحتمالات الشرطية في فروع هذه الشجرة مما يجعل الاستعمال المتكرر لقاعدة الضرب واضحا جدا.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التَّبسِّي "تبسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

الاحتمال الشرطي:

احتمالات وقوع أحداث معينة تعتمد على مانعرفه بشأن الوضعية التجريبة حين نقوم بالتعيين؛ فقد تتوفر بعض المعلومات الجزئية المتعلقة بنتيجة تجربة ما فنقوم بمراجعة بعض التعيينات الاحتمالية فحين نفكر في حدث ما A ؛ فيكون $P(A)$ هو احتمال وقوعه لذلك يكون $P(A)$ هو الاحتمال الأصلي أو غير المشروط للحدث A.

الخط	الشروط	
	B	B'
A	2	6
A'	1	9

لذا سنرى الآن ما هو تأثير ظهور معلومات حول حدث ثاني على احتمال وقوع الحدث A ؛ فمثلا قد يشير حدث إلى معاناة فرد ما من مرض معين فإذا تم إجراء فحص دم وكانت النتيجة سلبية فإن احتمالية الإصابة بالمرض ستتغير (تنخفض ولكن لا تشير للصفر لأن الاختبارت قد تخطئ)

<u>مثال 20</u>

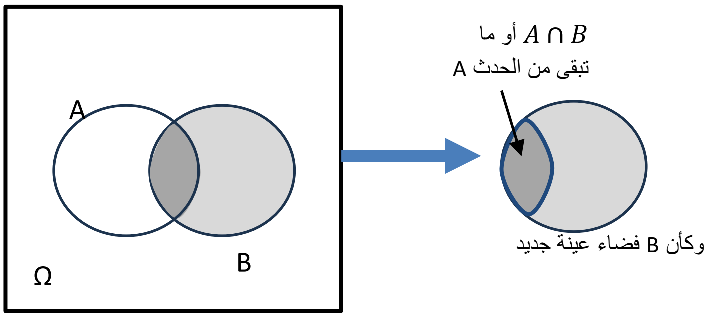
في مصنع خطين للتجميع: A و A' ويستخدم الخط A معدات قديمة نوعا ما أي أبطأ في التجميع وأقل موثوقية؛ ولنفترض أنه في يوم ما جمع 8 مكونات منها 2معيبة(B) و6غير مغيبة(B') في حين أن A' جمعت 1معيب و9غير معيب؛ كما يلخص الجدول المقابل.

فإذا تم اختيار عنصر واحد من بين18عنصرا منتجا بشكل عشوائي دون وجود معلومات الجدول؛ فاحتمال ظهور عنصر من الخط الأول هو: $P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{8}{18}=0.444$ ومع ذلك إذا تبين أن العنصر المختار يكون معيبا فقد ظهر الحدث B لذا سيكون العنصر المختار أحد المكونات الثلاث(2+1) من عمود B وبما أن احتمال ظهور أحد من هذه الثلاث عناصر متساوي فإن احتمال أن يكون العنصر المختار من السطر A علما أن العنصر المختار معيب B هو: $P(A/B)=\frac{2}{3}=\frac{2/18}{3/18}=0.667=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

فقد تم التعبير عن الاحتمال الشرطي في هذه المعادلة كنسبة للاحتمالات غير المشروطة فالبسط هو احتمال تقاطع حدثين والمقام هو الحدث الشرطيB؛ ويوضح مخطط Venn هذه العلاقة؛

تعريف: لكل حدثين(A) و(B) حيث يكو $P(B) > 0$ نفيكون الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث A علما أن الحدث B قد وقع فعلا نرمز له بالرمز $P(A/B)$ ونحدده كما يلي

$.P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$



تعريف الاحتمال الشرطي:

يبين المثال السابق: أنه عندما تكون نتائج التجربة متساوية في الاحتمال فيمكن أن يعتمد حساب الاحتمال الشرطي على الحدس؛ وقد يفشل الحدس أحيانا خصوصا عند كبر عدد نتائج التجربة أو تعقد التجربة فنرغب بتعريف عام للاحتمال الشرطي والذي ينتج عنه إجابات بسيطة في مسائل بسيطة؛ فالمعادلة والشكل السابقين يقترحان تعريفا مناسبا:

تعريف: لكل حدثين (A) و (B) حيث يكون $P(B)>0$؛ فيكون الاحتمال الشرطي لوقوع الحدث A علما أن الحدث B قد وقع فعلا نرمز له بالرمز $P(A/B)$ ونحدده كما يلي $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

.

مثال 21

لنفترض أن (مثال 17 مكرر): يشتري الأفراد هواتف ذكية: تتضمن 60% من الهواتف بطاقة ذاكرة؛ وتتضمن 40% من الهواتف بطارية إضافية؛ وتتضمن 30% من الهواتف بطاقة ذاكرة وبطارية إضافية معا؛ وعند اختيار مشتري عشوائي (أو اختيار هاتف عشوائي) وليكن A حدث شراء هاتف ببطاقة ذاكرة؛ وB حدث شراء هاتف ببطارية إضافية؛ فيكون $P(A)=0{,}60$ و$P(B)=0{,}40$ و$P(A\cap B)=0{,}30$ ؛ فإذا علمت أن الهاتف المشترى فيه بطارية إضافية فاحتمال أن يكون هذا الهاتف ببطاقة ذاكرة هو:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}30}{0{,}40}=0{,}75$$

وهذا يعني أنه عند شراء هاتف ببطارية إضافية فهذا يعني أن 75% من المشتريات تحوي بطاقة ذاكرة في نفس الوقت.

ولو كان العكس: أي أنه لو علمنا أن الهاتف المشترى فيه بطاقة ذاكرة فما هو احتمال أن يكون هذا الهاتف ببطارية إضافية: $P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0{,}30}{0{,}60}=0{,}50$

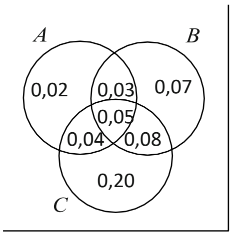
نلاحظ اختلاف $P(A/B)\neq P(A)$ و $P(B/A)\neq P(B)$ وكذلك $P(A/B)\neq P(B/A)$ وهما يمثلان احتمالين شرطيين مختلفين بناءا على معلومات مختلفة من (علما أن).

مثال 22

تتضمن جريدة أخبار ثلاثة أعمدة كتبA مجلاتB وأفلامC فكانة نسبة أو احتمالية القراءة من طرف القراء كما يلي:

EV	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
P	0.14	0.23	0.37	0.08	0.09	0.13	0.05

فيكون لدينا:



$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0{,}08}{0{,}23}=0{,}348$$

و
$$P(A/B\cup C)=\frac{P(A\cap(B\cup C))}{P(B\cup C)}=\frac{0{,}12}{0{,}47}=0{,}255$$

احتمال قراءة كتاب علما أنه يقرأ على الأقل واحد من الثلاث خيارات

$$P(A/A\cup B\cup C)=\frac{P(A\cap(A\cup B\cup C))}{P(A\cup B\cup C)}=\frac{0{,}14}{0{,}49}=0{,}286$$

$$P(A\cup B/C)=\frac{P((A\cup B)\cap C))}{P(C)}=\frac{0{,}17}{0{,}37}=0{,}459$$

قانون الاحتمال الكلي ونظرية "بايز":

إن حساب الاحتمال الخلفي $P(A_i/B)$ من احتمال مسبق معلوم $P(A_i)$ واحتمال شرطي $P(B/A_i)$؛ يعتبر عنصرا أساسيا في قوانين الاحتمالات؛ والقاعدة العامة لحساب هذا الاحتمال هي تطبيق بسيط من قاعدة الضرب استنتجها القس"*Thomas Bayes*" في القرن الثامن عشر؛ ولتكون الأحداث من $A_1,A_2....A_k$؛ وهي متنافية مثنى مثنى ومجموعها يشكل المجموعة الكلية $A_1+A_2+.....+A_k=\Omega$؛

فيكون:

الاحتمال الكلي لحدث B يقع من خلال أحد الأحداث السابقة هو على الشكل التالي:

$$P(B)=P(A_1)*P(B/A_1)+P(A_2)*P(B/A_2)+.......+P(A_k)*P(B/A_k)$$

أي:
$$P(B)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)*P(B/A_i)$$

أي يقع الحدث B من أحد الأحداث A_k والتي تكون متنافية مثنى مثنى وتشكل المجموعة الكلية؛

$$P(B)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i\cap B)$$

مثال 23

يمتلك طالب 03 حسابات فايسبوك؛ يتلقى رسائل بنسبة 70% من الحساب الأول و20% من الحساب الثاني و10% من الحساب الثالث؛ حيث أن الرسائل القادمة من الحساب الأول منها 01% فيروسات؛ وبالنسبة للحسابين 2 و 3 تأتي رسائل على شكل فيروسات بنسبة 02% و05%؛ فيتم اختيار رسالة عشوائيا من أحد الحسابات الثلاث فما هو احتمال أن تكون رسالة فيروسية (بعبارة أخرى ما هو معدل الرسائل الفيروسية):

الحل: لدينا

$$P(A_1)=0{,}70 \qquad P(A_2)=0{,}20 \qquad P(A_3)=0{,}10$$
$$P(B/A_1)=0{,}01 \qquad P(B/A_2)=0{,}02 \qquad P(B/A_3)=0{,}05$$
$$P(\bar{B}/A_1)=0{,}99 \qquad P(\bar{B}/A_2)=0{,}98 \qquad P(\bar{B}/A_3)=0{,}95$$

فيكون الجواب على السؤال احتمال أن تكون رسالة فيروسية:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+P(A_3\cap B) \\ &= P(A_1)*P(B/A_1)+P(A_2)*P(B/A_2)+P(A_3)*P(B/A_3) \\ &= 0{,}016 \end{aligned}$$

<u>وضعية بايز Bayes:</u> (Tribout 246)

أما نظرية بايز فهي مستخرجة من الاحتمال الكلي $P(B)$: فلأي مجموعة أحداث شاملة وغير معدومة $A_1,A_2...A_k$ (تشكل المجموعة الكلية) ومتنافية مثنى مثنى فإن:

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A_i)*P(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{k}P(A_i)*P(B/A_i)}$$

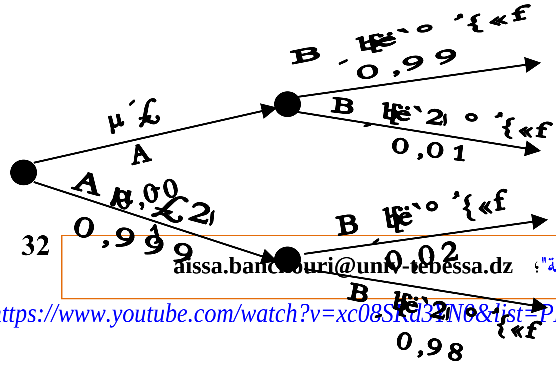
وذلك باستخدام كلا من قاعدة الضرب في البسط وقاعدة الاحتمال الكلي في المقام؛

عندما يكون هناك عدد قليل من الأحداث (تمرين الزمرة الدموية في هذا الجزء) فيمكن استعمال مخطط الشجرة لحساب الاحتمالات الخلفية دون الحاجة للإشارة لنظرية بايز؛ كما في المثال التالي:

مثال 24

يعاني شخص واحد 01 من ألف 1000 شخص من مرض نادر؛ فتم القيام باختبار تشخيصي؛ وهو أنه إذا كان الشخص فعلا مريضا فإن احتمال ظهور نتيجة إيجابية للاختبار هو 99%؛ بينما لو كان الشخص غير مريض فإن احتمال ظهور نتيجة إيجابية هو 02% فقط؛ فإذا تم اختيار شخص عشوائي وتشخيصه بالاختبار فوجد أن النتيجة إيجابية؛ فما هو احتمال أن يكون الشخص المختار مريضا فعلا.

الحل:



$$P(A\cap B)=P(A)*P(B/A)=0{,}001*0{,}99=0{,}00099$$
$$P(A\cap \bar{B})$$
$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A})*P(B/\bar{A})=0{,}999*0{,}02=0{,}01998$$
$$P(\bar{A}\cap \bar{B})$$
$$P(B)=0{,}00099+0{,}01998=0{,}0209$$

ومما سبق نستنتج بأن: الاحتمال الخلفي باستعمال نظرية بايز هو: (احتمال أن يكون الشخص المختار مريضا فعلا A علما أن نتيجة التشخيص إيجابية B)

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)*P(B/A)}{P(A)*P(B/A)+P(\overline{A})*P(B/\overline{A})}$$
$$=\frac{0{,}001*0{,}99}{0{,}001*0{,}99+0{,}999*0{,}02}=\frac{0{,}00099}{0{,}00099+0{,}01998}=0{,}0472$$

إن الهدف من اكتشاف وضعية بايز هو حل المشاكل المتعلقة بالاحتمالات الخلفية ثم إثبات أن هذا الحل غني بالمعلومات في بعض وضعيات وعمليات اتخاذ القرار.

كيفية تطبيق الاحتمال الشرطي في وضعية بايز:

مصنع لبطاقات الحواسيب يستورد 03 مواد مختلفة من 03 موردين (1، 2 و3) بنسب 25%، 30% و45%؛ ومن عند كل مورد توجد نسبة تالفة من المواد كما يبين الجدول المقابل.

	نوع 1	نوع 2	نوع 3
نسبة التوريد	25%	30%	45%
نسبة التالف	2%	5%	7%

اشترينا فوجدناها تالفة ماهو احتمال أن تكون من النوع الأول؟

$$P(A_1)=0.25\quad P(A_2)=0.3\quad P(A_3)=0.45$$
$$P(B/A_1)=0.02\qquad P(B/A_2)=0.05\qquad P(B/A_3)=0.07$$
$$P(A_1)=\frac{P(B\cap A_1)}{P(B)}=\frac{P(A_1)*P(B/A_1)}{P(A)*P(B/A_1)+P(A_2)*P(B/A_2)+P(A_3)*P(B/A_3)}$$
$$=\frac{0{,}25*0{,}02}{0{,}25*0{,}02+0{,}30*0{,}05+0.45*0.07}$$
$$=\frac{0.0050}{0.0050+0.0150+0.0315}$$
$$=\frac{0.0050}{0.0515}=0.097$$

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

2.3.1. تمارين المحور الثالث (بديهيات وخصائص الاحتمال والاحتمال الشرطي)

01: يتكون مجتمع ما من ثلاث مجموعات عرقية 1، 2 و3 (دراسة وهمية) حيث تقسيمهم حسب الزمرة الدموية بالنسب المبينة في الجدول الموالي (كما نعرف بديهيا النسب تعني الاحتمالات):

المجموعة العرقية	الزمرة الدموية				المجموع
	O	A	B	AB	
E1	0,082	0,106	0,008	0,004	0,200
E2	0,135	0,141	0,018	0,006	0,300
E3	0,215	0,200	0,065	0,020	0,500
المجموع	0,432	0,447	0,091	0,030	1,000

فإذا تم اختيار زبون عشوائيا؛ وتم تحديد الأحداث التالية: $P(A)$ هو اختيار الزمرة A وهكذا بالنسبة لبقية الزمر؛ $P(E1)$ هو احتمال اختيار المجموعة العرقية الأولى؛

- أحسب: $P(A)$، $P(E3)$، $P(A \cap E3)$؛
- أحسب كلا من: $P(A/E3)$ و $P(E3/A)$ واشرح ماذا يعني كلا من الاحتمالين السابقين؛
- إذا كان الشخص المختار ذو زمرة دموية (B) فما هو احتمال أن يكون من المجموعة العرقية الأولى.

02: تم اختيار فرد عشوائيا من جميع الأفراد الذكور الساكنين في ولاية تبسة؛ وليكن الحدث (A) هو أن يكون الفرد أطول من 180سم؛ وليكن الحدث (B) هو أن الفرد المختار لاعب كرسة قدم محترف؛ ماذا تتوقع أن يكون: $P(A/B)$ أكبر من $P(B/A)$ أو العكس؛ واشرح لماذا؟؛

03: يتم اختيار طالب عشوائيا من إحدى الجامعات حيث أن نسبة الطلبة الذين يمتلكون بطاقة (*VisaCard*) فقط هي $P(A=0.5)$، بينما نسبة الطلبة الذين يمتلكون لبطاقة(*MasterCard*) فقط هي $P(B=0.4)$ ونسبة الذين يمتلكون البطاقتين معا هي $P(A \cap B=0.25)$ ؛

- احسب الاحتمالات التالية(يمكن الاستعانة بمخطط Venn):

$$P(B/A) \text{ ؛ } P(B'/A) \text{ ؛ } P(A/B) \text{ ؛ } P(A'/B)$$

- باعتبار الطالب المختار يمتلك على الأقل بطاقة واحدة: ماهو احتمال أن يمتلك بطاقة (*VisaCard*)؟

04: يشتري الطلاب قهوتهم الصباحية من نادي الكلية بالنسبة التالية (نسبة لعدد الطلاب):

نوع القهوة	حجم الكوب			المجموع
	صغير	متوسط	كبير	
E1	0,14	0,20	0,26	0,60
E2	0,20	0,10	0,10	0,40
المجموع	0,34	0,30	0,36	1,00

فإذا تم اختيار طالب عشوائيا؛ فما هو احتمال أن يقتني الطالب كوبا صغيرا؟؛ قهوة من النوع الثاني؟؛

إذا كان الطالب قد اشترى فعلا كوبا صغيرا فما هو احتمال أن يكون قد اقتنى قهوة من النوع الثاني؟

إذا كان الطالب قد اشترى فعلا قهوة من النوع الثاني فما هو احتمال أن يكون قد اقتنى كوبا صغيرا ؟

4.1 الاستقلالية: (وهو نفسه ماكتب في الصفحة أعلاه هنا وهنا)

إن تعريف الاحتمال الشرطي يسمح لنا بمراجعة الاحتمال $P(A)$ المخصص بداية للحدث A عندما نعلم لاحقا بظهور حدث آخر هو B ؛ فيكون الاحتمال الجديد للحدث A هو $P(A/B)$ ؛ في أمثلتنا نستعمل حالة $P(A/B)$ وهو لا يساوي الاحتمال **غير** الشرطي $P(A)$ مما يشير إلى أن ظهور معلومات (حدث B) تؤدي تغيير احتمالية وقوع A ؛ ومع ذلك هناك مواقف أخرى لا يتأثر بها حدوث A بعد علمنا بحدوث B ؛ لذلك يكون $P(A/B)=P(A)$ ومن الطبيعي أيضا التفكير في الحدثين A و B بأنهما مستقلين ولا توجد علاقة بينهما ولا يؤثر ظهور (أو عدم) أحدهما في ظهور (أو عدم ظهور) الآخر؛

تعريف: نقول عن حدثين (A) و(B) أنهما مستقلان فقط حين يكون $P(A/B)=P(A)$ وإلا فإنهما غير مستقلان.

قد يبدو تعريف الاستقلالية غير متماثل لأننا لا نسعى لإثبات $P(B/A)=P(B)$ كذلك؛ رغم أن استعمالنا لتعريف الاحتمال الشرطي وقاعدة الضرب:

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A/B)\times P(B)}{P(A)}$$

وحين ندخل فكرة الاستقلالية يكون الطرف الأيمان هو نفسه $P(A/B)=P(A)$ وبالتالي

$$P(B/A)=\frac{P(A)\times P(B)}{P(A)}=P(B)$$

ففكرة التساوي في تعريف الاستقلال تعني التساوي المتبادل (والعكس صحيح)؛ لذلك من السهل توضيح أنه إذا كان حدثين A و B مستقلين فإن ذلك يعني أن الأحداث التالية مستقلة (A و B')، (A' و B) و(A' و B').

مثال 25

A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
C	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13

لعبة ورق (52 ورقة) تتكون من أربعة أنواع من الورق (A,B,C,D) في كل منها من 13 ورقة مرقمة من 01 إلى 13 ؛ لو اخترنا ورقة عشوائيا وتبين أنها أحد الأرقام $(11,12,13)$ فما هو احتمال أن تكون الورقة من النوع الأول؛

سنجدها تساوي: $P(A)=\frac{13}{52}$

فلو افترضنا أن E هو حدث أن الورقة المسحوبة رقمها أحد الأرقام $(11,12,13)$ فيكون: $P(E)=\frac{12}{52}$

(لأن هناك نفس الأرقام الثلاثة في كل نوع)؛ فيكون $P(A\cap E)=\frac{3}{52}$ كما يلي:

$$P(A/E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{3/52}{12/52}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=\frac{13}{52}=P(A)$$

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

لذلك لا تتأثر احتمالية الحصول عل النوع الأول بمعرفة أننا اخترنا أحد الأرقام $11,12,13$؛ ويرجع هذا بداهة إلى أن نسبة بطاقات النوع الأول والتي فيها الأرقام الثلاثة $\frac{3}{12}$؛ هي نفس النسبة في المجموعة كلها $\frac{13}{52}$؛ ومن السهل التأكد من أن: $P(E/A)=\frac{P(E\cap A)}{P(A)}=\frac{3/52}{13/52}=\frac{3}{13}=\frac{12}{52}=P(E)$؛

مثال 26

لنفترض وجود محطة خدمات بستة مضخات وقود حيث يتم استعمال كل المضخات عشوائيا ولنعرف حدث استعمال كل مضخة كما يلي: $P(E_1)=P(E_6)=0.10$ و $P(E_2)=P(E_5)=0.15$ و $P(E_3)=P(E_4)=0.25$ ولنعرف الأحداث: $C=\{2,3,4,5\}$ $B=\{1,2,3\}$؛ $A=\{2,4,6\}$؛ فنجد أنه من السهل تحديد أن $P(A)=0.50$ و $P(A/B)=0.30$ و $P(A/C)=0.50$ ومع ذلك سنجد أن الحدثين A, B مرتبطين بينما الحدثين A, C مستقلين وذلك لأن التقسيم النسبي للاحتمالات بين المضخات الزوجية والفردية هو نفسه من خلال المضخات $\{2,3,4,5\}$ كما هو نفسه من خلال كل المضخات الستة.

مثال 27

لنفترض أن الحدثين A,B متنافيين مع كون $P(A)>0$؛ ولاختيار سيارة عشوائيا يكون A اختيار سيارة زرقاء و B اختيار سيارة حمراء؛ وبما أن الحدثين متنافيين فإذا ظهر الحدث B فلن يظهر الحدث A؛ لذلك يكون $P(A/B)=0\neq P(A)$ مما يعني أنه إذا كان حدثان متنافيان فلا يمكن أن يكونا مستقلين أي أنه إذا تنافى حدثين وعند علما بحدوث أحدهما A فهذه المعلومة تنبؤنا عن احتمال ظهور الثاني B (عدم واستحالة ظهور B) فتكون فكرة الاستقلال هنا مستبعدة جدا.

1.4.1. التقاطع في حالة الاستقلالية:

يفترض الناس عادة استقلالية الأحداث فعند استلام شركة توزيع شحنتين من شركتين موردتين A,B فيفترض بعد اختبارهما أن $P(A)=0.1$ و $P(A/B)=0.1$ فمعرفة حالة الشحنة الثانية ليس له علاقة بحالة الشحنة الأولى؛ وفيما يلي نبين كيفية حساب $P(A\cap B)$ في حالة الاستقلالية:

يكون حدثان A,B مستقلان فقط عندما يكون $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

وذلك مثبت بقاعدة الضرب $P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)$ وهي تساوي $P(A)\times P(B)$ فقط إذا كان $P(A/B)=P(A)$؛ ومن خلال ماسبق يمكن اعتبار المعادلة السابقة كتعريف للاستقلالية.

مثال 28

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

نعلم بأن 30% من شاشات تلفاز لشركة ما تتطلب خدمة صيانة أثناء فترة الضمان في حين أنها تصنع هواتف تحتاج فقط ل10% من نفس الخدمة؛ إذا اشترى شخص تلفازا وهاتفا فما هو احتمال احتياج كلا المنتجين خدمة صيانة: إذا رمزنا لـA لحاجة الشاشة لخدمة الصيانة ورمزنا لـB لحاجة الهواتف لخدمة الصيانة فيكون: $P(A)=0.30$ و$P(B)=0.10$؛ وإذا افترضنا منطقيا أن صيانة كلا المنتجين مستقلا عن بعضهما البعض؛ فيكون الاحتمال المطلوب: $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0.30\times 0.10=0.03$ فيكون احتمال عدم حاجة كلا المنتجين لصيانة هو: $P(A'\cap B')=P(A')\times P(B')=0.70\times 0.90=0.63$.

وحيث يفترض استقلالية الأحداث هنا ولكن يمكن أحيانا التشكيك إذ لو تسبب الاستعمال المكثف في عطل أحد المنتجين فقد يؤدي لحدوث عطل في المنتج الآخر.

مثال 29

كل يوم من الأحد للخميس تصل شحنة بنسبة60% لمصلحة الرقابة وتخضع للمعاينة بنسبة80%؛ وفي كل يومين تصل شحنة آخرى بنسبة40% من مورد آخر وتخضع للتفتيش بنسبة90% ماهو احتمال في يوم عشوائي أن يخضع كلا الشحنتين للتفتيش؛ وسنجيب عن هذا بافتراض أن الشحنتين تنجحان في التفتيش بشكل مستقل عن بعضهما.

احتمال وصول شحنة واحدة 60% × 80%؛

احتمال وصول شحنتين 40% × 80% × 90%؛

احتمال خضوع شحنة أولى فقط للرقابة 40% × 80% × 10%؛

احتمال خضوع الشحنة الثانية فقط للرقابة 40% × 20% × 90%؛

السؤال احتمال خضوع الشحنتين للرقابة 40% × 80% × 90%.

2.4.1.التقاطع في حالة أكثر من حدثين:

يمكن توسيع مفهوم الاستقلالية لأكثر من حدثين؛ ورغم أنه يمكن توسيع مفهوم الاستقلالية لحدثين باستخدام مصطلحات الاحتمالات المشروطة وغير المشروطة إلا أنه من الأقل تعقيدا ومن الأفيد المضي بالاقتراح الأخير.

تعريف: نقول عن أحداث $A_1,A_2,\ldots A_n$ بأنها مستقلة مثنى مثنى إذا كان: من أجل $k(k=2,3,\ldots n)$ وكل مجموعة فرعية من المؤشرات $i(i=1,2,3,\ldots n)$ ؛ فيكون:
$P(A_{i_1}\cap A_{i_1}\ldots A_{i_n})=P(A_{i_1})\times P(A_{i_1})\times\ldots\times P(A_{i_n})$.

مما يعني احتمال تقاطع كل الأحداث فيما بينها مساوي لضرب جميع الأحداث الفرعية فيما بينها؛ وكذلك متممات هذه الأحداث تكون مستقلة عن بعضها

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

3.4.1. تمارين المحور الرابع (الاستقلالية)

01: لو عدنا لبطاقات الفيزا للطلبة (ص34) في مثال سابق أثبت أن الحدثين مرتبطان باستخدام مفهوم الاستقلالية وأن قاعدة الضرب غير ممكنة.

02: شركة سوناطراك لديها مشروعان لإستكشاف النفط في آسيا وأفريقيا ونسبة نجاح كل منهما على التوالي $P(A)=0.4$ و $P(B)=0.7$.

- إذا علمنا بعدم نجاح مشروع آسيا فما هو احتمال عدم نجاح مشروع إفريقيا؟؛
- ماهو احتمال نجاح أحد المشروعين على الأقل؛
- إذا علمنا أن أحد المشروعين على الأقل قد نجح فما هو احتمال نجاح المشروع الآسياوي فقط؟

03: لو عدنا لبطاقات الفيزا للطلبة في مثال سابق أثبت أن الحدثين مرتبطان باستخدام مفهوم الاستقلالية وأن قاعدة الضرب غير ممكنة.

04: الاحتمال الشرطي: (Tribout 242)

يصوت النواب البرلمانيون على مادة في قانون تقر بزيادة تكاليف التأمين الصحي؛ ويعتقد بعض الباحثين بأن تصويتهم على هذا القانون مرتبط بجنس البرلماني (رجل / امرأة) كما تشير النتائج في الجدول المقابل؛ فما هو عشوائيا احتمال أن يصوت البرلماني بـ"نعم"؟؛ وإذا افترضنا أن البرلماني هو رجل فما هو احتمال أن يكون قد صوت بـ"نعم"؟.

	نعم	لا	المجموع
رجال	88	42	130
نساء	22	28	50
المجموع	110	70	180

الحل: من خلال المنهج البديهي:

يصوت 110 بـ"نعم" من أصل 180 برلماني؛ فيكون الاحتمال العشوائي أن يصوت برلماني بـ"نعم" هو $\frac{110}{180}=61.1\%$؛ ومن بين 130 رجلا يصوت 88 منهم بـ"نعم"؛ فيكون احتمال أن يصوت برلماني بـ"نعم" وهو رجل مع علمنا أن رجل هو $\frac{88}{130}=67.7\%$،

ومقارنة النتائج تثبت بأن النتيجتين مختلفتين؛

وإن الاختيار العشوائي لأي برلماني يكون باحتمال $\frac{1}{180}=0,56\%$ ؛ فيكون

05: تقدم شركة صناديق استثمارية تعاونية لزبائنها عدة أنواع من الصناديق بنسب مختلفة كما يلي: صناديق لأسواق المال 20%، ثلاث صناديق مختلفة السندات (قصيرة الأجل 15%، متوسطة الأجل 10% وطويلة الأجل 05%)، وصناديق أسهم (معتدلة المخاطر 25% وعالية المخاطر 18%) وكذا صناديق متوازنة 07%؛ يتم اختيار زبون عشوائي حيث يمتلك كل زبون حصصا في صندوق واحد فقط؛

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

06: يتم اختيار طالب عشوائيا من إحدى الجامعات حيث أن نسبة الطلبة الذين يمتلكون في هذه الجامعة لبطاقة (*Visa credit*) فقط هي 50%، بينما نسبة الطلبة الذين يمتلكون لبطاقة (*MasterCard*) فقط هي 40% ونسبة الذين يمتلكون البطاقتين معا هي 25%؛

- احسب احتمال أن يمتلك الطالب المختار على الأقل بطاقة واحدة من البطاقتين؛
- ما هو احتمال ألا يمتلك الطالب أيا من البطاقتين؛
- اكتب بالترميز المجموع حدث أن الطالب المختار يمتلك البطاقة من النوع الأول ولا يمتلك البطاقة من النوع الثاني؛ وما هو احتمال ذلك.

07: قدمت شركة استشارات عروض على ثلاثة مشاريع حيث أن احتمال الحصول على كل مشروع هي كما يلي:

$P(A_1) = 0{,}22 \qquad P(A_2) = 0{,}25 \qquad P(A_3) = 0{,}28 \qquad P(A_1 \cap A_2) = 0{,}11$

$P(A_1 \cap A_3) = 0{,}05 \qquad P(A_1 \cap A_3) = 0{,}07 \qquad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0{,}01$

عبر بالكلمات عن كل من الأحداث التالية (ويمكن استخدام قوانين دي مورجان):

- $A_1 \cup A_2$
- $A'_1 \cap A'_2$
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- $A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3$
- $A'_1 \cap A'_2 \cap A_3$
- $(A'_1 \cap A'_2) \cup A_3$

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

2. المتغير العشوائي

﴿المنفصل والمتصل والتوزيعات الاحتمالية﴾

1.2. المتغير العشوائي المتصل والمنفصل

لنفترض في تقاطع طرق معين تمت مراقبته خلال فترة ساعة واحدة وملاحظة العديد من الخصائص (عدد المركبات التي تمر في التقاطع؛ عدد السيارات التي تمر يسارا أثناء الإشارة؛ أكبر سرعة لسيارة؛ ومتوسط سرعة جميع السيارات) وبما أن كل القيم السابقة عشوائية وتخضع لحالة عدم التأكد فهي تعتبر قيم متغيرة يتم تحديد قيمتها من خلال تجربة معينة (مراقبة التقاطع خلال ساعة) وتُسمَّى متغير عشوائي.

يمكن ربط كل نتيجة من نتائج تجربة عشوائية برقم معين من خلال تحديد قاعدة معينة للربط بينهما: فعلى سبيل المثال لدينا في 1000ساعة الماضية عينة من 10 مكونات لأمتعة ركاب في مطار معين أو الوزن الإجمالي لعينة من 25 مسافرا في شركة طيران) وتسمى قاعدة الربط هذه بالمتغير العشوائي (**متغير** لأنه يمكن إسناد أي قيمة رقمية و**عشوائية** لأن القيمة الملاحَظَة تعتمد على القيم الاحتمالية لنتائج التجربة).

تعريف: لفضاء عينة معين Ω فيكون المتغير العشوائي هو أية قاعدة لربط رقم معين بنتيجة من نتائج التجربة؛ وبلغة رياضية المتغير العشوائي هو دالة مجالها فضاء العينة ونطاقها هو بعض المجموعات الفرعية من الأعداد الحقيقية.

ويتم الإشارة للمتغيرات العشوائية عادة بأحرف كبيرة مثل X,Y للأحرف الأبجدية ونستخدم عادة أحرفا صغيرة x,y لتمثيل بعض القيم الخاصة للمتغير العشوائي السابق؛ فيكون الترميز $X(s)=x$ مما يعني أن x هي القيمة المرتبطة بقيمة أو نتيجة s عن طريق المتغير العشوائي X .

مثال 30

إذا أراد طالب ربط التواصل بموقع الجامعة الالكتروني فنتيجة هذا التواصل هي إما نجاح أو فشل $\Omega=\{S,F\}$ فنعرف المتغير العشوائي بأنه $X(S)=1$ و $X(F)=0$ فيشير المتغير العشوائي X إلى ما إذا كان الطالب يستطيع الاتصال 1 أم لا 0.

في هذا المثال تم تحديد المتغير العشوائي X بالإسناد الواضح لكل عنصر من المجموعة الكلية Ω للرقم المرتبط به؛ فإذا كانت المجموعة تحتوي على عدد قليل من النتائج مثل النتائج المهملة ولكن يمكن تجنبها بالتكرار فتكون مثل هذه القائمة والإسنادات مملة ويمكن تجنبها في كثير من الأحيان.

مثال 31

في تجربة الاتصال بأرقام هواتف في منطقة معينة باستعمال جهاز مولد أرقام عشوائية (تستعمل هذه الأجهزة على نطاق واسع من قبل مؤسسات الاقتراع) فنعرف المتغير العشوائي Y كما يلي:

$$Y\begin{cases}1 & \text{إذا كان الرقم المختار غير مدرج في الدليل}\\0 & \text{إذا كان الرقم المختار مدرج في الدليل}\end{cases}$$

فمثلا إذا ظهر الرقم 5282966 في دليل الهاتف فنقول بأن $X(5282966)=0$ ؛ بينما $X(7727350)=1$ يخبرنا بأن الرقم 7727350 مدرج في دليل الهاتف؛ فيعد الوصف بهذا الكلام أو بهاته القاعدة أكثر اقتصادا من الوصف بالقائمة كاملة لذلك نسعى لاستخدام هذا الوصف كلما أمكن ذلك.

فهنا القيم الوحيدة والممكنة لهذا المتغير هي إما 1 أو 0؛ ينشأ مثل هذا المتغير العشوائي بشكل متكرر بدرجة كافية ليتم إعطاؤه اسمًا خاصًا، بعد الفرد الذي درسه لأول مرة.

تعريف: أي متغير عشوائي يأخذ قيم ممكنة وحيدة هي0 و1 يسمى المتغير العشوائي **برنولي** *Bernoulli*.

وغالبا ما نرغب في دراسة وتحديد عدة متغيرات عشوائية مختلفة من خلال فضاء العينة نفسه.

مثال 32

في مثال سابق (ص3) عن محطة الخدمات وصفنا تجربة تبين عدد مضخات الوقود المستعملة من بين المحطتين؛ قم بتحديد المتغيرين العشوائيين X,Y و U كما يلي:

X : مجموع عدد المضخات المستعملة في المحطتين؛

Y : الفرق بين عدد المضخات المستعملة في المحطة الأولى والثانية؛

U : أكبر عدد مستعمل من المضخات بين المحطتين.

إذا تم تنفيذ هذه التجربة ووجدنا $s=(2,3)$ فنقول بأن $X(2,3)=2+3=5$ ؛ و$Y(2,3)=2-3=-1$ ؛ ويكون $U(2,3)=\max(2,3)=3$.

في المثالين السابقين يمكن افتراض عدد محدود فقط من القيم؛ وهذه حالة خاصة لا يمكن أن تُعَمَّم.

مثال 33

لنعتبر تجربة اختبار مصابيح حتى نجد أول مصباح باستطاعة مقبولة فيكون فضاء العينة هو: $\Omega=(S,FS,FFS,FFFS,\ldots)$. فنعرف المتغير العشوائي X : عدد المصابيح المُخْتَبَرة قبل انتهاء التجربة؛ فيكون: $X(S)=1, X(FS)=2, X(FFS)=3,\ldots\infty$ فكل رقم طبيعي موجب هو قيمة محتملة للمتغير العشوائي لذلك تكون مجموعة القيم لا نهائية.

مثال 34

افترض أنه تم تحديد موقع (بخطوط الطول والعرض) في الجزائر فنحدد المتغير العشوائي Y هو الارتفاع فوق مستوى سطح البحر في الموقع المحدد؛ فسيكون أعلى رقم ممكن هو $Y(N,W)=3303$ وهي أعلى قمة جبل "تاهات أتاكور" في ولاية تمنراست وأدنى قيمة هي $Y(N,W)=-40$ في شط ملغيغ الذي يتوسط مدن بسكرة الوادي وتقرت؛ فتكون مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي Y هي مجموعة كل

الأرقام المحصورة بين المجال(-40 و+3303) فيكون مجال أو نطاق المتغير Y هو $Y(N,W)=\{y:-40\leq y\leq 3303\}=[-40,+3303]$ ويوجد عدد لا نهائي من الأعداد في هذا المجال.

فيوجد نوعان أساسيان من المتغيرات العشوائية، المتصل والمنفصل(سنتطرق إليهما بالتفصيل في المحرو الثالث):

1.1.2. نوعان أساسيان من المتغيرات العشوائية

إن تحديد قيم متغيرات معينة مثل عدد الزوار لقناة يوتيوب معينة خلال24 ساعة أو عدد المرضى الوافدين على الاستعجالات الطبية في وقت معين وعدد صفوف الانتظار يتطلب فقط مبدأ العد الأساسي البسيط؛ ومن ناحية أخرى فإن تحديد قيم متغيرات معينة مثل كفاءة استهلاك الوقود في سيارة (كلم/للتر الواحد) أو وقت رد الفعل يتطلب إجراء قياس من نوع ما فنحدد تمييزا رسميا ومقبولا بين هذين النوعين المختلفين من المتغيرات.

تعريف: المتغير العشوائي **المنفصل** هو متغير عشوائي تشكل قيمه المحتملة مجموعة منتهية أو مجموعة غير محصورة من القيم(مثل مجموعة القيم الصحيحة أو مجموعة القيم الصحيحة الموجبة).

