



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université Larbi Tébessi -Tébessa-
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de
la Vie*



Département : Sciences de la Matière

N d'ordre :.....

Série :.....

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat 3ème cycle LMD

Option : *Physique Théorique*

Thème

Les oscillateurs harmoniques relativistes dans un espace courbé

par :

Rouabhia Tarek Imed

Devant le jury

PR. CHEMAM FAYÇAL	Président	<i>Université Larbi-Tebessi, Tebessa</i>
PR. ABDELMALEK BOUMALI	Rapporteur	<i>Université Larbi-Tebessi, Tebessa</i>
PR. ABDELHAFID BOUNAMES	Examineur	<i>Université de Jijel</i>
PR. MAAMACHE MUSTAFA	Examineur	<i>UFA. Sétif 1</i>
DR. HOUCINE AOUANALLAH	Examineur	<i>Université Larbi-Tebessi, Tebessa</i>

Date de Soutenance : 05/11/2023

© *Mémoire effectué au*
Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique



Les oscillateurs harmoniques relativistes dans un espace de Rindler

*Rouabhia Tarek Imed*¹

1. it.rouabhia@univ-tebessa.dz

ملخص

في هذه الاطروحة، درسنا معادلات ديراك وكلاين جوردون النسبوية في فضاء ريندلر. الحلول التي تم الحصول عليها دقيقة وسمحت لنا بدراسة الخصائص الحرارية للمعادلات (دراك وكلاين جوردون) من خلال التركيز على تأثير التسارع على هذه الخصائص الحرارية. كما قمنا بتوسيع دراستنا إلى الهزازات الهارمونية النسبوية في فضاء ريندلر. الحلول التي تم الحصول عليها دقيقة. وأخيراً، تم حساب الخصائص الحرارية للمتذبذبات النسبوية (دراك وكلاين جوردون) وتأثير التسارع على هذه الخصائص الحرارية باستخدام طريقتين نظرية مستندة إلى دالة زيتا وصيغة أويلر-ماكلاورين.

Abstract

In this thesis, we studied the relativistic Dirac and Klein Gordon oscillators in Rindler spacetime. The obtained solutions are exact and allowed us to study the thermal properties of the equations (Dirac and Klein Gordon) by focusing on the effect of acceleration on these thermal properties. Also, we extended our study to relativistic harmonic oscillators in Rindler spacetime. The obtained solutions are exact. Finally, the thermal properties of relativistic oscillators (Dirac and Klein Gordon) were calculated as well as the effect of acceleration on these thermal properties using two theoretical methods based on the zeta function and Euler-Maclaurin formula.

Résumé

Dans cette thèse, nous avons étudié les oscillateurs relativistes de Dirac et Klein Gordon dans l'espace-temps de Rindler. Les solutions obtenues sont exactes et ont permis d'étudier les propriétés thermiques des équations (Dirac et Klein Gordon) en se concentrant sur l'effet de l'accélération sur ces propriétés thermiques. Aussi, nous avons étendu notre étude aux oscillateurs harmoniques relativistes dans l'espace-temps de Rindler. Les solutions obtenues sont exactes. Enfin, les propriétés thermiques des oscillateurs relativistes (Dirac et Klein Gordon) ont été calculées ainsi que l'effet de l'accélération sur ces propriétés thermiques en utilisant deux méthodes théoriques basées sur la fonction zêta et la formule d'Euler-Maclaurin.

Dédicace

*A ma mère et mon père .
A mes frères ,
A ma sœur ,
A ma famille ,
A mes amis,*

Je dédie cet humble travail.

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet pour obtenir le diplôme de Doctorat LMD en Physique Théorique à l'université de Larbi Tébessi-Tébessa-. Avant tout, je remercie ALLAH le tout-puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail. Et d'une façon toute particulière, j'adresse mes sincères remerciements à mes parents qui m'ont soutenu dans toutes les parties de ma vie et m'ont donné la force et le courage d'atteindre tout cela moi-même.

Je tiens à remercier mon encadreur le Professeur **Abdelmalek Boumali** pour m'avoir proposé ce sujet aussi intéressant et riche. Je suis très reconnaissant tout particulièrement pour la confiance qu'il m'a témoignée et la liberté qui m'a laissé.

J'exprime mes remerciements à Monsieur **Chemam faïçal** Professeur à l'Université Larbi-Tébessi-Tébessa-, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de mon mémoire.

Je remercie vivement Monsieur **Abdelhafid Bounames**, Professeur à l'Université de Tijel d'avoir accepté de participer à ce jury de thèse et de juger ce travail.

Je tiens également à remercier Monsieur **Maamache Mustafa**, Professeur à l'UFA. Sétif 1, de l'intérêt qu'il a témoigné pour mon travail, ainsi que d'avoir bien voulu de participer au jury de thèse .

Je remercie vivement Monsieur **Houcine Aounallah** Maître de Conférence A à l'Université Larbi-Tébessi-Tébessa-, qui m'a fait l'honneur de participer au Jury de soutenance ; je le remercie profondément.

Je remercie aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observés, aidés, conseillés et même supportés. Enfin, je souhaite exprimer toute ma gratitude à l'ensemble des personnes, qui bien en marche de ce travail, ont contribué largement à son aboutissement. Que ce soit depuis toujours, depuis plusieurs années ou quelques mois seulement, nombreux sont celles et ceux qui ont participé à notre épanouissement. On les remercie sincèrement.

TABLE DES MATIÈRES

ملخص	i
Abstract	ii
Résumé	iii
Dédicace	iv
Remerciements	v
Liste des Tableaux	viii
Liste des Figures	ix
Introduction	2
1 Les équations relativistes dans un espace-temps courbé	5
1.1 Préambule	5
1.2 Espace tangent	5
1.3 Champs de tenseurs	7
1.4 La métrique	8
1.5 Connexions	8
1.5.1 Dérivées covariantes et symbole de Christoffel	8
1.5.2 Le formalisme de tétrade	9
1.5.3 Transport parallèle et géodésiques	11
1.5.4 La connexion de Spin	12

1.5.5	Tenseur de courbure	14
1.6	Les équations relativistes dans un espace courbé	14
1.6.1	L'équation de Klein-Gordon dans un espace-temps courbé	14
1.6.2	L'équation de Dirac dans un espace-temps courbé	15
1.6.2.1	L'équation de Dirac libre dans un espace-temps plat	15
1.6.2.2	L'équation de Dirac libre dans un espace-temps courbé	16
2	Aperçu sur la structure de l'espace-temps de Rindler	19
2.1	Préambule	19
2.2	Coordonnées hyperboliques	19
2.2.1	Métrie de l'espace-temps de Rindler	21
2.3	Quelques notions	24
2.3.1	Les trous noirs	24
2.3.2	L'horizon	24
2.3.3	Effet Unruh	27
2.3.4	Les radiations de Hawking	28
3	L'oscillateur de Klein-Gordon dans un espace-temps de Rindler	29
3.1	L'équation de Klein-Gordon libre	29
3.1.1	Les propriétés thermiques	35
3.2	L'oscillateur de Klein-Gordon à 1D	38
3.2.1	Propriétés thermiques	40
3.2.2	Résultats et discussion	42
	Conclusion et Perspective	44
4	L'oscillateur de Dirac dans un espace-temps de Rindler	44
4.1	L'équation libre de Dirac	44
4.2	Propriétés thermiques de l'équation libre de Dirac	48
4.2.1	Fonction de partition	49
4.2.1.1	Pour le cas $s = 1$	49
4.2.1.2	Pour le cas $s = -1$	50
4.3	L'oscillateur de Dirac à 1D	52
4.4	Propriétés thermodynamiques	54
4.4.1	Méthodes	54
4.4.2	Résultats et discussion	55

Conclusion et Perspective	57
A La fonction d’Airy	59
A.1 La fonction d’Airy	59
A.2 Les zéros de la fonction Ai	61
B L’équation de Dirac dans un espace-temps de Rindler	62
B.1 Fermions dans l’espace Rindler	62
B.2 Calcul de la connexion affine	63
B.3 Les solutions	64
C Liste des articles	68

LISTE DES TABLEAUX

Table	Page
3.1 Quelques valeurs d'énergie avec l'état $Ai(\lambda) = 0$; ici $m = 1$	33
4.1 The inverse temperature β_c vs the accelerator of the reference frame a	52
A.1 Les dix valeurs des zéros de $Ai(-\lambda_n) = 0$ et $Bi(-\lambda_n) = 0$	61

LISTE DES FIGURES

Figure	Page
1.1 L'espace tangent T_p au point p sur une variété M	6
1.2 Transport parallèle d'un vecteur sur une 2-sphères	11
2.1 Espace-temps de Rindler	21
2.2 Coordonnées de Rindler dans l'espace de Minkowski	23
2.3 La ligne d'univers d'un observateur uniformément accéléré (accélération propre $a \equiv a $) dans l'espace-temps de Minkowski.	25
2.4 Le système de coordonnées approprié d'un observateur uniformément accéléré dans l'espace-temps de Minkowski.	26
3.1 Le spectre de l'énergie E en fonction du nombre quantique n	33
3.2 Valeurs exactes et numériques du spectre d'énergie E par rapport au nombre quantique n	35
3.3 Propriétés thermiques d'une particule libre de spin-0 dans un espace-temps de Rindler	37
3.4 Énergie E_n en fonction de n	39
3.5 (gauche) contour de Γ et $\xi_H(n, s)$ fonctions. (droite) Contour de la transformation Mellin de notre problèmes.	41
3.6 Propriétés thermiques de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1 D dans un espace-temps de Rindler	43
3.7 Schéma du spectre énergétique	43
4.1 Spectre d'énergie des particules de fermions libres dans l'espace-temps de Rindler . . .	48
4.2 Propriétés thermiques de l'équation de Dirac unidimensionnelle dans l'espace-temps de Rindler pour $s = +1$	51

4.3	Propriétés thermiques de l'équation de Dirac unidimensionnelle dans l'espace-temps de Rindler pour $s = -1$	51
4.4	L'inverse de la température de la transition β_c en fonction de l'accélération du référentiel a	52
4.5	Les valeurs propres d'énergie de l'oscillateur de Dirac 1D dans l'espace-temps de Rindler	54
4.6	Propriétés thermiques de l'oscillateur de Dirac à 1D dans un espace-temps de Rindler .	56
A.1	Les deux fonctions d'Airy Ai et Bi	60
A.2	Les deux fonctions d'Airy Ai et Bi et leurs comportements asymptotiques	60
A.3	Les zéros de la fonction Airy	61
B.1	Spectre d'énergie pour $a = 0,01$, $a = 0,02$ et $a = 0,03$. L'énergie est symétrique par rapport à $\varepsilon = 0$	67

INTRODUCTION

Le modèle standard de la physique des particules est la théorie la plus réussie pour rendre compte des trois forces fondamentales de la nature et des particules élémentaires. Il s'appuie sur la théorie quantique des champs et le principe de symétrie de jauge locale. Il ne prend pas en compte la quatrième force fondamentale, la gravitation, qui est décrite par la relativité générale d'Einstein dans le cadre de la physique classique. Les deux théories ont des formalismes très différents. Une description quantique de la gravitation, ou gravité quantique, est recherchée par de nombreux physiciens. Les deux approches les plus connues sont la théorie des cordes et la gravitation quantique en boucle. Elles sont difficiles à tester expérimentalement car les effets quantiques de la gravitation ne se manifestent qu'à l'échelle de Planck, qui est bien au-delà des capacités des accélérateurs actuels. En l'absence d'une théorie de la gravité quantique, on peut étudier comment la gravitation influence les champs quantiques. La théorie quantique des champs et la relativité générale sont les deux cadres mathématiques qui rendent compte de toutes les interactions connues dans la nature. La théorie quantique des champs décrit les interactions au niveau subatomique, tandis que la relativité générale s'applique à la gravité, qui devient importante à des échelles plus grandes. Mais il n'existe pas de théorie mathématique qui unifie ces deux cadres. Une première étape vers cette unification pourrait être d'étudier comment les champs quantiques se comportent dans des espaces-temps courbes. La théorie quantique des champs est la meilleure théorie pour la physique des particules et ses interactions. Par ailleurs, Einstein a développé sa théorie générale de la relativité il y a environ cinquante ans, où il a expliqué la gravité par la géométrie de l'espace-temps. Dans cette théorie, l'espace et le temps forment une « entité unifiée », qui diffère de la notion classique d'un temps absolu [1–4].

L'oscillateur harmonique relativiste est un sujet fondamental en physique. Il a été beaucoup étudié dans le passé, mais il présente encore des aspects intéressants qui méritent d'être examinés de près, aussi bien en mécanique classique qu'en mécanique quantique. L'oscillateur harmonique est un outil essentiel pour le développement de la physique théorique, comme l'a montré la naissance de la mécanique

quantique [5,6].

L'oscillateur de Dirac est un système physique qui a été introduit par Ito [7] en remplaçant la quantité de mouvement \mathbf{p} par $\mathbf{p} - im\beta\omega\mathbf{r}$ dans l'équation de Dirac, où \mathbf{r} est le vecteur de position, m la masse de la particule et ω la fréquence de l'oscillateur. Ce système a été nommé ainsi par Moshinsky et Szczepaniak [6,8] car il se réduit à un oscillateur harmonique avec un fort couplage spin-orbite dans la limite non relativiste. On peut aussi interpréter ce système comme l'interaction du moment magnétique anormal avec un champ électrique linéaire [9,10]. L'oscillateur de Dirac a attiré beaucoup d'attention car il permet de résoudre exactement l'équation de Dirac et il a de nombreuses applications physiques. Il a été étudié sous différents aspects, tels que : (i) la covariance de l'équation de Dirac avec l'interaction de l'oscillateur de Dirac, (ii) le spectre d'énergie et les fonctions d'onde associées, (iii) les propriétés algébriques du groupe de Lie, (iv) la supersymétrie, (v) et d'autres aspects présents dans la littérature [11–55].

Un référentiel hyperboliquement accéléré est un système de coordonnées utile et important en physique relativiste, qui représente une partie de l'espace-temps plat de Minkowski [56,57]. En relativité restreinte, une particule qui accélère uniformément suit un mouvement hyperbolique, et on peut choisir un référentiel uniformément accéléré où elle est immobile comme son référentiel propre. On peut comparer les phénomènes dans ce référentiel hyperboliquement accéléré aux effets d'un champ gravitationnel uniforme. Le mouvement hyperbolique dans l'espace-temps de Minkowski [58] est le mouvement d'une particule relativiste qui a une accélération propre constante. Il est important pour comprendre le mouvement en présence d'horizons et les phénomènes comme le rayonnement de Hawking dans les trous noirs et la température associée [59]. L'espace de Rindler est la partie de l'espace de Minkowski avec laquelle un observateur qui accélère constamment peut interagir. C'est peut-être l'espace-temps le plus simple avec un horizon. [60–62]. L'espace-temps de Rindler a une structure géométrique semblable au trou noir de Schwarzschild. Le rayonnement de Hawking dans le trou noir de Schwarzschild est lié à l'effet Unruh [63,64] dans l'espace-temps de Rindler. En 1975, Davies [65] a montré qu'un observateur qui accélère uniformément verrait des particules avec une distribution thermique à la température $T = \frac{a}{2\pi k_B}$, où a est l'accélération. Il a été le premier à donner des arguments théoriques quantiques du champ pour dire qu'un observateur qui accélère uniformément dans un espace-temps plat verrait un rayonnement thermique [66,67].

L'équation de Dirac unidimensionnelle avec une interaction d'oscillateur de Dirac a des propriétés thermiques qui ont été étudiées par Pacheco [19]. Les auteurs ont utilisé la formule d'Euler-MacLaurin pour calculer toutes les quantités thermiques de l'oscillateur. Cette méthode permet d'obtenir toutes les propriétés thermiques du système, mais elle peut être limitée aux températures plus élevées. En outre, à $T=0K$, la fonction de partition présente une divergence totale [35]. Une autre méthode basée sur la fonction Zeta [68,69] a été proposée par plusieurs auteurs dans la littérature [15,70–74]. Cette

méthode a l'avantage d'éviter les divergences qui apparaissent dans la fonction de partition obtenue par l'approche d'Euler-Maclaurin. Les auteurs ont utilisé la transformation de Cahin-Mellin de la fonction exponentielle. Frassino [75] ont généralisé cette méthode en considérant tous les pôles négatifs de la fonction Γ [15].

Cette thèse est composée de quatre chapitres :

le premier chapitre présente un rappel du formalisme de l'espace courbe et des équations relativistes comme l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Dirac dans un espace-temps courbé.

Le deuxième chapitre introduit la définition de l'espace de Rindler.

Le troisième chapitre étudie les solutions de l'équation de Klein-Gordon libre et l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D dans l'espace de Rindler ainsi que leurs propriétés thermiques.

Le quatrième chapitre analyse les solutions de l'équation de Dirac libre et l'oscillateur de Dirac à 1D dans l'espace de Rindler ainsi que leurs propriétés thermiques.

Enfin, nous concluons notre étude par une synthèse générale.

CHAPITRE 1

LES ÉQUATIONS RELATIVISTES DANS UN ESPACE-TEMPS COURBÉ

1.1 Préambule

Ce chapitre présente les outils mathématiques qui permettent de caractériser un espace-temps courbe. Ces outils vont nous aider à comprendre la structure de l'espace et du temps. Nous partons de la théorie de la relativité restreinte et nous nommons espace-temps l'ensemble formé par l'espace et le temps. Du point de vue des mathématiques, l'espace-temps de notre univers est une sorte d'espace à quatre dimensions appelé variété. C'est un espace topologique (qui vérifie la propriété de Hausdorff) qui ressemble localement à un espace euclidien. En fait, notre espace-temps est localement semblable à l'espace de Minkowski. Ces variétés sont aussi appelées pseudo-Riemanniennes ou Lorentziennes (pour plus de détails sur l'espace-temps courbe, voir [76,77]).

1.2 Espace tangent

Dans une variété M , on définit en chaque point p un espace tangent T_p , qui est l'espace vectoriel constitué des vecteurs tangents à toutes les courbes passant par le point p sur M [77,78]

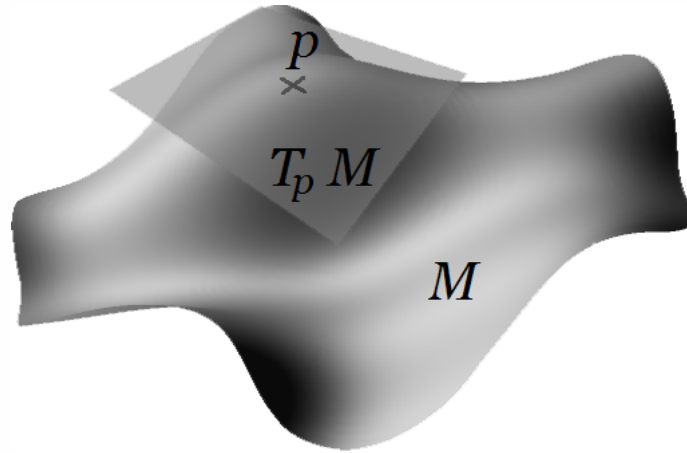


Fig. 1.1: L'espace tangent T_p au point p sur une variété M

Nous appellerons V un vecteur dans T_p et noterons les composantes de V par V^μ . Ce sont les composantes de V par rapport à une base $\hat{e}_{(\mu)}$ telles que

$$V = V^\mu \hat{e}_\mu. \quad (1.1)$$

En revanche, il existe une base naturelle qui peut être définie dans l'espace tangent. C'est la base de la direction dérivée des fonctions de coordonnées x^μ en point p . Nous appellerons cette base la base des coordonnées. Elle est constituée des dérivées partielles :

$$e_\mu = \partial_\mu, \quad (1.2)$$

Faisons un changement tels que

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'}, \quad (1.3)$$

alors, la nouvelle base de coordonnées sera :

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu. \quad (1.4)$$

Pour une transformation coordonnée, nous disposons donc :

$$V^{\mu'} \partial_{\mu'} = V^{\mu'} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu. \quad (1.5)$$

Ainsi, la transformation des composants est donnée par :

$$V^{\mu'} = V^\mu \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu}. \quad (1.6)$$

Pour chaque espace tangent T_p , on définit un espace cotangent T_p^* constitué de vecteurs dual. Consi-

définissons un vecteur dual ω tel que

$$\omega = \omega_\mu \theta^\mu. \quad (1.7)$$

pour une certaine base θ^μ . Cette base est construite de telle sorte que

$$\theta^\nu (e_\mu) = \delta_\mu^\nu. \quad (1.8)$$

Lorsque nous agissons à partir d'un vecteur V par ω , nous obtenons

$$\omega (V) = \omega_\mu \theta^\mu (V^\nu e_\nu) = \omega_\mu V^\nu \theta^\mu (e_\nu) = \omega_\mu V^\mu. \quad (1.9)$$

Notons ici que le gradient d'une fonction f est un vecteur dual, et est noté df .

Si nous calculons le gradient des fonctions de coordonnées, dx^μ , elles forment la base de l'espace cotangent qui correspond à la base coordonnée de l'espace tangent. Cela vient de la relation suivante

$$dx^\mu (\partial_\nu) = \frac{dx^\mu}{dx^\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (1.10)$$

La base de coordonnées dual se transforme en :

$$dx^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{dx^\mu} dx^\mu. \quad (1.11)$$

Sous les transformations de coordonnées, un vecteur dual devient

$$\omega_{\mu'} = \frac{dx^\mu}{dx^{\mu'}} \omega_\mu. \quad (1.12)$$

1.3 Champs de tenseurs

Les notions de vecteurs et de vecteurs dual peuvent être généralisées à des tenseurs de n'importe quel rang.

Un tenseur T de rang (k, l) est une application multilinéaire de k vecteurs duals et l vecteurs vers les nombres réels. Ainsi, dans la base de coordonnées, nous avons

$$T = T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k} \partial x_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial x_{\mu_k} \otimes \partial x^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \partial x^{\nu_l}. \quad (1.13)$$

Dans une transformation de coordonnées, les nouvelles composantes d'un tenseur de rang (k, l) s'écrivent par :

$$T_{\nu'_1 \dots \nu'_l}^{\mu'_1 \dots \mu'_k} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T_{\nu_1 \dots \nu_l}^{\mu_1 \dots \mu_k}. \quad (1.14)$$

Cette équation exprime la condition de tensorialité.

1.4 La métrique

La métrique est un tenseur de rang-(0, 2) noté $g_{\mu\nu}$. Il est symétrique en ses deux indices et aura l'inverse $g^{\mu\nu}$ tel que

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\mu}. \quad (1.15)$$

Elle a la forme suivante

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (1.16)$$

La notation ds^2 rappelle la notion d'élément de ligne dans la géométrie classique. C'est pourquoi nous nommons souvent ds^2 l'élément de ligne de l'espace-temps que nous étudions.

Ainsi, pour chaque vecteur V^{μ} , on définit le vecteur dual correspondant V_{μ} de la manière suivante :

$$V_{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\nu}. \quad (1.17)$$

De même, on obtient un vecteur à partir d'un vecteur dual en agissant sur le vecteur dual par le tenseur métrique inverse : alors

$$V \cdot W \equiv V_{\mu} W^{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\mu} W^{\nu}. \quad (1.18)$$

Nous voyons maintenant que nous avons défini une structure qui nous permet de parler de la longueur des vecteurs et d'autres quantités liées à la notion formel de produit scalaire. Dans un espace temps plat, l'élément de ligne est donné par

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (1.19)$$

dont

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.20)$$

est le tenseur métrique fondamental de Minkowski.

1.5 Connexions

1.5.1 Dérivées covariantes et symbole de Christoffel

Quoique nous considérerons l'espace-temps comme une variété équipée d'une métrique, alors la courbure n'est pas attribuée à la métrique, mais à un objet appelé connexion affine $\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}$ qui n'est pas un tenseur. Lorsque la variété est équipée d'une métrique, il existe une connexion affine unique connue sous le nom de symbole de Christoffel et nous utiliserons la même notation pour cette connexion qu'avec une connexion affine générale.

La connexion est intimement liée à la notion de dérivée covariante, dans un espace-temps M la dérivée partielle d'un tenseur, par exemple $\partial_\mu V^\mu$ a la même forme dans tout système de coordonnées lié par une transformation de Lorentz. La dérivée covariante est construite de telle manière qu'en agissant sur un tenseur général, le résultat sera toujours un tenseur.

On note la dérivée covariante par ∇_μ . En exigeant que cet opérateur soit linéaire, il peut être écrit comme une dérivée partielle plus une transformation linéaire. Donc, pour la dérivée covariante d'un vecteur, nous avons

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma^\nu_{\lambda\nu} V^\lambda, \quad (1.21)$$

dont $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ est un ensemble de transformations linéaires ou matrices, appelé connexion.

Les propriétés de transformation de la connexion sont telles que $\nabla_\mu V^\nu$ devient un tenseur. En imposant que la dérivée covariante du delta de Kronecker s'annule et que :

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi. \quad (1.22)$$

alors, pour un champ scalaire ϕ , on obtient

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma^\nu_{\lambda\nu} \omega_\lambda, \quad (1.23)$$

On supposera que la liaison est sans torsion, c'est-à-dire qu'elle est symétrique aux indices inférieurs :

$$\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}, \quad (1.24)$$

nous supposons que la connexion est compatible avec la métrique, c'est-à-dire que la dérivée covariante de la métrique s'annule :

$$\nabla_\mu g_{\nu\lambda} = 0, \quad (1.25)$$

il existe alors une expression unique de la connexion : elle s'écrit par

$$\Gamma^\nu_{\mu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (1.26)$$

Celui-ci est nommé le symbole de Christoffel.

1.5.2 Le formalisme de tétrade

nous avons travaillé avec le choix naturel de la base de coordonnées sur la variété d'espace-temps. Dans la base de coordonnées, les vecteurs de base sont donnés par $e_\mu = \partial_\mu$ et les vecteurs de base dual par $\theta^\mu = dx^\mu$ [77, 78].

Tous les objets et structures concernés existent indépendamment d'un système de coordonnées particulier. Par conséquent, adoptons une approche un peu différente pour établir une base. Commençons

d'abord par les deux bases. Établissons une base à chaque point de l'espace-temps, un espace-temps qui sera courbé, et que la base soit Minkowskienne. Cela signifie que le tenseur métrique sera Minkowskien une fois écrit conformément à cette base. Nous désignerons ces vecteurs de base par e_a et les vecteurs de base duale par θ^b . Ainsi, au voisinage de chaque point de l'espace-temps, nous avons

$$g_{ab} = g_{ab}\theta^a\theta^b = \eta_{ab}, \quad (1.27)$$

Cela peut être vu comme le produit interne des deux vecteurs, et en ce sens, ils constituent un ensemble orthonormé par rapport à la métrique de Minkowski. Une telle orthonormale est appelé tétrade ou "vierbein", et cette procédure de mise en place d'un cadre orthonormé à chaque point d'une variété s'appelle le formalisme tétrade. Nous avons ainsi

$$\theta^a(e_b) = \delta_b^a, \quad (1.28)$$

La transformation entre la base de coordonnées et la base d'inertie locale est donnée par :

$$e_\mu = e_\mu^a e_a. \quad (1.29)$$

Ceci est similaire pour la dual base : ainsi

$$\theta^\mu = e^\mu_b \theta^b. \quad (1.30)$$

Ici e_μ^a et e^μ_b sont les matrices de transformation. Ce sont les matrices que nous appellerons respectivement la Vierbein et l'inverse Vierbein. Le fait qu'ils soient inversés découle des exigences des deux équations (1.28) et (1.8), alors

$$e_\mu^a e^\mu_b = \delta_b^a, \quad (1.31)$$

$$e_\mu^a e^\nu_b = \delta_\mu^\nu, \quad (1.32)$$

Le résultat est la métrique écrite en coordonnées locales

$$g_{ab} = g_{\mu\nu} e^\mu_a \hat{\theta}^{(a)} e^\nu_b \hat{\theta}^{(b)} = \eta_{ab}, \quad (1.33)$$

comme dans l'équation (1.27).

En supprimant les vecteurs de base dual, nous obtenons

$$\eta_{ab} = e^\mu_a e^\nu_b g_{\mu\nu}, \quad (1.34)$$

ou

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}. \quad (1.35)$$

Pour un vecteur global V_μ , ses composantes dans la base locale sont

$$V^a = e_\mu^a V^\mu, \quad (1.36)$$

Pour un tenseur général, nous avons

$$T^{\mu_1 \dots a \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots b \dots \nu_l} = e_\mu^a e^\nu_b T^{\mu_1 \dots \mu a \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu b \dots \nu_l}. \quad (1.37)$$

1.5.3 Transport parallèle et géodésiques

L'idée est de prendre le vecteur en l'un des deux points et de le transporter le long de la variété, tout en le maintenant constant, de manière à ce que les deux vecteurs coïncident. Alors les deux vecteurs feront partie du même espace tangent et seront donc comparables. Dans un espace-temps plat, la condition pour qu'un vecteur soit transporté parallèlement le long d'une courbe $x^\mu(\lambda)$, est que sa dérivée le long de la courbe s'annule. Sur une variété générale, cette exigence devient

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} V^\mu = \frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu V^\mu = 0, \quad (1.38)$$

En termes imagés : "le gradient $\nabla_\nu V^\mu$ est perpendiculaire au vecteur vitesse $\frac{dx^\nu}{d\lambda}$ ". Un vecteur V^μ sera transporté parallèlement le long de C si sa dérivée covariante est "perpendiculaire" au vecteur vitesse. Cela se généralise facilement aux tenseurs de n'importe quel rang. Il est à noter que le résultat du parallèle le transport dépend du chemin de transport. Ceci peut être illustré comme suit [77]

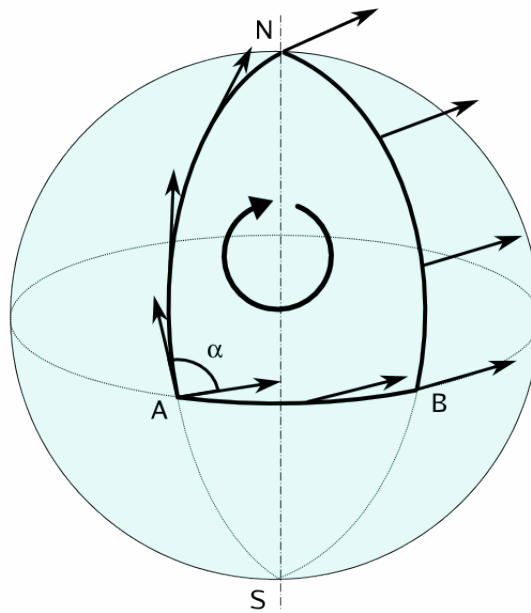


Fig. 1.2: Transport parallèle d'un vecteur sur une 2-sphères

: En utilisant l'expression de la dérivée covariante d'un vecteur (1.21), nous obtenons l'équation

du transport parallèle d'un vecteur :

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} (\nabla_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\sigma} V^\sigma) = 0. \quad (1.39)$$

Soit

$$\frac{dV^i}{dt} + u^k \Gamma^i_{jk} V^j = 0, \quad u^k = \frac{dx^k}{d\lambda} \quad (1.40)$$

il s'agit décrit comment un vecteur V^μ est transporté parallèlement le long d'un chemin $x^\nu(\lambda)$ sur une variété. Elle sera indépendante de la paramétrisation λ . Sous forme infinitésimale, il s'écrit

$$V^\mu(x \rightarrow x + dx) = V^\mu(x) - V^\nu \Gamma^\mu_{\nu\lambda}(x) dx^\lambda. \quad (1.41)$$

Ici, nous avons écrit explicitement les coordonnées pour savoir où se trouve chaque objet.

La notion de géodésique est étroitement associée à celle de transport parallèle : une courbe G est une géodésique si son vecteur vitesse est transporté parallèlement à lui-même le long de G , soit

$$u^i \nabla_i u^j = u^i (\partial_i u^j - u^k \Gamma^j_{ki}) = 0, \quad (1.42)$$

ce qui donne l'équation des géodésiques

$$\frac{d^2 x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ki} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad (1.43)$$

où nous avons utilisé

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \partial_i. \quad (1.44)$$

Deux remarques sur les géodésiques.

- Seule la partie symétrique dans les deux indices inférieurs de la connexion Γ intervient dans l'équation des géodésiques ; en d'autres termes, cette équation ne dépend pas de la torsion.
- Une géodésique $x^i(t)$ est déterminée de façon unique par la donnée d'une position initiale $x^i(t=0)$ et d'une vitesse initiale $u^i(t=0)$. En effet (1.44) est un système d'équations différentielles du second ordre.

1.5.4 La connexion de Spin

Avec le formalisme tétrade, nous avons mis en place un repère inertiel local en chaque point de la variété courbe. Nous voulons savoir comment un vecteur situé en un point avec des composantes dans la base locale à ce point, se transporte parallèlement vers un autre point de la variété avec une nouvelle base locale. On l'appelle la connexion de spin : elle définira une dérivée covariante des tenseurs locaux. Le nom de connexion de spin dérive la dérivée covariante du spineur.

L'équation pour le transport parallèle des vecteurs locaux devrait être de la même forme que le cas du vecteur global : ainsi

$$V^\mu(x \rightarrow x + dx) = V^a - \omega_\mu^a{}_b(x) V^b(x) dx^\mu, \quad (1.45)$$

Ici $\omega_\mu^a{}_b(x)$ est la connexion de spin. Il transporte les informations pour transporter le vecteur lui-même en utilisant les symboles de Christoffel en ajustant les coordonnées locales au départ le point avec les coordonnées locales au point final via les vierbeins.

Pour trouver l'expression explicite de $\omega_\mu^a{}_b(x)$, rappelons que

$$V^\mu(x) = e^\mu{}_a(x) V^a(x). \quad (1.46)$$

Transporté ce vecteur du point x au point $x + dx$ est donné par :

$$V^\mu(x \rightarrow x + dx) = e^\mu{}_a(x \rightarrow x + dx) V^a(x \rightarrow x + dx). \quad (1.47)$$

Développer $e^\mu{}_a(x + dx)$ au premier ordre de dx donne

$$V^\mu(x \rightarrow x + dx) = e^\mu{}_a(x) V^a(x \rightarrow x + dx) + \partial_\nu e^\mu{}_a(x) V^a(x \rightarrow x + dx) dx^\nu. \quad (1.48)$$

En insérant l'expression 1.47 pour $V^a(x \rightarrow x + dx)$, on obtient (en ne gardant que les termes du premier ordre dans dx)

$$\begin{aligned} V^\mu(x \rightarrow x + dx) &= e^\mu{}_a(x) V^a(x) - [e^\mu{}_a(x) \omega_\lambda^a{}_b(x) - \partial_\lambda e^\mu{}_b(x)] V^b(x) dx^\nu, \\ &= V^\mu(x) - [e^\mu{}_a(x) \omega_\lambda^a{}_b(x) - \partial_\lambda e^\mu{}_b(x)] e_\sigma^b(x) V^\sigma(x) dx^\lambda, \end{aligned} \quad (1.49)$$

À partir de l'équation de transport parallèle pour les vecteurs globaux (Eq. (1.41)), nous reconnaissons

$$\Gamma^\mu{}_{\sigma\lambda} = [e^\mu{}_a \omega_\lambda^a{}_b - \partial_\lambda e^\mu{}_b] e_\sigma^b. \quad (1.50)$$

En résolvant cela pour la connexion de spin, nous trouvons que

$$\omega_\mu^a{}_b = e_\nu^a e_\sigma^b \Gamma^\nu{}_{\sigma\mu} + e_\nu^a \partial_\mu e^\nu{}_b. \quad (1.51)$$

où :

$$\omega_{\mu ab} = \eta_{ac} e_\nu^c e_\sigma^b \Gamma^\nu{}_{\sigma\mu} + \eta_{ac} e_\nu^a \partial_\mu e^\nu{}_b. \quad (1.52)$$

Ici $\Gamma^\nu{}_{\sigma\mu}$ est le symbole de Christoffel. Comme la connexion est compatible avec la métrique, donc

$$\omega_{\mu ab} = -\omega_{\mu ba}. \quad (1.53)$$

Ainsi, $\omega_{\mu ab}$ est antisymétrique pour les deux derniers indices.

