

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE TEBESSA



FACULTE DES SCIENCES & TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT GENIE MECANIQUE

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de

MASTER

Présentée par

BOUKHAMLA KHAOULA & MANSOURI ASMA

Etude expérimentale et numérique du
Comportement modal des poutres et plaques

DIRECTEUR DU MEMOIRE : Dr. RAMDHANE YOUNES

DEVANT LE JURY

Dr. DEGHBODJ. S (Président)

Dr. HAJJAB. A (Membre)

Dr. YOUNES. R (Membre)

JUIN 2023

« The mind that opens up to a new idea never returns to its

Original size. »

L'esprit qui s'ouvre à une nouvelle idée ne revient jamais à sa

taille originale.

Albert Einstein

Remerciements :

Nous tenons à remercier tous ceux qui nous ont aidés à réaliser ce mémoire :

Je tiens à remercier en premier lieu mon encadreur Dr. RAMDANE YOUNES, pour le temps qu'ils m'ont consacré, pour leur soutien, pour leurs immenses connaissances et leur curiosité scientifique.

Je remercie également tous les enseignants du département de Génie Mécanique.

Nous voudrions également remercier de laboratoire de dynamique et des structures de Guelma qui travaille sur vibration avec qui nous avons eu l'honneur de pouvoir collaborer et qui permet aussi d'utiliser les matériels du laboratoire

En fin tous ceux qui nous ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail.

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail à :

La famille MANSOURI et BOUKHAMLA

Merci à tous mes amies et camarades de la promotion 2023 Pour l'ambiance pendant les 3 ans de mes études dans le département de génie mécanique plus que des étudiants de la construction mécanique

Et enfin à tous ceux que nous aimons et tous ceux qui nous aiment.

MERCI A TOUTS.

Résumé

Ce travail examine l'analyse modale des vibrations des poutres et des plaques dans le domaine de la construction mécanique. Il explore l'histoire de l'analyse modale et son utilisation, en mettant l'accent sur les caractéristiques vibratoires des poutres et des plaques. L'importance de la simulation numérique dans l'analyse des vibrations des poutres et des plaques est soulignée. Elle permet une meilleure prise en compte des besoins et des contraintes, ainsi que la possibilité de modifier rapidement les paramètres à moindre coût. La simulation numérique est un outil précieux pour le choix des matériaux, des dimensions et des éléments de fixation, ainsi que pour la vérification et la validation des choix de conception.

L'approche expérimentale est également abordée, soulignant son importance pour la détermination des fréquences propres des poutres et des plaques dans une configuration encastree-libre. Les résultats expérimentaux fournissent des informations précises sur les modes de vibration et les fréquences caractéristiques, ce qui contribue à l'évaluation de la performance et à l'optimisation de la conception.

Une analyse comparative des résultats analytiques, numériques et expérimentaux révèle que les résultats de la simulation numérique se rapprochent davantage des résultats analytiques que des mesures expérimentales, en raison des différentes sources d'erreurs et d'imprécisions inhérentes à chaque méthode.

En résumé, ce travail met en évidence l'importance de l'analyse modale, de la simulation numérique et de l'approche expérimentale dans l'étude des vibrations des poutres et des plaques. Ces techniques offrent des outils précieux pour la conception de structures résistantes aux vibrations indésirables, l'optimisation des performances et la réduction des coûts.

Abstract

This work examines the modal analysis of vibrations in beams and plates in the field of mechanical construction. It explores the history of modal analysis and its use, focusing on the vibrational characteristics of beams and plates. The importance of numerical simulation in the analysis of beam and plate vibrations is emphasized. It allows for better consideration of needs and constraints, as well as the ability to quickly modify parameters at a lower cost. Numerical simulation is a valuable tool for material selection, dimensioning, fastening elements, and for verifying and validating design choices.

The experimental approach is also discussed, highlighting its importance in determining the natural frequencies of beams and plates in a clamped-free configuration. Experimental results provide accurate information on vibration modes and characteristic frequencies, contributing to performance evaluation and design optimization.

A comparative analysis of analytical, numerical, and experimental results reveals that numerical simulation results align more closely with analytical results than with experimental measurements, due to the different sources of errors and inaccuracies inherent in each method.

In summary, this work highlights the importance of modal analysis, numerical simulation, and the experimental approach in the study of vibrations in beams and plates. These techniques offer valuable tools for designing structures that can withstand undesirable vibrations, optimizing performance, and reducing costs.

ملخص

يفحص هذا العمل التحليل النموذجي للاهتزازات في الحزم والألواح في مجال البناء الميكانيكي. يستكشف تاريخ التحليل النموذجي واستخدامه ، مع التركيز على الخصائص الاهتزازية للحزم والألواح. تم التأكيد على أهمية المحاكاة العددية في تحليل اهتزازات الحزمة والصفائح. فهو يسمح بمراعاة أفضل للاحتياجات والقيود ، فضلاً عن القدرة على تعديل المعلمات بسرعة بتكلفة أقل. تعد المحاكاة العددية أداة قيمة لاختيار المواد ، وتحديد الأبعاد ، وعناصر التثبيت ، وللتحقق من اختيارات التصميم والتحقق منها.

تمت مناقشة النهج التجريبي أيضاً ، مع إبراز أهميته في تحديد الترددات الطبيعية للحزم والألواح في تكوين خالٍ من التثبيت. توفر النتائج التجريبية معلومات دقيقة عن أوضاع الاهتزاز والترددات المميزة ، مما يساهم في تقييم الأداء وتحسين التصميم.

يكشف التحليل المقارن للنتائج التحليلية والرقمية والتجريبية أن نتائج المحاكاة العددية تتوافق بشكل وثيق مع النتائج التحليلية أكثر من القياسات التجريبية ، بسبب المصادر المختلفة للأخطاء وعدم الدقة الكامنة في كل طريقة.

باختصار ، يسلط هذا العمل الضوء على أهمية التحليل النموذجي والمحاكاة العددية والنهج التجريبي في دراسة الاهتزازات في الحزم والألواح. توفر هذه التقنيات أدوات قيمة لتصميم الهياكل التي يمكنها تحمل الاهتزازات غير المرغوب فيها وتحسين الأداء وتقليل التكاليف.

List des figures

Figure1.1 Poutre UPN (forme U)	09
Figure1.2 Poutre IPE (forme I)	09
Figure1.3 Poutre HEA (forme H)	10
Figure1.4 Poutre IPN (forme I)	10
Figure1.5 Structure des bâtiments	10
Figure1.6 Aéroport	11
Figure1.7 Les ponts	11
Figure1.8 Les stades	11
Figure1.9 Les charpentes métalliques	11

Chapitre 02

Figure2.1 Plan Σ	19
Figure2.2 Représentation d'une poutre droite dans le repère (0,1,2,3)	19
Figure2.3 Poutre console	20
Figure2.4 Poutre en vibration transversale	21
Figure2.5 Plaque rectangulaire normales et tangentes aux bord	29
Figure.2.6 : plaque rectangulaire, normales et tangentes aux bords	31

Chapitre 03

Figure3.1 Interface graphique	36
Figure3.2 Fenêtre principales de Solide Works	37
Figure3.3 Les outils d'esquisses	38
Figure3.4 Les fonctions des bases	38

Figures3.5 Les fonctions d'affichages	38
Figure3.6 Poutre réaliser sur SolidWorks	39
Figure3.7 Déformées obtenues par SolidWorks pour les 8 premiers modes de vibration de la poutre	43
Figure3.8 Déformées obtenues par SolidWorks pour les 8 premiers modes de vibration de la plaque	46

Chapitre 04

Figure4.1 Figure représentative du banc d'essais	50
Figure4.2 Poutre E-L	51
Figure4.3 Photo de l'analyseur Bruel & kjaer pulse 16.1. et les accéléromètres d'acquisition des signaux	52
Figure4.4 Marteau d'impact type 8206	53
Figure4.5 Accéléromètre CCLD type 4533-B	53
Figure4.6 Spectre de fonction de réponse en fréquence FRF	54
Figure4.7 Figure représentative du banc d'essais (pour une plaque)	57
Figure4.8 Spectre de fonction de réponse en fréquence FRF pour la plaque	58

Liste des tableaux

Chapitre 01

Tableau1.1 Les types et la destination des poutres	09
---	----

Chapitre 02

Tableau2.1 Nombres d'ondes et fréquences propre de la poutre	28
---	----

Chapitre 03

Tableau3.1 Les fréquences propres du poutre	44
Tableau3.2 Les fréquences propres du plaque de Zn	47

Chapitre 04

Tableau4.1 Comparaison entre les résultats analytiques, numériques et expérimental	55
Tableau4.2 la comparaison % d'erreur	56
Tableau4.3 Comparaison entre les résultats numériques et expérimental	59
Tableau4.4 d'erreur du plaque	60

Tableau des matières

Remerciment	III
Dédicace	IV
Résumé	V
Abstract	VI
ملخص	VII
Liste des figures	VIII
Liste des tableaux	X
Introduction générale	01

Chapitre 01 : Généralité et Synthèse bibliographique

1.Introduction	04
2.Effet des vibration	04
3.Caractéristiques des vibration	04
4.Analyse modale	05
4.1.Historique	05
4.2.Définition de l'analyse modale	06
5.Historique des poutres	08
5.1.Les types des poutres	08
5.2.Les formes des poutres métalliques	09
5.3.Les domaines d'utilisations poutres et plaques	10
6.Synthèse bibliographique	12
7.Conclusion	15

Chapitre 02 : Etude théorique

1.Introduction	17
2.Notions sur les vibrations	17
2.1.Définition de vibration	17
2.2.Types des vibrations	17
2.2.1.Vibrations libres	17
2.2.2.Vibrations libres	18
3.Notions sur la fréquence propre	18
4.Définition du poutre	18

5. Historique du modèle d'Euler-Bernoulli	20
6. Le modèle d'Euler-Bernoulli	20
7. Mouvement transversal (de flexion)	21
8. Modes et fréquences propres	25
9. Application pour la poutre à étudier	25
10. différents types des plaques	29
10.1. Les plaque isotropes	29
10.2. Les plaque orthotrope	29
10.3. Les plaques anisotropes	29
11. Théorie des plaques	30
12. Conclusion	33

Chapitre 03 : Simulation numérique

1. Introduction	35
2. Définition de Solide Works	35
3. Interface graphique	36
3.1. Les pièces	36
3.2. Les assemblages	37
3.3. Les mise en plan	37
3.4. Les outils d'esquisses	38
3.5. Les fonctions de bases	38
3.6. Les fonctions d'affichage	38
4. Les étapes pour réaliser une poutre par Solide Works	38
5. Simulation numérique	39
5.1. Cas d'une poutre encastrée-libre	39
5.2. Cas d'une plaque encastrée-libre	44
6. Conclusion	47

Chapitre 04 : Etude expérimentale

1.Introduction	49
2.Plan expérimentale et matériel utilisé(pour une poutre)	49
2.1.Présentation du banc d'essais	49
2.2.La poutre	50
2.3.Matériel d'acquisition des mesures	51
2.4.Martaux d'impact	52
2.5.Accéléromètre CCLD	53
3.La comparaison des résultats	54
4.Plan expérimentale et matériel utilisé(pour une plaque)	57
5.Conclusion	61
Conclusion générale	62
Références	64

Introduction générale

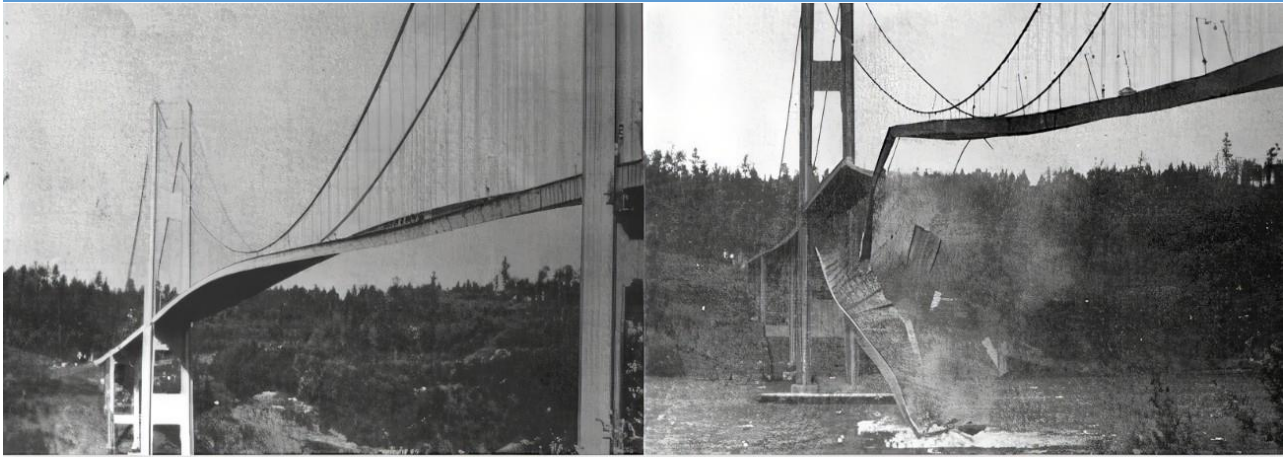
Le dynamique des structures au sens (vibratoire) est une discipline modern évoluant pour répondre aux besoins de la construction, de la conception et de la maintenance industrielle, et repose sur l'utilisation de modèles simples permettant une analyse rapide.

Les structures d'ingénierie sont conçues et construites de manière à assurer la stabilité, la résistance, la rigidité et la durabilité pendant toute leur durée de vie pour toutes les charges prévues. Parmi ces composants structurels, les plus chargement utilisés sont les poutres qui ont de nombreuses applications pratiques orientées vers l'ingénierie. Ils sont soumis à la fois aux charges statiques et dynamiques des composants. Il est essentiel de construire une structure pour fonctionner en toute sécurité tout au long de sa durée de vie.

Le calcul des structures a connu un grand développement grâce à l'intervention d'outils informatiques performants, et la méthode la plus utilisée dans ce domaine est la méthode des éléments finis.

La résonance est un phénomène selon lequel certains systèmes physiques (électriques, mécaniques, etc.) sont sensibles à certaines fréquences. Un système résonant peut accumuler une énergie, si celle-ci est appliquée sous forme périodique, et proche d'une fréquence dite « fréquence de résonance ». Soumis à une telle excitation, le système va être le siège d'oscillations de plus en plus importantes, jusqu'à atteindre un régime d'équilibre qui dépend des éléments dissipatifs du système, ou bien jusqu'à une rupture d'un composant du système.

Les domaines où la résonance intervient sont innombrables : balançoire enfantine, mais aussi résonances acoustiques de la voix parlée ou chantée et des instruments de musique, la résonance des marées, la résonance orbitale en astronomie, la résonance de la membrane basilaire dans le phénomène d'audition, les résonances dans des circuits électroniques et, pour finir : tous les systèmes, montages, pièces mécaniques sont soumis au phénomène de résonance. Les systèmes abstraits sont également soumis à des résonances : on peut, à titre d'exemple, citer la dynamique des populations. Dans le domaine du génie civil, on peut observer ce phénomène principalement dans les passerelles piétonnes soumises à des marches militaires, par exemple, ou, de façon plus générale, dans les constructions soumises à un séisme.



Mise en résonance du pont par le vent, puis effondrement du pont (Pont Tacoma - 1940)

Ce travail est divisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre offre un aperçu des vibrations et de l'analyse modale, en mettant l'accent sur leur application dans le domaine de la construction. Les recherches réalisées dans l'analyse modale des poutres et des plaques sont également présentées.

Le deuxième chapitre présente une introduction théorique sur les vibrations des poutres d'Euler-Bernoulli, ainsi que la théorie des plaques minces. Les calculs et équations liés à ces théories sont également abordés, avec une attention particulière portée à la détermination des fréquences propres et des modes de vibration pour le cas d'une poutre encastree-libre.

Le troisième chapitre se concentre sur l'utilisation du logiciel SolidWorks pour effectuer des simulations numériques visant à déterminer les fréquences et les déformées modales d'une poutre et d'une plaque encastree-libre. Les différentes fonctionnalités de ce logiciel sont expliquées en détail, mettant en avant sa capacité à fournir des résultats précis et à optimiser la conception en minimisant les pertes de matière et de temps.

Le quatrième chapitre se consacre à la description de l'expérience menée au laboratoire de mécanique et de structures (LMS). Il présente en détail le montage expérimental utilisé, ainsi que les spectres de vibrations obtenus et les valeurs correspondantes. Une comparaison est ensuite effectuée entre ces résultats expérimentaux et ceux obtenus dans les chapitres précédents, permettant de calculer les pourcentages d'erreur. Cette analyse comparative offre des informations précieuses sur la fiabilité des méthodes utilisées et permet d'évaluer la cohérence entre les résultats théoriques, numériques et expérimentaux.

CHAPITRE 01

Généralités et synthèse bibliographique

1.1. Introduction :

Dans ce monde, il existe plusieurs phénomènes qui doivent être étudiés afin d'éviter leurs dangers et de transformer leurs dommages en avantages utilisables dans plusieurs domaines, dont le plus important est la recherche scientifique. Nous sommes spécialisés dans la construction mécanique. Plusieurs scientifiques ont mené des recherches sur un phénomène important appelé vibrations.

Les vibrations dans un système mécanique résultent de la transition alternée entre les énergies cinétique et potentielle qui, sans dissipation, perdure. En présence de dissipation, et c'est le cas de tout système réel, les amplitudes du mouvement convergent jusqu'à l'équilibre statique dans le cas d'un système libre.

1.2. Effets des vibrations

Les vibrations peuvent avoir de graves conséquences. Les vibrations non contrôlées des machines peuvent accélérer le taux d'usure (c'est-à-dire réduire la durée de vie du roulement) et endommager l'équipement. Les équipements qui vibrent peuvent engendrer du bruit, provoquer des problèmes en matière de sécurité et dégrader les conditions de travail dans les usines. Les vibrations peuvent considérablement augmenter la consommation d'énergie de la machine et nuire à la qualité du produit. Dans les cas les plus graves, les vibrations peuvent gravement endommager l'équipement, jusqu'à provoquer une panne et interrompre la production de l'usine. Cela dit, les vibrations des machines offre un avantage. Mesurées et analysées de manière appropriée, les vibrations peuvent être utilisées comme indicateur de l'état de la machine dans le cadre d'un programme de maintenance préventive ; elles peuvent ainsi aider le professionnel de l'entretien de l'usine à prendre des mesures en amont, avant même qu'une panne ne se produise.