ويكون المتغير العشوائي **مستمرا** إذا انطبق عليه الشرطين التاليين:

- مجموعة قيمه الممكنة تتكون من مجموعة كل الأعداد في مجال واحد على خط الأعداد(وقد تكون لا نهائية في هذا المدى مثلا من$-\infty$ إلى$+\infty$) أو كل الأعداد في اتحاد منفصل لمثل هذه المجالات والفواصل الزمنية أو العددية مثل: $[0,10]\cup[20,30]$
- لا توجد أي قيمة ممكنة للمتغير العشوائي **المستمر** تحمل قيمة احتمالية موجبة تماما مما يعني أن القيمة الاحتمالية للعددc هي: $P(X=c)=0$ ؛ مهما كانت قيمةc.

وعلى الرغم من أن أي مجال أو فاصل زمني يحتوي على عدد لا نهائي من الأرقام إلا أنه يمكن إظهار أنه لا توجد قائمة لا نهائية لجميع هذه القيم لكبر عددها بشكل لا نهائي؛ وقد يبدوا الشرط الثاني أعلاه والذي يصف المتغير العشوائي المستمر غير منطقي حيث يشير إلى احتامل إجمالي قدره0 لكل القيم الممكنة؛ ولكننا سنرى في فصل قادم أن فترات القيم لها احتمال موجب حيث ينخفض احتمال الفترة الزمنية إلى الصفر كلما تقلص عرض الفاصل الزمني نحو الصفر؛ ومن الناحية العملية تتضمن المتغيرات المنفصلة دائما حساب عدد شيء ما بينما تتطلب المتغيرات المستمرة إجراء قياسات من نوع ما.

مثال 35

كل المتغيرات العشوائية في الأمثلة الأربعة في العنصر السابق(مثال 30-مثال 31-مثال 32-مثال 33) تعتبر منفصلة؛ وكمثال آخر لو افترضنا أزواجا عشوائيين وقمنا باختبار الزمرة الدموية لكل فرد ونكرر التجربة حتى نجد زوجا وزوجة يملكان نفس عامل الريزوس(Rh factor) فيكون المتغير العشوائي:

X : عدد التحاليل التي سيتم إجراؤها؛ فتكون القيم المحتمل للمتغير X هي$\{2,4,6,8......\}$ وبما أن القيم الممكنة للمتغير العشوائي تم سردها في سلسلة أو تسلسل أو متتالية فإن X هو متغير عشوائي متقطع.

افتراض: لدراسة الخصائص الأساسية للمتغيرات العشوائية المتقطعة يحتاج الطالب فقط لأدوات الرياضيات البسيطة المتقطعة (الجمع والفرق) بينما دراسة المتغيرات العشوائية المستمرة تتطلب أدوات الرياضيات المستمرة كالتفاضل والتكامل والمشتقات.

4.1.2. تمارين المحور (المتغير العشوائي المنفصل والتوزيعات الاحتمالية)

01: قد ينجح الطالب في عامه الدراسي S وقد يرسب F؛ وافترض أنه تم اختيار ثلاث طلبة عشوائيا وتم تحديد الحالة الدراسية لكل طالب؛ فلنعتبر المتغير العشوائي X: عدد الطلبة الناجحين من بين الثلاثة؛

- حدد قائمة بكل نتيجة من نتائج فضاء العينة من خلال القيمة المرتبطة بها.

02: قم بإعطاء أمثلة أخرى عن المتغير العشوائي لبرنولي بخلاف الأمثلة السابقة.

03: في مثال رقم34(ص42) وصفنا بعض المتغيرات العشوائية مثل عدد المضخات المستعملة في كلا المحطتين، الفرق بين عدد المضخات المستعمل في المحطتين وأكبر عدد مستعمل من المضخات بين المحطتين؛

- قم بتحديد متغيرين آخرين أو أكثر؛ ثم قم بوضع قائمة بكل القيم الممكنة لكل متغير (نتائج متغير).

04: إذا كانتΩ مجموعة غير منتهية؛ هل يكون بالضرورة لأي متغير عشوائي X معرَّفٍ منΩ عددا غير منتهي من النتائج؛ إذا كان "لا" فعلل لماذا؟ وإذا كان "نعم" فقم بإعطاء أمثلة.

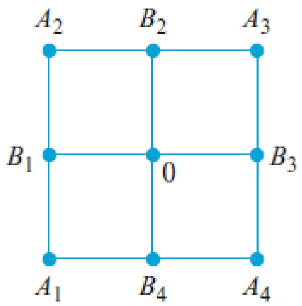
05: ابتداءا من نقطة زمنية معينة تم مراقبة اتجاه السيارات في تقاطع طرق معين لمعرفة اتجاه السيارة يمين يسار أم أمام؛ فتنتهي التجربة حين تمر السيارة نحو اليسار؛ وليكن المتغير العشوائيX: عدد السيارات التي تمت ملاحظتها؛ ماهي القيم للمكنة للمتغير؟ وحدد خمس نتائج ممكنة وقيمها العددية.

06: لكل متغير عشوائي مما يلي: حدد قائمة القيم الممكنة لكل متغير وحدد هل هو متقطع أم لا:

- عدد حبات البيض السليمة في إحدى علب البيض(30حبة) المختارة عشوائيا؛
- تم اختيار قائمة طلبة عشوائيا ونرغب في تحديد عدد الطلبة الذين سيتغيبون عن الدرس الأول؛
- عدد مرات تأرجح لاعب الجولف بجسمه قبل ضربه للكرة؛
- طول أفعى مختارة عشوائيا؛
- عدد المنح المكتسبة من بيع أول طبعة من 10000 نسخة من كتاب مدرسي(*textbooks*)؛
- مستوى الحمضية (*pH*) من تربة مختارة عشوائيا؛
- الضغط المتولد من مضرب تنس؛
- عدد الرميات لقطعة نقود المطلوبة من 03 أفراد حتى الحصول على(*HHH* أو *TTT*)؛

07: كل مكون يتم اختباره تكون النتيجة إما نجاحا S أوفشلا F؛ ولنفترض أن يتم اختبار المكون بشكل متكرر حتى الحصول على حالة نجاح ثلاث مرات متتالية؛ حدد المتغير العشوائي Y لعدد الاختبارات الضرورية للوصول لهذا المستوى؛ حدد قائمة النتائج المتعلقة بأقل خمس قيم ممكنة للمتغير وحدد قيمة كل منها؛

08: يوجد فرد عند النقطة 0 في الرسم التخطيطي المقابل؛ باستخدام جهاز توزيع عشوائي ينتقل الفرد إلى أحد المواقع الأربعة؛ وبمجرد وصوله يستخدم جهاز توزيع عشوائي آخر؛ ليقرر إذا كان سيعود لنقطة الصفر أو ينتقل لإحدى النقطتين المجاورتين؛ ثم تستمر العملية بعد كل نقلة وذلك برمي قطعة نرد أو قطعة نقود؛



- ليكن X عدد الحركات التي يقوم بها الفرد قبل عودته لنقطة الصفر؛ ماهي القيم الممكنة لـX: هل X متقطع أم مستمر؛ (الحل غير مفهوم)
- أعد الإجابة على السؤال السابق إذا كان مسموحا الانتقال من الصفر قطريا أيضا.

09: محطتي وقود في كل منهما 6 و4 مضخات على التوالي: ماهي القيم الممكنة للمتغيرات التالية:

- T: عدد المضخات المستعملة في كلا المحطتين؛
- X: الفرق بين عدد المضخات المستعملة في المحطتين؛
- U: أكبر عدد يعمل من المضخات بين المحطتين؛
- D: عدد المحطات التي تستعمل مضختين فقط.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

2.2. التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع الاحتمالي (التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع)

عندما يتم إسناد احتمالات للنتائج المختلفة في المجموعة الكلية Ω فإنها تحدد أيضا الاحتمالات المرتبطة بقيم أي متغير عشوائي X؛ حيث يوضح التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X كيف يتوزع الاحتمال الكلي(1) (إسناد وتخصيص) من خلال كل القيم الممكنة لـ X.

مثال 36

توجد06 شحنات جاهزة للتوريد من قبل مورد حيث يبين الجدول المقابل عدد المكونات المعيبة في كل شحنة؛ حيث سيتم اختيار شحنة واحدة عشوائيا لاختبارها:

الشحنة	01	02	03	04	05	06
عدد القطع المعيبة في الشحنة	0	2	0	1	2	0

فإذا افترضنا أن X هو عدد القطع المعيبة في الشحنة المختارة؛ فتكون القيم الثلاث المحتملة للمتغير العشوائي X هي $(0,1,2)$ لكل الأحداث الستة المحتملة في فضاء العينة توجد ثلاث نتائج $(X=0, X=1, X=2)$؛ فنرمز بـ: $P(0)$ لاحتمال ظهور الحدث $(X=0)$ وهكذا لبقية النتائج؛ فيكون:

احتمال إرسال الشحنات(1أو3أو6) $p(0)=P(X=0)=3/6=0.50$؛

احتمال إرسال الشحنة(4) $p(1)=P(X=1)=1/6=0.167$؛

احتمال إرسال الشحنات(2أو5) $p(2)=P(X=2)=2/6=0.33$؛

أي أن الاحتمال الكلي (والذي قيمته1) قد تم توزيع0.5 منه على المتغير العشوائي حين تكون قيمته0 $(X=0)$ بينما تم توزيع قيمة0.167 من الاحتمال الكلي على م.ع بقيمة1 أما قيمة احتمال0.33 الباقية فقد تم إسنادها للمتغير العشوائي بقيمة2.

فتحدد قيم المتغير العشوائي مع احتمالاتها مجتمعة التوزيع الاحتمالي أو دالة الكتلة الاحتمالية[1] للمتغير العشوائي X؛ فلو تم تكرار هذه التجربة عددا كبيرا من المرات على فإنه وعلى المدى الطويل فإن القيمة $X=0$ سيكون عدد مرات ظهورها في التجربة المكررة هو نصف عدد مرات تكرار التجربة؛ والقيمة $X=1$ سيكون عدد مرات ظهورها سُدُس عدد مرات تكرار التجربة؛ والقيمة $X=2$ سيكون عدد مرات ظهورها في التجربة المكررة هو ثُلُث عدد مرات تكرار التجربة.

تعريف: التوزيع الاحتمالي أو دالة **الكتلة** الإحتمالية(pmf) لمتغير عشوائي متقطع تُعَرَّفُ لكل قيمة X كما يلي: $p(x)=P(X=x)=al\, s\in S: X(s)=x$؛ ونقول أن $P(X=x)$ هي احتمال أن المتغير العشوائي X يأخذ القيمة X.

فنقول بأنه لكل قيمة ممكنة X للمتغير العشوائي تحدد دالة الكتلة الاحتمالية(pmf) احتمال ملاحظة أن تلك القيمة حين تُجرى التجربة؛ فيكون الشرط $p(x)\geq 0$ و $\sum p(x)=1$ فيكون المجموع أكبر من كل القيم الممكنة لـX؛ وذلك من أجل أي دالة للكتلة الاحتمالية pmf.

[1]- *Probability distribution or probability mass function.*

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ كُلِّية العلوم الاقتصادية جامعَة الشيخ العَرْبِي التَبَسِّي "تبسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

مثال 37

لنعتبر اختيار طالب عشوائيا من جامعة تبسة ككل ونحدد متغير عشوائي لبرنولي كما يلي: $X=1$ إذا كان الطالب غير مؤهل للحصول على منحة للقيام بتربص دراسي و $X=0$ إذا كان الطالب المختار مؤهلا؛ فإذا علمنا أن 20% من الطلبة غير مؤهلين فحدد دالة الكتلة الاحتمالية pmf للمتغير العشوائي X:

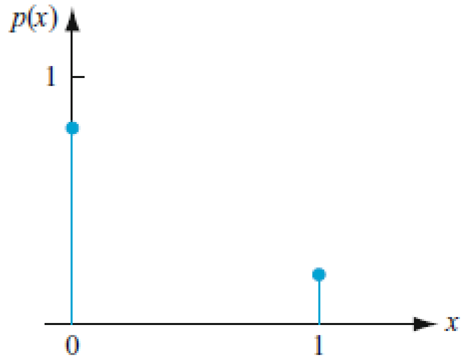
احتمال أن يكون الطالب المختار مؤهلاً $p(0)=P(X=0)=0.80$؛

احتمال أن يكون الطالب المختار غير مؤهلٍ $p(1)=P(X=1)=0.20$؛

احتمال $x\neq 0$ أو $x\neq 1$: $p(x)=P(X=x)=0$

ويبين الشكل الموالي الرسم البياني الخطي لهذه الدالة:

رسم توضيحي 1: الرسم البياني الخطي لدالة الكتلة الاحتمالية pmf



مثال 38

لنفترض مجموعة من خمسة متبرعين بالدم (C,D,E,F,G) حيث أن (C,D) فقط من يمتلكون الزمرة(O^{+})؛ حيث يتم سحب عينة دم من كل متبرع بترتيب عشوائي حتى نتحصل على الزمرة(O^{+})؛ ونعبر عن المتغير العشوائي كما يلي: Y هو عدد مرات سحب الدم لإيجاد الشخص الذي يحوز على الزمرة المطلوبة فتكون دالة **الكتلة** الاحتمالية pmf للمتغير العشوائي Y كما يلي:

احتمال الحصول على الزمرة O^{+} في السحب الأول: $p(1)=P(y=1)=\frac{2}{5}=0.40$

احتمال الحصول على الزمرة O^{+} في السحب الثاني: $p(2)=P(Y=2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}=0.30$

(وهنا نفصل قليلا فنقول: لكي نحصل على الزمرة المطلوبة في السحب الثاني يجب أن لا نحصل عليها في السحب الأول أي أننا نجد الحدث المتمم وهو المعاكس لحدث إيجادها في السحب الأول 5/2 متممه هو5/3 أي عدد احتمال عدم الحصول على الزمرة في السحب الأول هو5/3) ثم احتمال حصولنا على الزمرة في السحب الثاني هو 4/2 لاحظ أننا قلنا4 لأن سحب الزمر يتم دون إرجاع أي أن الفرد الذي عرفنا نوع زمرته لا نسحب منه مرة أخرى لذلك في السحب الثاني ينقص العدد الكلي للمجموعة تحت الاختبار بفرد واحد وبما أننا السحب يتم على التوالي فإن نتيجة السحبين يكون بينهما تقاطع والتقاطع بين حدثين مستقلين يفسر بالضرب فتكون النتيجة هي $\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}$)

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

احتمال الحصول على الزمرة O^+ في السحب الثالث:

$$p(3)=P(Y=3)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$$

احتمال الحصول على الزمرة O^+ في السحب الرابع:

$$p(4)=P(Y=4)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{6}{60}=\frac{1}{10}$$

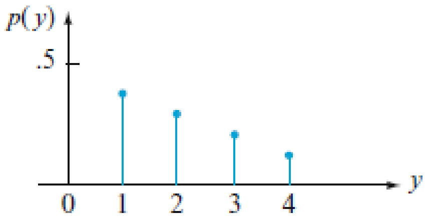
احتمال عدم الحصول على الزمرة O^+ أبدا:

$$p(y)=0 \quad for\ any\ y\neq 1,2,3,4$$

ويمكن تمثيل دالة الكتلة الاحتمالية بشكل مضغوط جدوليا كما يلي:

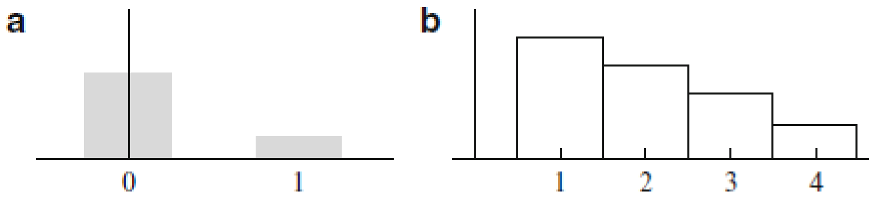
y	01	02	03	04
$p(y)$	0.40	0.30	0.20	0.10

وأن أي قيمة لـ y غير مدرجة فاحتمالها يؤول للصفر.



تمت تسمية الدالة السابقة بالكتلة استنادا لنموذج في علم الفيزياء يعتمد على نظام "الكتل النقطية" حيث يتم توزيع الكتل على مواقع مختلفة على محور أحادي البعد؛ وأيضا تصف الكتلة الاحتمالية الإجماليةلـ1 في نقاط مختلفة على طول محور القيم المحتملة للمتغير العشوائي (مكان وكمية الكتلة عند كل قيمة y).

ويمكن تمثيل الدالة السابقة بشكل آخر يسمى الرسم البياني الاحتمالي وفوق كل قيمة ل y مع قيمة احتمالية لها موجبة تماما$p(y)>0$ نقوم بإنشاء مستطيلات مركزها عند كل قيمة y ويتناسب ارتفاع كل مستطيل مع احتمال القيمة $p(y)$ وقواعد المستطيلات كلها متساوية (وعند كون قيم y متباعدة بشكل متساوي يتم عادة اختيار القاعدة كالمسافة بين القيم المتتابعة لـ y ولو كانت أصغر) وفيما يلي نوعين من الأشكال:



1.2.2. معلمة التوزيع الاحتمالي

في مثالٍ سابق (مثال 37) كان لدينا: احتمال أن يكون الطالب المختار مؤهلاً $p(0)=0.80$ ؛ أو غير مؤهلٍ $p(1)=0.20$ ؛ وفي جامعة أخرى قد يكون هناك حالات أخرى($p(0)=0.60$؛$p(1)=0.40$) وبشكل عام فإن دالة الكتلة الاحتمالية (التوزيع الاحتمالي) لأي متغير عشوائي من نوع برنولي يمكن التعبير عنها بصيغة: $p(1)=\alpha$ ؛ $p(0)=1-\alpha$ ؛ حيث يكون $0<\alpha<1$ وذلك لأن دالة الكتلة الاحتمالية تعتمد على

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبَسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

القيمة الخاصة لـα ؛ ونكتب غالبا التوزي الاحتمالي لبرنولي بهذا الشكل$p(x;\alpha)$ عوضا عن هذا الشكل . $p(x)$

كل قيمة لـα في المعادلة المقابلة تعبر عن قيمة مختلفة لدالة الكتلة الاحتمالية:

$$p(x;\alpha)=\begin{cases}1-\alpha & x=0\\ \alpha & x=1\\ 0 & x\neq 0;1\end{cases}$$

تعريف: لنفترض أن$P(x)$ تعتمد على كمية ما α والتي يمكن إسنادها لأي عدد من القيم الممكنة مع كون كل قيمة مختلفة تعطينا توزيعا احتماليا مختلفا وهذه الكميةα تسمى معلمة التوزيع؛ ومجموعة التوزيعات الاحتمالية لمختلف قيم المعلمة تسمى عائلة التوزيعات الاحتمالية.

الكميةα في المعادلة السابقة هي معلمة وكل قيمة مختلفة لها بين صفر وواحد $(0<\alpha<1)$ تحدد عضوا مختلفا من عائلة التوزيعات الاحتمالية؛ ومثال عن اثنين من هؤلاء الأعضاء في عائلة التوزيعات الاحتمالية هما:

$$p(x;5)=\begin{cases}0.5 & x=0\\ 0.5 & x=1\\ 0 & x\neq 0;1\end{cases} \quad \text{و} \quad p(x;6)=\begin{cases}0.4 & x=0\\ 0.6 & x=1\\ 0 & x\neq 0;1\end{cases}$$

افتراض: كل توزيع احتمالي لمتغير عشوائي من نوع برنولي لديه نفس الصيغة السابقة لذلك يطلق عليه عائلة توزيعات برنولي.

مثال 39

بداية من نقطة زمنية ثابتة تمت ملاحظة جنس كل مولود جديد في مستشفى حتى ولادة صبي(ذكر) B_{oy}، ولتكن المعلمة$\alpha=P(B_{oy})$ ؛ وبافتراض أن الولادات المتتالية تعتبر كأحداث مستقلة؛ فنعرف المتغير العشوائي X هو عدد الولادات التي تمت ملاحظتها: فيكون:

$$p(1)=P(X=1)=P(B)=\alpha$$
$$p(2)=P(X=2)=P(GB)=P(G)\times P(B)=(1-\alpha)\times\alpha$$
$$p(3)=P(X=3)=P(GGB)=P(G)\times P(G)\times P(B)=(1-\alpha)\times(1-\alpha)\times\alpha$$
$$\dots\dots\dots$$

وبالمواصلة على هذا المنوال نستنتج لدينا القاعدة العامة:

$$p(x)=\begin{cases}(1-\alpha)^{x-1}\times\alpha & x=1,2,3,\dots\\ 0 & x\neq 1,2,3,\dots\end{cases}$$

تمثل الكميةα في الصيغة السابقة رقما بين 0 و1 وهو معلمة التوزيع الاحتمالي؛ ففي هذا مثال المولود$\alpha=0.51$ قد تكون قيمة مُلَائِمة؛ ولو كنا نبحث عن أول طفل بزمرة دموية ذات عامل ريزوس موجب

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

قد يكون العدد $\alpha=0.85$ أكثر مُلَاءَمة؛ وللمتغير العشوائي X خاصية تسمى التوزيع الهندسي (نراها في عنصر لاحق).

2.2.2. دالة التوزيع التراكمية

بالنسبة لبعض القيم الثابتة لـ X نرغب في حساب احتمال أن تكون القيم المرصودة للمتغير X هي X على الأكثر (أقل أو يساوي X)؛ فمثلا ليكن X عدد السرة المشغولة في غرفة طوارئ لمستشفى في وقت محدد من اليوم ولتكن دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير X كما يلي:

X	00	01	02	03	04
$p(x)$	0.20	0.25	0.30	0.15	0.10

فيكون احتمال أن يتم شغل سريرين على الأكثر هو:

$$p(X\le 2)=p(0)+p(1)+p(2)=0.75 \text{ ؛}$$

وعلاوة على ذلك وبما أن $p(X\le 2.8)$ هي نفسها وتؤول إلى $p(X\le 2)$ ؛ فإن $p(X\le 2.8)=0.75$ أيضا؛ وبما أن 0 هي أقل قيمة ممكنة للمتغير العشوائي X فإن $p(X\le -1.4)=0,\ p(X\le -12)=0$ ؛ وبذلك فإن أي قيمة على يسار $x=0$) باعتبارها **أقل** قيمة لـ x وليس باعتبارها صفر) فإن $p(X\le x)=0$ وبما أن 4 هي أكبر قيمة ممكنة للمتغير X فإن $p(X\le 4)=1$ وكذلك لو قلنا $p(X\le 1628)=1$ وهكذا.

افتراض مهم جدا: وتعتبر تذكيرا لمبادئ المتراجحات والمجالات في الرياضيات؛ $p(X<2)=p(0)+p(1)=0.45$ وهو أقل من $p(X\le 2)=p(0)+p(1)+p(2)=0.75$ لأن الاحتمال الأخير يحتوي الكتلة الاحتمالية للقيمة $x=2$ بينما الاحتمال السابق لا يتضمنها، وبصفة عامة $p(X<x)<p(X\le x)$ كلما كانت X قيمة محتملة للمتغير X ، وعلاوة على ذلك فإن $p(X\le x)$ هو احتمال قابل للتحديد والحساب بدقة من أجل أية قيمة لـ X.

تعريف: دالة التوزيع التراكمية cdf (ويرمز لها أيضا $F(x)$) لمتغير عشوائي متقطع X مع دالة كتلة احتمالية pmf (هي $p(x)$) تُعَرَّفُ كما يلي: $F(x)=P(X\le x)=\sum_{y:y\le x} p(y)$ فمن أجل أي قيمة لـ X فإن $F(x)$ هي احتمال أن يأخذ المتغير العشوائي قيمة X على الأكثر.

مثال 40

يحتوي متجر على محركات أقراص بسعة 1-2-4-8-أو16جيقابايت كذاكرة؛ وفي الجدول التالي توزيع المتغير العشوائي X: حجم الذاكرة للأقراص المشتراة؛

X	01	02	04	08	16
$p(x)$	0.05	0.10	0.35	0.40	0.10

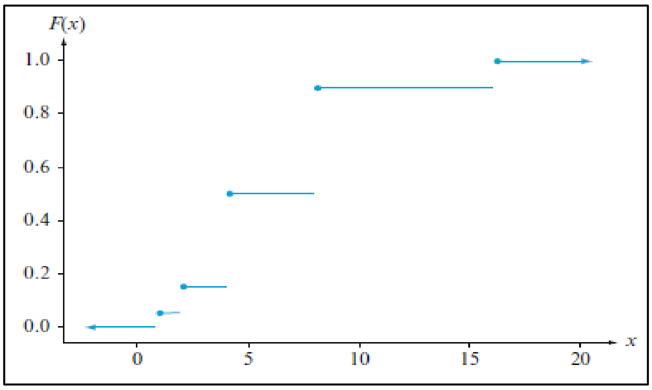
ونحدد دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ لكل القيم الخمسة الممكنة للمتغير العشوائي X:

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

$$F(x)=p(X\leq 1)=p(1)=0.05$$
$$F(x)=p(X\leq 2)=p(1)+p(2)=0.05+0.10=0.15$$
$$F(x)=p(X\leq 3)=p(1)+p(2)+p(3)=0.15+0.35=0.50$$
$$F(x)=p(X\leq 4)=p(1)+p(2)+p(3)+p(4)=0.50+0.40=0.90$$
$$F(x)=p(X\leq 5)=p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)=0.90+0.10=1$$

ومن أجل أية قيمة أخرى لـ X فإن الدالة $F(x)$ تأخذ القيمة الاحتمالية للدالة عند أقرب قيمة ممكنة للمتغير العشوائي X على يسار X $F(4.65)=p(x<4.65)=p(x<4)=0.35$ ؛ وكذلك عند كون X أصغر من أقل قيمة له(وهي 01 في هذا المثال) فتؤول دالة التوزيع التراكمية إلى الصفر $F(-2.5)=p(x<1)=p(x<0)=p(x<-2.5)=0$ وذلك كما رأينا في ملاحظة سابقة.

فتكون دالة التوزيع التراكمية وشكلها كما يلي:



$$F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 0.05 & 1\leq x<2\\ 0.15 & 2\leq x<4\\ 0.50 & 4\leq x<8\\ 0.90 & 8\leq x<16\\ 1 & 16\leq x\end{cases}$$

من أجل كل متغير عشوائي متقطع منحنى دالة التوزيع التراكمية $F(x)$ سيكون له فجوة أو قفزة عمودية نحو الأعلى (بين كل قيمتين لها) وذلك عند كل قيمة ممكنة للمتغير X ؛ وسيكون مسطحا بين كل القيم المكنة لـ X ويسمى هذا النوع من المنحنيات بالدالة السلمية أو الدرجية.

مثال 41

في مثال سابق (مثال المواليد ص50) كان كل عدد صحيح موجب قيمة محتملة للمتغير العشوائي X

$$p(x)=\begin{cases}(1-\alpha)^{x-1}\times\alpha & x=1,2,3,\dots\\ 0 & x\neq 1,2,3,\dots\end{cases}$$

فيكون من أجل كل عدد صحيح موجب X : (وبعد إجراء تعديل رياضي بسيط)

$$F(x)=\sum_{y\leq x}p(y)=\sum_{y=1}^{x}(1-\alpha)^{y-1}\times\alpha=\alpha\times\sum_{y=0}^{x-1}(1-\alpha)^{y}$$

ولتقييم هذا المجموع نستعمل حقيقة أن الجمع الجزئي لمتتالية هندسية هو: $\sum_{y=0}^{k}\beta^{y}=\frac{1-\beta^{k+1}}{1-\beta}$ وباستعمال هذه الفكرة في المعادلة السابقة مع تعويض $\beta=1-\alpha$ و $k=x-1$

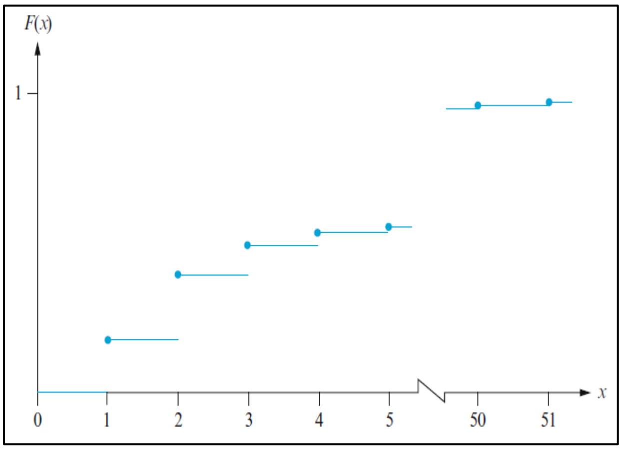
فيعطينا:

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

$F(x)=\alpha\times\sum_{y=0}^{x-1}(1-\alpha)^y=\alpha\dfrac{1-(1-\alpha)^x}{1-(1-\alpha)}=1-(1-\alpha)^x$ ؛ مع العلم أن x عدد صحيح موجب

وبما أن $F(x)$ ثابت بين الأعداد الصحيحة الموجبة فإن: $F(x)=\begin{cases}0 & x<1\\ 1-(1-\alpha)^{[x]} & x\geq 1\end{cases}$

أين يكون $[x]$ هو أكبر عدد صحيح موجب يكون أقل أو يساوي x أي $[2.71]=2$ ؛ لذلك فلو كانت $\alpha=0.51$ مثلا كما في مثال المواليد (ص50) يكون احتمال اختبار خمسة مواليد على الأكثر ليظهر الطفل الذكر الأول هو: $F(5)=1-(1-0.51)^{[5]}=1-0.0282=0.9718$ ؛ بينما $F(10)\cong 1.000$ فيتم رسم منحنى دالة التوزيع التراكمية كما يلي:



في كل الأمثلة السابقة تم استنتاج دالة التوزيع التراكمية cdf من خلال دالة الكتلة الاحتمالية pmf (التوزيع الاحتمالي)؛ ويمكن عكس هذه العملية إذا توفرت لدينا دالة التوزيع التراكمية cdf ؛ ولنفترض مثلا أن المتغير العشوائي X يشير لعدد القطع المعيبة في شحنة ما تتكون من ستة قطع؛ فتكون القيم الممكنة للمتغير X هي $0,1,2,3,4,5,6$ ؛ لذلك يكون مثلا احتمال وجود3قطع معيبة فقط:

$$\begin{aligned}p(3)&=P(X=3)\\&=[p(0)+p(1)+p(2)+p(3)]-[p(0)+p(1)+p(2)]\\&=P(X\leq 3)-P(X\leq 2)\\&=F(3)-F(2)\end{aligned}$$

وبشكل عام احتمال وقوع المتغير العشوائي X في مجال معين يسهل استنتاجها من خلال؛ دالة التوزيع التراكمية cdf ؛ فمثلا:

$$\begin{aligned}P(2\leq X\leq 4)&=p(2)+p(3)+p(4)\\&=[p(0)+\ldots+p(4)]-[P(0)+p(1)]\\&=P(X\leq 4)-P(X<2)\\&=P(X\leq 4)-P(X\leq 1)\\&=F(4)-F(1)\end{aligned}$$

ولاحظ أن $P(2\leq X\leq 4)\neq F(4)-F(2)$ لأن قيمة $X=2$ محتواة داخل المجال بين2و4 لذا لا نرغب في طرح قيمة احتمالها؛ ومع ذلك $P(2<X\leq 4)=F(4)-F(2)$ لأن قيمة $X=2$ ليست محتواة داخل المجال بين2و4 هذه المرة.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

افتراض: من أجل أي عددين a، و b حيث: $a \le b$ فإن: $P(a \le X \le b) = F(b) - F(-a)$ ؛ حيث $(-a)$ تمثل أكبر قيمة ممكنة للمتغير X وأقل مباشرة من a؛ وبشكل أخص إذا كانت القيمة الممكنة هي عدد صحيح وكان a، و b عددين صحيحين فإن:

$$P(a \le X \le b) = P(X = a, a+1, a+2, \dots . b) = F(b) - F(a-1)$$

فلو افترضنا أن $a = b$ فيكون

$$P(a \le X \le b) = P(X = a) = F(a) - F(a-1)$$

والسبب الذي جعلنا نطرح الصيغة $F(-a)$ بدلا من $F(a)$ هو أننا نرغب في تضمين $P(X = a)$ فالصيغة $F(b) - F(a)$ تعطينا $P(a < X \le b)$ وهذه الصيغة هي التي سنعمل عليها كثيرا في حساب احتمالات التوزيع **الثنائي** وتوزيع **بواسون** في الفصول القادمة.

مثال 42

ليكن المتغير العشوائي X : هو عدد أيام الإجازة المرضية لموظف تم اختياره عشوائيا في شركة كبيرة خلال عامين؛ فإذا كان العدد الأقصى للأيام المسموح الغياب فيها في السنة هو14يوما فتكون القيم الممكنة للمتغير العشوائي هي: $0,1,2, \dots . 14$ ؛ ولدينا:

$$F(0) = 0.58, F(1) = 0.72, F(3) = 0.81, F(4) = 0.88, F(0) = 0.94$$

فيكون: $P(2 \le X \le 5) = P(X = 2,3,4 \& 5) = F(5) - F(1) = 0.22$ ؛ وكذلك: $P(X = 3) = F(3) - F(2) = 0.50$

3.2.2. *نظرة أخرى لدوال الكتلة الاحتمالية (التوزيع الاحتمالي)*

من المفيد غالبا التفكير في دالة الكتلة الاحتمالية (التوزيع الاحتمالي) كعملية تحديد نموذج رياضي لمجتمع متقطع(*discrete population*).

مثال 43

تم اختيار أسرة عشوائية في منطقة معينة ونعتبر المتغير العشوائي X هو عدد الأفراد في الأسرة المختارة؛ ولنفترض أن لهذا المتغير دالة الكتلة الاحتمالية pmf كما في الجدول المقابل(معطيات مستوحاة من مقال[1]):

X	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.004	0.001

ولنفترض وجود مليون أسرة ولكل أسرة قيمة X يأخذها المتغير X عدد الأفراد في الأسرة؛ ونسبة $p(x)$ ظهور كل قيمة للمتغير في المليون أسرة (احتمال $p(x)$ تكرار القيمة في مليون أسرة) مبينة في

1. Spencer SE, O'Neill PD. The probability of containment for multitype branching process models for emerging epidemics. Journal of applied probability. 2011;48(1):173-88 .
2. Holický M. Introduction to Probability and Statistics for Engineers2013 2013.

الجدول أعلاه؛ والطريقة الأخرى لرؤية هذه البيانات هي بالتغاضي عن النظر بالنسبة للأسرة والنظر إليهم كعدد السكان الذي يتكون من قيم X ؛ فنقول بأن14% من هذه القيم تنتمي للقيمة1 من المتغير و17.5% من القيم تنتمي للقيمة2 من المتغير وهكذا فنجد أن دالة الكتلة الاحتماليةpmf (التوزيع الاحتمالي) تصف توزيع القيم السكانية الممكنة$0,1,2,....,10$.

وحين يكون لدينا نموذج سكاني مثل هذا نستخدمه لحساب مختلف الخصائص السكانية مثل المتوسط الحسابي والذي يصف مركز التوزيع السكاني وكذا الانحراف المعياري والذي يصف مدى الانتشار حول مركز التوزيع والذين سنراهما في العنصر التالي.

4.2.2. تمارين المحور (التوزيع الاحتمال ودالته المتغير العشوائي المنفصل والتوزيعات الاحتمالية)

01: ليكن المتغير العشوائي X عدد الطلبة الذين قدمو بحوثهم للأستاذ في فترة زمنية معينة وأن قيم المتغير هي فقط بين $(0,1,2,3,4)$ ويكون $p(0)=0.30, P(1)=0.25, p(2)=0.20, p(3)=0.15$

- ماهو $p(4)=0.15$ ؟؛
- أرسم الشكل البياني الخطي والمدرج التكراري لدالة الكتلة الاحتمالية pmf (التوزيع الاحتمالي) للمتغير X.
- ماهو احتمال أن يقدم على الأقل طالبين بحثهما؟؛
- ماهو احتمال أن يقدم أكثر من طالبين بحثهما؟؛
- ماهو احتمال أن يظهر الأستاذ في تلك الفترة الزمنية؟

02: شركة تستعمل ستة خوط هاتفية لتنفيذ البيع بالطلب؛ ليكن المتغير العشوائي X عدد الخطوط المستعملة في فترة معينة ولتكن دالة الكتلة الاحتمالية في الجدول المقابل:

X	00	01	02	03	04	05	06
$p(x)$	0.10	0.15	0.20	0.25	0.20	0.06	0.04

أحسب احتمال الأحداث التالية:

- على الأكثر ثلاث خطوط تعمل؛
- أقل من ثلاث خطوط تعمل؛
- على الأقل ثلاث خطوط تعمل؛
- بين خطين وخمسة خطوط (متضمنة) تعمل؛
- بين خطين وأربعة خطوط(متضمنة) لا تعمل؛
- على الأقل أربعة خطوط لا تعمل.

03: شركة إنتاج تمتلك برنامج لمراقبة الجودة لفحص لوحات الكمبيوتر (في علب من خمس لوحات) الوارد بحثا عن العيوب؛ يتم اختيار لوحين من كل علبة فنمثل مجموعة النتائج الممكنة من خلال أزواج مثلا: (1،2) يمثل اختيار اللوحة 1 و 2 للفحص من علبة الخمس ألواح:

- حدد نتائج فضاء العينة الممكنة (10)؛
- ولنفترض أن اللوحتين1و2 هما اللوحتان الوحيدتان التي بهما عيب في علب الخمس لوحات؛ وحين اختيار لوحتين عشوائيتين؛ حدد المتغيرX: عدد اللوحات المعيبة الملاحظة خلال التفتيش وأوجد التوزيع الاحتمالي لX؛
- ليكن F(x) دالة التوزيع التراكمي للمتغير فحدد F(0) وF(1) وF(2) وأوجد الدالة F(x) لبقية قيم المتغير.

04: يتطلب مصباح يدوي بطاريتين وقد نجد بطارية صالحةA وقد لا تكون صالحة U وسيتم اختبار بطاريتين عشوائيا بشكل مستقل حتى نجد بطاريتين مقبولتين؛ وليكن90% من البطاريات مقبولا؛ وليكن المتغير العشوائي عدد البطاريات الواجب اختبارها؛

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التَّبسِّي "تبسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

- ماهو p(2) أي p(Y=2)؛
- ما هو p(3)(هناك نتيجتين مختلفتين هنا)؛
- لإيجاد y=5 ماهو الصحيح للبطارية الخامسة المختارة؛ حدد النتائج الأربعة واحسب P(5)؛
- استخدم نمط الإجابات السابقة لإيجاد الصيغة العامة p(y).

05: يشترك مواطن في مجلتين أسبوعيتين يفترض وصول كل منهما يوم الأربعاء؛ وفي الواقع قد تصل كل منهما ايام الأربعاء الخميس الجمعة والسبت بشكل مستقل باحتمال لكل منهما 0.3 0.4 0.2 0.1؛ وليكن y عدد الأيام بعد الأربعاء لوصول كلا المجلتين (أي القيم الممكنة لY 0 1 2 3) أحسب الكتلة الاحتمالية

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامِعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

3.2. القيمة المتوقعة والانحراف المعياري

لنعتبر أن جامعة تبسة فيها 20000 طالب وليكن المتغير العشوائي X هو عدد المواد التي يكون فيها الطالب مديناً؛ وحين نختار طالبا عشوائيا نقول بأن احتمال كونه مدينًا في مادة واحدة هو $p(1)=0.02$ فينتج لدينا $(0.20)\times(20000)=4000$ طالباً وبالمثل بالنسبة لبقية قيم المتغير $2,3,4,5$.