1.5.5 Tenseur de courbure

La notion exacte de la courbure en chaque point pour une variété est quantifiée par le tenseur de la courbure de Riemann. Ce dernier est défini par [79]

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho{}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho{}_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\mu\sigma}. \quad (1.54)$$

C'est un tenseur de rang (1, 3), antisymétrique pour les deux derniers indices inférieurs. On voit que ce tenseur ne dépend qu'avec le symbole de Christoffel $\Gamma^\nu{}_{\sigma\mu}$. Dans le même sens, on définit le tenseur de Ricci par

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu}. \quad (1.55)$$

Ce tenseur est symétrique. A partir de ce tenseur, on forme ce qu'on appelle le scalaire de Ricci comme suit :

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (1.56)$$

1.6 Les équations relativistes dans un espace courbé

1.6.1 L'équation de Klein-Gordon dans un espace-temps courbé

Soit la densité lagrangienne du champ de Klein-Gordon dans un espace de Minkowski :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\nu \varphi) (\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2. \quad (1.57)$$

Pour un espace-temps courbé, la métrique de Minkowski sera remplacée par un tenseur métrique général. Puisque φ est un scalaire, sa dérivée covariante se réduira à la dérivée partielle $\partial_\mu \varphi$. Nous connaissons exactement une telle quantité scalaire, à savoir le scalaire de courbure de Ricci R . Cela ajoutera un terme proportionnel à $R\varphi^2$, ce qui conduit à la densité lagrangienne pour un champ scalaire dans l'espace-temps courbé sous la forme :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\nu \varphi) (\partial_\mu \varphi) - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} \xi R \varphi^2, \quad (1.58)$$

ou ξ est le couplage gravitationnel du champ scalaire. Ce couplage pourrait théoriquement être déterminé par des expériences, mais l'effet de la gravité est si faible que cette expérience serait pratiquement impossible.

Soit maintenant l'action S du champ de Klein-Gordon dont :

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \quad (1.59)$$

A partir du principe de moindre action $\delta S = 0$, en utilisant les équations d'Euler-Lagrange dans un espace-temps courbé

$$\partial_\mu \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} - \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.60)$$

alors, l'équation du champ de Klein-Gordon dans un espace-temps courbé suit la formule suivante :

$$(\square^2 + \xi R + m^2) \varphi = 0, \quad (1.61)$$

où l'opérateur \square^2 , représentant le Dalembertien dans un espace courbé, est défini par

$$\square^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}. \quad (1.62)$$

Ici, $g = |g_{\mu\nu}|$ et R le scalaire de Ricci. Dans ce qui suit, nous mettons $\xi = 0$. Ainsi, l'équation covariante de Klein-Gordon dans un espace-temps courbé est [80, 81] :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) + m^2 \right] \varphi = 0. \quad (1.63)$$

1.6.2 L'équation de Dirac dans un espace-temps courbé

1.6.2.1 L'équation de Dirac libre dans un espace-temps plat

L'équation de Dirac est décrit par

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad (1.64)$$

dont

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

sont les matrices 4×4 de $\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ et

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.66)$$

sont les matrices de Pauli.

La condition d'herméticité donne les expressions suivantes

$$(\gamma^0)^+ = \gamma^0, (\gamma^i)^+ = -\gamma^i. \quad (1.67)$$

$$(\gamma^\mu)^+ = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (1.68)$$

Le champ de Dirac ψ est un objet à quatre composants appelé spineur :

$$\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)^T. \quad (1.69)$$

Soit ψ^+ son complexe conjugué, alors l'opérateur adjoint de Dirac $\bar{\psi}$ est donné par :

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0. \quad (1.70)$$

Nous pouvons construire une base pour toutes les matrices 4×4 à partir des matrices γ^μ . La base sera donnée par l'ensemble suivant $1, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}, \gamma^\mu \gamma^5, \gamma^5$, où la cinquième matrice de γ est défini par

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, \quad (1.71)$$

dont

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]. \quad (1.72)$$

À partir de l'ensemble de base présenté ci-dessus, nous pouvons former 16 différents formes bilinéaires de Dirac. Chacune de ces bilinéaires se transformera différemment en raison des transformations de Lorentz suivante

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \text{Scalaire}, \quad (1.73)$$

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \rightarrow \text{Pseudoscalaire}, \quad (1.74)$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rightarrow \text{Vecteur}, \quad (1.75)$$

$$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi \rightarrow \text{Tenseur antisymétrique}. \quad (1.76)$$

Le vecteur et le scalaire bilinéaire de Dirac seront employés plus tard pour le développement de la dérivée covariante du spineur.

1.6.2.2 L'équation de Dirac libre dans un espace-temps courbé

Pour écrire l'équation de Dirac libre dans un espace-temps courbé, il faut en premier lieu calculer la dérivée covariante du champ de spineur :

$$\nabla_\mu \psi(x) = [\partial_\mu + \Gamma_\mu(x)] \psi(x), \quad (1.77)$$

ou $\Gamma_\mu(x)$ est le coefficient de connexion pour le champ spineur. En respectant le transport parallèle, le spineur doit suivre la règle suivante :

$$\psi(x \rightarrow x + dx) = \psi(x) - \Gamma_\mu(x) \psi(x) dx^\mu. \quad (1.78)$$

Pour trouver la connexion de spineur, nous examinons les propriétés de transport parallèle de certains bilinéaires de Dirac [82]. Nous avons la quantité scalaire $S(x) = \bar{\psi}(x) \psi(x)$, qui devrait rester

inchangé dans le cadre du transport parallèle :

$$\begin{aligned}
 S(x \rightarrow x + dx) &= \bar{\psi}(x \rightarrow x + dx) \psi(x \rightarrow x + dx), \\
 &= [\psi^+(x) \gamma^0 - \psi^+(x) \Gamma_\mu^+(x) \gamma^0 dx^\mu] [\psi(x) - \Gamma_\nu(x) \psi(x) dx^\nu], \\
 &= S(x) - \bar{\psi}(x) [\Gamma_\mu(x) + \gamma^0 \Gamma_\mu^+(x) \gamma^0] \psi(x) dx^\mu.
 \end{aligned} \tag{1.79}$$

avec $(\gamma^0)^2 = 1$. De plus, le terme proportionnel à $dx^\mu dx^\nu$ a été négligé puisque dx^μ est infinitésimal.

Pour que (1.79) soit valable, il faut que

$$\gamma^0 \Gamma_\mu^+ \gamma^0 = -\Gamma_\mu. \tag{1.80}$$

Ensuite, nous regardons le vecteur local $j^a(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^a \psi(x)$ qui devrait être transporté de la même manière que tout autre vecteur local : ainsi

$$\begin{aligned}
 j^a(x \rightarrow x + dx) &= [\psi^+(x) - \psi^+(x) \Gamma_\mu^+(x) dx^\mu] \gamma^0 \gamma^a [\psi(x) - \Gamma_\mu(x) \psi(x) dx^\mu], \\
 &= \bar{\psi}(x) \gamma^a \psi(x) - \bar{\psi}(x) [\gamma^a \Gamma_\mu(x) - \Gamma_\mu(x) \gamma^a] \psi(x) dx^\mu.
 \end{aligned} \tag{1.81}$$

où nous avons pris en compte la première condition sur Γ_μ . Par l'exigence que ceci doit obéir à (1.45), nous obtenons une deuxième condition sur la connexion du spineur :

$$[\gamma^a, \Gamma_\mu] = \omega_\mu^a{}_b \gamma^b. \tag{1.82}$$

À partir de (1.82), nous concluons que Γ_μ devrait être une combinaison de la connexion de spin avec un produit de matrice γ satisfaisant le commutateur. Rappelons que

$$[\gamma^a, \sigma^{bc}] = 2i (\gamma^c \eta^{ba} - \gamma^b \eta^{ca}), \tag{1.83}$$

en faisant ressortir les indices directement dans (1.83). Soit l'ansatz suivant

$$\Gamma_\mu = C \omega_{\mu bc} \sigma^{bc}, \tag{1.84}$$

où C est une constante complexe.

Insérons (1.84) dans (1.83), (1.83) devient

$$[\gamma^a, \Gamma_\mu] = 2i C \omega_{\mu bc} (\gamma^c \eta^{ba} - \gamma^b \eta^{ca}) = 4i C \omega_\mu^a{}_b \gamma^b. \tag{1.85}$$

Ici, nous avons utilisé la propriété d'antisymétrie de la connexion de spin dans la deuxième égalité. À partir de là, la constante $C = \frac{1}{4i}$.

En se souvenant que $(\sigma^{bc})^+ = \gamma^0 \sigma^{bc} \gamma^0$, on voit qu'avec la constante C la connexion de spin

satisfait à la relation (1.80). Alors, on a

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{4}i\omega_{\mu bc}\sigma^{bc} = \frac{1}{8}\omega_{\mu bc} [\gamma^b, \gamma^c]. \quad (1.86)$$

Pour rendre l'équation de Dirac valide dans l'espace-temps courbé, nous devons également considérer les matrices γ sous la forme Minkowski de l'équation. (1.64). Ces matrices sont écrites en termes de coordonnées locales comme suit :

$$\gamma^\mu = e^\mu_a \gamma^a, \quad (1.87)$$

Finalement, l'équation générale de Dirac dans un espace-temps courbé est alors écrite par [82]

$$[ie^\mu_a \gamma^a (\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m] \psi = 0. \quad (1.88)$$

CHAPITRE 2

APERÇU SUR LA STRUCTURE DE L'ESPACE-TEMPS DE RINDLER

2.1 Préambule

L'espace-temps de Rindler est un système de coordonnées qui réalise un feuilletage de l'espace-temps de Minkowski par les lignes d'univers accélérée, hyperboles de type temps, à coordonnées spatiale constante, et par la distance entre ces lignes, de type espace à coordonnée temporelle constante.

2.2 Coordonnées hyperboliques

Soit un observateur accélérant uniformément le long de la direction x avec une accélération propre constante α [83]. La métrique de Minkowski est donnée par

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2, \quad (2.1)$$

dont $x^\mu = (t, x)$. Pour trouver la vitesse propre correspondante, nous évaluons la dérivée temporelle propre de la position, où la connexion entre le temps propre τ et le temps coordonné t est donnée par

$$\gamma d\tau = dt, \quad (2.2)$$

où

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - v^2}, \quad (2.3)$$

est le facteur de Lorentz.

En utilisant que $x^\mu = (t, x)$, alors le quadrivecteur vitesse est donné par :

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\mu}{dt} = \gamma (1, v). \quad (2.4)$$

Ainsi, l'accélération sera

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} = \gamma \frac{du^\mu}{dt} = \gamma \left(\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d(\gamma v)}{dt} \right), \quad (2.5)$$

Supposons que l'accélération propre est constante et égale à α , alors

$$a^\mu a_\mu = \gamma^2 \left(\left(\frac{d\gamma}{dt} \right)^2 - \left(\frac{d(\gamma v)}{dt} \right)^2 \right) = -\alpha^2, \quad (2.6)$$

Ceci peut être réécrit pour obtenir l'équation différentielle suivante

$$\alpha = \frac{d(\gamma v)}{dt}. \quad (2.7)$$

Il s'agit d'une équation différentielle du premier ordre simple à résoudre en utilisant la condition initiale $v(t=0) = 0$. La solution est donc

$$v(t) = \frac{\alpha t}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}. \quad (2.8)$$

En utilisant que $v(t) = \frac{dx}{dt}$, on trouve une autre équation différentielle du premier ordre par rapport au variable $x(t)$ avec $x(0) = \frac{1}{\alpha}$: ainsi

$$x(t) = \frac{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}}{\alpha}. \quad (2.9)$$

Soit

$$\tau = \int dt \sqrt{1 - v^2} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 + (\alpha t)^2}} = \frac{1}{\alpha} \arcsin(\alpha t). \quad (2.10)$$

Après certains réarrangements, on trouve le temps t varié avec le temps propre τ comme suit :

$$t(\tau) = \frac{1}{\alpha} \sinh(\alpha\tau), \quad (2.11)$$

Injectons. (2.11) dans (2.8), on trouve

$$x(\tau) = \frac{1}{\alpha} \cosh(\alpha\tau), \text{ avec } x(0) = \frac{1}{\alpha}, \quad (2.12)$$

À partir de la trajectoire $x(\tau)$ et $t(\tau)$ données par (2.10) et (2.11), on obtient l'équation suivante

$$x^2(\tau) - t^2(\tau) = \frac{1}{\alpha^2}. \quad (2.13)$$

C'est l'équation d'une hyperbole avec des asymptotes aux chemins nuls $x = -t$ dans le passé et $x = t$ dans le futur. L'observateur passe de l'infini nul passé à l'infini nul futur, au lieu de l'infini temporel qui serait atteint par les observateurs géodésiques.

2.2.1 Métrique de l'espace-temps de Rindler

Soit maintenant les nouvelles coordonnées (η, ξ) qui sont adaptées au mouvement uniformément accéléré. Elles sont définies dans l'espace de Minkowski à deux dimensions : ξ et η sont les coordonnées spatiales et temporelles respectivement [84]. Ces coordonnées sont données par les relations suivantes :

$$t = \frac{1}{a} \sinh(a\eta), \tag{2.14}$$

$$x = \frac{1}{a} \cosh(a\eta), x > |t|, \tag{2.15}$$

où a est une constante positive. Pour ξ fixe, on obtient l'équation hyperbolique suivante

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{a^2} e^{2a\xi}, \tag{2.16}$$

La figure. (2.1) montre le comportement des coordonnées η et ξ

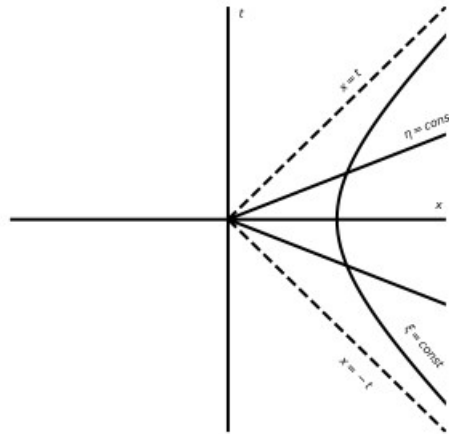


Fig. 2.1: Espace-temps de Rindler

L'espace de Rindler est l'espace où $x > |t|$: les frontières $x = t$ et $x = -t$ sont représentées par des lignes pointillées [83]. Cet espace se trouve entre les deux frontières. $x = t$ et $x = -t$, représenté par des lignes pointillées. Ce qui ressort de $\xi(\tau)$ et $\eta(\tau)$ est que le temps propre τ est proportionnel à la coordonnée η , tandis que la coordonnée spatiale ξ est indépendante de τ .

La métrique dans les nouvelles coordonnées peut être trouvée en utilisant les expressions suivantes :

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (2.17)$$

$$\sinh^2(x) = \frac{1}{2} [\coth(2x) - 1], \quad \cosh^2(x) = \frac{1}{2} [\sinh(2x) + 1]. \quad (2.18)$$

Ainsi, on a :

$$ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2), \quad (2.19)$$

qui est conformément équivalent à celle de l'espace de Minkowski. Cette métrique s'appelle la métrique de Rindler. Notons ici que ces coordonnées ne couvrent pas l'ensemble de l'espace-temps de Minkowski, mais seulement le coin

$$x > |t|. \quad (2.20)$$

C'est le quadrant illustré dans la figure. (2.2), et nous pouvons également le paramétrer par

$$u < 0, v > 0. \quad (2.21)$$

Les coordonnées du cône de lumière dans l'espace de Rindler sont

$$u_R = \eta - \xi, v_R = \eta + \xi. \quad (2.22)$$

Depuis

$$t - x = \frac{1}{a} e^{a\xi} (\sinh a\eta - \cosh a\eta) = -\frac{1}{a} e^{-a} (\eta - \xi), \quad (2.23)$$

$$t + x = \frac{1}{a} e^{a\xi} (\sinh a\eta + \cosh a\eta) = \frac{1}{a} e^a (\eta + \xi), \quad (2.24)$$

nous avons le changement de coordonnées

$$u = -\frac{1}{a} e^{-au_R}, v = \frac{1}{a} e^{av_R}, \quad (2.25)$$

Si nous comparons les deux équations (2.23) et (2.19) à (2.14), nous voyons que les lignes de constante ξ dans la métrique (2.19) décrivent un observateur uniformément accéléré avec une accélération

$$\alpha = ae^{-a\xi}, \quad (2.26)$$

pour ξ fixé et η proportionnel au temps propre de l'observateur.

Par conséquent, l'espace de Rindler peut être considéré comme la description de l'espace de Minkowski par une série d'observateurs uniformément accélérés. Près de l'horizon où $\xi \rightarrow -\infty$, on a $a \rightarrow \infty$ et les observateurs ressentent une accélération propre infinie.

On peut également couvrir le coin L de l'espace de Minkowski, défini par

$$x < |t|, \tag{2.27}$$

avec les coordonnées ξ, η maintenant liées à t, x par

$$t = -\frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\eta, \tag{2.28}$$

$$x = -\frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\eta. \tag{2.29}$$

Notons ici que les événements qui se produisent dans le coin L sont causalement déconnectés des lignes d'univers d'un observateur de Rindler. La ligne $u = 0$ se comporte comme un horizon des événements d'un trou noir [84].

Dans la figure. (2.2)

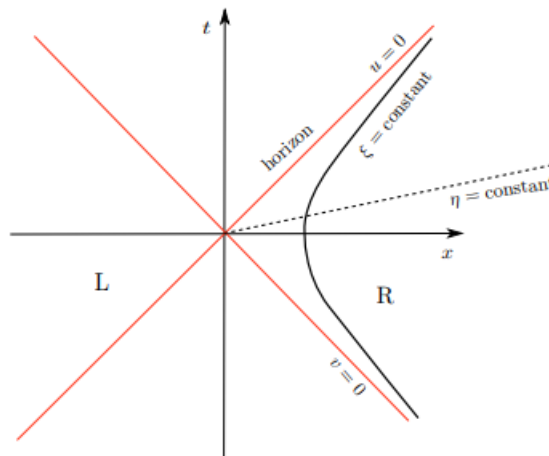


Fig. 2.2: Coordonnées de Rindler dans l'espace de Minkowski

les lignes R et L avec t constant sont des lignes droites passant par l'origine, tandis que les lignes avec $x = \text{const}$ sont des hyperboles représentant des observateurs uniformément accélérés avec des asymptotes nulles $u = 0, v = 0$.

Les coordonnées de Rindler sont non analytiques pour $u = 0$ et $v = 0$: les quatre régions R, L doivent être couvertes par des patches de coordonnées séparés. Ainsi, les droites de grand ξ positif, c'est-à-dire éloignées de $x = \tau = 0$, représentent des observateurs faiblement accélérés, tandis que les hyperboles qui s'approchent de $x = \tau = 0$ portent une forte accélération propre.

Il faut remarquer que toutes les hyperboles sont asymptotiquement nulles, c'est-à-dire se rapprochent des rayons nuls (appelons-les $u = 0, v = 0$) du cône de lumière de l'espace de Minkowski : les observateurs accélérés se rapprochent de la vitesse de la lumière lorsque $\eta \rightarrow \pm\infty$.

Les observateurs de Rindler s'approchent, mais ne croisent pas les rayons nuls $u = 0, v = 0$: ceux-ci agissent alors comme horizons des événements, et les deux régions MR et ML sont causalement disjointes. Aucun événement de la région de l'espace-temps de Minkowski au-delà des rayons nuls ne peut être observé par les observateurs de Rindler, et aucun ne peut influencer causalement leur. Ainsi, par exemple, le rayon nul supérieur agit comme un horizon futur, et les événements dans la partie marquée F ne peuvent pas influencer causalement la région R en forme de losange. De plus, on remarque qu'une hypersurface tridimensionnelle avec $t = \text{const}$ décrit des événements qui sont simultanées du point de vue des observateurs accélérés. Cette surface est un hyperplan de rapport constant τ/x . Tous ces hyperplans se croisent à $\tau = x = 0$, et il est donc évident que la distance appropriée entre les lignes du monde des observateurs de Rindler est indépendante du temps, et donc le cadre de Rindler est rigide. Enfin, on remarque que, pour que le repère soit rigide, deux trajectoires de la famille avec des valeurs de x différentes doivent avoir des accélérations différentes à un instant donné τ ; cela signifie que plus la valeur de x est grande, plus l'accélération est petite.

2.3 Quelques notions

2.3.1 Les trous noirs

Un trou noir est un objet céleste si compact que l'intensité de son champ gravitationnel empêche toute forme de matière ou de rayonnement de s'en échapper. De tels objets ne peuvent ni émettre, ni diffuser la lumière et sont donc noirs, ce qui en astronomie revient à dire qu'ils sont optiquement invisibles.

2.3.2 L'horizon

L'horizon d'un trou noir est la frontière d'un trou noir à partir de laquelle la vitesse de libération atteint celle de la lumière. Selon le type de trou noir concerné, la taille et la forme de l'horizon seraient variables.

A partir des équations :

$$t(\xi, \eta) = \frac{1}{a} \sinh(a\eta), \quad (2.30)$$

$$x(\xi, \eta) = \frac{1}{a} \cosh(a\eta), \quad (2.31)$$

dot les coordonnées (η, ξ) varient dans les intervalles $-\infty < \eta < +\infty$ et $-\frac{1}{a} < \xi < +\infty$. En particulier, pour $\xi < -\frac{1}{a}$ on trouverait $\partial t / \partial \eta < 0$, c'est-à-dire que la direction du temps t serait opposée à celle de η . On peut vérifier qu'un observateur accéléré ne peut pas mesurer des distances supérieures à $\frac{1}{a}$ dans le sens opposé à l'accélération, par exemple, les distances aux événements P et Q sur la figure. (2.3) [85].

A partir de la figure. (2.3)

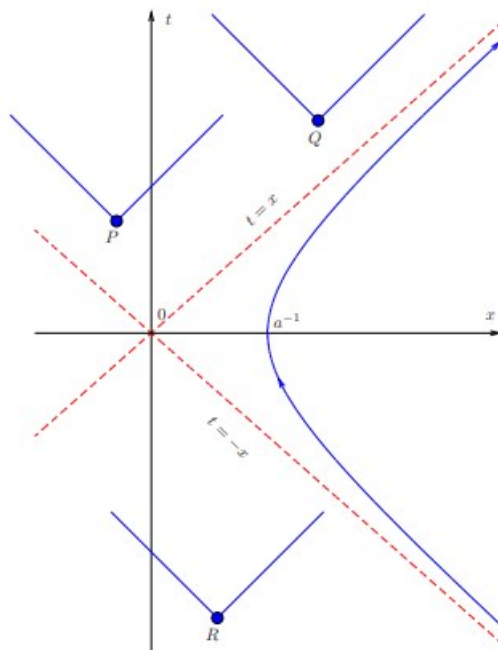


Fig. 2.3: La ligne d'univers d'un observateur uniformément accéléré (accélération propre $a \equiv |a|$) dans l'espace-temps de Minkowski.

, les lignes pointillées montrent le cône de lumière. L'observateur ne peut recevoir aucun signal des événements P et Q et ne peut pas envoyer de signaux à R . Une mesure de la distance à un point nécessite de placer une horloge à ce point et de synchroniser cette horloge avec l'horloge de l'observateur. Cependant, l'observateur ne peut pas synchroniser les horloges avec les événements P et Q car aucun signal ne peut jamais reçu de ces événements. On dit que l'observateur accéléré perçoit un horizon à la bonne distance $\frac{1}{a}$.

Le système de coordonnées (2.28) et (2.29) est incomplet et ne couvre qu'un « quart » de l'espace-temps de Minkowski, constitué du sous-domaine $x > |t|$ (voir figure 2.4) [85]. Les hyperboles solides de la figure. (2.4)

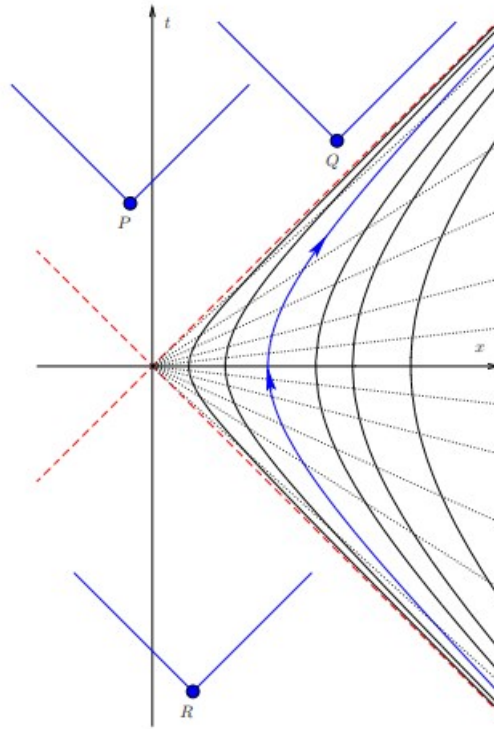


Fig. 2.4: Le système de coordonnées approprié d'un observateur uniformément accéléré dans l'espace-temps de Minkowski.

sont les lignes de constante distance propre ξ ; l'hyperbole avec des flèches est la ligne d'univers de l'observateur, $\xi = 0$ ou $x^2 - t^2 = a^{-2}$. Les lignes de constante η sont en pointillés. Les lignes pointillées montrent le cône de lumière qui correspond à $\xi = -\frac{1}{a}$. Les événements P, Q, R ne sont pas couverts par le système de coordonnées approprié. C'est le sous-domaine de l'espace-temps de Minkowski accessible à un observateur uniformément accéléré. Par exemple, les événements P, Q, R ne peuvent pas être décrits par des valeurs (réelles) de η et ξ . Le cône de lumière passé $x = -t$ correspond aux coordonnées propres $\eta = -\infty$ et $\xi = -\frac{1}{a}$. L'observateur peut voir des signaux de l'événement R , cependant, ces signaux semblent provenir non pas de R mais de l'horizon $\xi = -\frac{1}{a}$ dans le passé infini $\eta = -\infty$. Une autre façon de voir que la droite $\xi = -\frac{1}{a}$ est un horizon est de considérer une droite de longueur propre constante $\xi = \xi_0 > -a^{-1}$.

Aussi, il découle des Éqs. (2.28) et (2.29) que la droite $\xi = \xi_0$ est une trajectoire de la forme $x^2 - t^2 = \text{const}$ avec une accélération propre. Par conséquent, la ligne d'univers $\xi = -\frac{1}{a}$ devrait représenter une accélération propre infinie, ce qui nécessiterait une force infiniment grande et est donc impossible. Il s'ensuit qu'un observateur accéléré ne peut pas tenir un bâton de mesure rigide plus longtemps que $\frac{1}{a}$ dans la direction opposée à l'accélération.

2.3.3 Effet Unruh

L'effet Unruh est une prédiction cinématique de la théorie des champs quantiques qu'un observateur qui accélère uniformément observera un bain thermique, comme le rayonnement du corps noir, alors qu'un observateur inertiel n'observerait rien. Il porte le nom de William Unruh qui l'avait prédit en 1976. Le principe d'équivalence d'Einstein indique que les effets (locaux) d'un champ gravitationnel sont similaires aux effets d'une accélération uniforme. En d'autres termes, l'arrière-plan semble chaud à partir d'un cadre de référence accélérateur ; en termes simples, un thermomètre accélérateur détectera une température plus élevée qu'un thermomètre fixe. Aussi, l'effet Unruh est un rayonnement de corps noir qui apparaît pour un observateur accéléré du fait des lois de la théorie quantique des champs et de l'existence à ce moment-là d'un vide quantique. Il constitue un analogue cinématique au rayonnement des trous noirs, prédit par Stephen Hawking.

Les travaux suivants de Unruh ont montré que ces effets thermiques ne sont pas limités à l'espace-temps courbe. Il a découvert qu'un observateur uniformément accéléré dans l'espace de Minkowski perçoit le vide de Minkowski habituel comme un bain thermique à la température

$$T = \frac{a}{2\pi}, \quad (2.32)$$

où a est l'accélération propre de l'observateur. Cet effet est largement connu sous le nom d'effet Unruh. Il est l'un des phénomènes les plus intrigants se produisant dans le champ quantique théorie dans l'espace de Minkowski : On peut le voir comme suit (i) une prédiction selon laquelle une personne se déplaçant dans l'espace-temps de Minkowski avec une accélération linéaire constante éprouve l'espace-temps comme un bain thermique avec la température d'Unruh. (ii) un observateur accéléré dans l'espace vide de Minkowski détectera un bain de particules à la température où a est l'accélération (constante) de l'observateur [86–88]. Ce rayonnement d'accélération, qui résulte de processus dans lesquels l'atome saute de l'état fondamental à un état excité [89], peut laisser des empreintes dans une variété de contextes phénoménologiques [88, 90].

Lorsqu'on applique le théorème à des situations physiques, on est souvent amené à considérer une famille d'observateurs de Rindler au repos les uns par rapport aux autres. Le terme « au repos » fait bien entendu référence au référentiel propre des observateurs, à savoir le référentiel défini par les coordonnées de Rindler. Chaque membre de la famille suit une ligne d'univers avec la valeur de la coordonnée de Rindler ξ maintenue constante, qui est différente de celles des autres. L'observateur en ξ considérera le vide de Minkowski comme un bain thermique de température. Supposons que notre espace-temps soit l'espace de Minkowski, à l'état de vide. Un observateur sur une ligne d'univers de x fixe n'observera aucune excitation. Ainsi, si l'observateur porte un thermomètre, le thermomètre indiquera $T = 0$ pour toujours. Plus généralement, si l'observateur transporte un appareil avec des

niveaux d'énergies internes qui peuvent être excités en interagissant avec n'importe quel champ de matière existant dans la théorie (un détecteur Unruh), alors cet appareil restera à jamais dans son état fondamental. Cependant, considérons maintenant un observateur à accélération uniforme avec une accélération a . Nous montrerons que dans le même état quantique – le vide de Minkowski – cet observateur ressent un bain de chaleur à la température $T = \frac{a}{2\pi}$.

2.3.4 Les radiations de Hawking

La relativité générale classique décrit les trous noirs comme des objets massifs avec un champ gravitationnel si fort que même la lumière ne peut pas s'échapper de leur surface (l'horizon du trou noir) [85]. Cependant, la théorie quantique prédit que les trous noirs émettent des particules s'éloignant de l'horizon. Les particules sont produites à partir des fluctuations du vide des champs quantiques présents autour du trou noir. En effet, un trou noir n'est pas complètement noir mais émet une faible lumière comme s'il s'agissait d'un objet de température basse mais non nulle. La prédiction théorique du rayonnement par les trous noirs a été une surprise totale.

On pensait que les particules ne pouvaient être produites que par des champs gravitationnels dépendant du temps. Le premier calcul rigoureux du taux de création de particules par un trou noir en rotation a été effectué en 1974 par S. Hawking. Une image intuitive du rayonnement de Hawking implique une paire virtuelle particule-antiparticule à l'horizon du trou noir. Il peut arriver que la première particule de la paire soit à l'intérieur de l'horizon du trou noir alors que la seconde particule est à l'extérieur. La première particule virtuelle tombe toujours au centre du trou noir, mais la deuxième particule a une probabilité non nulle de s'éloigner de l'horizon et de devenir une véritable particule rayonnée. La masse du trou noir est diminuée dans le processus de rayonnement car l'énergie de la particule virtuelle entrante par rapport aux observateurs lointains est formellement négative.

Le rayonnement de Hawking est un rayonnement que doit émettre tout trou noir du fait des lois de la mécanique quantique et qui provoque son évaporation par perte de masse, de moment cinétique si le trou noir était en rotation et de charge électrique, s'il était chargé. Il décrit les particules hypothétiques formées par la frontière d'un trou noir. Ce rayonnement implique que les trous noirs ont des températures qui sont inversement proportionnelles à leur masse. Autrement dit, plus un trou noir est petit, plus il doit briller chaudement.

CHAPITRE 3

L'OSCILLATEUR DE KLEIN-GORDON DANS UN ESPACE-TEMPS DE RINDLER

3.1 L'équation de Klein-Gordon libre

La métrique de l'espace-temps de Rindler, dans les coordonnées (η, ξ) , est donnée par [56, 91, 92] :

$$ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2), \quad (3.1)$$

dont a est l'accélération et la courbure est partout nulle. Elle diffère uniquement de l'espace-temps de Minkowski par le facteur $e^{2a\xi}$ [92]. La relation existante entre les coordonnées du laboratoire et les coordonnées conformes est [62]:

$$t(\eta, \xi) = \frac{e^{a\xi}}{a} \sinh a\eta, \quad (3.2)$$

$$x(\eta, \xi) = \frac{e^{a\xi}}{a} \cosh a\eta, \quad (3.3)$$

ou $-\infty < \eta < +\infty$, et $-\infty < \xi < +\infty$.

L'équation générale de Klein-Gordon en présence d'un champ gravitationnel est définie par [79–81, 93] :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + (m^2 + \sigma R) \phi = 0. \quad (3.4)$$

Dans notre cas, le scalaire de Ricci $R = 0$, σ la constante de couplage en enfin $\sqrt{-g} = e^{2a\xi}$.