1.3. Caractéristiques des vibrations

Pour comprendre comment les vibrations se manifestent, prenons l'exemple d'une simple machine tournante comme un moteur électrique. Le moteur et l'arbre tournent autour d'un axe, lequel est supporté par un roulement à chaque extrémité. L'un des principaux éléments à prendre en compte lors de l'analyse des vibrations est la direction de la force de vibration. Dans le moteur électrique cité en exemple, les vibrations peuvent apparaître comme une force appliquée dans une direction radiale (vers l'extérieur de l'arbre) ou dans une direction axiale (parallèle à l'arbre). Un déséquilibre dans le moteur provoquerait par exemple une vibration radiale car le « point lourd » du moteur pivote, créant ainsi une force centrifuge qui entraîne le moteur vers l'extérieur lorsque l'arbre tourne

à 360 degrés. Un mauvais alignement de l'arbre pourrait provoquer des vibrations dans une direction axiale (oscillation d'avant en arrière le long de l'axe de l'arbre), en raison du mauvais alignement dans un dispositif d'accouplement de l'arbre. Autre facteur clé concernant les vibrations : l'amplitude, autrement dit la force ou le niveau de gravité de la vibration. Plus le moteur est déséquilibré, plus l'amplitude des vibrations est importante. D'autres facteurs, comme la vitesse de rotation, peuvent également avoir un impact sur l'amplitude des vibrations. Lorsque la vitesse de rotation augmente, la force de déséquilibre croît de manière significative. La fréquence correspond au taux d'oscillation des vibrations, c'est-à-dire la vitesse à laquelle la machine bouge d'avant en arrière sous la force des vibrations. La fréquence est communément exprimée en cycles par minute ou en Hertz (CPM ou Hz). Un Hertz équivaut à un cycle par seconde, soit 60 cycles par minute. Dans notre exemple, nous avons parlé de moteur « simple » ; ceci étant, même cette machine peut présenter un modèle de vibrations complexe. Lors de son fonctionnement, le moteur peut vibrer dans diverses directions (de manière radiale et axiale), avec différents niveaux d'amplitude et de fréquence. Les vibrations de déséquilibre, les vibrations axiales, les vibrations provenant de roulements à rouleaux endommagés et autres peuvent se combiner et provoquer un spectre de vibrations complexe.

1.4. Analyse modale

1.4.1. Historique

L'idée de base de l'analyse modale est de décrire des phénomènes complexes dans la dynamique des structures à composants simples, qui sont des modes de vibration naturelle. Cette idée est largement utilisée dans le domaine de l'atome, qui tente de trouver les éléments les plus fondamentaux de variétés de substances différentes, ou le concept des séries de Fourier qui représente une forme d'onde complexe par une combinaison de sinus et cosinus simple. Newton, de son observation du spectre de la lumière du soleil, a confirmé la composition des composants de la couleur. Fourier, en se basant sur d'anciennes retenues mathématiques, a fait valoir qu'une fonction arbitraire périodique avec un intervalle fini peut toujours être représentée par une simple sommation des fonctions harmoniques.

La théorie de l'analyse modale peut être étroitement associée à l'équation d'onde qui décrit la dynamique d'une corde vibrante. A partir de la solution, nous pouvons déterminer ses fréquences naturelles, les formes des modes et des réponses forcées. Cette étape de l'analyse modale, développé au XIX siècle, a été largement tributaire des mathématiques pour résoudre des équations aux dérivées partielles qui décrivent les différents systèmes des dynamiques des structures. La théorie a

été développée de telle sorte que l'analyse dynamique de structure d'un système arbitraire peut être réalisée si l'on connaît sa masse et la distribution de la rigidité des formes matricielles. Les logiciels permettent d'effectuer l'analyse modale d'une structure à partir de données expérimentales en considérant seulement les réponses aux sollicitations, cela permet donc d'estimer les fréquences de vibration de la structure, les formes propres ainsi que l'amortissement de la structure. Le fondement de l'analyse modale expérimentale, un nom artificiel longtemps après la pratique du génie qu'il incarne, a été posé au début du dernier siècle. Le noyau d'analyse modale expérimentale est l'identification du système. En conséquence, il a été nourri par le développement en ingénierie électrique.

L'invention de la transformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform : FFT) par JW Cooley et J.W. Tukey en 1965 a finalement ouvert la voie à une application rapide et répandue des techniques expérimentale en dynamique des structures. Avec la FFT, les réponses en fréquence d'une structure peuvent être calculées à partir de la mesure des éléments données. La théorie de l'analyse modale permet d'établir la relation entre la mesure FRF (fonction de réponse fréquentielle) et les données modales de l'échantillon testé. Des efforts ont été axés sur la dérivation des informations modales à partir des données mesurées FRF. La première, et peut-être la plus importante méthode d'analyse modale expérimentale a été proposée par CC Kennedy et C.D. Pancu en 1947 avant que la FFT n'ait été conçu. Leur méthode a été largement oubliée jusqu'à ce que la FFT ouvre le chemin de l'analyse modale expérimentale. Depuis lors, de nombreuses méthodes ont été proposées et plusieurs ont été informatisés, y compris celles développées dans le domaine temporel. Le développement expérimental a également contribué à faire progresser la théorie de l'analyse modale.

Aujourd'hui, l'analyse modale est un outil pour l'ingénierie des sciences et est utilisée dans plusieurs domaines. Les applications vont de la construction automobile, aéronautique et astronautique d'ingénierie pour la bio-ingénierie, à la médecine et la science. L'analyse numérique (éléments finis) et l'analyse modale expérimentale sont devenues les deux piliers de la dynamique des structures.

1.4.2. définition de l'analyse modale

L'analyse modale est le processus de détermination des caractéristiques dynamiques inhérentes des systèmes en forme de fréquences naturelles, de facteurs d'amortissement et de formes de mode ainsi que des facteurs de participation, afin de les utiliser pour formuler un modèle mathématique pour

son comportement dynamique. Les formulées du modèle mathématique est appelé la méthode modale du système et l'information pour les caractéristiques sont ses données modales.

La dynamique des structures est physiquement composée de deux parties, la fréquence et la position. Ceci est clairement mis en évidence par la solution analytique des équations aux dérivées partielles de système continu tel que les poutres et les cordes. L'analyse modale est fondée sur le fait que la réponse vibratoire d'une constante dans le temps du système dynamique linéaire peut être exprimée comme la combinaison linéaire d'un ensemble de mouvements harmoniques simples appelé modes de vibration naturelles. Ce concept est similaire à l'utilisation d'une combinaison de Fourier (sinus et cosinus) pour représenter une forme d'onde complexe [1]. Les modes propres de vibration sont inhérentes à un système dynamique et sont entièrement déterminée par ses caractéristiques physiques (masse, raideur, amortissement) et leur répartition spatiale.

Pour chaque mode propre est décrit en termes de paramètres modaux :

- Période et fréquence naturelle
- Facteur d'amortissement modal
- Facteur de participation modale suivant les directions X, Y, Z
- La masse modale participante (pourcentage) suivant les directions X, Y, Z

La forme du mode peut être réelle ou complexe. Chacun d'eux correspond à une fréquence naturelle. Le degré de la participation de chaque mode naturel dans la vibration globale est déterminé tant par ses propriétés de la source d'excitation (s) que par la forme du mode du système. L'analyse modale englobe les techniques théoriques et expérimentales ancrée sur un modèle physique d'un système dynamique comprenant sa masse, sa rigidité et ses propriétés d'amortissement. Ces propriétés peuvent être données sous la forme d'équations aux dérivées partielles. Les équations du mouvement pour un système à plusieurs DDL non amorti en vibrations libres s'écrivent simplement, établie à partir de sa distribution de masse et des propriétés d'élasticité. La solution de l'équation fournit les fréquences et les modes propres de la chaîne et de ses réponses des vibrations. Cependant, un modèle physique plus réaliste comprend généralement la masse, la rigidité et l'amortissement en fonction de leur répartition spatiale, à savoir les matrices de masses, de rigidités et d'amortissements. Ces matrices sont incorporées dans un ensemble d'équations différentielles du mouvement normal. Le principe de superposition des systèmes dynamiques linéaire nous permet de transformer ces équations en une valeur propre typique. Sa solution fournit les données modales du système [2].

L'utilisation d'une nouvelle base modale a rendu possible le traitement des non-linéarités. Ce traitement a un prix : les dynamiques des modes deviennent couplées et ce même dans le cas d'un système linéaire [3].

1.5. Historique des poutres

La théorie des poutres est à la base des méthodes de calcul de poutres et cadres, structures d'ensembles de composés poutres, et représente l'un des modèles les plus importants de la science du bâtiment. Il a été formulé autour 1638 et développé aux XVIIe et XVIIIe siècles. Après les succès du XIXe éprouvés avec la construction de ponts métalliques en France et en Angleterre, la tour Eiffel et Grandes roues la théorie du faisceau obtenu un grand succès et a été considérée comme l'une des pierres angulaires de l'ingénierie et l'une des clés Deuxième révolution industrielle.

1.5.1. Les types des poutres

Il existe plusieurs types des poutres et elles sont utilisées dans des nombreux domaines, notamment les suivants :

- Les poutres métalliques
- Les poutres bois
- Les poutres béton
- Les précontraintes

Notre étude s'est limitée à un type spécifique de poutre, à savoir les poutres métalliques :

Elles sont sollicitées dans les charpentes métalliques lors des montages en kit ou sur mesure. Elles sont également utilisées en renfort et consolidation d'une structure existante.

Par exemple lors de travaux d'extension d'une maison, il arrive qu'on ait recours à la démolition d'une partie ou totalité d'un mur. Les poutres métalliques sont à ce titre faciles à manœuvrer et efficaces pour reprendre les charges (cas d'un linteau). Vous les retrouverez sur le marché et auprès des constructeurs sous plusieurs aspects, selon leurs usages et leurs destinations :

Les types de poutre	Destination
Poutre UPN	<ul style="list-style-type: none"> • Jointure de dalles. • Les linteaux en façades et de fenêtres. • Les marches d'escaliers.
Poutre IPE	<ul style="list-style-type: none"> • Poutre d'ossature. • Linteau de soutènement. • Appui dalle. • Charpente métallique.
Poutre HEA	<ul style="list-style-type: none"> • Fixation et renfort de murs. • Encastrement de dalles. • Dalles à charges lourdes.
Poutre IPN	<ul style="list-style-type: none"> • Poutre pour dalles. • Charpente métallique.

Tableau 1.1.les types et la destination des poutres

1.5.2. Les formes des poutres métalliques

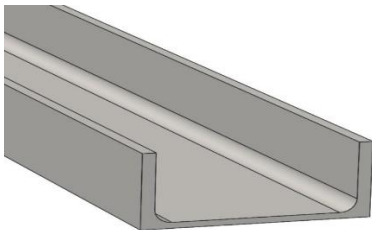


Figure 1.1. Poutre UPN (forme en U)



Figure 1.2. Poutre IPE (forme de I)

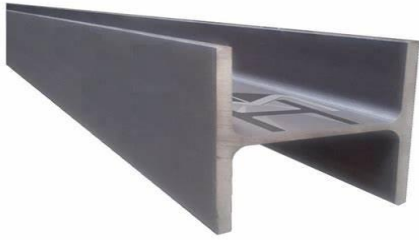


Figure 1.3. Poutre HEA (forme de H)



Figure 1.4. Poutre IPN (forme de I)

1.5.3. Les domaines d'utilisation Poutre et plaque

Le domaine de l'utilisation de plaque est très répandu dans tous les domaines, en particulier dans le domaine du génie civil où, on les utilise dans les constructions simples (habitation) où les ouvrages d'art et elle existe sous formes différentes, y compris les circulaires et rectangulaires et d'autres formes selon la qualité de l'ouvrage, Comme celle-ci est représentée dans les photos ci-dessous.



Figure 1.5. Structures des bâtiments

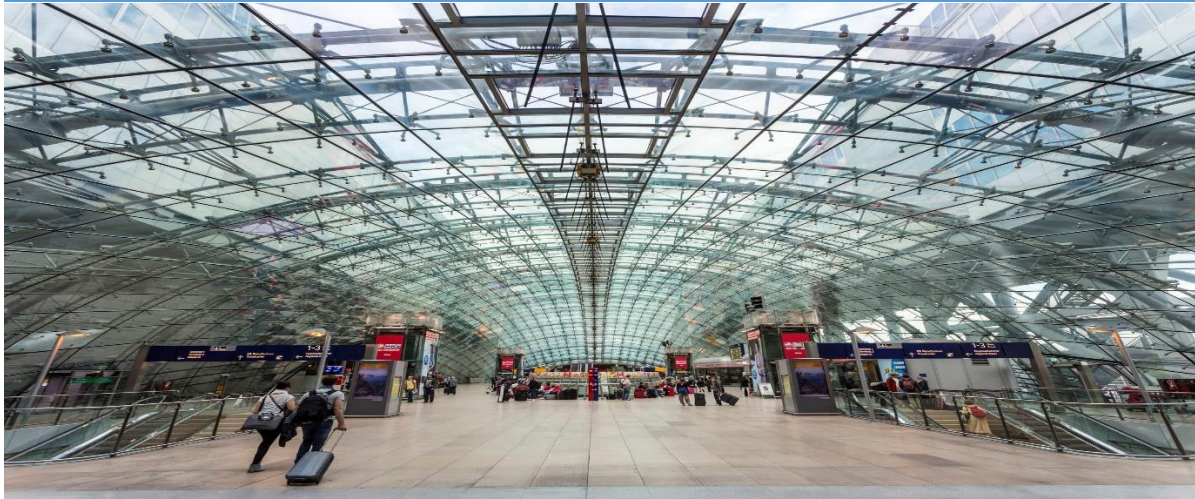


Figure 1.6. Aéroport

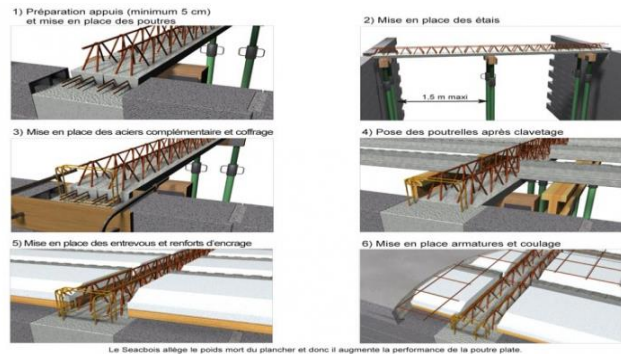


Figure 1.7. Les ponts



Figure 1.8. Les stades

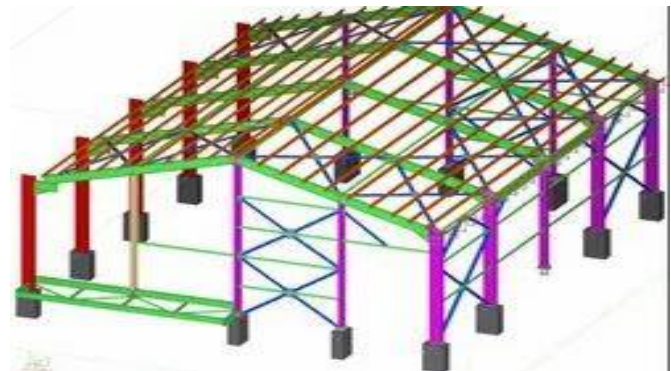


Figure 1.9. Les charpentes métalliques

1.6. Synthèse bibliographique

De nombreux travaux de recherche ont été réalisés dans le domaine de l'analyse modale des poutres et des plaques. Ces travaux visent à mieux comprendre le comportement vibratoire de ces structures et à développer des méthodes efficaces pour prédire leurs fréquences propres et leurs modes de vibration. Certains de ces travaux se sont concentrés sur l'amélioration des modèles analytiques existants, en prenant en compte des facteurs tels que la flexibilité transversale, les effets de bord, et les non-linéarités matérielles. D'autres études ont utilisé des techniques numériques avancées, telles que la méthode des éléments finis, pour simuler et analyser le comportement vibratoire des poutres et des plaques dans des conditions réelles. De plus, des recherches expérimentales ont été menées pour valider les résultats obtenus par les modèles analytiques et numériques, en utilisant des techniques telles que l'analyse modale expérimentale et la mesure des fréquences propres. Ces travaux de recherche contribuent à l'avancement des connaissances dans le domaine de l'analyse modale des poutres et des plaques, et fournissent des outils et des méthodes précieuses pour la conception et l'optimisation de ces structures dans diverses applications industrielles.

N. Chien et al. [4] Présente une étude sur les lois de conservation pour les poutres de Bernoulli-Euler non homogènes. Les auteurs ont utilisé une méthode de séparation des variables pour résoudre les équations différentielles qui décrivent le mouvement de la poutre. Ils ont montré que les lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement s'appliquent toujours, même dans le cas de poutres non homogènes. Les résultats ont été confirmés par des simulations numériques. Cette étude pourrait avoir des implications pour la conception de poutres plus efficaces et pour une meilleure compréhension du comportement des poutres non homogènes.

O. Civalak [5] fait une analyse de la flexion des microtubules à l'aide de la théorie de la poutre non-locale d'Euler-Bernoulli. Les auteurs ont développé un modèle mathématique pour décrire la flexion des microtubules, en prenant en compte leur petite taille et leur structure complexe. Ils ont montré que le modèle non-local est plus précis que le modèle local pour prédire le comportement de flexion des microtubules. Les résultats ont été validés par des expériences de flexion de microtubules. Cette étude pourrait avoir des implications pour la conception de nanomatériaux plus résistants et pour une meilleure compréhension de la mécanique cellulaire.

Kh. Barad [6] montre une méthode de détection de fissures dans une poutre en porte-à-faux en utilisant une méthode basée sur la fréquence. Les auteurs ont analysé la réponse vibratoire de la poutre en porte-à-faux pour détecter les changements dans les fréquences naturelles causées par

l'apparition de fissures. Ils ont montré que cette méthode est efficace pour détecter des fissures de différentes tailles et emplacements. Les résultats ont été validés par des simulations numériques et des expériences en laboratoire. Cette méthode pourrait être utilisée pour la détection précoce de fissures dans les structures en porte-à-faux et pour prévenir les défaillances catastrophiques.

Francesco Pieri et al. [7] dispose un modèle analytique simple pour prédire la fréquence de résonance des poutres perforées. Les auteurs ont développé une équation mathématique pour calculer la fréquence de résonance en fonction de la géométrie de la poutre et du taux de perforation. Ils ont montré que leur modèle prédit avec précision les fréquences de résonance des poutres perforées dans une large gamme de paramètres. Les résultats ont été validés par des simulations numériques et des expériences en laboratoire. Cette étude pourrait avoir des implications pour la conception de structures légères et résistantes, telles que des panneaux acoustiques perforés.