X	1	2	3	4	5
$p(x)$	0.20	0.23	0.27	0.18	0.12
عدد الطلبة المدينين	4000	4600	5400	3600	2400

ولحساب متوسط عدد المواد لكل طالب أي القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي X في المجتمع يجب أن نحسب إجمالي عدد المواد لكل الطلاب ونقسمه على إجمالي عدد الطلبة؛ وبما أن 4000 طالب مدينين في مادة واحدة فإنهم يساهمون منطقيا بـ 4000 مادة في المجموع؛ وبالمثل فإن 4600 طالب المدينين في مادتين يساهمون بـ $2\times(4600)$ مادة في المجموع وهكذا بالنسبة لبقية القيم؛ فتكون قيمة متوسط المجتمع للمتغير X هي:

$$\frac{1\times(4000)+2\times(4600)+3\times(5400)+4\times(3600)+5\times(2400)}{20000}=\frac{55800}{20000}=2.79 \qquad \text{معادلة 06}$$

وبما أن $\frac{4000}{20000}=0.20$ ، $\frac{4600}{20000}=0.23$ ، $\frac{5400}{20000}=0.27$ ، $\frac{3600}{20000}=0.18$ و $\frac{2400}{20000}=0.12$ فإن المعادلة السابقة تُكْتَبُ بشكل بديل كما يلي:

$$1\times p(1)+2\times p(2)+3\times p(3)+4\times p(4)+5\times p(5) \qquad \text{معادلة 07}$$

وتبين المعادلة الأخيرة أنه لحساب قيمة متوسط المجتمع للمتغير X نحتاج فقط القيم الممكنة للمتغير X من خلال احتمالاتها (نسبها في المجتمع)؛ وبالخصوص حجم المجتمع غير مهم طالما تم إعطاؤنا دالة الكتلة الاحتمالية pmf (التوزيع الاحتمالي) في الجدول السابق؛ فيكون معدل أو متوسط قيم المتغير X هو المتوسط الموزون للقيم الممكنة $X:1,2,3,4,5$ أين يكون الوزن هو الاحتمالات المسندة لهذه القيم.

1.3.2. القيمة المتوقعة(الأمل-المتوسط الحسابي)

تعريف: ليكن X متغير عشوائي متقطع بمجموعة قيم ممكنة D ودالة كتلة احتمالية pmf (التوزيع الاحتمالي $p(x)$) فيكون للمعدل أو القيمة المتوسطة للمتغير العشوائي X بأحد الرموز التالية:

$$E(X)=\mu_X=\mu=\sum_{x\in D} x\times p(x)$$

مثال 44

بالنسبة لدالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X: عدد المواد المدين فيها الطالب؛ في الجدول السابق:

$$\begin{aligned}\mu_X &= 1\times p(1)+2\times p(2)+3\times p(3)+4\times p(4)+5\times p(5)\\ &= 1\times 0.20+2\times 0.23+3\times 0.27+4\times 0.18+5\times 0.12\\ &= 0.20+0.46+0.81+0.72+0.60\\ &= 2.79\end{aligned}$$

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

إذا فكرنا في المجتمع المدروس(أو المُخْتَبَرْ) بأنه يتكون من قيم المتغير X: $1,2,3,4,5$ فإن μ_X هو متوسط المجتمع(وسنشير غالبا إلى μ بأنها متوسط المجتمع بدل متوسط قيم المتغير X في المجتمع)، ولاحظ بأن μ في هذه الحالة ليس 2 (والذي يبدو بأنه المتوسط الاعتيادي للقيم$1,2,3,4,5$)؛ وذلك لأن التوزيع يضع أوزانا على بعض القيم($2,3$) أكثر من أخرى.

ملاحظة: ففي هذا المثال كانت القيمة المتوقعة(الأمل الرياضي أو متوسط المجتمع)2.79 ؛ وكما يبدو فهي ليست قيمة ممكنة للمتغير X ؛ فيجب الحذر عن تفسير كلمة (**التوقع**) لأننا لا نتوقع ظهور رؤية قيمة تبلغ2.79 عند اختيار طالب واحد من المجتمع.

مثال 45

بعد ولادة كل طفل يتم تقييمه على **مقياس و ابجر**[1] فتتراوح التقييمات الممكنة بين0 و10؛ وليكن المتغير العشوائي X هو نتيجة **مقياس و ابجر** للطفل المختار عشوائيا في مستشفى ما خلال فترة معينة؛ ولنفترض أن دالة الكتلة الاحتماليةpmf (التوزيع الاحتمالي) للمتغير العشوائي X كما في الجدول المقابل:

X	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
$p(x)$	0.002	0.001	0.002	0.005	0.02	0.04	0.18	0.37	0.25	0.12	0.01

فتكون قيمة متوسط المجتمع للمتغير العشوائي X هي:

$$\begin{aligned}E(X)=\mu_X=\mu&=0(0.002)+1(0.001)+2(0.002)+3(0.005)+4(0.02)+5(0.04)\\&+6(0.18)+7(0.37)+8(0.25)+9(0.12)+10(0.01)\\&=7.15\end{aligned}$$

وكما قلنا في الملاحظة أعلاه فإن هذا المتوسط$\mu=7.15$ ليس قيمة ممكنة للمتغير العشوائي X ؛ فإذا كان النموذج المذكور قريبا من الصحة بنسبة كبيرة فإننا نتوقع أن يكون متوسط مقياس وابجر لمجتمع كل الأطفال الذين سيولدون في هذا المستشفى للفترة القادمة هو$\mu=7.15$.

مثال 46

ليكن المتغير العشوائي$X=1$: إذا كان الجهاز المختار يحتاج لخدمة مابعد البيع و $X=0$ إذا كان لا يحتاج؛ فإذا كان احتمال أن يحتاج الجهاز لخدمة مابعد البيع هو p فإن المتغير العشوائي X من نوع **برْنُولّي** مع توزيع احتماليpmf : $p(1)=p,\ p(0)=1-p$ وذلك من: $E(X)=0\times p(0)+1\times p(1)=0(1-p)+1(p)=p$ ؛ أي أن القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X هي احتمال أن يأخذ هذا المتغير القيمة 1 فإذا استطعنا تصوير مجتمع ما بأنه يتكون من عددا معينا من القيمة0 بنسبة $(1-p)$ وعددا معينا من القيمة1 بنسبة(p) فيكون متوسط المجتمع هو: $E(X)=\mu=p$.

[1] فحص تقييمي للطفل حديث الولادة حيث يتم منح نقطتان لكل عنصر من العناصر الخمسة:(اللون، النشاط العضلي، التنفس، النبض ورد الفعل الانعكاسي).

هناك تفسير آخر يستخدم بكثرة لتفسير المتوسط μ ؛ ولنعتبر أن القيمة الأولى للمتغير العشوائي X وهي $x1$ والثانية هي $x2$ والثالثة هي $x3$ وهكذا لعدد كبير من القيم؛ فنحسب متوسط عينة هذه القيم الملاحَظَة وسيكون هذا المتوسط قريبا من القيمة المتوقعة μ ويمكن التفصيل في هذا الموضوع أكثر في عنصر قانون الأعداد الكبيرة؛ ويمكن تفسيرها على أنها القيمة المتوسطة على المدى الطويل للمتغير العشوائي X وذلك عندما يتم إجراء التجربة بشكل متكرر؛ وغالبا ما يكون هذا التفسير ملائما أكثر في ألعاب الحظ أين لا يكون مجتمع الدراسة مجموعة محددة من الأفراد والنتائج بل يكون نتائج لجميع الحالات الافتراضية للعب لعبة ما.

مثال 47

تحتوي لعبة الروليت الأمريكية العادية على38مربعا ويراهون اللاعبون على المربع الذي ستسقط فيه الكرة بمجرد تدوير العجلة؛ إذ يعتمد أبسط الرهانات على لون المربع (18أبيض و18أسود و02أخضر)، فإذا راهن لاعب على المربعات السوداء فسيكون لديه 18من38 فرصة للربح؛ وتعتبر الرهانات على الألوان متساوية أي إذا راهن اللاعب على بـ1 دولار على الأسود فسيفوز بـ1دولار إذا سقطت الرخامة في مربع أسود أو سيخسر 1 دولار إذا سقطت على المربع الأحمر.

وليكن المتغير العشوائي X هو العائد من1دولار المراهن به على الأسود فتكون دالة الكتلة الاحتماليةpmf للمتغير العشوائي X كما في الجدول المقابل؛ فتكون القيمة المتوقعة (المتوسط) للمتغير العشوائي X هي:

X	-1\$	+1\$
$p(x)$	$20/38$	$18/38$

$$E(X)=-1(20/38)+1(18/38)$$
$$=-2/38=-0.0526$$

فإذا قام اللاعب بالمراهنة على الأسود مرة أخرى لعدة مرات فسيتوقع في الأخير خسارة بمقدار0.0526دولار في كل رهان على المدى الطويل؛ وبما أن اللاعب لا يضع بالضرورة عددا كبيرا من الرهانات فهذا التفسير في المدى الطويل قد يكون أكثر ملاءمة من منظور مالك اللعبة فسيربح0.0526دولار في المتوسط على كل رهان من1دولار.

افتراض: لقد افترضنا في كل ماسبق وجود متوسط حسابي لأي توزيع؛ فماذا لو كانت مجموعة القيم المكنة للمتغير العشوائي X غير محدودة فيكون مجموع حساب الوسط μ_X سلسلة لا نهائية فقد لا يتوفر الوسط الحسابي للمتغير العشوائي X وذلك اعتمادا على تقارب وتباعد السلسلة.

مثال 48

في مثال المواليد)

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

مثال 39 كانت الصيغة العامة لدالة الكتلة الاحتمالية pmf (التوزيع الاحتمالي) (للمتغير العشوائي X: عدد المواليد إلى غاية ظهور أول مولود ذكر) هي: $p(x)=\begin{cases}(1-\alpha)^{x-1}\times\alpha & x=1,2,3,\ldots\\ 0 & x\neq 1,2,3,\ldots\end{cases}$

فالمتوسط أو القيمة المتوقعة تستلزم تقييم تجميع لانهائي:

$$E(X)=\sum_{x\in D}x\times p(x)=\sum_{x=1}^{\infty}xp(1-p)^{x-1}=p\sum_{x=1}^{\infty}x(1-p)^{x-1}=p\sum_{x=1}^{\infty}\left[-\frac{d}{dp}(1-p)^{x}\right]$$ **معادلة 08**

فإذا غيرنا ترتيب الاشتقاق والجمع في **معادلة 08**؛ فالجمع هو لمتتالية هندسية (وبالخصوص تتقارب المتتالية من أجل $0<p<1$)؛ وبعد حساب المجموع والاشتقاق فتكون النتيجة النهائية $E(X)=1/p$؛ وهذا هو العدد المتوقع للأطفال المولودين حتى النهاية (أي حتى ظهور ولد ذكر)؛ وهذا بديهي تمام لأنه حين يكون الاحتمال قريبا من الواحد الصحيح $p\cong 1$ فنتوقع أن يظهر وليد في القريب العاجل بينما حين يكون $p\cong 0$ فنتوقع عدة ولادات أخرى قبل ظهور الولد؛ وعند $p\cong 0.5$ فإن $E(X)=2$.

التمرين 48 في نهاية هذا الفصل يقدم طريقة بديلة لحساب متوسط هذا التوزيع الخاص.

مثال 49

ليكن المتغير العشوائي X: عدد مقابلات العمل التي يجريها الطالب حتى يتحصل على وظيفة؛ ويكون دالة الكتلة الاحتمالية pmf هي:

$p(x)=\begin{cases}\frac{k}{x^2} & x=1,2,3,\ldots\\ 0 & x\neq 1,2,3,\ldots\end{cases}$ ؛ حيث k هي: $\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{k}{x^2}\right)=1$ (وذلك لأن: $\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\pi^2}{6}$ وقيمة k هي $\frac{6}{\pi^2}$)

فتكون القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X هي:

$$\mu=E(X)=\sum_{x=1}^{\infty}x\frac{k}{x^2}=k\sum_{x=1}^{\infty}\frac{1}{x}$$ **معادلة 09**

إن الجمع على يمين **معادلة 09** السابقة هو متتالية توافقية شهيرة في الرياضيات ويمكن تبيان أنها تتباعد؛ وقيمة التوقع هنا $E(X)$ ليس منتهيا لأن الاحتمال $p(x)$ يتناقص ببطء مع زيادة X؛ ويقول الإحصائيون هنا بأن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X له ذيل ثقيل؛ فإذا تم اختيار سلسلة من قيم X باستخدام هذا التوزيع فإن متوسط العينة لن يستقر على عدد محدد من القيم بل سيميل نحو النمو دون قيود.

2.3.2. القيمة المتوقعة لدالة

غالبا ما ينصب الاهتمام بقيمة متوقعة لبعض الدوال $h(X)$ بدل الاهتمام بالمتغير X نفسه وفيما يلي مثالا عن كيفية حساب القيمة المتوقعة لدالة $h(X)$:

مثال 50

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

تعتمد تكلفة اختبار تشخيصي للسيارات على عدد الأسطوانات فيها X ؛ ولنفترض أن دالة التكلفة هي: $h(X)=20+3X+0.5X^2$ ؛ وبما أن X متغير عشوائي؛ فيكون $Y=h(X)$ ؛ فتكون دالة الكتلة الاحتمالية pmf للمتغير العشوائي X ودالة الكتلة الاحتمالية pmf للمتغير العشوائي Y

x	4	6	8
$p(x)$	0.5	0.3	0.2

y	40	56	76
$p(y)$	0.5	0.3	0.2

ونرمز بـ: D^* للقيم الممكنة للمتغير Y:

$$\begin{aligned}E(Y) &= E[h(X)]=\sum_{y\in D^*} y.p(y)\\ &=40(0.5)+56(0.3)+76(0.2)=52DA\\ &=h(4)(0.5)+h(6)(0.3)+h(8)(0.2)\\ &=\sum_{D^*} h(x).p(x)\end{aligned}$$

معادلة 10

وحسب المعادلة 10 أعلاه ليس من الضروري تحديد دالة الكتلة الاحتمالية pmf للمتغير العشوائي Y لإيجاد القيمة المتوقعة $E(Y)$ وبدلا من ذلك فإن $E(Y)$ المطلوبة هي المتوسط المرجح لقيم $h(x)$ (بدلا من X).

افتراض: إذا كان للمتغير العشوائي X مجموعة قيم ممكنة D ودالة كتلة احتمالية pmf هي $p(x)$ فإن القيمة المتوقعة لأي دالة $h(X)$ يرمز لها بـ $E[h(X)]$ أو $\mu_{h(X)}$ ؛ وتحسب كما يلي:

$$E[h(X)]=\sum_{D} h(x).p(x)$$

ويُشار إليه أحيانا على أنه قانون "الإحصائي اللاوعي"[1]

ووفقا لهذا الافتراض $E[h(X)]$ تحسب بنفس طريقة حساب $E(X)$ فقط باستبدال $h(x)$ مكان X ؛ أي أن $E[h(X)]$ هي المتوسط المرجح للقيم الممكنة $h(x)$.

مثال 51

محل حواسيب اشترى ثلاثة حواسيب بقيمة $25000DA$ للحاسوب الواحد وباعهم بقيمة $50000DA$ للحاسوب الواحد؛ ووافق الشركة المصنعة على شراء أي حاسوب لم يتم بيعه بعد فترة معينة بقيمة $10000DA$؛ ليكن المتغير العشوائي X عدد الحواسيب المباعة ولنفترض أن $p(0)=0.1,\ p(1)=0.2,\ p(2)=0.3,\ p(4)=0.4$ ؛ مع $h(X)=R-C$ أي العائد مطروحا منه التكاليف فيكون الربح المتوقع هو: $h(X)=R-C=50000X+10000(3-X)-75000=40000X-45000$

[1]- يمنحنا قانون الإحصائي اللاواعي "*Law of the Unconscious Statistician*" معادلة جيدة لحساب القيمة المتوقعة لدالة لمتغير عشوائي معين.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

$$E[h(X)] = h(0)p(0) + h(1)p(1) + h(2)p(2) + h(3)p(3)$$
$$= (40000(0) - 45000)(0.1) + (40000(1) - 45000)(0.2) + (40000(2) - 45000)(0.3)$$
$$+ (40000(3) - 45000)(0.4)$$
$$= 35000$$

ونظرا لأن القيمة المتوقعة هي عبارة عن مجموع فهي تمتلك نفس الخصائص مثل أي عملية جمع أخرى؛ وعلى وجه التحديد يمكن توزيع القيمة المتوقعة "عامل التشغيل *operator*" عبر الجمع والضرب بالثوابت؛ وتعرف هذه الخاصية المهمة باسم **خطية التوقع**.

خطية التوقع: من أجل أي دالتين $h_1(X)$ و $h_2(X)$ وأي ثوابت a_1، a_2 و b فإن: $E[a_1h_1(X)+a_1h_1(X)+b]=a_1E[h_1(X)]+a_2E[h_2(X)]+b$ ؛ وبالخصوص من أجل أي دالة خطية $aX+b$ فإن:

$$E(aX+b) = aE(X) + b$$ معادلة 11

(أو باستعمال الترميز البديل $\mu_{aX+b} = a\mu_X + b$)

الإثبات: ليكن $h(X)=a_1h_1(X)+a_1h_1(X)+b$ وبتطبيق الافتراض السابق نجد:

$$E[a_1h_1(X)+a_1h_1(X)+b] = \sum_D (a_1h_1(x)+a_1h_1(x)+b)\times P(x)$$
$$= a_1\sum_D h_1(x)\times p(x) + a_2\sum_D h_2(x)\times p(x) + b\sum_D p(x)$$
$$= a_1\times E[h_1(X)] + a_2\times E[h_2(X)] + b[1]$$

وبالتالي تكون الحالة الخاصة $aX+b$ متأتية من $a_1=a, h_1(X)=X$ و $a_2=0$ ؛ وبالاستقراء تنطبق خاصية خطية التوقع على أي عدد محدود الحدود ففي **مثال سابق** (ص61) يسهل حسابها:

$$E(X) = \sum x.p(x) = 4(0.5) + 6(0.3) + 8(0.2) = 5.4$$

ويكون: $E(X^2) = \sum x^2.p(x) = 4^2(0.5) + 6^2(0.3) + 8^2(0.2) = 31.6$ ؛ وبتطبيق مفهوم خطية التوقع على: $Y=h(X)=20+3X+0.5X^2$ نجد:

$$\mu_Y = E(20+3X+0.5X^2) = 20 + 3E(X) + 0.5E(X^2)$$
$$20 + 3(5.4) + 0.5(31.6) = 52$$

وهي نفسها في المثال السابق؛ حيث وفي خاصية التوقع السابقة تشير إلى أن القيمة المتوقعة لدالة خطية مساوية للدالة الخطية التي تم تقييمها عند القيمة المتوقعة $E(X)$ ؛ وبما أن $h(X)$ في مثال آخر (مثال51) تنص على قاعدتين مهمتين للقيمة المتوقعة:

- من أجل أي عدد ثابت a فإن $\mu_{aX} = a\mu_X$ إذا كان $b=0$؛
- من أجل أي عدد ثابت b فإن $\mu_{X+b} = \mu_X + b = E(X) + b$ إذا كان $a=1$.

إن مضاعفة X بأي عدد ثابت a يغير وحدة القياس (من الدينار للسنتيم إذا كان $a=100$) فالقاعدة الأولى السابقة تنص على أن القيمة المتوقعة بالوحدة الجديدة تساوي القيمة المتوقع بالوحدة القديمة مضاعفة بمعامل التحويل a ؛ وبالمثل فإنه إذا تمت إضافة عددا ثابتا b لكل قيمة ممكنة للمتغير

X فتكون القيمة المتوقعة بالوحدة الجديدة تساوي القيمة المتوقعة بالوحدة القديمة مضافا إليها العدد الثابت b.

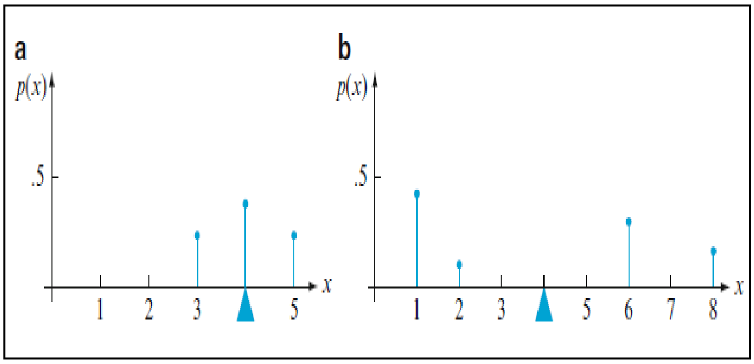
ومن بين الأخطاء الشائعة هو استبدال μ_X مباشرة في الدالة $h(X)$ حين تكون الدالة h **غير خطية** إذا لا ينطبق ذلك على حالتنا هذه؛ ونعود للمثال في(ص61) أي يكون متوسط X هو5.4 ومن المغري استنتاج أن متوسط $Y=h(X)$ هو $h(5.4)$ ومع ذلك بما أن الدالة ليست خطية $h(X)=20+3X+0.5X^2$ فهذا لا يقودنا للجواب الصحيح لأن:

$$h(5.4)=20+3(5.4)+0.5(5.4^2)=50.78$$

وكقاعدة عامة $\mu_{h(X)}$ تساوي $h(\mu_X)$ وذلك فقط حين تكون الدالة $h(X)$ خطية.

3.3.2. الانحراف المعياري

تصف القيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X المكان الذي يتمركز فيه التوزيع الاحتمالي وذلك باستخدام القياس المادي لوضع الكتلة النقطة $p(x)$ عند القيمة x على محور أحادي البعد؛ فإذا كان المحور مدعوما بنقطة ارتكاز عند القيمة المتوقعة μ فلن يكون هناك اتجاه للمحور نحو الميلان لجهة ما (يسار أو يمين القيمة المتوقعة μ) وهذا ما يبينه الشكلان المقابلان:



وعلى الرغم من امتلاك الشكلين المقابلين لنفس المتوسط(نقطة الارتكاز 04) إلا أن الثاني له انتشار أكبر أو تباين أو تشتت أو اختلاف فنسعى الآن للحصول على تقييم كمي لمدى انتشار التوزيع حول وسطه الحسابي (حول القيمة المتوقعة).

تعريف: ليكن المتغير العشوائي X بدالة كتلة الاحتمالية pmf مع قيمة متوقعة μ فيكون **تباين المتغير العشوائي** X (يرمز له بـ $Var(X)$ أو σ_X^2 أو فقط σ^2) هو:

$$Var(X)=\sum_D\left[(x-\mu)^2\times p(x)\right]=E\left[(x-\mu)^2\right]$$

ويكون الانحراف المعياري SD للمتغير العشوائي X (يرمز له بـ $SD(X)$ أو فقط σ_X) هو:

$$\sigma_X=\sqrt{Var(X)}$$

تعبر القيمة $(x-\mu)^2$ عن مربع انحراف المتغير العشوائي X عن وسطه الحسابي μ؛ والقيمة σ^2 تعبر عن القيمة المتوقعة لمربع الانحراف أي المتوسط المرجح لمربعات الانحراف عن الوسط الحسابي μ؛ إن أخذ الجذر التربيعي للتباين للحصول على الانحراف المعياري σ مما يعيدنا للوحدات الأصلية للمتغير؛

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التَبسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

فعلى سبيل المثال إذ تم قياس المتغير العشوائي X بالدولار فستكون وحدة كل من المتوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ بالدولار أيضا؛ وإذا كان معظم التوزيعات الاحتمالية قريبة من الوسط الحسابي μ كما في يسار الشكل السابق فإن الانحراف المعياري σ عادة ما يكون صغيرا نسبيا؛ ومع ذلك إذا وُجِدت قيم للمتغير العشوائي X بعيدة عن الوسط الحسابي μ (بقيم احتمالية كبيرة نسبية) فإن الانحراف المعياري σ سيكون أكبر.

<u>مثال 52</u>

بالعودة لمثال **مقياس و ابجر** (ص59) ولنعتبر توزيع المتغير العشوائي X للسحب العشوائي للأطفال حديثي الولادة؛ حيث (تم احتساب الوسط الحسابي $\mu=7.15$) فيكون التباين:

$$Var(X)=\sigma^2=\sum_{x=0}^{10}(x-7.15)^2\times p(x)$$
$$=(0-7.15)^2\times 0.002+....+(10-7.15)^2\times 0.01=1.5815$$

ويكون الانحراف المعياري: $SD(X)=\sigma=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{1.5815}=1.26$

والتفسير التقريب لـ σ أن قيمتها تعطينا الحجم النموذجي أو المعياري للبعد التمثيلي عن الوسط الحسابي μ (وبالتالي الانحراف المعياري)؛ ولأن $\sigma=1.26$ في هذا المثال فيمكننا القول بأن بعض القيم المكنة للمتغير العشوائي X تبتعد بأكثر من 1.26 وبعضها يبتعد بأقل من 1.26 عن قيمة الوسط الحسابي $\mu=7.15$ ؛ أي أن 1.26 هو هو الانحراف (معياري نموذجي متوسط) عن الوسط الحسابي **لمقياس و ابجر**.

<u>مثال 53</u>

نواصل في مثال لعبة الروليت الأمريكية (ص60) ونحسب تباين المتغير العشوائي X : قيمة العائد على الرهان ب1دولار على الأسود:

$$Var(X)=\sigma_X^2=((-1)-(-2/38))^2\times(20/38)+((+1)-(-2/38))^2\times(18/38)=0.9972$$

ويكون الانحراف المعياري: $SD(X)=\sigma=\sqrt{Var(X)}=\sqrt{1.5815}=0.9986141$

ولأن القيمتين الممكنتين الوحيدتين للمتغير العشوائي X هما (-1) و $(+1)$ ؛ وبما أن المراهنة على الأسود تكاد تكون متعادلة (الوسط الحسابي قريب من الصفر0.0526) فيكون الفرق النموذجي (الانحراف المعياري) بين العائد الحالي للمتغير العشوائي X والعائد المتوقع هو تقريبا1دولار

فيظهر هنا سؤال احتمالي طبيعي كم مرة يقع غالبا المتغير العشوائي X ضمن هذه المسافة النموذجية(انحراف معياري) عن المتوسط μ ؟؛ أي ماهي فرصة أو احتمال أن يقع المتغير العشوائي المتغير العشوائي X بين القيمتين($\mu_X-\sigma_X$ و $\mu_X-\sigma_X$) أي في مسافة ابتعاد الانحراف المعياري عن الوسط الحسابي سلبا وإيجابا)؟ وما هو احتمال أن يقع المتغير العشوائي في مسافة ابتعاد الانحراف المعياري عن

الوسط الحسابي بقيمتين للانحراف المعياري أي بين القيمتين($\mu_X - 2\sigma_X$ و $\mu_X - 2\sigma_X$)؟؛ وبالطبع لا توجد إجابة موحدة: وبالنسبة لدوال الكتل الاحتمالية pmf قد تظهر أحجام مختلفة للاحتمالات بحجم انحراف معياري1 أو 2 أو 3 للقيمة المتوقعة(الوسط الحسابي)؛ ومع ذلك فإن النظرية التالية تتناول جزئيا أسئلة من هذا النوع:

متباينة تشيبيتشيف[1]: ليكن X متغير عشوائي متقطع بوسط حسابي μ_X وانحراف معياري σ_X ، ولأجل أي قيمة $k \geq 1$ ؛ يكون:

$$P(|X-u| \geq k\sigma) \leq 1/k^2$$

مما يعني أن احتمال أن يبتعد المتغير العشوائي X عن وسطه الحسابي μ بقيمة انحراف معياري σ مضروبا في k ($k\sigma$) يساوي تقريبا $\frac{1}{k^2}$.

وبعبارة أخرى لكل متغير عشوائي احتمال بمقدار ($1-1/k^2$) أن يبتعد بمقدار k انحراف معياري σ ($k\sigma$) عن وسطه الحسابي:

الإثبات: لنرمز للحدث $|X-u| \geq k\sigma$ ؛ أو مجموعة القيم $\{x : |x-u| \geq k\sigma\}$ ونبدأ بكتابة تعريف التباين:

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_D \left[(x-\mu)^2 . p(x)\right] \\
&= \sum_A \left[(x-\mu)^2 . p(x)\right] + \sum_{A'} \left[(x-\mu)^2 . p(x)\right] \\
&\geq \sum_A \left[(x-\mu)^2 . p(x)\right] + \ldots\ldots !!!! \geq 0 \\
&\geq \sum_A \left[(k\sigma)^2 . p(x)\right] \ldots because (x-u)^2 \geq k\sigma \; in\, set A \\
&= (k\sigma)^2 \sum_A p(x) = (k\sigma)^2 P(A) = k^2\sigma^2 P(|X-u| \geq k\sigma)
\end{aligned}$$

إن مصطلح $Var(X)$ على الجانب الأيسر هو نفسه σ^2 في الجانب الأيمن؛ وباختزالهما من الطرفين يبقى لدينا $1 \geq k^2 P(|X-u| \geq k\sigma)$ وتنتج لدينا متباينة تشيبيتشف.

تنص **متباينة تشيبيتشيف** السابقة على أنه إذا كان $k=1$ فإن $P(|X-u| \geq \sigma) \leq 1$ وهنا هذا الاحتمال مقيد بـ$k=1$ ؛ ويمكن بناء توزيعات حيث يكون 100% من التوزيع يبتعد على الأقل بمقدار1واحد انحراف معياري عن الوسط؛ بحيث يكون للمتغير العشوائي X احتمال 0معدوم ليقع بأقل من 1واحد انحراف معياري عن الوسط وبوضع $k=2$ تصبح **متباينة تشيبيتشيف** أن احتمال أن يبتعد المتغير العشوائي بمقدار2انحرافين معياريين عن الوسط لا يمكن أن يتجاوز $1 \geq k^2 = 1/2^2 = 1/4 = 0.25$ أي 25% ؛ وبالمثل فإن لكل توزيع خاصية أن 75% من كتلته الاحتمالية تقع ضمن 2انحرافين معياريين عن قيمته المتوسطة (وفي الواقع يكون الاحتمال الدقيق أكبر من ذلك بالنسبة لكثير من التوزيعات).

[1]- نظرية لعالم الرياضيات الروسي *Pafnuty Chebyshev* وسميت باسمه متباينة أو متراجحة تشيبيشيف.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

4.3.2. خصائص الانحراف المعياري

توجد صيغة بديلة لتعريف التباين $Var(X)$ تقلل من مراحل وحدود العمليات الحسابية:

صيغة بديلة:

$$Var(X)=\sigma^2=E(X^2)-\mu^2$$

ويشار إلى هذه المعادلة بصيغة التباين المختصرة

وباستعمال هذه الصيغة يحسب $E(X^2)$ دون أي عملية طرح مسبقة ثم يحسب μ^2 ؛ ويطرح مرة واحدة من $E(X^2)$ ؛ ويُلاحظ أن هذه الصيغة أكثر فعالية لأننا نستعمل عملية الطرح مرة واحدة وكذلك $E(X^2)$ لا تتطلب حساب مربعات الانحرافات عن μ .

مثال 54

بالعودة لمثال مقياس و ابجر (ص59) و فنجد:

$$E(X^2)=\sum_{x=1}^{10} x^2\times p(x)=(0^2)(0.002)+(1^2)(0.001)+\ldots+(10^2)(0.01)=52704$$

أي أن: $\sigma^2=52704-(7.15)^2=1.5815$ وأن $\sigma=\sqrt{1.5815}=1.26$ كما وجدناهما سابقا(ص65).

إثبات الصيغة المختصرة للتباين:

نقوم بتوسيع $(X-\mu)^2$ في تعريف التباين $Var(X)$ ونطبق عليه خطية التوقع:

$$\begin{aligned}Var(X) &= E(X-\mu)^2 = E(X^2-2X\mu = +\mu^2)\\ &= E(X^2)-2\mu E(X)+\mu^2 = E(X^2)-2\mu\mu+\mu^2\\ &= E(X^2)-2\mu^2+\mu^2\\ &= E(X^2)-\mu^2\end{aligned}$$

إن الكمية $E(X^2)$ في الصيغة المختصرة للتباين تسمى قيمة متوسط المربع للمتغير العشوائي X ؛(ويعتاد المهندسين على جذر مربع المتوسط(root-meansquare) (RMS) والذي يعني جذر مربع $E(X^2)$)؛ والذي لا يتناقض مع مربع المتوسط μ^2 ؛ فمثلا: إذا كان للمتغير العشوائي X متوسط قدره (7.15) فقيمة متوسط المربع $E(7.15)^2$ ليست مربع المتوسط $(7.15)^2$ لأن الدالة $h(X)$ ليست خطية (ففي المثال السابق كانت قيمة متوسط المربع للمتغير العشوائي X هي $E(X^2)=52704$ مما يساعدنا على النظر للصيغتين ومقارنة كل جهة بجهة.

$$E(X^2)=\sum_D x^2\times p(x) \qquad \text{مقابل} \qquad \mu^2=\left(\sum_D (x)\times p(x)\right)^2$$

من الواضح أن ترتيب العمليات مختلف جدا؛ وفي الحقيقة يمكن تبيان أن(تمرين46) $E(X^2)\geq\mu^2$ ؛ مهما كان المتغير عشوائي؛ ويكون $E(X^2)=\mu^2$ فقط إذا كان X ثابتا.

تباين الدالة $h(X)$ هو القيمة المتوقعة لمربع الفروقات بين $h(X)$ وقيمتها المتوقعة:

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

$$Var[h(X)] = \sigma^2_{h(X)} = \sum_D \left[(h(x) - \mu_{h(X)})^2 \times p(x)\right]$$
$$= \sum_D \left(h^2(x) \times p(x)\right) - \left(\sum_D h(x) \times p(x)\right)^2$$

فعندما تكون الدالة $h(x)$ خطية فتكون للدالة $Var[h(X)]$ صيغة أبسط بكثير (تمرين43).

افتراض: إن $Var(aX+b) = \sigma^2_{aX+b} = a^2 \times \sigma^2_X$ وكذلك $\sigma_{aX+b} = |a| \times \sigma_X$ **معادلة 12**

وبالخصوص: $\sigma_{aX} = |a| \times \sigma_X$ وكذلك $\sigma_{X+b} = \sigma_X$

والقيمة المطلقة هنا مهمة جدا لأن a قد تكون سالبة بينما الانحراف المعياري لا يمكن أن يكون سالبا؛ وفي العادة يكون المضاعفة بقيمة a متعلقا بالتغير في وحدة القياس (من الكلغ للغرام أو بين الوحدات النقدية) فيكون الانحراف المعياري في الوحدة الجديدة هو الانحراف المعياري الأصلي في الوحدة القديمة مضروبا في عامل التحويل a؛ ومن جهة أخرى إضافة الثابت b لا يؤثر على التباين وهذا بديهي لأن إضافته تغير موقع قيمة المتوسط ولكن لا تؤثر على درجة وقيم الانتشار؛ وإن المعادلتين معا(معادلة 11 ومعادلة 12) تشملان على خصائص إعادة قياس الوسط الحسابي والانحراف المعياري.

مثال 55

في مثال بيع الحواسيب (مثال52) نجد:

$$\begin{aligned} E(X) &= 0p(0) + 1p(1) + 2p(2) + 3p(3) \\ &= (0)(0.1) + 1(0.2) + 2(0.3) + 3(0.4) \\ E(X) &= 2 \end{aligned}$$

ونجد أيضا:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 p(0) + 1^2 p(1) + 2^2 p(2) + 3^2 p(3) \\ &= (0)(0.1) + 1(0.2) + 4(0.3) + 9(0.4) \\ E(X^2) &= 5 \end{aligned}$$

فيكون التباين بالصيغة البديلة المختصرة للتباين:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - \mu^2 \\ &= 5 - (2^2) \end{aligned}$$

أو بالصيغة الأصلية:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E\left[(x-\mu)^2\right] = \sum_D \left[(x-\mu)^2 \times p(x)\right] \\ &= (0-2)^2 \times (0.1) + (1-2)^2 \times (0.2) + (2-2)^2 \times (0.3) + (3-2)^2 \times (0.4) \\ &= 0.4 + 0.2 + 0 + 0.4 = 1 \end{aligned}$$

وكانت دالة الربح $Y = h(X) = 4000X - 4500$ خطية لذلك يتم تطبيق **معادلة** 12 باستخدام القيم $a = 4000$ و $b = -4500$ ومن ثم فإن الدالة $Y = h(X)$ لها تباين:

$$Var(aX+b) = \sigma^2_{aX+b} = a^2 \times \sigma^2_X = (4000)^2 \times (1) = 1{,}6 \times 10^9$$

والانحراف المعياري هو $SD(aX+b) = \sigma_{aX+b} = |a| \times \sigma_X = |4000| \times (1) = 4000$

أو هو $SD(aX+b)=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{1{,}6\times10^{9}}=4000$

5.3.2. تمارين المحور (القيمة المتوقعة والانحراف وخصائصهما المتغير العشوائي المنفصل والتوزيعات الاحتمالية)

29: بناءا على معطيات مثال ذاكرة محركات الأقراص(ص51) والتي أعطيت لنا على شكل جدول من خلال متغير عشوائي X يتمثل في حجم الذاكرة ودالة كتلته الاحتمالية

X	01	02	04	08	16
$p(x)$	0.05	0.10	0.35	0.40	0.10

- أحسب وفسر القيمة المتوقعة (أو الوسط الحسابي) $E(X)$ ؛
- أحسب التباين $Var(X)$ مباشرة من التعريف؛
- أوجد وفسر الانحراف المعياري $SD(X)$ للمتغير العشوائي X ؛
- أحسب التباين $Var(X)$ باستعمال الصيغة المختصرة.

33: ليكن X متغير عشوائي من نوع(Bernoulli) بدالة كتلة احتمالية مبينة في مثال سابق(مثال47)

- أحسب $E(X^2)$ ؛
- بين أن $Var(X)=p(1-p)$ ؛
- أحسب $E(X^{79})$.

30: يتم اختيار شخص عشوائي من بين المؤمنين في شركة تأمين حيث يكون المتغيرY هو عدد مخالفات السير التي حصل عليها خلال الثلاث سنوات الماضية؛ ولتكن الكتلة الاحتمالية مبينة في الجدول:

X	0	1	2	3
$p(x)$	0.60	0.25	0.10	0.05

- أحسب $E(X)$ ؛
- ولنفترض أن فردا لديه y مخالفة يتعرض لغرامة قدرها $100y^2$ أحسب قيمة الغرامة المتوقعة.