A partir de (3.1), la forme détaillée de l'équation libre de Klein-Gordon dans les coordonnées

(η, ξ) est :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 e^{2a\xi} \right) \phi(\eta, \xi) = 0. \quad (3.5)$$

Afin de résoudre cette équation, on suppose l'ansatz suivant :

$$\phi(\eta, \xi) = e^{-iE\eta} \phi(\xi). \quad (3.6)$$

L'insertion de l'équation (3.5) dans (3.6) conduit à l'équation différentielle suivante :

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 e^{2a\xi} \right) \phi(\xi) = E^2 \phi(\xi), \quad (3.7)$$

dont la condition aux limites sont :

$$\phi(0) = \phi(\infty) = 0. \quad (3.8)$$

L'équation (3.7) peut être reformuler comme suit

$$(p_\xi^2 + m^2 e^{2a\xi} - E^2) \phi(\xi) = 0. \quad (3.9)$$

En introduisant la nouvelle variable

$$z = \frac{m}{a} e^{a\xi}, \quad (3.10)$$

(3.7) devient

$$\left\{ z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} - (z^2 - \nu^2) \right\} \phi(z) = 0, \text{ ou } \nu = i \frac{E}{a}. \quad (3.11)$$

L'équation (3.11) est une forme modifiée de l'équation de Bessel avec un indice complexe ν . Elle a deux solutions linéairement indépendantes qui sont les fonctions Bessel modifiées de première et de deuxième espèce, $I_\nu(z)$ et $K_\nu(z)$. Donc, la solution générale de 3.11 est [94,95] :

$$\phi(z) = aI_\nu(z) + bK_\nu(z), \quad (3.12)$$

dont les conditions aux limites sont :

$$\phi(z \rightarrow +\infty) = \phi\left(z = \frac{m}{a}\right) = 0, \quad (3.13)$$

Deux remarques peuvent être faites à ce stade : (i) la limite à l'infini impose de mettre le coefficient de I_ν égale à zéro, puisque cette fonction diverge dans cette limite. Rappelons ici que la fonction K_ν est par définition, la solution à décroissance exponentielle, tandis que I_ν croît d'une façon exponentielle.

(ii) La condition en $\xi = 0$ exige simplement que $K_\nu\left(\frac{m}{a}\right) = 0$.

En termes d'énergies, on obtient

$$K_{i\frac{E}{a}}\left(\frac{m}{a}\right) = 0, \quad (3.14)$$

C'est la condition de quantification pour le problème considéré. Dans ce cas, $K_\nu(z)$ est réel pour z réel et ν purement imaginaire : comme pour tous les zéros de Bessel, il n'y a aucune possibilité qu'ils aient une formule exacte pour le spectre d'énergie.

Concernant la fonction d'onde, on a :

$$\phi_\nu(\xi) = \left(\frac{2\nu \sinh \pi\nu}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} K_{i\nu}(me^{a\xi}). \quad (3.15)$$

Ces fonctions d'ondes obéissent à la relation de normalisation suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\mu(\xi) \phi_\nu(\xi) d\xi = \delta(\mu - \nu). \quad (3.16)$$

Enfin, la fonction d'onde propre de l'équation Klein-Gordon est :

$$\phi_\nu(\eta, \xi) = e^{-iE\eta} \left(\frac{2\nu \sinh \pi\nu}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} K_{i\nu}(me^{a\xi}). \quad (3.17)$$

Passons maintenant à l'approximation de petites valeurs d'accélération a . Ainsi, la variable $z = \frac{m}{a}e^{a\xi}$ peut être développée, au premier ordre, comme suit :

$$z = \frac{m}{a} (1 + a\xi + \dots). \quad (3.18)$$

En substituant (3.18) dans (3.7), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2am^2 + \zeta \right\} \phi(\xi) = 0, \quad (3.19)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\phi(0) = 0, \phi(\infty) \rightarrow 0. \quad (3.20)$$

Dans ce cas, (3.19) prend la forme suivante :

$$\phi''(\xi) - (\alpha\xi - \zeta) \phi(\xi) = 0. \quad (3.21)$$

Soit les changements de variables suivants :

$$\alpha = 2am^2 - \frac{1}{l^3}, \quad (3.22)$$

$$\zeta \equiv E^2 - m^2 = \frac{\lambda}{l^2}, \quad (3.23)$$

$$\varrho = \frac{\xi}{l} - \lambda, \quad (3.24)$$

Ici, $l = \frac{1}{(2am^2)^{\frac{1}{3}}}$ est une longueur caractéristique.

L'équation (3.19) décrit le mouvement d'une particule dans des champs gravitationnels homogènes confinés sur la surface d'un potentiel de type exponentiel $e^{2a\xi}$. Ce dernier est supposé réfléchir élastiquement (problème de la chute libre d'un corps dans un champ gravitationnel [91]).

alors, l'équation (3.19) se transforma en :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \varrho^2} - \varrho \phi = 0, \quad (3.25)$$

dont les conditions aux limites deviennent (3.18) :

$$\phi(-\lambda) = 0, \phi(\infty) \rightarrow 0. \quad (3.26)$$

L'intervalle de mouvement classiquement autorisé se situe entre les deux points d'inflexion à $\zeta = -\lambda$ et $\zeta = 0$, c'est-à-dire entièrement aux valeurs négatives de la fonction ζ . Généralement, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de Bessel d'ordre $\frac{1}{3}$. La fonction Airy est la solution qui satisfait la condition aux limites $\phi(\infty) = 0$ [96-100].

Ainsi

$$\phi(\xi) = N_{\text{norm}} \text{Ai}(\varrho). \quad (3.27)$$

Dans cette étape, deux cas sont à considérer [91].

- Pour les valeurs positives de ζ , la fonction Airy est exprimée par :

$$\text{Ai}(\varrho) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\varrho}{3}} K_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \varrho^{\frac{3}{2}} \right), \text{ pour } \zeta > 0 \quad (3.28)$$

où la fonction $K_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \varrho^{\frac{3}{2}} \right)$ est la fonction de Hankel modifiée [96-100].

- Pour les valeurs négatives, la fonction Airy est représentée par des fonctions de Bessel comme suit :

$$\text{Ai}(-\varrho) = \frac{1}{3} \sqrt{\varrho} \left\{ J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \varrho^{\frac{3}{2}} \right) + J_{\frac{-1}{3}} \left(\frac{2}{3} \varrho^{\frac{3}{2}} \right) \right\}. \quad (3.29)$$

Dans ce cas, la solution de l'équation (3.25) prend la forme suivante :

$$\phi(\varrho) = \frac{N_{\text{norm}}}{3} \sqrt{\varrho} \left\{ J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \varrho^{\frac{3}{2}} \right) + J_{\frac{-1}{3}} \left(\frac{2}{3} \varrho^{\frac{3}{2}} \right) \right\}, \text{ pour } \zeta > 0. \quad (3.30)$$

Selon la condition aux limites, cette fonction doit s'annuler en $\varrho = -\lambda$. Alors, les valeurs propres

Table 3.1: Quelques valeurs d'énergie avec l'état $A_i(\lambda) = 0$; ici $m = 1$

n	λ_n	E_n	n	λ_n	E_n
1	2.338107410	± 1.01838850	1	2.338107410	± 1.03788376
2	4.087949444	± 1.03193612	2	4.087949444	± 1.06535493
3	5.520559828	± 1.04289665	3	5.520559828	± 1.08732924
4	6.786708090	± 1.05248863	4	6.786708090	± 1.10638701
5	7.944133589	± 1.06118104	5	7.944133589	± 1.12352543
6	9.022650854	± 1.06921730	6	9.022650854	± 1.13926351
7	10.04017434	± 1.07674428	7	10.04017434	± 1.15391512
8	11.00852430	± 1.08385841	8	11.00852430	± 1.16768688
9	11.93601556	± 1.09062926	9	11.93601556	± 1.18072776
10	12.82877675	± 1.09710734	10	12.82877675	± 1.19314611

(a) $a = 0,001$

(b) $a = 0.003$

n	λ_n	E_n	n	λ_n	E_n
1	2.338107410	± 1.06574659	1	2.338107410	± 1.07730593
2	4.087949444	± 1.11241191	2	4.087949444	± 1.13171201
3	5.520559828	± 1.14920734	3	5.520559828	± 1.17437976
4	6.786708090	± 1.18077324	4	6.786708090	± 1.21083881
5	7.944133589	± 1.20890756	5	7.944133589	± 1.24323189
6	9.022650854	± 1.23454704	6	9.022650854	± 1.27267488
7	10.04017434	± 1.25825820	7	10.04017434	± 1.29984214
8	11.00852430	± 1.28041406	8	11.00852430	± 1.32517742
9	11.93601556	± 1.30128270	9	11.93601556	± 1.34899909
10	12.82877675	± 1.32105924	10	12.82877675	± 1.37153877

(c) $a = 0.007$

(d) $a = 0.009$

suivent la condition [100, 101]:

$$Ai(-\lambda) = 0. \tag{3.31}$$

Les dix premiers zéros sont donnés dans le tableau. (3.1). Les niveaux d'énergie correspondantes sont tracés sur la figure. (3.1)

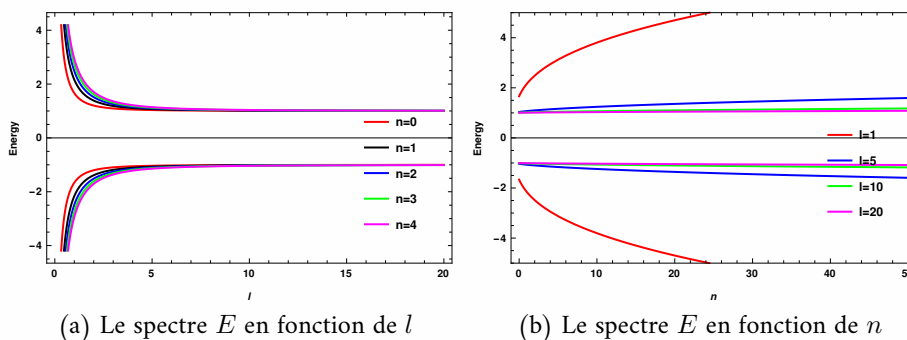


Fig. 3.1: Le spectre de l'énergie E en fonction du nombre quantique n

. Cette figure nous permet de remarquer ce qui suit [102] :

- Les spectres numériques d'énergie sont déterminés à partir des zéros de la fonction d'Airy (l'équation. (3.29)).
- Ces énergies, liées à l'équation 1D de Klein-Gordon libre dans l'espace de Rindler, sont discrètes et dépendent de l'accélération du référentiel a . C'est une caractéristique intéressante du système car l'effet non inertiel ressemble à un potentiel externe dans l'équation de Klein-Gordon [92].
- Nous pouvons constater que l'ensemble discret des énergies est symétrique par rapport à $E_n = 0$, cela signifie que les particules et les antiparticules ont la même énergie.
- Enfin, quand l'accélération a devient très petite, les courbes du spectre se confondent.

Maintenant, pour les niveaux supérieurs, $\lambda \gg 1$, en utilisant les formes asymptotiques suivantes

$$J_{\frac{1}{3}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right), \quad (3.32)$$

$$J_{-\frac{1}{3}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right), \quad (3.33)$$

alors

$$\phi(\xi) = \frac{N_{norm}}{3} \sqrt{\xi} \cos\left(\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.34)$$

Ainsi, pour les valeurs grandes de ζ , on trouve

$$\frac{2}{3}\lambda_{\frac{3}{2}}^n = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}, \quad (3.35)$$

où :

$$\lambda_n = \left\{ \frac{3\pi}{4} \left(2n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{\frac{2}{3}}, \quad (3.36)$$

Dans le même contexte, en utilisant (3.21), la forme du spectre d'énergie est :

$$E^2 = m^2 + \frac{1}{l^2} \left\{ \frac{3\pi}{4} \left(2n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{\frac{2}{3}}, \quad (3.37)$$

ou

$$E = \pm m \sqrt{1 + \frac{1}{l^2} \left\{ \frac{3\pi}{4} \left(2n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{\frac{2}{3}}}. \text{ pour } n \gg 1 \quad (3.38)$$

Dans la figure. (3.2)

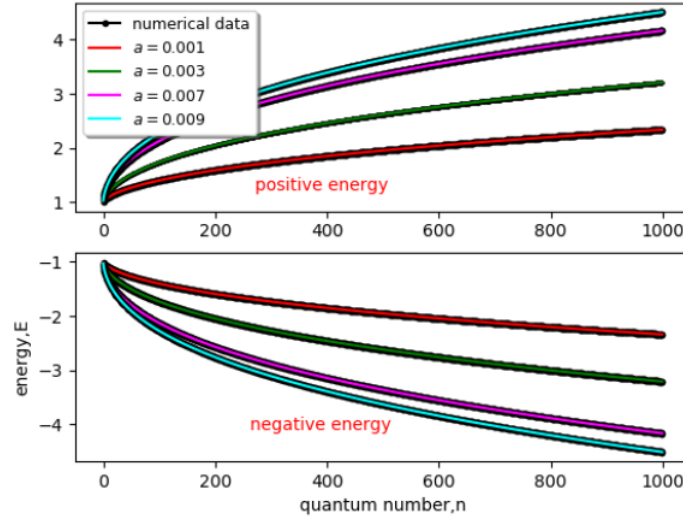


Fig. 3.2: Valeurs exactes et numériques du spectre d'énergie E par rapport au nombre quantique n .

, nous avons comparé les deux formes théoriques du spectre énergétique avec la forme numérique (les zéros de la fonction Airy) : en observant cette figure, on voit que la forme théorique du spectre énergétique correspond bien aux valeurs numériques même dans la région du petit nombre quantique n . Donc, nous pouvons prendre l'équation. (3.36) comme une bonne approximation du spectre énergétique dans toutes les régions numériques quantiques n . Cette forme a servi à calculer les propriétés thermiques de l'équation libre de Klein-Gordon dans l'espace-temps de Rindler et à analyser l'effet de l'accélération sur ces grandeurs thermiques.

3.1.1 Les propriétés thermiques

Partons de la forme suivante du spectre d'énergie de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps de Rindler

$$E = \pm m \sqrt{1 + \frac{1}{l^2} \left\{ \frac{3\pi}{4} \left(2n + \frac{1}{2} \right) \right\}^{\frac{2}{3}}}, \quad (3.39)$$

La fonction de partition est donnée par

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(E_n - E_0)}. \quad (3.40)$$

Dans notre cas, elle devient

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \left(\sqrt{1 + \frac{1}{l^2} \left\{ \frac{3\pi}{4} (2n + \frac{1}{2}) \right\}^{\frac{2}{3}}} - \sqrt{1 + \frac{1}{l^2} \left\{ \frac{3\pi}{4} \left(\frac{1}{2} \right) \right\}^{\frac{2}{3}}} \right)}, \quad (3.41)$$

ou $\beta = \frac{1}{k_B T}$ avec k_B est la constante de Boltzmann, E_0 l'énergie correspondant de l'état fondamental $n = 0$ et T la température absolue.

Pour calculer la fonction de partition, nous employons la formule d'Euler Maclaurin suivante [26, 96, 97] :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(n) dn - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} f^{(2p-1)}(0) - \int_0^{\infty} \frac{B_n(1-2p)}{2p!} f^{(2p)} dn. \quad (3.42)$$

En se limitant à l'ordre $p = 2$, la fonction de partition Z prend la forme suivante :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(E_n-E_0)} = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(n) dn - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} f^{(2p-1)}(0), \quad (3.43)$$

ou

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(E_n-E_0)} = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} e^{-\beta(E_n-E_0)} dn - \left(\frac{B_2}{2!} f^{(1)}(0) + \frac{B_4}{4!} f^{(3)}(0) \right), \quad (3.44)$$

dont B_{2p} sont les nombres de Bernoulli et $f^{(2p-1)}$ la dérivée d'ordre $(2p - 1)$. Jusqu'à $p = 2$, avec $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, et $f(n) = e^{-\beta(E_n-E_0)}$, la fonction de partition numérique Z peut être écrite par

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{(\pi a)^{\frac{2}{3}} \beta}{6\sqrt[3]{6} \sqrt{\frac{(3\pi a)^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{2}} + 1}} - \frac{1}{720} \left(\frac{8\sqrt[3]{2} (a\pi)^{\frac{4}{3}} \beta^2}{\left(\frac{(3\pi a)^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{2}} + 1\right) 3^{\frac{2}{3}}} + \frac{64 (2a\pi)^{\frac{2}{3}} \beta}{9\sqrt[3]{3} \sqrt{\frac{(3\pi a)^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{2}} + 1}} + \frac{8\sqrt[3]{2} (a\pi)^{\frac{4}{3}} \beta}{\left(\frac{(3\pi a)^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{2}} + 1\right)^{\frac{3}{2}} 3^{\frac{2}{3}}} \right) - \frac{4\pi^2 a^2}{720} \left(\frac{\beta^3}{3 \left(\frac{(3\pi a)^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{2}} + 1\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\beta^2}{\left(\frac{(3\pi a)^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{2}} + 1\right)^2} + \frac{\beta}{\left(\frac{(3\pi a)^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt[3]{2}} + 1\right)^{\frac{5}{2}}} \right) + \int_0^{\infty} e^{-\beta(E_n-E_0)} dn, \quad (3.45)$$

L'intégrale qui apparaît dans le dernier terme est calculée numériquement. En mécanique statistique, le facteur de Boltzmann $e^{-\beta E}$ est un outil fondamental utilisé pour déterminer des grandeurs thermodynamiques comme la fonction de partition $Z(\beta)$, l'énergie libre $F(\beta)$, l'énergie totale $U(\beta)$, entropie $S(\beta)$ et enfin la chaleur spécifique $C_v(\beta)$ [35]. Ces quantités sont définies de la façon suivante :

$$F = -\frac{\ln Z}{\beta}, U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad (3.46)$$

$$S = \ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, C_V = \beta^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}. \quad (3.47)$$

Selon l'équation (3.45), toutes les propriétés thermiques décrites par les équations. (3.46) et (3.47) s'en déduisent facilement.

Dans ce qui suit, nous consacrerons notre étude aux propriétés thermiques de l'équation libre de Klein-Gordon à 1D ainsi que l'influence de l'accélération sur ces quantités. Tout d'abord, nous devons rappeler que les deux graphiques de la figure. 3.3

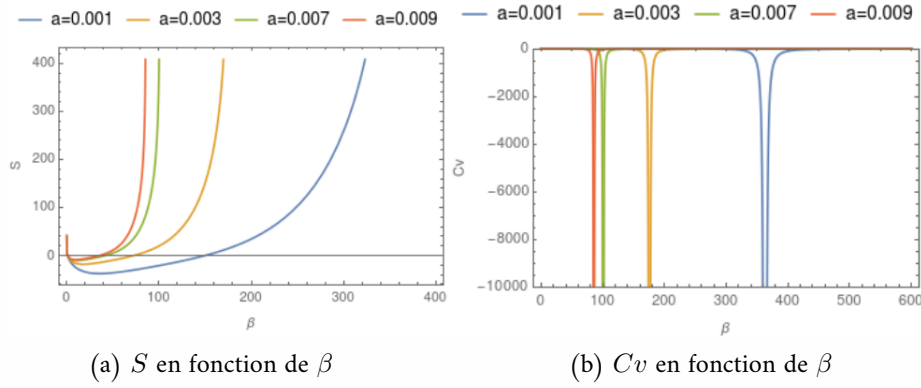


Fig. 3.3: Propriétés thermiques d'une particule libre de spin-0 dans un espace-temps de Rindler

sont créés en utilisant les deux équations 3.46 et 3.47 où $\beta = \frac{1}{k_B T}$.

Nous allons maintenant analyser nos résultats numériques sur les deux fonctions S et C_v . A partir de cette figure, nous pouvons faire les observations suivantes : (i) L'effet de l'accélération du référentiel a est évident sur ces figures. (ii) Les courbes de la chaleur spécifique sont toutes négatives et divergentes. Pour savoir si ces divergences dans les courbes de la chaleur spécifique peuvent être un indicateur de l'existence d'une phase de transition, nous utilisons les courbes de la fonction d'entropie. En effet, la chaleur spécifique en fonction de l'entropie est :

$$C_v = T \frac{\partial S}{\partial T} = -\beta \frac{\partial S}{\partial \beta}. \quad (3.48)$$

La chaleur spécifique mesure la variation d'une grandeur extensive (comme l'entropie) en fonction d'une grandeur intensive (comme la température). Comme β est toujours positif, le signe de la chaleur spécifique dépend de la variation d'entropie par rapport à la variation de l'inverse de la température β . Sur cette figure, on observe que les courbes d'entropie s'écartent autour d'une valeur critique β_c . Les points singuliers sur les courbes d'entropie entraînent, selon l'équation (3.48), des anomalies sur les courbes de chaleur spécifique aussi. De plus, ces courbes indiquent l'existence de deux niveaux distincts de part et d'autre d'une valeur fixe β_c , c'est-à-dire l'existence de deux phases différentes. Ces divergences sont le signe d'une transition de phase du premier ordre.

Nous allons maintenant examiner les résultats concernant l'existence d'une chaleur spécifique négative :

- On sait que la trajectoire d'un observateur qui accélère dans l'espace-temps de Minkowski (c'est-à-dire un observateur non inertiel dans l'espace-temps de Rindler) sera exprimée en fonction

du temps propre. En fait, l'espace-temps de Rindler n'est qu'une partie de l'espace-temps de Minkowski décrit dans un système de coordonnées différent (accélééré) [88, 89].

- La mécanique statistique avec des interactions gravitationnelles a plusieurs propriétés spécifiques : parmi elles, il y a l'existence d'une chaleur spécifique négative [103–105].

Ainsi, nous avons démontré que l'effet non inertiel du référentiel accéléré est reproduit par un potentiel externe dans l'équation libre de Klein-Gordon et, en plus, permet la création des états liés. Cela implique que l'équation du mouvement obtenue, pour des valeurs faibles de l'accélération a , correspond au mouvement d'une particule dans des champs gravitationnels uniformes. Ces champs gravitationnels peuvent être vus comme la cause de l'existence d'une chaleur spécifique négative pour les particules bosoniques.

Nous allons maintenant étudier le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D dans un espace-temps de Rindler.

3.2 L'oscillateur de Klein-Gordon à 1D

La forme détaillée de l'équation libre de Klein-Gordon dans les coordonnées (η, ξ) est [27, 54]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 e^{2a\xi} \right) \varphi(\eta, \xi) = 0. \quad (3.49)$$

Pour résoudre cette équation, on pose que

$$\varphi(\eta, \xi) = e^{-iE\eta} \varphi(\xi). \quad (3.50)$$

Sous les conditions aux limites suivantes

$$\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0, \quad (3.51)$$

l'équation (3.49) devient

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 e^{2a\xi} \right) \varphi(\xi) = E^2 \varphi(\xi), \quad (3.52)$$

ou

$$(p_\xi^2 + m^2 e^{2a\xi} - E^2) \varphi(\xi) = 0, \quad (3.53)$$

En présence de l'oscillateur de Dirac, p_ξ devient $p_\xi - im\omega\xi$ et l'équation (1.57) se transforme à [34] :

$$((p_\xi - im\omega\xi)(p_\xi + im\omega\xi) + m^2 e^{2a\xi} - E^2) \varphi(\xi) = 0. \quad (3.54)$$

Après un calcul algébrique, nous obtenons

$$\{p_\xi^2 + m^2\omega^2\xi^2 + im\omega [\xi, p_\xi] + m^2e^{2a\xi} - E^2\} \varphi(\xi) = 0, \text{ avec } [\xi, p_\xi] = i. \quad (3.55)$$

Ainsi (3.55) se transforme à

$$\{p_\xi^2 + m^2\omega^2\xi^2 - m\omega + m^2e^{2a\xi} - E^2\} \varphi(\xi) = 0. \quad (3.56)$$

Quand l'accélération a est très petite, (3.56) se simplifie comme suit :

$$\{p_\xi^2 + m^2\omega^2\xi^2 - m\omega + 2am^2 - (E^2 - m^2)\} \varphi(\xi) = 0. \quad (3.57)$$

La forme finale de l'équation (3.57) est donné par

$$\left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2y^2\right) \varphi(y) = \bar{E}\varphi(y), \quad (3.58)$$

dont

$$y = \xi + \frac{a}{\omega^2}, \quad (3.59)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\omega - \frac{m}{2} + \frac{E^2}{2m} + \frac{a^2m}{2\omega^2}. \quad (3.60)$$

L'équation (3.60) est une équation standard d'un oscillateur harmonique unidimensionnel. Par un calcul direct, la forme du spectre d'énergie est :

$$E_{n,a} = \pm m\sqrt{\frac{2n\omega}{m} + 1 - k^2}, \text{ avec } k = \frac{a^2}{\omega^2}. \quad (3.61)$$

Dans la limite où $a = 0$, nous récupérons le spectre d'énergie bien connu de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D dans un espace plat [15]. La Figure.3.4 illustre le spectre d'énergie en fonction du nombre quantique n pour différentes valeurs de a . L'effet des valeurs faibles du paramètre a sur le spectre énergétique est bien visible : Cet effet n'est important que pour les niveaux très bas.

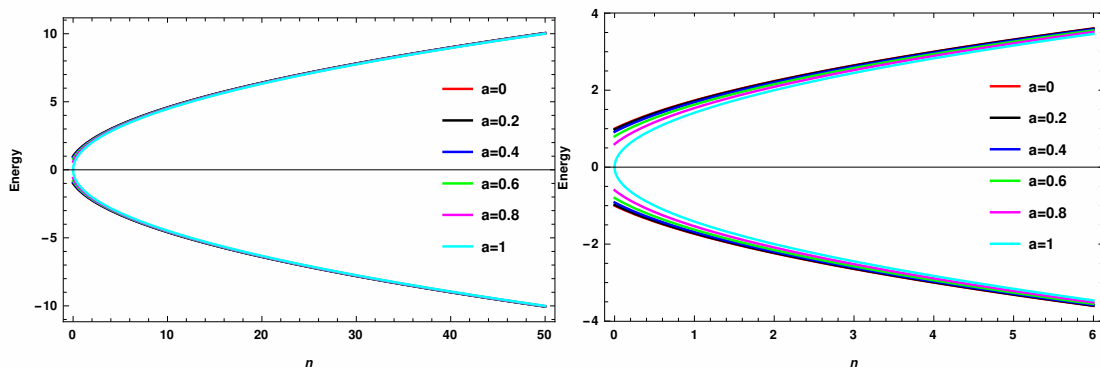


Fig. 3.4: Énergie E_n en fonction de n

3.2.1 Propriétés thermiques

La fonction de partition est définie par :

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\sqrt{2r}\beta m \sqrt{\frac{B}{2r} + n}}, \quad (3.62)$$

dont $B = 1 - k^2$, avec $k = \frac{a}{\omega}$ et $r = \frac{\omega}{m}$ est le paramètre qui contrôle la limite non relativiste. Avec les substitutions suivantes :

$$\gamma = \sqrt{2r}, \alpha = \frac{B}{2r}, \tau = \frac{1}{\beta m}, \quad (3.63)$$

l'équation (3.62) peut être réécrit comme suit :

$$Z = \sum_n e^{-\frac{\gamma}{\tau} \sqrt{\alpha + n}}. \quad (3.64)$$

Ici $\tau = \frac{1}{\beta m}$ désigne la température réduite [26]. Pour calculer la fonction de partition ci-dessus, nous utilisons la formule de la transformation de Mellin [68, 69, 106–109]. D'après cette formule, la fonction exponentielle se présente comme une intégrale :

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds x^{-s} \Gamma(s), \quad (3.65)$$

où $c \geq 0$ est réel. La somme qui figure dans (3.65) est convertie en intégrale de cette façon : est convertie en intégrale de cette façon :

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-\frac{\gamma}{\tau} \sqrt{\alpha + n}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^{-s} \sum_n (\alpha + n)^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s), \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^{-s} \zeta_H\left(\frac{s}{2}, 1 + \alpha\right) \Gamma(s), \end{aligned} \quad (3.66)$$

où $x = \frac{\gamma}{\tau} \sqrt{\alpha + n}$, $\Gamma(s)$ et $\zeta_H\left(\frac{s}{2}, \alpha\right)$ sont respectivement les fonctions de gamma et zêta de Hurwitz [96, 97, 99, 108, 110].

Comme on le sait, la fonction Gamma a des pôles simples aux entiers négatifs ou nuls pour tout $s = -n, n \in \mathbb{N}$. Leurs résidus aux pôles négatifs sont [98, 109, 111]

$$Re \{ \Gamma, -n \} = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (3.67)$$

Par ailleurs, la fonction zêta de Hurwitz $\zeta_H(s', \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{s'}}$, [68, 69, 106]. C'est une série qui converge seulement si $R(s') > 1$ et $R(\alpha) > 0$. Elle peut être prolongée par une continuation analytique à une fonction méromorphe définie pour tout nombre complexe s' avec $s' \neq 1$. En $s' = 1$, elle a un pôle simple de résidu égal à 1. De plus, la condition sur la convergence de la série est $s' = s/2 \geq 1$ implique $c \geq 2$. Finalement, l'intégration dans (3.66) ne peut être fermée que dans les parties négatives

du plan complexe où les pôles $s = 0, 2, \mathbb{Z}^-$.

Ainsi, en utilisant le théorème des résidus sur (3.66) pour un contour défini par la figure. 3.5

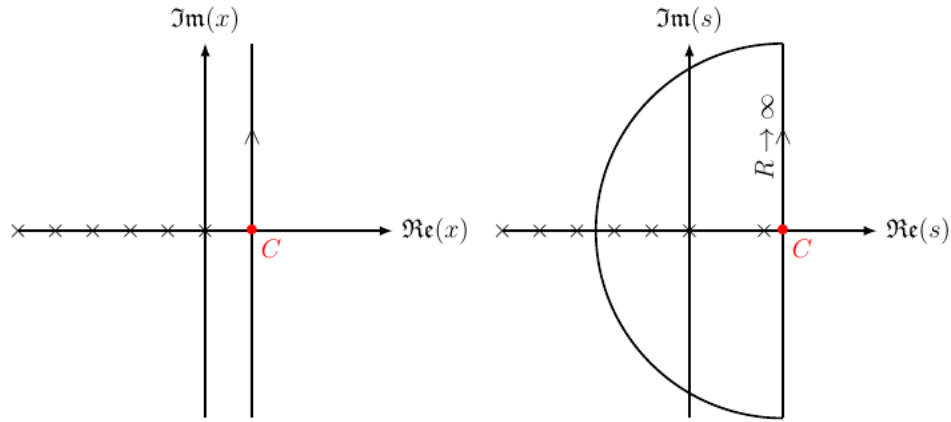


Fig. 3.5: (gauche) contour de Γ et $\xi_H(n, s)$ fonctions. (droite) Contour de la transformation Mellin de notre problèmes.

[75], on obtient

$$\sum_n e^{-\frac{\gamma}{\tau} \sqrt{\alpha+n}} = \frac{\tau^2}{\gamma^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2r} + \frac{k^2}{2r} + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_H \left(\frac{-n}{2}, 1 + \frac{1-k^2}{2r} \right) \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\gamma}{\tau} \right)^n. \quad (3.68)$$

Rappelons ici que les valeurs de la fonction zêta de Hurwitz pour les entiers négatifs sont connues et sont reliées aux polynômes de Bernoulli $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la formule suivante [106]

$$\zeta_H(-n, \alpha) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}. \quad (3.69)$$

Ici

$$\zeta_H(0, \alpha) = \frac{1}{2} - \alpha. \quad (3.70)$$

Finalement, la fonction de partition Z est exprimée en fonction de la fonction zêta de Hurwitz en utilisant le théorème des résidus pour les pôles $s = 0, 2, \mathbb{Z}^-$ par [106]

$$Z(\tau, a) = \frac{\tau^2}{\gamma^2} + \frac{a^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_H \left(\frac{-n}{2}, 1 + \frac{1-a^2}{2} \right) \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\gamma}{\tau} \right)^n. \quad (3.71)$$

Pour chercher la simplicité, nous avons posé $r = 1$ et $\omega = m = 1$.

3.2.2 Résultats et discussion

Les grandeurs thermiques les plus importantes telles que l'énergie libre F , l'énergie moyenne U , l'entropie S et la chaleur spécifique C_v sont obtenues à l'aide des expressions suivantes [15, 35, 112] :

$$F = -\tau \ln Z, U = \tau^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial \tau}, \quad (3.72)$$

$$S = \ln Z + \tau \frac{\partial \ln Z}{\partial \tau}, C_v = 2\tau \frac{\partial \ln Z}{\partial \tau} + \tau^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \tau^2}. \quad (3.73)$$

Toutes les quantités sont rapportées en fonction de la température réduite τ . Le comportement de toutes les grandeurs thermodynamiques pour les particules de spin-0 est illustré dans la figure. 3.6 .

Cette figure présente toutes les propriétés thermiques de l'oscillateur de Klein-Gordon unidimensionnel pour différentes valeurs de l'accélération a . Nous pouvons vérifier que le paramètre a a un impact significatif sur ses propriétés, et que son effet sur ses propriétés thermodynamiques est très important. En particulier, on peut remarquer ce qui suit :

- les courbes de la chaleur spécifique, pour différentes valeurs de a , se rapprochent de la limite asymptotique en $2k_B$.
- Par ailleurs, les courbes de la chaleur spécifique C_v convergent très vite vers la limite des $2k_B$. Elles ont aussi une courbure autour d'une température spécifique τ_0 : les courbes de la fonction d'entropie numérique S ne montrent aucun changement brusque autour de cette température : donc, la courbure des courbes de C_v ne signale pas ou n'implique pas l'existence d'une transition de phase autour d'une température τ_0 . Ces courbures diminuent quand l'accélération a augmente.
- Enfin, contrairement au cas de l'oscillateur de Klein-Gordon où les courbes de la chaleur spécifique avaient un comportement normal [15], ces courbes ont une chaleur spécifique négative pour le cas de l'équation de Klein-Gordon libre.

Enfin, signalons ici que nous avons déterminé les fonctions thermodynamiques des oscillateurs en nous limitant aux états stationnaires d'énergie positive. La raison est que l'oscillateur de Klein-Gordon a une transformation exacte de Foldy-Wouthuysen [113]: cela signifie que les solutions d'énergie positive et négative ne se mélangent jamais. Ainsi, on suppose seulement que seules les particules avec un spectre d'énergie positive sont disponibles pour calculer les propriétés thermodynamiques de notre oscillateur. Tous les états négatifs sont considérés occupés. Notre cas est très semblable au cas de la théorie de bande dans la physique de l'état solide [114] (voir figure. 3.7).