M. Amin baghai et al. [8] proposent une analyse modale théorique et expérimentale d'un système de poutre-tendons. Les auteurs ont utilisé une méthode de décomposition de modes pour identifier les modes de vibration de la poutre-tendons et ont comparé les résultats théoriques avec les mesures expérimentales. Ils ont montré que leur modèle théorique prédit avec précision les modes de vibration observés dans les expériences. Les résultats ont des implications pour la conception de structures de poutres-tendons, en particulier pour la prévention des modes de vibration indésirables.

J. Murin et al. [9] constitue un élément fini de poutre pour l'analyse modale de structures à gradient de matériaux fonctionnalisés (FGM). Les auteurs ont développé un modèle mathématique pour décrire le comportement de la poutre FGM et ont utilisé une méthode de décomposition de modes pour identifier les modes de vibration. Ils ont montré que leur modèle prédit avec précision les modes de vibration de la poutre FGM, même pour des cas complexes avec des variations importantes des propriétés des matériaux. Les résultats ont été validés par des simulations numériques et des expériences en laboratoire. Cette étude pourrait avoir des implications pour la conception de structures FGM plus efficaces dans une variété de domaines, tels que l'aérospatiale et l'énergie.

Ms. Mia et al. [10] faire connaître une analyse modale d'une poutre en porte-à-faux fissurée par simulation à éléments finis. Les auteurs ont utilisé un modèle de poutre à éléments finis pour décrire le comportement de la poutre fissurée et ont utilisé une méthode de décomposition de modes pour identifier les modes de vibration. Ils ont montré que leur modèle prédit avec précision les modes de vibration de la poutre fissurée, et que la présence de fissures modifie significativement les fréquences naturelles de vibration. Les résultats ont été validés par des simulations numériques et

des expériences en laboratoire. Cette étude pourrait avoir des implications importantes pour la détection précoce des fissures dans les structures et la prévention des défaillances catastrophiques.

M. Shen et al. [11] représente une analyse des vibrations libres des poutres avec une fissure à bord unique. Les auteurs ont utilisé un modèle de poutre à éléments finis pour décrire le comportement de la poutre fissurée et ont utilisé une méthode de décomposition de modes pour identifier les modes de vibration. Ils ont montré que la présence de fissures modifie significativement les fréquences naturelles de vibration et que la profondeur et la longueur de la fissure ont un impact important sur ces fréquences. Les résultats ont été validés par des simulations numériques et des expériences en laboratoire. Cette étude pourrait avoir des implications importantes pour la détection précoce des fissures dans les structures et la prévention des défaillances catastrophiques.

D'autres articles portent sur l'analyse des vibrations des poutres fissurées. Behzad et al. [12] proposent une nouvelle approche pour l'analyse des vibrations d'une poutre fissurée en utilisant la méthode de décomposition de l'énergie. Dans une étude ultérieure, Behzad et al. [13] proposent un nouveau modèle continu pour l'analyse des vibrations de flexion d'une poutre fissurée. Cunedioğlu et Shabani [14] examinent l'analyse des vibrations libres des poutres symétriques à gradation fonctionnelle avec un bord unique fissuré. Selmi [15] étudie les vibrations libres des poutres à plusieurs fissures. Enfin, Carneiro et Inman [16] fournissent des commentaires sur les vibrations libres des poutres avec une seule fissure de bord. Ensemble, ces articles démontrent l'intérêt et la diversité des approches pour l'analyse des vibrations des poutres fissurées.

Helmut F. Bauer [17] présente les fréquences propres sont obtenues pour des plaques circulaires élastiques avec des conditions aux limites mixtes. Les conditions aux limites de la plaque étaient des combinaisons de serrées, simplement appuyées, libres et guidées. Les fréquences propres sont présentées en fonction de l'angle sur lequel la circonférence de la plaque est traitée comme une limite et le reste comme autre condition aux limites. Il a été constaté que les modes axisymétriques présentent une variation continue de la fréquence naturelle » une condition pure à l'autre condition aux limites pure, tandis que les modes asymétriques présentent de branches de courbures et d'amplitude variable fluctuation, en fonction de l'amplitude des angles des frontières mixtes.

P. Laura et al. [18] fait une comparaison des fréquences naturelles de vibration transversal mince rectangulaire d'épaisseur non uniforme avec différentes combinaisons de condition aux limites est présentée dans cette article, obtenue en utilisant les méthodologies suivantes : (1) la méthode de Rayleigh-Ritz avec polynôme orthogonale caractéristique fonctions de forme ; (2) la méthode de

Rayleigh-Ritz avec une fonction de forme qui comprend deux exposants qui doivent être déterminé en minimisant le coefficient de fréquence fondamentale ; (3) la méthode optimisée de Kantorovich qui a été proposée assez récemment ; (4) la méthode des éléments finis. Les résultats sont présentés sous forme de tableau et discutés.

Gw Wei et al. [19] Suggèrent une nouvelle combinaison intégrale de surface couplée pour déterminer les fréquences naturelles d'une plaque rectangulaire. Les solutions des moments de la méthode(MM) à cette formule et les résultats numériques ultérieurs sont présentés.

Les fréquences propres prédites par la théorie ont été vérifiées par une expérience. Par rapport à la formulation actuelle de ce problème, la formulation actuelle de ce problème, la formulation actuelle prédit aussi bien pour les quelques premiers modes dominants mais mieux pour les plus élevés. De plus, dans la formule actuelle, aucun problème de convergence n'est induit.

G. Wei et al. [20] Présentent l'algorithme convolutif discret unique pour l'analyse des vibrations de plaques rectangulaires avec des conditions aux limites mixtes. Un schéma unifié a été proposé pour traiter les conditions aux limites supportées, ancrées et ancrées transversalement (avec une contrainte de rotation élastique inadaptée). La robustesse et la fiabilité de la présente approche sont testées par un certain nombre d'expériences numériques. Tous les résultats sont en bon accord avec ceux de la littérature.

1.7. Conclusion

Ce chapitre a fourni une introduction simple aux vibrations et a exploré l'historique de l'analyse modale et son utilisation dans divers domaines, en mettant particulièrement l'accent sur le domaine de la construction mécanique qui accorde une grande importance à l'étude des vibrations. Nous avons ensuite abordé l'utilisation des poutres et des plaques dans ces analyses, en soulignant leurs caractéristiques et leur comportement vibratoire spécifique. Enfin, nous avons présenté les travaux de recherche menés par différents chercheurs dans le domaine de l'analyse modale des poutres et des plaques, afin de fournir un aperçu des avancées réalisées dans ce domaine et des informations sur les caractéristiques vibratoires de ces structures.

CHAPITRE 02

Etude analytique

2.1. Introduction

La formulation du problème de vibration de flexion de poutre pour montrer l'existence de deux modèles fondamentaux, les modèles de Timochenko qui prennent en compte l'inertie rotationnelle de l'effet de cisaillement transverse, et le modèle d'Euler-Bernoulli qui néglige le cisaillement. L'effet conduit après élimination de l'inertie de rotation à l'équation d'Euler-Bernoulli qui est l'équation la plus représentative des vibrations de flexion des poutres lorsque toutes les hypothèses simplificatrices sont présentes.

Ce chapitre approfondit l'étude du modèle d'Euler-Bernoulli pour les poutres. Nous examinons les équations fondamentales du modèle et nous discutons de leur signification physique. En particulier, nous nous concentrons sur le cas d'une poutre encastree-libre, où l'une des extrémités est fixée et l'autre est libre de se déplacer. Nous étudions les conditions aux limites et nous résolvons l'équation homogène correspondante pour déterminer les modes propres et les fréquences naturelles de vibration de la poutre dans ce cas spécifique. Cette analyse nous permet de comprendre les comportements vibratoires caractéristiques des poutres encastrees-libres et d'évaluer leur réponse aux excitations externes.

2.2. Notions sur les vibrations

2.2.1. Définition de vibration

Le terme vibration se réfère notamment à une oscillation mécanique autour d'un point d'équilibre. L'oscillation peut être périodiques comme mouvement un pendule ou aléatoire que le mouvement d'un pneu sur une route asphaltée; l'unité de mesure de la fréquence pour des oscillations périodiques est l'hertz ce qui correspond à combien de fois, dans une seconde, retourne la même configuration.

Les vibrations représentent un phénomène souhaité dans de nombreux cas. Par exemple, dans le fonctionnement de diapason, et beaucoup instruments de musique, ou les cônes de haut-parleurs, nécessaires au bon fonctionnement des divers objets qui les utilisent.

2.2.2. Types des vibrations

2.2.2.1. Vibrations libres

Lorsqu'un système mécanique vibre et est soumis à aucune force. Idéalement, si le système n'a pas été équipé d'une sorte de friction, d'amortissement ou d'une dispersion d'énergie cependant, il continuerait de faire vibrer le même infiniment dans le temps. Un système ne subit pas de force vibre depuis ses conditions initiales étaient (au moment initial) non nulle. Un exemple

simple est le cas d'une masse reliée à un châssis au moyen d'un ressort, lequel ressort, à l'instant initial, par exemple, a été comprimée.

2.2.2.2. Vibrations forcées

Il se produit lorsqu'une force est appliquée au système. Un exemple simple est caractérisé par la machine à laver, dont le tambour, équipé d'un absorbeur de chocs (pour cette raison définissable du système vibrant), est continuellement soumise à des forces de rotation, à savoir les forces d'inertie générées par l'agencement asymétrique des vêtements à l'intérieur du même.

2.3. Notion sur la fréquence propre

La fréquence propre d'un système est la fréquence à laquelle oscille ce système lorsqu'il est en évolution libre, c'est-à-dire sans force excitatrice extérieure ni forces dissipatives (frottements ou résistances par exemple)¹. Cette notion est fondamentale pour comprendre les phénomènes d'excitation, d'oscillation et de résonance. Elle est largement utilisée dans tous les domaines de la physique et trouve des applications concrètes dans la conception des horloges, des instruments de musique et en génie parasismique.

2.4. Définition du Poutre

On appelle poutre un solide engendré par une surface plane (Σ) qui peut être variable et dont le centre de gravité G décrit un segment $[AB]$, le plan de (Σ) restant perpendiculaire à cette courbe. Il faut également que la longueur AB soit grande devant les dimensions des sections transverses [2].

Une poutre est une membrure mince soumise à des charges transversales généralement normales à son axe. La poutre est l'élément structural le plus répandu, puisqu'elle fait partie intégrante de la plupart des ouvrages de construction ou des pièces machines. Une poutre est un solide engendré par une aire plane S qui est déplacée dans l'espace de manière que durant son mouvement, le centre de gravité G de la section S parcourt une ligne donnée L , et que l'aire se maintienne constamment normale à cette surface. La ligne L est appelée fibre moyenne de la poutre. Une poutre est caractérisée géométriquement par :

- une section S suffisamment massive,
- une longueur selon L grande devant les dimensions transversales,
- un rayon de courbure de L grand devant les dimensions transversales,

– un profil sans discontinuité. La théorie élastique des poutres est basée sur celle des milieux curvilignes. Une position sur la poutre sera caractérisée uniquement par l'abscisse curviligne l d'un point sur la fibre moyenne L

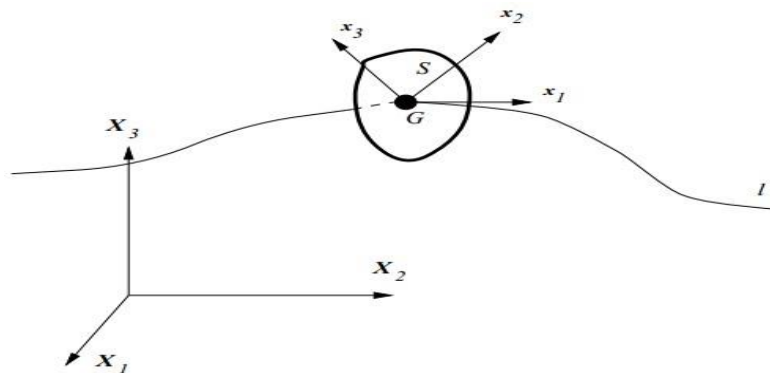


Figure 2.1 : Plan Σ .

Une poutre est donc un milieu continu ayant une dimension très grande par rapport aux deux autres figures (2.1). Pour que le théorème de la poutre soit applicable il faut que les sections droites soient lentement variables ou constantes en fonction de l'abscisse curviligne, et que la plus grande dimension de la section droite soit petite devant le rayon de courbure et la longueur de la poutre.

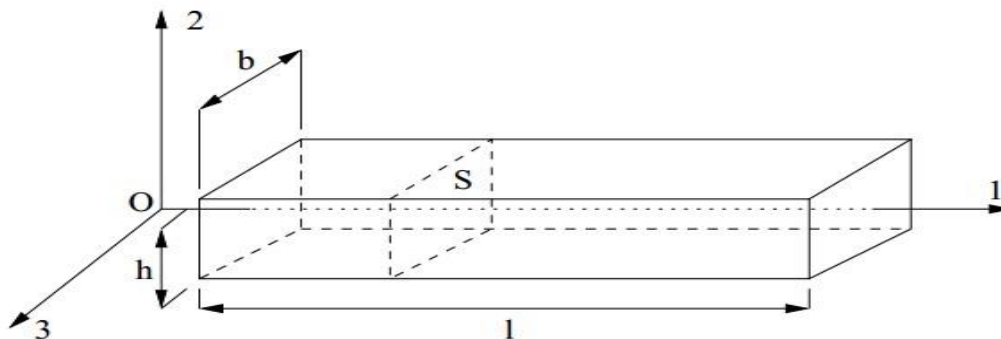


Figure 2.2 : Représentation d'une poutre droite dans le repère $(0, 1, 2, 3)$

Ici, nous étudions la poutre encastree libre ou poutre console figure (2.2) : C'est une poutre encastree dans un mur à une l'extrémité. L'extrémité encastree ne bouge pas pendant la flexion, tandis que l'autre extrémité est entièrement libre. On appelle aussi cette poutre, poutre en porte-à-faux ou poutre encastree à une extrémité [3].

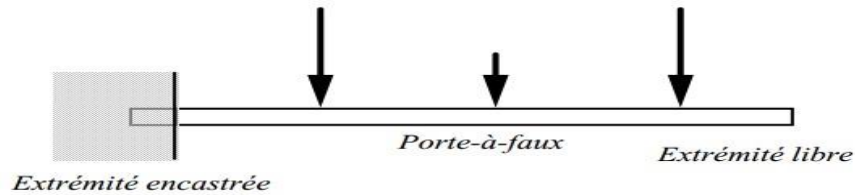


Figure 2.3 : Poutre console

2.5. Historique du modèle d'Euler-Bernoulli

Le modèle d'Euler-Bernoulli est né au XVIII^e siècle avec Daniel Bernoulli (1700-1782) qui a formulé le premier l'équation différentielle de mouvement pour une poutre [21]. Ce modèle inclut l'énergie cinétique due au déplacement latérale. Euler y apporté de nombreuses améliorations grâce à ses travaux sur l'élasticité. Egalement connu sous le nom de théorie classique des poutres, le modèle d'Euler-Bernoulli reste le plus populaire en raison de sa simplicité et fournit des approximations acceptables pour nombreux problèmes d'ingénierie. Le modèle d'Euler-Bernoulli est l'équivalent du modèle de Love-Kirchhoff. La théorie d'Euler-Bernoulli est utilisée quand le rapport longueur sur diamètre équivalent est supérieur à vingt. D'après les hypothèses d'Euler-Bernoulli [22], la déformation due cisaillement transversale n'est pas prise en compte, en plus toute section droite reste plane et perpendiculaire à la ligne moyenne après déformation. Dans notre cas la théorie d'Euler-Bernoulli est utilisée à la flexion sur une poutre encastrée libre.

La théorie classique des poutres développée par Euler-Bernoulli est employée seulement pour les poutres minces car cette théorie néglige l'effet du cisaillement transversal et les contraintes naturelles.

2.6. Le modèle d'Euler-Bernoulli

Le modèle de faisceau d'Euler-Bernoulli, peut être facilement obtenu à partir de cette redéfinition de la loi de comportement comme suit encore élasto-linéaire, mais lorsque l'état de la contrainte interne cinématique, annulant les glissements, oblige les sections non seulement à un comportement de surface rigide, mais aussi pour rester perpendiculaire à la ligne d'axe (hypothèse de Bernoulli) être, la contrainte de cisaillement est indéterminée à partir des équations constitutives ; cela signifie qu'elle doit être dérivée de l'équilibre pour les équations indéfinies d'équilibre.

En d'autres termes, la cinématique du faisceau d'Euler-Bernoulli est décrite au moyen du champ de déplacement, -à-dire seulement en fonction de la déformée assumée par la configuration de la ligne d'axe: on parle dans ce cas de ligne élastique.

Le modèle Euler-Bernoulli est un modèle plus approximatif du modèle Timoshenko pour le dimensionnement habituel génie civil est suffisamment précis et il est donc préférable de modèle Timoshenko pour sa plus grande facilité d'utilisation.

2.7. Mouvement transversal (de flexion)

La vibration transversale, ou flexion, d'une poutre se réfère au mouvement oscillant de la poutre autour de son axe transversal. Lorsque la poutre est soumise à une force ou à une excitation externe, elle se déforme en se courbant et en oscillant. Ce mouvement de flexion peut être observé lorsque la poutre oscille de haut en bas, avec certaines parties en compression et d'autres en tension. Les vibrations transversales peuvent être analysées pour comprendre le comportement dynamique de la poutre, notamment ses fréquences naturelles, ses modes propres et son amortissement. Cela permet de concevoir et de dimensionner des structures adaptées aux contraintes vibratoires et de prévenir les effets indésirables tels que la fatigue ou les vibrations excessives.

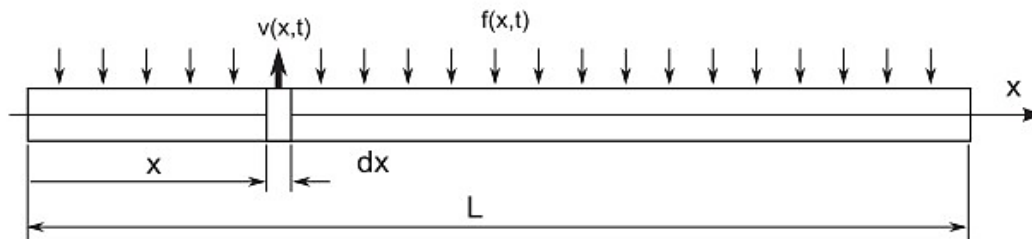


Figure 2.4 : Poutre en vibration transversale.