31: يتم اختيار

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

3.التوزيعات الاحتمالية

1.3. التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل

1.1.3. *التوزيع الثنائي(Binomial)* (ونصطلح عليه أيضا باسم توزيع ذي الحدين)

تتوافق العديد من التجارب تقريبا توافقا شبه كلي مع قائمة المتطلبات التالية:

- تتكون التجربة من سلسلة من n تجارب أصغر تسمى المحاولات، حيث تكون n ثابتة قبل البدء في التجربة؛
- كل محاولة يمكن أن تؤدي إلى واحدة من نفس النتيجتين المحتملتين (تجارب ثنائية التفرع)، والتي نشير إليها بالنجاح S أو الفشل F؛
- المحاولات مستقلة وبالتالي فإن نتيجة أي محاولة لاتؤثر في نتيجة في أي محاولة أخرى؛
- احتمال النجاح ثابت من محاولة لأخرى (محاولات متجانسة)؛ ونرمز لهذا الاحتمال بالرمز p .

تعريف: تسمى أي تجربة لديها عدد ثابت من المحاولات الثنائية التفرع المتجانسة والمستقلة وتحقق الشروط السابقة بالتجارب الثنائية (ذات الحدين).

مثال 56

تم رمي نفس القطعة النقدية n مرة ونرمز بالرمز S لحالة النجاح (ظهور صورة) ونرمز بالرمز F لحالة الفشل (ظهور رقم)؛ فتكون هذه التجربة مُحَقِّقَة للشروط الأربعة السابقة كذلك يؤدي رمي دبابيس طبعة إلى نفس النتيجة، وتتضمن بعض التجارب سلسلة من التجارب المستقلة والتي لها أكثر من نتيجتين محتملتين لكل محاولة واحدة؛ يمكن بعد ذلك إنشاء تجربة ثنائية (ذات الحدين) بتقسيم النتائج المحتملة إلى مجموعتين.

مثال 57

لدى طالب جهاز تسجيل واستماع يحوي 50أغنية تم تسجيل 35 منها قبل عام2020 وتم تسجيل الخمسة عشر الباقية بعد عام2020؛ ولنفترض أن وظيفة التشغيل التلقائي تستخدم لتحديد خمس أغاني فقط لاستماعها خلال مدة ما وإذا اعتبرنا أن اختيار كل أغنية عبارة عن تجربة وافترضنا أن التجربة تعتبر ناجحة إذا تم اختيار الأغنية المسجلة قبل عام2020؛ فسيكون احتمال نجاح التجربة في الاختيار الأول هو:

$$p(S_1)=p(s)=\frac{35}{50}=0.70$$

واحتمال نجاح التجربة في الاختيار الثاني هو:

$$P(S_2)=p(SS)+P(FS)=\frac{35}{50}\times\frac{34}{49}+\frac{15}{50}\times\frac{35}{49}=0.70$$

واحتمال نجاح التجربة في الاختيار الثالث هو:

$$P(S_3)=p(SSS)+P(FSS)+P(SFS)+P(FFS)=$$
$$(\frac{35}{50}\times\frac{34}{49}\times\frac{33}{48})+(\frac{15}{50}\times\frac{35}{49}\times\frac{34}{48})+(\frac{35}{50}\times\frac{15}{49}\times\frac{34}{48})+(\frac{15}{50}\times\frac{14}{49}\times\frac{35}{48})=0.70$$

وبالمثل يمكن إثبات أن احتمال نجاح التجربة في الاختيار الخامس هو:

$p(S_{i5})+0.70$

لأن المحاولات متجانسة؛ ومع ذلك احتمال النجاح في المحاولة الخامسة حين نجاح المحاولات السابقة هو: $\frac{31}{46}=0.67$ ؛ بينما النجاح في المحاولة الخامسة مع فشل كل المحاولات السابقة هو: $\frac{35}{46}=0.76$ ؛ فالتجربة ليست ثنائية أو ذات الحدين لأن المحاولات ليست مستقلة؛ وبصفة عامة إذا كانت المعاينة (سحب العينات دون تكرار) فلن تسفر التجربة عن استقلالية في المحاولات (أي عند تكرار التجربة) أم لو تم اختيار الأغاني بالتكرار فستكون المحاولات مستقلة وقد يؤدي ذلك للاستماع لنفس الأغنية عدة مرات.

مثال 58:

لنفترض وجود 500سائق مرخص؛ منهم 400مؤمنين؛ فإذا سحبنا عينة من 10 سائقين دون تكرار سنشير للسحب رقم i بالرمز S إذا كان السائق رقم i المختار مؤمنا (كما في المثال السابق)؛ والفرق أن حجم المجتمع المسحوبة منه العينة كبير جدا مقارنة بحجم العينة وفي هذه الحالة سيكون:

$$p(S_{i2}S_{i1})=\frac{399}{499}\approx0.80 \quad \text{وكذلك} \quad p(S_{i10}/S_{i9})=\frac{391}{491}\approx0.80$$

ومن خلال هذا الحساب قد نستنتج أن السحوبات ليست مستقلة إلا أن الاحتمال الشرطي يختلف من واحد لآخر بشكل طفيف جدا ولذلك ولأغراض عملية يمكن اعتبار أن السحوبات مستقلة باحتمال ثابتة0.8 وهذا يمكن اعتباره تقريب جيد وأن التجربة ذات حدين مع n=10 وp=0.8

وسنستعمل القاعدة التالية لتقرير ما إذا كانت تجربة دون تكرار يمكن اعتبارها تقريب لذات الحدين؛

قاعدة: لنعتبر معاينة دون تكرار من مجتمع ثنائي التفرع حجمهN فإذا كان حجم السحوبات أقل من $0.05/N$ فيمكن تحليل التجربة على أساس أنها تجربة ثنائية أو ذات حدين بشكل تام.

ونعني بكلمة "يتم تحليلها" أن الاحتمالات القائمة على افتراضات تجربة التفرع الثنائي (ذات الحدين بينوميال) ستكون قريبة للاحتمالات الحالية (دون تكرار)؛ والتي عمليا يصعب حسابها ففي المثال قبل السابق كانت $n/N=5/50=0.1$ لذلك فتجربة بينوميال ليس تقريبا جيدا بينما في المثال السابق $n/N=10/500=0.02<0.05$.

1.1.1.3. المتغير العشوائي ذي الحدين والتوزيع الاحتمالي

في أغلب التجارب الثنائية يهمنا عدد مرات النجاح أكثر من معرفة التجارب التي نجحت بالضبط؛

تعريف: تبعا لتجربة ثنائية الحد تتكون من n محاولة (سحب عينة حجمهاn) المتغير العشوائي X ثنائي الحد المرتبط بهذه التجربة يعرف كما يلي:

X: عدد مرات النجاح خلالn محاولة.

ولنفترض مثلا أن n=3 فسيكون هناك8نتائج ممكنة للتجربة:

$$\Omega=\{SSS,SSF,SFS,SFF,FSS,FSF,FFS,FFF\}$$

ومن خلال تعريف المتغير X فإن $X(SSF)=2$ و$X(SFF)=1$ وهكذا لبقية العناصر فتكون القيم الممكنة للمتغير X في n محاولة هي $x=0,1,2,\ldots,n$

ترميز: سنكتب $X\approx B(n,p)$ لنشير إلى أن X هو متغير عشوائي ثنائي الحد قائم على n محاولة (سحب عينة حجمها n) باحتمال نجاح p؛ لأن دالة الكتلة الاحتمالية pmf للمتغير العشوائي ثنائي الحد X تعتمد على معلمتين n و p؛ فنرمز لدالة الكتلة الاحتمالية بـ $b(x;n,p)$.

وسيكون هدفنا التالي هو اشتقاق صيغة لدالة الكتلة الاحتمالية لمتغير عشوائي ثنائي الحد؛ ونعتبر أولا n=4 ولكل نتيجة ممكن احتمال وقيمة متغير في الجدول المقابل والذي يبين نتائج واحتمالات تجربة ثنائية الحد من أربع سحوبات؛ ومحاولات مستقلة باحتمال ثابت(p(S)).

Outcome	x	Probability	Outcome	x	Probability
SSSS	4	p^4	*FSSS*	3	$p^3(1-p)$
SSSF	3	$p^3(1-p)$	*FSSF*	2	$p^2(1-p)^2$
SSFS	3	$p^3(1-p)$	*FSFS*	2	$p^2(1-p)^2$
SSFF	2	$p^2(1-p)^2$	*FSFF*	1	$p(1-p)^3$
SFSS	3	$p^3(1-p)$	*FFSS*	2	$p^2(1-p)^2$
SFSF	2	$p^2(1-p)^2$	*FFSF*	1	$p(1-p)^3$
SFFS	2	$p^2(1-p)^2$	*FFFS*	1	$p(1-p)^3$
SFFF	1	$p(1-p)^3$	*FFFF*	0	$(1-p)^4$

في هذه الحالة الخاصة نحدد $b(x;4,p)$ لكل قيم المتغير 0.1.2.3.4×؛ ففي $b(3;4,p)$ مثلا نحدد ماهي النتائج (من بين16) والتي تضم القيمة3=x ومجموع الاحتمالات المرتبطة بكل نتيجة مثلها:

$$b(3;4,p)=P(FSSS)+P(SFSS)+P(SSFS)+P(SSSF)=4p^3(1-p)$$

فلدينا أربع نتائج تشير إلى3=x ولكل منها احتمال قدره $p^3(1-p)$ فالاحتمالات تعمد على عدد النجاحات وليس على ترتيبها مع الفشل لذلك يكون:

$b(3;4,p)$ هو عدد النتائج التي بها 3نجاحات مضروبا في احتمال كل نتيجة ذات3=X (والتي هي متساوية قانونا) وبالمثل $b(2;4,p)=6p^2(1-p)^2$ والتي هي أيضا ضرب عدد النتائج التي بها2نجاحين مضروبا في احتمال كل نتيجة (الاحتمالات متساوية قانونا)

وبصفة عامة: $b(x;n,p)$ هو (عدد السلاسل التي طولها n وتتكون من عدده x من النجاحات S) مضروبا في (احتمال كل تسلسل معين)

نظرية: التوزيع الثنائي

$$b(x;n,p)=\begin{cases}C_n^x p^x(1-p)^{n-x} & x=0,1,2\ldots n\\ 0 & x\neq 0,1,2\ldots n\end{cases}$$

مثال 59

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

يتم توزيع نوعين من الكولا S و F على ستة أفراد (يفرق بينهما من خلال رمز أسفلهما لا يظهر للعيان ويفترض عدم وجود ميل لتفضيل مشروب على آخر أي أن التوزيع عشوائي) فيكون $p=P(S)=0.50$ ويكون المتغير X هو عدد الأفراد المفضلين المشروب S: أي $X\approx Bin(6,0.5)$ فيكون على سبيل المثال:

$$P(X=3)=b(3;6,0.5)=C_6^3(0.5)^3(0.5)^3=20(0.5)^6=0.313$$

فيكون احتمال تفضيل ثلاثة أفراد على الأقل للمشروب S هو:

$$P(X\geq 3)=\sum_{x=3}^{6}b(x;6,0.5)=C_6^x(0.5)^x(0.5)^{6-x}$$
$$=(C_6^3+C_6^4+C_6^5+C_6^6)(0.5)^6$$
$$=(20+15+6+1)0.0156=0.656$$

وهذا تم باستخراج التوليفات كعامل مشترك فقط لأن: $p^x=(1-p)^{n-x}$

واحتمال أن يفضل فرد واحد على الأكثر للمشروب S هو:

$$P(X\leq 1)=\sum_{x=0}^{1}b(x;6,0.5)=C_6^x(0.5)^x(0.5)^{6-x}$$
$$=(C_6^0+C_6^1)(0.5)^6$$
$$=(6+1)0.0156=0.109$$

2.1.1.3. حساب احتمالات ذي الحدين

حتى بالنسبة لقيم صغيرة نسبيا من n يمكن أن يكون حساب احتمالات ذي الحدين مُمِلًّا لذلك تتوفر برامج وجداول إحصائية خصّيصا لهذا الغرض؛ وكلاهما يوفر دالة التوزيع التراكمية cdf: $F(x)=P(X\leq x)$ وحدها أو مع دالة الكتلة الاحتمالية pmf ويمكن أيضا حساب مختلف الاحتمالات الأخرى (عنصر آخر ص47)

ترميز: من أجل $X\approx Bin(n,p)$ يتم الإشارة لدالة التوزيع التراكمية بالترميز

$$B(x;n,p)=P(X\leq x)\sum_{y=0}^{x}b(y;n,p)\qquad x=0,1\ldots n$$

يقدم الجدول المقابل خوارزميات إجراء الحسابات في كل من برنامجي R و*Matlab*؛ والملحق رقم 02 يبين جدول الاحتمالات التراكمية cdf للتوزيع الثنائي من أجل $n=5,10,15,20,25$ مع توليفة احتمالات مختارة بقيم p.

الدالة	دالة التوزيع الاحتمالي (الكتلة الاحتمالية) pmf	دالة التوزيع التراكمية cdf
الرمز	b(x; n; p)	B(x; n; p)
الدالة في الإكسل	=binom.dist(x; n; p; false)	=binom.dist(x; n; p; true)

مثال 60:

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

افترض أن 20% من جميع نسخ الكتاب المدرسي فشلت في اختبار قوة الربط (*binding strength test*) وليكنX: عدد النسخ التي فشلت في اختبار الربط من بين15 نسخة مختارة؛ فيكونX متغير عشوائي يتبع التوزيع الثنائي$n=15$ و$p=0.20$ ؛ فيكون مثلا:

- احتمال فشل8 نسخ على الأكثر من بين15 المختارة هو:

يستخرج من جدول التوزيع الثنائي من تقاطع عمود$p=0.20$ وسطر$x=8$ في جزء$n=15$ ؛ وفي الإكسل يُكتب في أي خانة$binomdist(8;15;0.2;true)$ فنجد في كلا الطريقتين:

$$P(X\leq 8)=\sum_{y=0}^{8}b(y;15,.2)=B(8;15,.2)=0.9992$$

- حساب احتمال فشل ثماني نسخ تماما؛

$$P(X=8)=P(X\leq 8)-P(X\leq 7)=0.9992-0.9958=0.0034$$

- حساب احتمال على الأقل ثماني نسخ تماما؛

$$P(X\geq 8)=1-P(X\leq 7)=1-0.9958=0.0042$$

- حساب احتمال فشل 4إلى 7 نسخ تماما؛

$$\begin{aligned}P(4\leq X\leq 7)&=P(X\leq 7)-P(X<4)\\&=P(X\leq 7)-P(X\leq 3)\\&=0.9958-0.6482=0.3476\end{aligned}$$

لاحظ في الاحتمال الأخير أننا استعملنا الفرق بين دوال التوزيع التراكمية للقيم7و3 وليس للقيم 7و4 لأن المتغير متقطع والقيمة 4 متضمنة لذلك نطرح القيمة3وأقل منها.

<u>مثال 61</u>

يدعي مصنع أن للإلكترونيات أن 10% من منتجاته تحتاج لخدمة مابعد البيع خلال فترة الضمان؛ للتحقيق في هذا الادعاء؛ يختبر الفنيون المبيعات في معمل الاختبار 20وحدة في الاختبار السريع لمحاكاة الاستخدام خلال فترة الضمان؛ وليكنp احتمال حاجة المنتوج لخدمة مابعد البيع؛ أي هل البيانات الناتجة عن التجربة تدعم الادعاء بأن$p\leq 0.10$ ؛ وليكن X عدد المنتجات التي تحتاج للإصلاح من بين ال20 وحدة المختارة فيكون$X\approx Bin(20,0.10)$ ؛ وبعد وضع في اعتبارنا قاعدة القرار التالية:

- نرفض الادعاء بأن$p\leq 0.10$ ونقبل $p>0.10$ إذا كان $x\geq 5$
- ونقبل الادعاء إذا كان: $x\leq 4$

احتمال أن يرفض الادعاء عند$p=0.10$ (نتيجة غير صحيحة) هو:

$$\begin{aligned}P(X\geq 5\,|\,p=0.10)&=1-B(4;20,0.10)\\&=1-0.9568=0.0432\end{aligned}$$

احتمال أن <u>لا</u> يرفض الادعاء عند$p=0.10$ (نوع آخر من النتائج غير الصحيحة) هو:

$$P(X\leq 4\,|\,p=0.20)=B(4;20,0.20)=0.630$$

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

الاحتمال الأول صغير نوعًا ما ، لكن الثاني كبير بشكل لا يطاق. عندما تكون p=0.20 ، بحيث تكون الشركة المصنعة قد قللت بشكل كبير من النسبة المئوية للوحدات التي تحتاج إلى خدمة ما بعد البيع، وباستخدام قاعدة القرار المنصوص عليها فإن 63٪ من جميع عينات ذات حجم 20 ستؤدي إلى الحكم على مطالبة الشركة المصنعة بأنها معقولة.

قد يدرك المرء أن احتمال هذا النوع الثاني من الاستنتاج الخاطئ يمكن تقليله عن طريق تغيير قيمة القطع 5 في قاعدة القرار إلى شيء آخر. ومع ذلك ، على الرغم من أن استبدال 5 بعدد أصغر من شأنه أن ينتج عنه بالفعل احتمال أصغر من 0.630 ، فإن الاحتمال الآخر سيزداد بعد ذلك. الطريقة الوحيدة لجعل كلٍّ من "احتمالات الخطأ" صغيرة هي تأسيس قاعدة القرار على تجربة تتضمن العديد من الوحدات (أي بزيادة n)

3.1.1.3. الوسط والتباين لمتغير عشوائي من نوع ذي الحدين

من أجل $n=1$ فإن توزيع ذي لحدين يصبح توزيع **برنولي** فمن مثال سابق(ص59) فإن قيمة الوسط لمتغير برنولي هي $\mu=p$ فيكون العدد المتوقع لمرات النجاح S لكل محاولة واحدة (سحب واحد) هو p وبما أن توزيع ذي الحدين يتكون من n محاولة أو سحب فمنطقيا بالنسبة للمتغير $X\approx Bin(n,p)$ يكون $E(X)=np$ أي ضرب عدد المحاولات (عدد المسحوبات) في احتمال النجاح في كل سحبة؛ أما التعبير عن التباين $Var(X)$ فليس بهذا الوضوح؛

اقتراح: إذا كان $X\approx Bin(n,p)$ فإن $E(X)=np$ والتباين يساوي $Var(X)=np(1-p)=npq$ فيكون الانحراف المعياري $SD(X)=\sqrt{npq}$ حيث $q=(1-p)$

لذلك فإن إثبات صيغة الوسط والتباين لمتغير من نوع ثنائي الحد لا يحتاج لتفصيل كبير كما في عنصر سابق (ص58) وإثباتها في التمرين 74.

مثال 62

إذا كانت 75% من كل المشتريات تمت ببطاقة بنكية وكان X عدد المشتريات بالبطاقة من 10 عناصر مشتراة مختارة فيكون $X\approx Bin(10,0.75)$ لذلك يكون $E(X)=np=10*0.75=7.5$ بينما التباين هو $Var(X)=\sigma^2=npq=10*0.75*0.25=1.875$ والانحراف المعياري $SD(X)=\sigma=\sqrt{1.875}=1.369$.

وحتى لو كانت قيم المتغير تأخذ قيما صحيحة فإن الوسط الحسابي لا يستلزم أن يكون قيمة صحيحة؛ ولو قمنا بعدد كبير من التجارب في كل مرة نسحب عينة من 10 مشتريات باحتمال 0.75 فستكون القيمة المتوقعة(الوسط الحسابي) لعدد مرات النجاح في كل تجربة هو 7.5 بالتقريب.

أحد التطبيقات المهمة لتوزيع ذي الحدين هو تقدير دقة الاحتمالات المجراة(*simulated*) (كما في مولد الأعداد العشوائية) وتعريف التردد النسبي للاحتمال يبرر تعريف تقدير الاحتمال $P(A)$ بـ $\hat{P}(A)=X/n$

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

حيث n هو عدد مرات تشغيل برنامج المحاكاة وX هو عدد مرات ظهور الحدثA في كل مرة يتم تشغيل برنامج المحاكاة؛ وبافتراض أن عدد مرات التشغيل مستقلة عن بعضها (وهي كذلك عادة) فإن المتغير العشوائيX هو ذو توزيع ثنائي بمعلمةn وp=P(A)؛ ومن الاقتراح السابق وخصائص قياس الوسط والتباين نجد:

$$E(\hat{P}(A))=E(X/n)=\frac{1}{n}E(X)=\frac{1}{n}pn=p=P(A)$$

وبالتالي فإننا نتوقع أن تتطابق قيمة تقديرنا مع الاحتمال المقدر؛ بمعنى لا يوجد سبب لتكون $\hat{P}(A)$ نظاميا أقل أو أكبر من $P(A)$ ؛ وكذلك:

$$SD(\hat{P}(A))=SD(X/n)=\left|\frac{1}{n}\right|SD(X)=\frac{1}{n}\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\sqrt{\frac{P(A)[1-P(A)]}{n}}$$

ويسمى التعبير السابق بالخطأ المعياري لـ$\hat{P}(A)$ وهو تعبير مرادف للانحراف المعياري ويشير إلى الحجم الذي يختلف به تقدير $\hat{P}(A)$ عادة عن الاحتمال الحقيقي $P(A)$ ؛ ومع ذلك فهذا التعبير غير مستعمل (غير مفيد)كثيرا في العادة؛ فغالبا مانحاكي الاحتمال عندما يكون $P(A)$ غير معروف مما يمنعنا من استعمال المعادلة السابقة، وكحل نستبدل تقدير $\hat{P}=\hat{P}(A)$ بالتعبير ونجد $SD(\hat{P}(A))\approx\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ؛ وتعتبر هذه الصيغة مهمة جدا والتي تقترب من الصفر كلما زاد عدد مرات التشغيلn.

4.1.1.3. حسابات توزيع ذي الحدين باستعمال البرامج ()

باستخدام ماطلاب وR وexcel وبمعادلات معينة لتقييم وإيجاد دوال الكتلة الاحتمالية ودوال التوزيع التراكمية للتوزيع الثنائي وغيره من التوزيعات ونختار فيما يلي الإكسل والذي حسبنا به أيضا جدول التوزيع الاحتمالي لتوزيع عذي الحدين في الملاحق آخر المطبوعة؛

الدالة	دالة التوزيع الاحتمالي (الكتلة الاحتمالية)*pmf*	دالة التوزيع التراكمية *cdf*
الرمز	b(x; n; p)	B(x; n; p)
الدالة في الإكسل	=binom.dist(x; n; p; false)	=binom.dist(x; n; p; true)

5.1.1.3. تمارين المحور(التوزيع الثنائي)

49: حدد ما إذا كانت المتغيرات التالية تتبع توزيعا ثنائيا أم لا وحدد معالمه(n وp) إن أمكن:

- عدد مرات ظهور الرقم4 عند رمي قطعة نرد معتدلة 10مرات؛
- عدد الإجابات الصحيحة التي يحصل عليها الطالب في أسئلة ذات اختيار متعدد(40سؤال) بأربع خيارات لكل منها وذلك بمجرد التخمين؛
- نفس السؤال السابق ولكن لنصف الأسئلة أربع خيارات وللنصف الآخر ثلاث خيارات فقط؛
- عدد الطالبات في معاينة عشوائية من قسم به20طالبة و15طالبا؛
- الوزن الإجمالي لـ15تفاحة مختارة عشوائية؛
- عدد التفاحات التي تزن أكثر من 150غرام في عينة عشوائية من15تفاحة.

50: أحسب احتمالات لتوزيع الثنائية التالية:

$$P(3\le X\le 5)///n=8,\ p=0.6 \qquad b(3;8,0.6) \qquad b(3;8,0.6)$$
$$P(1\le X)///n=12,\ p=0.1$$

51: استعمل جدول التوزيع الاحتمالي في الملحق رقم02 أو برنامج الإكسل لإيجاد الاحتمالات التالية:

$$P(2\le X\le 4)\to X\approx Bin(10,0.3) \qquad b(6;10,0.7) \qquad b(4;10,0.3) \qquad B(4;10,0.3)$$
$$P(X\le 1)\to X\approx Bin(10,0,7)\ \ P(2\le X)\to X\approx Bin(10,0.3)$$
$$P(2<X<6)\to X\approx Bin(10,0.3)$$

52: ليكنX متغير عشوائي يعبر عن عدد المكونات المعيبة في عينة من حجم25 باحتمال المعيب هو0.05:

- أحسب $P(2\le X)\to X\approx Bin(25,0.05)$ ؛
- أحسب $P(X\ge 5)\to X\approx Bin(25,0.05)$ ؛
- أحسب $P(1\le X\le 4)\to X\approx Bin(25,0.05)$
- ماهو احتمال أن لا نجد أي جزء معيب؛
- أحسب التوقع والانحراف المعياري للمتغير.

53: من تجارب سابقة تعرف الشركة أن 10% من منتجها يكون معيبا؛ فإذا تم اختيار 6 وحدات من المنتج:

- ماهو احتمال أن يكون على واحد منها معيبا؛
- ماهو احتمال أن يكون على الأقل اثنان منها معيبا؛
- إذا تم اختبار الوحدات بالتتابع واحدا واحدا ماهو احتمال أن يتم اختيار خمس لإيجاد واحدة غير معيبة.

54: لنفترض أن25% من السائقين يتوقفون عند الإشارة الحمراء(توقف تام)؛ عند اختيار 20سيارة عشوائية:

- ماهو احتمال أن يتوقف 6على الأكثر عند الإشارة؟
- ماهو احتامل أن يتوقف06فقط عند الإشارة؟

- ماهواحتمال أن يتوقف06 على الأكثر عند الإشارة ؟؛

55: لنفترض أن25% من السائقين يتوقفون عند الإشارة الحمراء؛ عند اختيار 20سيارة عشوائية في التقاطع:

- ماهو عدد السائقين المتوقع أن يتوقفوا عند الإشارة؟
- ماهو الانحراف المعياري لعدد السائقين الذين سيتوقفون عند الإشارة؟
- ماهو احتمال أن يختلف عدد السائقين المتوقفين عند الإشارة عن العدد المتوقع بأكثر من2SD؟

56: لنفترض أن30% من الطلبة الذين سيجتازون امتحان الإحصاء03 يحتاجون لنسخة جديدة (مدانون) من المطبوعة بينما70% لا يحتاجون(غير مدانين)؛ فإذا تم شراء 25نسخة عشوائيا؛

- ماهي قيمة المتوسط والانحراف المعياري لعدد الطلبة الذين يحتاجون لنسخة جديدة؟؛
- ماهو احتمال أن يكون عدد الطلبة الذين يحتاجون لنسخة جديدة أكثر من المتوسط بانحرافين معياريين؟؛
- لدى المكتبة15 نسخة جديدة و15نسخة قديمة؛ فإذا تقدم الطلبة للمكتبة واحدا واحدا فما هو احتمال أن يحصل كل الطلبة على النسخة التي يرغبون فيها؟ (Xعدد الذين يرغبون في نسخة جديدة فما هي قيمةX التي عندها يحصل كل الطلبة على مايرغبون؟)؛
- إذا تكلفت النسخة الجديدة100$ والقديمة70$ وافترضنا أن المكتبة لديها50نسخة جديدة و50نسخة قديمة فماهي القيمة المتوقعة لإجمالي الدخل من بيع25 نسخة؟((h(X الدخل العائد من رغبة X من25فردا في نسخة جديدة(عبر عن ذلك بشكل دالة خطية)).

57: لنفترض في تمرين سابق(ص70) لدين دالة الكتلة الاحتمالية لـy عدد المخالفات المرورية لفرد مختار عشوائيا مؤمن من قبل شركة ما؛ ماهو احتمال من بين15 فردا مختارا عشوائيا أن يكون:

- على الأقل 10 ليس لديهم مخالفات؛
- أقل من النصف لديهم مخالفة واحد على الأقل؛
- عدد الذين لديهم على الأقل مخالفة واحدة بين5و10؛

2.1.3. توزيع بواسون(Poisson)

تم استخراج توزيع ذي الحدين من البدء في تجربة تتكون من محاولات (سحوباتn) وتطبيق قوانين الاحتمالات لمختلف نتائج التجربة؛ ولا توجد تجربة بسيطة يمكن يعتمد عليها توزيع بواسون؛ ورغم ذلك سنصف باختصار كيف يمكننا الحصول عليه من التوزيع الثنائي (توزيع ذي الحدين) عدد محدد من العمليات.

تعريف: يكون المتغير العشوائي خاضعا لتوزيع بواسون* بمعلمة $\mu(\mu>0)$ فقط إذا كانت (التوزيع الاحتمالي) دالة الكتلة الاحتمالية للمتغير العشوائي X هي:

$$P(x;\mu)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!} \qquad x=0,1,2....$$

وسنرى بأن μ ماهي إلا القيمة المتوقعة للمتغير؛ لذلك فالترميز μ هنا يتوافق مع استخدامنا السابق له؛ لأن μ يجب أن يكون موجبا؛ و $P(x;\mu)>0$ لكل القيم الممكنة للمتغير؛ وحقيقة أن $\sum_{x=0}^{\infty}P(x;\mu)=1$ هي نتيجة لمتتالية ماكلوريان (Maclaurin) الهندسية اللانهائية من أجل e^{μ} والتي تظهر في أغلب نصوص التفاضل والتكامل:

$$e^{\mu}=1+\mu+\frac{\mu^{2}}{2!}+\frac{\mu^{3}}{3!}+........=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\mu^{x}}{x!}$$

وإذا تم ضرب طرفي المعادلة السابقة في $e^{-\mu}$ فسينتج لدينا: $1=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$؛ مما يعني أن $P(x;\mu)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$ تفي بالشرط الثاني الضروري لتحديد دالة الكتلة الاحتمالية pmf.

<u>مثال 63</u>

لنفترض أن X هو عدد العصافير التي تم التقاطها في فخ خلال فترة زمنية معينة وأن هذا المتغير العشوائي X يتبع توزيع بواسون بـ $\mu=4.5$ أي أن الفخ يلتقط 4.5 عصفورا في المتوسط؛ فاحتمال أن يحتوي الفخ على 5 عصافير بالضبط هو:

$$P(5;4.5)=\frac{e^{-4.5}4.5^{5}}{5!}=0.170$$

فاحتمال أن يتكون يقع في الفخ على الأقل خمسة عصافير هو

$$P(X\leq 5)=\sum_{x=0}^{5}\frac{e^{-4.5}4.5^{x}}{x!}=e^{-4.5}\left[1+4.5+\frac{4.5^{2}}{2!}+\frac{4.5^{3}}{3!}+\frac{4.5^{4}}{4!}+\frac{4.5^{5}}{5!}\right]=0.702$$

3.1.2.1. توزيع بواسون كنهاية

المنطق في استخدام توزيع بواسون في عدة حالات يقدم حسب الافتراض التالي:

افتراض: لو افترضنا في التوزيع الثنائي $b(x;n,p)$ سنجعل $n\to\infty$ و $p\to 0$ ؛ وبطريقة ما يقترب np من قيمة $\mu>0$ ؛ فيكون: $b(x;n,p)\to p(x;\mu)$.

الإثبات نبدأ من دالة الكتلة الاحتمالية للتوزيع الثنائي:

* نسبة لمكتشفه Siméon Poisson سنة 1830.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

$$b(x;n,p)=C_n^x p^x(1-p)^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$
$$=\frac{n.(n-1).......(n-x+1)}{x!}p^x(1-p)^{n-x}$$

نضرب البسط والمقام في نفس العدد n^x

$$b(x;n,p)=C_n^x p^x(1-p)^{n-x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$$
$$=\frac{n}{n}.\frac{(n-1)}{n}\cdots\frac{(n-x+1)}{n}\frac{n^x p^x}{x!}\frac{(1-p)^n}{(1-p)^x}$$

بجعل $n\to\infty$ و $p\to 0$ مع $np\to\mu$

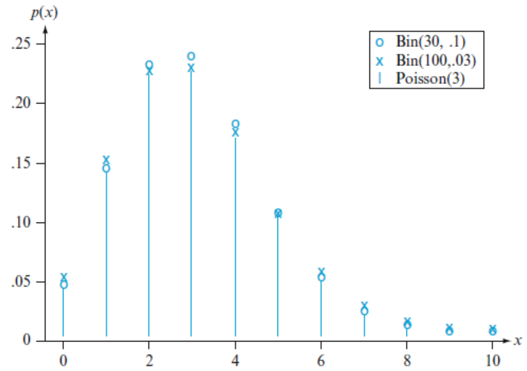
$$\lim_{n\to\infty} b(x;n,p)=1.1\ldots1\frac{\mu}{x!}\left(\lim_{n\to\infty}\frac{(1-np/n)^n}{1}\right)$$

فالنهاية على يمين يمكن اشتقاقها من نظرية حساب التفاضل والتكامل والتي تنص على أن $(1-a_n/n)^n$ هي: e^{-n} إذا كان $a_n\to a$؛ وذلك لأن $np\to\mu$:

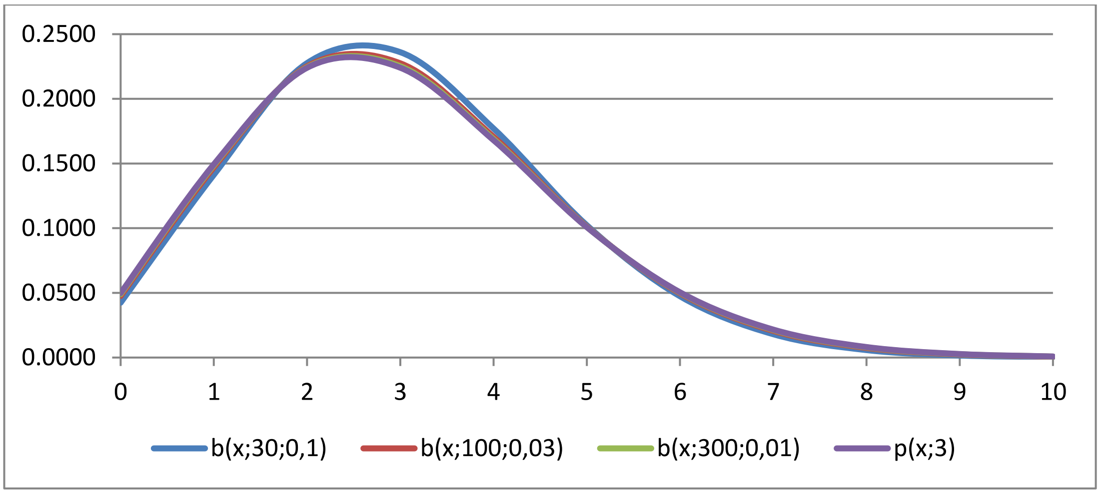
$$\lim_{n\to\infty} b(x;n,p)=\frac{\mu}{x!}.\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{np}{n}\right)^n=\frac{\mu^x e^{-\mu}}{x!}=p(x;\mu)$$

وحسب الافتراض السابق فإن أي تجربة تتبع التوزيع الثنائي حين يكون n كبيرا جدا و p صغيرة جدا فإنه يؤول يقترب من توزيع بواسون $b(x;n,p)\approx p(x;\mu)$ حيث $np=\mu$؛ ويبين الجدول التالي توزيع بواسون من أجل $\mu=3$؛ وثلاث توزيعات ذي الحدين من أجل $np=3$؛ والشكل المقابل توزيع احتمالات بواسون مع التوزيعين الثنائيين؛ فالتقريب محدود عند n=30 ويكون التقريب أحسن عند n=100 وأحسن عند n=300.

x	$n=30, p=.1$	$n=100, p=.03$	$n=300, p=.01$	Poisson, $\mu=3$
0	0.042391	0.047553	0.049041	0.049787
1	0.141304	0.147070	0.148609	0.149361
2	0.227656	0.225153	0.224414	0.224042
3	0.236088	0.227474	0.225170	0.224042
4	0.177066	0.170606	0.168877	0.168031
5	0.102305	0.101308	0.100985	0.100819
6	0.047363	0.049610	0.050153	0.050409
7	0.018043	0.020604	0.021277	0.021604
8	0.005764	0.007408	0.007871	0.008102
9	0.001565	0.002342	0.002580	0.002701
10	0.000365	0.000659	0.000758	0.000810



د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz



مثال 64

لو افترضنا لديك مودم4ميجا(bit4000000) باحتمال خطأ10^{-8} تظهر الأخطاء مستقلة بمعدل4ميجا ما هو احتمال أن يكون خطأ في الدقيقة التالية هو3bit ؟ثم 3bit على الأكثر في الدقيقة التالية؟؛ ولنعرف المتغير العشوائيX:عدد أخطاءbit في الدقيقة التالية؛ ومن المعطيات فالمتغير يستوفي شروط التوزيع الثنائي خصوصا وأن4ميجا كمعدل يعني 240000000bit محول في الدقيقة؛

$$p(x=3)=b(3;240000000;10^{-8})=C^{3}_{240000000}(10^{-8})^{3}(1-10^{-8})^{239999997}=0.209$$

كانت بعض الآلات الحاسبة في القرن التاسع عشر تعجز تقنيا عن حساب بعض المعادلات مثل السابقة فمابالك بحساب الاحتمال التراكمي $p(x\leq 3)$ ؛ وأمام هذا العجز حتى مع بعض القيم البسيطة لـ (n,p) كان الدافع الأساسي لـ(Siméon Poisson) لاشتقاق تقريب أكثر سهولة في الحساب.

فيمكننا تقريب الاحتمالات السابقة باستعمال توزيع بواسون مع تعويض $\mu=np=240000000\cdot 10^{-8}=2.4$ فيكون:

$$p(x=3)\approx p(3;2.4)=\frac{e^{-2.4}2.4^{3}}{3!}=0.209$$

وبالمثل يكون احتمال:

$$p(x\leq 3)\approx\sum_{x=0}^{3}p(3;2.4)=\sum_{x=0}^{3}\frac{e^{-2.4}2.4^{x}}{x!}=0.7787$$

وباستعمال البرامج الحديثة كان تكون الاحتمالات الدقيقة للكثافة وللتراكم (0.20901416 و 0.77872291) ويقترب منها توزيع بواسون بثماني منازل عشرية ويبدو أنه أكثر قابلية للحساب؛ ويمكن حساب احتمالات بواسون بدقة ببعض البرامج كما في الجدول المقابل.

الدالة	دالة التوزيع الاحتمالي (الكتلة الاحتمالية) *pmf*	دالة التوزيع التراكمية *cdf*
الرمز	*p(x; u)*	*P(x; u)*
الدالة في الإكسل	*=POISSON.dist(x; mean; false)*	*=POISSON.dist(x; mean; true)*

2.2.1.3. التوقع والتباين لمتغير عشوائي من نوع بواسون

بما أن التوزيع الثنائي يقترب من توزيع بواسون حين يكون $n\to\infty$ و$p\to 0$ ؛ وبطريقة ما يقترب np من قيمة $\mu>0$ ؛ فيكون: $np\to\mu$ و$n(1-p)\to\mu$.

افتراض: إذا كان لمتغير عشوائي بمعلمة μ فيكون $E(X)=Var(x)=\mu$ التوقع هو نفسه التباين ويساوي ضرب النسبة في عدد المحاولات.

ويمكن استنتاج هذا الافتراض أو النتيجة مباشرة من تعريف التوقع والوسط الحسابي (تمرين88 للتوقع).