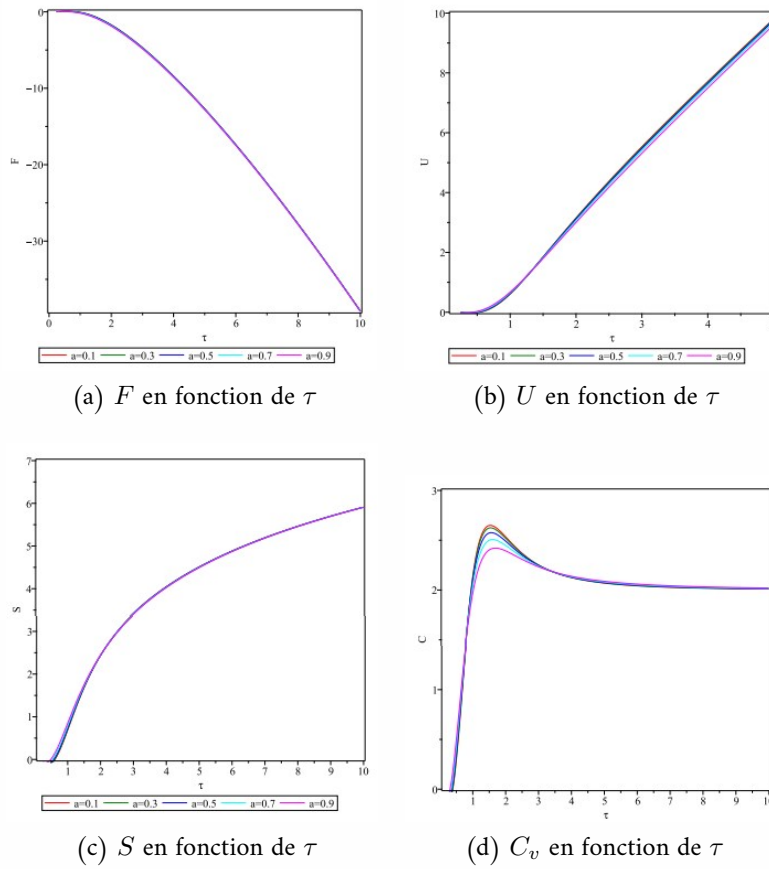


Fig. 3.6: Propriétés thermiques de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1 D dans un espace-temps de Rindler

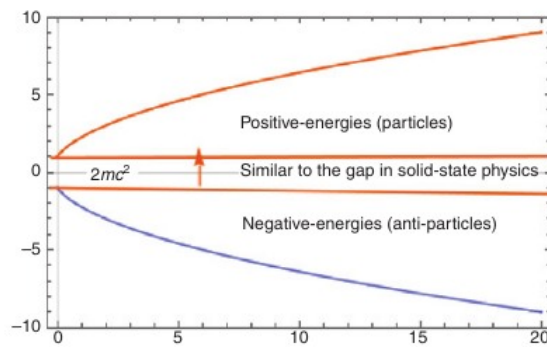


Figure 3.7: Schéma du spectre énergétique

CHAPITRE 4

L'OSCILLATEUR DE DIRAC DANS UN ESPACE-TEMPS DE RINDLERER

4.1 L'équation libre de Dirac

La métrique de l'espace-temps de Rindler, dans les coordonnées (η, ξ) , s'écrit par [27, 55, 56, 91, 92, 115] :

$$ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2), \quad (4.1)$$

où a est l'accélération. L'équation de Dirac libre dans un espace-temps courbé est donnée par la formule suivante [77] :

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu) - m]\Psi_D = 0, \quad (4.2)$$

avec m la masse des particules et $\Gamma_\mu(x)$ les connexions. Les matrices de Dirac généralisées γ^μ satisfont aux relations d'anti-commutation suivante :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (4.3)$$

Les matrices $\gamma^\mu(x)$ locales sont reliées aux matrices γ^μ de l'espace-temps plat, via un ensemble de tétrades $e_a^\mu(x)$, comme suit [77] :

$$\gamma^\mu(x) = e_a^\mu(x) \gamma^a. \quad (4.4)$$

Ici, on a la relation

$$e_a^\mu(x) e_b^\nu(x) \eta'^{ab} = g^{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

qui connecte les deux tenseurs fondamentales $g_{\mu\nu}$ et $\eta_{\mu\nu}$ dont les deux indices $(\mu, \nu) = (0, 1, 2, 3)$ sont des indices tensoriels, $(a, b) = (0, 1, 2, 3)$ sont des indices de tétrades, et enfin $\eta'^{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ est le tenseur de Minkowski [77].

La forme de e_μ^a et leur inverse e_a^μ sont suggérées par la forme diagonale suivante [116] :

$$e_\mu^a = e^{\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$e_a^\mu = e^{\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

Les symboles de christoffel $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu$ sont donnés par :

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\nu = \frac{1}{2} g^{\nu\beta} [\partial_\sigma g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\sigma} - \partial_\beta g_{\sigma\mu}], \quad (4.8)$$

Partons de : [117, 118]:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

alors :

$$\gamma^0(\xi) = \gamma^0 e^{-\sigma(\xi)}, \quad (4.10)$$

$$\gamma^1(\xi) = \gamma^1 e^{-\sigma(\xi)}, \quad (4.11)$$

Ainsi, l'équation de Dirac libre dans l'espace-temps de Rindler se transforme en [118] :

$$[i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^1(\partial_\xi + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi}) - me^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)}]\Psi_D = 0, \quad (4.12)$$

avec

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

sont les matrices de Pauli.

L'équation (4.12) peut être convertie en l'équation aux valeurs propres suivante :

$$H_D\psi_D = E\psi_D, \quad (4.14)$$

dont

$$H_D = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi - \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi} + me^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)} \\ \partial_\xi + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi} + me^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

désigne l'hamiltonien de Dirac. En faisant la transformation unitaire suivante [92, 118] :

$$U(\xi) = e^{\frac{1}{4}\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

l'équation (4.14) devient

$$\tilde{H}_D \psi_D(\xi) = \varepsilon \tilde{\psi}_D(\xi), \quad (4.17)$$

avec

$$\tilde{\psi}_D(\xi) = U\psi(\xi) = e^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

ou alors

$$\tilde{\psi}_D(\xi) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} = e^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

le nouveau hamiltonien \tilde{H} dont

$$\tilde{H}_D = UH_DU^{-1}, \quad (4.20)$$

est donné par

$$\tilde{H}_D = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi + me^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)} \\ \partial_\xi + me^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

En utilisant l'équation (4.20), on obtient les deux systèmes d'équations suivants :

$$\left(-\partial_\xi + me^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)}\right) \tilde{\psi}_2 = E\tilde{\psi}_1, \quad (4.22)$$

$$\left(\partial_\xi + me^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)}\right) \tilde{\psi}_1 = E\tilde{\psi}_2. \quad (4.23)$$

L'équation (4.22) donne :

$$\tilde{\psi}_2 = \frac{\left(\partial_\xi + me^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)}\right)}{E} \tilde{\psi}_1, \quad (4.24)$$

L'injection de (4.23) dans (4.21) conduit à une équation différentielle par rapport à la composante $\tilde{\psi}_1$ comme suit :

$$\left\{-\partial_\xi^2 - ma - E^2 + m^2 e^{\sigma(\xi)}\right\} \tilde{\psi}_1(\xi) = 0, \quad (4.25)$$

Considérons que

$$\sigma(\xi) = 2a\xi, \quad (4.26)$$

et soit la nouvelle variable

$$z = \frac{m}{a} e^{a\xi}, \quad (4.27)$$

alors l'équation (4.25) se transforme à

$$\left\{z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} - (z^2 - \nu^2)\right\} \tilde{\psi}_1(z) = 0, \quad (4.28)$$

dont $\nu = i\sqrt{\frac{E^2 - ma}{a^2}}$. La dernière équation est l'équation de Bessel modifiée avec l'indice complexe ν .

La solution générale de l'équation (4.25) est [91, 119] :

$$\tilde{\psi}_1(z) = aI_\nu(z) + bK_\nu(z). \quad (4.29)$$

Les conditions aux limites suivantes :

$$\tilde{\psi}_1(z \rightarrow \infty) = \tilde{\psi}_1\left(z = \frac{m}{a}\right) = 0, \quad (4.30)$$

nous oblige d'annuler le terme I_ν , puisque cette fonction augmente d'une façon exponentielle et diverge toujours. Par contre, la fonction K_ν est une solution décroissante de façon exponentielle,

Pour résoudre l'équation (4.24), on restreint notre étude pour les faibles valeurs d'accélération a [27, 92]. Ainsi, le développement au premier ordre de la variable z conduit à :

$$z = \frac{m}{a} (1 + a\xi + \dots). \quad (4.31)$$

La substitution de (4.30) dans (4.24) donne l'expression suivante :

$$\{-\partial_\xi^2 + 2am^2\xi - \zeta\} \tilde{\psi}_1(\xi) = 0, \quad (4.32)$$

avec

$$\zeta = E^2 + ma - m^2. \quad (4.33)$$

Soit les substitutions suivantes

$$\alpha = 2am^2 = \frac{1}{l^3}, \quad (4.34)$$

$$\zeta \equiv E^2 + ma - m^2 = \frac{\lambda}{2ml^2}, \quad (4.35)$$

$$\varrho = \frac{\xi}{l} - \lambda, \quad (4.36)$$

dont $l = \frac{1}{(2am^2)^{\frac{1}{3}}}$ est la longueur caractéristique, et ϱ est la nouvelle variable, alors (4.31) se déforme à :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}_1}{\partial \varrho^2} - \varrho \tilde{\psi}_1 = 0. \quad (4.37)$$

Ici, les nouvelles conditions aux limites sur $\tilde{\psi}_1$ sont :

$$\tilde{\psi}_1(-\lambda) = 0, \tilde{\psi}_1(\infty) \rightarrow 0, \quad (4.38)$$

La fonction d'Airy est la solution qui satisfait la condition limite $\tilde{\psi}_1(\infty) = 0$ [27, 91, 119] : donc

$$\tilde{\psi}_1(\xi) = N_{norm} \text{Ai}(\xi) \quad (4.39)$$

La longueur caractéristique l peut être calculée pour n'importe quelle masse. Pour un électron, nous

obtenons $l = 0,088\text{cm}$ et elle est plus petit pour l'énergie des masses plus grandes [119].

Pour des niveaux plus élevés, $\lambda \gg 1$, nous avons trouvé que (pour plus de détails, voir les réf. [27, 92, 119])

$$\lambda_n = \left\{ \frac{3\pi}{4} \left(2n + \frac{1}{2} \right) \right\}^{\frac{2}{3}}. \quad (4.40)$$

Mettons (4.29) dans (4.34), alors la forme finale du spectre d'énergie est :

$$E_n = \pm m \sqrt{1 - \frac{a}{m} + \frac{1}{m^3 l^2} \left\{ \frac{3\pi}{4} \left(2n + \frac{1}{2} \right) \right\}^{\frac{2}{3}}}. \quad \text{pour } n \gg 1 \quad (4.41)$$

L'équation (4.40) est une expression compacte du spectre d'énergie associé à une référence accélérée. Elle montre que l'effet non inertiel du référentiel accéléré se comporte comme l'existence d'un vrai potentiel externe dans l'équation de Dirac. Comme conséquence, ce dernier permet également la formation d'états liés [27, 92].

La figure. (4.1) montre la forme des niveaux d'énergie du Dirac libre à 1D dans l'espace-temps de Rindler par rapport au nombre quantique n pour différentes situations. D'après cette figure, on observe que (i) l'effet du paramètre l n'est considérable que pour les valeurs faibles de a . Par contre, tous les niveaux coïncident pour les valeurs élevées de l . Cette remarque permet de comprendre la figure b) qui représente la variation du spectre d'énergie E en fonction du nombre quantique n pour différentes valeurs de l'accélération a . D'après cette figure, on voit que les courbes s'écartent dans les niveaux très faibles.

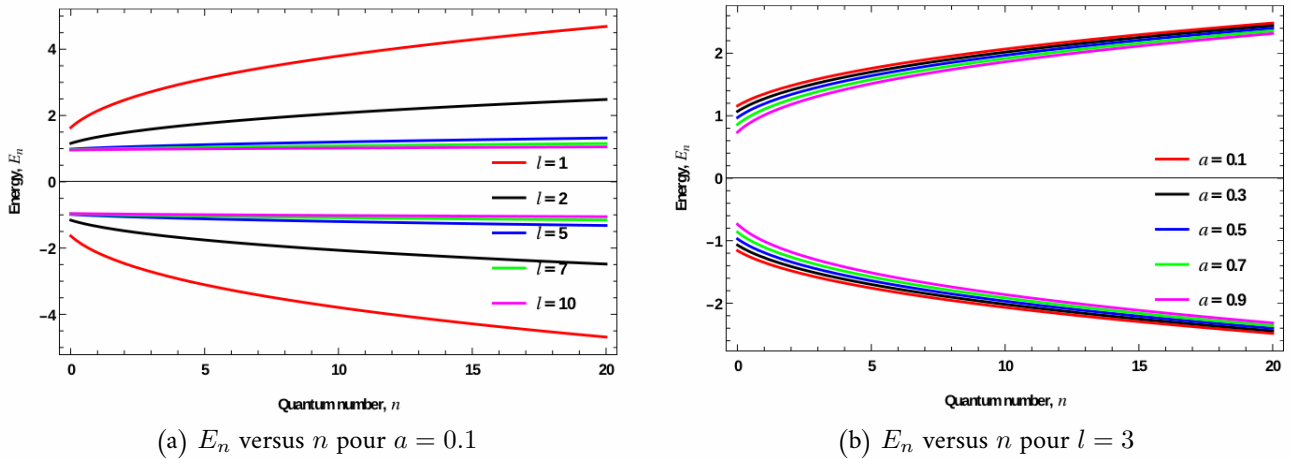


Fig. 4.1: Spectre d'énergie des particules de fermions libres dans l'espace-temps de Rindler

4.2 Propriétés thermiques de l'équation libre de Dirac

La théorie quantique des champs dans un espace courbe n'a pas de notion universelle de particule, mais celle-ci dépend du choix des coordonnées de l'observateur. La relation d'incertitude rend

le concept de particule sensible à la forme globale de l'espace où se déplace l'observateur. Soffel et al [92] ont étudié le cas d'un observateur qui s'accélère uniformément dans l'espace plat de Minkowski. Ils ont trouvé que cet observateur voit des particules de Dirac apparaître dans le vide de Minkowski habituel. De même, un observateur accéléré dans le vide de Minkowski ressent une chaleur due aux particules à la température d'Unruh.

4.2.1 Fonction de partition

D'après les travaux de Santos [92], la forme du spectre d'énergie de l'équation de Dirac unidimensionnelle de masse $m = 1$ dans l'espace-temps de Rindler est :

$$\varepsilon_n = \pm \begin{cases} \sqrt{a(n+1)}, & s = +1, \\ \sqrt{a(n)}, & s = -1. \end{cases} \quad (4.42)$$

On voit dans l'équation (4.42) que le spectre d'énergie de l'équation de Dirac dans l'espace de Rindler est discret et qu'il dépend de l'accélération a du référentiel. Pour étudier les propriétés thermiques du fermion libre dans cet espace-temps et voir comment elles sont affectées par l'effet non inertiel du référentiel accéléré, on va suivre la même méthode que pour l'équation de Klein-Gordon libre. On commence par calculer la fonction de partition Z des fermions dans l'espace-temps de Rindler. Il y a deux cas possibles selon l'équation (4.42).

4.2.1.1 Pour le cas $s = 1$

la fonction de partition Z à température finie T est :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(E_n - E_0)} = e^{-\beta\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{a(n+1)}}. \text{ pour } s = +1 \quad (4.43)$$

Pour calculer cette fonction l'équation (4.43), nous utiliserons à nouveau l'approche de la formule d'Euler-Maclaurin.

Ainsi, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{a(n+1)}} = \frac{e^{-\beta\sqrt{a}}}{2} + \frac{2e^{-\beta\sqrt{a}}}{a\beta^2} (1 + \beta\sqrt{a}) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} f^{(2p-1)}(0), \quad (4.44)$$

avec $f(n) = e^{-\beta\sqrt{a(n+1)}}$. Ici, nous avons utilisé l'intégrale suivant [91, 119] :

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta\sqrt{a'n+b}} dn = \frac{2e^{-\beta\sqrt{a}}}{a'\beta^2} (1 + \beta\sqrt{b}), \quad (4.45)$$

Jusqu'à l'ordre $p = 2$, la fonction de partition finale est :

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{2(1 + \beta\sqrt{a})}{a\beta^2} + \frac{\beta\sqrt{a}}{24} - \frac{1}{720} \left(\frac{1}{8}a^{\frac{3}{2}}\beta^3 + \frac{3}{8}a\beta^2 + \frac{3}{8}\beta\sqrt{a} \right). \quad (4.46)$$

4.2.1.2 Pour le cas $s = -1$

Maintenant, où $s = -1$, on peut remarquer que l'existence d'une expression indéterminée de fonction de partition parce que la dérivée de la fonction $f(n) = e^{-\beta\sqrt{an}}$, à $n = 0$, diverge, et par conséquent l'approche de la formule d'Euler-Maclaurin n'est pas valide pour ce cas. Surpasser ce problème, nous utiliserons une autre approche basée sur la fonction Zeta : en commençant par la fonction de partition suivante :

$$Z' = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{an}}, \quad (4.47)$$

En utilisant la transformation de Mellin suivante [82] :

$$e^x = \frac{1}{2\pi i} \int ds x^{-s} \Gamma(s), \quad (4.48)$$

la somme apparaissant dans l'équation (4.48) est transformée en :

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{an}} = \frac{1}{2\pi i} \int ds (\beta\sqrt{a})^{-s} \sum_n n^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s) = \frac{1}{2\pi i} \int ds (\beta\sqrt{a})^{-s} \zeta\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma(s), \quad (4.49)$$

avec $x = \beta\sqrt{an}$. Ici $\Gamma(s)$ et $\zeta\left(\frac{s}{2}\right)$ sont respectivement les fonctions d'Euler et Zeta [15, 16, 72–74, 120].

En appliquant le théorème des résidus, pour les deux pôles $s = 0$ et $s = 2$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{an}} = \frac{1}{(\beta\sqrt{a})^2} + \zeta(0), \quad (4.50)$$

Ainsi, la fonction de partition finale désirée $Z'(\beta, a)$ est donnée par :

$$Z' = \frac{1}{a\beta^2} - \frac{1}{2}. \quad (4.51)$$

À partir de (4.46) et (4.51), toutes les propriétés thermodynamiques de l'équation libre de Dirac pour les deux $s = \pm 1$ peuvent être obtenues facilement. Figs. 4.2 et 4.3, pour les deux $s = \pm 1$, montrent le même comportement que dans le cas de l'équation de Klein-Gordon libre :

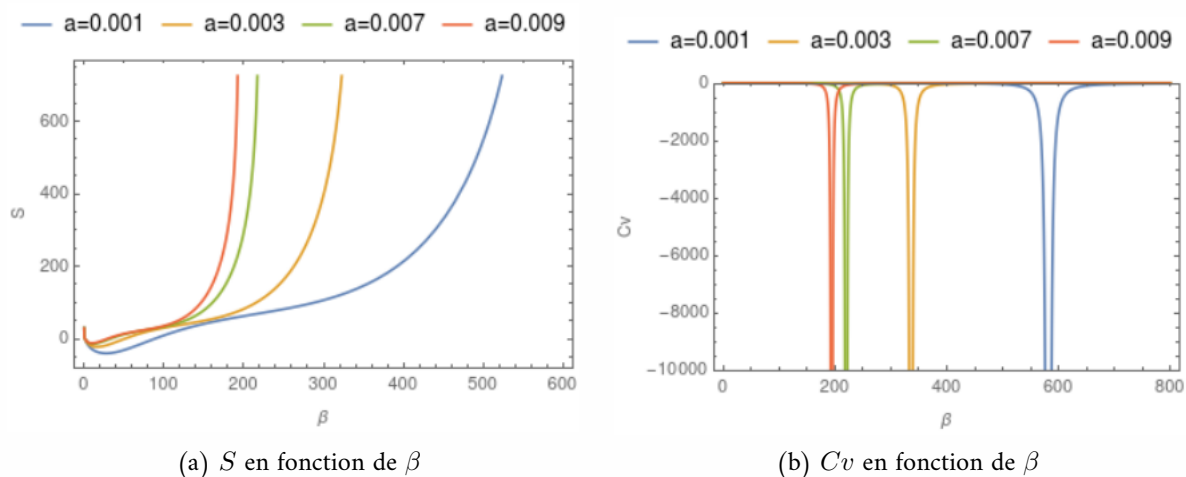


Fig. 4.2: Propriétés thermiques de l'équation de Dirac unidimensionnelle dans l'espace-temps de Rindler pour $s = +1$.

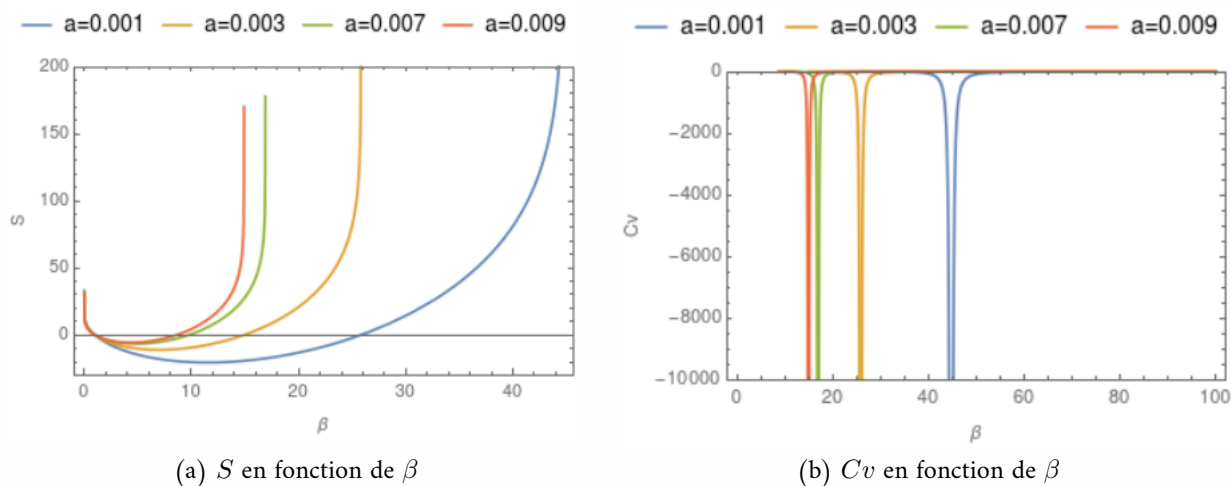


Fig. 4.3: Propriétés thermiques de l'équation de Dirac unidimensionnelle dans l'espace-temps de Rindler pour $s = -1$.

Ces courbes montrent que les chaleurs spécifiques peuvent être négatives. Les chaleurs spécifiques présentent des pics qui indiquent des transitions de phase du premier ordre. La figure. 4.4 montre les différentes températures de transition pour les bosons et les fermions. D'après cette figure, la température inverse de la transition β_c est proportionnelle à l'inverse de l'accélération du référentiel a (voir aussi le tableau. 4.1).

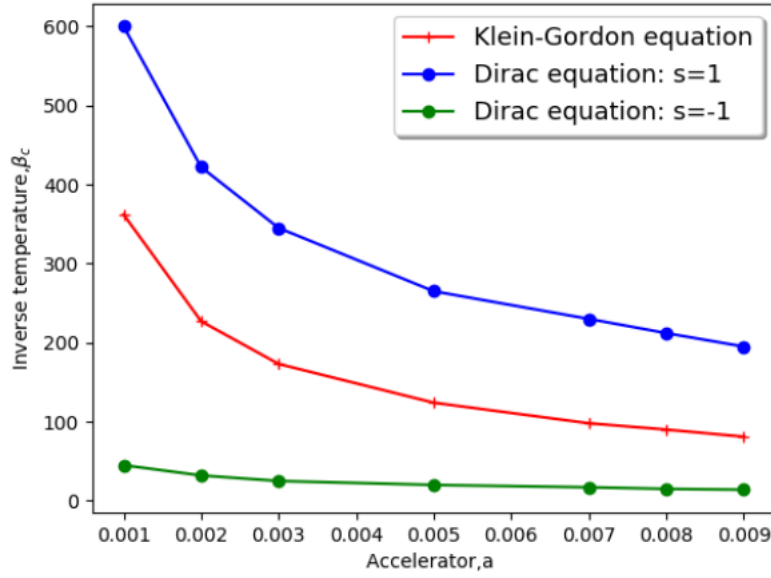


Fig. 4.4: L'inverse de la température de la transition β_c en fonction de l'accélération du référentiel a .

Table 4.1: The inverse temperature β_c vs the accelerator of the reference frame a

a		0.001	0.002	0.003	0.005	0.007	0.008	0.009
Equation de Dirac libre à 1D	$s = +1$	600	422	345	265	230	212	195
	$s = -1$	45	32	25	20	17	15	14

4.3 L'oscillateur de Dirac à 1D

Pour tenir compte de l'oscillateur de Dirac, nous faisons le changement suivant dans la composante du moment $\partial_\xi \rightarrow \partial_\xi + m\omega\beta\xi$ [15, 34, 82, 120, 121]. Ainsi, l'équation (4.12) devient :

$$\left[i\sigma_x \left(\partial_\xi + m\omega\beta\xi + \frac{a}{2} \right) + E - \gamma^0 m e^{a\xi} \right] \psi_D = 0, \quad (4.52)$$

On choisit la forme suivante pour la fonction d'onde afin de résoudre l'équation (4.15) :

$$\Psi_D = e^{-i\varepsilon\eta} \begin{pmatrix} \psi_1(\xi) \\ \psi_2(\xi) \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

Dans ce cas, on obtient le système d'équations suivant :

$$\left(\partial_\xi - m\omega\xi + \frac{a}{2} + z(\xi) \right) \Psi_1(\xi) = \varepsilon \Psi_2(\xi), \quad (4.54)$$

$$\left(-\partial_\xi + m\omega\xi - \frac{a}{2} + z(\xi) \right) \Psi_2(\xi) = \varepsilon \Psi_1(\xi), \quad (4.55)$$

avec $z(\xi) = me^{a\xi}$. Ainsi, les équations (4.17) et (4.18) peuvent s'écrire sous la forme de l'équation aux valeurs propres suivante :

$$H_D \Psi_D = \varepsilon \Psi_D, \quad (4.56)$$

avec

$$H_D = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi + m\omega\xi - \frac{a}{2} + z(\xi) \\ \partial_\xi - m\omega\xi + \frac{a}{2} + z(\xi) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

En utilisant la même procédure utilisée ci-dessus [92, 118], la nouvelle équation de Dirac devient comme suit :

$$\tilde{H}_D \tilde{\Psi}_D(\xi) = \varepsilon \tilde{\Psi}_D(\xi), \quad (4.58)$$

dont le nouvel hamiltonien s'écrit comme suit :

$$\tilde{H}_D = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi + m\omega\xi + z(\xi) \\ \partial_\xi - m\omega\xi + z(\xi) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.59)$$

Enfin, nous trouvons

$$\{-\partial_\xi^2 - m\omega + m^2\omega^2\xi^2 - \partial_\xi z(\xi) - \varepsilon^2 + z^2(\xi)\} \tilde{\psi}_1 \approx 0. \quad (4.60)$$

En utilisant l'approximation des petites accélérations, dont

$$z(\xi) = me^{a\xi} \simeq m(1 + a\xi), \quad (4.61)$$

l'équation (4.60) devient

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2} m^2 \omega^2 \left(\xi + \frac{a}{\omega} \right)^2 \right\} \tilde{\psi}_1 = \frac{\varepsilon^2 - m^2 + m(a + \omega)}{2m} \tilde{\psi}_1, \quad (4.62)$$

où

$$y = \xi + \frac{a}{\omega}, \quad \epsilon = \frac{\varepsilon^2 - m^2 + m(a + \omega)}{2m}. \quad (4.63)$$

Enfin, (4.62) se transforme à une équation différentielle d'un oscillateur harmonique à 1D comme suit :

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 \right\} \tilde{\psi}_1 = \epsilon \tilde{\psi}_1. \quad (4.64)$$

Les solutions et les niveaux d'énergie de l'équation (4.64) sont bien connus, car c'est une équation classique d'un oscillateur harmonique à une dimension. Ainsi, on a

$$\frac{\varepsilon^2 - m^2 + m(a + \omega)}{2m} = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (4.65)$$

ou

$$\epsilon = \pm m \sqrt{\frac{2n\omega}{m} + 1 - \frac{a}{m}}. \quad (4.66)$$

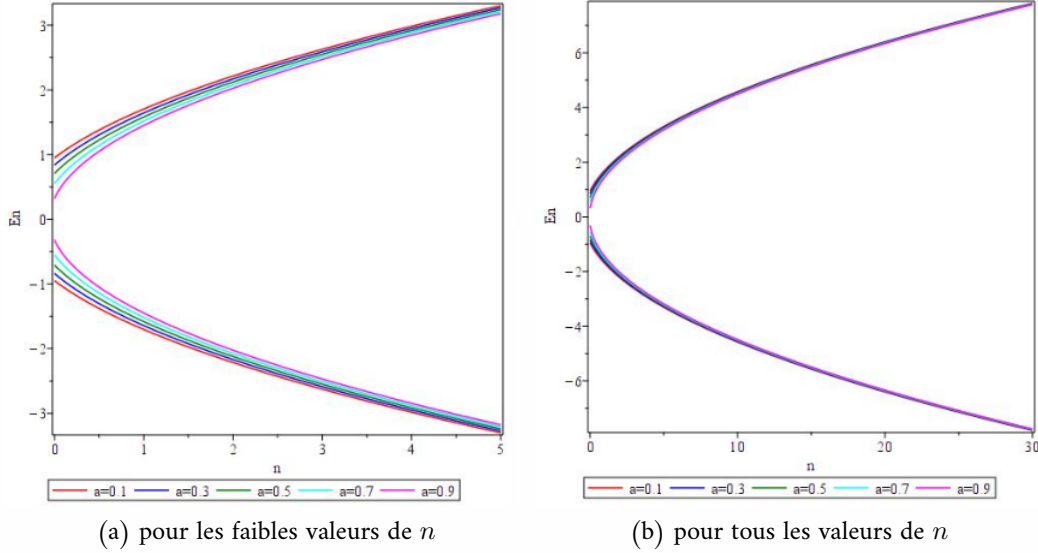


Fig. 4.5: Les valeurs propres d'énergie de l'oscillateur de Dirac 1D dans l'espace-temps de Rindler

Le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac à 1D dans l'espace-temps de Rindler est représenté sur la figure. 4.5. Cette figure montre que l'accélération du référentiel a n'affecte que les niveaux inférieurs pour les petites valeurs de ce dernier. Pour les valeurs très faibles de a , cette influence peut être ignorée et l'effet de ce paramètre est absent.

4.4 Propriétés thermodynamiques

4.4.1 Méthodes

On calcule d'abord la fonction de partition Z pour déduire toutes les quantités thermodynamiques de l'oscillateur de Dirac à un dimension. Cette fonction est donnée par

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\sqrt{2\beta}\sqrt{\alpha+n}}, \quad \alpha = \frac{1-a}{2} \text{ et } \frac{\omega}{m} = 1. \quad (4.67)$$

L'application de la transformation de Mellin à la fonction exponentielle, dont

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int ds x^{-s} \Gamma(s), \quad (4.68)$$

nous conduit à la forme suivante

$$\begin{aligned}\sum_n e^{-\sqrt{2}\beta\sqrt{\alpha+n}} &= \frac{1}{2\pi i} \int ds (\sqrt{2}\beta)^{-s} \sum_n (\alpha+n)^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s), \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int ds (\sqrt{2}\beta)^{-s} \zeta_H\left(\frac{s}{2}, 1\right) \Gamma(s),\end{aligned}\quad (4.69)$$

avec, $\Gamma(s)$ et $\zeta_H\left(\frac{s}{2}, \alpha\right)$ sont respectivement la fonction gamma et la fonction de Hurwitz. La fonction Gamma a des pôles simples en $s = -n, n \in \mathbb{N}$, pour tout entier négatif ou nul. Le résidu de la fonction Gamma en ces pôles est $\frac{(-1)^n}{n!}$ [15, 16, 75, 106].

En appliquant le théorème des résidus sur l'équation. (4.69), on trouve :

$$\sum_n e^{-\frac{\gamma}{\tau}\sqrt{\alpha+n}} = \frac{1}{2\beta^2} + \zeta_H(0, \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_H\left(\frac{-n}{2}, \alpha\right) \frac{(-1)^n}{n!} (\sqrt{2}\beta)^n, \quad (4.70)$$

Enfin, on exprime la fonction de partition Z en fonction de la fonction zêta de Hurwitz en appliquant le théorème des résidus aux pôles $s = 0, 2, Z^-$ par

$$z(\tau, a) = \frac{1}{2\beta^2} + \zeta_H\left(0, \frac{1-\alpha}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_H\left(\frac{-n}{2}, \frac{1-\alpha}{2}\right) \frac{(-1)^n}{n!} (\sqrt{2}\beta)^n. \quad (4.71)$$

Ainsi, toutes les quantités thermiques de notre oscillateur se déduisent de cette définition.

4.4.2 Résultats et discussion

Les expressions suivantes permettent de calculer les grandeurs thermiques les plus importantes, comme l'énergie libre F , l'énergie moyenne U , l'entropie S et la chaleur spécifique C_v . Elles sont obtenues à partir des deux définitions de la fonction de partition. [15, 26] :

$$F = -\frac{\ln Z}{\beta}, U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad (4.72)$$

$$\frac{S}{k_B} = \ln(Z) - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \frac{C_v}{k_B} = \beta^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}. \quad (4.73)$$

Nous sommes maintenant prêts à présenter et à discuter nos résultats concernant les grandeurs thermiques de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel dans l'espace-temps de Rindler. Toutes les quantités sont rapportées en fonction de la température réduite $\tau = \frac{1}{\beta}$ pour le cas relativiste avec $r = 1$. Le comportement de toutes les grandeurs thermodynamiques pour les particules de spin-1/2 est représenté sur la figure. (4.6).

Voici une autre façon possible de rephraser le texte que vous avez sélectionné :

La courbe de chaleur spécifique C_v montre une différence : elle a une courbure autour d'une température spécifique τ_0 quand les solutions se rapprochent très vite de la limite $2K_B$. La courbe de

la fonction d'entropie numérique S ne révèle aucun changement brusque autour de cette température pour différentes valeurs d'accélération a . La courbure de la courbe de chaleur spécifique C_v ne signale ni n'implique l'existence d'une transition de phase autour d'une température τ_0 pour différentes valeurs d'accélération a .