➤ **Poutre droite :**

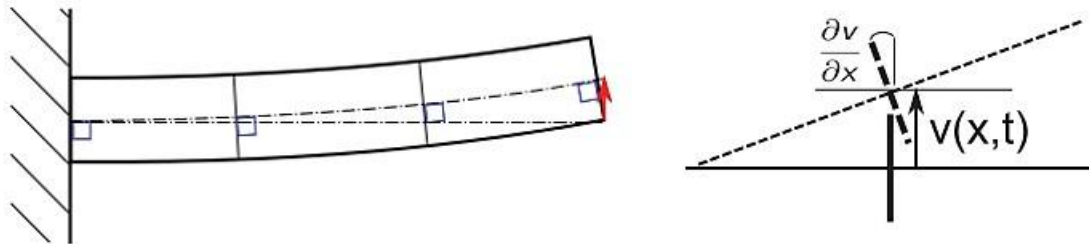
- Section constante $S = \text{largeur} \times \text{hauteur}$,
- Longueur $L (\gg e, l)$,
- Moment quadratique de section $I_{\perp} = \frac{bh^3}{12}$
- Matériau isotrope : ρ, E, ν , non dissipatif

➤ **Variables :**

- Distribution de forces transverses $f(x, t)$
- Petites perturbations + gravité non prise en compte
- Grandeur étudiée : déplacement transverse local (flèche) $v(x, t)$

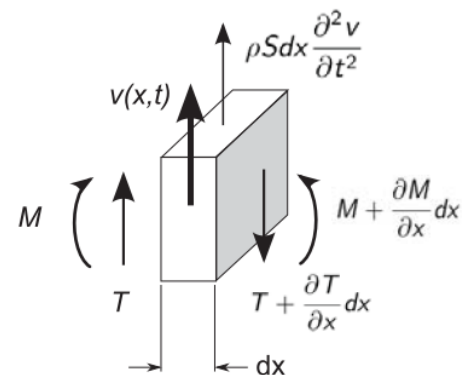
➤ **Hypothèses :**

- Hypothèse d'Euler-Bernoulli : L'inertie de rotation des sections est négligée.
- Conséquence : les sections droites restent \perp à la ligne neutre.



On écrit l'équilibre dynamique d'une section d'épaisseur dx :

- Masse : $\rho S dx$
- Déplacement (Flèche) : $v(x, t)$
- Accélération : $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$
- Effort tranchant à gauche : T
- Effort tranchant à droite : $T + \frac{\partial T}{\partial x} dx$



Le mouvement est défini par :

- V : flèche ;
- ψ : pente due au moment fléchissant ;
- T : effort tranchant ;
- C : moment fléchissant ;
- I : inertie de section ;
- a : facteur de forme. Il est de l'ordre de l'unité pour des sections usuelles.

L'application des théorèmes généraux de la dynamique conduit à :

$$\rho S dx \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = T - T - \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

$$\rho J dx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -C + C + \frac{\partial C}{\partial x} dx - T dx$$

D'après la R.D.M

$$EJ \frac{d^2 v}{dx^2} = -C$$

$$\frac{d^2 C}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -q$$

L'équation de Bernoulli-Euler ci-dessous représente un modèle de base des vibrations de flexion des poutres toutes lorsque les hypothèses simplificatrices sont respectées .

Equation de mouvement: $(EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}) + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad x_1 \in [0, l[, \forall t$

Les conditions aux limites dans le cas de la poutre encastree en $x=0$ et libre en $x=l$ se traduisent par :

$$v(0, t) = 0 \quad \frac{v(0, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 v(l, t)}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^3 v(l, t)}{\partial x^3} = 0$$

En separant $v(x, t)$ en deux fonction $v(x, t) = T(t).A(x)$ et en remplaçant dans l'équation de mouvement il vient :

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{A(x)} \frac{d^4 A(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \text{conste} = v^2$$

On peut donc écrire :

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + v^2 T(t) = 0$$

$$\frac{d^4 A(x)}{dx^4} - \frac{\rho S}{EI} v^2 A(x) = 0$$

La première de ces deux équations est une équation différentielle ordinaire du 2^{ème} ordre sa solution peut être écrite sous la forme : $T(t) = d_1 \sin \omega t + d_2 \cos \omega t$ ou d_1 et d_2 sont déterminées à partir des conditions initiales.

La deuxième équation peut être transformée sous la forme:
$$\frac{d^4 A(x)}{dx^4} - \beta^4 A(x) = 0$$

Avec :
$$\beta^4 = \frac{\rho S}{El} \omega^2$$

a est appelée nombre d'onde et la relation $(\beta^4 = \frac{\rho S}{El} \omega^2)$ relation de dispersion.

L'introduction des conditions aux limites dans la solution spatiale va permettre déterminer a et par la suite les fréquences propres ω

La forme spatiale présente une solution en deux termes l'un sinusoidale et l'autre hyperbolique

$$A(x) = c_1 \sin(ax) + c_2 \cos(ax) + c_3 \sinh(ax) + c_4 \cosh(ax)$$

En introduisant les conditions limites dans cette équation il vient:

Ces équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_2 + c_4 = 0 \\ c_1 + c_3 = 0 \\ -c_1 \sin(al) - c_2 \cos(al) + c_3 \sinh(al) + c_4 \cosh(al) = 0 \\ -c_1 \cos(al) - c_2 \sin(al) + c_3 \cosh(al) + c_4 \sinh(al) = 0 \end{array} \right.$$

En remplaçant c_3 et c_4 par leurs valeurs dans les deux dernières équations et en écrivant le système

sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{pmatrix} \sin(al) + \sinh(al) & \cos(al) + \cosh(al) \\ \cos(al) + \cosh(al) & -\sin(al) + \sinh(al) \end{pmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution générale de l'équation homogène représentative des vibrations de flexion selon le modèle d'Euler dans le cas d'une poutre encastree libre est :

$$v(x, t) = \sum_{n=1} T_n(t) A_n(x)$$

$$T_n(t) = d_1 \sin(v_n t) + d_2 \cos(v_n t)$$

$$A_n(t) = \sin(\beta_n x) - \sinh(\beta_n x) + \varphi_n(\beta l)(\cos(\beta_n x) - \cosh(\beta_n x))$$

d_1 et d_2 sont déterminées par les conditions initiales

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} (\beta_n l)^2$$

2.8. Modes et fréquences propres

Les valeurs admissibles de la quantité k valeurs seront données par les racines $k_i L = \alpha_i$ d'une équation $f(kL) = 0$, la fonction f étant elle-même définie par les 4 conditions aux limites nécessaires pour déterminer les relations entre les 4 constantes d'intégration a, b, c, d .

Il en résulte que seule une série de pulsations discrètes ω_i (fréquences propres de vibration) sera autorisée, ces pulsations étant obtenues sous la forme générale :

$$v_i = \alpha_i^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{I}{S}} \quad v_i = \frac{1}{2\pi} \alpha_i^2 \sqrt{\frac{E}{\rho}} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{I}{S}} \quad k_i = \frac{\alpha_i}{L}$$

A chacune de ces fréquences sera associé un profil d'amplitude de déformée $Y(\omega_i, x) = Y_i(x)$ appelé mode propre de vibration.

Les fréquences propres (fréquences de résonance) résultent dans ce modèle de la compétition entre les forces d'inertie et les forces de rappel élastique. L'équation aux vibrations ne contient aucun terme susceptible de limiter l'amplitude des oscillations de sorte que la solution en amplitude ne sera définie qu'à une constante multiplicative arbitraire près.

Fréquences propres sont la combinaison d'un terme $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ caractérisant les propriétés intrinsèques du matériau (élasticité E , inertie ρ) qui s'identifie à la vitesse de propagation du son dans la poutre et d'un terme géométrique $\frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{I}{S}}$ qui caractérise la géométrie de la structure.

2.9. Application pour la poutre à étudier

Soit une poutre de longueur 0.5m, épaisseur 0.005m, masse volumique 7850Kg/m³ et module de Young 200*10⁹ N/m².

E : module de young = 200*10⁹ N/m²

I : moment d'inertie de flexion = $\frac{bh^3}{12} = 0.3125 * 10^{-9} (m^4)$ avec : $b = 0.03m$, $h = 0.005m$

S : Section = 0.00015 m²

L : Longueur de la poutre = 0.5 m

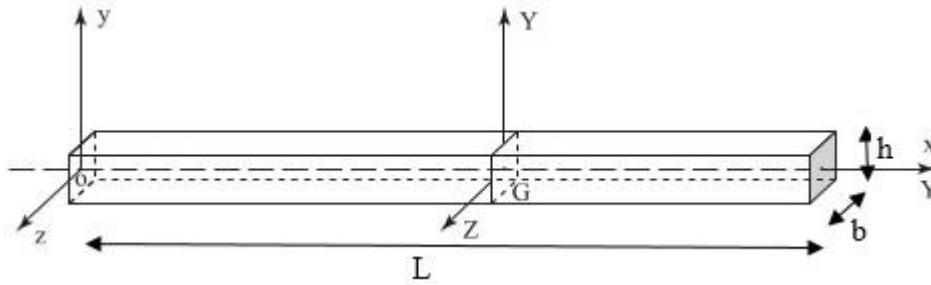


Figure 2.5. Géométrie de la poutre étudié

La fréquence d'Euler est :

$$\omega_n = \sqrt{\frac{EI}{\rho s L^4}} (\beta_n L)^2 \text{ et } f = \frac{\omega_n}{2\pi}$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = 0.3125 * 10^{-9} (m^4) \text{ Avec : } b=0.03(m)$$

$$E = 2.1 * 10^{-9} (N / m^2)$$

$$e = 0.011m$$

Les calculs :

$$\omega_1 = \frac{3.516}{(0.5)^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho s}} = 102.8 (rad / s)$$

$$f_1 = \frac{102.8}{2\pi} = 16.73 (Hz)$$

$$\omega_2 = \frac{22.4}{(0.5)^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho s}} = 654.97 (rad / s)$$

$$f_2 = \frac{654.97}{2\pi} = 104.29 (Hz)$$

$$\omega_3 = \frac{61.7}{(0.5)^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho s}} = 1804.1 (rad / s)$$

$$f_3 = \frac{1804.1}{2\pi} = 287.27 (Hz)$$

$$\omega_4 = \frac{120.78}{(0.5)^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho s}} = 3531.60(\text{rad} / \text{s})$$

$$f_4 = \frac{3531.60}{2\pi} = 562.35(\text{Hz})$$

$$\omega_5 = \frac{199.65}{(0.5)^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho s}} = 5837.76(\text{rad} / \text{s})$$

$$f_5 = \frac{5837.76}{2\pi} = 929.57(\text{Hz})$$

$$\omega_6 = \frac{298.25}{(0.5)^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho s}} = 8720.83(\text{rad} / \text{s})$$

$$f_6 = \frac{8720.83}{2\pi} = 1388.66(\text{Hz})$$

$$\omega_7 = \frac{416.57}{(0.5)^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho s}} = 12180(\text{rad} / \text{s})$$

$$f_7 = \frac{12180.50}{2\pi} = 1939.57(\text{Hz})$$

$$\omega_8 = \frac{554.6}{(0.5)^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho s}} = 16216.5(\text{rad} / \text{s})$$

$$f_8 = \frac{16216.5}{2\pi} = 2582.24(\text{Hz})$$

Le tableau 2.1 représente les 8 premières valeurs des nombres d'onde et les fréquences propres des modes correspondants pour la poutre à étudier expérimentalement

mode	$\beta_n L$	Fréquence propre
1	3,516	16.37
2	22,4	104.29
3	61,7	287.27
4	120.78	562.35
5	199.65	929.57
6	298.25	1388.66
7	416.57	1939.57
8	554.6	2582.24

Tableau 2.1: Nombres d'ondes et fréquences propres de la poutre.

Après avoir mené une étude approfondie sur les poutres, nous avons élargi notre perspective pour inclure une brève présentation de la théorie des plaques. La théorie des plaques est une branche de la mécanique des structures qui se concentre sur l'analyse du comportement des plaques minces soumises à des charges et des contraintes. Les plaques sont des structures bidimensionnelles caractérisées par leur surface plate et leur épaisseur relativement faible par rapport à leurs dimensions latérales. Elles peuvent subir des déformations complexes, notamment des déformations de flexion, de cisaillement et de membrane. Selon les propriétés et les conditions de chargement spécifiques, les plaques peuvent être classées en différentes catégories telles que les plaques rectangulaires, les plaques circulaires, les plaques à bords libres ou encastés, etc. Comprendre la théorie des plaques est essentiel pour analyser et concevoir des structures telles que les panneaux de plancher, les coques de bateau, les ailes d'avion et les revêtements de toit, où le comportement en flexion et la résistance aux vibrations sont d'une importance capitale.

2.8. Définition du plaque

Une plaque est un solide bidimensionnel, défini par une surface de référence plane (plan x_1 x_2) et par une petite épaisseur (notée $h(x_1, x_2)$) par rapport aux autres dimensions (longueur et largeur).

Typiquement, le rapport de la taille caractéristique de la plaque sur l'épaisseur est : $\frac{h}{r} > 5$

Elle peut être constituée d'un matériau homogène ou peut être obtenue par l'empilement de différentes couches de matériaux orthotropes. Une analyse élastique des plaques consiste à une analyse d'un modèle mathématique bidimensionnel ce qui nous conduit à une analyse d'un problème en élasticité plane. On note ω le domaine de l'espace occupé par le plan moyen de la plaque.

2.10. Différents types des plaques

En fonction de la nature des matériaux qui les constituent et de la géométrie de leur section transversale, les plaques peuvent être classées en trois catégories ;

2.10.1. Les plaques isotropes

Elles sont constituées d'un matériau isotrope (acier, béton) et leur section transversale est homogène. Elles sont définies par deux paramètres élastiques (E et ν) respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson). On les retrouve dans les constructions civiles courantes (bâtiments, ouvrages d'art,).

2.10.2 Les plaques orthotropes

Leurs propriétés élastiques sont différentes dans deux directions perpendiculaires. L'orthotrope peut être naturelle (bois) ou techniques (dalles rédiées). Le comportement de ces dalles est défini par quatre paramètres élastiques et on les retrouve dans les constructions navales, aéronavales, de réservoirs de l'industrie chimique, des bâtiments et d'ouvrages d'art.

2.10.3 Les plaques anisotropes

Leurs propriétés élastiques sont différentes dans toutes les directions. Neuf paramètres élastiques sont suffisants pour les devenir. Elles sont souvent constituées de matériaux composites et sont surtout utilisées dans l'industrie aéronavale.

2.11. Théorie des plaques

Les vibrations des plaques minces constituent un problème difficile à résoudre par voie analytique, on fait sur un petit nombre de cas offre la possibilité de trouver des solutions analytiques du schéma modal. Une première limitation tient à la forme de la plaque, qui doit être rectangulaire ou circulaire, nous étudions dans ce chapitre les plaques rectangulaires. Une deuxième limitation vient du type de condition aux limites de la plaque qui doivent être particulières.

Une différence avec les vibrations des poutres intervient quand on a étudié les plaques; c'est la complexité des calculs, ne serait-ce qu'au niveau de la pose des problèmes et plus particulièrement dans l'écriture des conditions aux limites. On consistera en une écriture systématique des différentes conditions aux limites à appliquer aux plaques rectangulaires de façon à se familiariser avec cette écriture.

Notre exposé est bâti sur l'équation de flexion pure qui néglige l'inertie rotationnelle, c'est – à-dire sur l'approche la plus simple possible pour limiter au maximum la lourdeur calculatoire.

Rappelons l'équation de flexion des plaques (1), fournie au chapitre sur la mise en équation des plaques :

$$\rho h \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} + D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial x_2^4} \right) = 0$$

ρ est la masse volumique du matériau, h l'épaisseur de la plaque, D est la rigidité de flexion

avec $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, où E est le module de Young et ν le coefficient de Poisson.

Considérons une plaque rectangulaire de côtés a et b , comme indiqué sur la figure (2.6).

Sur chaque bord il est nécessaire de définir la normale extérieure \vec{n} et la tangente \vec{s}

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

n_1 et n_2 sont les cosinus directeurs de la normale extérieure. Sur le bord $x=0$, par exemple on a

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des normales et tangentes sont explicitées sur la figure (2.6)

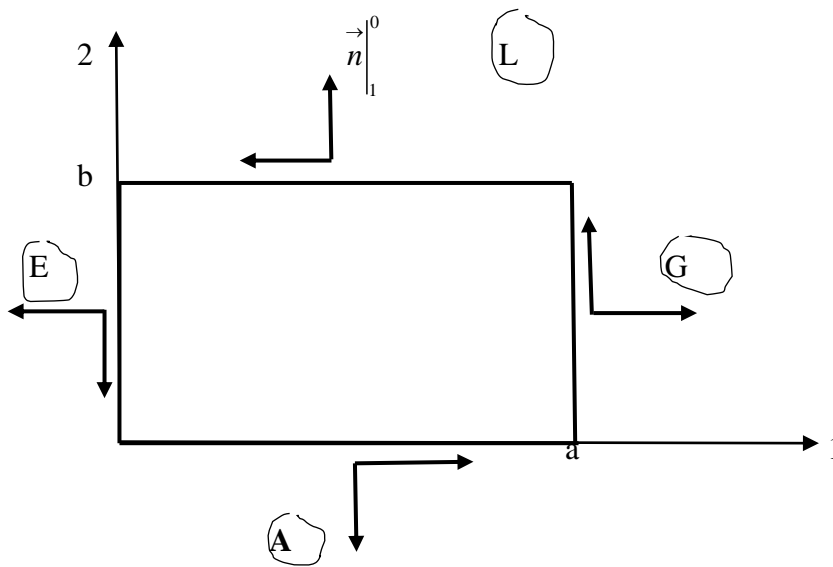


Figure.2.6 : plaque rectangulaire, normales et tangentes aux bords

Pour fixer idées nous allons écrire explicitement les quatre conditions aux limites possibles; Encastrée, Appuyée, Guidée, Libre.

Les conditions aux limites associées à l'équateur de mouvement (1), sont fournies par les deux alternatives.