مثال 65

نواصل المثال ما قبل السابق(ص81) سيكون كلا من العدد المتوقع للعصافير في الفخ وتباين عدد العصافير الواقعة في الفخ هو4.5 وكذا الانحراف المعياري $\sigma_X=\sqrt{\mu}=\sqrt{4.5}=2.12$

3.2.1.3. توزيع بواسون كعملية

تظهر أهمية تطبيق توزيع بواسون حين يتعلق الأمر بالربط بين ظهور أحداث من نوع خاص فترة زمنية معينة؛ فيكون المتغير العشوائي بمرور الوقت يتخذ منحى خطيا فيمكن نمذجته بتوزيع بواسون بمتوسط ما هو ضرب عدد ثابت في فترة زمنية؛ فتكون العدد المتوقع في فترة معينة (طولها 1) هو ذلك العدد الثابت خصوصا مع كبر وقت ملاحظة التجربة.

وباختصار عدد الأحداث التي تظهر في فترة زمنية متكررة بشكل ثابت (طولها t) لديها توزيع بواسون بمعلمة λt ؛ وكل عملية تمتلك هذا التوزيع تسمى عملية بواسون ويسمى λ بمعدل العملية؛ مثل تسجيل عدد الحوادث في مصنع معين خلال فترة زمنية معينة؛ عدد الأعطال في جهاز حاسوب خلال فترة ما؛ عدد المكالمات الواردة لمركز اتصالات الأمن من حي معين خلال فترة زمنية معينة؛ مراقبة كمية الأمطار كل يوم خلال شهر معين.

ولشرح معقولية÷ذهذا الأمر نعود للمثال ماقبل السابق (ص83) وقمنا برقمنة الوقت أي قسمته إلى قطع منفصلة مثل كمية البيتات المرسلة وتحديد القطع الزمنية التي تتضمن حدثا ما فيكون نموذج التوزيع الثنائي قابلا للتطبيق؛ وهذا كان عدد القطع الزمنية كبيرا جدا واحتمالات النجاح تقترب من الصفر والتي تظهر حين نقسم فترة زمنية ثابتة إلى فترات أصغر فمن الأفضل استخدام توزيع بواسون كتقريب للتوزيع الثنائي كما رأينا(ص81).

مثال 66

لنفترض أن عدد ضربات القلب في عداد طبي بمعدل6 في الدقيقة فيكون $\lambda=6$ ؛ واحتمال ضربة واحدة على الأقل في نصف دقيقة $t=0.5$ ؛ فنلاحظ أن عدد ضربات القلب في فترة زمنية معينة يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda t=6\times 0.5=3$ ($t=0.5$ لأنه تم التعبير عن λ في الدقيقة) فيكون المتغير العشوائي X هو عدد الضربات المستقبلة في العداد في كل نصف دقيقة:

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{e^{-3}3^{0}}{0!}=0.950$$

وفي فترة زمنية تقدر بساعة واحدة يصبح $t=60$ يكون عدد الضربات المتوقعة هو $\mu=\lambda t=6\times60=360$ بانحراف معياري $\sigma=\sqrt{\mu}=\sqrt{360}=18.97$ ؛ وتبعا لهذا النموذج وفي ساعة نموذجين سنلاحظ وصول 360 ضربة للعداد بانحراف معياري 18.97 (360 ± 18.97).

وبدلا من ملاحظة ومراقبة الحوادث والتجارب خلال الزمن؛ يمكن مراقبة حوادث وتجارب من نوع خاص تظهر مثلا في مناطق جغرافية ذات أبعاد ثنائية أو ثلاثية؛ فمثلا لو اخترنا منطقة معينة بها غابة أشجار على الخريطة نسميها R؛ فنقوم بحساب عدد الأشجار في تلك المنطقة حيث تعتبر كل شجرة على أنها حدث واحد يظهر في نقطة معينة من فضاء التجربة؛ وتحت افتراضات مناسبة (موضوع العمليات العشوائية7.5) قد يمكن تبيان أن عدد الأحداث التي تظهر في هذه المنطقة R قد يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\lambda\times a(R)$ حيث يمثل $a(R)$ مساحة المنطقة أعلاه والكمية λ هي العدد المتوقع للأحداث في كل وحدة محسوبة بالمنطقة.

4.2.1.3. حسابات توزيع بواسون باستعمال البرامج

باستخدام ماطلاب وR وexcel وبمعادلات معينة لتقييم وإيجاد دوال الكتلة الاحتمالية ودوال التوزيع التراكمية للتوزيع الثنائي وغيره من التوزيعات ونختار فيما يلي الإكسل والذي حسبنا به أيضا جدول التوزيع الاحتمالي لتوزيع بواسون في الملاحق آخر المطبوعة؛

الدالة	دالة التوزيع الاحتمالي (الكتلة الاحتمالية) *pmf*	دالة التوزيع التراكمية *cdf*
الرمز	p(x; np=u)	P(x; np=u)
الدالة في الإكسل	=poisson.dist(x; np=u; false)	=poisson.dist(x; np=u; true)

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسِّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

5.2.1.3. تمارين المحور (التوزيع الثنائي)

01: ليكن X هو عدد العيوب الموجود على سطح سجادة صلاة من نوع معين تم اختيارها عشوائيا؛ حيث يتبع هذا المتغير توزيع بواسون بمعلمة $\mu=5$ وباستعمال البرامج أو الجدول في الملحق3 لحساب الاحتمالات التالية: $[P(X\leq 8)]$، $[P(X=8)]$، $[P(9\leq X)]$، $[P(5\leq X\leq 8)]$ ثم $[P(5<X<8)]$

02: ليكن X عدد الحالات المعيبة في نوع معين من السيارات في منطقة معينة بتوزيع بواسون وسطه $\mu=4$ ؛ أحسب:

$[P(X\leq 4)]$ و$[P(X<4)]$، $[P(4\leq X\leq 8)]$ ثم $[P(8\leq X)]$

ما هو احتمال أنَّ العدد الملاحظ للعيوب يتجاوز العدد المتوقع بانحراف معياري واحد.

03: ليكن X عدد سائقين سيارات الأجرة الذين يتنقلون بين ولايتين معينتين في فترة زمنية معينة يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\mu=20$ ؛ فما هي الاحتمالات التالية:

$[P(X\leq 10)]$، $[P(X>20)]$، $[P(10\leq X\leq 20)]$ و$[P(10<X<20)]$ ثم $[P(3<X<7)]$ و$[P(3\leq X\leq 7)]$

04: جهاز يخطئ في حساب عدد نبضات القلب وهذا العدد (عدد النبضات الخاطئة) يعبر عنه بمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بمعلمة $\mu=0.20$:

- ماهو احتمال أن يخطئ هذا الجهاز في حساب نبضة واحدة؟؛
- ماهو احتمال أن يخطئ هذا الجهاز في حساب على الأقل نبضتين؟؛
- إذا كان هناك جهاز آخر مطابق للأول فما هو احتمال أن لا يخطئ كلاهما في حساب النبضات؟.

05: كشفت بعض الإحصائيات في الجزائر أن شخصا من كل200 شخص يصابون بمرض الكوفيد19 لسبب أو لآخر وذلك في عينة من1000 شخص؛ ماهو التوزيع التقريبي لحاملي هذا المرض؟ واستخدم هذا التوزيع لحساب الحتمال التقريبي في الحالات التالية:

- بين5 و8 أشخاص تماما يصابون بالمرض؛
- على الأقل8 أشخاص يحملون المرض.

06: في عينة من10000 وحدة من منتوج ما تفشل 10% منها في فترة الضمان:

- ماهي القيمة المتوقعة والانحراف المعياري لعدد الوحدات المعيبة في العينة؟؛
- ماهي القيمة الاحتمالية (التقريبية) لأن لوجود عيب في أكثر من 10 وحدات؟؛
- ماهي القيمة الاحتمالية (التقريبية) لعدم وجود عيب في أي وحدة؟؛

07: يكتب أستاذٌ كتابًا بيداغوجيا موجها للطلبة يحتوي400 صفحة؛ ويبذل جهدا كبيرا لضمان خلوه من الأخطاء المطبعية باحتمال أن تحتوي كل صفحة على خطأ مطبعي واحد هو0.005؛ والأخطاء مستقلة بين الصفحات فما هو احتمال أن يحتوي الكتاب على خطأ واحد في صفحة واحدة؟؛ وما هو احتمال أن يحتوي الكتاب على ثلاث أخطاء في ثلاث صفحات على الأكثر؟.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبِي التّبسِّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

3.1.3. توزيعات احتمالية منفصلة أخرى

يرتبط كل من التوزيع فوق الهندسي والتوزيع الثنائي السالب ارتباطا وثيقا بالتوزيع الثنائي؛ ففي حين أن التوزيع الثنائي هو نموذج الاحتمال التقريبي لمعاينة دون إعادة مجموعة ثنائية التفرع ومنتهية (S-F) فيكون التوزيع فوق الهندسي هو نمج الاحتمال التام لعدد النجاحات(S) في العينة، والمتغير العشوائي ذي الحدين X هو عدد النجاحات عندما يسكون عدد المحاولات أو التجاربn ثابتا بينما التوزيع الثنائي السالب يظهر بتثبيت عدد النجاحات المرغوبة وجعل عدد المحاولات أو التجارب عشوائي.

1.3.1.3. التوزيع فوق الهندسي

تتمثل افتراضات التوزيع فوق الهندسي فيما يلي:

- عدد وحدات المجتمعN المسحوبة منها العينة محدود؛
- كل وحدة من المجتمع تأخذ قيمتين فقط نجاح أو فشل(S,F) ويوجد عددM من النجاحات في المجتمع؛
- كل عينة منn عنصرا من المجتمع لها نفس احتمال اختيارها دون تكرار.

والمتغير العشوائي X المتعلق بهذا التوزيع هو عدد النجاحات(S) في العينة؛ والتوزيع الاحتمالي للمتغير X يعتمد على المعلمات: n، M وN؛ وبالتالي نرغب في الحصول على $[P(X=x)=h(x;n,M,N)]$

<u>مثال 67</u>

تلقى مكتب الصيانة بالكلية 20طلب خدمة إصلاح مشاكل الحواسيب منها 8حواسيب محمولة و12 لحواسيب شخصية؛ وسيتم اختيار عينة من5طلبات خدمة إصلاح لتضمينها في استبيان لرضا العملاء؛ ولنفترض أنه تم اختيار الخمسة طلبات بطريقة عشوائية حيث يكون لأي عينة فرعية من خمس طلبات نفس الحظ في الاختيار؛ فما هو احتمال أن يكون 02 بالضبط من طلبات الخدمة متعلقة بالحواسيب الشخصية؛

في هذا المثال حجم المجتمع$N=20$ ، وعدد النجاحاتS أي أن يكون من الحواسيب الشخصية $M=12$وعدد مرات الفشلF أي أن يكون من الحواسيب المحمولة$N-M=08$ ؛ وليكن المتغير العشوائي X هو عدد الحواسيب الشخصية في طلبات الخدمة الخمسة المختارة كعينة (وأي عينة من خمس طلبات يتم اختيارها باحتمال متساو) فيكون:

$$P(X=2)=h(2;5,12,20)=\frac{\text{عدد النتائج التي تحوي } x=2}{\text{عدد كل النتائج الممكنة}}$$

عدد النتائج الممكنة في التجربة هو عدد الطرق التي يمكن بها سحب5 عناصر من20 دون مراعاة الترتيب تولفية تحسب كما يلي: $C_{20}^{5}=\frac{20!}{(20-5)!\times 5!}=\frac{20\times 19\times 18\times 17\times 16}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=15504$ أي15504 طريقة لسحب عينة حجمها5 طلبات من20طلب موجودا.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

وعدد النتائج اختيار حاسوبين شخصيين هو التوليفة: $C_{12}^{2}=\frac{12!}{(12-2)!\times 2!}=\frac{12\times 11}{2\times 1}=66$

أي66 طريقة لاختيار حاسوبين شخصيين من12 حاسوبا شخصيا موجودا؛ فيكون عدد طرق اختيار 03 حواسيب محمولة (من إجل إكمال اختيار حجم العينة5) هو التوليفة: $C_{8}^{3}=\frac{8!}{(8-3)!\times 3!}=\frac{8\times 7\times 6}{3\times 2\times 1}=56$ وبالعودة لمبدأ العد الأساسي في الصفحة15 نجد $C_{12}^{2}\times C_{8}^{3}$ هو عدد اختيارات من خمس عناصر ويظهر فيها حاسوبين شخصيين (وبالتالي يظهر فيها3 حواسيب محمولة):

$h(2;5,12,20)=\frac{C_{12}^{2}\times C_{8}^{3}}{C_{20}^{5}}=\frac{66\times 56}{15504}=0.24$ ؛

وعموما إذا كان حجم العينةn أقل من عدد النجاحات في المجتمع $n<M$ فيكون أكبر قيمة ممكنة للمتغير X هوn؛ ومع ذلك إذا كان عدد النجاحات أقل من حجم العينة $M<n$ (15 حالة نجاح في مجتمع من25 عنصرا) فيكون أكبر قيمة ممكنة للمتغير X هو عدد النجاحاتM.

وبالمثل كلما كان عدد مرات الفشل في المجتمع$(N-M)$ أكبر من حجم العينة$(N-M)>n$ فتكون أقل قيمة للمتغير X هو0(أي أن جميع العناصر التي تم اختيارها تمثل حالة فشل)؛ ومع ذلك إذا كان عدد مرات الفشل أقل من حجم العينة $(N-M)<n$ فيكون أقل قيمة ممكنة للمتغير X هو $(n-(N-M))$.

وتلخيصا لما سبق نقول أن القيمة المحتملة للمتغير X تحقق القيد:

$\max(0,\, n-N+M)\leq x\leq \min(n,M)$

وهناك حجة موازية لهذا في المثال السابق تعطينا دالة الكتلة الاحتماليةpmf للمتغير X.

افتراض: إذا كان متغير عشوائي X هو عدد النجاحات في عينة عشوائية حجمهاn مسحوبة من مجتمع يحتوي على عدد نجاحات M وعدد مرات فشل$(N-M)$ فيكون التوزيع الاحتمالي للمتغير X هو التوزيع فوق الهندسي ويعطى بالعلاقة التالية:

$$P(X=x)=h(x;n,M,N)=\frac{C_{M}^{x}\times C_{N-M}^{n-x}}{C_{N}^{n}} \qquad \text{معادلة 13}$$

وذلك من أجل كل عدد صحيحx يحقق الشرط: $\max(0,\, n-N+M)\leq x\leq \min(n,M)$

في المثال السابق(مثال 67): $n=5$ ، $M=12$ ، $N=20$ ؛ فيتم استنتاج قيمة $h(x;5,12,20)$ من أجل $x=0,1,2,3,4,5$ وذلك بتعويض المعطيات في المعادلة 13

مثال 68

تم القبض على خمس عناصر من مجموعة حيوانات مهددة بالانقراض وتم توسيمها (تمييزها بعلامة) وإعادتها للاختلاط في المجموعة؛ وبعد اختلاطها بالمجموعة الكلية تم اختيار 10عناصر منها؛ وليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الحيوانات الموسومة في العينة الثانية؛ فإذا كان حجم المجموعة25 عنصرا فما هو احتمال أن يكون عدد المتغير العشوائي$X=2$ ثم$X\leq 2$.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبِي التّبسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

يتطلب تطبيق التوزيع فوق الهندسي هنا افتراض أن كل مجموعة فرعية من عشر حيوانات لها نفس فرصة الاختيار؛ مما يعني أن اصطياد الحيوانات الموسومة عنها ليس أسهل ولا أصعب من تلك التي لم يتم توسيمها في البداية فتكون قيم المعالم هي: $n=10$، $M=5$، $N=25$ ؛ وبذلك

$$h(x;10,5,25)=\frac{C_5^x\times C_{25-5}^{10-x}}{C_{25}^{10}} \qquad x=0,1,2,3,4,5$$

من أجل $P(X=2)$ نجد:

$$h(2;10,5,25)=\frac{C_5^2\times C_{25-5}^{10-2}}{C_{25}^{10}}=\frac{10\times125970}{3268760}=0.385$$

من أجل $P(X\leq2)$ نجد:

$$h(0;10,5,25)+h(1;10,5,25)+h(2;10,5,25)=$$
$$\frac{C_5^0\times C_{25-5}^{10-0}}{C_{25}^{10}}+\frac{C_5^1\times C_{25-5}^{10-1}}{C_{25}^{10}}+\frac{C_5^2\times C_{25-5}^{10-2}}{C_{25}^{10}}=$$
$$\frac{1\times184756}{3268760}+\frac{5\times167960}{3268760}+\frac{10\times125970}{3268760}=$$
$$0.057+0.257+0.385=0.698$$

ويمكن استخدام برنامج إكسل لحساب احتمالات التوزيع فوق الهندسي كما يبين الجدول الموالي في نهاية هذا العنصر؛ ويمكن توفير جداول شاملة للتوزيع فوق الهندسي، ولكن نظرًا لأن التوزيع يحتوي على ثلاثة معلمات، فإن هذه الجداول تتطلب مساحة أكبر بكثير من جداول توزيع ذي الحدين.

وكما في التوزيع الثنائي هناك تعبيرات بسيطة لكل من التوقع والتباين للمتغيرات العشوائية فوق الهندسية.

اقتراح: إن التوقع والتباين لمتغير عشوائي يتبع التوزيع فوق الهندسي يمتلك دالة كتلة احتمالية $h(x;n,M,N)$ هما: $E(X)=n\times\frac{M}{N}$ و $Var(X)=(\frac{N-n}{N-1})\times n\times\frac{M}{N}\times(1-\frac{M}{N})$

والنسبة $\frac{M}{N}$ تمثل نسبة النجاح في المجتمع وباستبدالها في قانوني التوقع والتباين بالرمز p فنجد:

$$E(X)=np \qquad Var(X)=(\frac{N-n}{N-1})\times np(1-p)$$

وتبين المعادلات السابقة أن التوقع بالنسبة لكل من التوزيع الثنائي والتوزيع فوق الهندسي متساويان؛ بينما يختلف تباين المتغيرين عن طريق المعامل $(\frac{N-n}{N-1})$ وغالبا ما يسمى **معامل تصحيح المجتمع المحدود أو المنتهي** لذا فإن تباين توزيع الفوق الهندسي أصغر من تباين التوزيع الثنائي؛ وهذا المعامل يمكن كتابته بالصيغة $(\frac{1-n/N}{1-1/N})$ بقسمة البسط والمقام على N فيصبح المعامل مساويا للواحد بالتقريب حين تكون n صغيرة جدا مقارنة بـ N.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

مثال 69

مواصلة لمثال توسيم الحيوانات (مثال 68) أين كانت المعالم هي: $n=10$ ، $M=5$ ، $N=25$ ؛ فيكون $p=\frac{5}{25}=0.2$ ؛ وبالتالي: $E(X)=10\times0.2=2$ وأيضا: $Var(X)=(\frac{25-10}{25-1})\times10\times0.2\times(1-0.2)=1$

وإذا كانت المعاينة بالتكرار فيكون التباين: $Var(X)=10\times0.2\times(1-0.2)=1.6$

وإذا كان حجم المجتمع N غير معروف وتمت ملاحظة قيمة x ورغبنا في تقدير قيمة N فمن المنطقي مساواة قيمة نسبة النجاح الملاحظة في العينة $\frac{x}{n}$ مع نسبة النجاح في المجتمع $\frac{M}{N}$ فتعطينا التقدير التالي: $\hat{N}=\frac{M\times n}{x}$ ؛ فمثلا: إذا كان $n=40$ ، $M=100$ و $x=16$ ؛ فيكون:

$$\hat{N}=\frac{100\times40}{16}=250$$

ففي قاعدة سابقة(ص73) إذا كانت المعاينة دون تكرار وكانت النسبة $\frac{n}{N}\leq0.05$ فيمكن استعمال التوزيع الثنائي لحساب الاحتمالات التقريبية والتي تتضمن عددا معينا من النجاحات في العينة؛ ويمكن التنصيص على القاعدة السابقة بدقة أكثر كما يلي: إذا كان حجم مجتمع N وعدد مرات النجاح فيه M وتكبر كلما اقتربت النسبة $\frac{M}{N}$ من نسبة النجاح في العينة p ؛ لذلك يقترب التويع فوق الهندسي $h(x,n,M,N)$ من التوزيع الثنائي أو ذي الحدين $b(x,n,p)$ ؛ لذلك ومن أجل نسبة $\frac{n}{N}$ صغيرة يتساوى كلا من التوزيعين بشرط أن لا تقترب النسبة p من 0 ولا من 1؛ وهذا هو الأساس المنطقي للقاعدة.

2.3.1.3. التوزيع الثنائي السالب والتوزيع الهندسي

يعتمد التوزيع الثنائي السالب على تجارب تحقق الشروط التالية:

- تتكون التجربة من سلسلة من تجارب أصغر تسمى محاولات تكون مستقلة فيما بينها؛
- كل محاولة يمكن أن تؤدي إلى واحدة من النتيجتين المحتملتين، والتي نشير إليها بالنجاح S أو الفشل F ؛
- نسبة النجاح ثابتة من محاولة لأخرى فيكون $P(S_i)=p$ وذلك من أجل $i=1,2,3,...$ ؛
- تستمر التجربة (المحاولات) حتى يتم ملاحظة عدد مرات النجاح المرغوب r (العدد r صحيح وموجب).

والمتغير العشوائي لهذا التوزيع هو X : عدد المحاولات أو السحوبات اللازمة في التجربة للوصول إلى عدد معين r (مرغوب ومحدد) من النجاحات؛ فيسمى المتغير العشوائي ذو التوزيع الثنائي السالب، وبالعكس من التوزيع الثنائي يكون هنا عدد النجاحات ثابتا وعدد المحاولات متغيرا عشوائيا فتكون القيم الممكنة للمتغير X هي: r ، $r+1$ ، $r+2$ ، ..... وذلك لأنه يجب علينا إجراء على الأقل r محاولة للوصول إلى عدد r من النجاحات.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

ولتكن دالة الكتلة الاحتمالية pmf للمتغير X: $nb(x,r,p)$ فيكون الحدث $\{X=x\}$ مساويا لـ: $(r-1)$ من النجاحات في أول $(x-1)$ محاولة والنجاح الأخير رقم (r) يكون في المحاولة الأخيرة رقم (x)؛ فمثلا لو كان عدد النجاحات المرغوبة هو $(r=5)$ وكان عدد المحاولات للوصول إلى هذا العدد من النجاحات هو: $(x=15)$ فلابد أن هناك 4 نجاحا في 14 محاولة الأولى والنجاح رقم 5 الملاحظ لابد أن يكون في المحاولة رقم 15؛ وبما أن المحاولات مستقلة عن بعضها فيكون:

$$nb(x,r,p)=P(X=x)=P(r-1 S's\ on\ F^{st}\ x-1 trials)\times P(S)$$

أي يساوي احتمال $(r-1)$ من النجاحات في $(x-1)$ محاولة مضروبا في احتمال النجاح (في المحاولة رقم x) وهذا الأخير هو نفسه قيمة الاحتمال في كل المحاولات وهو نفسه احتمال التوزيع الثنائي المدروس سابقا وبالتلخيص وضرب .

تعريف: دالة الكتلة الاحتمالية pmf للتوزيع الثنائي السالب للمتغير العشوائي X بمعلمة r هي عدد النجاحات المرغوبة واحتمال p هو احتمال النجاح $P(S)$: فإن دالة الكتلة الاحتمالية pmf هي: $nb(x,r,p)=C_{x-1}^{r-1}\times p^r(1-p)^{x-r}\ ,\quad x=r,r+1,r+2\ldots$

مثال 70

يرغب طبيب أطفال في دراسة نظام ولادة طبيعي جديد وذلك بتجنيد أربعة أزواج مختارين عشوائي يتوقع كل زوج منهم ولادة طفلهم الأول ويكون $p=P$ هي نسبة قبول الزوج المختار للمشاركة في التجربة؛ فإذا كان $p=0.2$ فما هو احتمال أن يتم اختيار 15 زوجا قبل العثور على الأربعة الذين يقبلون المشاركة؛ وبتعويض المعطيات: $x=15, p=0.2, r=4$؛ في $nb(x,r,p)$ نجد:

$$nb(x,r,p)\ =C_{x-1}^{r-1}\times p^r(1-p)^{x-r}$$
$$nb(15,4,0.2)=C_{15-1}^{4-1}\times 0.2^4(1-0.2)^{15-4}=0.05$$

واحتمال أن يتم اختيار 15 زوجا <u>على الأكثر</u> قبل العثور على الأربعة الذين يقبلون المشاركة هو

$$P(X\le 15)=\sum_{4}^{15}nb(x,4,0.2)=\sum_{4}^{15}(C_{x-1}^{4-1})\times 0.2^4\times 0.8^{x-4}$$
$$=0.35$$

وفي حالة خاصة أين يكون $r=1$ تكون دالة الكتلة الاحتمالية pmf هي: $nb(x,1,p)=(1-p)^{x-1}p$ مهما كانت قيمة x: $x=1,2,\ldots$

في مثال سابق)

<u>مثال 39</u>) قمنا باشتقاق دالة الكتلة الاحتمالية pmf لعدد المحاولات اللازمة x لإيجاد عدد معين من النجاحات S فوجدناها مطابقة لدالة الكتلة الاحتمالية pmf في المعادلة السابقة في هذا المثال؛ والمتغير

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

X الذي هو عدد المحاولات اللازمة للحصول على نجاح واحد يوصف بأنه المتغير العشوائي ذو التوزيع فوق الهندسي ودالة الكتلة الاحتمالية pmf في المعادلة أعلاه تسمى دالة التوزيع فوق الهندسي وهذه التسمية متوافقة لأن الاحتمالات تتكون من سلسلة هندسية $p,(1-p)p,(1-p)^2p,....$ ؛ وحسب خصائص السلسلة الهندسية مجموع هذه الحدود هو مجموع احتمالات كل القيم التي يأخذها المتغير العشوائي وتساوي الواحد الصحيح.

$$p+(1-p)p+(1-p)^2p+....=\frac{p}{1-(1-p)}=1$$

في مثال سابق (

مثال 48) كانت القيمة المتوقعة لعدد المحاولات حتى الوصول لأول حالة نجاح (S) تم تبيانها بأنها $(1/p)$ ونتوقع بعد ذلك حدسيا بأن نحتاجا عددا من المحاولات قدره $(r\times 1/p)$ للوصول إلى حالة النجاح رقم (r) وهو بلا شك يمثل الأمل أو التوقع الرياضي أو الوسط الحسابي $E(X)$ وهناك أيضا صيغة بسيط للتباين $Var(X)$.

تعريف: إذا كان X متغير عشوائي يتبع التوزيع الثنائي السالب بمعلمتين r هي عدد النجاحات المرغوبة واحتمال p فإن:

$$E(X)=\frac{r}{\ } \qquad Var(X)=\frac{r(1-p)}{\ }$$

<u>مثال 71</u>

مواصلة للمثال السابق مع $p=0.2$ فإن القيمة المتوقعة لعدد الأزواج المستجوبين حتى يتحصل الأطباء على أربعة أزواج يوافقون على المشاركة في التجربة هي: $E(X)=\frac{r}{p}=\frac{4}{0.2}=20$ وهو شيء منطقي بما أن الاحتمال هو الخمس $p=0.2=1/5$ فيتطلب الأمر خمس محاولات للحصول على نجاح واحد S **والتباين** المرافق هو $Var(X)=\frac{4(1-0.2)}{0.2^2}=80$ وبالتالي يكون **الانحراف المعياري** $SD=\sqrt{VAR(X)}=8.9$.

وبما أن التوزيع الثنائي والتوزيع الثنائي السالب يستندان لتجارب متشابهة فيجب توخي الحذر والتدقيق للتمييز بينهما كما سنبين في المثال التالي:

<u>مثال 72</u>

في العديد من أنظمة الاتصالات يرسل المستقبل إشارة قصيرة* للمرسِل ليعلمه بأن الرسالة قد وصلت بشكل صحيح أم أنها بها خطأً ما؛ ولنفترض استعمالنا لنفس النظام في قناة بها تشويش فتكون كل رسالة مرسلة خالية من الأخطاء باحتمال $p=0.86$ مستقلة عن الرسائل الأخرى فماهو احتمال نجاح (08) رسائل تماما في (10) رسائل مرسلة؟؛ وما هو احتمال أن يتطلب النظام (10) رسائل مرسلة لينجح في إيصال (08) رسائل؟.

وبينما يبدو هذين السؤالين متشابهين فإنهما يتطلبان نموذجين مختلفين للحل:

* غالبا ما تسمى هذه الإشارات بالإقرار أو عدم الإقرار بالاستلام ويتم استخدام أنظمة البايت وأدوات أخرى بواسطة جهاز استقبال لتحديد مدى وجود أخطاء من عدمه.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسِّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

وللإجابة على السؤال الأول سنعتبر المتغير العشوائي X: هو عدد الرسائل المرسلة بنجاح من عشر (10) رسائل مرسلة؛ فيكون المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الثنائي: $X \sim Bin(10, 0.86)$ فتكون الإجابة هي:

$$P(X=8)=b(8;10,0.86)=C_{10}^{8}(0.86)^8(0.14)^2=0.26$$

ومع ذلك فالحدث (يتطلب الأمر إرسال عشر رسائل كاملة للوصول إلى (08) رسائل ناجحة) فهذا أمر مقيد ليس فقط بعدد النجاحات (08) وعدد مرات الفشل (02) في عشر محاولات وإنما أيضا بقيد يجب أن تكون الرسالة العاشرة الأخيرة ناجحة وإلا فإن الأمر يتطلب أقل من (10) رسائل لتحقيق (08) رسائل ناجحة.

وإذا عرَّفنا المتغير العشوائي Y: عدد الرسائل اللازم إرسالها للحصول على (08) رسائل ناجحة، فيكون هذا المتغير يتبع التوزيع الثنائي السالب بمعلمات $r=8$ و $p=0.86$، والإجابة على السؤال الثاني تكون:

$$P(Y=10)=nb(10;8,0.86)=C_{10-1}^{8-1}(0.86)^8(0.14)^2=0.21$$

وهذه القيمة أقل منها في السؤال الأول وهذا منطقي لأنه و(كما ذكرنا) فإن السؤال الثاني يتطلب قيدا إضافيا؛ وفي الواقع يمكن النظر لقيمة (-1) في دالة الكتلة الاحتمالية pmf وذلك لحساب فقدان مرونة التغيير (أي تقييد التوليفة) بين عدد النجاحات والفشل فتم تقييد أحد النجاحات وربطها بالمحاولة الأخيرة فقط.

وبالمثل يكون توقع عدد النجاحات في (10) رسائل مرسلة هو: $E(X)=np=10(0.86)=8.6$ بينما توقع عدد الرسائل المرسلة للحصول على (08) نجاحات هو: $E(Y)=\frac{r}{p}=\frac{8}{0.86}=9.3$ ؛ وذلك لكون المحاولات اللازمة في السؤال الأول ثابتا في (10) بينما في السؤال الثاني كان عدد النجاحات المرغوبة هو الثابت في (08).

ويمكن توسيع مفهوم معامل ذي الحدين مقابل $p^r(1-p)^{x-r}$ والقيام ببعض الاختزالات فيمكن ملاحظة أن $nb(x;r,p)$ محددا جيدا حتى عندما لا يكون (r) عددا صحيحا؛ وتم إيجاد هذا التوزيع الثنائي السالب المعمم ليلائم البيانات المرصودة بشكل جيد في مجموعة واسعة ومتنوعة من التطبيقات.

3.3.1.3. تعريفات بديلة للتوزيع الثنائي السالب

لا يوجد تعريف متفق عليه المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الثنائي السالب* (أو بشكل موسع التوزيع الهندسي) فليس من الشائع أن نرى في المقالات والكتب المدرسية عدد حالات الفشل التي تسبق حالة النجاح رقم (r) والتي تسمى "توزيع ذي الحدين السالب" وفي ترميزنا له فهو يساوي ببساطة $(x-r)$ ؛ والقيمة المحتملة لـ"عدد مرات الفشل" هي: $0,1,2,...$ ؛ وبالمثل يُعَرَّف التوزيع الهندسي أحيانا تحت مصطلح "عدد

* على الأقل إلى غاية سنة 2014.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

مرات الفشل التي تسبق أول حالة نجاح في سلسلة من تجارب متشابهة ومستقلة"؛ وعند استعمالنا لهذا التعريف البديل فيجب تغيير وتصحيح صيغتي دالة الكتلة الاحتمالية pmf والوسط الحسابي $E(X)$ وفقا لذلك (وستبقى صيغة التباين $Var(X)$ على حالها.

ويعتبر مكتشفو ومستعملو برنامجي (R) و$(Matlab)$ هم أول من تبنى هذا التعريف البديل؛ وكنتيجة لذلك يجب الحذر عند إدخال المعطيات في دوال هذه البرامج وكما يبين الجدول الموالي في نهاية هذا العنصر صيغ دوال الكتلة الاحتمالية pmf وذلك عن طريق إستحضار دوال التوزيع التراكمية $(cdfs)$ بتغيير دالة الكثافة الاحتمالية pdf إلى دوال التوزيع التراكمية cdf في برنامج $(Matlab)$ أو تغيير الحرف الأساسي (d) إلى (p) في برنامج (R) وبملاحظة وسيط الإدخال $(x-r)$ في دوال التوزيع الثنائي السالب نجد أن الحزم البرمجية لكلا البرنامجين يتطلبان عدد مرات الفشل (F) بدلا من عدد مرات النجاح (S).

	التوزيع الثنائي السالب	التوزيع الفوق الهندسي
الدالة	دالة الكتلة الاحتمالية pmf	دالة الكتلة الاحتمالية pmf
الرمز	$nb(x;\, x,\, r,\, p)$	$h(x;\, n,\, M,\, N)$
الدالة في الإكسل	$=NEGBINOM.dist(x;\, n,\, M,\, N,\, false)$	$=HYPGEOM.dist(x,\, n,\, M,\, N,\, false)$

ولو افترضنا أن المتغير العشوائي X يتبع التوزيع فوق الهندسي بمعلمات: $n=10, M=5, N=25$ كما في مثال سابق(مثال 68)

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

5.3.1.3. تمارين المحور (توزيعات احتمالية منفصلة أخرى)

01: تلقى متجر إلكترونيات شحنة من 20 راديو طاولة يمكن توصيبله بجهاز أيبود أو أيفون؛ و12 منها تمتلك مخرجان (أي يمكنها استيعاب كلا الجهازين أيبود وأيفون في نفس الوقت) والثمانية الباقية لها مخرج واحد؛ ولنفترض أنه تم اختيار ستة أجهزة راديو من العشرين جهازا عشوائيا ليتم عرضها للبيع و14 جهازا الباقية يتم وضعه في المخزن؛ وليكن المتغير العشوائي X : هو عدد الأجهزة المعروضة للبيع والتي تمتلك مخرجين.

- ماهو نوع التوزيع الذي يتبعه المتغير العشوائي X (مع تحديد قيم المعالم)؟؛
- قم بحساب كلا من: $P(X=2), P(X\leq 2), P(X\geq 2)$؛
- قم بحساب القيمة المتوقعة والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

02: يسترجع مصنع من أحد الموزعين 12 ثلاجة بسبب ضوضاء عالية النبرة عند تشغيل الثلاجة؛ ولنفترض أن 07 منها بها ضاغط معيب وأن الخمسة الآخرين لديهم مشاكل أقل خطورة؛ فتم فحص الثلاجات بالترتيب وبشكل عشوائي فإذا كان المتغير العشوائي X : هو عدد الثلاجات التي بها ضاغط معيب من بين أول 06 ثلاجات مفحوصة؛ فاحسب ما يلي:

- $P(X=5), P(X\leq 4)$؛
- احتمال أن يتجاوز المتغير العشوائي قمة وسطه بأكثر من انحراف معياري واحد؛
- لو اعتبرنا شحنة كبيرة من 400 ثلاجة من بينها 40 ثلاجة بها ضاغط معيب؛ فإذا كان المتغير X هو عدد الثلاجات التي بها ضاغط معيب من بين 15 ثلاجة مختارة عشوائيا، فقم بوصف أسهل طريقة لحساب (على الأقل بالتقريب) $P(X\leq 5)$ من استخدام دالة الكتلة الاحتمالية pmf للتوزيع فوق الهندسي.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

4.1.3. العزوم (اللحظات) والدوال المولدة للعزوم

غالبا ما يشار للقيمة المتوقعة للمتغير العشوائي X أو المتغير العشوائي $X-\mu$ كعزوم* (أو لحظات) وسنناقش هنا الموضوع العام للعزوم ونطور اختصار لكيفية حسابها:

تعريف: العزم رقم k لمتغير عشوائي X هو: $E(X^k)$؛ بينما العزم رقم k حول الوسط الحسابي (العزم المركزي رقم k) للمتغير العشوائي X هو: $E\left[(X-\mu)^k\right]$؛ مع كون $\mu=E(X)$.

فمثلا $\mu=E(X)$ هو العزم الأول للمتغير العشوائي X ويتوافق مع مركز كتلة التوزيع للمتغير؛ وبالمثل يكون: $Var(X)=E\left[(X-\mu)^2\right]$ هو العزم الثاني حول الوسط الحسابي**.

<u>مثال 73</u>

تباع علامة مشهور من زيت الصويا في الجزائر في قارورات ذات سعة 1، 2، 4 و5لترا ؛ وبعد أزمة انقطاعها من الأسواق لنفترض أن المتغير العشوائي X هو سعة القارورة المشتراة لاحقا وأن دالة الكتلة الاحتمالية pmf للمتغير العشوائي X معطاة في الجدول التالي (أي تفضيل الزبائن للسعات الكبرى أكثر):

x	1	2	4	5
$p(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

فيكون العزم الأول للمتغير العشوائي X هو وسطه الحسابي:

$$\mu=E(X)=\sum_{x\in D} x\,p(x)=1(0.1)+2(0.2)+4(0.3)+5(0.4)=3.7$$

ويكون العزم المركزي الثاني للمتغير العشوائي X هو التباين:

$$\sigma^2=Var(X)=E\left[(X-\mu)^2\right]=\sum_{x\in D}\left[(x-\mu)^2 p(x)\right]$$

$$=(1-3.7)^2(0.1)+(2-3.7)^2(0.2)+(4-3.7)^2(0.3)+(5-3.7)^2(0.4)$$

$$=2.01$$

فيكون الانحراف المعياري هو1.418؛ ويمكن حساب العزم المركزي الثالث للمتغير العشوائي X:

* وهو مصطلح مستعار من مجال الفيزياء.