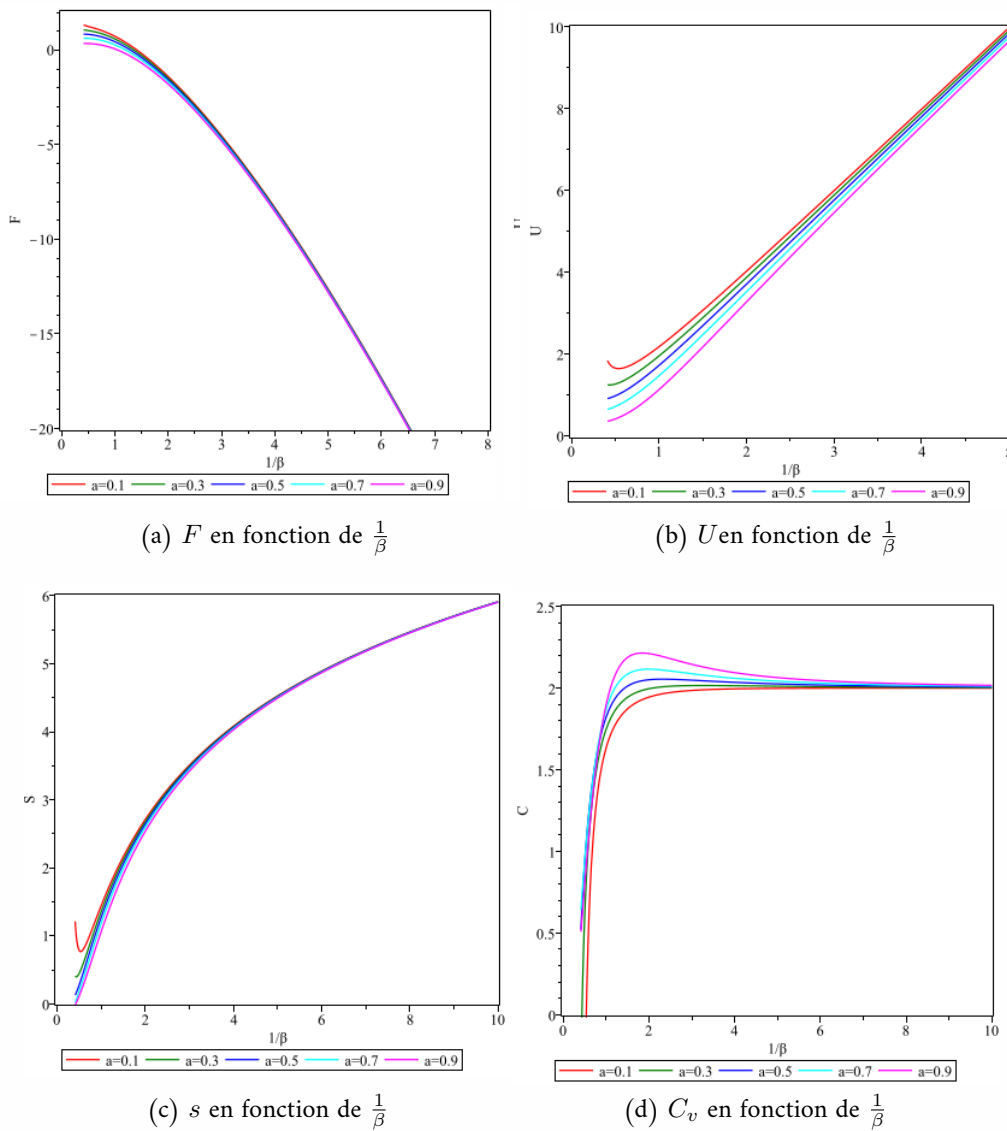


Fig. 4.6: Propriétés thermiques de l'oscillateur de Dirac à1D dans un espace-temps de Rindler

CONCLUSION ET PERSPECTIVE

L'analyse des solutions exactes des équations de Dirac et Klein-Gordon pour les particules en espace temps courbé est importante pour construire une théorie qui unifie la physique quantique et la gravité. C'est pourquoi le comportement des particules relativistes dans ce contexte est très intéressant.

Cette thèse avait pour but de résoudre les équations relativistes de Klein-Gordon et Dirac pour les particules de spin-0 et spin $-\frac{1}{2}$, avec l'oscillateur de Dirac, dans un espace-temps de Rindler. Nous avons aussi étudié les cas des oscillateurs de Klein-Gordon et de Dirac unidimensionnels dans l'espace-temps de Rindler. Enfin, nous avons calculé les propriétés thermodynamiques de ces deux équations relativistes et des oscillateurs, en utilisant deux méthodes théoriques basées sur la fonction Zeta et la formule d'Euler-Maclaurin. Nous pouvons résumer les résultats obtenus comme suit : (i) Nous avons trouvé une formule quasi-exacte pour le spectre d'énergie de l'équation de Klein-Gordon unidimensionnelle dans l'espace-temps de Rindler. (ii) Les solutions sont valables pour la limite $a \ll 1$, c'est-à-dire une accélération très faible. Enfin, (iii) le spectre d'énergie est discret et dépend de l'accélération a dans cet espace-temps. Ensuite, nous avons utilisé la forme du spectre d'énergie pour calculer les propriétés thermiques des bosons dans l'espace-temps de Rindler. Comme résultats, nous avons trouvés (i) une chaleur spécifique négative et (ii) la présence d'une phase de transition du premier ordre.

Nous avons aussi étudié le cas des fermions dans cet espace-temps. Nous avons obtenu comme résultats : (i) Le comportement thermodynamique de ces particules est identique à celui des bosons. (ii) Notre problème peut être vu comme un modèle qui prédit l'existence de chaleurs spécifiques négatives.

Nous avons poursuivi notre étude avec le cas des oscillateurs relativistes. Le calcul des propriétés thermiques des deux oscillateurs dans l'espace-temps de Rindler a été bien traité. Les résultats pour les deux oscillateurs peuvent se résumer ainsi :

- Pour l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D,

-
- Nous avons trouvé les solutions propres et la fonction de partition de notre problème.
 - Les résultats sont en accord avec ceux de la littérature.
 - Nous avons étudié l'influence des petites valeurs de l'accélération a sur ces propriétés.
 - Nous avons employé les méthodes de Mellin et de la fonction zêta pour calculer les quantités statistiques : L'énergie libre, l'énergie totale, l'entropie et la chaleur spécifique varient beaucoup avec le paramètre a .
- Pour le cas de l'oscillateur de Dirac à 1D,
 - Nous avons obtenu les solutions propres et calculé la fonction de partition de notre problème.
 - Les résultats sont cohérents avec ceux de la littérature.
 - Nous avons analysé l'effet des petites valeurs de l'accélération a sur ces propriétés.
 - Nous avons utilisé les méthodes de Mellin et de la fonction zêta pour étudier les quantités statistiques : L'énergie libre, l'énergie totale, l'entropie et la chaleur spécifique dépendent fortement du paramètre a .

ANNEXE **A**

LA FONCTION D'AIRY

A.1 La fonction d'Airy

Les deux fonctions Ai et Bi , qu'on appelle fonction d'Airy de seconde espèce, sont des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre deux connue sous le nom d'équation d'Airy. Cette équation s'écrit. [122–124]:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - xy = 0, \quad (\text{A.1})$$

La fonction d'Airy Ai est définie en tout x réel par la formule suivante :

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) dt. \quad (\text{A.2})$$

Cette formule forme une intégrale semi-convergente, c'est-à-dire qu'elle converge même si l'intégrande ne tend pas vers zéro quand $t \rightarrow \infty$. Il existe aussi d'autres expressions équivalentes de la fonction d'Airy en termes de séries ou de produits infinis.

La fonction d'Airy de seconde espèce Bi est une autre solution de l'équation d'Airy. Elle a la même amplitude d'oscillation que la fonction d'Airy Ai pour x négatif, mais avec un déphasage de $\pi/2$. Elle est définie par la formule suivante :

$$Bi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\exp\left(-\frac{t^3}{3} + xt\right) + \sin\left(\frac{t^3}{3} + xt\right) \right] dt. \quad (\text{A.3})$$

Elle a aussi des expressions équivalentes en termes de fonctions de Bessel modifiées pour x positif et de fonctions de Bessel ordinaires pour x négatif. Elle croît exponentiellement vers l'infini pour x positif

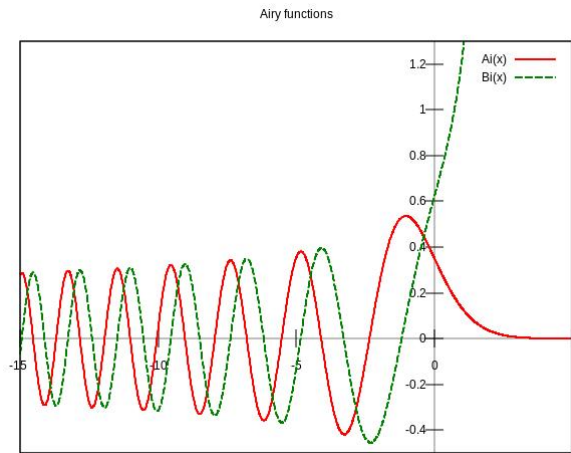


Figure A.1: Les deux fonctions d'Airy Ai et Bi

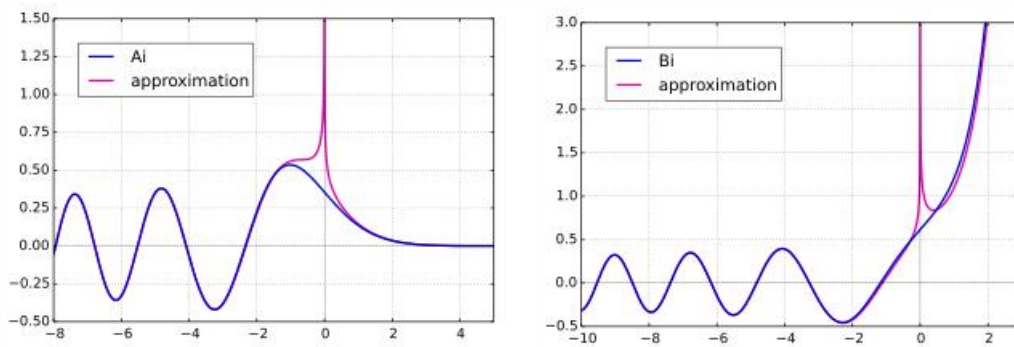


Figure A.2: Les deux fonctions d'Airy Ai et Bi et leurs comportements asymptotiques

et oscille autour de zéro pour x négatif (voir les figures suivantes). Ces deux fonctions apparaissent en physique dans des problèmes d'optique, de mécanique quantique, de croissance aléatoire et de théorie des matrices aléatoires.

A.2 Les zéros de la fonction Ai

Un zéro de la fonction Ai est une valeur de x pour laquelle $Ai(x) = 0$. Autrement dit, c'est un point d'intersection de la courbe de la fonction Ai avec l'axe des abscisses. La fonction Ai a une infinité de zéros négatifs qui sont notés α_n , où n est un entier positif. Le premier zéro est $\alpha_1 \approx -2.33$. Les zéros de la fonction Ai peuvent être calculés numériquement à l'aide de méthodes d'approximation, comme la méthode de Newton ou la méthode de la sécante. La figure suivante montre un exemple sur les zéros de la fonction d'Airy

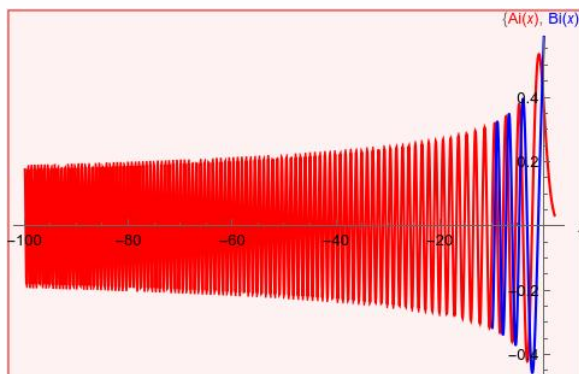


Figure A.3: Les zéros de la fonction Airy

Le tableau de dix valeurs des zéros de Ai et Bi [102, 123]

$Ai(-\lambda_n) = 0$		$Bi(-\lambda_n) = 0$	
n	λ_n	n	λ_n
1	2.338	1	1.173
2	4.088	2	3.271
3	5.521	3	4.830
4	6.787	4	6.169
5	7.944	5	7.376
6	9.023	6	8.491
7	10.040	7	9.538
8	11.009	8	10.529
9	11.936	9	11.476
10	12.829	10	12.386

Tab. A.1: Les dix valeurs des zéros de $Ai(-\lambda_n) = 0$ et $Bi(-\lambda_n) = 0$

ANNEXE **B**

L'ÉQUATION DE DIRAC DANS UN ESPACE-TEMPS DE RINDLER

B.1 Fermions dans l'espace Rindler

L'équation de Dirac dans un espace courbé est donnée par la formule suivante [92, 118, 125] :

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu) - m]\Psi_D = 0. \quad (\text{B.1})$$

La métrique de Rindler représente un référentiel accéléré dans l'espace-temps de Minkowski où l'élément de ligne peut être écrit sous la forme

$$ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2), \quad (\text{B.2})$$

dont les coordonnées conformes η, ξ varient dans l'intervalle $-\infty < \eta < \infty$, et $-\infty < \xi < \infty$, c'est-à-dire une extension de la métrique de l'espace-temps et $g_{\mu\nu}$ est donné par :

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab} = e^{2a\xi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

B.2 Calcul de la connexion affine

Nous commençons par effectuer des calculs sur le symbole de Christoffel et les connexions de spin de la manière suivante. Les tétrades $e^a{}_\mu$ sont définies par

$$e^a{}_0 = e^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, e^a{}_1 = e^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.4})$$

Les symboles de Christoffel $\Gamma^\nu_{\sigma\mu}$ peuvent être obtenus de la façon suivante :

$$\Gamma^\nu_{\sigma\mu} = \frac{1}{2}g^{\nu\beta} [\partial_\sigma g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\sigma} - \partial_\beta g_{\sigma\mu}]. \quad (\text{B.5})$$

Soit :

$$\Gamma^0_{01} = \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi} e^{\sigma(\xi)}, \Gamma^0_{10} = \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi} e^{\sigma(\xi)}, \Gamma^0_{00} = \Gamma^0_{11} = \Gamma^1_{01} = \Gamma^1_{10} = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$\Gamma^1_{00} = \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi} e^{\sigma(\xi)}, \Gamma^1_{11} = \frac{1}{2} \frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi} e^{\sigma(\xi)}. \quad (\text{B.7})$$

Nous nous servons de ces éléments pour calculer le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$

$$R_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \Gamma^\beta_{\alpha\nu}, \quad (\text{B.8})$$

qui mesure la courbure de l'espace-temps. Nous pouvons nous contenter de faire trois calculs distincts, car la symétrie des symboles de Christoffel implique que $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$.

Nous obtenons donc uniquement la combinaison $\mu = \nu = 0$ en appliquant le calcul des symboles de Christoffel. Ainsi,

$$R_{00} = \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} \Gamma^\beta_{00} - \Gamma^\alpha_{\beta 0} \Gamma^\beta_{\alpha 0} = \frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi} - \frac{\partial\sigma(\xi)}{\partial\xi} = 0. \quad (\text{B.9})$$

Nous faisons le même calcul pour les autres valeurs de μ et ν et nous obtenons

$$R_{00} = R_{01} = R_{10} = R_{11} = 0. \quad (\text{B.10})$$

Enfin, le scalaire de Ricci est donnée comme suit :

$$R = R_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Pour toute valeur de ξ et η , le scalaire de Ricci est égal à zéro. Le scalaire de Ricci quantifie la courbure de l'espace, et comme il est nul en tout point, on peut penser que l'espace de Rindler est une variété sans courbure.

Nous passons ensuite au calcul des connexions de spin $\omega_{\mu ab}$ de la manière suivante :

$$\omega_{\mu ab} = e_{a\nu} \Gamma^\nu_{\sigma\mu} E_b^\sigma + e_{a\nu} \partial_\mu E_b^\nu, \quad (\text{B.12})$$

où l'on trouve que :

$$\omega_{001} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(\xi)}{\partial \xi} e^{\sigma(\xi)}, \quad (\text{B.13})$$

$$\omega_{010} = \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma(\xi)}{\partial \xi} e^{\sigma(\xi)}. \quad (\text{B.14})$$

Les matrices de Dirac $\gamma^\mu(\xi)$ dans l'espace-temps courbe sont exprimées à partir de celles de l'espace de Minkowski par la relation suivante :

$$\gamma^\mu(\xi) = E_a^\mu \gamma^a, \quad (\text{B.15})$$

alors que γ^μ sont les matrices de Dirac s'écrivant en fonction des matrices de Pauli σ^i par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^1 = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Ainsi, pour $\mu = 0$ on a

$$\gamma^0(\xi) = \gamma^0 e^{-\frac{1}{2}\sigma(\xi)}, \quad (\text{B.17})$$

alors que pour $\mu = 1$, on obtient

$$\gamma^1(\xi) = \gamma^1 e^{-\frac{1}{2}\sigma(\xi)}. \quad (\text{B.18})$$

La dérivée covariante dans l'équation de Dirac est défini par :

$$\nabla_\mu = \partial_\mu - \Gamma_\mu. \quad (\text{B.19})$$

La connexion affine Γ_μ est donnée par

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{8} \omega_{\mu ab} [\gamma^a, \gamma^b]. \quad (\text{B.20})$$

On trouve alors que

$$\Gamma_0 = -\frac{1}{4} \frac{\partial \sigma(\xi)}{\partial \xi} \gamma^2, \Gamma_1 = 0. \quad (\text{B.21})$$

B.3 Les solutions

L'équation de Dirac dans un l'espace de Rindler s'écrit par

$$\left[i\gamma^0 \frac{d}{d\eta} + i\gamma^1 \left(\frac{d}{d\xi} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial \sigma(\xi)}{\partial \xi} \right) - m e^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)} \right] \Psi_D = 0. \quad (\text{B.22})$$

Soit la fonction d'onde :

$$\psi_D(\eta, \xi) = e^{-i\varepsilon\eta} \begin{pmatrix} \bar{g}(\xi) \\ f(\xi) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Après un calcul simple, on obtient

$$\left[\frac{d}{d\xi} + \frac{1}{4} \frac{d\sigma(\xi)}{d\xi} + z(\xi) \right] \bar{g}(\xi) = \varepsilon \bar{f}(\xi), \quad (\text{B.24})$$

$$\left[-\frac{d}{d\xi} - \frac{1}{4} \frac{d\sigma(\xi)}{d\xi} + z(\xi) \right] \bar{f}(\xi) = \varepsilon \bar{g}(\xi), \quad (\text{B.25})$$

où

$$z(\xi) = m e^{\frac{1}{2}\sigma(\xi)}. \quad (\text{B.26})$$

Soit la transformation suivante

$$U(\xi) = e^{\frac{1}{4}\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.27})$$

dont

$$\bar{\psi} = U\psi = \begin{pmatrix} \bar{g}(\xi) \\ \bar{f}(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(\xi) \\ f(\xi) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.28})$$

on obtient les deux équations suivantes

$$\left[\frac{d}{d\xi} + z(\xi) \right] g(\xi) = \varepsilon f(\xi), \quad (\text{B.29})$$

$$\left[-\frac{d}{d\xi} + z(\xi) \right] f(\xi) = \varepsilon g(\xi). \quad (\text{B.30})$$

Pour analyser les solutions du système d'équations, nous supposons que l'on peut séparer les équations (B.29) et (B.30). La fonction f peut être extraite de l'éq. (B.29) puis, en remplaçant les g par leur expression issue de (B.29), on obtient

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} - \frac{dz}{d\xi} f - z^2 f + \varepsilon^2 f = 0, \quad (\text{B.31})$$

de la même manière, nous dérivons l'équation pour g :

$$\frac{d^2 g}{d\xi^2} + \frac{dz}{d\xi} g - z^2 g + \varepsilon^2 g = 0, \quad (\text{B.32})$$

qui peut se résumer sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} + s \frac{dz}{d\xi} F - z^2 F + \varepsilon^2 F = 0, \quad (\text{B.33})$$

où

$$F = \begin{cases} F = f & s = 1, \\ F = g & s = -1. \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

Pour des valeurs faibles de l'accélération a , nous pouvons simplifier (B.33) en éliminant les termes de

degré supérieur, et alors $z(\xi)$ peut être exprimé comme

$$z(\xi) = m \left(1 + \frac{a\xi}{2} + \dots \right). \quad (\text{B.35})$$

Donc, en remplaçant cette équation dans (B.33) on obtient l'équation suivante

$$\frac{d^2 F}{d\xi^2} - s \frac{ma}{2} F - \frac{m^2 a^2}{4} \left(\frac{2}{a} + \xi \right)^2 F + \varepsilon^2 F = 0. \quad (\text{B.36})$$

Pour analyser les solutions de (B.36), nous utilisons le changement de variable

$$y = \sqrt{\frac{am}{2}} \left(\xi + \frac{2}{a} \right), \quad (\text{B.37})$$

et par conséquent, l'équation prendra la forme

$$\frac{d^2 F}{dy^2} + (\alpha - V_{ef}) F = 0, \quad (\text{B.38})$$

dont $\alpha = \frac{2\varepsilon^2}{am}$ et $V_{ef} = y^2 + s$.

Le spectre d'énergie suivant résulte des solutions de l'équation de Dirac dans l'espace-temps de Rindler :

$$\varepsilon = \pm \sqrt{am \left(n + \frac{1+s}{2} \right)}. \quad (\text{B.39})$$

L'équation de Dirac dans l'espace de Rindler a des solutions qui donnent le spectre d'énergie suivant : Le spectre d'énergie est discret et dépend de l'accélération du référentiel, a . Cela montre que le système a une caractéristique intéressante : l'effet non inertiel joue le rôle d'un potentiel externe dans l'équation de Dirac. La figure suivante nous montre que les énergies discrètes sont symétriques par rapport à $\varepsilon = 0$, ce qui implique que la particule et l'antiparticule ont la même énergie (voir figure. B.1).

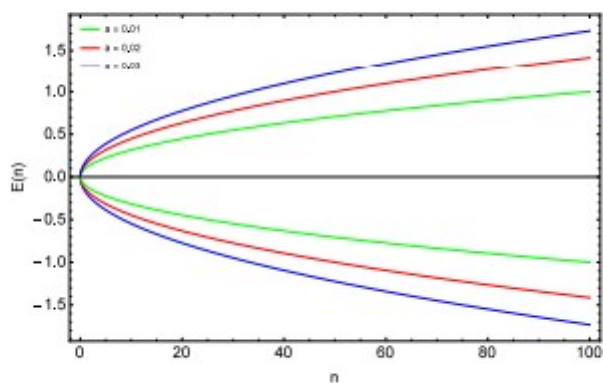
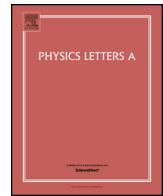


Fig. B.1: Spectre d'énergie pour $a = 0, 01$, $a = 0, 02$ et $a = 0, 03$. L'énergie est symétrique par rapport à $\varepsilon = 0$

ANNEXE C

Liste des articles

- Abdelmalek. Boumali, **Tarek. Imed. Rouabhia**, Phys. Lett. A, **385**, 126985, (2021). (*Classe A ; ImpactFactor=2.707 ;CiteScore=4.4*)
- **Tarek. Imed. Rouabhia**, Abdelmalek. Boumali, Hassan. Hassanabadi, Phys. Part. Nuclei Lett, **20**, 112-118 (2023). (*Classe B ; ImpactFactor=0,244 ;CiteScore=1.1*)
- **Tarek. Imed. Rouabhia**, Abdelmalek. Boumali, Theor Math Phys, **217**,(1) . (1609-1619), (2023). (*Classe A ; ImpactFactor=0.685 ;CiteScore=1.8*)



The thermal properties of the one-dimensional boson particles in Rindler spacetime

Abdelmalek Boumali*, Tarek Imad Rouabhia

Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique, Université Larbi Tébessi - Tébessa, Algeria



ARTICLE INFO

Article history:

Received 28 May 2020
 Received in revised form 15 October 2020
 Accepted 23 October 2020
 Available online 27 October 2020
 Communicated by F. Porcelli

Keywords:

Rindler spacetime
 Relativistic bound states
 Klein-Gordon equation
 Partition function

ABSTRACT

In this paper we study the one-dimension Klein-Gordon (KG) equation in the Rindler spacetime. The solutions of the wave equation in an accelerated reference frame are obtained. As a result, (i) we derive a compact expression for the energy spectrum associated in an accelerated reference, and (ii) we show that the non-inertial effect of the accelerated reference frame mimics an external potential in the Klein-Gordon equation and, moreover, allows the formation of bound states. In addition, the thermal properties of the Klein-Gordon from the partition function, have been investigated, and the effect of the accelerated reference frame parameter a on these properties has been tested. This study is extended to the case of the one-dimensional Dirac equation where the spectrum of energy is well determined and has an exact form. As a result, we will see that the behavior of the thermal quantities of the fermion particles is similar to the case of boson particles.

© 2020 Elsevier B.V. All rights reserved.

1. Introduction

The analysis of gravitational interactions with a quantum mechanical system has recently attracted attention in particle physics and has been an active field of research. The general way to understand the interaction between relativistic quantum mechanical particles and gravity is to solve the general relativistic form of their wave equations. These solutions are valuable tools for examining and improving models and numerical methods for solving complicated physical problems. To describe the physics governing the dynamics of scalar and spinor particles the Klein-Gordon and Dirac equations must be solved. What is of some interest, however, is how such a problem can be solved in the context of a space-time in general relativity, where the gravitational interaction is defined by the metric of space-time. Also, a fundamental question in physics is how quantum systems are affected by the structure of the spacetime, and if exists some significant effect.

In relativistic physics, the coordinates of a hyperbolically accelerated reference frame constitute an important and useful coordinate chart representing part of flat Minkowski spacetime [1,2]. In special relativity, a uniformly accelerating particle undergoes hyperbolic motion, for which a uniformly accelerating frame of

reference in which it is at rest can be chosen as its proper reference frame. The phenomena in this hyperbolically accelerated frame can be compared to effects arising in a homogeneous gravitational field.

Hyperbolic motion in Minkowski spacetime [3], that is, classical motion of a relativistic particle with constant proper acceleration, plays an important role in the understanding of motion in the presence of horizons and, most important, in the understanding of relevant phenomena such as Hawking radiation in black holes and the corresponding temperature [4]. It was precisely investigations on this subject, that led Unruh [5] to discover a thermal effect in the vacuum of a quantum field in Minkowski space when this vacuum is observed from a uniformly accelerated frame which, in terms of the adapted Rindler coordinates [1], has a fixed value for the spatial coordinate and an evolving temporal coordinate. In 1975 Davies [6] argued that a uniformly accelerated observer would see a thermal distribution of particles for the temperature $T = \frac{a}{2\pi k_B}$, where a is the magnitude of acceleration. He was the first to put forth quantum field theoretic arguments to conclude that a uniformly accelerated observer in flat spacetime would see thermal radiation.

The Rindler space time is one part of the Minkowski spacetime whose constant spatial coordinates describe accelerated observers with constant accelerations [7–9]. The interest in Rindler spacetime lies in its similar geometrical structure with the Schwarzschild black-hole. Actually, the Hawking radiation in the Schwarzschild black-hole is closely connected with the Unruh ef-

* Corresponding author.

E-mail addresses: abdelmalek.boumali@univ-tebessa.dz, boumali.abdelmalek@gmail.com (A. Boumali), ti.rouabhia@univ-tebessa.dz, tarekalger12@gmail.com (T.I. Rouabhia).

fect in the Rindler space time. Apart from similar in geometrical properties with the Schwarzschild black-hole, the Rindler space time is mathematically simple to study physical problems, and has closed form for them.

In this paper, a single particle solution of the Klein-Gordon equation in an accelerated reference frame is discussed. The motivation for this work besides the ones pointed out above is the understanding of the physical consequences of the Klein-Gordon equation in non-inertial systems of reference that undergo translational acceleration. In addition, we want to extract the thermal properties of the boson particles where they are subject to the accelerate frame. As a matter of fact, the one-dimensional relativistic Klein-Gordon equation has been largely used to treat physical problems where relativistic effects could play an important role. In spite of the great number of papers that has been recently published concerning the solution and properties of the Klein-Gordon equation in Rindler spacetime, as far as we know no one has reported on its thermodynamics properties. In order to overcome this lack of information, we study the one-dimensional Klein-Gordon equation in a thermal bath for the accelerated reference frame.

Recently, Santos and Barros [10] have treated the case of the one-dimensional Dirac equation in Rindler spacetime. Their study have lead to an exact form of the spectrum of energy. Several results have been found and well discussed by the authors. Unfortunately, the authors did not treat the influence of the accelerate frame a on the thermal properties of their problem in question. Thus, the same procedure that will be used to the determination of the thermodynamics quantities of the boson particles, will be extended to the case of the fermion particles. We thus close the paper by to study of the thermal properties of the Dirac equation in Rindler spacetime.

The paper is organized as follows: in section 2 we will present the solutions of one-dimensional Klein-Gordon in the Rindler spacetime. Section 3 is devoted to discuss the thermal properties of the boson particles and their behavior in the same accelerate frame. Finally, section 4 presents our conclusions. In this work, we use natural units, $\hbar = c = 1$.

2. Solutions of 1D free Klein-Gordon equation in Rindler spacetime

In this section, we solve the one-dimensional free Klein-Gordon equation in Rindler spacetime. The Minkowski metric in the proper coordinates (η, ξ) is

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2) \tag{1}$$

where a is the acceleration. The curvature of the Rindler spacetime is everywhere zero since it differs from Minkowski spacetime merely by a change of coordinates. The relation between the laboratory coordinates and the conformal coordinates is [9]

$$t(\eta, \xi) = \frac{e^{a\xi}}{a} \sinh(a\eta), \tag{2}$$

$$x(\eta, \xi) = \frac{e^{a\xi}}{a} \cosh(a\eta). \tag{3}$$

The conformal coordinates η, ξ vary in the interval $-\infty < \eta < \infty$, and $-\infty < \xi < \infty$, that means an extension of the spacetime metric. From Eq. (1) we can see that the metric is conformally flat because the conformal factor $e^{2a\xi}$ is multiplied by the Minkowski line element [10].

The governing equation of a massive scalar boson with an arbitrary coupling σ to the gravitational field takes the form [11–13]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) + (m^2 + \sigma R) \varphi = 0, \tag{4}$$

where $R = 0$ is the Ricci scalar, σ a coupling constant, $\sqrt{-g} = e^{2a\xi}$, and m is the mass of the scalar boson.

Starting with Eq. (4), the detail form of free KG equation in the (η, ξ) coordinates is

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 e^{2a\xi} \right) \psi(\eta, \xi) = 0. \tag{5}$$

In order to solve this equation, we put that

$$\psi(\eta, \xi) = e^{-iE\eta} \phi(\xi). \tag{6}$$

Injecting (6) in (5), we found, under the boundary condition

$$\phi(0) = \phi(\infty) = 0, \tag{7}$$

the following differential equation

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 e^{2a\xi} \right) \phi(\xi) = E^2 \phi(\xi). \tag{8}$$

To solve it, we introduce the new variable $z = \frac{m}{a} e^{a\xi}$. After a simple calculation, we obtain

$$\left\{ z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} - (z^2 - \nu^2) \right\} \phi(z) = 0, \tag{9}$$

with $\nu = i \frac{E}{a}$. The last equation is Bessel's equation in modified form with the complex index ν . This is exactly the same as Bessel's equation for more normal situations. Two linearly independent solutions are the modified Bessel functions of the first and second kind, $I_\nu(z)$ and $K_\nu(z)$. So the general solution of (9) looks like [14,15]

$$\phi(z) = a I_\nu(z) + b K_\nu(z), \tag{10}$$

under the boundary conditions that

$$\phi(z \rightarrow \infty) = \phi\left(z = \frac{m}{a}\right) = 0 \tag{11}$$

In this stage, two remarks seem us to mention: (i) the condition at infinity requires that we set the coefficient of I_ν to zero, since the First Kind function always explodes. We could have done this from the start: K_ν is, by definition, the exponentially decaying solution, while I_ν grows exponentially. (ii) The condition at $\xi = 0$ then simply requires that $K_\nu\left(\frac{m}{a}\right) = 0$. In terms of energies, then

$$K_{i \frac{E}{a}}\left(\frac{m}{a}\right) = 0. \tag{12}$$

This is our quantization condition for the problem in question. As it happens, $K_\nu(z)$ is real for real z and purely imaginary ν : as with all Bessel zeros there is no chance of an elementary formula for them, but they can be found quite easily using numerical methods. Finally, the wavefunction is

$$\phi_\nu(\xi) = \left(\frac{2\nu \sinh \pi \nu}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} K_{i\nu}(m e^{a\xi}). \tag{13}$$

They have been normalized to obey

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_\mu(\xi) \phi_\nu(\xi) d\xi = \delta(\mu - \nu). \tag{14}$$

Consequently, the eigenfunction of the KG equation are

Table 1
Some values of energy with the condition $\text{Ai}(-\lambda) = 0$; here $m = 1$.

(a) $a = 0.001$			(b) $a = 0.003$		
n	λ_n	E_n	n	λ_n	E_n
1	2.338107410	± 1.01838852	1	2.338107410	± 1.03788376
2	4.087949444	± 1.03193612	2	4.087949444	± 1.06535493
3	5.520559828	± 1.04289665	3	5.520559828	± 1.08732924
4	6.786708090	± 1.05248863	4	6.786708090	± 1.10638701
5	7.944133589	± 1.06118104	5	7.944133589	± 1.12352543
6	9.022650854	± 1.0692173	6	9.022650854	± 1.13926351
7	10.04017434	± 1.07674428	7	10.04017434	± 1.15391512
8	11.00852430	± 1.08385841	8	11.00852430	± 1.16768688
9	11.93601556	± 1.09062926	9	11.93601556	± 1.18072776
10	12.82877675	± 1.09710734	10	12.82877675	± 1.19314611

(c) $a = 0.007$			(d) $a = 0.009$		
n	λ_n	E_n	n	λ_n	E_n
1	2.338107410	± 1.06574659	1	2.338107410	± 1.07730593
2	4.087949444	± 1.11241191	2	4.087949444	± 1.13171201
3	5.520559828	± 1.14920734	3	5.520559828	± 1.17437976
4	6.786708090	± 1.18077324	4	6.786708090	± 1.21083881
5	7.944133589	± 1.20890756	5	7.944133589	± 1.24323189
6	9.022650854	± 1.23454704	6	9.022650854	± 1.27267488
7	10.04017434	± 1.2582582	7	10.04017434	± 1.29984214
8	11.00852430	± 1.28041406	8	11.00852430	± 1.32517742
9	11.93601556	± 1.3012827	9	11.93601556	± 1.34899909
10	12.82877675	± 1.32105924	10	12.82877675	± 1.37153877

$$\psi_\nu(\eta, \xi) = e^{-iE\eta} \left(\frac{2\nu \sinh \pi \nu}{\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} K_{i\nu}(me^{a\xi}). \quad (15)$$

Now, in order to have an analytic form of our spectrum of energy, we consider small values of the acceleration a : we may solve Eq. (9) neglecting terms in higher orders, then $z = \frac{m}{a}e^{a\xi}$ can be expanded as

$$z = \frac{m}{a} (1 + a\xi + \dots). \quad (16)$$

Substituting this equation into Eq. (8) we obtain the following expression

$$\left\{ -\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2am^2\xi + \varsigma \right\} \phi(\xi) = 0, \quad (17)$$

or, with the following boundary conditions

$$\phi(0) = 0; \phi(\infty) \rightarrow 0, \quad (18)$$

in the following form as

$$\ddot{\phi}(\xi) - (\alpha\xi - \varsigma)\phi(\xi) = 0. \quad (19)$$

Eq. (19) corresponds to the movement of a particle in the homogeneous gravitational fields over the surface of the potential of type $e^{2a\xi}$, where the latter being assumed to elastically reflect (problem of a free fall a body in the gravitational fields: see Eq. (40.1) in [16]).