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(x_1, x_2, t) = 0 \\ \text{ou} \\ T(x_1, x_2, t) = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial n}(x_1, x_2, t) = 0 \\ \text{ou} \\ M(x_1, x_2, t) = 0 \end{array} \right.$$

Dans ces équations T est l'effort tranchant, et M le moment fléchissant normal au bord de la plaque. Nous rappelons leurs expressions générales, fournies au chapitre traitant de la mise en équation des plaques minces.

$$T = \frac{\partial}{\partial n}(M) + D \frac{\partial}{\partial s} \left(2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) (1+\nu)n_1n_2 + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} (n_2^2 - n_1^2) \right)$$

$$M = D \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} \right) n_1^2 + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1 \partial x_2} n_1n_2 + \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2} \right) n_2^2 \right]$$

Les dérivées normales et tangentes sont par définition :

$$\frac{\partial}{\partial n} = \overrightarrow{Grad} \cdot \vec{n} \quad \frac{\partial}{\partial s} = \overrightarrow{Grad} \cdot \vec{s}$$

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} &= n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial s} &= -n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \end{aligned}$$

a) Condition d'Encastrement écrite sur le bord $x_1 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(0, x_2, t) = 0 \\ \text{et} \\ -\frac{\partial \omega}{\partial x_1}(0, x_2, t) = 0 \end{array} \right.$$

b) Condition d'appui écrite sur le bord $x_2 = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(0, x_1, t) = 0 \\ \text{et} \\ D \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2}(x_1, 0, t) + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2}(0, x_2, t) \right] = 0 \end{array} \right.$$

Cette condition aux limites se simplifie encore un peu car la première condition

$\omega(x_1, 0, t) = 0$ entraîne que $\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2}(x_1, 0, t) = 0$, on a donc pour le bord appuyé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(x_1, 0, t) \\ \text{et} \\ D \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2}(x_1, 0, t) = 0 \end{array} \right.$$

c) condition de Guidage écrite sur le bord $x_1 = a$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \omega}{\partial x_1}(a, x_2, t) = 0 \\ \text{et} \\ -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1^3}(a, x_2, t) + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_1 \partial x_2^2}(a, x_2, t) \right] = 0 \end{array} \right.$$

d) condition libre, écrite sur le bord $x_2 = b$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_2^2}(x_1, b, t) + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_1^2}(x_1, b, t) \right) = 0 \\ \text{et} \\ -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x_2^3}(x_1, b, t) + (2 - \nu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x_2 \partial x_1^2}(x_1, b, t) \right] = 0 \end{array} \right.$$

2.12. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons examiné de près les vibrations libres des poutres en utilisant la théorie classique d'Euler-Bernoulli. Notre objectif principal était de comprendre et d'identifier les différentes méthodes et équations utilisées dans cette théorie, ainsi que leurs solutions. Nous avons également présenté certaines des méthodes de calcul couramment utilisées dans la théorie d'Euler-Bernoulli, en fournissant un exemple concret d'application des vibrations d'une poutre encastree-libre. Ces exemples ont permis d'avoir une idée générale de la formulation du problème de vibrations dans cette méthode de base. En outre, nous avons introduit brièvement la théorie des plaques, qui est une extension de la théorie des poutres et qui s'applique aux structures plates et minces. Cette introduction nous a permis de comprendre l'importance de la théorie des plaques dans l'analyse des vibrations et de la résistance structurelle des plaques dans divers domaines d'application.

Chapitre 03

Simulation numérique des vibrations des poutres et des plaques

3.1. Introduction

En plus de 60 ans d'existences, la simulation numérique s'est constamment renouvelée et a révolutionné les secteurs de l'industrie. Son déploiement et ses mutations sont encore aujourd'hui porteurs de grands changements. Mise à la portée de l'ensemble des entreprises, quels que soient leur secteur et leur taille, elle est un outil majeur de progrès technique et de gain économique.

Dans ce chapitre, nous allons présenter en détail le logiciel "SolidWorks" et ses fonctionnalités. Nous expliquerons comment utiliser ce logiciel pour effectuer des simulations numériques des vibrations d'une poutre encastree-libre en acier allié et d'une plaque encastree libre. Nous décrirons les étapes nécessaires pour créer le modèle 3D de chaque structure, définir les conditions aux limites appropriées, et effectuer l'analyse des vibrations.

3.2. Définition de SolidWorks

Solide Works est un logiciel de conception et conception paramétrique dimensionnelle, produit et commercialisé par DASSAULT SYSTEMES. Il né comme un logiciel dédié spécifiquement pour « génie mécanique » et il est donc particulièrement utile pour la conception d'appareils mécanique, même complexe.

Le logiciel prévoit la création de dessins 2D et 3D des solides et des surfaces géométriques de types paramétrique et entièrement personnalisable.



3.3. Interface graphique

SolidWorks est un modèleur 3D utilisant la conception paramétrique. Il génère 3 types de fichiers relatifs à trois concepts de base : la pièce, l'assemblage et la mise en plan. Ces fichiers sont en relation. Toute modification à quelque niveau que ce soit est répercutée vers tous les fichiers concernés.

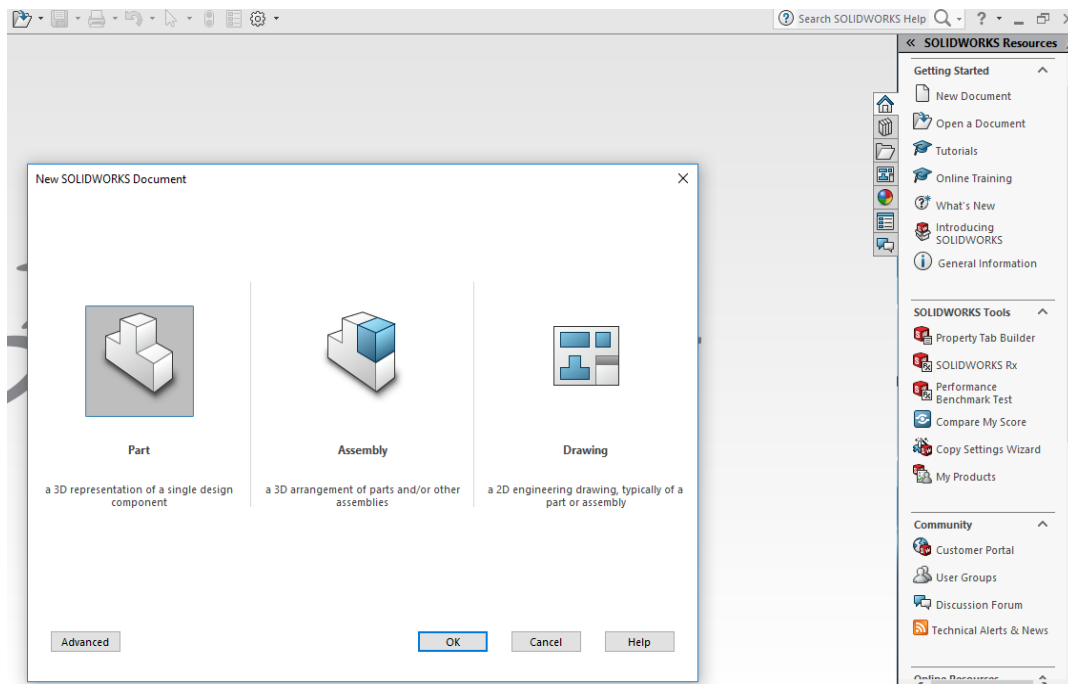


Figure 3.1. Interface graphique

3.3.1. Les pièces

La pièce est l'objet 3D monobloc. La modélisation d'une telle entité dépendra de la culture de l'utilisateur. Comme de nombreux logiciels conviviaux, SolidWorks permet d'aboutir à un même résultat apparent par des voies souvent différentes. C'est lors de la retouche de ces fichiers ou de leur exploitation qu'on appréciera la bonne méthode.

Une pièce est la réunion d'un ensemble de fonctions volumiques avec des relations d'antériorité, des géométriques, des relations booléennes (ajout retrait) ... Cette organisation est rappelée sur l'arbre de construction. Chaque ligne est associée à une fonction qu'on peut renommer à sa guise.

3.3.2. Les assemblages

Les assemblages sont obtenus par la juxtaposition de pièces. La mise en position de pièces est définie par un ensemble de contraintes d'assemblage associant, deux entités respectives par une relation géométrique (coïncidence, tangence, Coaxialité...). Dans une certaine mesure, ces associations de contraintes s'apparentent aux liaisons mécaniques entre les pièces. Le mécanisme monté, s'il possède encore des mobilités, peut être manipulé virtuellement. On peut alors aisément procéder à des réglages à l'aide des différents outils disponibles (déplacement composants, détection de collision ou d'interférence, mesure des jeux, etc.)

3.3.3. Les mises en plan

Les mises en plan concernent à la fois les pièces (dessin de définition) ou les assemblages (dessin d'ensemble). Pour aboutir à un plan fini d'une pièce on peut estimer mettre 2 fois moins de temps qu'avec un outil DAO (temps de conception et exécution du dessin). En effet, en DAO, chaque trait est indépendant, et c'est au dessinateur de savoir quelles entités graphiques sont concernées par une modification. Le logiciel 3D ne fait qu'une projection de l'objet. Les modifications éventuelles sont opérées sur l'objet représenté, et ne concernent pas directement le plan.

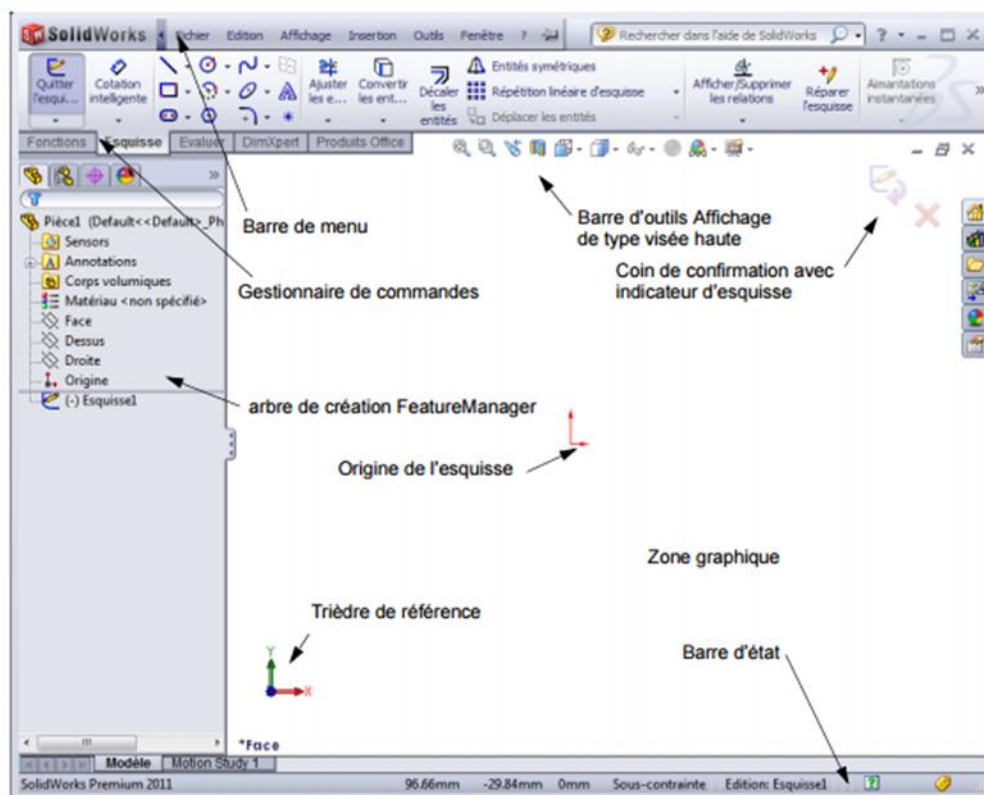


Figure 3.2. Fenêtre principale de SolidWorks

3.3.4. Les outils d'esquisses

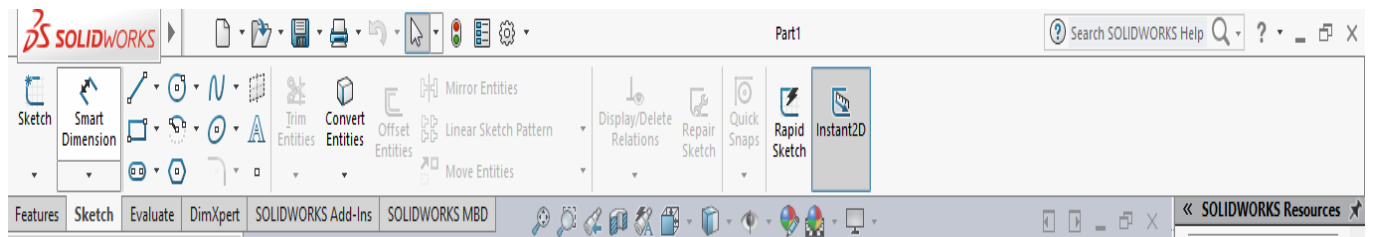


Figure 3.3. les outils d'esquisses

3.3.5. Les Fonctions de bases (Fonctions de forme):

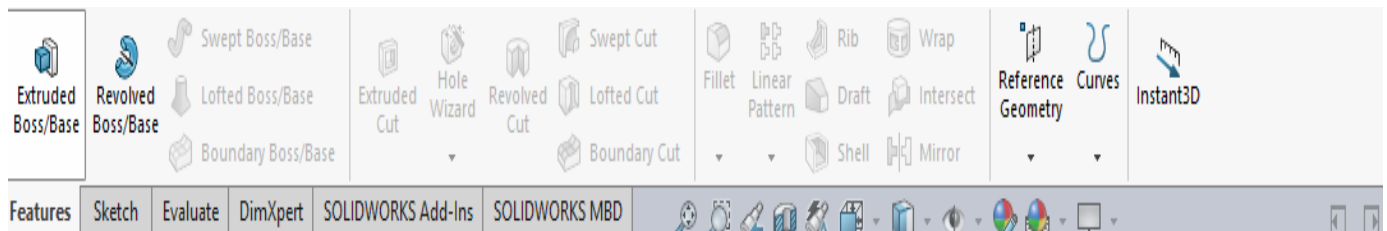


Figure3.4 Les fonctions des bases

3.3.6. Les Fonctions d'affichage

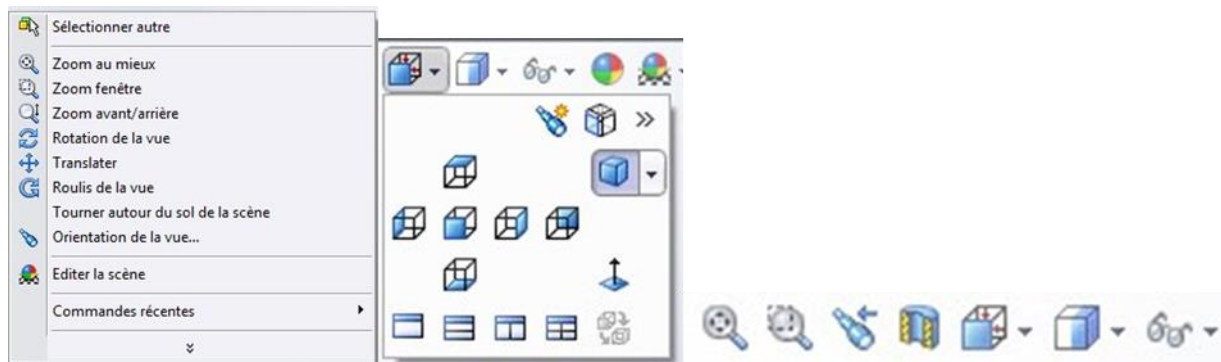


Figure 3.5. Les Fonctions d'affichage

3.4. Les étapes pour réaliser une poutre par SOLIDWORKS

- Pour commencer, ouvrons un nouveau fichier dans SolidWorks et sélectionnons l'option "Nouvelle pièce" pour dessiner la poutre.
- Sur la barre d'outils, cliquons sur l'icône "Surface de référence" et sélectionnons le plan de face sur lequel nous voulons dessiner la poutre.

- Maintenant, créons une esquisse 2D en cliquant sur l'icône correspondante.
- Dans l'esquisse 2D, dessinons un rectangle en utilisant l'outil approprié. Spécifions les dimensions de la poutre, c'est-à-dire sa longueur ($L = 0,5$ m) et son épaisseur ($e = 0,005$ m).
- Pour passer de l'esquisse 2D à l'esquisse 3D, cliquons sur l'icône "Ajouter un matériau" dans la barre d'outils.
- Maintenant, créons le volume de base de la poutre en utilisant l'outil "Extrusion". Spécifions la longueur de l'extrusion ($b=0.03$ m).