** وتعرف في مجال الفيزياء بلحظة (أو عزم) القصور الذاتي (التعطيل أو الجمود).

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

$$E\left[(X-\mu)^3\right]=\sum_{X\in D}\left[(x-\mu)^3 p(x)\right]$$
$$=(1-3.7)^3(0.1)+(2-3.7)^3(0.2)+(4-3.7)^3(0.3)+(5-3.7)^3(0.4)$$

وبمناقشة تفسير قيمة هذا الرقم الأخير: نقول أنه ليس من الصعب التحقق من أن العزم المركزي الثالث (حول المتوسط) معدوم إذا كانت دالة الكتلة الاحتمالية pmf متماثلة حول المركز أو الوسط الحسابي؛ فنود استخدام $E\left[(X-\mu)^3\right]$ كمقياس لعدم تماثل وتناظر التوزيع حول الوسط ولكن ذلك يعتمد على مدى القياس المستعمل(*scale of measurement*)؛ فلو استبدلنا وحدة القياس في المثال السابق من اللتر إلى السنتيمتر المكعب مثلا فإن قيمة العزم المركزي الثالث حول الوسط الحسابي(مثل قيم كل العزوم الأخرى) ستتغير؛ ولكن يمكننا تحقيق استقلالية المقياس المستخدم بقسم العزم المركزي الثالث حول الوسط على الانحراف المعياري مرفوعا للقوة الثالثة:

$$\frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3}=E\left[\frac{(X-\mu)^3}{\sigma^3}\right]$$

والمعادل السابقة هي مقياسنا لتحديد وجود التماثل من عدمه وتسمى معامل الالتواء والذي يكون معدوما عند توزيع متماثل ومتناظر؛ ومع ذلك وفي المثال السابق سنجد أن معامل الالتواء سالب $\frac{E\left[(X-\mu)^3\right]}{\sigma^3}=\frac{-2.064}{1.418}=-0.72$ فنقول بأن منحنى التوزيع لهذا المتغير العشوائي X ملتوٍ بشكل سالب أو ملتوٍ نحو اليسار؛ وبشكل عام نقول أن التوزيع ينسحب نحو يسار الوسط أكثر من يمينه.

وإذا كان معامل الالتواء موجبا فنقول بأن التوزيع ملتوٍ نحو اليمين؛ فمثلا لو عكسنا قيم الاحتمالات في جدول المثال السابق (أي تفضيل الزبائن للسعات الصغرى أكثر) حيث يبين التمرين 119 أن هذا التغيير يغير شكل التوزيع ولكنه لا يغير حجم معامل الالتواء فيصبح $+0.72$ ويصبح التوزيع ملتوياً نحو اليمين

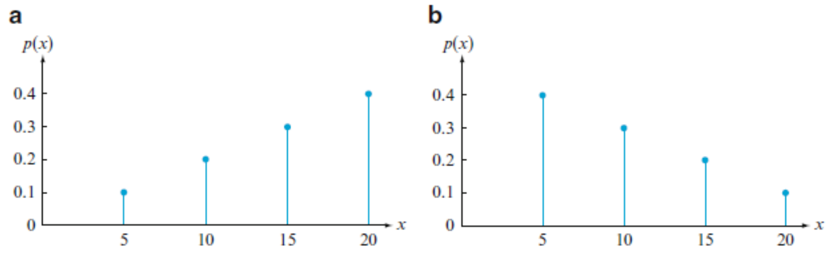


Fig. 2.9 Departures from symmetry: (a) skewness coefficient < 0 (skewed left); (b) skewness coefficient > 0 (skewed right)

1.4.1.3. الدالة المولدة للعزوم:

يتطلب أحيانا حساب الوسط والتباين ومعامل الالتواء لمتغير عشوائي متقطع أدوات جمع واسعة النطاق ومملة في كثير من الأحيان؛ لذا طوَّر الرياضيون دالة توليد العزوم mgf كأداة تسمح بتحديد عزم التوزيع بمجهود أقل، كما تسمح باشتقاق خصائص العديد من التوزيعات الاحتمالية الرئيسية التي سندرسها في هذه المطبوعة.

تعريف: دالة توليد العزوم mgf لمتغير عشوائي متقطع X تعرف بـ: $M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_x e^{tx}p(x)$ ؛

مع كون D هي مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي X ؛ فنقول بأن دالة توليد العزوم mgf موجودة فقط إذا كانت $M_X(t)$ معرفة في مجال يحتوي على الصفر وعلى قيم سالبة وموجبة لـ (t).

ولأي متغير عشوائي X يتم تقييم دالة توليد العزوم mgf عند $t=0$:

$$M_X(0)=E(e^{0X})=\sum_x e^{0x}p(x)=1p(x)=1$$

مما يعني أن $M_X(0)$ هي مجموع كل الاحتمالات لذلك هي دائما مساوية للواحد؛ ومع ذلك ولتكون دالة توليد العزوم mgf مفيدة في توليد العزوم يجب أن تكون مُعَرَّفَةً في مجال قيم يحتوي الصفر بداخله؛ فدالة توليد العزوم mgf تفشل في وجودها إذا كانت العزوم نفسها تفشل في وجودها كما سنرى في مثال لاحق(مثال 77).

<u>مثال 74</u>

أبسط مثال لدالة توليد العزوم mgf هي في توزيع برنولي أين تكون قيم المتغير العشوائي X $(0,1)$ ويسند لها احتمالات موجبة؛ وليكن المتغير العشوائي X لتوزيع برنولي باحتمالات $p(0)=1/3,\ p(1)=2/3$ ، فيكون:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_x e^{tx}p(x)=e^{t0}(1/3)+e^{t1}(2/3)=(1/3)+(2/3)e^t$$

فتكون دالة توليد العزوم mgf لمتغير عشوائي من نوع برنولي دائما بهذا الشكل $p(0)+p(1)e^t$ وهي دالة معرفة جيدا لكل قيم (t).

والخاصية الرئيسية لدالة توليد العزوم mgf هي أنها "متفردة" وحقيقةً أنها تميز التوزيع المعني تماما.

نظرية تفرد دالة توليد العزوم mgf

إذا وُجِدَتْ دالة توليد العزوم mgf ووجدناها نفسها لتوزيعين فهذين التوزيعين متطابقين؛ مما يعني أن دالة توليد العزوم mgf تحدد بشكل متفرد التوزيع الاحتمالي وأنه يوجد تطابق فريد أي واحد لواحد(*one-to-one*) بين التوزيعات ودوال توليد العزوم $mgfs$.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

ويتطلب إثبات هذه النظرية التي تعد أساسا لـ(*Laplace*) الأدوات الرياضياتية المعقدة والتي هي خارج مجال هاته المطبوعة.

مثال 75

ليكن المتغير العشوائي X هو عدد الطبات المقدمة لبوليصة تأمين مستأجر في سنة ما ويملك دالة توليد عزوم mgf كما يلي: $M_X(t)=0.7+0.2e^t+0.1e^{2t}$ ؛ ويترتب على ذلك أن المتغير العشوائي X يمتلك دالة كتلة احتمالية pmf كما يلي: $p(0)=0.7,+p(1)=0.2,\ p(2)=0.1$ لأنه إذا استعملنا دالة الكتلة الاحتمالية pmf لتحديد دالة توليد العزوم mgf فسنحصل على $M_X(t)$ ؛ ويكون التوزيع محدد بشكل متفرد عن طريق دالة توليد العزوم mgf المتعلقة به.

مثال 76

لنفترض أنه تم سحب عينات لاختبار الدم لأفراد واحدا واحدا للعثور على شخص فصيلة دمه تمتلك عامل ريزوس موجب $Rh+$ ؛ ولنفترض أن المتغير العشوائي X : عدد العينات المُخْتَبَرَة ويتبع التوزيع الهندسي(الثنائي السالب) باحتمال $p=0.85$ ؛ فيكون: $p(x)=0.85(0.15)^{x-1}$ وذلك من أجل: $x=1,2,3,\ldots$

وتحديد دالة توليد العزوم mgf هنا تتطلب استعمال صيغة الجمع لسلة هندسية:

$$1+r+r^2+r^3+\ldots=1/(1-r) \qquad |r|<1$$

فتكون دالة توليد العزوم mgf

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum_{x\in D} e^{tx}p(x)=\sum_{x=1}^{\infty} e^{tx}(0.85)(0.15)^{x-1}=0.85e^t\sum_{x=1}^{\infty} e^{t(x-1)}(0.15)^{x-1}$$

$$=0.85e^t\sum_{x=1}^{\infty}(0.15e^t)^{x-1}=0.85e^t\left[1+0.15e^t+(0.15e^t)^2+\ldots\right]$$

$$=\frac{0.85e^t}{1-0.15e^t}$$

مع شرط في (r) أن: $|0.15e^t|<1$ ؛ وبالقسمة على 0.15 والأخذ بعين الاعتبارات اللوغاريتمات اللازمة مما يعطينا $t<-\ln(0.15)\approx 1.90$ ؛ وهذه الدالة معرفة في مجال $(-\infty,\ 1.90)$ ، والنتيجة هي مجال من القيم يحتوي الصفر بداخله لذا فدالة توليد العزوم mgf موجودة وتحقق $(M_X(0)=(0.85)/(1-0.15)=1)$ كما هو مطلوب.

مثال 77

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

بإعادة النظر في معطيات مثال سابق(مثال 49) أين كانت: $p(x)=\frac{k}{x^2} \quad x=1,2,3..$ ؛ وتذكر أن التوقع $E(X)$ غير موجود بالنسبة لهذا التوزيع مما يوحي بمشكلة في إيجاد دالة توليد العزوم mgf.

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\sum^{\infty} e^{tx}\frac{k}{x^2}$$

وبمساعدة اختبارات التقريب مثل اختبار النسبة السلسلة تتقارب فقط إذا $(e^t<1)$ ؛ مما يعني أن $(t\leq 0)$ ودالة توليد العزوم mgf معرفة فقط في المجال $(-\infty,0)$ ولأن الصفر موجود في أقصى هذا المجال وليس بداخله(فالمجال لابد أن يحتوي قيما سالبة وموجبة) فإن دالة توليد العزوم mgf غير موجودة؛ وعلى أية حال ليس من المفيد إيجاد العزوم لأن المتغير العشوائي X لا يمتلك حتى العزم الأول وهو التوقع.

2.4.1.3. اشتقاق العزوم من الدوال المولدة للعزوم:

كما تم الإشارة في بداية الفصل السابق بوجود نوعين من المتغيرات متقطع ومستمر في هذا الفصل سنفصل في المتغير المستمر التي تظهر في العديد من المسائل التطبيقية، وسنعرض تعريفاتها وخصائصها الأساسية وتوزيعاتها الاحتمالية وقيمها المتوقعة المختلفة وسنتطرق للتوزيع الطبيع باعتباره النموذج الأكثر أهمية وفائدة في جميع الاحتمالات والإحصاءات ثم سنتطرق لبعض التوزيعات المستمرة الأخرى والتي تستخدم غالبا في العمل التطبيقي ثم نقدم طريقة لتقييم ما إذا كانت بيانات عينة ما تتسق مع التوزيع المحدد ثم نحدد طرق لإيجاد توزيع المتغير العشوائي Y من توزيع متغير آخر X حين يكون الاثنان مرتبطان ببعض المعادلات $Y=g(X)$ ثم المحاكاة.

2.3. التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل

كما تم الإشارة في بداية الفصل السابق لوجود نوعين من المتغيرات متقطع ومستمر في هذا الفصل سنفصل في المتغير المستمر التي تظهر في العديد من المسائل التطبيقية، وسنعرض تعريفاتها وخصائصها الأساسية وتوزيعاتها الاحتمالية وقيمها المتوقعة المختلفة وسنتطرق للتوزيع الطبيع باعتباره النموذج الأكثر أهمية وفائدة في جميع الاحتمالات والإحصاءات ثم سنتطرق لبعض التوزيعات المستمرة الأخرى والتي تستخدم غالبا في العمل التطبيقي ثم نقدم طريقة لتقييم ما إذا كانت بيانات عينة ما تتسق مع التوزيع المحدد ثم نحدد طرق لإيجاد توزيع المتغير العشوائي Y من توزيع متغير آخر X حين يكون الاثنان مرتبطان ببعض المعادلات $Y=g(X)$ ثم المحاكاة.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

1.2.3. دوال الكثافة الاحتمالية ودوال التوزيع التراكمية

المتغير العشوائي المتقطع هو الذي تشكل قيمه الممكنة مجموعة منتهية أو غير منتهية ويمكن إدراجها في تسلسل لا نهائي(عنصر1، عنصر2....)؛ والمتغير العشوائي الذي تكون مجموعته من القيم الممكنة عبارة عن فترة كاملة من الأرقام "هو ليس متقطع"؛ ولقد قلنا في بداية الفصل السابق أن المتغير العشوائي X يكون مستمرا إذا كانت أولا قيمه الممكنة تتكون إما من فترة زمنية واحدة على خط الأعداد(فالنسبة للبعض إذا كان عددين $A<B$ فإن أي عدد x بين A و B؛ هو قيمة محتملة) أو اتحاد فترات منفصلة، وثانيا: $P(X=c)=0$ وذلك من أجل أي قيمة (c) تمثل قيمة محتملة للمتغير العشوائي X .

<u>مثال 78</u>

في دراسة لبيئة بحيرة بإجراء قياسات للعمق في مواقع مختارة عشوائيا فإن العمق في مثل هذه الحالات يمثل متغيرا عشوائيا مستمرا؛ وهنا قد يكون مثلا A هو الحد الأدنى لعمق البحيرة في منطقة أخذ القياسات كعينة بينما B تمثل الحد الأقصى للعمق في نفس العينة.

<u>مثال 79</u>

تم اختيار مركب كيميائي عشوائيا وكان الأس الهيدروجيني الخاص بهPH (درجة الحموضة) قد حُدِّد كمتغير عشوائي X ؛ فيكون هذا المتغير مستمرا لأن أي قيمة للأس الهيدروجينيPH بين 0 و14 تعتبر قيمة ممكنة؛ وإذا توفر المزيد من المعلومات حول المركب المختار للتحليل فقد تتكون مجموعة قيم محتملة عبارة عن فاصل زمني فرعي للمجال $[0,14]$ مثل $(055<x<6.5)$ وسيظل المتغير العشوائي X مع ذلك مستمرا.

<u>مثال 80</u>

ليكن المتغير العشوائي X هو الوقت الذي يقضيه زبون مختار عشوائيا في انتظار قصة شعر عند الحلاق؛ ستظن للوهلة الأولى أن هذا المتغير مستمر لأن القياس مطلوب لتحديد قيمته؛ ومع ذلك هناك زبائن محظوظون كفاية لعدم الانتظار تماما قبل الجلوس على كرسي الحلاق لذلك يجب أن يكون الأمر $P(X=0)>0$ ؛ بشرط عدم وجود كراسي فارغة؛ ومع ذلك أيضا فإن زمن الانتظار سيكون مستمرا حيث يأخذ المتغير العشوائي X أي قيمة بين أدنى حد زمني ممكنA وأقصى حد زمني ممكنB ؛ وقد يكون هذا المتغير لا مستمرا تماما ولا متقطعا تماما بل مزيجا من النوعين.

وعلى الرغم من أن متغيرات مثل الطول والوزن ودرجة الحرارة هي متغيرات مستمرة؛ إلا أن قيود أدوات القياس لدينا تقيدنا عمليا في عالم منفصل(ورغم أنه في بعض الأحيان يكون مقسما بدقة شديدة)؛ ومع ذلك غالبا ما تقارب النماذج المستمرة مواقف الواقع الحقيقي بشكل جيد جدا، وغالبا ما يكون التعامل مع الرياضيات المتسمرة (التفاضل والتكامل) أسهل من التعامل مع رياضيات المتغيرات والتوزيعات المنفصلة.

1.1.2.3. التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات المستمرة:

لنفترض أن المتغير العشوائي X هو عمق بحيرة عند نقطة تم اختيارها عشوائي على السطح؛ وليكن M هو أقصى عمق ممكن مقاسا بالمتر؛ فتكون أي قيمة في المجال $[0,M]$ هي قيمة محتملة للمتغير العشوائي X؛ وإذا قمنا بتقدير X عن طريق قياس العمق إلى أقرب متر فتكون القيم الممكنة موجبة وصحيحة وأقل أو مساوية لـ M؛ ويمكن تمثيل التوزيع المتقطع الناتج باستخدام الرسم البياني الاحتمالي الموالي(جزءa) والذي عند رسمه تكون مساحة المستطيل فوق أي عدد صحيح محتمل k هي نسبة من البحيرة والتي يكون عمقها (إلى أقرب متر صحيح) k؛ وتكون المساحة الإجمالية لكل المستطيلات مساوية للواحد الصحيح.

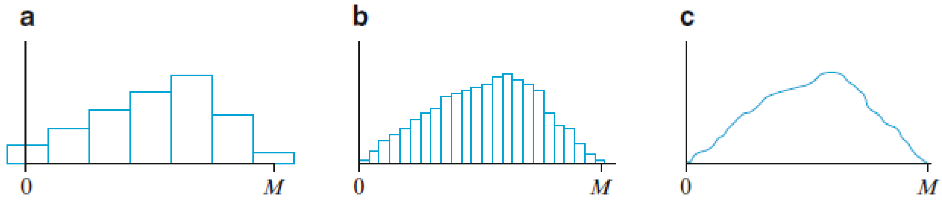


Fig. 3.1 (a) Probability histogram of depth measured to the nearest meter; (b) probability histogram of depth measured to the nearest centimeter; (c) a limit of a sequence of discrete histograms

حتى لو تم جعل المستطيلات في الشكل السابق(جزءa) أكثر ضيقا أي أكثر سلاسة(جزءb) فستبقى مساحة جمع المستطيلات مساوية للواحد الصحيح؛ ولو واصلنا بهذه الطريقة أي تضييق عرض المستطيلات فسيقترب التسلسل الناتج من منحنى سلس(جزءc)؛ ولأنه وكما قلنا أن مساحة مجموع المستطيلات مساوية للواحد الصحيح فإن المساحة الإجمالية أسفل المنحنى ستكون مساوية للواحد الصحيح أيضا؛ واحتمال أن يكون العمق عند نقطة تم اختيارها عشوائيًا بين a وb هو المساحة الواقعة أسفل المنحنى السلس بين النقطتين a وb؛ لذلك المنحنى السلس من النوع الموضح في الشكلc هو الذي يحدد التوزيع الاحتمالي المستمر.

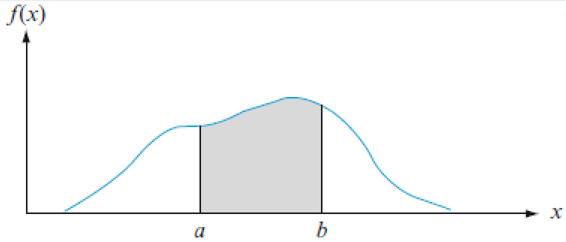
تعريف: ليكن X متغير عشوائي <u>مستمر</u> فتكون دالة **الكثافة** الاحتمالية pdf * (التوزيع الاحتمالي) للمتغير X هي الدالة $f(x)$ التي لو عوضنا فيها أي رقمين a و b حيث أن $a\le b$ فسيكون:

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx \;;$$

* دالة الكثافة الاحتمالية pdf في التوزيعات المستمرة تقابلها دالة الكتلة الاحتمالية pmf في التوزيعات المتقطعة.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

أي أن الاحتمال الذي يأخذه المتغير X بين أي نقطتين $[a,b]$ هو المساحة الواقعة فوق هذا المجال وتحت منحنى الكثافة الاحتمالية $f(x)$ كما هو مبين في الشكل الموالي والذي يشار إليه غالبا بمنحنى الكثافة.



ولكي نطلق اسم دالة الكثافة الاحتمالية pdf على أي دالة $f(x)$ يجب أن تستوفي الشرطين:

- يجب أن تكون هذه الدالة موجبة $f(x)\geq 0$ وذلك مهما كانت قيم (x)؛
- إجمالي المساحة الواقعة تحت منحنى هذه الدالة يجب أن تكون مساوية للواحد $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$.

مثال 81

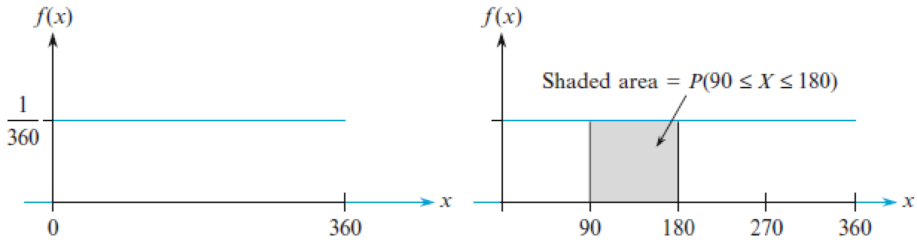
لو كانت لديك دالة كثافة احتمالية والتي تقيس الزاوية من أعلى نقطة في عجلة السيارة إلى نقطة معينة تمثل العيب الموجود في الإطار:

$$f\begin{cases}\frac{1}{360} & 0\leq x\leq 360\end{cases}$$

تم رسم دالة الكثافة الاحتمالية في الشكل الموالي وتبدو جليا $f(x)\geq 0$ والمساحة الواقعة تحت منحنى الكثافة هي مساحة المستطيل المضلل في الشكل (القاعدة×الارتفاع) $\frac{1}{360}\times(180-90)=0.25$ أي أن احتمال كون زاوية العطب بين 90^0 وبين 180^0 هي:

$$P(90\leq X\leq 180)=\int_{90}^{180}\frac{1}{360}dx=\frac{x}{360}\Big|_{x=90}^{x=180}=\frac{180}{360}-\frac{90}{360}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=0.25$$

فاحتمال أن تبتعد نقطة العطب عن أعلى نقطة في العجلة بـ90^0 هو 0.25.



د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

ولأنه عندما تكون $0\leq a\leq b\leq 360$ كما في المثال السابق فإن الاحتمال $P(a\leq X\leq b)$ يعتمد فقط على العرض $(b-a)$ من كل المجال فيقال بأن المتغير العشوائي X يمتلك توزيعا منتظما.

تعريف: يكون للمتغير العشوائي المستمر X <u>**توزيع منتظم**</u> في المجال $[A,B]$ إذا كانت دالة **كثافته الاحتمالية** pdf كما يلي:

$$f(x;A,B)=\begin{cases}\dfrac{1}{B-A} & A\leq x\leq B\end{cases}\text{؛}$$

ويرمز للمتغير العشوائي المستمر الذي يمتلك <u>**توزيعا منتظما**</u> بالرمز: $X\approx Unif[A,B]$.

يبدو الرسم البياني الاحتمالي لأي دالة كثافة احتمالية لتوزيع منتظم كما في المثال السابق مع كون المجال مجهول المعالم $[A,B]$ بدل $[0,360]$.

في حالة التوزيع المتقطع تبين دالة الكتلة الاحتمالية pdf كيفية توزيع النقط الممثلة لجميع الكتل الاحتمالية pmf بأحجام مختلفة على طول محور القياس؛ وفي حالة التوزيع المتقطع يتم تضليل الكثافة الاحتمالية بطريقة مستمرة على طول مجال القيم الممكنة؛ وإذا تم تضليل هذه الكثافة على المجال بشكل متساوي ينتج لدينا دالة كثافة احتمالية pdf كما في الشكل السابق.

حين يكون X متغير عشوائي متقطع فيسند لكل قيمة ممكنة قيمة احتمالية موجبة؛ بينما لو كان المتغير السابق X مستمرا ولأنه كما قلنا أعلاه بأن المساحة تحت الكثافة الاحتمالية والتي تسند لأي قيمة هي معدومة:

$$P(x=c)=P(c<x<c)=\int_c^c f(x)dx=0$$

حيث أن للشرط السابق $P(x=c)=0$ (عند كون المتغير مستمرا) نتيجة عملية مهمة وهي أن الاحتمال الذي يأخذه المتغير في بعض المجالات $[a,b]$ لا يعتمد على مدى **وجود** حدي المجال في حساب الاحتمال أم لا:

$$P(A\leq X\leq B)=P(A<X<B)=P(A\leq X<B)=P(A<X\leq B)$$

وبالعكس لو كان المتغير متقطع فستختلف كل الاحتمالات الأربعة السابقة عن بعضها لأن حدود المجال تأخذ قيما معينة.

وحالة الاحتمال الصفري لها مناظر مادي فلو اعتبرنا عمودا معدنيا أسطوانيا مرقما كمحور قياس مساحة قاعدته 1سم[2]؛ ولنفترض أن كثافة العمود عند أي نقطة منه تعطى بالقيمة $f(x)$ كدالة كثافة؛ وإذا تم تقطيع هذا العمود عند نقطتين a و b وتمت إزالة الجزء بينهما فإن مقدار الكتلة المزالة هيج حيث يتم إسناد الكتلة لأجزاء معينة من العمود وليس لنقاط منه.

لذلك فإنه إذا كان $P(x=c)=0$ حين يكون المتغير مستمرا فماذا تمثل $f(c)$ ؛ فإذا كان المتغير متقطعا فإن دالة كتلته الاحتمالية pmf يتم تقييمها $x=c$ و $p(c)$ تشير إلى احتمال أن المتغير X مساوٍ لـ c

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

؛ وللمساعدة على تفهم الدالة $f(c)$ فلنعتبر أن نافذة صغيرة أحجامها $x=c$ ؛ و$c,c+\Delta x$ (فكرة ريمان التقريبية المعتادة في حساب التفاضل والتكامل) فنحصل على:

$$\int_c^{c+\Delta x} f(x)dx \approx \Delta x \times f(c)$$ والتي تصبح: $$f(c)=\frac{\int_c^{c+\Delta x} f(x)dx}{\Delta x}=\frac{P(c\leq X\leq c+\Delta x)}{\Delta x}$$

وهذا يشير إلى أن $f(c)$ ليس احتمالا بل على الأصل وتقريبا هو احتمال مجال مقسوم على طول المجال المختار؛ فإذا ربطنا الكتلة بالاحتمال وتذكرنا أن طول المجال هو البعد الأحادي التناظري للحجم؛ فتمثل f حاصل قسم الكتلة على الحجم والتي تعرف باسم الكثافة؛ فيعكس ارتفاع الدالة $f(x)$ في نقطة معينة مدى كثافة القيم بالقرب من تلك النقطة؛ والمقاطع الأكثر طولا للدالة $f(x)$ تحتوي في مجال طوله ثابت احتمالات أكبر المقاطع الأقصر.

<u>مثال 82</u>

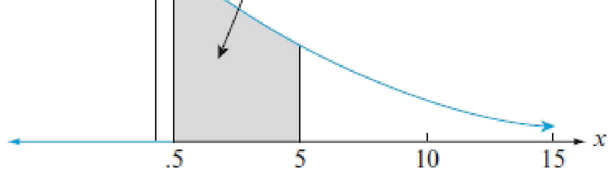
ليكن X متغير عشوائي يمثل الوقت المنقضي بين مرور انتهاء مرور سيارة في نقطة معينة وبداية مرور سيارة أخرى في طريق سريع في فترة الذروة لحركة المرور؛ فكانت دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} 0.15e^{-0.15(x-0.5)} & x\geq 0.5 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

وشكل هذه الدالة مبين في الرسم الموالي فنلاحظ عدم وجود كثافة مرتبطة بوقت المرور الأقل من0.5؛ وبعده مباشرة تبدأ كثافة المتغير بالتناقص بسرعة (سرعة أسية) كلما زادت قيمة المتغير x عن0.5ح وحقيقة أن المنحنى دالة الكثافة أكثر طولا كلما اقتربنا من 0.5 وأقل طولا كلما اقتربنا مثلا من 10 يشير إلى أن وقت المنقضي بين مرور سيارتين أكثر كثافة عند الحدود اليسرى من الدالة أي وجود نسبة كبيرة من الوقت في المجال $]0.5-1.5[$ أكثر منه في المجال$]10-11[$ رغم أن للمجالين نفس الطول.

$$\begin{aligned}
&\int_a^{\infty} e^{kx}dx=(1/k)e^{-ka}\\
&\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0.5}0dx+\int_{0.5}^{\infty}0.15e^{-0.15(x-0.5)}dx\\
&\qquad =0.15e^{0.075}\int_{0.5}^{\infty}e^{-0.15x}dx\\
&\qquad =0-(0.15e^{0.075}\times\frac{1}{-0.15}e^{-0.15(0.5)}\\
&\qquad =1
\end{aligned}$$

فيكون احتمال فترة المرور على الأكثر خمس ثواني هو كما في الشكل المقابل:



د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

أي:

$$P(X\leq 5)=\int_{0.5}^{5} f(x)dx=\int_{0.5}^{5} 0.15e^{-0.15(x-0.5)}dx$$
$$=0.15e^{0.075}\int_{0.5}^{\infty} e^{-0.15x}dx$$
$$=0.15e^{0.075}-\frac{1}{0.15}e^{-0.15x}\Big|_{0.5}^{5}$$
$$=e^{0.75}(-e^{-0.75}+e^{-0.075})=1.078(-0.472+0.928)=0.491$$

وبما أن المتغير مستمر فإن: $P(X\leq 5)=P(X<5)=0.491$ ؛ وذلك لأن احتمال فترة مرور تساوي5 تمام هو صفر: $P(X=5)=\int_{5}^{5} f(x)dx=0$

وقد تبدو هذه العبارة غير منطقية إلا أننا في حالة المتغير المستمر فقيمة 5 تعني .....5.00000 على مالا نهاية من الأصفار؛ أي أننا نبحث عن قيمة محددة في مجال غير منتهي وهذا لا يمكن؛ وعلى عكس بعض التوزيعات المنفصلة كالتوزيع الثنائي، فوق الهندسي والتوزيع الثنائي السالب؛ لا يمكن عادة اشتقاق توزيع أي متغير عشوائي مستمر باستخدام الحجج الاحتمالية البسيطة بل يتم اتخاذ القرارت بناءا على معرفة سابقة وبيانات متاحة؛ ولحسن الحظ فإن الكثير من دوال الكثافة الاحتمالية تتلاءم وتتوافق مع مجموعة مختلفة من المواقف التجريبية والواقعية؛ كما سنرى لاحقا في هذا الفصل؛ ومن المفيد إحصائيا التفكير بأن المجتمع يتكون من مجموعة من القيم بدلا من مجموعة من الأشخاص أو الأشياء؛ فتكون دوال الكثافة الاحتمالية نموذجا لتوزيع هذه القيم الرقمية للمجتمع ومن خلال ذلك يمكن حساب مختلف خصائص المجتمع كالوسط والوسيط؛ وسنستخدم نفس المفاهيم في المتغيرات المتقطعة والتي تقابلها في المتغيرات المستمرة وغالبا بتغيير مفاهيم الجمع بمفاهيم التكامل.

2.1.2.3. دالة التوزيع التراكمية:

دالة التوزيع التراكمية cdf $(F(c))$ لمتغير عشوائي متقطع X تُسْنِد لأي قيمة x الاحتمال $P(X\leq x)$ ؛ وهي تأتي عن طريق جمع قيم دوال الكتلة الاحتمالية pmf $(p(y))$ عبر كل القيم الممكنة y والتي تحقق الشرط $y\leq x$ ؛ بينما دالة التوزيع التراكمية cdf $(F(c))$ لمتغير عشوائي مستمر X تُسْنِد نفس الاحتمال $P(X\leq x)$ ولكن باستخراجه من تكامل دالة التوزيع الاحتمالية pdf $(f(y))$ بين النهاية $(-\infty)$ والقيمة (x).

تعريف: دالة **التوزيع التراكمية** cdf للمتغير العشوائي المستمر X تُعَرَّفُ من أجل أي قيمة x كما يلي:

$$F(x)=P(X\leq x)=\int^{x} f(v)dv \text{ ؛}$$

ولكل قيمة x هناك مساحة تحت منحنى الكثافة على يسار هذه القيمة x يرمز لهذه المساحة بالرمز $F(x)$ وهي دالة **التوزيع التراكمية** cdf.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

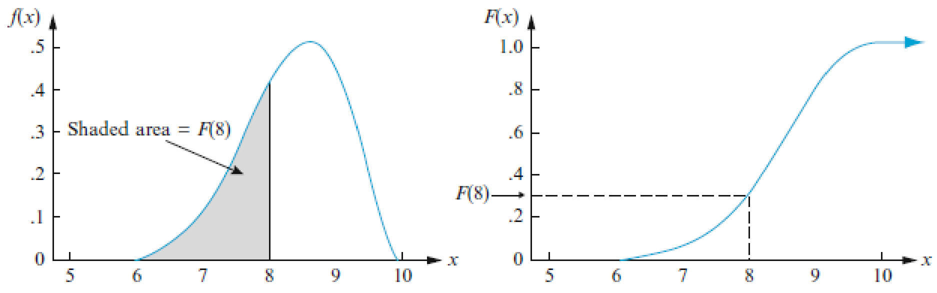
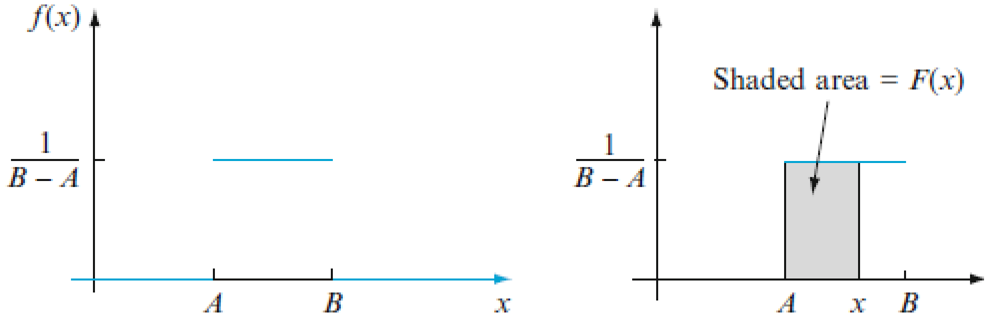


Fig. 3.5 A pdf and associated cdf

مثال 83

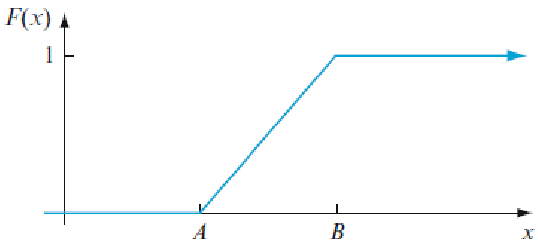
ليكن X متغير عشوائي ذو توزيع منتظم يمثل سماكة غشاء وهو على المجال $[A,B]$ ويظهر الشكل التالي دالة الكثافة؛ ومن أجل $x<A$ تكون $F(x)=0$ وذلك لعدم وجود مساحة تحت منحنى الكثافة في هذا المجال من قيم x ؛ ومن أجل $x\geq B$ تكون $F(X)=1$ وذلك لن كل المساحة تحت منحنى الكثافة مجمعة على يسار هذا المجال من قيم x ؛

$$F(x)=\int^{x} f(y)dy=\int^{x}\frac{1}{B-A}dy=\frac{1}{B-A}\times y\Big|^{y=x}=\frac{x-A}{B-A}$$



فتكون دالة التوزيع التراكمية cdf ومنحناها إجمالا كما يلي:

$$F(X)=\begin{cases}0 & x<A\\ \frac{x-A}{B-A} & A\leq x\leq B\end{cases}$$



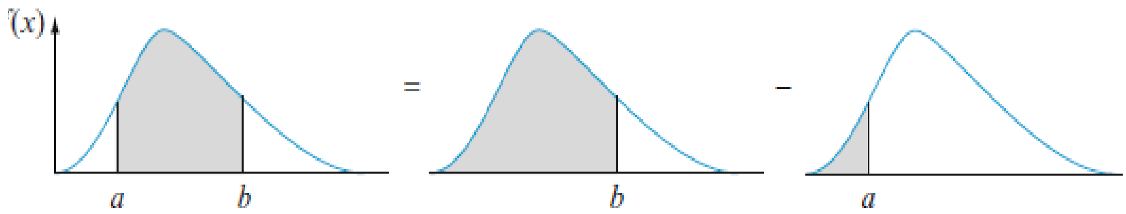
3.1.2.3. حساب الاحتمالات من دالة التوزيع التراكمية $F(x)$:

أهمية دالة التوزيع التراكمية cdf مثل حالة المتغيرات العشوائية ذات التوزيعات المتقطعة؛ أين تحسب احتمالات مختلف المجالات من خلال صيغة أو جدول لكل $F(X)$.

تعريف: للمتغير العشوائي المستمر X بدالة كثافة احتمالية $f(x)$ ودالة توزيع **تراكمية** $F(x)$؛ فيكون من أجل أي عدد a: $P(X>a)=1-F(a)$

ومن أجل أي رقمين a و b مع كون $a<b$: $P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)$

ويبين الشكل الموالي الجزء الثاني من التعريف السابقح فالاحتمال المرغوب هو المساحة المظللة تحت منحنى الكثافة بين الرقمين a و b ويساوي الفرق بين بين المساحتين التراكميتين المظللتين؛ وهذا يختلف عن ما يماثلها في المتغيرات العشوائية المتقطعة والمقيمة بقيمة صحيحة(التوزيع الثنائي وتوزيع بواسون) فعند كون a و b عددين صحيحين: $P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a-1)$.



مثال 84

لنفترض أن دالة الكثافة الاحتمالة للحجم X (بالنيوتن) الذي يتحمله جسر معطاة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8}+\frac{3}{8}x & 0\leq x\leq 2\end{cases}$$

ولأي رقم x بين 0 و 2:

$$F(x)=\int^{x} f(y)dy=\int^{x}(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}x)dy=\frac{x}{8}+\frac{3x^2}{}$$

فيكون:

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{x-A}{} & 0\leq x\leq 2\end{cases}$$

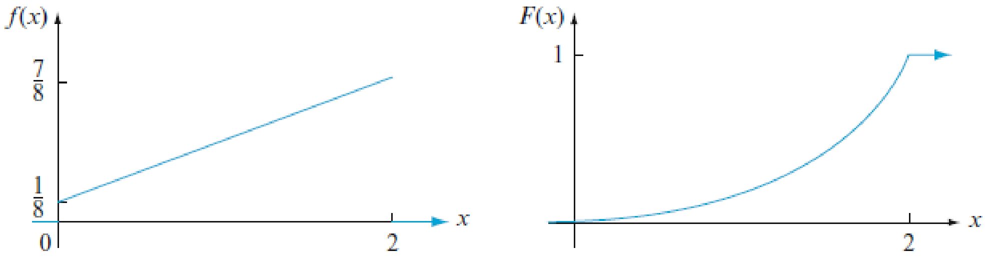
فتكون منحنيات دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ ودالة الوزيع التراكمية $F(x)$ المبينة أدناه؛ فلو حسبنا احتمال أن يكون الحجم محصورا بين 1 و 1.5:

$$P(1\leq X\leq 1.5)=F(1.5)-F(1)=\left[\frac{1}{8}(1.5)+\frac{3}{16}(1.5)^2\right]-\left[\frac{1}{8}(1)+\frac{3}{16}(1)^2\right]$$

واحتمال أن يتجاوز الحجم قيمة 1 نيوتن:

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

$$P(X>1)=1-P(X\le 1)1-F(1)=1-\left[\frac{1}{8}(1)+\frac{3}{16}(1)^2\right]$$



ومن مزايا دالة التوزيع التراكمية cdf أننا بمجرد استخراجها (تكامل دالة الكثافة الاحتمالية) فإن أي احتمال يمكن حسابه بسهولة دون الاضطرار لحساب التكامل مرة أخرى.