Using the abbreviation

$$\alpha = 2am^2 = \frac{1}{l^3}, \quad (20)$$

$$\varsigma \equiv E^2 - m^2 = \frac{\lambda}{l^2}, \quad (21)$$

and the variable

$$\zeta = \frac{\xi}{l} - \lambda, \quad (22)$$

where $l = \frac{1}{(2am^2)^{\frac{1}{3}}}$ is a characteristic length, Eq. (19) is transformed into

$$\frac{d^2\phi}{d\zeta^2} - \zeta\phi = 0, \quad (23)$$

and the boundary conditions (18) become

$$\phi(-\lambda) = 0; \phi(\infty) \rightarrow 0. \quad (24)$$

The interval of classically permitted motion lies between the two turning points at $\zeta = -\lambda$ and $\zeta = 0$, i.e. entirely at negative values of ζ . Generally, the differential equation is solved by Bessel function of the order $\frac{1}{3}$. The solution satisfying the boundary-condition $\phi(\infty) = 0$ is the Airy function [16]

$$\phi(\zeta) = N_{\text{norm}} \text{Ai}(\zeta). \quad (25)$$

In this stage, two cases should be considered [16]

- For positive values of ζ , the Airy function may be expressed as

$$\text{Ai}(\zeta) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\zeta}{3}} K_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} \right), \text{ for } \zeta > 0, \quad (26)$$

where the function $K_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} \right)$ is the modified Hankel function.

- For negative values of its argument, the Airy function is represented by Bessel functions,

$$\text{Ai}(-\zeta) = \frac{1}{3} \sqrt{\zeta} \left\{ J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} \right) + J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} \right) \right\}. \quad (27)$$

In this case, (25) is modified and becomes

$$\phi(\zeta) = \frac{N_{\text{norm}}}{3} \sqrt{\zeta} \left\{ J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} \right) + J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} \zeta^{\frac{3}{2}} \right) \right\}, \text{ for } \zeta > 0. \quad (28)$$

According to the boundary condition, this function must vanish at $\zeta = -\lambda$.

Thus, the eigenvalue follow the condition that

$$\text{Ai}(-\lambda) = 0. \quad (29)$$

The first ten zeros are given in Table 1, and the corresponding energy levels are plotted in Fig. 1.

From this figure, we can made the following remarks: (i) the numerical spectrum of energy are obtained from the zeros of Airy

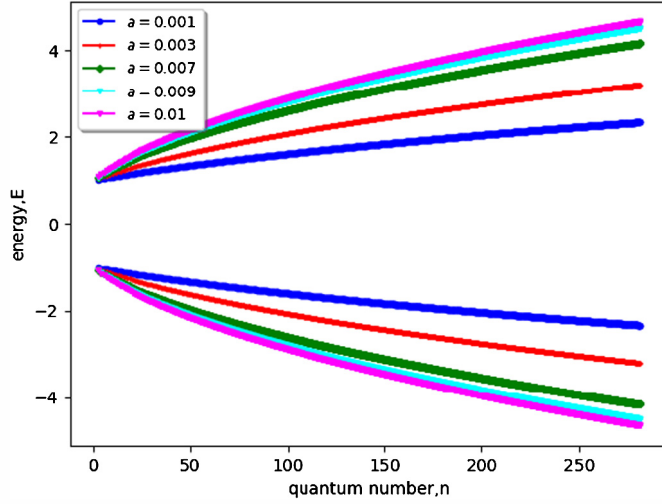


Fig. 1. The spectrum of energy E versus quantum number n for $a = 0.001, a = 0.003, a = 0.007, a = 0.009, a = 0.01$ and $m = 1$. (For interpretation of the colors in the figure(s), the reader is referred to the web version of this article.)

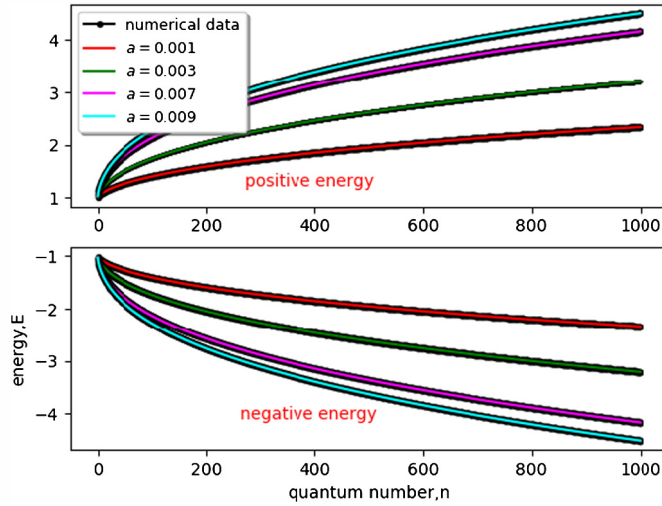


Fig. 2. Both exact and numerical values of the spectrum of energy E versus quantum number n for $a = 0.001, a = 0.003, a = 0.007$ and $a = 0.009$.

function (Eq. (29)), (ii) these energies, associated with the 1D free Klein-Gordon equation in the Rindler space are discrete and depends on the acceleration of the reference frame a . This is an interesting feature of the system because the non-inertial effect mimics an external potential in the Klein-Gordon equation: the same thing can be found in the case of Dirac equation (see Ref. [10]). (iii) We can see that the discrete set of energies are symmetrical about $E_n = 0$, that means the particles and antiparticles have the same energy. (iv) Finally, when the acceleration a becomes very small the curves of the spectrum coincide.

Now, for higher levels, $\lambda \gg 1$, with the following relations about the asymptotic forms

$$J_{\frac{1}{3}}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right), \quad (30)$$

$$J_{-\frac{1}{3}}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right), \quad (31)$$

we found that

$$\phi(\zeta) = \frac{N_{\text{norm}}}{3} \sqrt{\zeta} \cos\left(\frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (32)$$

Thus, for large values of ζ , for the eigenvalue condition, one has

$$\frac{2}{3}\lambda_n^{\frac{3}{2}} = \left(2n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}, \quad (33)$$

i.e.

$$\lambda_n = \left\{ \frac{3\pi}{4} \left(2n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{\frac{2}{3}}. \quad (34)$$

Now, using Eq. (21), the form of the spectrum of energy is

$$E^2 = m^2 + \frac{1}{l^2} \left\{ \frac{3\pi}{4} \left(2n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{\frac{2}{3}}, \quad (35)$$

or

$$E = \pm m \sqrt{1 + \frac{1}{l^2 m^2} \left\{ \frac{3\pi}{4} \left(2n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{\frac{2}{3}}}, \quad \text{for } n \gg 1. \quad (36)$$

In Fig. 2, we plot both theoretical forms of the spectrum of energy and the numerical one (the zeros of the Airy function) in order to make a comparison between them: following this Figure, we can see that the theoretical form of the spectrum of energy coincides well with the numerical values even in the region of the low quantum number. Consequently, we can consider that Eq. (36) as a good approximation to the exact form of the spectrum of energy in all regions of quantum number n . This form can help us to calculate the thermal properties of the free Klein-Gordon equation in Rindler spacetime and to discuss the influence of the acceleration of the reference frame a on these quantities. This will be done in the following.

3. Thermal properties of 1D Klein-Gordon equation in Rindler spacetime

3.1. Partition function via the Euler-Maclaurin formula

The partition function is given by [5]:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(E_n - E_0)}, \quad (37)$$

where $\beta = \frac{1}{k_B T}$ with k_B is the Boltzmann constant, E_0 is the energy of the ground state corresponding to $n = 0$ and T is the absolute temperature.

In order to evaluate the partition function, we use the Euler-Maclaurin formula [17]

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{2} f(0) + \int_0^{\infty} f(n) dn - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} f^{(2p-1)}(0) \quad (38)$$

where B_{2p} are the Bernoulli numbers, and $f^{(2p-1)}$ is the derivative of order $(2p-1)$. Up to $p = 2$, with $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$, and $f(n) = e^{-\beta(E_n - E_0)}$, the numerical partition function Z can be written, according to the parameter β by

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{(\pi a)^{2/3} \beta}{6 \sqrt[3]{6} \sqrt{\frac{(3\pi a)^{2/3}}{2 \sqrt[3]{2}} + 1}} - \frac{1}{720} \left(\frac{8 \sqrt[3]{2} (\pi a)^{4/3} \beta^2}{32^{2/3} \left(\frac{(3\pi a)^{2/3}}{2 \sqrt[3]{2}} + 1\right)} + \frac{64 (2\pi a)^{2/3} \beta}{9 \sqrt[3]{3} \sqrt{\frac{(3\pi a)^{2/3}}{2 \sqrt[3]{2}} + 1}} + \frac{8 \sqrt[3]{2} (a\pi)^{4/3} \beta}{32^{2/3} \left(\frac{(3\pi a)^{2/3}}{2 \sqrt[3]{2}} + 1\right)^{3/2}} \right)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{4\pi^2 a^2}{720} \left(\frac{\beta^3}{3 \left(\frac{(3\pi a)^{2/3}}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \right)^{3/2}} + \frac{\beta^2}{\left(\frac{(3\pi a)^{2/3}}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \right)^2} \right. \\
 & \left. + \frac{\beta}{\left(\frac{(3\pi a)^{2/3}}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \right)^{5/2}} \right) \\
 & + \int_0^\infty e^{-\beta(E_n - E_0)} dn. \tag{39}
 \end{aligned}$$

The integral appears in the last term is evaluated numerically.

In statistical mechanics, the Boltzmann factor $e^{-\beta E}$ is an essential tool used to determine thermodynamic quantities such as the partition function $Z(\beta)$, free energy $F(\beta)$, total energy $U(\beta)$, entropy $S(\beta)$ and specific heat $C_v(\beta)$, for a given system. These quantities are defined as

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \tag{40}$$

$$\frac{S}{k_B} = \ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad \frac{C_v}{k_B} = \beta^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}. \tag{41}$$

Through Eq. (39), all thermal properties described by Eqs. (40) and (41) can be deduced easily.

In what follows, we will focus our study to the thermal properties of the one-dimensional Klein-Gordon equation and the influence of the acceleration of the reference frame a on these quantities. As the extension of this study, the case of the one-dimensional free Dirac equation in the same space-time will be addressed in the next section.

3.2. Results and discussions

Before commenting our results, we note that the notion of an observer, accelerating with respect to the Minkowski vacuum, observing a thermal spectrum of particles is known as the Unruh effect: the Unruh effect is one of the most intriguing phenomena occurring within quantum field theory in Minkowski space. Essentially, it is (i) a prediction that one moving in the Minkowski spacetime with a linear constant acceleration experience the spacetime as a thermal-bath with the Unruh temperature $T = \frac{a}{2\pi k_B}$, and (ii) an accelerated observer in the empty Minkowski space will detect a thermal bath of particles at the temperature where a is the (constant) acceleration of the observer [18–20]. This acceleration radiation, which arises from processes in which the atom jumps from the ground state to an excited state [21], can leave imprints in a variety of phenomenological context (for more detail see Ref. [20,22]).

Now, we briefly discuss our numerical results on the calculation of both entropy and specific heat. First of all, we should mention that both plots in Fig. 3 are created by using Eq. (41) where β is the inverse temperature. From this Figure, we can make some remarks: (i) the influence of the acceleration of the reference frame a is clear in these figures. (ii) the curves of specific heat are all negative and diverge. (iii) in order to know if these divergences in the curves of specific heat can be a signature of the existence of a transition phase, we use the curves of the entropy function. In fact, the specific heat written as

$$C_v = T \frac{\partial S}{\partial T} = -\beta \frac{\partial S}{\partial \beta}, \tag{42}$$

is a generalized susceptibility or thermodynamic derivative that quantifies the amount of the change of an extensive quantity (like

entropy) under the influence of an intensive quantity (like temperature). Since β is positive definite, the sign of the specific heat is determined by the change of the entropy due to the change in the inverse temperature β . From Fig. 3, as we can see, the curves of entropy diverge around a critical value β_c . The singularities appear in the curves of the entropy lead, according to (42), to the appearance of anomalies in the curves of specific heat as well. In addition, these curves show the existence of two different levels on either side of a fixed value β_c , i.e., the existence of two different phases. These divergences are the signature of the existence of the first-order phase transition.

After this remark, we are ready to discuss the strange results concerning the existence of a negative specific heat: generally, negative specific heats would mean that when a system loses energy, its temperature increases. Thirring [23] in his paper “Systems with Negative Specific Heat” claimed that some systems for which the binding energy increases more rapidly than linearly with the number of particles, are shown to exhibit negative specific heat C_v for some energies. In thermal contact with larger systems, $C_v < 0$ creates an instability, and in the canonical ensemble one sees only a phase transition. Also, he showed that the difficulty was removed once a clear distinction was made between canonical and micro-canonical ensembles. In this context, he proposed [24] of a model which has a negative specific heat for a range of energy values in the micro-canonical ensemble, and a phase transition in the corresponding canonical ensemble. Beckenstein [25] and Hawking [26,27] have shown that the thermodynamics of black holes has negative specific heats. Finally, Lyndell-Bell et al. [28] in their paper “on the negative specific heat paradox” mentioned that negative specific heats are well-know to astronomers. They showed that the bounded self-gravitating gas spheres in thermodynamic equilibrium could show negative specific heats.

Now, in order to argue well the existence of negative specific heat in our case, we can mention the following: It has been well-known that (i) the trajectory of an observer accelerating through Minkowski spacetime (i.e. an inertial observer in Rindler spacetime) will be parameterized in terms of the accelerated observer’s proper time. More precisely, Rindler spacetime is simply (a patch of) Minkowski spacetime written in a different (accelerated) coordinate frame. Hence, Rindler spacetime is flat. It is then due to Einstein’s equivalence principle that the accelerated frame exhibits traits similar to as if it was positioned in a gravitational field [20,21]. (ii) The statistical mechanics in the presence of gravitational interactions exhibits several peculiar features, deriving mostly from the fact that gravity couples to everything, and operates unshielded with an infinite range. One of these peculiarities is the existence of a negative specific heat [29–31]. Thus, we have shown that the non-inertial effect of the accelerated reference frame mimics an external potential in the free Klein-Gordon equation and, moreover, allows the formation of bound states. This means that the equation of motion found, for small values of the acceleration a , corresponds the movement of a particle in the homogeneous gravitational fields. Hence, these gravitational fields can be considered as the origin of the existence of a negative specific heat in the boson particles as described just above.

4. Thermal properties of 1D free Dirac particles in Rindler spacetime

It has been known for several years that the particle interpretation of quantum field theory in a general Riemannian manifold is not unique, but depends on the observer’s coordinate frame. The particle concept, endowed with a non-local nature by the uncertainty relation, depends on the global topological structure of that sub-manifold which is naturally connected with the observer’s state of motion. Soffel et al. [32] showed that a uniformly accel-

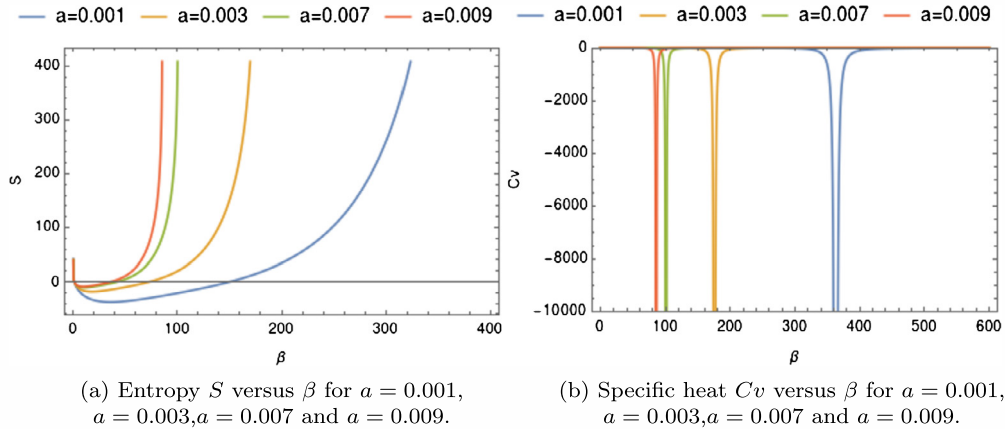


Fig. 3. Thermal properties of the one-dimensional Klein-Gordon equation in Rindler spacetime.

erated observer in Minkowski space experiences a flux of Dirac particles in the ordinary Minkowski vacuum. In addition, an accelerated observer in the empty Minkowski space will detect a thermal bath of particles at the Unruh temperature.

Recently, Santos and Barros [10] study the Dirac equation in the Rindler spacetime. They derive a compact expression for the energy spectrum associated with the Dirac equation in an accelerated reference. In addition, they show that the non-inertial effect of the accelerated reference frame mimics an external potential in the Dirac equation, and allows the formation of bound states. Following their results, the form of the energy spectrum of a free one-dimensional Dirac equation with unit mass (i.e. $m = 1$) in Rindler spacetime is

$$\epsilon_n = \begin{cases} \pm\sqrt{a(n+1)} & s = +1 \\ \pm\sqrt{an} & s = -1. \end{cases} \quad (43)$$

Eq. (43) showed that the energy spectrum associated with the Dirac equation in the Rindler space is discrete and depends on the acceleration of the reference frame a .

Now, in order (i) to determine the thermal properties of the free fermion in Rindler spacetime, and (ii) to test the non-inertial effect of the accelerated reference frame a on these properties, the same treatment as in the case of a free Klein-Gordon equation will be followed. For this, we, at first, calculate the partition function Z of fermion particles in the Rindler space time.

According to the Eq. (43) two cases can be distinguished

- For the case $s = 1$, the partition function Z at finite temperature T is

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\epsilon_n - \epsilon_0)} = e^{\beta\sqrt{a}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{a(n+1)}}, \text{ for } s = +1. \quad (44)$$

To calculate this function, we will use again the approach of the Euler-Maclaurin formula. Thus, we have

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{a(n+1)}} = \frac{e^{-\beta\sqrt{a}}}{2} + \frac{2e^{-\beta\sqrt{a}}}{a\beta^2} (1 + \beta\sqrt{a}) - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} f^{(2p-1)}(0), \quad (45)$$

with $f(n) = e^{-\beta\sqrt{a(n+1)}}$. Here, we have used the following integral [33,34]

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta\sqrt{a'n+b}} dn = \frac{2e^{-\beta\sqrt{b}}}{a'\beta^2} (1 + \beta\sqrt{b}). \quad (46)$$

Up to $p = 2$, the final partition function is

$$Z = \frac{1}{2} + \frac{2(\sqrt{a}\beta + 1)}{a\beta^2} + \frac{\sqrt{a}\beta}{24} - \frac{1}{720} \left(\frac{1}{8}a^{3/2}\beta^3 + \frac{3}{8}a\beta^2 + \frac{3}{8}\sqrt{a}\beta \right), \quad (47)$$

with $a' = b \equiv a$.

- Now, where $s = -1$, we can remark that the existence of an indeterminate expression of

partition function because the derivative of the function $f(n) = e^{-\beta\sqrt{an}}$, at $n = 0$, diverge and consequently the approach of the Euler-Maclaurin formula is not valid for this case. To overcome this problem, we will use another approach base on Zeta function: starting with the following partition function

$$Z' = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{an}}. \quad (48)$$

By using the following Mellin transformation [35]

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds x^{-s} \Gamma(s), \quad (49)$$

the sum appears in (48) is transformed into

$$\sum_n e^{-\beta\sqrt{a}\sqrt{n}} = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds (\beta\sqrt{a})^{-s} \sum_n n^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds (\beta\sqrt{a})^{-s} \zeta\left(\frac{s}{2}\right) \Gamma(s), \quad (50)$$

with $x = \beta\sqrt{a}\sqrt{n}$. Here $\Gamma(s)$ and $\zeta\left(\frac{s}{2}\right)$ are respectively the Euler and Zeta function [36]. Applying the residues theorem, for the two poles $s = 0$ and $s = 2$, we obtain [35]

$$\sum_n e^{-\beta\sqrt{a}\sqrt{n}} = \frac{1}{(\beta\sqrt{a})^2} + \zeta(0). \quad (51)$$

Thus, the final desired partition function $Z'(\beta, a)$ is given by

$$Z' = \frac{1}{a\beta^2} - \frac{1}{2}. \quad (52)$$

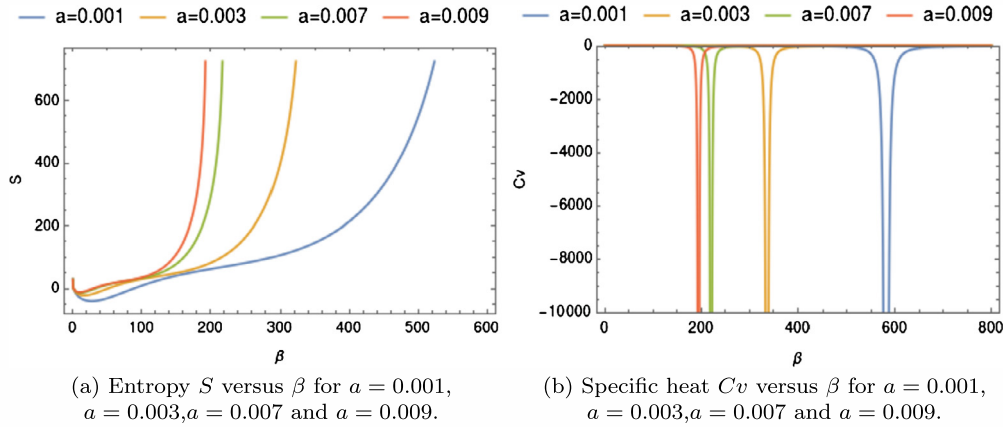


Fig. 4. Thermal properties of the one-dimensional Dirac equation in Rindler spacetime for $s = +1$.

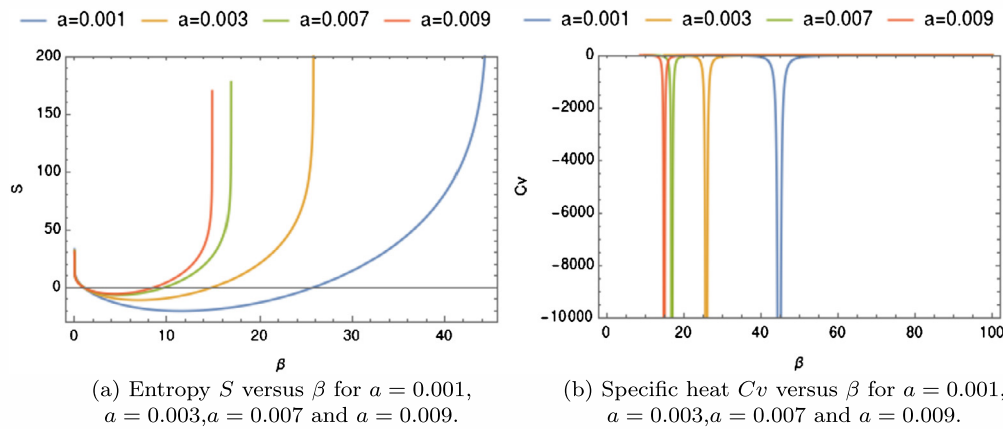


Fig. 5. Thermal properties of the one-dimensional Dirac equation in Rindler spacetime for $s = -1$.

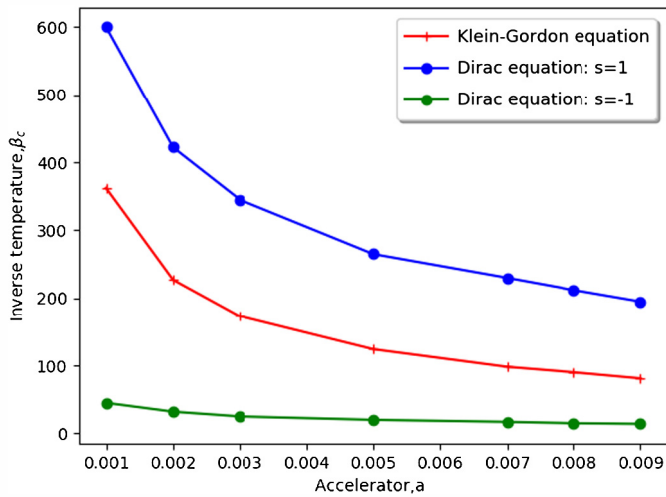


Fig. 6. The inverse temperature of transition β_c vs the acceleration of the reference frame a .

From Eqs. (47) and (52), all thermodynamic properties of the free Dirac equation for both $s = \pm 1$ can be obtained easily. Figs. 4 and 5, for both $s = \pm 1$, show the same behavior as in the case of free Klein-Gordon equation: The behavior appears in these curves leads to the existence of negative specific heats. The peaks observed in the curves of specific heat are a signature of the existence of the first-order phase transitions.

Finally, the different temperatures of the transition of both boson and fermion particles are plotted in Fig. 6: following this

figure, the inverse temperature of transition β_c depends inversely with the acceleration of the reference frame a (see also Table 2).

5. Conclusion

In this work, we have found an almost exact formula concerning the spectrum of the energy of the one-dimensional Klein-Gordon equation in Rindler spacetime. The solution is obtained by adopting the limit $a \ll 1$, that means not so fast acceleration. We also have shown that the energy spectrum associated in this kind of spacetime is discrete, and depends on the acceleration a . After this, and by using the form of the spectrum of energy, thermal properties of boson particles in Rindler spacetime have been obtained. As a result, we found (i) negative specific heats, and (ii) the existence of a signature of the first-order transition phase. The extension to the case of fermions in this kind of spacetime has been also treated. Also, the thermodynamics behavior of these particles is the same as in boson particles. Finally, we can consider our problem as a model which predict the existence of negative specific heats.

CRediT authorship contribution statement

Abdelmalek Boumali, Conceptualization, Methodology, Supervision, Formal analysis, Reviewing and Editing.

Tarek Imad Rouabhia, Software, Writing - Original draft preparation.

Table 2
The inverse temperature β_c vs the accelerator of the reference frame a .

a		0.001	0.002	0.003	0.005	0.007	0.008	0.009
Free 1D Klein-Gordon equation		362	227	173	124	98	90	81
Free 1D Dirac equation	$s = +1$	600	422	345	265	230	212	195
	$s = -1$	45	32	25	20	17	15	14

Declaration of competing interest

The authors declare that they have no known competing financial interests or personal relationships that could have appeared to influence the work reported in this paper.

Acknowledgements

It is a great pleasure for the authors to thank the referees for helpful comments. This work was fully supported by the "Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique (DGRSDT)" of Algeria (grant no. B00L02UN120120200001).

References

- [1] W. Rindler, *Essential Relativity*, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [2] R.M. Wald, *General Relativity*, Cambridge University Press, 1984.
- [3] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Vol. 2, 4th ed., 1975.
- [4] M. Socolovsky, *Ann. Fond. Louis Broglie* 39 (2014).
- [5] W.G. Unruh, *Phys. Rev. D* 14 (1976) 870.
- [6] P.C.W. Davies, *J. Phys. A, Math. Gen.* 8 (4) (1975).
- [7] W. Rindler, *Am. J. Phys.* 34 (1) (1966) 174.
- [8] S.A. Fulling, *Phys. Rev. D* 7 (1973) 2850.
- [9] V. Mukhanov, S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, Cambridge University Press, 2007.
- [10] L.C.N. Santos, C.C. Barros Jr., *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* 16 (2019) 1950140.
- [11] K.D. Krori, P. Borgohain, P.K. Kar, D. Das, *J. Math. Phys.* 29 (1988) 1645.
- [12] K.D. Krori, P. Borgohain, D. Das, *J. Math. Phys.* 35 (1994) 1032.
- [13] K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus* 127 (2012) 82.
- [14] G.N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2 ed., Cambridge University Press, 1995.
- [15] G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6 ed., Harcourt, San Diego, 2005.
- [16] S. Flugge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [17] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [18] D. Oriti, *Nuovo Cimento B* 115 (2000) 1005–1024.
- [19] S. Takeuchi, *Phys. Lett. B* 750 (2015) 209–217.
- [20] N. Alkofer, G. D'Odorico, F. Saueressig, F. Versteegen, *Phys. Rev. D* 94 (2016) 104055.
- [21] S. Ben-Jamin, M.O. Scully, S.A. Fulling, D.M. Lee, D.N. Page, A.A. Svidzinsky, M.S. Zubairy, *Int. J. Mod. Phys. A* 34 (2019) 1941005.
- [22] L.C.B. Crispino, A. Higuchi, G.E.A. Matsas, *Rev. Mod. Phys.* 80 (2008) 787–838.
- [23] W. Thirring, *Z. Phys.* 235 (1970) 339–352.
- [24] W. Thirring, *Phys. Essays* 4 (1972) 125.
- [25] J.D. Beckenstein, *Phys. Rev. D* 9 (1972) 3292.
- [26] S.W. Hawking, *Nature* 248 (1974) 30.
- [27] S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* 13 (1976) 191.
- [28] D. Lynden-Bell, R.M. Lynden-Bell, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 181 (1977) 405–419.
- [29] T. Padmanabhan, *Phys. Rep.* 188 (1990) 285–362.
- [30] T. Padmanabhan, *Rep. Prog. Phys.* 73 (2010) 046901.
- [31] J. Singh Bagla, *Gravity and the Quantum*, Springer International Publishing AG, 2017.
- [32] M. Soffel, B. Müller, W. Greiner, *Phys. Rev. D* 22 (1980) 1935.
- [33] M.H. Pacheco, R.R. Landim, C.A.S. Almeida, *Phys. Lett. A* 311 (2003) 93–96.
- [34] A. Boumali, *Phys. Scr.* 76 (2007) 669–673.
- [35] A. Boumali, *Electron. J. Theor. Phys.* 12 (2015) 121–130.
- [36] E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*, Springer, Berlin, 1995.

**PHYSICS OF ELEMENTARY PARTICLES
AND ATOMIC NUCLEI. THEORY**

Effect of the Acceleration of the Rindler Spacetime on the Statistical Properties of the Klein–Gordon Oscillator in One Dimension

Tarek Imed Rouabhia^{a, *}, Abdelmalek Boumali^{a, **}, and Hassan Hassanabadi^{b, *}**

^a *Laboratory of Applied and Theoretical Physics, Larbi-Tebessi-University, Tebessa, Algeria*

^b *Faculty of Physics, Shahrood University of Technology, Shahrood, P. O. Box 3619995161-316 Iran*

**e-mail: ti.rouabhia@univ-tebessa.dz*

***e-mail: abdelmalek.boumali@univ-tebessa.dz*

****e-mail: boumali.abdelmalek@gmail.com*

Received August 7, 2022; revised October 8, 2022; accepted October 12, 2022

Abstract—In this paper, we study the relativistic spin-zero bosons influenced by the Klein–Gordon oscillator in Rindler space-time. The obtained form of the energy level of the oscillator is used to find the thermodynamic properties through the partition function. This partition function is terminated by using the method based on the zeta function via the Cahin–Mellin transformation. Through this function, all thermodynamics properties, such as the free energy, the total energy, the entropy, and the specific heat, have been determined and the influence of the acceleration of our spacetime has been treated.

Keywords: Klein–Gordon oscillator, Rindler space-time, partition function, Hurwitz zeta function

DOI: 10.1134/S154747712302019X

1. INTRODUCTION

Recently, there have been growing interest in particle physics, the study of gravitational interactions with a quantum mechanical system has recently gotten a lot of attention and is a big topic. Solving the general relativistic form of their wave equations is a good way to understand how relativistic quantum mechanical particles interact with gravity [1, 2]. These equations may seem insignificant at the atomic level, where gravitational effects are minor, but the physics that governs these particles is crucial in astrophysics and cosmology, where gravitational effects are dominant. Furthermore, studying single-particle states is critical for the development of a unified theory of gravitation and quantum mechanics [3–5].

The Dirac oscillator was for the first time studied by Itzhak et al. [6]. They used a Dirac equation in which the momentum p is replaced by $p - imr\omega$ in r , where r is the position vector, m is the particle's mass, and ω is the oscillator's frequency. Moshinsky and Szczepaniak [7] revived interest in the problem by naming it the Dirac oscillator (DO) because it becomes a harmonic oscillator with a very strong spin-orbit coupling term in the non relativistic limit. In addition, the DO interaction can be shown to be a physical system that can be interpreted as the interaction of an anomalous magnetic moment with a linear electric field [8, 9]. Benitez et al. [10] discovered the electromagnetic

potential associated with the DO. Nowadays, The DO has been studied from a variety of perspectives as a relativistic quantum mechanics problem. It has piqued interest due to its numerous physical applications as well as the fact that it is one of the few examples of Dirac's equation exact solvability [5, 11–33].

The thermal properties of the one-dimensional Dirac equation in a Dirac oscillator interaction was at first considered by Pacheco et al. [19]. Using the Euler–MacLaurin formula, the authors calculated all of the oscillator's thermal quantities. Although this method can be used to obtain all of the system's thermal properties, the expansion of the partition function using it may only be valid for higher temperature regimes. In addition, at $T = 0$ K, the partition function reveals a total divergence [11]. In the same sense, another method based on the Zeta function [34–36] has been proposed by many authors in [12, 37–39]. An advantage of using this method is to avoid the divergences that appear in the partition function calculated via the Euler–Maclaurin approach [11]. The authors, in their studies, used the Cahin–Mellin transformation of the exponential function. Recently, Frassinio et al. [18] generalized the method proposed in [12] by taking all the negative poles of Γ function (see also the following [17]). In this sense, we want to obtain the thermal properties of the one-dimensional Klein–Gordon oscillator in Rindler spacetime. The influ-

ence of geometrical parameter of this space will also be the objective of this study.

Hyperbolic motion in Minkowski spacetime [40], namely the, classical motion of a relativistic particle with constant proper acceleration, is crucial for understanding motion in the presence of horizons and, more importantly, for understanding relevant phenomena like Hawking radiation in black holes and the temperature associated with it [41, 42]. The investigations on this subject led Unruh [43] to discover a thermal effect in the vacuum of a quantum field in Minkowski space when this vacuum is observed from a uniformly accelerated frame which, in terms of the adapted Rindler coordinates [44], has a fixed value for the spatial coordinate and an evolving temporal coordinate. Also, the Rindler space time is one part of the Minkowski space time that describes accelerated observers with constant accelerations [44, 45]. Rindler space time is intriguing because of its geometrical resemblance to the Schwarzschild black hole. In fact, the Unruh effect in the Rindler space time is intimately linked to the Hawking radiation in the Schwarzschild black hole. Apart from having geometrical properties that are similar to those of the Schwarzschild black hole, the Rindler space time is mathematically simple to study and has a closed form for physical problems (see [14] and references therein).