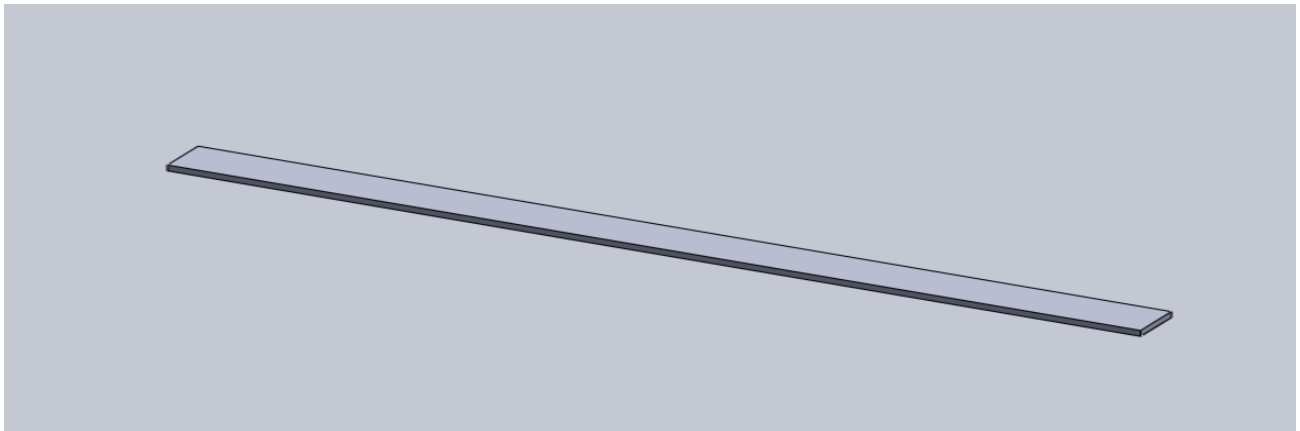
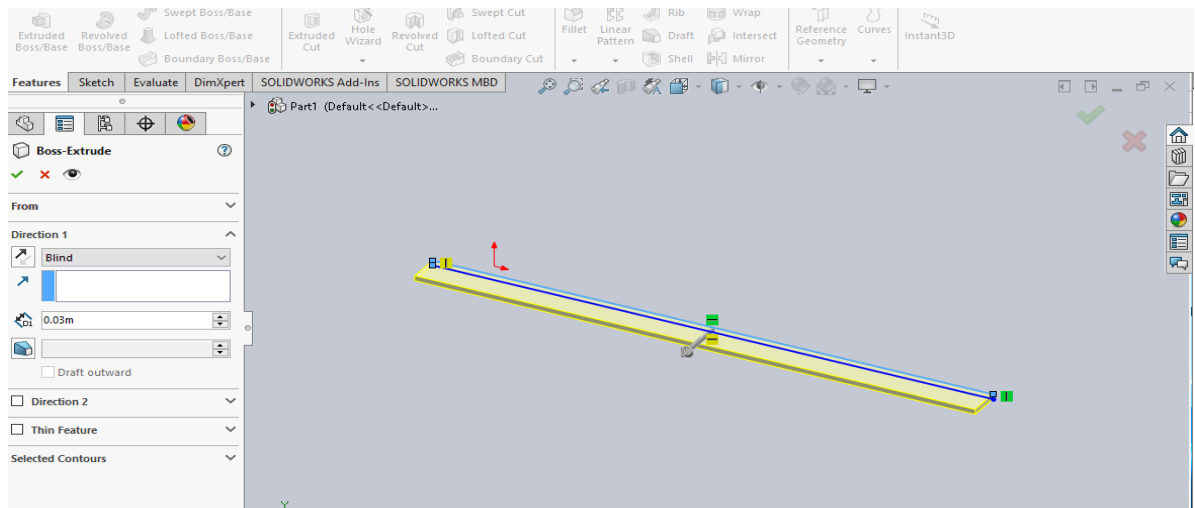
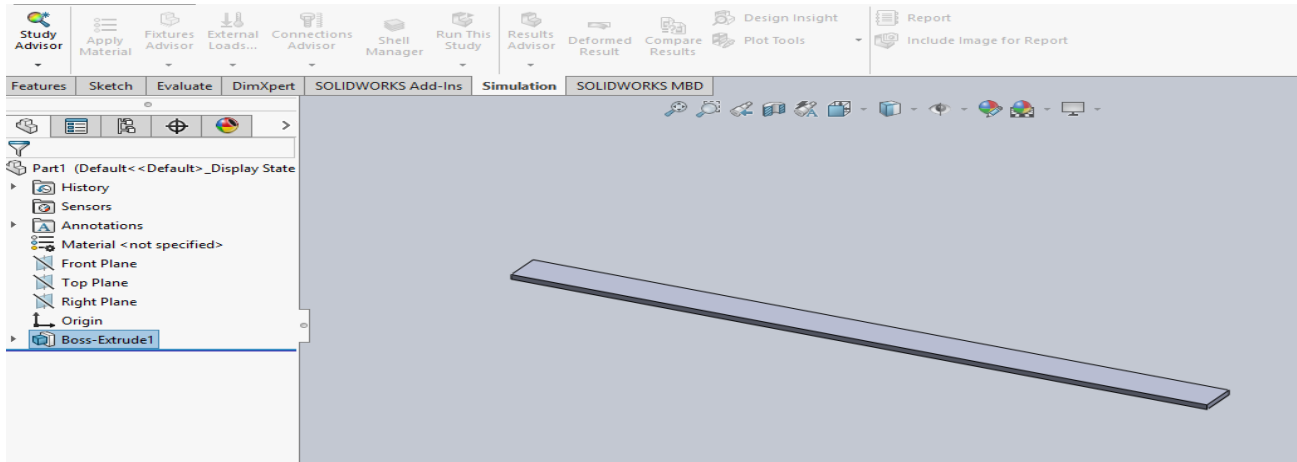


Figure 3.6 : poutre réalisée sur SolidWorks

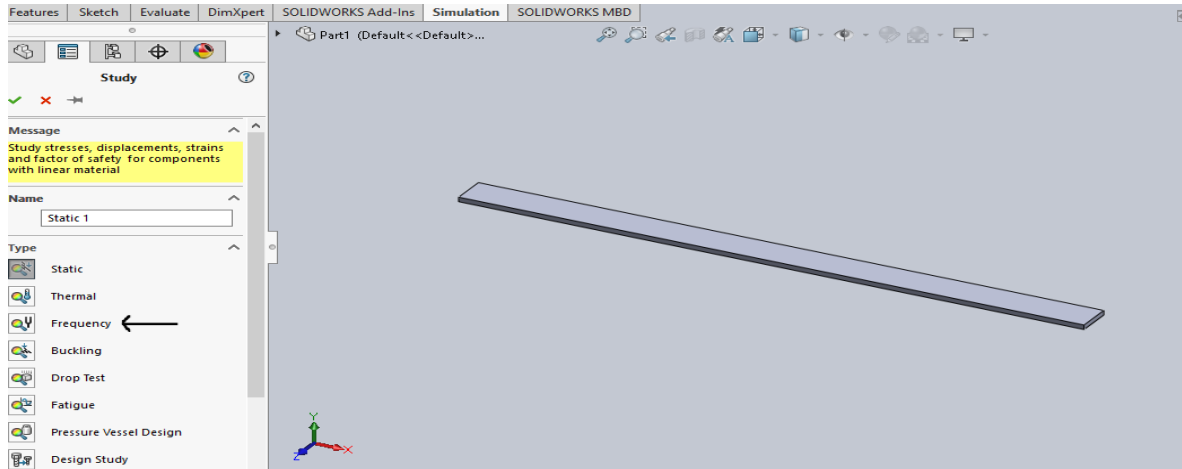
3.5. Simulation numérique

3.5.1. Cas d'une poutre encastree libre

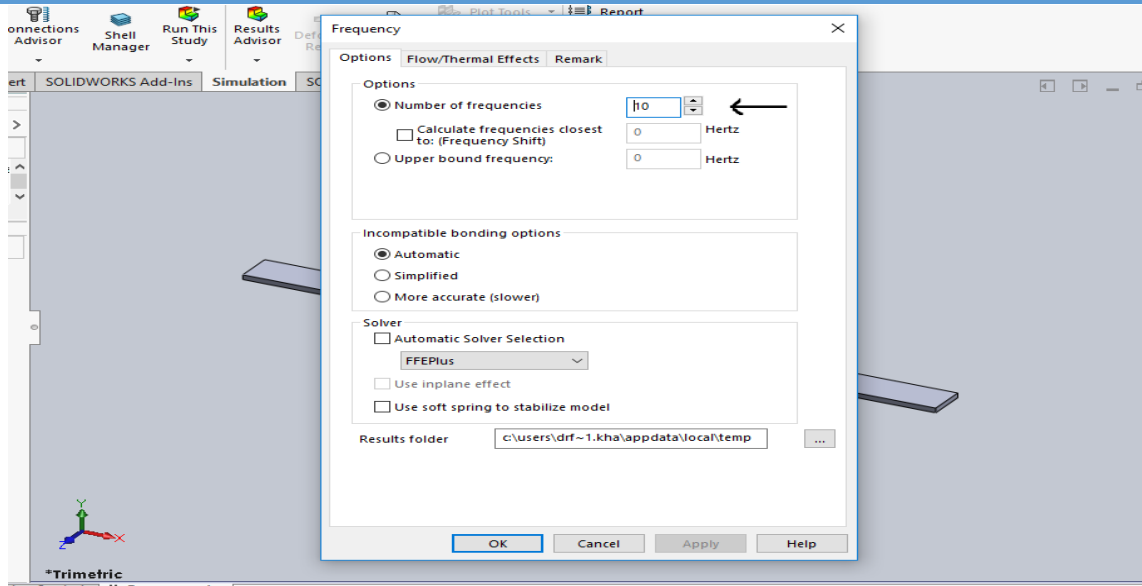
- Pour effectuer la simulation numérique, cliquons sur l'icône "SolidWorks Simulation" dans la barre d'outils.



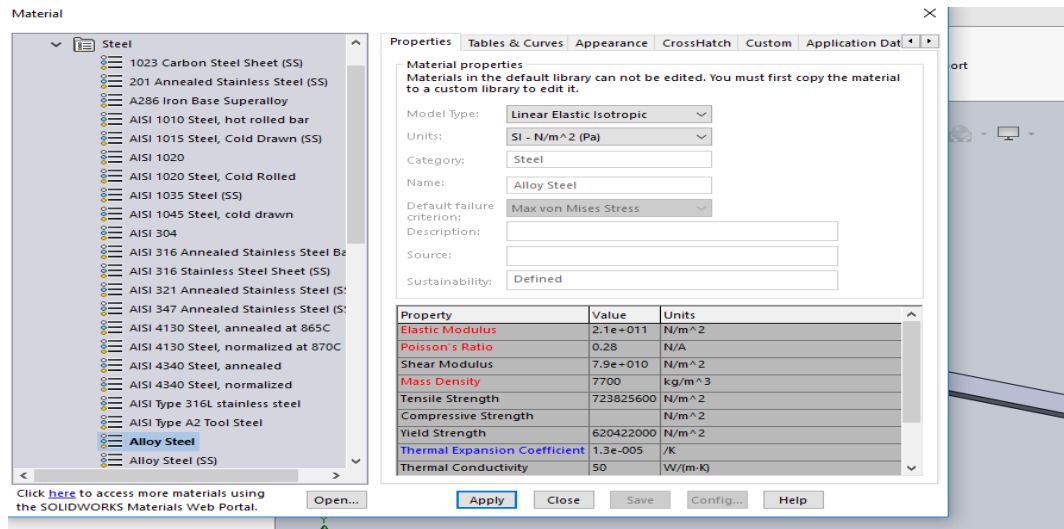
- Dans la nouvelle fenêtre qui s'ouvre, nous pouvons donner un nom à notre étude, par exemple "Simulation".
- Passons à l'icône "Study Adviser" et sélectionnons "New Study". Les paramètres de l'étude apparaissent, et nous choisissons l'option "Frequency" pour effectuer une analyse des fréquences.



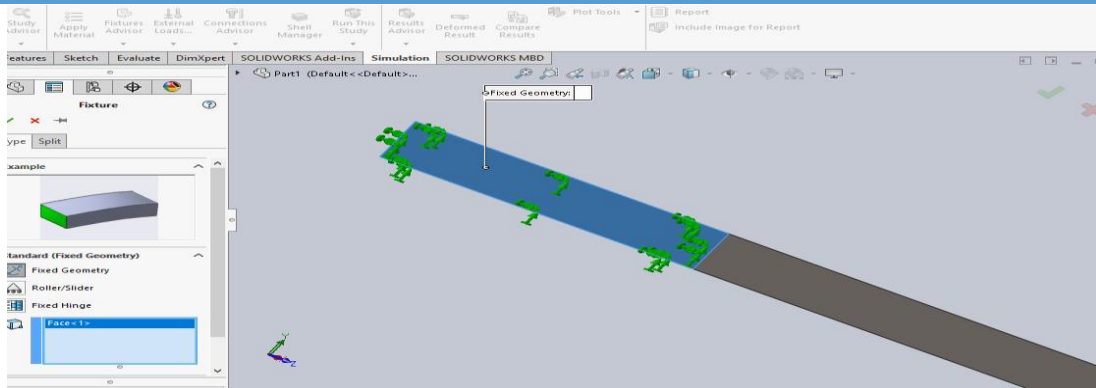
- Définissons le nombre de modes que nous souhaitons analyser, par exemple "10 modes".



- Cliquons sur l'icône "Apply Material" pour choisir le matériau à partir duquel la pièce est fabriquée, dans ce cas, "Alloy Steel" (acier allié). Spécifions également les propriétés du matériau.

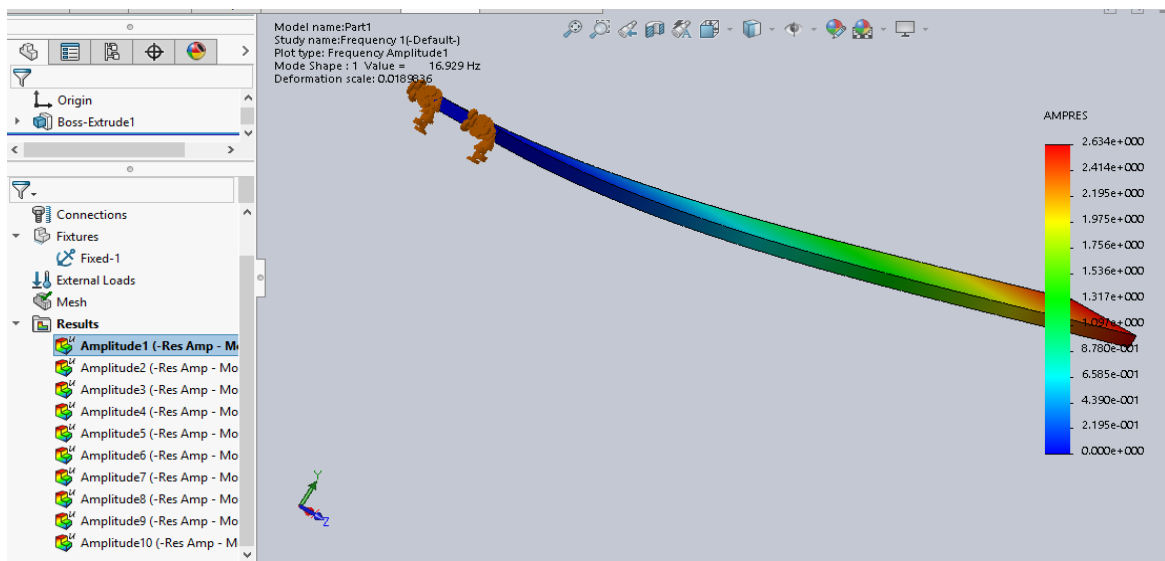


- Ensuite, appuyons sur l'icône "Fixtures Adviser" pour appliquer des conditions de fixation. Sélectionnons l'option "Geometry Fixed" pour réaliser l'encastrement, puis choisissons la surface appropriée sur la poutre.



- Utilisons la flèche sous l'icône "Run this study" et choisissons "Mesh Density" pour spécifier la densité du maillage. Ensuite, appuyons à nouveau sur "Run this study" pour lancer la simulation.
- Une fois la simulation terminée, nous pourrions visualiser les résultats. Nous pourrions voir les dix fréquences calculées ainsi que les formes de modes correspondantes.

En suivant ces étapes, nous pourrions effectuer la simulation numérique de la poutre en utilisant SolidWorks et obtenir les résultats souhaités.



La Figure 3.7 présente les déformées résultantes des huit premiers modes de vibration de la poutre obtenues grâce à l'utilisation du logiciel SolidWorks. Chaque déformée représente une configuration spécifique de vibration de la poutre, mettant en évidence les zones de déformation maximale et minimale. Ces déformées permettent de visualiser et d'analyser le comportement

vibratoire de la poutre, ce qui est essentiel pour comprendre et concevoir des structures résistantes aux vibrations.

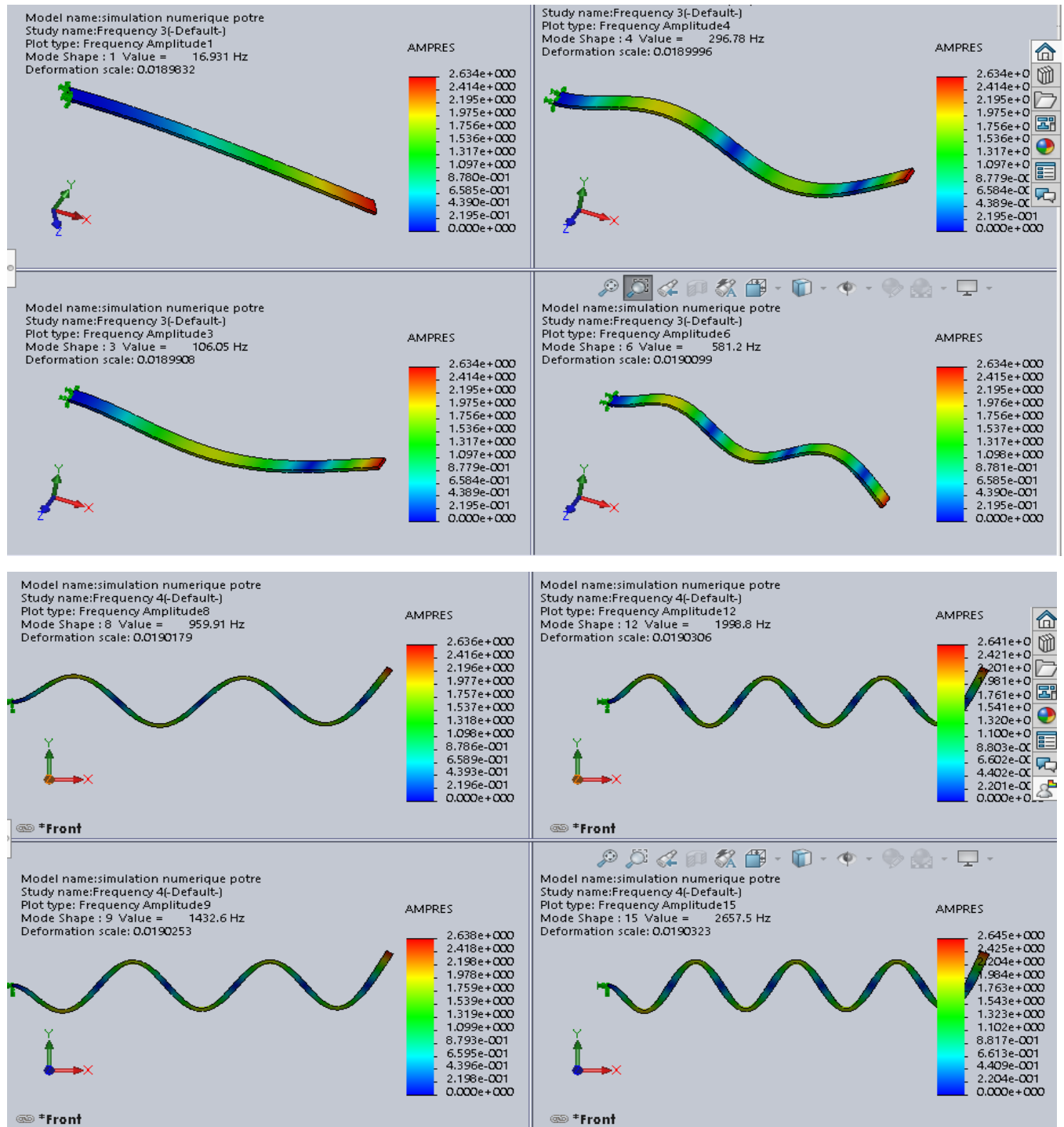


Figure 3.7 : Déformées obtenues par SolidWorks pour les huit premiers modes de vibration de la poutre

Le tableau 3.1 présente les fréquences propres de la poutre pour différents modes de vibration. Les fréquences sont mesurées en hertz (Hz).