4.1.2.3. اشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)$ من دالة التوزيع التراكمية $F(x)$:

إذا كان X متغيرا متقطعا فإن دالة الكتلة الاحتمالية تُسْتَخرج من دالة التوزيع التراكمية cdf بحساب الفرق بين أي قيمتين $F(x)$؛ ولو كان المتغير السابق مستمرا فالفرق يتم اشتقاقه والاستنتاج التالي هو نتيجة للنظرية الأساسية لحساب التفاضل والتكامل.

تعريف: إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا بدالة كثافة احتمالية $f(x)$ ودالة توزيع **تراكمية** $F(x)$؛ فإنه من أجل أي عدد a استطعنا اشتقاق $F(x)$ فإن: $F'(x)=f(x)$

مثال 85

مواصلة للمثال ما قبل السابق(مثال 83) فعندما يكون المتغير العشوائي X منتظما في مجال معين $X\approx Unif[A,B]$ فإن $F(x)$ قابلة للتفاضل والاشتقاق إلا حين يكون $x=A$ و $x=B$ أين يكون رسم الدالة التراكمية $F(x)$ له زوايا حادة عند القيمتين وذلك لأن $F(x)=0$ من أجل $x<A$ و $F(x)=1$ لأجل $x>B$؛ وكذلك يكون $F'(x)=f(x)=0$ وذلك من أجل أي قيمة $A<x<B$

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{x-A}{B-A}\right)=\frac{1}{B-A}=f(x)$$

5.1.2.3. المئيات للتوزيعات المستمرة:

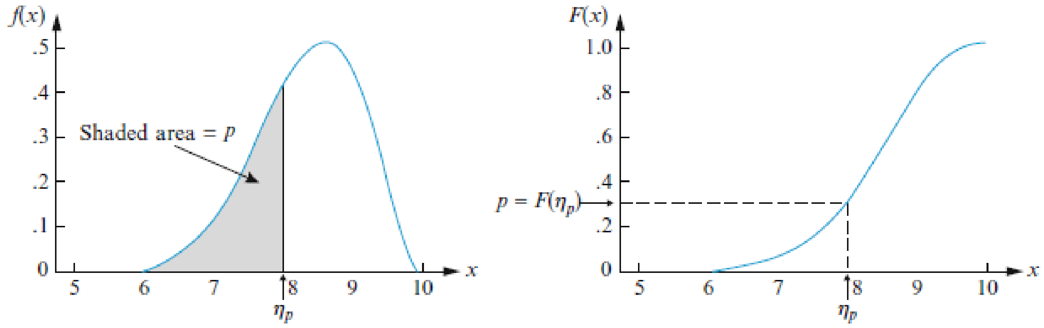
حين نقول أن علامة طالب كانت عند المئين(النسبة المئوية)الخامسة والثمانين 85^h؛ فهذا يعني أن 85% من الطلبة قد تحصلو على علامة أقل من علامة الطالب أعلاه و15% من الطلبة قد تحصلو على علامة أكبر من علامة الطالب أعلاه؛ وبالمثل فإن المئين الأربعون هو العلامة التي تتجاوز40% من جميع العلامات وهي أقل من60% من جميع العلامات.

تعريف: ليكن p عدد محصورا بين 0 و1؛ فيكون الميئين (النسبة المئوية) رقم $100p^{th}$ في توزيع متغير عشوائي مستمر يرمز له بالرمز η_p معرفا ومحددا ضمنيا بالمعادلة التالية:

$$p=F(\eta_p)=\int_{-\infty}^{\eta_p} f(y)d(y)$$ **معادلة 14**

ولنفترض أننا نستطيع إيجاد معكوس الدالة $F(x)$ فيمكن كتابتها كما يلي: $\eta_p=F^{-1}(p)$

وبشكل خاص فإن وسيط ($median$) التوزيع المستمر هو الميئين رقم 50^{th} فنقول $\eta_{0.5}$ أو $F^{-1}(0.5)$ ويعني أن نصف المساحة تحت منحنى الكثافة تقع على يسار الوسيط والنصف الآخر تقع على يمين الوسيط؛ ونرمز عادة لوسيط التوزيع ببساطة بالرمز η (دون التخفيض 0.5).



وحسب التعبير في (**المعادلة 14**) أعلاه تكون η_p هي تلك القيمة على محور القياس والتي تكون نسبة $100p\%$ من المساحة تحت منحنى دالة الكثافة $f(x)$ تقع على يسارها (η_p)؛ و$100(1-p)\%$ من المساحة تحت منحنى دالة الكثافة $f(x)$ تقع على يمينها (η_p)؛ فمثلا الميئين الخامس والسبعون 75^{th} هو أن المساحة التي تقع تحت منحنى الكثافة الكثافة $f(x)$ وعلى يسار $\eta_{0.75}$ هي 0.75.

مثال 86

توزيع حجم الحصى (بالأطنان) المباعة من قبل شركة توريد أدوات بناء في أسبوع معين تتبع متغيرا عشوائيا بدالة كثافة احتمالية pdf:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}(1-x^2) & 0\le x\le 1\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

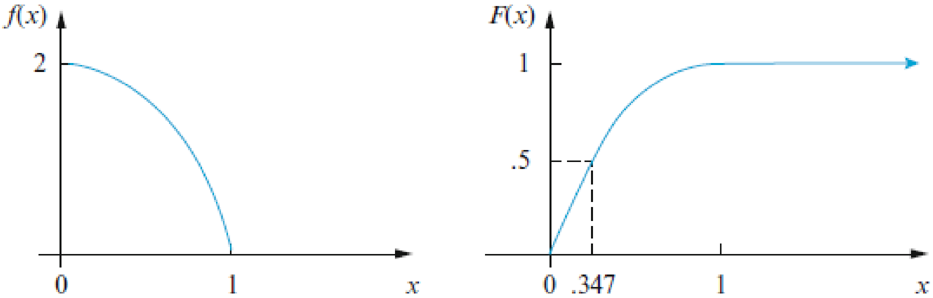
فتكون تبعا لذلك دالة التوزيع التراكمية للمبيعات لأي قيمة (x) محصورة بين 0 و1 هي:

$$F(x)=\int_0^x \frac{3}{2}(1-y^2)dy=\frac{3}{2}\left(y-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=x}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)$$

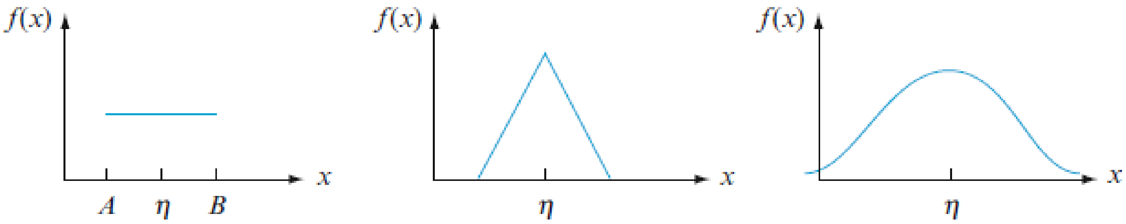
ويبين الشكل التالي منحنيا كل من دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمية؛ وأن الميئين (النسبة المئوية) رقم $100p^{th}$ لهذا التوزيع يحقق المعادلة التالية:

$p=F(\eta_p)=\frac{3}{2}\left(\eta_p-\frac{\eta_p^3}{3}\right)$؛ مما يعني أن: $\eta_p^3-3\eta_p+2p=0$

ومن أجل الوسيط $p=0.5$ تكون المعادلة المطلوب حلها هي: $\eta^3-3\eta+2(0.5)=0$ فيكون الحل $\eta=0.347$ ؛ فإذا كان التوزيع ثابتا عبر الزمن (أي من أسبوع لآخر) فعلى المدى الطويل سينتج من 50% من الأسابيع مبيعات أقل من 0.347 طن وفي 50% من الأسابيع مبيعات أكثر من 0.347 طن.



إن التوزيع المستمر الذي يمتلك دالة كثافة احتمالية متماثلة أو متناظرة هو الذي يعني أن رسمه البياني أو منحنى دالة الكثافة الاحتمالية على يسار نقطة ما معاكس (مناظر) تماما للرسم على يمين تلك النقطة؛ يمتلك وسيطا η (أو $\eta_{0.5}$) مساوٍ لنقطة التناظر وذلك نظرا لأن نصف المساحة تحت منحنى الكثافة تقع على يمين تلك النقطة والنصف الآخر على يسارها وفي الشكل التالي عدة أمثلة لذلك، وغالبا مايتم افتراض أن مقدار الخطأ في قياس المتغير لهع توزيع متماثل أيضا.



6.1.2.3. تمارين المحور (دوال الكثافة ودوال التراكم)

01: تم قياس تيار كهربائي في دائرة كهربائية معينة وتم التعبير عنه كمتغير عشوائي مستمر X بدالة كثافة احتمالية:

$$f(x)=\begin{cases}0.75x+2 & 3\le x\le 5\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- أرسم دالة الكثافة الاحتمالية وتأكد من أن المساحة تحت منحنى الكثافة هي الواحد الصحيح؛
- أحسب $P(X\le 4)$ وكيف نقارن هذا الاحتمال مع $P(X<4)$؛
- أحسب $P(3.5\le X\le 4.5)$ و $P(X\ge 4.5)$؛

02: تم افتراض أن الخطأ المتضمن في التمرين السابق هو متغير عشوائي مستمر X بدالة كثافة احتمالية:

$$f(x)=\begin{cases}0.9375(4-x^2) & -2\le x\le 2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- أرسم دالة الكثافة الاحتمالية؛
- أحسب $P(X>0)$؛
- أحسب $P(X<-0.5$ أو $X<0.5)$؛

03: أستاذ الإحصاء لا ينهي محاضرته أبدا قبل انقضاء الساعة المخصصة للحصة؛ وينهي دائما محاضرته بعد دقيقتين من تلك الساعة، وليكن متغير عشوائي مستمر X يمثل الوقت المنقضي بين انتهاء الساعة وانتهاء محاضرته؛ ولنفترض أن دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير هي:

$$f(x)=\begin{cases}kx^2 & 0\le x\le 2\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

- أوجد قيمة (k) وارسم منحنى الكثافة المتعلق به (المساحة الإجمالية تحت منحنى الكثافة هي 01)؛
- ماهو احتمال أن تنتهي المحاضرة خلال دقيقة واحدة بعد انتهاء الساعة؟؛
- ماهو احتمال أن تتواصل المحاضرة بين 60 و 90 ثانية؟؛
- ما هو احتمال أن تتواصل المحاضرة بعد 90 ثانية من انتهاء الساعة؟.

04: بافتراض أن استخدام التوزيع المنتظم لقطر نوع معين من الأسطوانات الحديدية هو بين $A=20$ و $B=4.25$ بالمليمتر:

- حدد دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير وارسمها؛
- ماهو احتمال أن يتجاوز قطر الأسطوانة 03 مم؟؛
- ماهو احتمال أن يتراوح قطر الأسطوانة في حدود 01 مم من وسط قطر الأسطوانة؟؛
- من أجل أية قيمة (a) والتي تحقق: $(0.20<a<a+1<4.25)$، ماهو احتمال $P(a<X<a+1)$ ؟.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

05: لنعتبر مرة أخرى(مثال 82) دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع متغير الوقت بين مرور سيارتين في نقطة معينة من الطريق السريع فما هو احتمال أن يكون الوقت:

- على الأكثر 6 ثواني؟؛
- أكثر من 6 ثواني؟ وعلى الأقل 6 ثواني؟؛
- بين 5 و 6 ثواني؟.

06: تفتح مكتبة الطلبة أبوابها للمطالعة لمدة ساعتين؛ وليكن X متغير يشير إلى الوقت الذي يقضيه الطالب لمطالعة أي كتاب؛ ولنفترض أن هذا الوقت يتبع دالة توزيع تراكمية كما يلي:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0\leq x\leq 2 \\ 1 & 2\leq x \end{cases}$$

فاحسب الاحتمالات التالية:

- $P(X<0)$؛
- $P(-1<X<1)$؛
- $P(X>0.5)$؛
- وسيط (*median*) مدة المطالعة (حل $[F(\eta)=0.5]$)؛
- مشتق $[F(\eta)=0.5]$ لاستخراج دالة الكثافة الاحتمالية.

07: قدمنا في مثال سابق(مثال 82) مفهوم مرور الوقت بين سيارتين في نقطة معينة من الطريق السريع باقتراح توزيع خاص له كمتغي؛ فلو افترضنا هذا المتغير في طريق آخر بدالة كثافة احتمالية كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{k}{x^4} & x>1 \\ 0 & x\leq 1 \end{cases}$$

- حدد قيمة k التي تجعل من $f(x)$ دالة كثافة احتمالية pdf؛
- أوجد دالة التوزيع التراكمية cdf؛
- استخدم دالة التوزيع التراكمية cdf في السؤال السابق لتحديد احتمال تجاوز الوقت لثانيتين؛ وكذا احتمال أن يكون الوقت بين ثانيتين وثلاث ثواني.

08: عودة للتمرين الثالث وباستخدام دالة الكثافة الاحتمالية $f(x)=\begin{cases} kx^2 & 0\leq x\leq 2 \\ 0 & otherwis \end{cases}$ أجب على الأسئلة التالية:

- أرسم دالة الكثافة الاحتمالية pdf ثم أوجد دالة التوزيع التراكمية cdf للمتغير X وارسمها؛

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

- ماهو احتمال $P(X\leq 0.5)$ أي $F(0.5)$ ؟؛
- استخدم السؤال الأول لحساب $P(0.25< X\leq 0.5)$ و $P(0.25\leq X\leq 0.5)$ ؛
- ماهو الميئين(النسبة المئوية) الخامس والسبعين 75^{th} ؟.

09: أجب على الأسئلة الموالية إذا كان X متغير عشوائي مستمر ذو دالة[1] توزيع تراكمية cdf كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x\leq 0 \\ \frac{x}{4}\left[1+\ln\left(\frac{4}{x}\right)\right] & 0<x\leq 4 \\ 1 & x>4 \end{cases}$$

- $P(X\leq 1)$ أي؛
- $P(1\leq X\leq 3)$ ؛
- دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير X .

[1]- مستمدة من مقالة:

Carey, William P. "Variability in Measured Bedload-Transport Rates." Journal of the American Water Resources Association, 1985: 39-48.

2.2.3. *القيم المتوقعة ودوال توليد العزوم للمتغيرات المستمرة:*

في الفصل السابق رأينا أن الانتقال من دالة التوزيع التراكمية cdf للمتغير المتقطع إلى دالة التوزيع التراكمية cdf للمتغير المستمر يتم عبر استبدال قواعد التكامل بقواعد الجمع؛ وبنفس المبدأ للانتقال من القيم المتوقعة $E(X)$ للمتغيرات المتقطعة إلى مثيلتها في المتغيرات المستمرة.

1.2.2.3. القيم المتوقعة للمتغيرات المستمرة:

من أجل كل متغير عشوائي X متقطع يكون الوسط الحسابي u_x أو $E(X)$ معرفا كمتوسط مرجح ويتأتى بجمع $x \times p(x)$ عبر كل القيم الممكنة لـ X باستبدالنا للتكامل بدل الجمع ودالة الكثافة الاحتمالية pdf بدل دالة الكتلة الاحتمالية pmf وللحصول على متوسط مرجح مستمر(القيمة المتوقعة).

تعريف: القيمة المتوقعة أو الوسط الحسابي(مرجح) لمتغير عشوائي مستمر X بدالة كثافة احتمالية pdf هي $f(x)$ تكون كما يلي:
$$u = u_x = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f(x)dx$$

مثال 87

كانت دالة الكثافة الاحتمالية pdf في مثال سابق(مثال 86) لتوزيع حجم الحصى(بالأطنان) المباعة كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

فنحسب القيمة المتوقعة $E(X)$:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f(x)dx = \int_0^1 x \times \frac{3}{2}(1-x^2)dx = \frac{3}{2}\int_0^1 (x-x^3)dx =$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|^{x=1}$$

فإذا تم تحديد حجم المبيعات أسبوعا بعد أسبوع حسب دالة الكثافة الاحتمالية pdf المعطاة فستكون القيمة المتوسطة لحجم المبيعات على المدى الطويل هي: $E(X) = \frac{3}{8} = 0.375$؛

وبنفس طريقة المعالجة في حالة المتغير المتقطع يمكن اعتبار القيمة المتوقعة u_x كنقطة توازن (نقطة ارتكاز أو مركز الكتلة) للتوزيع المستمر؛ ففي المثال الحالي إذا تم قص قطعة ورق مقوى على نفس شكل المنطقة الواقعة أسفل منحنى الكثافة $f(x)$ فستتوازن إذا كانت مدعمة عند $u_x = \frac{3}{8}$ على طول

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

الحافة السفلية؛ وعندما تكون دالة الكثافة الاحتمالية pdf أي $f(x)$) متماثلة ومتناظرة فستتوازن عند نقطة التناظر النقطة مما يعني أنها نقطة الوسط الحسابي u_x.[1]

وغالبا مانرغب في حساب القيمة المتوقعة لبعض الدوال $h(x)$ للمتغير العشوائي X ؛ ولو اعتبرنا الدالة[2] $h(x)$ كمتغير عشوائي جديد نرمز له $Y=h(x)$ فيمكن حساب $E(Y)$ من خلال التعريف السابق ولحسن الحظ هناك طريقة سهلة لحساب $E[h(x)]$ كما في حالة المتغيرات المتقطعة.

اقتراح: إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا بدالة كثافة احتمالية pdf هي $f(x)$ وكانت $h(X)$ هي دالة للمتغير X فإن:

$$u=u_{h(x)}=E[h(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\times f(x)dx$$

ويُشار إليه أحيانا على أنه قانون "الإحصائي اللاوعي"[3]

وباستثناء بعض الحالات التي تكون فيها $h(x)$ خطية فإن: $E[h(X)]$ لا تساوي $h(\mu_x)$ فيتم تقييم الدالة $h(x)$ عند متوسط X.

مثال 88

يمكن نمذجة التباين لمصدر تيار كهربائي معين X (بالمليأمبير) بدالة الكثافة الاحتمالية التالية pdf:

$$f(x)=\begin{cases}1.25-0.25x & 2\le x\le 4\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

فيكون متوسط التيار من هذا المصدر هو:

$$E(X)=\int_2^4 x\times(1.25-0.25x)dx=\frac{17}{6}=2.833mA$$

وإذا كان هذا التيار يمر عبر مقاومة 220 واط فالقوة الناتجة (بالميكروواط) ستُعْطى بالعلاقة التالية $h(X)=$ مربع شدة التيار مضروبا في المقاومة أي $h(X)=220X^2$ فتكون قيمة القوة المتوقعة للتيار كما يلي:

$$E(h(X))=E(220X^2)\ =\int_2^4 220x^2(1.25-0.25x)dx=$$

$$=\int_2^4(275x^2-55x^3)dx$$

[1] - تذكر من مقياس الإحصاء الوصفي أن المنحنى إذا كان متناظرا فإن الوسط الحسابي مساوٍ للوسيط والمنوال إن وجدا.

[2] - يمكن مراجعة درس تحويل المتغيرات العشوائي لمعرفة الطرق التي يتم بها اشتقاق دوال الكثافة الاحتمالية للمتغيرات الجديدة.

[3] - يمنحنا قانون الإحصائي اللاواعي "Law of the Unconscious Statistician" معادلة جيدة لحساب القيمة المتوقعة لدالة لمتغير عشوائي معين.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

ولاحظ أن قيمة القوة المتوقعة لا تساوي $220\times E(X)$ أي لا تساوي $220\times(2833.33)^2$ ؛ إذ أنه خطأ شائع استبدال متوسط التيار $E(X)=\mu_x$ في صيغة القوة $h(X)=220X^2$.

مثال 89

تتنافس شركتا اتصالات في الجزائر على عدد محدود من زبائن المؤسسات(باعتبارهم موردا نادرا) وليكن المتغير العشوائي X هو نسبة الزبائن التي تتحصل عليها الشركة الأولى بدالة كثافة احتمالية pdf :

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0\leq x\leq 1\end{cases}$$

وهو توزيع منتظم على المجال $[0,1]$ ؛ ولتكن الدالة التي تتحكم في الحصول على عدد الزبائن هي:

$$h(x)=\max(X,1-X)=\begin{cases}1-X & 0\leq X\leq \frac{1}{2}\end{cases}$$

فتكون القيمة المتوقعة للزبائن المتحكم في عددهم هي:

$$E[h(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}\max(x,1-x)\cdot f(x)dx=\int_{0}^{1}\max(x,1-x)\cdot 1\ \ dx$$
$$=\int_{0}^{1/2}(1-x)\cdot 1\ \ dx+\int_{1/2}^{1}x\cdot 1\ \ dx=\frac{3}{4}$$

في حالة المتغيرات المتقطعة تم تعريف تباين المتغير X بأنه القيمة المتوقعة لمربعات انحراف القيم عن وسطها (تم حسابها عن طريق الجمع)؛ فنحسبه في حالة المتغيرات المستمرة بنفس الطريقة بتعويض الجمع بالتكامل:

تعريف: التباين لمتغير عشوائي مستمر X له دالة كثافة pdf ويملك قيمة متوقعة هي:

$$u_x=E(X)$$

$$\sigma_Y^2=Var(X)=\int^{\infty}(x-\mu)^2\times f(x)dx=E\left[(X-\mu)^2\right]$$

الانحراف المعياري للمتغير العشوائي X هو: $\sigma_X=SD(X)=\sqrt{Var(X)}$

وكما في حالة المتغيرات المتقطعة يكون التباين σ_X^2 هو القيمة المتوقعة أو متوسط مربعات انحراف القيم عن وسطها u_X ؛ والانحراف المعياري σ_X يمكن تفسيره بأنه حجم الانحراف التمثيلي عن قيمة الوسط الحسابي u_X ؛ ولاحظ أن الانحراف المعياري σ_X يمتلك نفس وحدة القياس التي يمتلكها المتغير X.

مثال 90

ليكن المتغير العشوائي X يتبع توزيعا منتظما في مجال $X\approx Uni[A,B]$ ؛ وبما أن التوزيع المنتظم متماثل ومتناظر فإن الوسط الحسابي لهذا المتغير X هو على نقطة التناظر لمنحنى الكثافة وهو بوضوح النقطة الوسطية $(A+B)/2$ وهو ما يمكن التأكد منه عن طريق التكامل كما يلي:

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

$$\mu=\int_A^B x\times\frac{1}{B-A}dx=\frac{1}{B-A}\times\frac{x^2}{2}\Big|_A^B=\frac{1}{B-A}\times\frac{B^2-A^2}{2}=\frac{B+A}{2}$$

ويعطى التباين للمتغير العشوائي المستمر X كما يلي:

$$\sigma_X^2=\int_A^B(x-\mu)^2\times\frac{1}{B-A}dx=\frac{1}{B-A}\int_A^B\left(x-\frac{A+B}{2}\right)^2dx$$

وبتعويض $u=x-\dfrac{A+B}{2}$ نجد

$$=\frac{1}{B-A}\int_{-(B-A)/2}^{(B-A)/2}(u)^2du$$

وبخاصية التناظر نجد

$$=\frac{2}{B-A}\int_0^{(B-A)/2}(u)^2du$$

$$=\frac{2}{B-A}\times\frac{u^3}{3}\Big|_0^{(B-A)/2}=\frac{2}{B-A}\times\frac{(B-A)^3}{2^3\times3}=\frac{(B-A)^2}{12}$$

والانحراف المعياري للمتغير X هو الجذر التربيعي للتباين: $\sigma_X=\sqrt{(B-A)^2/12}=(B-A)/\sqrt{12}$ ؛ ولاحظ أن الانحراف المعياري للتوزيع المنتظم $X\approx Uni[A,B]$ يتناسب مع طول المجال $(B-A)$ والذي يتطابق مع المفهوم البديهي القال بأن الانحراف المعياري الأكبر يتوافق مع أكبر انتشار في التوزيع.

رأينا في عنصر سابق[1] العديد من الخصائص للقيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري في حالة المتغير العشوائي المتقطع؛ وتنطبق نفس الخصائص على المتغيرات الشوائية المستمرة؛ وذلك فقط باستبدال براهين الجمع في حالة المتغير المتقطع ببراهين التكامل في حالة المتغير المستمر.

اقتراح: إذا كان X متغيرا عشوائيا مستمرا بدالة كثافة احتمالية pdf هي $f(x)$ وكان وسطه الحسابي u_x وانحراف معياري σ فتحقق الخصائص التالية:

- **الصيغة المختصرة للتباين**: $Var(X)=E(X^2)-\mu^2=\int_{-\infty}^{\infty}\mu^2\times f(x)dx-\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mu\times f(x)dx\right)^2$

$$u=u_{h(X)}=E[h(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}h(x)\times f(x)dx$$

- **متباينة تشيبيتشيف**:[2] من أجل أي عدد ثابت $k\geq1$:

$$P(|X-u|\geq k\sigma)\leq1/k^2$$

- **خطية التوقع**: من أجل أي دالتين $h_1(X)$ و $h_2(X)$ وأي ثوابت a_1، a_2 و b فإن:

$$E|a_1h_1(X)+a_1h_1(X)+b|=a_1E|h_1(X)|+a_2E|h_2(X)|+b$$ ؛

- **إعادة القياس**: من أجل ثوابت a و b فإن:

1- يمكن العودة لـــعنصر 3.2 القيمة المتوقعة والانحراف المعياري

2- نظرية لعالم الرياضيات الروسي *Pafnuty Chebyshev* وسميت باسمه متباينة أو متراجحة تشيبييشيف.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

$$E(aX+b)=aE(X)+b \qquad Var(aX+b)=a^2\sigma^2 \qquad \sigma_{aX+b}=|a|\sigma$$

مثال 91

مواصلة لمثال سابق(مثال 87) وجدنا $E(X)=\frac{3}{8}$ فيكون:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2\times f(x)dx=\int_0^1 x^2\times\frac{3}{2}(1-x^2)dx=\frac{3}{2}\int_0^1(x^2-x^4)dx$$
$$=\frac{3}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)\Big|^{x=1}$$

$$Var(X)=\quad E(X^2)-\mu^2=\frac{1}{5}-(\frac{3}{8})^2=\frac{19}{320}=0.059$$

ولو افترضنا أن حجم الحصى التي يشتريها الزبون أسبوعيا معطاة بالدالة التالية: $h(X)=X-0.02X^2$ أي تساوي حجم الحصى الذي يشتريه الزبون مطروحا منه حجم الحصى الضائعة في عملية النقل؛ فيكون متوسط(القيمة المتوقعة) الحجم الأسبوعي الذي يشتريه الزبون دون ضياع هو:

$$E(X-0.02X^2)=E(X)-0.02E(X^2)$$
$$=\frac{3}{8}-0.02\frac{1}{5}$$

مثال 92

يتم رمي سهم على هدف دائري وبالتركيز على نقطة مركز الهدف ليكن X هو الزاوية بالدرجات مقاسة من نقطة الأفق؛ وافترض أن $X\approx Unif[A,B]$ ؛ فعودة لمثال سابق(مثال 90) نجد التوقع $E(X)=180$ والانحراف المعياري $SD=\sigma_X=360/\sqrt{12}$ ؛ ولو أردنا تعريف متغير جديد Y هو الزاوية مقاسة بالراديان بين $-\pi$ و π ؛ فيكون $Y=(2\pi/360)X-\pi$ فنستعمل خاصية إعادة القياس بوضع $a=2\pi/360$ و $b=-\pi$ ؛ فيكون:

$$E(Y)=\frac{2\pi}{360}\times E(X)-\pi=\frac{2\pi}{360}\times180-\pi=0$$

ويكون:

$$\sigma_Y=\left|\frac{2\pi}{360}\right|\times\sigma_X=\frac{2\pi}{360}\times\frac{360}{\sqrt{12}}=\frac{2\pi}{\sqrt{12}}$$

2.2.2.3. الدوال المولدة للعزوم(اللحظات):

بنفس المبادئ التي قدمنا فيها الدوال المولدة للعزوم للمتغيرات العشوائية المتقطعة نواصل تقديم هذه الدوال في المتغيرات العشوائية المستمرة.

تعريف: دالة توليد العزوم mgf لمتغير عشوائي مستمر X هي:

$$M_X(t)=E(e^{tX})=\int^{\infty} e^{tX}\times f(x)dx$$

وكما في حالة المتغيرات المتقطعة دالة توليد العزوم mgf موجودة إذا كانت $M_X(t)$ معرفة في مجالة يحوي الصفر (0) وقيما سالبة وموجبة للمتغير (t)

وكما من قبل حين يكون $(t=0)$ تكون قيمة دالة توليد العزوم mgf دائما مساوية للصفر:

$$M_X(0)=E(e^{0X})=\int^{\infty} e^{0X}\times f(x)dx=\int^{\infty} f(x)dx=1$$

مثال 93

في متجر ما تتم عملية الدفع خلال وقت معين بالدقائق كمتغير له دالة كثافة احتمالية pdf هي:

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2X} & x\geq 0\\ 0 & \end{cases}$$

فتكون توليد العزوم mgf:

$$M_X(t)=E(e^{tx})=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\times f(x)dx=\int_{0}^{\infty} 2(e^{-(2-t)x})dx$$

النهاية موجود(وهو مساوٍ للصفر) ومعامل x سالب $-(2-t)<0$ أي $t<2$؛ ودالة توليد العزوم mgf موجودة لأنها معرفة من أجل مجال أو قيم تحتوي على الصفر في داخلها وبالتحديد المجال $(2,-\infty)$

ولأجل (t) في هذا المجال دالة توليد العزوم mgf للمتغير X هي $M_X(t)=\dfrac{2}{2-t}$ ولاحظ أن $M_X(0)=\dfrac{2}{2-0}=1$ ؛ وهي دائما هكذا ولكن يفضل التأكد دائما.

وبالعودة لعنصر دالة توليد العزوم في المتغير المتقطع كانت لدينا **نظرية تفرد دالة توليد العزوم** mgf وهي متحققة أيضا في المتغيرات المستمرة: يكون لتوزيعين نفس دالة الكثافة الاحتمالية pdf إذا وفقط إذا كان لديهما نفس دالة توليد العزوم(مع افتراض إمكانية تعريفهما في مجال معين)؛ فمثلا: إذا كان لمتغير عشوائي مستمر X دالة توليد العزوم mgf هي: $M_X(t)=\dfrac{2}{2-t}$ من أجل $t<0$ لذلك ومن المثال أعلاه فلابد أن تكون دالة الكثافة الاحتمالية pdf للمتغير X هي: $f(x)=\begin{cases}2e^{-2X} & x\geq 0\\ 0 & \end{cases}$ ؛

في حالة المتغيرات المتقطعة كنا نستطيع استخراج العزوم من دوال توليد العزوم ويمكن تطبيق نفس المبادئ في حالة المتغيرات المستمرة: العزم رقم r^{th} لمتغير عشوائي مستمر بدالة توليد عزوم $M_X(t)$ يعطى بالعلاقة التالية: $E(X^r)=M_X^r(0)$

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التَّبسِّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

ويعني المشتق رقم r^{th} لدالة توليد العزوم mgf مع كون $t=0$ فقط إذا كانت دالة توليد العزوم معرفة.

<u>مثال 94</u>

مواصلة للمثال السابق كنا قد وجدنا دالة توليد العزوم لمتغير عشوائي يعبر عن الوقت المنقضي في عملية الدفع بالدقائق كما يلي: $M_X(t)=2/(2-t)=2(2-t)^{-1}$ من أجل $t<2$ ومن أجل إيجاد الوسط والانحراف المعياري نحسب المشتقات أولا:

$$M'_X(t)=(2(2-t)^{-1})'=-2(2-t)^{-2}(-1)=\frac{2}{}$$

$$M''_X(t)=\frac{d}{}\left[2(2-t)^{-2}\right]=-4(2-t)^{-3}(-1)=\frac{4}{}$$

وبجعل $t=0$ في المشتقة الأولى تعطينا القيمة المتوقعة (العزم الأول) لتوقيت عملية الدفع:

$$E(X)=M_X^1(0)=M'_X(0)=0.5\,\text{min}$$

وبجعل $t=0$ في المشتقة الثانية تعطينا العزم الثاني لتوقيت عملية الدفع:

$$E(X^2)=M_X^2(0)=M''_X(0)=0.5\,\text{min}$$

وهو تباين توقيت عملية الدفع والذي يمكن حسابه كما يلي:

$$Var(X)=\sigma^2=E(X^2)-[E(X)]^2=0.5-(0.5)^2=0.25\,\text{min}$$

فيكون الانحراف المعياري: $SD_X=\sigma=\sqrt{0.25}=0.5\text{min}$

ونحتاج أحيانا لتحويل المتغير X إلى دالة خطية $Y=aX+b$ (كما رأينا في حالة المتغير المتقطع)؛

فإذا كان لـ: X دالة توليد عزوم $M_X(t)$ وكانت $Y=aX+b$ فإن: $M_Y(t)=e^{bt}M_X(at)$

<u>مثال 95</u>

ليكن X متغير عشوائي ذو توزيع منتظم في مجال $X\approx Unif[A,B]$ فتكون دالة توليد العزوم للمتغير X هي:

$$M_X(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{Bt}-e^{At}}{(B-A)t} & t\neq0\end{cases}$$

؛

وبالخصوص لنعتبر وضعية <u>مثال 92</u> وكان المتغير X يمثل الزاوية المُقَاسة بالدرجات كتوزيع منتظم في المجال $[0,360]$ أي أن $A=0$ و $B=360$ فإن:

$$M_X(t)=\begin{cases}\dfrac{e^{360t}-1}{(360)t} & t\neq0\end{cases}$$

والآن ليكن $Y=(2\pi/360)X-\pi$؛ وبالتالي Y هو زاوية مقاسة بالراديان بين ($-\pi$ و π)

وباستخدام قاعدة دالة توليد العزوم للتحويل الخطي بكون $a=2\pi/360$ و $b=-\pi$ سنحصل على:

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التَّبسّي "تبسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

$$M_Y(t)=e^{bt}M_X(at)=e^{-\pi t}M_X(\frac{2\pi}{360}t)$$

$$=e^{-\pi t}\frac{e^{360(2\pi/360)t}-1}{[illegible]}$$

وهذا يطابق الشكل العام لدالة توليد العزوم للمتغير العشوائي المنتظم مع كون $a=-\pi$ و $b=\pi$

؛ وهذا من خلال **خاصية التفرد**: $Y\approx Unif[-\pi,\pi]$.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

3.2.2.3. تمارين المحور: (القيم المتوقعة ودوال توليد العزوم للمتغيرات المستمرة):

01 لنعيد النظر في توزيع مدة المطالعة كمتغير X كما تم وصفها في التمرين رقم 06 في المحور السابق وقم بحساب ما يلي:

- القيمة المتوقعة $E(X)$؛
- التباين $Var(X)$ والانحراف المعياري $SD(X)$؛
- إذا تم وضع تكلفة على مطالعة كل كتاب قيمتها $h(X)=X^2$ حين تكون مدة المطالعة هي X؛ فقم بحساب التكلفة المتوقعة $E[h(X)]$.

02 إذا كان لديك X متغير يشير إلى حجم الفضاء(بالمتر المكعب) الذي تشغله سلعة معينة في حاوية ما مخصصة للتعبئة الجماعية في الميناء؛ وتكون دالة التوزيع الاحتمالية pdf للمتغير X هي:

$$f(x)=\begin{cases}90x^8(1-x) & 0<x<1\end{cases}$$

- ارسم دالة التوزيع الاحتمالية(الكتلة) وقم باشتقاق دالة التوزيع التراكمية للمتغير X وارسمها؛
- ماهو احتمال $P(X<0.5)$ أي: $F(0.5)$؟؛
- باستخدام السؤال الأول ماهو احتمال $P(0.25<X<0.5)$؛
- ما هو الميئين ر قم 75 لهذا التوزيع؟.
- احسب القيمة المتوقعة $E(X)$ والانحراف المعياري $SD(X)$؛
- ماهو احتمال أن يبتعد المتغير العشوائي بأكثر من انحراف معياري واحد عن وسطه الحسابي.

03 ليكن X متغير يشير منتظم $X\approx Unif[A,B]$:

- أوجد صيغة للميئين رقم(10)؛
- أوجد صيغة للوسيط η وما علاقتها بالوسط الحسابي μ ولماذا هذا يبدو منطقيا بالنسبة لهذا التوزيع؛
- من أجل n عدد صحيح موجب أحسب $E(X^n)$

04 يأخذ عالم بيئة بدراسة منطقة دائرية فقام بأخذ قياسات لقطر هذه المناطق الدائرية فنتج لديه X متغير عشوائي هو نصف قطر المنطقة r مع دالة توزيع احتمالية pdf:

$$f(r)=\begin{cases}\frac{3}{4}\left[1-(10-r)^2\right] & 9\leq r\leq 11\end{cases}$$

ماهي المساحة المتوقعة للمنطقة الدائرية الناتجة؟

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

05 إذا كانت درجة الحرارة التي يذوب فيها مركب ما في كل مرة هي متغير عشوائي بمتوسط) 12 درجة مئوية وبانحراف معياري 02 درجات؛ فما هو متوسط درجة الحرارة والانحراف المعياري مقاسا بالفهرنهايت؟.

06 إن الزمن بين كل زيارتين متتاليتين لموقع إلكتروني ما له دالة توزيع احتمالية pdf كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}0.5-\dfrac{x}{8} & 0\le x\le 4\end{cases}$$

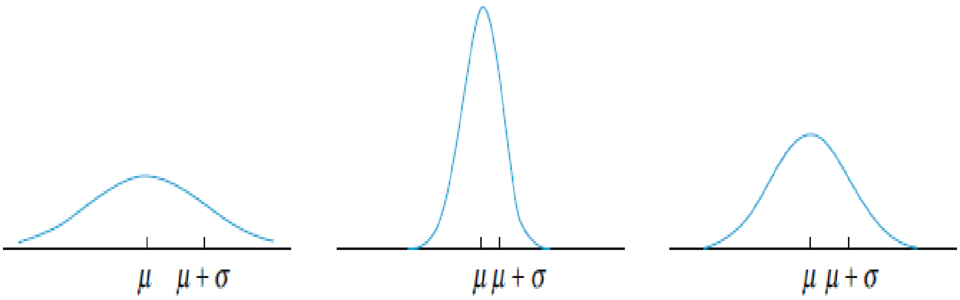
- أثبت أن $E(x)=4/3$ وأن $Var(x)=8/9$؛
- يتم تعريف معامل الالتواء $sk=E\left[(X-\mu)^3\right]/\sigma^3$؛ أثبت أن قيمته بالنسبة لدالة التوزيع الاحتمالية pdf أعلاه هي 0.566؟؛ وماذا يمكن أن تكون قيمته من أجل دالة توزيع احتمالية متناظرة تماما

07 ليكن X متغير يشير منتظم $X\approx Uni[0,1]$ أوجد الدالة الخطية $Y=g(x)$ بحيث يتحول المجال $[0,1]$ إلى المجال $[-5,+5]$

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

3.2.3. التوزيع الطبيعي (توزيع Gauss)

التوزيع الطبيعي[1] هو الأهم في جميع الاحتمالات والإحصاءات؛ العديد من المجموعات العددية لها توزيعات يمكن أن تتلاءم بشكل وثيق مع منحنى طبيعي مناسب أو متناظر؛ تشمل الأمثلة الأطوال والأوزان والخصائص الفيزيائية الأخرى وأخطاء القياس في التجارب العلمية والقياسات على الأحافير وأوقات رد الفعل في التجارب النفسية وقياسات الذكاء والأهلية والدرجات في الاختبارات المختلفة والعديد من المقاييس والمؤشرات الاقتصادية؛ حتى عندما يكون التوزيع الأساسي منفصلًا، غالبًا ما يعطي المنحنى الطبيعي تقريبًا ممتازًا؛ بالإضافة إلى ذلك، حتى عندما لا يتم توزيع المتغيرات الفردية نفسها بشكل طبيعي سيكون لمجموع ومتوسطات المتغيرات، في ظل ظروف مناسبة، توزيعًا طبيعيًا تقريبًا؛ هذا هو محتوى نظرية الحدود المركزية التي نوقشت في الفصل4(التوزيعات الاحتمالية المشتركة وتطبيقاتها) .