The principal aims of this paper can be recapitulated as follows: (i) obtains the eigensolutions of the 1D Klein-Gordon oscillator (KGO). (ii) Via these solutions, the thermal properties of the Klein-Gordon oscillator in one dimension are extracted. To do this, we evaluate at first the partition function Z which encodes the definition of the thermal quantities such as the free energy, the total energy, the entropy, and the specific heat. This function is obtained by using the Zeta method. (iii) Finally, we focus on the study of the influence of geometrical parameter of this space such as the acceleration of the frame of the space into consideration on both the eigen-solutions and the thermal properties of the 1D KGO. These aims can be realized by doing the following:

- At first, we obtain the eigen-solutions of the one-dimensional Klein-Gordon oscillator in Rindler spacetime.

- Then, the thermal properties of the system in question will be calculated and analyzed by using the method based on the zeta function via the Cahin-Mellin transformation. To our best knowledge, the determination of these properties is not treated in the literature. Hence, the obtained results in this work may be considered as a contribution to the field.

Finally, we note that although the topics of our paper and [22] are similar in the form, the content of both papers is very different. The principal difference can be resumed in the following: Firstly, in [22], the authors have investigated the quantum fractional of

the one-dimensional Klein-Gordon oscillator (KGO) as well as its statistical properties. The obtained differential equation in [22] has a fractional order α rather in our case which the order of the derivation is an integer. Secondly, both space-time are not the same: in [22], the space-time is not curved contrary to the case which is a hyperbolic space-time called Rindler spacetime controlled by parameter of the acceleration a .

The paper is organized as follows: Sections 2 and 3 are devoted the presenting the solutions of the Klein-Gordon equation for the free case and in the presence of the Dirac oscillator interaction [7] in the Rindler spacetime respectively. In Section 4, the thermal properties of the one-dimensional Klein-Gordon oscillator are determined. Finally, Section 5 will be a conclusion.

2. FREE KLEIN GORDON EQUATION IN RINDLER SPACE-TIME

In this section, we solve the one-dimensional free Klein-Gordon equation in Rindler spacetime.

The Minkowski metric in the proper coordinates (η, ξ) is [14, 44, 46, 47]:

$$ds^2 = e^{2a\xi} (d\eta^2 - d\xi^2), \quad (1)$$

where a is the acceleration. Because Rindler spacetime differs from Minkowski spacetime only by a change of coordinates, then its curvature is zero everywhere. The laboratory coordinates and conformal coordinates have a relationship is [44, 45]

$$t(\eta, \xi) = \frac{e^{a\xi}}{a} \sinh(a\eta), \quad (2)$$

$$x(\eta, \xi) = \frac{e^{a\xi}}{a} \cosh(a\eta). \quad (3)$$

The conformal coordinates (η, ξ) vary in the interval $-\infty < \eta < +\infty$, and $-\infty < \xi < +\infty$, that means an extension of the spacetime metric [47].

In general, the governing equation of a massive scalar field with an arbitrary coupling to the gravitational field takes the form [1–4, 15, 45, 48]:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi) + (m^2 + \sigma R) \varphi = 0, \quad (4)$$

where $R = 0$ is the Ricci scalar, σ a coupling constant, $\sqrt{-g} = e^{2a\xi}$, and m is the mass of the scalar boson.

Starting with (4), the detail form of the free KG equation in the (η, ξ) coordinates is [14]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 e^{2a\xi} \right) \varphi(\eta, \xi) = 0. \quad (5)$$

In order to solve this equation, we put that :

$$\varphi(\eta, \xi) = e^{-iE\eta} \varphi(\xi). \quad (6)$$

Under the following boundary condition

$$\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0, \quad (7)$$

we found the following differential equation [14]:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + m^2 e^{2a\xi}\right)\varphi(\xi) = E^2 \varphi(\xi), \quad (8)$$

or

$$\left(p_\xi^2 + m^2 e^{2a\xi} - E^2\right)\varphi(\xi) = 0. \quad (9)$$

To find the solution, we use a new variable

$$z = \frac{m}{a} e^{a\xi}.$$

After a simple calculation, we obtain

$$\left\{z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} - (z^2 - \nu^2)\right\}\phi(z) = 0. \quad (10)$$

with $\nu = i \frac{E}{a}$. The last equation is Bessel's equation in modified form with the complex index ν . The general solution of (10) looks like [49]

$$\phi(z) = aI_\nu(z) + bK_\nu(z), \quad (11)$$

under the boundary conditions that

$$\phi(z \rightarrow \infty) = \phi\left(z = \frac{m}{a}\right) = 0. \quad (12)$$

The condition at infinity requires that we set the coefficient of I_ν to zero, since the First Kind function always explodes. The K_ν function is the exponentially decaying solution, while I_ν grows exponentially.

Now, in the approximation of small values of the acceleration a , the variable $z = \frac{m}{a} e^{a\xi}$ can be expanded in the first order as follows:

$$z = \frac{m}{a}(1 + a\xi + \dots). \quad (13)$$

Substituting (13) into (8), we obtain the following expression

$$\left\{-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 2am^2 + \zeta\right\}\phi(\xi) = 0. \quad (14)$$

Equation (14) described the movement of a particle in homogeneous gravitational fields over the surface of the potential of type $e^{2a\xi}$, where the latter is assumed to elastically reflect [14, 49]. With the following boundary conditions:

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(\infty) \rightarrow 0, \quad (15)$$

Equation (14) transformed into

$$\ddot{\phi}(\xi) - (\alpha\xi - \zeta)\phi(\xi) = 0. \quad (16)$$

Using the abbreviation:

$$\alpha = 2am^2 - \frac{1}{l^3}, \quad (17)$$

$$\zeta \equiv E^2 - m^2 = \frac{\lambda}{l^2}, \quad (18)$$

and the variable

$$\zeta = \frac{\xi}{l} - \lambda, \quad (19)$$

where $l = \frac{1}{(2am^2)^{\frac{1}{3}}}$ is the characteristic length, Eq. (14) becomes:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - \zeta \phi = 0. \quad (20)$$

In addition, the new boundary conditions on ϕ are:

$$\phi(-\lambda) = 0, \quad \phi(\infty) \rightarrow 0 \quad (21)$$

The Airy function [14, 49] is the solution that meets the boundary-condition $\phi(\infty) = 0$.

$$\phi(\xi) = N_{\text{norm}} \text{Ai}(\xi). \quad (22)$$

For higher levels, $\lambda \gg 1$, with the following asymptotic form relations:

$$J_{\frac{1}{3}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right), \quad (23)$$

$$J_{-\frac{1}{3}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{12}\right), \quad (24)$$

the wave function ϕ is given by

$$\phi(\xi) = \frac{N_{\text{norm}}}{3} \sqrt{\xi} \cos\left(\frac{2}{3}\xi^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right). \quad (25)$$

As a result, for large values of ζ , one has:

$$\lambda_n = \left\{\frac{3\pi}{4}\left(2n + \frac{1}{2}\right)\right\}^{\frac{2}{3}}. \quad (26)$$

Using Eq. (16), the form of the energy spectrum is:

$$E^2 = m^2 + \frac{1}{l^2} \left\{\frac{3\pi}{4}\left(2n + \frac{1}{2}\right)\right\}, \quad (27)$$

or

$$E = \pm m \sqrt{1 + \frac{1}{l^2} \left\{\frac{3\pi}{4}\left(2n + \frac{1}{2}\right)\right\}} \quad \text{for } n \gg 1. \quad (28)$$

Figure 1 shows the form of the energy levels of 1D free Klein–Gordon in Rindler spacetime for different situations. Following this figure, we observe that (i) the influence of the parameter l for five levels is clear only for the low parameters. All levels coincide with the high values of l . This remark allows us to understand the Fig. 1b which represents the variation

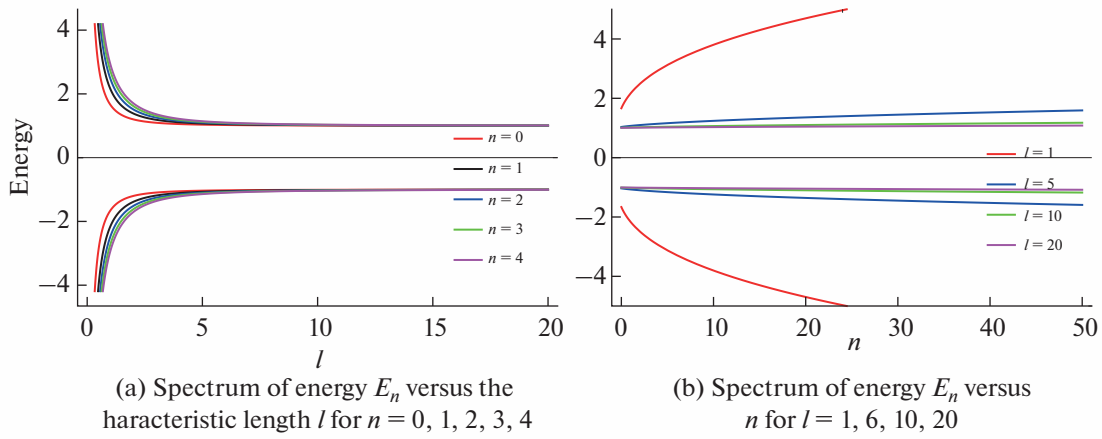


Fig. 1. Spectrum of energy of one-dimensional free Klein–Gordon particle in Rindler spacetime.

of the energy spectrum E versus the quantum number n for different values of l . As the characteristic length l increases, all the energy levels coincide.

3. ONE-DIMENSIONAL KLEIN–GORDON OSCILLATOR IN RINDLER SPACE-TIME

We start with the 1D free Klein–Gordon equation in Rindler spacetime

$$(p_\xi^2 + m^2 e^{2a\xi} - E^2)\varphi(\xi) = 0. \quad (29)$$

In the presence of a Dirac oscillator interaction, p_ξ becomes $p_\xi - im\omega\xi$, and (29) is transformed into [26, 27, 30, 50]

$$\{(p_\xi - im\omega\xi)(p_\xi + im\omega\xi) + m^2 e^{2a\xi} - E^2\}\varphi(\xi) = 0. \quad (30)$$

After a simple algebraic calculation, we have

$$\{p_\xi^2 + m^2 \omega^2 \xi^2 + im\omega[\xi, p_\xi] + m^2 e^{2a\xi} - E^2\}\varphi(\xi) = 0. \quad (31)$$

With $[\xi, p_\xi] = i$, (31) becomes

$$\{p_\xi^2 + m^2 \omega^2 \xi^2 - m\omega + m^2 e^{2a\xi} - E^2\}\varphi(\xi) = 0. \quad (32)$$

In the small values of the acceleration a approximation, we obtain

$$\{p_\xi^2 + m^2 \omega^2 \xi^2 - m\omega + 2am^2 - (E^2 - m^2)\}\varphi(\xi) = 0. \quad (33)$$

With some algebraic steps, the final form of Eq. (33) is given by

$$\left(\frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2\right)\varphi(y) = \bar{E}\varphi(y), \quad (34)$$

where

$$y = \xi + \frac{a}{\omega}, \quad (35)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2}\omega - \frac{m}{2} + \frac{E^2}{2m} + \frac{a^2 m}{2\omega^2}. \quad (36)$$

Equation (34) is the standard equation of one-dimensional Harmonic oscillator [49].

By simple calculation, the form of the spectrum of energy is given by:

$$E_{n,a} = \pm m\sqrt{\frac{2n\omega}{m} + 1 - \kappa^2}. \quad (37)$$

with $\kappa = \frac{a^2}{\omega^2}$. In the limit where $a = 0$ we recover the well known spectrum of energy of 1D Klein–Gordon oscillator in flat space [12] (see Fig. 2).

In Fig. 2, we study the effect of the small values of parameter a on the spectrum of energy. In this context, the spectrum of energy as a function of the quantum number n for different values of a is depicted in Fig. 2. This figure reveals that the effect deformation parameter a on the energy spectrum is significant only in the lower levels.

4. THERMODYNAMIC PROPERTIES OF THE ONE-DIMENSIONAL KLEIN–GORDON OSCILLATOR IN RINDLER SPACE-TIME

4.1. Methods

We first focus on calculating the partition function Z in order to obtain all thermodynamic quantities of the relativistic oscillator in question. The partition function is defined by

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\sqrt{2r}\beta m\sqrt{\frac{B+n}{2r}}}, \quad (38)$$

where $B = 1 - \kappa^2$ with $\kappa = \frac{a}{\omega}$ and $r = \frac{\omega}{m}$ is the parameter which controls the non-relativistic limit.

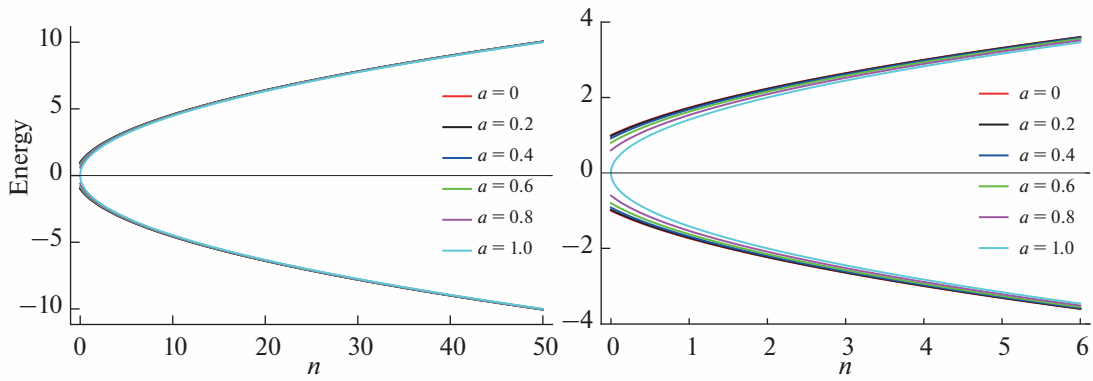


Fig. 2. Spectrum of energy of one-dimensional KGO versus quantum number n for $a = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$.

With the following substitutions

$$\gamma = \sqrt{2r}, \quad \alpha = \frac{B}{2r}, \quad \tau = \frac{1}{\beta m}, \quad (39)$$

Equation (38) can be rewritten as

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\gamma\sqrt{\alpha+n}}{\tau}}. \quad (40)$$

Here $\tau = \frac{1}{\beta m}$ denotes the reduce temperature [51].

In order to evaluate (40), we use the formula of the Mellin transformation [12, 52]. With this formula, the exponential function is written as an integral

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds x^{-s} \Gamma(s), \quad (41)$$

where $c \geq 0$ is real. So, the sum appears in (40) is transformed into integral as follows

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-\frac{\gamma\sqrt{\alpha+n}}{\tau}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^{-s} \sum_n (\alpha+n)^{-\frac{s}{2}} \Gamma(s) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^{-s} \zeta_H\left(\frac{s}{2}, 1+\alpha\right) \Gamma(s), \end{aligned} \quad (42)$$

with $x = \frac{\gamma}{\tau}\sqrt{\alpha+n}$, $\Gamma(s)$ and $\zeta_H\left(\frac{s}{2}, \alpha\right)$ are respectively the Euler and Hurwitz zeta function [34–36].

As we know, the Gamma Function has simple poles at the negative integers for all $s = -n$, $n \in \mathbb{N}$, and their residues at these poles are

$$\text{Re}\{\Gamma, -n\} = \frac{(-1)^n}{n!}. \quad (43)$$

On the other hand, the function defined by

$$\zeta_H(s', \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^{s'}} \quad (44)$$

is the Hurwitz zeta function [34–36]. It is a series that converges only when $\Re(s') > 1$ and $\Re(\alpha) > 0$. It can be extended by analytic continuation to a meromorphic function defined for all complex numbers s' with $s' \neq 1$. At $s' = 1$ it has a simple pole with residue 1. The condition on the convergence of the series is $s' = s/2 \geq 1$ implies $c \geq 2$. The integration in (42) can be closed only in the negative parts of the complex plane where the poles $s = \{0, 2, \mathbb{Z}^-\}$. Thus, applying the residues theorem on Eq. (42) gives (see Fig. 3)

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-\frac{\gamma\sqrt{\alpha+n}}{\tau}} &= \frac{\tau^2}{\gamma^2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2r} + \frac{\kappa^2}{2r} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_H\left(-\frac{n}{2}, 1 + \frac{1-\kappa^2}{2r}\right) \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^n, \end{aligned} \quad (45)$$

Recall here that the values of the Hurwitz zeta function are known for negative integers and are related to the Bernoulli's polynomials $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ by the following formulae [35]

$$\zeta_H(-n, \alpha) = -\frac{B_{n+1}}{n+1}. \quad (46)$$

Finally, by using that

$$\zeta_H(0, \alpha) = \frac{1}{2} - \alpha, \quad (47)$$

for the ground state $n = 0$, the desired partition function Z is written down in terms of the Hurwitz zeta function using the residues theorem for the the poles $s = \{0, 2, \mathbb{Z}^-\}$ by [35]

$$\begin{aligned} Z(\tau, a) &= \frac{\tau^2}{\gamma^2} + \frac{a^2}{2} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_H\left(-\frac{n}{2}, 1 + \frac{1-a^2}{2}\right) \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^n. \end{aligned} \quad (48)$$

Here, the ground state $n = 0$ was isolated [17, 18].

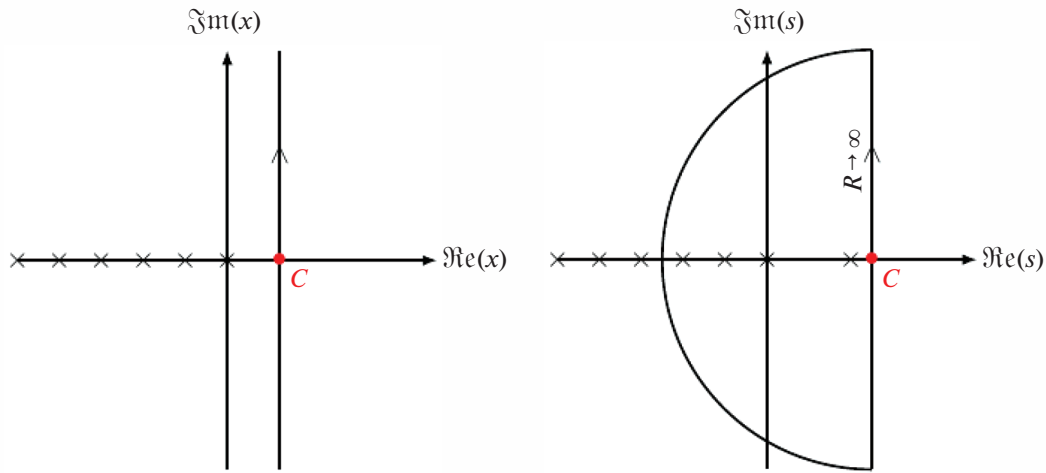


Fig. 3. (left) Contour of both Γ and $\xi_H(n, s)$ functions. (right) Contour of the Mellin transformation of the problems in question. (Figure inspired from [18]).

Now, we are ready to present and discuss our results concerning the thermal quantities of the one-dimensional Klein–Gordon oscillator in Rindler spacetime. In what follows, seeking simplicity, we have put that $r = \omega = m = 1$.

4.2. Results and Discussion

The most important thermal quantities, the free energy F , the mean energy U , the entropy S , and the specific heat C , can be obtained using the following expressions, which are derived from both definitions of the partition function:

$$F = -\tau \ln(z), \quad U = \tau^2 \frac{\partial \ln(z)}{\partial \tau}, \quad (49)$$

$$S = \ln(z) + \tau \frac{\partial \ln(z)}{\partial \tau}, \quad (50)$$

$$C = 2\tau \frac{\partial \ln(z)}{\partial \tau} + \tau^2 \frac{\partial^2 \ln(z)}{\partial \tau^2}.$$

From these above equations, all quantities are reported as a function of the reduced temperature τ . We note here that in order to determine these quantities, we have restricted ourselves to stationary states of positive energy. This is because the Klein–Gordon oscillator possesses an exact Foldy–Wouthuysen transformation (FWT) [53, 54] which means that the positive- and negative-energy solutions never mix. In this sense, we assume that only the particles with positive energy are available to determine the thermodynamic properties of our oscillator in question.

The behavior of all thermodynamics quantities for the spin-0 particles, for solutions, is shown in Fig. 4. Following this figure, we show all thermal properties of the one-dimensional KGO for different values of

acceleration a . According to this figure, we can confirm that parameter a plays a significant role in these properties, and the effect of this parameter on these properties is very important. In particular, the curves of the specific heat showed an important remark: for different values of a , all the curves coincide and tend to the asymptotic limit at 2 as in the flat spacetime [12]. In addition, we observe the following: when the solutions approach to the asymptotic limit 2 very quickly, they show a curvature around a specific temperature τ_0 . These curvatures decrease when the acceleration a increases and no abrupt change around this temperature has been identified in the curve of the numerical entropy function S . Consequently, the curvature observed in the specific heat C_v curve does not exhibit or indicate the existence of a phase transition around a τ_0 temperature.

Finally, we note the existence of a recent study on the investigation of the thermal properties of the free Klein–Gordon equation in the Rindler spacetime in one dimension [14]. The authors obtained at first the eigen-solutions of the problem in an accelerated reference frame. Then, they showed that the non-inertial effect of the accelerated reference frame mimics an external potential and allows the formation of bound states. After that, they inspected the effect of the accelerated reference frame parameter a on the thermal properties of the problem in question by using a method based on the Euler–Maclaurin method [55]. Contrary to the KGO when the curves of the specific heat showed a normal behavior as in flat spacetime case [12], they found the existence of a negative specific heat in their system.

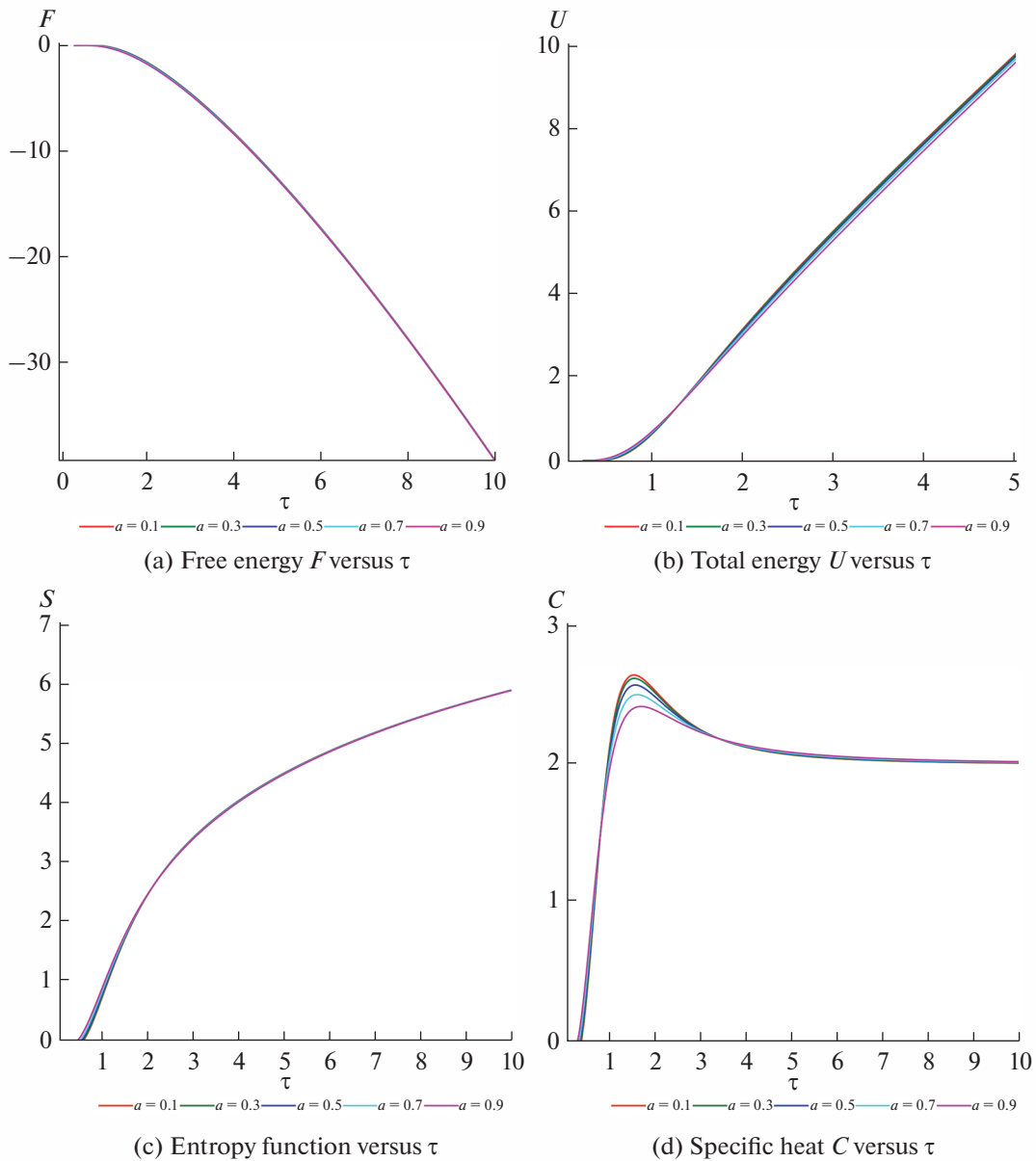


Fig. 4. Thermal properties of the 1D Klein–Gordon oscillator in Rindler spacetime.

5. CONCLUSIONS

In this paper, we have calculated the one-dimensional thermal properties of the Klein–Gordon oscillator in Rindler space-time. First of all, the eigensolutions have been obtained and used to evaluate the partition function of our problem. Then, we have studied the influence of the small values of the acceleration a on these properties. The statistical quantities were investigated by employing the Mellin and the zeta function methods. All these properties such as the free energy, the total energy, the entropy, and the specific heat, show the important effect of parameter a on the thermodynamics properties of the KGO in one dimension.

CONFLICT OF INTEREST

The authors declare that they have no conflicts of interest.

REFERENCES

1. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (Wiley, 1972; Mir, Moscow, 1975).
2. T. Jacobson, “Lectures on Quantum Gravity,” in *Series of the Centro De Estudios Cientificos (SCEC)*, Ed. by A. Gomberoff and D. Marolf (Centro de Estudios Cientificos (CECS), Valdivia, Chile, 2002).
3. K. D. Krori, P. Borgohain; P. K. Kar; and D. J. Dipali, *Math Phys.* **29**, 1645–1649 (1988).

4. K. D. Krori, P. Borgohain; and D. J. Dipali, *J. Math Phys.* **35**, 1032–1036 (1994).
5. K. Bakke and H. Belich, *Eur. Phys. J. Plus* **127**, 1–7 (2012).
6. D. Ito; K. Mori; and E. Carriere, *Nuovo Cimento A* **51**, 1119–1121 (1967).
7. M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J. Phys. A* **22**, L817 (1989).
8. R. P. y Martinez and A. L. Salas-Brito, *J. Math Phys.* **33**, 1831–1836 (1992).
9. M. Moreno and A. J. Zentella, *Phys. A* **22**, L821 (1989).
10. J. Bentez, R. P. y Martnez, H. N. Nez-Yepe, and A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1643 (1990).
11. A. Boumali and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **128**, 124 (2013).
12. A. Boumali, *J. Theor. Phys.* **12**, 121 (2015).
13. A. Boumali, L. Chetouani, and H. Hassanabadi, *Acta Phys. Pol. B* **47**, 2067 (2016).
14. A. Boumali and T. I. Rouabhia, *Phys. Lett. A* **385**, 126985 (2021).
15. K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus* **127**, 1–8 (2012).
16. H. Benzair, M. Merad, T. Boudjedaa, and A. Makhloouf, *Z. Naturforsch. A* **67**, 77–88 (2012).
17. J. D. Castano-Yepes, I. Lujan-Cabrera, and C. Ramirez-Gutierrez, *Physica A* **580**, 125206 (2021).
18. A. M. Frassino, D. Marinelli, O. Panella, and P. Roy, *J. Phys. A* **53**, 185204 (2020).
19. M. H. Pacheco, R. R. Landim, and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. A* **311**, 93–96 (2003).
20. R. Giachetti and V. Grecchi, *J. Phys. A* **44**, 095308 (2011).
21. Y. Chargui and A. Trabelsi, *Phys. Scr.* **84**, 045019 (2011).
22. N. Korichi, A. Boumali, and Y. Chargui, *J. Low Temp. Phys.* **206**, 32–50 (2022).
23. Y. Chargui, L. Chetouani, and A. Trabelsi, *Chin. Phys. B* **19**, 020305 (2010).
24. Z. Selama and A. Boumali, *Rev. Mex. Fis.* **67**, 226–237 (2021).
25. A. Boumali and Z. Selama, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **15**, 473–477 (2018).
26. B. Mirza and M. Mohadesi, *Commun. Theor. Phys.* **55**, 405–409 (2011).
27. B. Mirza, M. Mohadesi, and S. Zare, *Commun. Theor. Phys.* **42**, 664–668 (2004).
28. F. Ahmed, *Eur. Phys. J. C* **80**, 211 (2020).
29. L. C. N. Santos, C. E. Mota, and C. C. Barros, *Adv. High Energy Phys.* **2019**, 2729352 (2019).
30. N. A. Rao and B. A. Kagali, *Phys. Scr.* **77**, 015003 (2008).
31. G. Junker, *Symmetry* **13**, 835 (2021).
32. J. Carvalho, A. M. d. M. Carvalho, E. Cavalcante, and C. Furtado, *Eur. Phys. J. C* **76**, 365 (2016).
33. S. Bruce and P. Minning, *Nuovo Cimento A* **106**, 711 (1993).
34. E. Elizalde, *J. Math. Phys.* **35**, 6100 (1994).
35. E. Elizalde, S. Odintsov, A. Romeo, A. Bytsenko, and S. Zerbini, *Zeta Regularization Techniques with Applications* (Springer, Berlin, 1995).
36. E. Elizalde, *J. Phys. A* **34**, 3025 (2001).
37. M. A. Dariescu and C. Dariescu, *Chaos: Solitons and Fractals* **33**, 776–781 (2007).
38. M. A. Dariescu and C. Dariescu, *J. Phys.: Condens. Matter* **19**, 256203 (2007).
39. M. A. Dariescu, O. Buhucianu, and A. Iordana, *Rom. J. Phys.* **56**, 1043–1052 (2011).
40. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Nauka, Moscow, 1988; Pergamon Press, New York, 1975).
41. M. Socolovsky, *Annales de la Fondation Louis de Broglie* **39**, 1 (2014).
42. S. W. Hawking, *Nature* **30**, 248 (1974).
43. W. G. Unruh, *Phys. Rev D* **14**, 870 (1976).
44. B. W. Rindler, *Essential Relativity: Essential Relativity: Special, General, and Cosmological* (Springer, New York, 1977).
45. V. Mukhanov and S. Winitzki, *Introduction to Quantum Effects in Gravity* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007).
46. R. Szmytkowski and M. Gruchowski, *J. Phys. A* **34**, 4991–4998 (2001).
47. L. C. N. Santos, C. E. Mota, J. Barros, L. B. Castro, and V. B. Bezerra, *Ann. Phys.* **421**, 168276 (2020).
48. T. Jacobson, *Introduction to Quantum Fields in Curved Spacetime and the Hawking Effect*, Chap. 2 (Springer, 2002), pp. 39–89.
49. S. Flugge, *Practical Quantum Mechanics* (Springer Science & Business Media, 2012; Moscow, Mir, 1974).
50. A. Boumali, A. Hafdallah, and A. Toumi, *Phys. Scr.* **84**, 037001 (2011).
51. A. Boumali and H. Hassanabadi, *Can. J. Phys.* **93**, 542–548 (2014).
52. J. Bertrand, P. Bertrand, and J. P. Ovarlez, *The Mellin Transform. The Transforms and Applications Handbook*, Ed. by R. C. Dorf (hal-03152634, 1995), Chap. 12, pp. 1–38.
53. L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.* **78**, 29–36 (1950).
54. L. L. Foldy, *Phys. Rev.* **87**, 688–693 (1952).
55. G. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999; MNTsMO, 2013).

SPELL: 1. ok

STATISTICAL PROPERTIES OF THE ONE-DIMENSIONAL DIRAC OSCILLATOR IN RINDLER SPACE–TIME

T. I. Rouabhia* and A. Boumali*

We study the spin-1/2 relativistic fermions influenced by the Dirac oscillator in Rindler’s space–time. The energy eigenvalues of this oscillator enable us to calculate the thermodynamic properties of this oscillator by using the Hurwitz zeta function via the Mellin transformation. The effect of the geometry of space–time on these properties is studied.

Keywords: Dirac oscillator, Rindler space–time, partition function, Hurwitz zeta function

DOI: 10.1134/S0040577923100124

1. Introduction

In recent years, interest in the study of quantum mechanical relativistic particles and gravity has focused on solving the general relativistic form of their wave equations. These equations may appear insignificant at the atomic level, where gravitational effects are minimal. The physics that governs these particles is crucial to astrophysics and cosmology, where gravitational effects predominate. Moreover, the study of single-particle states is essential for developing a unified theory of gravity and quantum mechanics [1], [2].

The Dirac relativistic oscillator has a significant theoretical and practical potential. It was first investigated in [3]; a Dirac equation was considered there with the momentum \vec{p} replaced by $\vec{p} - im\beta\omega\vec{r}$, where \vec{r} is the radius vector of the particle, m is its mass, and ω is the oscillator frequency. The authors of [4], [5] rekindled interest in the problem by naming it the Dirac oscillator (DO) because it becomes a harmonic oscillator with a very strong spin–orbit coupling term in the nonrelativistic limit. The DO interaction can be shown to describe a physical system interpreted as the interaction of an anomalous magnetic moment with a linear electric field [6], [7].

The coordinates of a hyperbolically accelerated reference frame are an important and useful coordinate chart representing a part of the flat Minkowski space–time in relativistic physics [8], [9]. A uniformly accelerating particle in special relativity experiences hyperbolic motion, for which a uniformly accelerating frame of reference in which it is at rest can be selected as its proper reference frame. The effects arising in a homogeneous gravitational field can be compared to the phenomena in this hyperbolically accelerated frame. The uniformly accelerated observers in Minkowski space–time [10], also known as the Rindler space–time, are another type of noninertial system that could be investigated for this purpose. Parallel to this, gravitational effects on quantum mechanical systems have been extensively studied over the last several years [11].

*Laboratory of Theoretical and Applied Physics, Echahid Cheikh Larbi Tebessi University, Tebessa, Algeria, e-mails: ti.rouabhia@univ-tebessa.dz, abdelmalek.boumali@univ-tebessa.dz (boumali.abdelmalek@gmail.com, corresponding author).