On peut observer que les fréquences augmentent à mesure que le mode de vibration augmente, ce qui est cohérent avec le comportement attendu d'une poutre. Les fréquences varient de 16.93 Hz pour le premier mode jusqu'à 2657.5 Hz pour le huitième mode.

Mode	Fréquences (Hz)
1	16.93
2	106.05
3	296.78
4	581.2
5	959.91
6	1432.6
7	1998.8
8	2657.5

Tableau 3.1. Les fréquences propres de la poutre

3.5.2. Cas d'une plaque encastree libre

Après avoir effectué la simulation de la poutre, nous avons procédé à une simulation similaire pour une plaque mince en zinc, utilisant le matériau de l'alliage AC41A. Cette simulation nous a permis d'analyser les vibrations et les fréquences propres de la plaque mince en zinc.

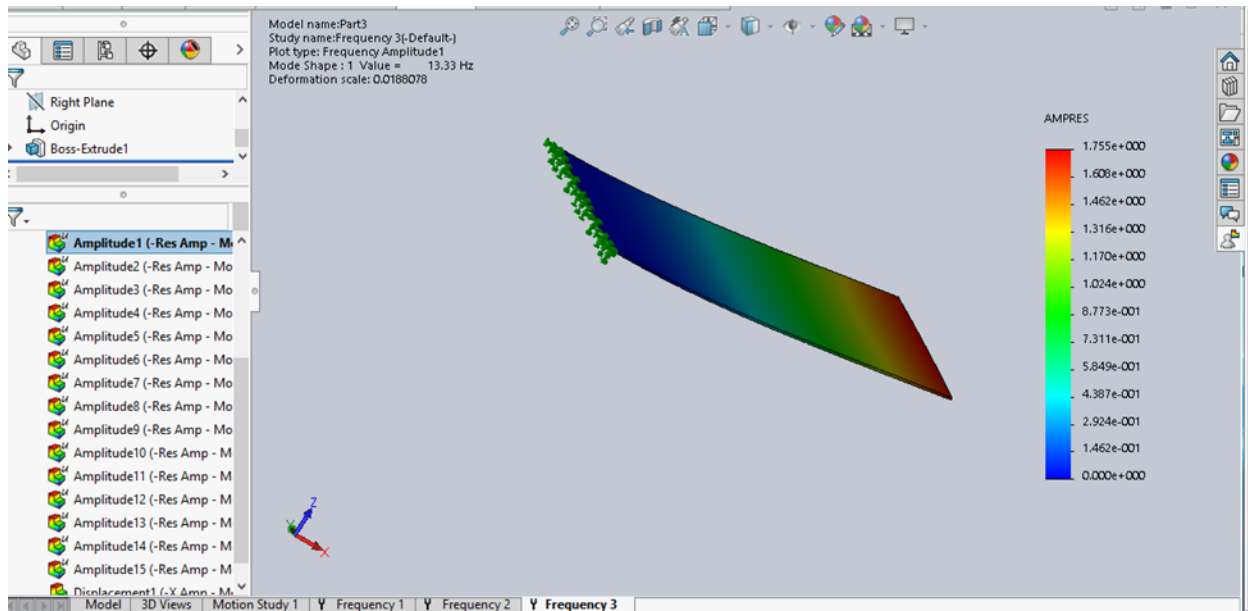
En utilisant le logiciel SolidWorks, nous avons défini les paramètres de la simulation, tels que la géométrie de la plaque, les conditions de fixation, et les propriétés matérielles du zinc AC41A Alloy. Ensuite, nous avons exécuté la simulation pour obtenir les résultats, y compris les fréquences propres de la plaque.

Les fréquences propres obtenues à partir de la simulation représentent les modes de vibration caractéristiques de la plaque mince en zinc. Ces fréquences peuvent être utilisées pour évaluer le comportement vibratoire de la plaque et optimiser sa conception en minimisant les effets indésirables des vibrations.

Caractéristiques de la plaque :

Module de Young E	8.5×10^{10} (N/m ²)
Coefficient de poisson ν	0.3 (N/A)
Masse volumique ρ	6700 (Kg/m ³)
Longueur a	0.33 (m)
Largeur b	0.3 (m)
Largeur h	0.002 (m)

La Figure 3.8 présente les déformées résultantes des huit premiers modes de vibration de la plaque simulés à l'aide du logiciel SolidWorks. Ces déformées permettent d'observer les configurations de vibration caractéristiques de la plaque, mettant en évidence les zones de déformation maximale et minimale. L'analyse visuelle des déformées est essentielle pour comprendre le comportement vibratoire de la plaque et optimiser sa conception en tenant compte des contraintes dynamiques.



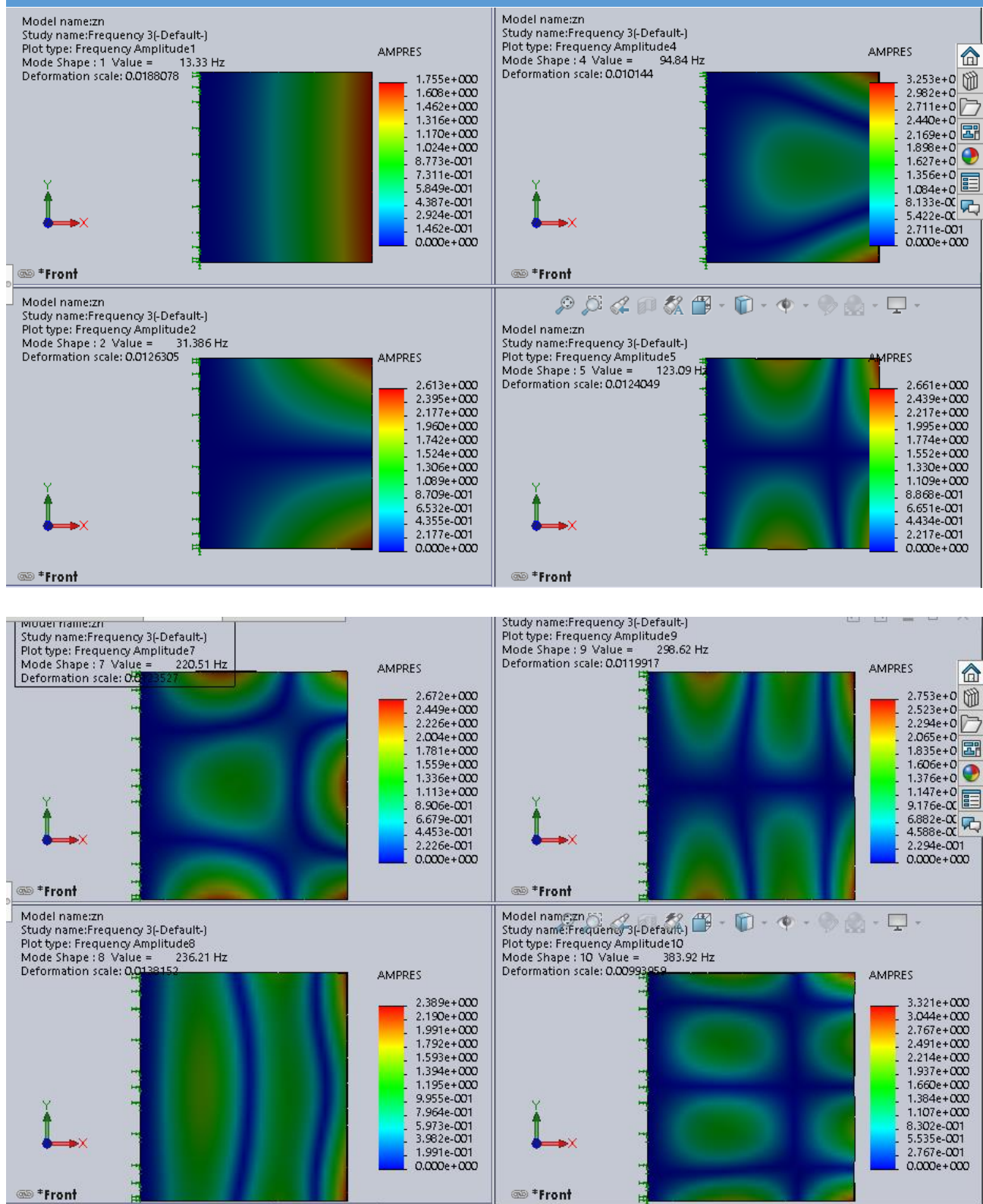


Figure 3.8 : Déformées obtenues par SolidWorks pour les huit premiers modes de vibration de la plaque

Le tableau 3.2 présente les fréquences propres de la plaque mince en zinc simulée. Les fréquences sont indiquées pour chaque mode de vibration correspondant à la plaque.

Mode	Les fréquences(Hz)
1	13.33
2	31.38
3	94.84
4	123.09
5	218.84
6	412.27
7	444.74
8	466.25

Tableau 3.2. Les fréquences propres du plaque zinc

3.6. Conclusion :

En conclusion, la simulation numérique offre de nombreux avantages dans l'analyse des vibrations des poutres et des plaques. Elle permet une meilleure prise en compte des besoins et des contraintes, tout en offrant la possibilité de modifier rapidement les paramètres à moindre coût. Grâce à la simulation, il devient plus facile de tester des concepts innovants et d'évaluer leurs performances.

La simulation numérique est un outil précieux pour le choix des matériaux, des dimensions, des éléments de fixation et des pièces standards. Elle permet de vérifier et de valider ces choix pour une pièce ou un système soumis à un chargement donné. Cela permet d'optimiser la conception en termes de performance, de fiabilité et de coûts.

En ce qui concerne les poutres, la simulation numérique permet de prédire avec précision les fréquences propres et les modes de vibration, ce qui est essentiel pour la conception de structures résistantes aux vibrations indésirables. Elle permet également de tester différents scénarios et d'identifier les zones critiques qui nécessitent une attention particulière.

Pour les plaques minces, la simulation numérique permet d'évaluer leur comportement vibratoire et de déterminer les fréquences propres et les modes de vibration. Cela est crucial pour optimiser la conception de plaques minces utilisées dans diverses applications, telles que les panneaux de revêtement ou les éléments structuraux.

CHAPITRE 04

Etude expérimentale

4.1. Introduction

L'analyse des vibrations des poutres et des plaques revêt une grande importance dans la conception de divers systèmes mécaniques et dans l'évaluation de leurs performances. Cela concerne notamment les pales de turbomachines, les pales d'hélicoptères ou d'éoliennes, ainsi que les panneaux souples des satellites. Il existe de nombreuses méthodes éprouvées pour estimer les fréquences naturelles de vibration.

Ce chapitre présente une approche expérimentale pour déterminer les fréquences propres des poutres et des plaques avec une configuration encastree-libre. Nous nous concentrons sur l'utilisation de méthodes d'essais pratiques pour mesurer et analyser les vibrations de ces structures. Ces résultats expérimentaux fournissent des informations précises sur les modes de vibration et les fréquences caractéristiques, ce qui est essentiel pour évaluer la performance et optimiser la conception de ces éléments structuraux.

4.2. Plan expérimentale et matériel utilisé : (pour une poutre)

4.2.1. Présentation du banc d'essais

Après avoir présenté les objectifs de l'étude, nous passons à la description du banc d'essais utilisé pour mener à bien l'analyse des vibrations.

Tout d'abord, nous décrivons la configuration de la poutre utilisée dans l'expérience, qui est fixée en tant que poutre encastree-libre. Cette configuration spécifique est choisie pour permettre l'étude des vibrations dans ce scénario particulier.

Ensuite, nous expliquons l'installation des capteurs de vibration, plus précisément des accéléromètres, sur la poutre. Ces capteurs sont positionnés stratégiquement pour mesurer les vibrations et enregistrer les données pertinentes.

Nous abordons également la mise en place du dispositif d'excitation, qui dans ce cas est un marteau d'impact. Ce dernier est utilisé pour appliquer une force d'impact sur la poutre, ce qui génère des vibrations. Cela permet d'obtenir des données expérimentales sur les vibrations de la poutre dans des conditions réelles.

Enfin, nous mentionnons l'utilisation d'un analyseur pulse pour collecter et enregistrer les données de vibration. Cet analyseur est un instrument essentiel pour mesurer et analyser les caractéristiques des vibrations, telles que les fréquences et les amplitudes.



Figure 4.1 : Figure représentative du banc d'essais

4.2.2. La poutre

La poutre est en acier de longueur $L=0.5$ m, de largeur $b=0.03$ m et d'épaisseur $h=0.005$ m, de section uniforme. Elle est encadrée-libre (E-L).



Figure 4.2 : Poutre encastrée-libre (E-L).

4.2.3. Matériel d'acquisition des mesures

Système multi-analyseur type 3160-A-042, de marque Brüel & Kjær **figure 4.3** 4 entrées/2 sorties. Tous les canaux d'entrée et de sortie ont une plage de fréquence de DC à 51,2 kHz. Cet analyseur fonctionne aussi bien comme un système de test avec un seul module, ou comme une partie d'un grand système de mesure LAN-XI. La combinaison des canaux d'entrées et de sortie fait l'un des modules d'acquisition de données les plus polyvalents disponibles, tandis que les panneaux avant interchangeables donnent la flexibilité d'utiliser une grande variété de capteurs.

Utilisations :

- Mesures générales acoustiques et vibratoires.
- Canaux de sortie du générateur pour l'excitation des systèmes pour les mesures acoustiques et vibratoires.
- Idéal pour les mesures audio et électro-acoustiques.
- Mesures mono-module.
- Mesures multi-modules / système distribué.
- Enregistrement autonome (sans PC) en utilisant le logiciel LAN-XI Notar™.

Caractéristiques :

- 4 canaux d'entrée
- 2 canaux de sortie du générateur

- Gammes de fréquence de 0 à 51.2KHz
- La technologie Dyn-X
- La technologie REq-X
- Support transducteurs TEDS (Transducer Electronic Data Sheet)
- Panneaux avant interchangeables

Equipé par le logiciel d'acquisition et de traitement Pulse Labshop 16.1, les outils standard Pulse Labshop sont : l'analyse FFT, Analyse CPB en temps réel analyse 1/n octave, analyse d'ordre, analyse d'enveloppe, analyse cepstrale....

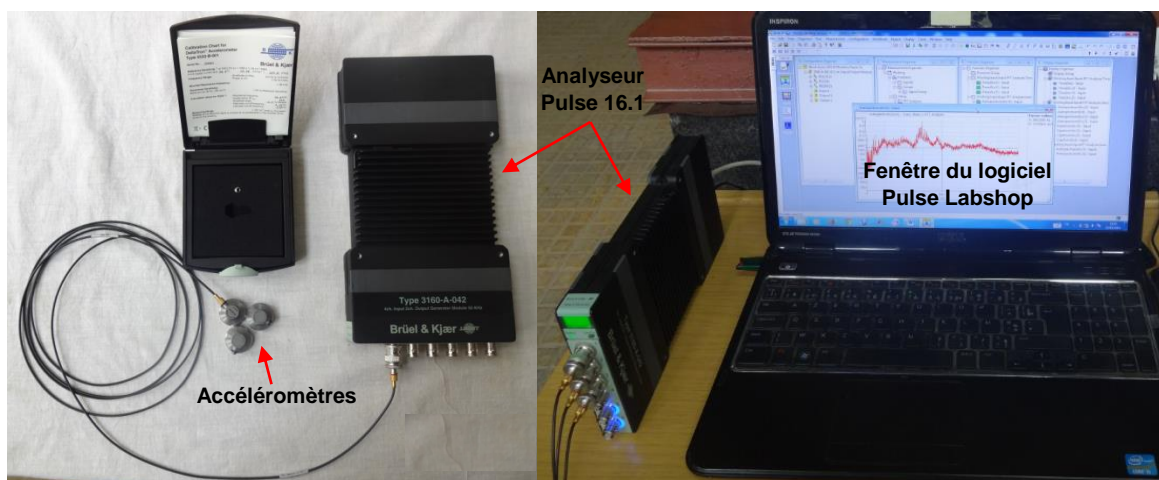


Figure 4.3 : Photo de l'analyseur Brüel & Kjær Pulse 16.1 et les accéléromètres d'acquisition des signaux

4.2.4. Marteaux d'impact

Le marteau du choc, également connu sous le nom de marteau d'impact, est un outil utilisé dans les travaux de construction et de réparation. Il est conçu pour délivrer une force d'impact concentrée sur une surface spécifique. Le marteau du choc se compose généralement d'une tête en acier lourd et d'un manche solide.

Le type 8206 du marteau d'impact est conçu avec une masse de tête de 100g et offre une sensibilité de 22,7 mV/N. Un accéléromètre CCLD est utilisé pour mesurer la réponse de la structure lors de l'utilisation du marteau d'impact.

Utilisations possibles

- Mesures de force d'impact sur des structures de petite à moyenne taille
- Mesure des fonctions de réponse en fréquence en utilisant des techniques d'excitation par impact
- Dans le cadre d'un système d'essai de structures dynamiques pour l'analyse modale et la prédiction de la réponse structurelle

Contrairement à l'utilisation d'un excitateur électrodynamique, un marteau d'impact n'applique pas de charge de masse supplémentaire à l'objet testé et offre une solution très portable pour l'excitation.



Figure 4.4 : Marteau d'impact type 8206.

4.2.5. Accéléromètre CCLD

L'accéléromètre CCLD TEDS polyvalent, Type 4533-B, offre une large gamme de fréquences, un faible niveau de bruit et une faible sensibilité aux influences environnementales

Scenarios d'utilisation : Mesure de vibrations généralistes.

Chaque unité est dotée d'un boîtier en titane léger, résistant et hermétique, d'une base isolante et d'un orifice de montage fileté 10-32 UNF adapté à une utilisation dans différentes conditions environnementales .Le Type 4533-B dispose d'un connecteur latéral.



Figure 4.5 : Accéléromètre CCLD TYPE 4533-B.

La figure 4.6 présente le spectre de fonction de réponse en fréquence (FRF) pour la poutre testée. Elle affiche les huit premières fréquences obtenues lors de l'analyse des vibrations de la poutre. Ces fréquences représentent les modes de vibration principaux de la poutre dans le cas d'une configuration encastrée-libre.