تعريف: يمتلك متغير عشوائي مستمر X **توزيعا طبيعيا** (توزيع Gauss) بمعالم هي (μ,σ) أين يكون: $-\infty<\mu<+\infty$ و$\sigma>0$ ؛ وذلك إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالية pdf له هي:

$$f(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \qquad -\infty<x<+\infty$$

وغالبا يتم اختصار العبارة: "يتبع المتغير العشوائي X توزيعا طبيعيا بمعالم (μ,σ) " كما يلي:

$$X\approx N(\mu,\sigma)$$

والرسم السابق يبين الأشكال البيانية لدوال $f(x;\mu,\sigma)$ توزيع احتمالية مختلفة حسب اختلاف قيم الوسط والانحراف المعياري (μ,σ) ؛ وكما نلاحظ في الأشكال فكل دالة توزيع احتمالية هي متناظرة بالنسبة للوسط الحسابي μ وتشبه شكل الجرس ومركز الجرس هذا (الوسط الحسابي) هو نفسه قيمة وسيط التوزيع ومنوال التوزيع؛ بينما قيمة الانحراف المعياري σ هي المسافة من وسط التوزيع إلى نقاط الانعطاف في المنحنى وكلما كانت قيمتها كبيرة كلما أشارت إلى زيادة انتشار كثافة المنحنى بعيدا عن الوسط بينما القيم الصغيرة للانحراف المعياري تشير إلى أن المنحنى مدبب وله قمة عالية وأغلب القيم تقترب من الوسط الحسابي؛ وبالتالي فإن القيم الكبيرة للانحراف المعياري تشير إلى بعد قيم المتغير عن وسطها الحسابي وتتم ملاحظتها باحتمال كبير عكس الحالة عند كون القيم صغيرة للانحراف المعياري.

---

[1]- يُطلق عليه غالبًا توزيع Gauss من قبل المهندسين.

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التَبسِّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

ومن الواضح أن $f(x;\mu,\sigma)>0$ إلى أنه نحتاج أحيانا لبعض حسابات التكامل والتفاضل المعقدة لإثبات أن: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;\mu,\sigma)dx=1>0$ (تمرين66) ويمكن تبيانها باستخدام حسابات التكامل والتفاضل(تمرين67) أو باستخدام دوال توليد العزوم(تمرين68) لتبيان أن $E(x)=\mu$ وأن $Var(x)=\sigma^2$ وأن المعلمتين μ و σ هما على الترتيب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X.

1.3.2.3. التوزيع الطبيعي المعياري

من أجل حساب $P(a\le X\le b)$ حين يكون $X\approx N(\mu,\sigma)$ فلابد علينا تقييم:

$$\int^{b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-u)^2/(2\sigma^2)}dx$$

لا يمكن استخدام أي من تقنيات التكامل المعروفة ولا توجد أي صيغة رياضية جاهزة لهذا التكامل[1] ولغرض الحساب اليدوي البسيط لاحتمالات التوزيع الطبيعي سنستخدم توزيعا عاديا خاصا:

تعريف: حين يكون لكل **توزيع طبيعي** (توزيع Gauss) معالم هي: $\mu=0$ و $\sigma=1$ فإننا نسميه **التوزيع الطبيعي المعياري** ويسمى المتغير العشوائي الذي يمتلك توزيعا طبيعيا معياريا **المتغير العشوائي الطبيعي المعياري** ويرمز له بالرمز Z؛ وتكون دالة التوزيع الاحتمالية pdf له هي:

$$f(z;0,1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} \qquad -\infty<z<+\infty$$

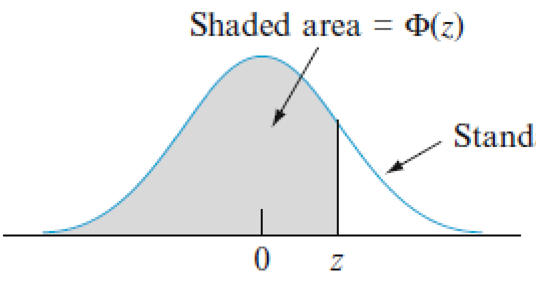
وتكون دالة التوزيع التراكمية cdf للمتغير Z هي $P(Z\le z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$؛ والتي نرمز لها بـ: $\Phi(z)$

إن التوزيع الطبيعي المعياري ليس نموذجا متكررا لمجتمع طبيعي لندرة المتغيرات التي وسطها الحساب 0 وانحرافها 1 وبدلا من ذلك يستخدم كتوزيع مرجعي أو قياسي لأي معلومات متوفرة عن توزيعات طبيعية أخرى؛ ويشير جدول التوزيع الطبيعي[2] أو جدول Z إلى قيم $\Phi(z)$ لأي قيمة $-3.6\le Z\le 3.6$ ويبين الشكل المقابل نوع المساحة التراكمية (الاحتمالات أو التكرار النسبي الصاعد) المبينة في جدول التوزيع الطبيعي والذي من خلاله يمكن حساب مختلف الاحتمالات الأخرى.

[1] سيتم في نهاية هذا المحور وضع أكواد لإجراء لإجراء حسابات التوزيع الطبيعي ببرنامج ميكروسوفت إكسل.

[2] ملحق رقم □ و□.

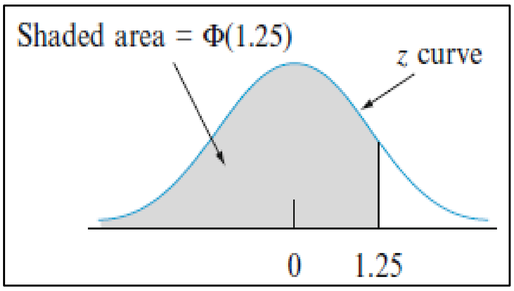
د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA



مثال 96

سنحاول في هذا المثال أن نبين كيف نستعمل جدول التوزيع الطبيعي لقيم Z لحساب مختلف الاحتمالات بتضمين متغير عشوائي:

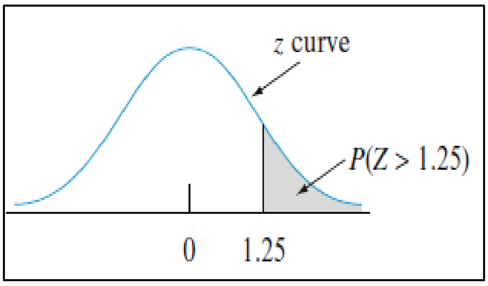
أ) نلاحظ من خلال الجدول أن $P(Z\le1.25)=\Phi(1.25)$ وهي المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي إلى ياسر القيمة (1.25) أي هي الاحتمال الذي يمثل نقطة تقاطع سطر القيمة 1.2 مع عمود القيمة 0.05؛ فنجد القيمة في نقطة التقاطع هي 0.8944 كما في الشكل المقابل؛ ونكتب في خانة الإكسل الصيغة التالية:



=NORM.S.DIST(1,25;TRUE)

ويمكن كتابة رقم 1 في مكان TRUE للدلالة على الدالة التراكمية Cumulative (أو 0 للدلالة على دالة التوزيع أو الكتلة Mass)

ب) من خلال الجدول $P(Z>1.25)$ هي نفسها القيمة $1-P(Z\le1.25)$ أي $1-\Phi(1.25)$ وهي المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي إلى يمين القيمة (1.25) أي مساحة الذيل على اليمين كما في الشكل المقابل؛ وبما أن $\Phi(1.25)=0.8944$ فإن $P(Z>1.25)=0.1056$



ونكتب في خانة الإكسل الصيغة التالية:

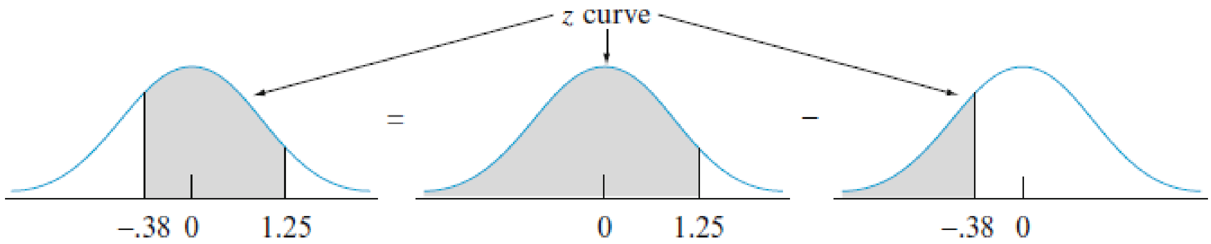
=1-NORM.S.DIST(1,25;TRUE)

ج) $P(Z\le-1.25)=\Phi(-1.25)$ وهي المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي إلى يسار القيمة (-1.25) أي مساحة الذيل على اليسار فنجدها مباشرة من جدول قيم z $\Phi(-1.25)=0.1056$ ومن خاصية التناظر في منحنى التوزيع الطبيعي فهذا مطابق للاحتمال في السؤال السابق؛ ونكتب في خانة الإكسل الصيغة التالية:

=NORM.S.DIST(-1,25;TRUE)

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

د) إن الاحتمال بهذه الصيغة $P(0.38 \le Z \le 1.25)$ هو المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي وفي مجال محصور بين القيمتين اليسرى (0.38) واليمنى (1.25) ومن الفصل (1.2.3. دوال الكثافة الاحتمالية ودوال التوزيع التراكمية) إذا كان Z متغير عشوائي بدالة توزيع تراكمية cdf هي $F(z)$ فإن $P(a \le Z \le b) = F(b)^* - F(a)$ أي أن: $P(0.38 \le Z \le 1.25) = \Phi(1.25) - \Phi(0.38)$ وبالتالي فإن: $P(0.38 \le Z \le 1.25) = 0.8944 - 0.3520 = 0.542$ كما في الشكل المقابل:

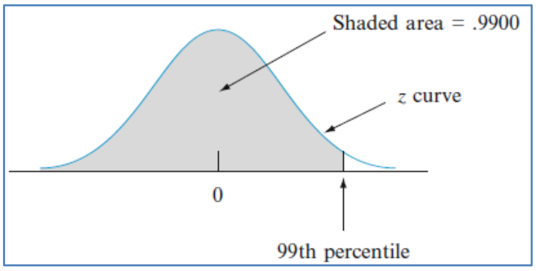


ونكتب في خانة الإكسل الصيغة التالية:

=NORM.S.DIST(1,25;TRUE)-NORM.S.DIST(0.38;TRUE)

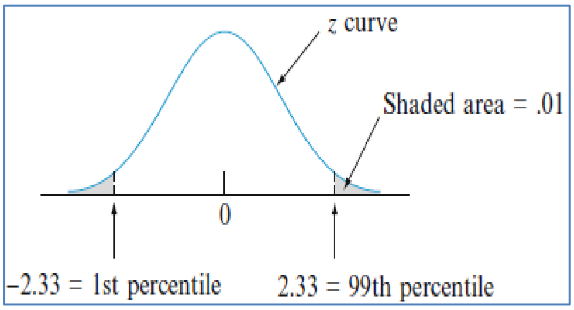
وقد رأينا في نفس الفصل الذي أشرنا إليه أعلاه أن الميئين رقم100 $(100p)th$ للتوزيع الطبيعي المعياري لأي قيمة p بين 0و1 هي حل المعادلة $\Phi(z) = p$ فنستطيع كتابة الميئين رقم100 $(100p)th$ للتوزيع الطبيعي المعياري بالصيغة التالية: $\eta_p = \Phi^{-1}(p)$

مثال 97



الميئين رقم99 $(99p)th$ $\eta_{99} = \Phi^{-1}(99)$ للتوزيع الطبيعي المعياري هو قيمة على المحور الأفقي أين تكون المساحة تحت المنحنى إلى يسار تلك القيمة هي0.9900 كما هي مبينة في الشكل المقابل:

ولحل المسألة العكسية $\Phi(z) = p$ نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري بطريقة عكسية فنبحث داخل وسط الجدول عن القيمة أو المساحة أو الاحتمال 0.9900 والتي تمثل نقطة تقاطع سطر وعمود فنستخرج من أول قيمة في أعلى العمود ومن أول قيمة على يسار السطر فنجمع القيمتين فنجد قيمة z التي تحدد الميئين رقم99 $(99p)th$ $\eta_{99} = \Phi^{-1}(99)$ بقيمة تقريبية هي الميئين رقم99 $(99p)th$ $Z = 2.33$ ؛ وبالتناظر فإن الميئين رقم01 $(01p)st$ $\eta_{01} = \Phi^{-1}(01)$ هو القيمة السالبة الميئين رقم99 $(99p)th$ ويساوي $Z = -2.33$ أي أن 1% من المساحة تكون تحت الميئين الأول وفوق الميئين رقم99 كما في الشكل المقابل.



ولإيجاد الميئين رقم99 في الإكسل نكتب في أي خانة الصيغة التالية: =NORM.S.INV(0,99)

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

2.3.2.3. التوزيعات الطبيعية غير القياسية

إذا أمكننا حساب احتمالات التوزيع $X\approx N(\mu,\sigma)$ عن طريق التوحيد القياسي فإن المتغير الموحد قياسيا يمتلك الصيغة $\frac{X-\mu}{\sigma}$ ؛ وبطرح القيمة μ يؤدي لانتقال المتوسط من μ إلى 0 وبالقسم على σ تتغير وحدة قياس المتغير فبدل أن يكون الانحراف المعياري هو σ يصبح 1.

اقتراح: إذا كان $X\approx N(\mu,\sigma)$ توزيع طبيعي فإن المتغير الموحد قياسيا يعرف بـ: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$

ويمتلك توزيعا طبيعيا معياريا كما يلي:

$$P(a\le X\le b)=P(\frac{a-\mu}{\sigma}\le Z\le\frac{b-\mu}{\sigma})=\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma})-\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma});$$

$$P(X\le a)=\Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}),\quad P(X\ge b)=1-\Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}),$$

ويكون المئين رقم 100 $(100p)th$ للتوزيع $N(\mu,\sigma)$ معطى بالعلاقة التالية:

$$\eta_P=\mu+\Phi^{-1}(p)\sigma$$

وبالعكس إذا كان $Z\approx N(0,1)$ باعتبار μ و σ ثوابت (مع كون $\sigma>0$) فإن المتغير العشوائي غير الموحد قياسيا ($X=\mu+\sigma Z$) يمتلك توزيعا طبيعيا بمتوسط μ حسابي وانحراف معياري σ.

الإثبات: ليكن $X\approx N(0,1)$ ونعرف $Z=(X-\mu)/\sigma$ كما في الاقتراح السابق فتكون دالة التوزيع التراكمية cdf للمتيغر Z كما يلي:

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)\\&=P(\frac{X-\mu}{\sigma}\le z)\\&=P(X\le\mu+z\sigma)\\&=\int_{-\infty}^{\mu+z\sigma}f(x;\mu,\sigma)dx\\&=\int_{-\infty}^{\mu+z\sigma}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}dx\end{aligned}$$

ثم نقوم بتعويض Z بـ: $\frac{x-\mu}{\sigma}$ فتصبح الحدود الجديدة للتكامل هي: $-\infty$ إلى z ويستبدل التفاضل dx ليحل محله $\sigma d\mu$ فنجد:

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2}}\sigma dx=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\mu^2}{2}}dx=\Phi(z)$$

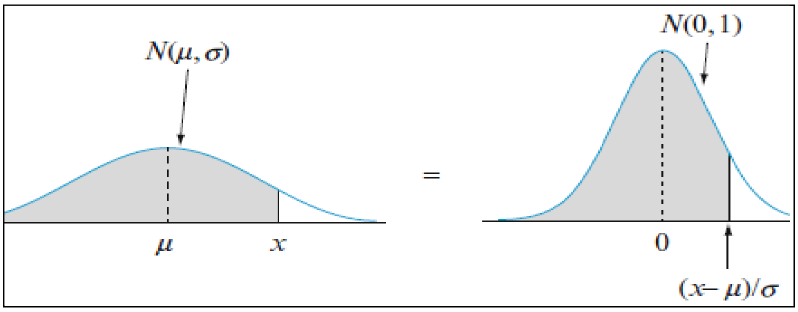
د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامِعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبسّي "تبسّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

وبالتالي فإن دالة التوزيع التراكمية cdf للمتغير $\frac{X-\mu}{\sigma}$ هي دالة التوزيع التراكمية cdf طبيعية قياسية مما يثبت أن $(X-\mu)/\sigma \approx N(0,1)$ ؛ وصيغ الاحتمالات في الاقتراح السابق تنبع مباشرة من هذه النتيجة وكذلك هو الحال بالنسبة لصيغة الميئين رقم100 $(100p)th$:

$$p = \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq n_p) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{n_p-\mu}{\sigma}\right) = \phi\left(\frac{n_p-\mu}{\sigma}\right)$$
$$\Rightarrow \frac{n_p-\mu}{\sigma} = \phi^{-1}(p)$$
$$\Rightarrow n_p = u + \phi^{-1}(p).\sigma$$

والعبارة العكسية السابقة $Z\sim N(0,1) \Rightarrow u + \sigma Z \sim N(\mu,\sigma)$ يتم اشتقاقها بنفس الطريقة.

والفكرة الأساسية لهذا الاقتراح هو أنه بالتقييس والمعيرة يمكن التعبير عن أي احتمال يتضمن القيمة X باحتمال يتضمن المتغير العشوائي الطبيعي القياسي Z حيث يمكننا استخدام جدولZ. كما هو موضح في الشكل التالي:



د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي "تبسة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz
قناة اليوتيوب: https://www.youtube.com/watch?v=xc08SKd3YN0&list=PLT63T9mBDNaNPU7U6VFGe8RM3cPXQI-jA

قائمة الملاحق

من إعداد الأستاذ ببرنامج الإكسل:

د.عيسى بنشوري؛ مطبوعة الإحصاء 02؛ جامِعَة الشهيد الشيخ العَرْبي التّبَسّي "تبَسَّة"؛ aissa.banchouri@univ-tebessa.dz

ملحق رقم 1 جدول الاحتمالات التراكمية للتوزيع الثنائي $B(x;n,p)$

p

	n=5	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313	0,0185	0,0102	0,0053	0,0024	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000
	1	0,9774	0,9185	0,8352	0,7373	0,6328	0,5282	0,4284	0,3370	0,2562	0,1875	0,1312	0,0870	0,0540	0,0308	0,0156	0,0067	0,0022	0,0005	0,0000
x	**2**	0,9988	0,9914	0,9734	0,9421	0,8965	0,8369	0,7648	0,6826	0,5931	0,5000	0,4069	0,3174	0,2352	0,1631	0,1035	0,0579	0,0266	0,0086	0,0012
	3	1,0000	0,9995	0,9978	0,9933	0,9844	0,9692	0,9460	0,9130	0,8688	0,8125	0,7438	0,6630	0,5716	0,4718	0,3672	0,2627	0,1648	0,0815	0,0226
	4	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9976	0,9947	0,9898	0,9815	0,9688	0,9497	0,9222	0,8840	0,8319	0,7627	0,6723	0,5563	0,4095	0,2262

p

	n=10	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,9139	0,7361	0,5443	0,3758	0,2440	0,1493	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107	0,0045	0,0017	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9885	0,9298	0,8202	0,6778	0,5256	0,3828	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547	0,0274	0,0123	0,0048	0,0016	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9990	0,9872	0,9500	0,8791	0,7759	0,6496	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719	0,1020	0,0548	0,0260	0,0106	0,0035	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000
	4	0,9999	0,9984	0,9901	0,9672	0,9219	0,8497	0,7515	0,6331	0,5044	0,3770	0,2616	0,1662	0,0949	0,0473	0,0197	0,0064	0,0014	0,0001	0,0000
x	**5**	1,0000	0,9999	0,9986	0,9936	0,9803	0,9527	0,9051	0,8338	0,7384	0,6230	0,4956	0,3669	0,2485	0,1503	0,0781	0,0328	0,0099	0,0016	0,0001
	6	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9965	0,9894	0,9740	0,9452	0,8980	0,8281	0,7340	0,6177	0,4862	0,3504	0,2241	0,1209	0,0500	0,0128	0,0010
	7	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9952	0,9877	0,9726	0,9453	0,9004	0,8327	0,7384	0,6172	0,4744	0,3222	0,1798	0,0702	0,0115
	8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9955	0,9893	0,9767	0,9536	0,9140	0,8507	0,7560	0,6242	0,4557	0,2639	0,0861
	9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9990	0,9975	0,9940	0,9865	0,9718	0,9437	0,8926	0,8031	0,6513	0,4013

p

	n=15	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
	0	0,4633	0,2059	0,0874	0,0352	0,0134	0,0047	0,0016	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,8290	0,5490	0,3186	0,1671	0,0802	0,0353	0,0142	0,0052	0,0017	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	2	0,9638	0,8159	0,6042	0,3980	0,2361	0,1268	0,0617	0,0271	0,0107	0,0037	0,0011	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	3	0,9945	0,9444	0,8227	0,6482	0,4613	0,2969	0,1727	0,0905	0,0424	0,0176	0,0063	0,0019	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	4	0,9994	0,9873	0,9383	0,8358	0,6865	0,5155	0,3519	0,2173	0,1204	0,0592	0,0255	0,0093	0,0028	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	5	0,9999	0,9978	0,9832	0,9389	0,8516	0,7216	0,5643	0,4032	0,2608	0,1509	0,0769	0,0338	0,0124	0,0037	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
	6	1,0000	0,9997	0,9964	0,9819	0,9434	0,8689	0,7548	0,6098	0,4522	0,3036	0,1818	0,0950	0,0422	0,0152	0,0042	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000
x	**7**	1,0000	1,0000	0,9994	0,9958	0,9827	0,9500	0,8868	0,7869	0,6535	0,5000	0,3465	0,2131	0,1132	0,0500	0,0173	0,0042	0,0006	0,0000	0,0000
	8	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9958	0,9848	0,9578	0,9050	0,8182	0,6964	0,5478	0,3902	0,2452	0,1311	0,0566	0,0181	0,0036	0,0003	0,0000
	9	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9963	0,9876	0,9662	0,9231	0,8491	0,7392	0,5968	0,4357	0,2784	0,1484	0,0611	0,0168	0,0022	0,0001
	10	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9972	0,9907	0,9745	0,9408	0,8796	0,7827	0,6481	0,4845	0,3135	0,1642	0,0617	0,0127	0,0006
	11	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9981	0,9937	0,9824	0,9576	0,9095	0,8273	0,7031	0,5387	0,3518	0,1773	0,0556	0,0055
	12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9989	0,9963	0,9893	0,9729	0,9383	0,8732	0,7639	0,6020	0,3958	0,1841	0,0362
	13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9983	0,9948	0,9858	0,9647	0,9198	0,8329	0,6814	0,4510	0,1710
	14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9984	0,9953	0,9866	0,9648	0,9126	0,7941	0,5367

ملحق رقم 2 تابع جدول الاحتمالات التراكمية للتوزيع الثنائي $B(x;n,p)$

p

n=20	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,7358	0,3917	0,1756	0,0692	0,0243	0,0076	0,0021	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,9245	0,6769	0,4049	0,2061	0,0913	0,0355	0,0121	0,0036	0,0009	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,9841	0,8670	0,6477	0,4114	0,2252	0,1071	0,0444	0,0160	0,0049	0,0013	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,9974	0,9568	0,8298	0,6296	0,4148	0,2375	0,1182	0,0510	0,0189	0,0059	0,0015	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9997	0,9887	0,9327	0,8042	0,6172	0,4164	0,2454	0,1256	0,0553	0,0207	0,0064	0,0016	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	1,0000	0,9976	0,9781	0,9133	0,7858	0,6080	0,4166	0,2500	0,1299	0,0577	0,0214	0,0065	0,0015	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	1,0000	0,9996	0,9941	0,9679	0,8982	0,7723	0,6010	0,4159	0,2520	0,1316	0,0580	0,0210	0,0060	0,0013	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	1,0000	0,9999	0,9987	0,9900	0,9591	0,8867	0,7624	0,5956	0,4143	0,2517	0,1308	0,0565	0,0196	0,0051	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
9	1,0000	1,0000	0,9998	0,9974	0,9861	0,9520	0,8782	0,7553	0,5914	0,4119	0,2493	0,1275	0,0532	0,0171	0,0039	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000
x **10**	1,0000	1,0000	1,0000	0,9994	0,9961	0,9829	0,9468	0,8725	0,7507	0,5881	0,4086	0,2447	0,1218	0,0480	0,0139	0,0026	0,0002	0,0000	0,0000
11	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9949	0,9804	0,9435	0,8692	0,7483	0,5857	0,4044	0,2376	0,1133	0,0409	0,0100	0,0013	0,0001	0,0000
12	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9987	0,9940	0,9790	0,9420	0,8684	0,7480	0,5841	0,3990	0,2277	0,1018	0,0321	0,0059	0,0004	0,0000
13	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9935	0,9786	0,9423	0,8701	0,7500	0,5834	0,3920	0,2142	0,0867	0,0219	0,0024	0,0000
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9936	0,9793	0,9447	0,8744	0,7546	0,5836	0,3828	0,1958	0,0673	0,0113	0,0003
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9985	0,9941	0,9811	0,9490	0,8818	0,7625	0,5852	0,3704	0,1702	0,0432	0,0026
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9987	0,9951	0,9840	0,9556	0,8929	0,7748	0,5886	0,3523	0,1330	0,0159
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9991	0,9964	0,9879	0,9645	0,9087	0,7939	0,5951	0,3231	0,0755
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9979	0,9924	0,9757	0,9308	0,8244	0,6083	0,2642
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9992	0,9968	0,9885	0,9612	0,8784	0,6415

p

n=25	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95
0	0,2774	0,0718	0,0172	0,0038	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,6424	0,2712	0,0931	0,0274	0,0070	0,0016	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,8729	0,5371	0,2537	0,0982	0,0321	0,0090	0,0021	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,9659	0,7636	0,4711	0,2340	0,0962	0,0332	0,0097	0,0024	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,9928	0,9020	0,6821	0,4207	0,2137	0,0905	0,0320	0,0095	0,0023	0,0005	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9988	0,9666	0,8385	0,6167	0,3783	0,1935	0,0826	0,0294	0,0086	0,0020	0,0004	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,9998	0,9905	0,9305	0,7800	0,5611	0,3407	0,1734	0,0736	0,0258	0,0073	0,0016	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	1,0000	0,9977	0,9745	0,8909	0,7265	0,5118	0,3061	0,1536	0,0639	0,0216	0,0058	0,0012	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	1,0000	0,9995	0,9920	0,9532	0,8506	0,6769	0,4668	0,2735	0,1340	0,0539	0,0174	0,0043	0,0008	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9	1,0000	0,9999	0,9979	0,9827	0,9287	0,8106	0,6303	0,4246	0,2424	0,1148	0,0440	0,0132	0,0029	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
x **10**	1,0000	1,0000	0,9995	0,9944	0,9703	0,9022	0,7712	0,5858	0,3843	0,2122	0,0960	0,0344	0,0093	0,0018	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	1,0000	1,0000	0,9999	0,9985	0,9893	0,9558	0,8746	0,7323	0,5426	0,3450	0,1827	0,0778	0,0255	0,0060	0,0009	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
12	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9966	0,9825	0,9396	0,8462	0,6937	0,5000	0,3063	0,1538	0,0604	0,0175	0,0034	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
13	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9991	0,9940	0,9745	0,9222	0,8173	0,6550	0,4574	0,2677	0,1254	0,0442	0,0107	0,0015	0,0001	0,0000	0,0000
14	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9982	0,9907	0,9656	0,9040	0,7878	0,6157	0,4142	0,2288	0,0978	0,0297	0,0056	0,0005	0,0000	0,0000
15	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9995	0,9971	0,9868	0,9560	0,8852	0,7576	0,5754	0,3697	0,1894	0,0713	0,0173	0,0021	0,0001	0,0000
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9957	0,9826	0,9461	0,8660	0,7265	0,5332	0,3231	0,1494	0,0468	0,0080	0,0005	0,0000
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9988	0,9942	0,9784	0,9361	0,8464	0,6939	0,4882	0,2735	0,1091	0,0255	0,0023	0,0000
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9984	0,9927	0,9742	0,9264	0,8266	0,6593	0,4389	0,2200	0,0695	0,0095	0,0002
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9980	0,9914	0,9706	0,9174	0,8065	0,6217	0,3833	0,1615	0,0334	0,0012
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9977	0,9905	0,9680	0,9095	0,7863	0,5793	0,3179	0,0980	0,0072
21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9976	0,9903	0,9668	0,9038	0,7660	0,5289	0,2364	0,0341
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9979	0,9910	0,9679	0,9018	0,7463	0,4629	0,1271
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9984	0,9930	0,9726	0,9069	0,7288	0,3576
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9992	0,9962	0,9828	0,9282	0,7226

ملحق رقم 3 جدول الاحتمالات التراكمية لتوزيع بواسون

$$P(x;u)=\sum^{x}\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

الوسط الحسابي u

x	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679	0,5769	0,5488	0,5220	0,4966	0,4724	0,4493	0,4274	0,4066	0,3867	0,3679
1	0,9953	0,9825	0,9631	0,9384	0,9098	0,8781	0,8442	0,8088	0,7725	0,7358	0,8943	0,8781	0,8614	0,8442	0,8266	0,8088	0,7907	0,7725	0,7541	0,7358
2	0,9998	0,9989	0,9964	0,9921	0,9856	0,9769	0,9659	0,9526	0,9371	0,9197	0,9815	0,9769	0,9717	0,9659	0,9595	0,9526	0,9451	0,9371	0,9287	0,9197
3	1,0000	0,9999	0,9997	0,9992	0,9982	0,9966	0,9942	0,9909	0,9865	0,9810	0,9975	0,9966	0,9956	0,9942	0,9927	0,9909	0,9889	0,9865	0,9839	0,9810
4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9996	0,9992	0,9986	0,9977	0,9963	0,9997	0,9996	0,9994	0,9992	0,9989	0,9986	0,9982	0,9977	0,9971	0,9963
5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9998	0,9997	0,9994	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999	0,9999	0,9998	0,9997	0,9997	0,9995	0,9994
6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9999

الوسط الحسابي u

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
1	0,4060	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073	0,0030	0,0012	0,0005	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	0,6767	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296	0,0138	0,0062	0,0028	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
3	0,8571	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818	0,0424	0,0212	0,0103	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
4	0,9473	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730	0,0996	0,0550	0,0293	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
5	0,9834	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007	0,1912	0,1157	0,0671	0,0028	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
6	0,9955	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497	0,3134	0,2068	0,1301	0,0076	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
7	0,9989	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987	0,4530	0,3239	0,2202	0,0180	0,0008	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
8	0,9998	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291	0,5925	0,4557	0,3328	0,0374	0,0021	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
9	1,0000	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305	0,7166	0,5874	0,4579	0,0699	0,0050	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
10	1,0000	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015	0,8159	0,7060	0,5830	0,1185	0,0108	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
11	1,0000	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467	0,8881	0,8030	0,6968	0,1848	0,0214	0,0014	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
12	1,0000	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730	0,9362	0,8758	0,7916	0,2676	0,0390	0,0031	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
13	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9964	0,9872	0,9658	0,9261	0,8645	0,3632	0,0661	0,0065	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
14	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9986	0,9943	0,9827	0,9585	0,9165	0,4657	0,1049	0,0124	0,0009	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
15	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9995	0,9976	0,9918	0,9780	0,9513	0,5681	0,1565	0,0223	0,0019	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
16	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9990	0,9963	0,9889	0,9730	0,6641	0,2211	0,0377	0,0039	0,0003	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
17	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9947	0,9857	0,7489	0,2970	0,0605	0,0073	0,0006	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
18	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9993	0,9976	0,9928	0,8195	0,3814	0,0920	0,0129	0,0012	0,0001	0,0000	0,0000	0,0000
19	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9997	0,9989	0,9965	0,8752	0,4703	0,1336	0,0219	0,0023	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
20	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9996	0,9984	0,9170	0,5591	0,1855	0,0353	0,0043	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
21	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9993	0,9469	0,6437	0,2473	0,0544	0,0076	0,0007	0,0001	0,0000	0,0000
22	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9997	0,9673	0,7206	0,3175	0,0806	0,0128	0,0014	0,0001	0,0000	0,0000
23	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9805	0,7875	0,3939	0,1146	0,0208	0,0026	0,0002	0,0000	0,0000
24	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9888	0,8432	0,4734	0,1572	0,0324	0,0045	0,0004	0,0000	0,0000
25	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9938	0,8878	0,5529	0,2084	0,0486	0,0076	0,0008	0,0001	0,0000
26	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9967	0,9221	0,6294	0,2673	0,0705	0,0123	0,0015	0,0001	0,0000
27	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9983	0,9475	0,7002	0,3329	0,0988	0,0193	0,0027	0,0003	0,0000
28	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9991	0,9657	0,7634	0,4031	0,1343	0,0294	0,0045	0,0005	0,0000
29	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9996	0,9782	0,8179	0,4757	0,1770	0,0432	0,0073	0,0009	0,0001
30	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9998	0,9865	0,8633	0,5484	0,2269	0,0617	0,0116	0,0016	0,0002
31	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,9919	0,8999	0,6186	0,2833	0,0855	0,0178	0,0027	0,0003
32	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,9953	0,9285	0,6845	0,3449	0,1153	0,0265	0,0044	0,0006

ملحق رقم 4 جدول الاحتمالات التراكمية للتوزيع الطبيعي المعياري $P(Z\leq z)=\int^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
-3,60	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,50	0,0002	0,0002	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
-3,40	0,0003	0,0003	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0005	0,0005
-3,30	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0007
-3,20	0,0007	0,0007	0,0007	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0009	0,0009	0,0009
-3,10	0,0010	0,0010	0,0010	0,0011	0,0011	0,0011	0,0012	0,0012	0,0013	0,0013
-3,00	0,0013	0,0014	0,0014	0,0015	0,0015	0,0016	0,0016	0,0017	0,0018	0,0018
-2,90	0,0019	0,0019	0,0020	0,0021	0,0021	0,0022	0,0023	0,0023	0,0024	0,0025
-2,80	0,0026	0,0026	0,0027	0,0028	0,0029	0,0030	0,0031	0,0032	0,0033	0,0034
-2,70	0,0035	0,0036	0,0037	0,0038	0,0039	0,0040	0,0041	0,0043	0,0044	0,0045
-2,60	0,0047	0,0048	0,0049	0,0051	0,0052	0,0054	0,0055	0,0057	0,0059	0,0060
-2,50	0,0062	0,0064	0,0066	0,0068	0,0069	0,0071	0,0073	0,0075	0,0078	0,0080
-2,40	0,0082	0,0084	0,0087	0,0089	0,0091	0,0094	0,0096	0,0099	0,0102	0,0104
-2,30	0,0107	0,0110	0,0113	0,0116	0,0119	0,0122	0,0125	0,0129	0,0132	0,0136
-2,20	0,0139	0,0143	0,0146	0,0150	0,0154	0,0158	0,0162	0,0166	0,0170	0,0174
-2,10	0,0179	0,0183	0,0188	0,0192	0,0197	0,0202	0,0207	0,0212	0,0217	0,0222
-2,00	0,0228	0,0233	0,0239	0,0244	0,0250	0,0256	0,0262	0,0268	0,0274	0,0281
-1,90	0,0287	0,0294	0,0301	0,0307	0,0314	0,0322	0,0329	0,0336	0,0344	0,0351
-1,80	0,0359	0,0367	0,0375	0,0384	0,0392	0,0401	0,0409	0,0418	0,0427	0,0436
-1,70	0,0446	0,0455	0,0465	0,0475	0,0485	0,0495	0,0505	0,0516	0,0526	0,0537
-1,60	0,0548	0,0559	0,0571	0,0582	0,0594	0,0606	0,0618	0,0630	0,0643	0,0655
-1,50	0,0668	0,0681	0,0694	0,0708	0,0721	0,0735	0,0749	0,0764	0,0778	0,0793
-1,40	0,0808	0,0823	0,0838	0,0853	0,0869	0,0885	0,0901	0,0918	0,0934	0,0951
-1,30	0,0968	0,0985	0,1003	0,1020	0,1038	0,1056	0,1075	0,1093	0,1112	0,1131
-1,20	0,1151	0,1170	0,1190	0,1210	0,1230	0,1251	0,1271	0,1292	0,1314	0,1335
-1,10	0,1357	0,1379	0,1401	0,1423	0,1446	0,1469	0,1492	0,1515	0,1539	0,1562
-1,00	0,1587	0,1611	0,1635	0,1660	0,1685	0,1711	0,1736	0,1762	0,1788	0,1814
-0,90	0,1841	0,1867	0,1894	0,1922	0,1949	0,1977	0,2005	0,2033	0,2061	0,2090
-0,80	0,2119	0,2148	0,2177	0,2206	0,2236	0,2266	0,2296	0,2327	0,2358	0,2389
-0,70	0,2420	0,2451	0,2483	0,2514	0,2546	0,2578	0,2611	0,2643	0,2676	0,2709
-0,60	0,2743	0,2776	0,2810	0,2843	0,2877	0,2912	0,2946	0,2981	0,3015	0,3050
-0,50	0,3085	0,3121	0,3156	0,3192	0,3228	0,3264	0,3300	0,3336	0,3372	0,3409
-0,40	0,3446	0,3483	0,3520	0,3557	0,3594	0,3632	0,3669	0,3707	0,3745	0,3783
-0,30	0,3821	0,3859	0,3897	0,3936	0,3974	0,4013	0,4052	0,4090	0,4129	0,4168
-0,20	0,4207	0,4247	0,4286	0,4325	0,4364	0,4404	0,4443	0,4483	0,4522	0,4562
-0,10	0,4602	0,4641	0,4681	0,4721	0,4761	0,4801	0,4840	0,4880	0,4920	0,4960

ملحق رقم 5 تابع جدول الاحتمالات التراكمية للتوزيع الطبيعي المعياري $P(Z\le z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,10	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,20	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,30	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,40	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,50	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,60	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,70	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,80	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,90	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,00	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,10	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,20	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,30	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,40	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,50	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,60	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,70	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,80	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,90	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,00	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,10	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,20	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,30	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,40	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,50	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,60	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,70	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,80	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,90	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,00	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,10	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,20	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,30	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,40	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,50	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,60	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999