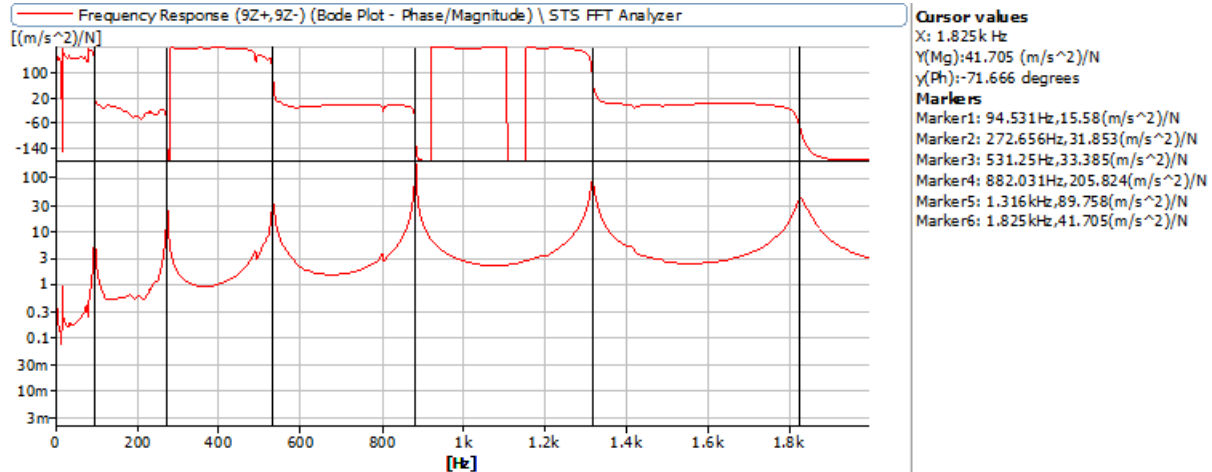


Figure 4.6 : Spectre de fonction de réponse en fréquence FRF.

4.3. La comparaison des résultats

Le tableau 4.1 présente une comparaison des fréquences propres dans différents modes pour une analyse analytique, une simulation numérique et une mesure expérimentale. Voici quelques observations sur les données :

Dans l'ensemble, on observe une tendance générale selon laquelle les valeurs de simulation numérique se rapprochent davantage des résultats analytiques que des mesures expérimentales. Cela est généralement attendu car les modèles analytiques et numériques sont basés sur des calculs et des hypothèses précises, tandis que les mesures expérimentales peuvent être sujettes à des imprécisions et des erreurs expérimentales.

Pour les modes 1 à 5, les résultats de simulation numérique sont relativement proches des valeurs analytiques, avec une légère différence. Cela suggère que le modèle de simulation utilisé est capable de reproduire les propriétés vibratoires du système de manière précise.

Dans les modes 6 à 8, on remarque une plus grande divergence entre les résultats analytiques, numériques et expérimentaux. Cela peut être dû à des facteurs tels que des erreurs de modélisation dans la simulation ou des imprécisions dans les mesures expérimentales.

En ce qui concerne les mesures expérimentales, les valeurs de fréquence propres sont généralement inférieures aux résultats analytiques et numériques pour chaque mode. Cela peut être attribué à des facteurs tels que des effets dissipatifs dans le système réel ou des erreurs de mesure.

Il convient de noter que les observations ci-dessus sont basées sur une analyse qualitative des données fournies dans le tableau. Une analyse plus détaillée, y compris une évaluation des incertitudes expérimentales et des performances du modèle de simulation, serait nécessaire pour une compréhension complète de la précision des différentes méthodes.

Mode	Fréquences propres (Hz)		
	Analytique	Simulation	Expérimentale
1	16.3	16.93	16
2	104.29	106.05	94.63
3	287.27	296.78	270.31
4	562.35	581.2	526.56
5	929.57	959.91	882.03
6	1388.66	1432.6	1316
7	1939.57	1998.8	1825
8	2582.24	2657.5	2810

Tableau 4.1 : Comparaison entre les résultats analytiques, numériques et expérimental.

Pour calculer l'erreur entre les différentes méthodes (analytique, simulation et expérimentale), vous pouvez utiliser la formule de l'erreur relative :

$$\text{Erreur relative} = |(Valeur mesurée - Valeur de référence) / Valeur de référence| * 100$$

Voici les calculs de l'erreur relative pour chaque mode :

Mode 1 :

$$\text{Erreur relative entre simulation et analytique : } |(16.93 - 16.3) / 16.3| * 100 \approx 3.87\%$$

$$\text{Erreur relative entre expérimental et analytique : } |(16 - 16.3) / 16.3| * 100 \approx 1.84\%$$

Mode	Erreur relative (Simulation vs. Analytique)	Erreur relative (Expérimental vs. Analytique)
1	3.87%	1.84%
2	1.68%	10.49%
3	3.31%	5.90%
4	3.35%	5.97%
5	3.27%	5.12%
6	3.17%	5.23%
7	3.05%	5.93%
8	2.92%	8.78%

Tableau 4.2: comparaison de pourcentage d'erreur

- Dans l'ensemble, les erreurs relatives entre les valeurs de simulation et analytiques sont généralement assez faibles, ce qui suggère une bonne concordance entre ces deux méthodes. Les erreurs relatives varient de 1.68% à 3.87%, ce qui indique une bonne précision de la simulation par rapport à l'analyse théorique.
- Les erreurs relatives entre les valeurs expérimentales et analytiques sont légèrement plus élevées, variant de 1.84% à 10.49%. Cela peut être dû à des sources d'erreurs expérimentales telles que des imprécisions de mesure, des facteurs environnementaux ou des limitations de l'équipement de mesure.
- Les erreurs relatives sont généralement plus faibles pour les premiers modes (1 à 3) et augmentent légèrement pour les modes supérieurs (4 à 8). Cela peut être attribué à des phénomènes physiques plus complexes et des effets non linéaires qui deviennent plus prononcés à mesure que le mode vibratoire augmente.

4.4. Plan expérimentale et matériel utilisé : (pour une plaque)

Le montage expérimental présenté dans la figure 4.7 concerne l'étude d'une plaque mince en zinc. Dans cette expérience, une plaque mince est fixée d'un côté et laisse libre l'autre côté. Les caractéristiques géométriques de la plaque sont les suivantes :

Longueur $a = 0.33$ m

Largeur $b = 0.30$ m

Épaisseur $h = 0.002$ m

Pour obtenir les résultats, l'expérience est réalisée de manière similaire à celle effectuée avec la poutre. Les fréquences propres de vibration de la plaque sont mesurées à l'aide du logiciel pulse. Le logiciel affiche les fréquences propres correspondantes à différents modes de vibration de la plaque, qui sont ensuite enregistrées dans le tableau 4.3.



Figure 4.7 : Figure représentative du banc d'essais.

La figure 4.7 présente le spectre de fonction de réponse en fréquence (FRF) pour la plaque testée. Elle affiche les huit premières fréquences obtenues lors de l'analyse des vibrations de la poutre. Les fréquences mesurées sont mentionnées dans le tableau 4.1

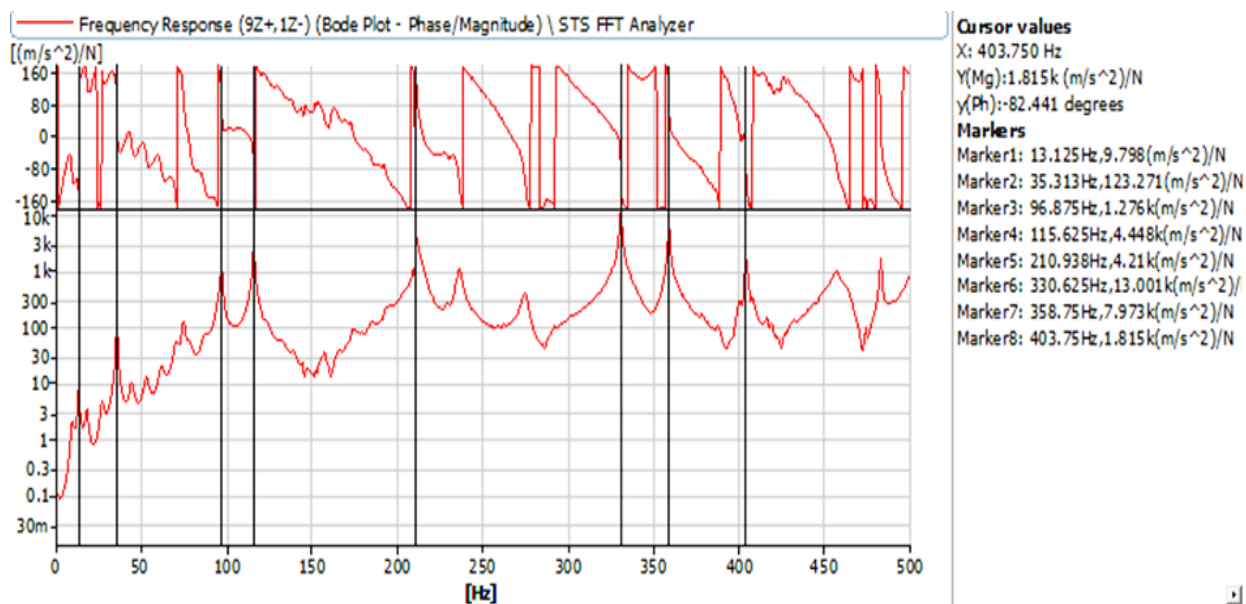


Figure 4.8 : Spectre de fonction de réponse en fréquence FRF pour la plaque

Le tableau 4.3 présente la comparaison entre les résultats de simulation numérique et expérimentale pour les fréquences propres de la plaque. Voici quelques commentaires sur les résultats :

Globalement, les valeurs des fréquences propres obtenues à partir de la simulation numérique et des mesures expérimentales montrent une certaine correspondance. Les fréquences propres sont généralement proches les unes des autres pour chaque mode de vibration, bien qu'il y ait quelques différences.

En conclusion, bien que les résultats de la simulation numérique et des mesures expérimentales montrent une certaine correspondance pour les fréquences propres de la plaque, il y a des différences significatives, en particulier pour les modes supérieurs. Ces écarts soulignent l'importance de prendre en compte les limitations et les sources d'erreur propres à chaque méthode lors de l'interprétation des résultats.

mode	Fréquence propres (Hz)	
	Simulation	Expérimentale
1	13.33	13.37
2	31.38	35.31
3	94.84	96.07
4	123.09	115.62
5	218.84	210.93
6	412.27	403.75
7	444.74	452.5
8	466.25	477.81

Tableau 4.3 : Comparaison entre les résultats numériques et expérimental.

Pour calculer l'erreur entre les résultats de simulation numérique et les valeurs expérimentales des fréquences propres, nous pouvons utiliser la formule suivante :

$$\text{Erreur} = |(\text{Simulation numérique} - \text{Expérimentale})| / \text{Expérimentale} * 100$$

Appliquons cette formule pour calculer les erreurs correspondantes :

$$\text{Mode 1: Erreur} = |(13.33 - 13.37)| / 13.37 * 100 = 0.30\%$$

$$\text{Mode 2: Erreur} = |(31.38 - 35.31)| / 35.31 * 100 = 10.97\%$$

$$\text{Mode 3: Erreur} = |(94.84 - 96.07)| / 96.07 * 100 = 1.28\%$$

$$\text{Mode 4: Erreur} = |(123.09 - 115.62)| / 115.62 * 100 = 6.45\%$$

$$\text{Mode 5: Erreur} = |(218.84 - 210.93)| / 210.93 * 100 = 3.74\%$$

$$\text{Mode 6: Erreur} = |(412.27 - 403.75)| / 403.75 * 100 = 2.11\%$$

$$\text{Mode 7: Erreur} = |(444.74 - 452.5)| / 452.5 * 100 = 1.71\%$$

$$\text{Mode 8: Erreur} = |(466.25 - 477.81)| / 477.81 * 100 = 2.42\%$$

Regroupons ces erreurs dans un tableau pour faciliter l'analyse :

Mode	Erreur (%)
1	0.30
2	10.97
3	1.28
4	6.45
5	3.74
6	2.11
7	1.71
8	2.42

Tableau 4.4 : d'erreur du plaque .

En analysant les erreurs, on constate ce qui suit :

- Pour le mode 1, l'erreur est très faible, ce qui indique une bonne concordance entre la simulation numérique et les mesures expérimentales.
- Le mode 2 présente la plus grande erreur, ce qui suggère une divergence significative entre les résultats de la simulation et les mesures expérimentales.
- Pour les autres modes (3 à 8), les erreurs sont relativement faibles, avec des variations entre 1.28% et 6.45%.

Ces résultats soulignent l'importance de prendre en compte les différences entre la simulation numérique et les conditions expérimentales réelles, ainsi que les sources d'erreur potentielles dans chaque méthode. Les écarts observés peuvent être dus à des variations dans les propriétés matérielles réelles, des incertitudes expérimentales ou des limitations de modélisation dans la simulation numérique.

En conclusion, bien que la simulation numérique donne des résultats proches des mesures expérimentales pour la plupart des modes de vibration, des divergences significatives sont observées pour certains modes. Il est donc important de prendre en compte ces différences lors de l'analyse des résultats et de considérer les avantages et les limitations de chaque méthode.

4.5. Conclusion

La présente étude a permis de mettre en évidence l'importance de l'approche expérimentale pour la détermination des fréquences propres des poutres et des plaques dans une configuration encastree-libre. Les résultats expérimentaux ont fourni des informations précises sur les modes de vibration et les fréquences caractéristiques, ce qui est essentiel pour évaluer la performance et optimiser la conception de ces éléments structuraux.

L'analyse comparative des résultats analytiques, numériques et expérimentaux a révélé des observations intéressantes. Dans l'ensemble, les valeurs de simulation numérique se sont rapprochées davantage des résultats analytiques que des mesures expérimentales, ce qui était généralement attendu compte tenu des différentes sources d'erreurs et d'imprécisions inhérentes à chaque méthode.

Conclusion générale

Cette étude a abordé les aspects fondamentaux de l'analyse des vibrations des poutres et des plaques, en explorant différentes approches et méthodes utilisées dans ce domaine. Les quatre chapitres ont fourni un aperçu complet des aspects théoriques, numériques et expérimentaux de cette discipline, mettant en évidence leur complémentarité et leur importance pour la conception et l'optimisation des structures.

Dans le premier chapitre, nous avons introduit le contexte des vibrations et souligné l'importance de l'analyse modale dans divers domaines, en mettant en évidence les caractéristiques vibratoires spécifiques des poutres et des plaques. Nous avons également présenté les travaux de recherche existants, fournissant un aperçu des avancées réalisées dans ce domaine.

Le deuxième chapitre s'est concentré sur les vibrations libres des poutres, en utilisant la théorie classique d'Euler-Bernoulli pour décrire leur comportement. Nous avons exploré les différentes méthodes et équations utilisées dans cette théorie, ainsi que les solutions correspondantes. De plus, nous avons brièvement abordé la théorie des plaques, qui étend la théorie des poutres aux structures plates et minces.

Le troisième chapitre a mis en évidence l'importance de la simulation numérique dans l'analyse des vibrations des poutres et des plaques. Nous avons discuté des avantages de cette approche, notamment sa capacité à prendre en compte les besoins spécifiques et à effectuer des tests virtuels rapides et économiques. Nous avons souligné l'utilité de la simulation numérique dans la prédiction des fréquences propres, des modes de vibration et dans l'optimisation de la conception des structures.

Le quatrième chapitre s'est concentré sur l'approche expérimentale, en décrivant une méthodologie pour déterminer les fréquences propres des poutres et des plaques en configuration encastree-libre. Nous avons comparé les résultats analytiques, numériques et expérimentaux, soulignant les différences et les sources d'erreur potentielles. Cette partie a souligné l'importance de prendre en compte les limitations et les erreurs spécifiques à chaque méthode.

En conclusion, cette étude a permis de comprendre l'importance de l'analyse des vibrations des poutres et des plaques dans divers domaines d'application. Les approches théoriques, numériques et expérimentales ont été présentées, chacune offrant des avantages et des limitations spécifiques. La combinaison de ces approches permet d'obtenir une compréhension plus complète du comportement

vibratoire des structures et contribue à une meilleure conception et à une optimisation des performances.

Il convient de noter que cette étude a fourni une introduction générale à l'analyse des vibrations des poutres et des plaques, et qu'une exploration plus approfondie de chaque aspect nécessiterait des recherches supplémentaires et une analyse plus détaillée. Cependant, les informations et les conclusions tirées de cette étude fournissent une base solide pour une compréhension de base de ce domaine et de son importance dans l'ingénierie des structures.

Références bibliographiques:

- [1],[2],[3], cours de l'analyse modale.
- N.Y.Chien [4] lois de conservation dans les systèmes mécaniques non homogènes et dissipatifs.
- O.Civalek [5] Ing. Structure., 26(2) (2004), p. 171 – 186 Application de la quadrature différentielle (DQ) et de la quadrature différentielle harmonique (HDQ) pour l'analyse de flambement de plaque minces isotropes et de poteaux élastiques.
- Kaushar H. Barad [6] Déc 2013, la détection de fissures à l'aide de technique basées sur les vibrations.
- Francesco Pieri [7] Resonators for monolithic integration of biosensors with CMOS, Transducers 2011, Beijing (PRC), 2136-2139.
- M. Aminbaghai et al [8]. Eng. Stuck (2012) Modal Analysis of the FGM-beams with continuous transversal symmetric and longitudinal variation of material properties with effect of large axial force.
- J.Murin [9] .Un element fini de poutre pour l'analyse modale de structures à gradient de matériaux fonctionnalisés (FGM)
- M. S. Mia, [10] study of modal analysis of cracked cantilever beam by finite element simulation, "B. Sc. Thesis, Bangladesh University of engineering and technology, 2015.
- M. Shen. [11] Une analyse des vibrations libres des poutres avec une fissure à bord unique.
- Bahzad et al [12]. Une nouvelle approche pour l'analyse des vibrations d'une poutre fissurée en utilisant la méthode de décomposition de l'énergie.
- Bahzad et al [13]. Un nouveau modèle continu pour l'analyse des vibrations de flexion d'une poutre fissurée.
- Cunedioğlu et Shabani [14]. l'analyse des vibrations libres des poutres symétriques à gradation fonctionnelle avec un bord unique fissuré.
- Selmi [15] les vibrations libres des poutres à plusieurs fissures.
- , Carneiro et Inman [16] .les commentaires sur les vibrations libres des poutres avec une seule fissure de bord
- Bauer, H.F.: Natural frequencies and response of spinning liquid column with apparently sliding contact line. Acta Mech. (to appear).
- PAA Laura [18]. Analyse de plaques rectangulaires aux vibrations non linéaires avec contraintes de bord non uniformes. (Journal du son et des vibrations (1985)).
- Gw Wei [19]. Un nouvel algorithme pour résoudre certains problèmes mécaniques, Méthodes informatiques en mécanique appliquée et ingénierie (2001).

Références bibliographiques

- Gw Wei [20]. Méthode de convolution singulière discrète pour l'équation Sine-Gordon, physique D (2000).
- [21]. Théorie des plaques, livre cours des vibrations.
- [22]. (TP) de Dessin assistés par ordinateur DAO.