Prepared from an English manuscript submitted by the authors; for the Russian version, see *Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika*, Vol. 217, No. 1, pp. 220–232, October, 2023. Received January 10, 2023. Revised April 15, 2023. Accepted May 4, 2023.

The question of how quantum systems are affected by the structure of space–time, and whether there is any significant effect, is fundamental in physics. Systematic studies are being conducted to investigate these gravitational effects [12].

The thermal properties of DO oscillator were first considered in [13], where the Euler–MacLaurin formula was used to calculate all of the thermal quantities of the oscillator. Although this method can be used to obtain all thermal properties of the system, the expansion of the partition function using it is only valid in high-temperature regimes. The partition function diverges at the temperature $T = 0$ K. Here, we are interested in i) improving the calculations of the thermodynamic properties of relativistic harmonic oscillators in all temperature ranges, and ii) removing the divergence that appears in the partition function of the DO at $T = 0$ K. Both objectives can be met by employing a zeta function-based method [14]–[16]. The zeta function has been successfully applied in a variety of fields in physics, ranging from ordinary quantum and statistical mechanics to quantum field theory [17].

In this paper, a single-particle solution of the DO equation in an accelerated reference frame is discussed. The paper is organized as follows. In Sec. 2, we present a DO equation for spin-1/2 fermions in the Rindler space–time. In Sec. 3, we present the thermal properties of spin-1/2 fermion particles and their behavior in the same accelerate frame. We conclude in Sec. 4. Throughout this paper, we use natural units $\hbar = c = 1$.

2. One-dimensional Dirac oscillator in Rindler space–time

2.1. Free fermionic particles in Rindler space–time. The Minkowski metric in Rindler’s coordinates (η, ξ) is [8], [18]–[20]

$$ds^2 = e^{\sigma(\xi)}(d\eta^2 - d\xi^2). \quad (1)$$

Because the Rindler space–time differs from the Minkowski space–time only by a change of coordinates, its curvature is everywhere zero. The laboratory and conformal coordinates are related as [8], [21]

$$t(\eta, \xi) = \frac{e^{a\xi}}{a} \sinh(a\eta), \quad x(\eta, \xi) = \frac{e^{a\xi}}{a} \cosh(a\eta), \quad (2)$$

where a is the acceleration and the coordinates (η, ξ) range the intervals $-\infty < \eta < +\infty$ and $-\infty < \xi < +\infty$.

The Dirac equation in arbitrarily curved space–time has the form [18]

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - \Gamma_\mu) - m]\psi_D = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (3)$$

with m is the particle mass, $\Gamma_\mu(x)$ are the spinor affine connection, and γ^μ are the generalized Dirac matrices. They satisfy the anticommutation relations

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (4)$$

The local $\gamma^\mu(x)$ are connected with the standard flat space–time Dirac matrices γ^a via a set of tetrad fields $e_a^\mu(x)$ as [22]

$$\gamma^\mu(x) = e_a^\mu(x)\gamma^a. \quad (5)$$

These matrices obey the relation

$$e_a^\mu(x)e_b^\nu(x)\eta'^{ab} = g^{\mu\nu}, \quad (6)$$

where $(\mu, \nu) = (0, 1, 2, 3)$ are tensor indices, $(a, b) = (0, 1, 2, 3)$ are tetrad indices, and $\eta'^{ab} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ is the Minkowski tensor [22]. The form of e_μ^a and their inverse e_a^μ are suggested by the diagonal form of the line element [23]:

$$e_\mu^a = e^{\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_a^\mu = e^{-\sigma(\xi)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

The Christoffel symbols $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu$ are given by

$$\Gamma_{\sigma\mu}^\nu = \frac{1}{2}g^{\nu\beta}[\partial_\sigma g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\beta\sigma} - \partial_\beta g_{\sigma\mu}]. \quad (8)$$

With the γ matrices represented as [24], [25]

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (9)$$

we have

$$\gamma^0(\xi) = \gamma^0 e^{-\sigma(\xi)}, \quad \gamma^1(\xi) = \gamma^1 e^{-\sigma(\xi)}. \quad (10)$$

With all the parameters in Eq. (3) determined, the free Dirac equation in Rindler's space-time takes the form [24]

$$\left[i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^1 \left(\partial_\xi + \frac{1}{4} \frac{d\sigma(\xi)}{d\xi} \right) - m e^{\sigma(\xi)/2} \right] \psi_D = 0. \quad (11)$$

It can be reformulated as the eigenvalue equation

$$H_D \psi_D = E \psi_D, \quad (12)$$

where

$$H_D = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi - \frac{1}{4} \frac{d\sigma(\xi)}{d\xi} + m e^{\sigma(\xi)/2} \\ \partial_\xi + \frac{1}{4} \frac{d\sigma(\xi)}{d\xi} + m e^{\sigma(\xi)/2} & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

is Dirac's Hamiltonian.

After the unitary transformation [24], [26]

$$U(\xi) = e^{\sigma(\xi)/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

Dirac equation (12) becomes

$$\tilde{H}_D \tilde{\psi}_D(\xi) = \varepsilon \tilde{\psi}_D(\xi), \quad \tilde{\psi}_D(\xi) = (\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2)^T. \quad (15)$$

The new wave function $\tilde{\psi}_D(\xi)$ is related to $\psi_D = (\psi_1, \psi_2)^T$ by a unitary transformation U as

$$\tilde{\psi}_D(\xi) = U \psi_D(\xi). \quad (16)$$

Thus,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} = e^{\sigma(\xi)/2} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

The new Hamiltonian is

$$\tilde{H}_D = U H_D U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi + m e^{\sigma(\xi)/2} \\ \partial_\xi + m e^{\sigma(\xi)/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

As a result, we obtain the systems of equations

$$(-\partial_\xi + me^{\sigma(\xi)/2})\tilde{\psi}_2 = E\tilde{\psi}_1, \quad (19)$$

$$(\partial_\xi + me^{\sigma(\xi)/2})\tilde{\psi}_1 = E\tilde{\psi}_2. \quad (20)$$

It follows from Eq. (20) that

$$\tilde{\psi}_2 = \frac{\partial_\xi + me^{\sigma(\xi)/2}}{E}\tilde{\psi}_1. \quad (21)$$

Substituting (21) in (19) leads to a differential equation for the $\tilde{\psi}_1$ component,

$$\{-\partial_\xi^2 - ma - E^2 + m^2e^{\sigma(\xi)}\}\tilde{\psi}_1(\xi) = 0. \quad (22)$$

We consider the particular case where $\sigma(\xi) = 2a\xi$ [24], [26]. To find solutions of (22), we use a new variable $z = \frac{m}{a}e^{a\xi}$. After some simple calculations, we obtain

$$\left\{z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} - (z^2 - \nu^2)\right\}\tilde{\psi}_1(z) = 0, \quad \nu = i\sqrt{\frac{E^2 - ma}{a^2}}. \quad (23)$$

This is Bessel's equation in modified form with a complex index ν . The general solution of (22) is given by [27], [28]

$$\tilde{\psi}_1(z) = aI_\nu(z) + bK_\nu(z), \quad (24)$$

under the boundary conditions

$$\tilde{\psi}_1(\infty) = \tilde{\psi}_1(m/a) = 0. \quad (25)$$

The physical reason to impose these conditions at the boundaries is to have regular solutions at ∞ by setting the wave function in this limit equal to zero. The condition infinity therefore requires setting the coefficient at I_ν to zero, because K_ν is an exponentially decaying solution and I_ν exponentially increases.

Now, to solve Eq. (22), we use the approximation of low values of the acceleration a , as in [26]. In this case, the variable $z = \frac{m}{a}e^{a\xi}$ becomes

$$z = \frac{m}{a}(1 + a\xi + \dots). \quad (26)$$

Substituting this equation in (22) yields

$$\{-\partial_\xi^2 + 2am^2\xi - \zeta\}\tilde{\psi}_1(\xi) = 0, \quad \zeta = E^2 + ma - m^2. \quad (27)$$

We set

$$\alpha = 2am^2 = \frac{1}{l^3}, \quad \zeta \equiv E^2 + ma - m^2 = \frac{\lambda}{2ml^2}, \quad (28)$$

where $l = 1/(2am^2)^{1/3}$ is the characteristic length, which can be computed for any mass. For an electron, $l = 0.088$ cm for $a = g$ and this length decreases as mass increases [28]. With the new variable $\varrho = \xi/l - \lambda$, Eq. (27) becomes

$$\frac{\partial^2 \tilde{\psi}_1}{\partial \varrho^2} - \varrho \tilde{\psi}_1 = 0, \quad (29)$$

The new boundary conditions are

$$\tilde{\psi}_1(-\lambda) = 0, \quad \tilde{\psi}_1(\infty) \rightarrow 0. \quad (30)$$

The solution of Eq. (29) with $\tilde{\psi}_1(\infty) = 0$ is given by the Airy function [20], [27], [28]

$$\tilde{\psi}_1(\xi) = N_{\text{norm}} \text{Ai}(\xi). \quad (31)$$

For higher levels, $\lambda \gg 1$, we find (see [20], [26], [28] for more details)

$$\lambda_n = \left(\frac{3\pi}{4} \left(2n + \frac{1}{2} \right) \right)^{2/3}. \quad (32)$$

Substituting (32) in ζ defined in (28) leads to the final form of the energy spectrum:

$$E_n = \pm m \sqrt{1 - \frac{a}{m} + \frac{1}{m^3 l^2} \left(\frac{3\pi}{4} \left(2n + \frac{1}{2} \right) \right)^{2/3}} \quad \text{for } n \gg 1. \quad (33)$$

This equation is a compact expression for the energy spectrum associated with an accelerated reference. It shows that the noninertial effect of the accelerated frame of reference mimics an external potential in the Dirac equation and also allows the formation of bound states [20], [26].

Figure 1 shows the energy spectrum of 1D free DO in Rindler's space-time vs. the quantum number n for different values of other parameters. We see from Fig. 1a that the effect of the parameter l is significant only for its low values. For large l , the energy levels coincide. This remark allows us to understand Fig. 1b, showing the variation of the energy spectrum E vs. the quantum number n for various acceleration values of a . According to this figure, the curves become more distinct for lower levels.

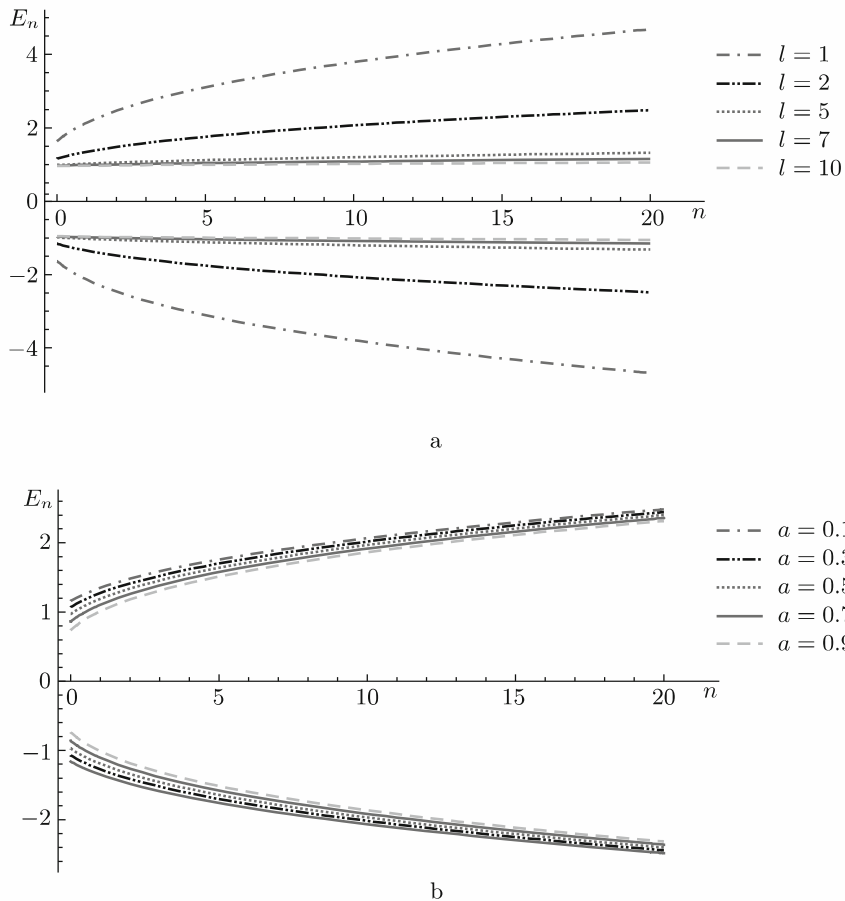


Fig. 1. Energy spectrum of free fermion particles within Rindler's space-time in one dimension: E_n versus n for different values of l for $a = 0.1$ (a) and E_n versus n for different values of a for $l = 3$ (b).

2.2. Fermionic particles in the presence of the Dirac oscillator in one dimension. Now, to incorporate the interaction that describes the DO, we proceed with the following substitution in the momentum component: $\partial_\xi \rightarrow \partial_\xi + m\omega\beta\xi$ [29]–[31]. Equations (11) is them transformed into

$$\left[i\gamma^0 \left(\partial_\xi + m\omega\beta\xi + \frac{a}{2} \right) + E - \gamma^0 m e^{a\xi} \right] \Psi_D = 0. \quad (34)$$

To solve (34), we adopt the ansatz

$$\Psi_D = e^{-i\varepsilon\eta} \begin{pmatrix} \psi_1(\xi) \\ \psi_2(\xi) \end{pmatrix}. \quad (35)$$

This gives the system of equations

$$\begin{aligned} \left(\partial_\xi - m\omega\xi + \frac{a\xi}{2} + z(\xi) \right) \psi_1(\xi) &= \varepsilon\psi_2(\xi), \\ \left(-\partial_\xi + m\omega\xi - \frac{a\xi}{2} + z(\xi) \right) \psi_2(\xi) &= \varepsilon\psi_1(\xi), \end{aligned} \quad (36)$$

with $z(\xi) = m e^{a\xi}$. Explicitly, Eq. (36) can be written as

$$\begin{aligned} H_D \Psi_D &= \varepsilon \Psi_D, \\ H_D &= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi + m\omega\xi - a\xi/2 + z(\xi) \\ \partial_\xi - m\omega\xi - a\xi/2 + z(\xi) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (37)$$

Using the same procedure as above (also see [24], [26]), we obtain a new Dirac equation with a new Hamiltonian,

$$\begin{aligned} \tilde{H}_D \tilde{\Psi}_D(\xi) &= \varepsilon \tilde{\Psi}_D(\xi), \\ \tilde{H}_D &= \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\xi + m\omega\xi - z(\xi) \\ \partial_\xi + m\omega\xi + z(\xi) & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (38)$$

whence, finally,

$$\{-\partial_\xi^2 - m\omega + m^2\omega^2\xi^2 - \partial_\xi z(\xi) - \varepsilon^2 + z^2(\xi)\} \tilde{\psi}_1 = 0. \quad (39)$$

To solve this equation, we adopt the approximation where the acceleration a is small, and therefore

$$z(\xi) = m e^{a\xi} \simeq m(1 + a\xi). \quad (40)$$

In this approximation, Eq. (39) is transformed into

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\xi + \frac{a}{\omega} \right)^2 \right\} \tilde{\psi}_1 = \frac{\varepsilon^2 - m^2 + m(a + \omega)}{2m} \tilde{\psi}_1. \quad (41)$$

Setting

$$y = \xi + \frac{a}{\omega}, \quad \epsilon = \frac{\varepsilon^2 - m^2 + m(a + \omega)}{2m}, \quad (42)$$

we obtain

$$\left\{ -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 \right\} \tilde{\psi}_1 = \epsilon \tilde{\psi}_1. \quad (43)$$

Equation (43) is the standard equation for a harmonic oscillator in one dimension. Its energy levels are well known, and the solutions are

$$\frac{\varepsilon_n^2 - m^2 + m(a + \omega)}{2m} = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (44)$$

whence

$$\varepsilon_n = \pm m \sqrt{\frac{2n\omega}{m} + 1 - \frac{a}{m}}. \quad (45)$$

Figure 2 shows the energy spectrum of the 1D DO in Rindler's space-time. We see that for a small acceleration a , only the lower levels are affected by the acceleration of the frame. For very low values of a , this influence can be ignored and the effect of this parameter on the energy spectrum indistinct.

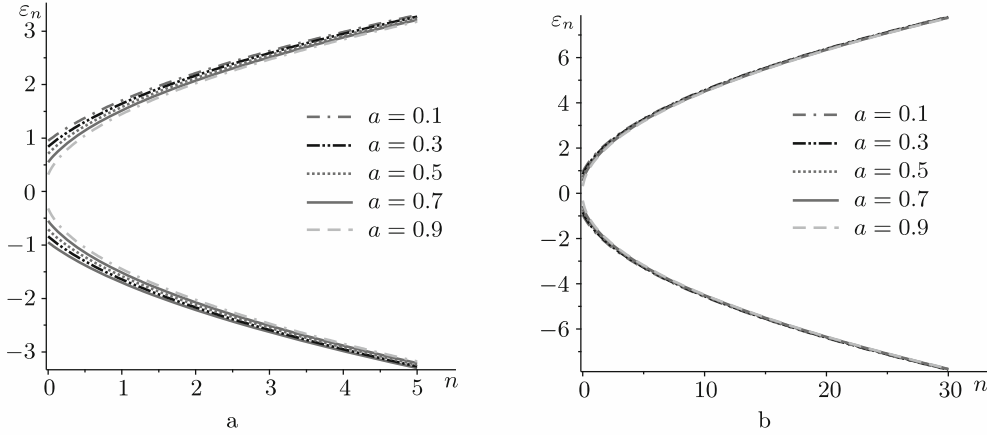


Fig. 2. Energy eigenvalues of a 1D DO in Rindler's space-time.

3. Thermodynamic properties of the Dirac oscillator in Rindler space-time

3.1. The method. We first calculate the partition function Z and then extract the thermodynamic quantities of the relativistic harmonic oscillator from it. The partition function is given by

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n e^{-\sqrt{2}\beta\sqrt{\alpha+n}}, \quad \alpha = \frac{1-a}{2}, \quad (46)$$

where $\omega/m = 1$. With Mellin's transformation for the exponential

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} ds x^{-s} \Gamma(s) \quad (47)$$

(see Fig. 3a), the sum appearing in (46) becomes

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-\sqrt{2}\beta\sqrt{\alpha+n}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} ds (\sqrt{2}\beta)^{-s} \sum_n (\alpha+n)^{-s/2} \Gamma(s) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} ds (\sqrt{2}\beta)^{-s} \zeta_H(s/2, \alpha) \Gamma(s), \end{aligned} \quad (48)$$

where we set $x = \sqrt{2}\beta\sqrt{\alpha+n}$ in (47), and $\Gamma(s)$ and $\zeta_H(s/2, \alpha)$ are the respective gamma function and Hurwitz function. We note that the gamma function has simple poles at all nonpositive integers $s = -n$, $n \in \mathbb{N}$, and their residues are $(-1)^n/n!$ [16], [17], [32], [33].

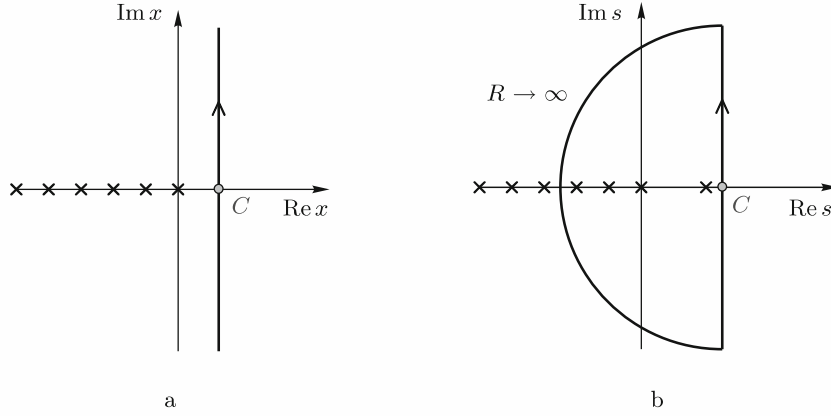


Fig. 3. (a) The Mellin transformation contour in Eq. (47); crosses show poles of the gamma function. (b) Contour in the residue theorem and poles of the integrand in the problem under consideration. The drawings are inspired by [32], [34].

Applying the residue theorem to Eq. (48) gives

$$\sum_n e^{-\sqrt{2}\beta\sqrt{\alpha+n}} = \frac{1}{2\beta^2} + \zeta_{\text{H}}(0, \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{\text{H}}\left(-\frac{n}{2}, \alpha\right) \frac{(-1)^n}{n!} (\sqrt{2}\beta)^n. \quad (49)$$

Finally, the sought partition function Z can be written in terms of the Hurwitz zeta function using the residue theorem as

$$Z(\tau, a) = \frac{1}{2\beta^2} + \zeta_{\text{H}}\left(0, \frac{1-a}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_{\text{H}}\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-a}{2}\right) \frac{(-1)^n}{n!} (\sqrt{2}\beta)^n. \quad (50)$$

Thus result allows us to determine all thermal properties of the one-dimensional DO in Rindler's space-time.

At this stage, we can make an important remark about choosing the appropriate sign of the energy spectrum for calculating the partition function. We limit ourselves to positive-energy stationary states. The reason for this can be interpreted as follows: it was shown in [7], [35] that a physical interpretation of the DO can easily be obtained by performing the Foldy-Wouthuysen transformation [36]. In other words, regardless of the coupling strength, positive and negative energy solutions do not mix. The states of negative or positive energy are occupied but a mixture of the two branches never occurs, which would have caused particle-antiparticle annihilation. Hence, the fermion states are divided into two sectors: the usual positive sector consisting of states with a positive number of fermions, and the negative sector, consisting of states with a negative number of fermions. Once a state enters the negative sector, it cannot return to the usual positive sector through an ordinary interaction, due to the presence of a barrier (similar to the gap in solid-state physics) [37]. Hence, according to the above arguments, we assume that only positive-energy particles participate in establishing the thermodynamic properties of the system.

3.2. Results and discussion. The most important thermal quantities—the free energy F , the mean energy U , the entropy S , and the specific heat C_v —can be obtained from the partition function [38], [16]:

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{\beta} \ln Z, & U &= -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \\ \frac{S}{k_{\text{B}}} &= \ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, & \frac{C_V}{k_{\text{B}}} &= \beta^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}. \end{aligned} \quad (51)$$

We have computed these thermodynamic quantities for the one-dimensional DO in Rindler space–time. In Fig. 4, they are shown as functions of the temperature $1/\beta$ in the relativistic case with $r = \omega/m$. We discuss the results. A difference can be seen in the behavior of the specific heat C_v : when the solutions rapidly approach the $2k_B$ limit, the plots show a curvature around a specific temperature $1/\beta_0$. In plots of the entropy S with different values of the acceleration a , no abrupt change around this temperature can be identified. The curvature observed in the specific heat C_v curve does not exhibit or indicate the existence of a phase transition around $1/\beta_0$.

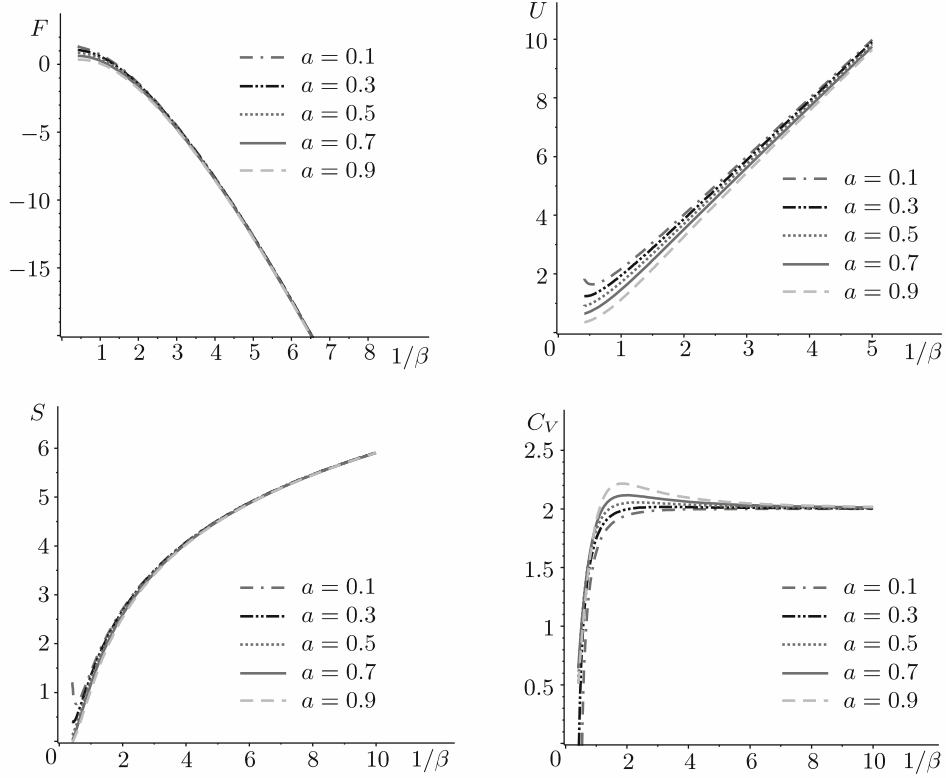


Fig. 4. Thermal properties of the one-dimensional DO in Rindler space–time.

4. Conclusions

In this paper, we have calculated the one-dimensional thermal properties of the DO in Rindler space–time. We first obtained the spectrum energy of the oscillator and then evaluated the numerical partition function. As a consequence, we determined all thermal properties. For specific heat curves, we observe a bump that disappears when the acceleration decreases. These curves do not exhibit or indicate the existence of a phase transition.

Acknowledgments. The authors express our gratitude to the referee for their careful review of our manuscript and the valuable suggestions.

Conflicts of interest. The authors declare no conflicts of interest.

REFERENCES

1. W.-Y. Tsai and A. Yildiz, “Motion of charged particles in a homogeneous magnetic field,” *Phys. Rev. D.*, **4**, 3643–3648 (1971); T. Goldman and W.-Y. Tsai, “Motion of charged particles in a homogeneous magnetic field. II,” 3648–3651.
2. L. D. Krase, Pao Lu, and R. H. Good, Jr., “Stationary states of a spin-1 particle in a constant magnetic field,” *Phys. Rev. D.*, **3**, 1275–1279 (1971).
3. D. Itô, K. Mori, and E. Carriere, “An example of dynamical systems with linear trajectory,” *Nuovo Cim. A*, **51**, 1119–1121 (1967).
4. M. Moshinsky and A. Szczepaniak, “The Dirac oscillator,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**, L817–L819 (1989).
5. C. Quesne and M. Moshinsky, “Symmetry Lie algebra of the Dirac oscillator,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, **23**, 2263–2272 (1990).
6. R. P. Martínez-y-Romero and A. L. Salas-Brito, “Conformal invariance in a Dirac oscillator,” *J. Math. Phys.*, **33**, 1831–1836 (1992).
7. M. Moreno and A. Zentella, “Covariance, CPT and the Foldy–Wouthuysen transformation for the Dirac oscillator,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, **22**, L821–L825 (1989).
8. W. Rindler, *Essential Relativity: Special, General, and Cosmological*, Springer, Berlin (1977).
9. W. Rindler, “General Relativity,” Book review *Science*, **230**, 1268–1269 (1985).
10. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics*, Vol. 2: *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford–London (1962).
11. L. Parker, “One-electron atom in curved space–time,” *Phys. Rev. Lett.*, **44**, 1559–1562 (1980); “One-electron atom as a probe of spacetime curvature,” *Phys. Rev. D*, **22**, 1922–1934 (1980); “Self-forces and atoms in gravitational fields,” **24**, 535–537 (1981); “The atom as a probe of curved space–time,” *Gen. Relat. Gravit.*, **13**, 307–311 (1981).
12. L. C. N. Santos and C. C. Barros, Jr., “Dirac equation and the Melvin metric,” *Eur. Phys. J. C*, **76**, 560, 7 pp. (2016); “Scalar bosons under the influence of noninertial effects in the cosmic string spacetime,” **77**, 186, 7 pp. (2017).
13. M. H. Pacheco, R. R. Landim, and C. A. S. Almeida, “One-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath,” *Phys. Lett. A*, **311**, 93–96 (2003).
14. M.-A. Dariescu and C. Dariescu, “Persistent currents and critical magnetic field in planar dynamics of charged bosons,” *J. Phys.: Condens. Matter*, **19**, 256203, 9 pp. (2007).
15. M.-A. Dariescu and C. Dariescu, “Finite temperature analysis of quantum Hall-type behavior of charged bosons,” *Chaos Solitons Fractals*, **33**, 776–781 (2007).
16. A. Boumali, “The one-dimensional thermal properties for the relativistic harmonic oscillators,” *Electronic J. Theor. Phys.*, **12**, 121–130 (2015), arXiv: 1409.6205.
17. E. Elizalde, S. D. Odintsov, A. Romeo, A. A. Bytsenko, and S. Zerbini, *Zeta Regularization Techniques with Applications*, World Sci., Singapore (1994); E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*, Lecture Notes in Physics, Vol. 855, Springer, Berlin (2012).
18. L. C. N. Santos, C. E. Mota, C. C. Barros, Jr., L. B. Castro, and V. B. Bezerra, “Quantum dynamics of scalar particles in the space–time of a cosmic string in the context of gravity’s rainbow,” *Ann. Physics*, **421**, 168276, 14 pp. (2020).
19. R. Szmytkowski and M. Gruchowski, “Completeness of the Dirac oscillator eigenfunctions,” *J. Phys. A: Math. Gen.*, **34**, 4991–4997 (2001).
20. A. Boumali and T. I. Rouabhia, “The thermal properties of the one-dimensional boson particles in Rindler spacetime,” *Phys. Lett. A*, **385**, 126985, 8 pp. (2021).
21. V. Mukhanov and S. Winitzk, *Introduction to Quantum Effects in Gravity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007).
22. M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Graduate Student Series in Physics, Institute of Physics, Bristol (2003).

23. R. A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory*, International Series of Monographs on Physics, Oxford Univ. Press, New York (2000).
24. S. K. Moayedi and F. Darabi, “Exact solutions of Dirac equation on a 2D gravitational background,” *Phys. Lett. A*, **322**, 173–178 (2004).
25. R. Jackiw and C. Rebbi, “Solitons with fermion number 1/2,” *Phys. Rev. D*, **13**, 3398–3409 (1976).
26. L. C.N. Santos and C. C. Barros, “Fermions in the Rindler spacetime,” *Internat. J. Geom. Methods Modern Phys.*, **16**, 1950140, 10 pp. (2019).
27. S. Flügge, “Practical Quantum Mechanics,” Book reviews *Amer. J. Phys.*, **41**, 140 (1973).
28. S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Classics in Mathematics, Springer, Berlin, Heidelberg (2012).
29. J. Carvalho, C. Furtado, and F. Moraes, “Dirac oscillator interacting with a topological defect,” *Phys. Rev. A*, **84**, 032109, 6 pp. (2011).
30. A. Boumali and N. Messai, “Klein–Gordon oscillator under a uniform magnetic field in cosmic string space-time,” *Can. J. Phys.*, **92**, 1460–1463 (2014).
31. A. Boumali, A. Hafdallah, and A. Toumi, “Comment on ‘Energy profile of the one-dimensional Klein–Gordon oscillator’,” *Phys. Scr.*, **84**, 037001, 3 pp. (2011).
32. A. M. Frassino, D. Marinelli, O. Panella, and P. Roy, “Thermodynamics of quantum phase transitions of a Dirac oscillator in a homogenous magnetic field,” *J. Phys. A: Math. Theor.*, **53**, 185204, 19 pp. (2020).
33. A. Boumali, F. Serdouk, and S. Dilmi, “Superstatistical properties of the one-dimensional Dirac oscillator,” *Phys. A*, **533**, 124207, 13 pp. (2020).
34. J. D. Castano-Yepes, I. A. Lujan-Cabrera, and C. F. Ramirez-Gutierrez, “Comments on superstatistical properties of the one-dimensional Dirac oscillator by Abdelmalek Boumali et al.,” *Phys. A*, **580**, 125206, 7 pp. (2021).
35. M. Moreno, R. Martínez, and A. Zentella, “Supersymmetry, Foldy–Wouthuysen transformation and stability of the Dirac sea,” *Modern Phys. Lett. A.*, **5**, 949–954 (1990).
36. L. L. Foldy and S. A. Wouthuysen, “On the Dirac theory of spin 1/2 particles and its non-relativistic limit,” *Phys. Rev.*, **78**, 29–36 (1950).
37. N. M. Myers, O. Abah, and S. Deffner, “Quantum Otto engines at relativistic energies,” *New. J. Phys.*, **23**, 105001, 16 pp. (2021).
38. A. Boumali and H. Hassanabadi, “The thermal properties of a two-dimensional Dirac oscillator under an external magnetic field,” *Eur. Phys. J. Plus*, **128**, 124, 18 pp. (2013).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.R.Wald, *General relativity*, University of Chicago press, **2010**.
- [2] P.M.Hobson, P.G.Efstathiou, A.N.Lasenby, *General relativity : an introduction for physicists*, Cambridge University Press, **2006**.
- [3] B. Schutz, *A first course in general relativity*, Cambridge university press, **2022**.
- [4] A.Einstein, M.Solovine, *La relativité*, Payot Paris, **1956**.
- [5] M. Moshinsky, Y. F. Smirnov, *The harmonic oscillator in modern physics*, Harwood academic publishers, **1996**.
- [6] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, 22, L817.
- [7] D. Ito, K. Mori, E. Carriere, *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)* **1967**, 51, 1119–1121.
- [8] C. Quesne, M. Moshinsky, *J. Phys. A : Math. Gen* **1990**, 23, 2263–2272.
- [9] M. M. Moreno, A. Zentella, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, 22, L821.
- [10] R. P. Martinez, A. L. Salas-Brito, *J. Math. Phys* **1992**, 33, 1831–1836.
- [11] R. Blatt, C. Roos, *Nat Phys* **2012**, 8, 277–284.
- [12] A. Boumali, L. Chetouani, *Phys. Lett. A* **2005**, 346, 261–268.
- [13] A. Boumali, Ph.D. thesis, Université d'Annaba, **2006**.
- [14] A. Boumali, *Phys. Scr.* **2007**, 76, 669.
- [15] A. Boumali, *Electron. J. Theor. Phys* **2015**, 12, 121–130.

- [16] A. Boumali, F. Serdouk, S. Dilmi, *Physica A* **2020**, 553, 124207.
- [17] B. Mirza, M. Mohadesi, S. Zare, *Commun.Theor.Phys.* **2004**, 42, 664–668.
- [18] Y. Nedjadi, R. C. Barrett, *J. Phys. A : Math. Gen.* **1998**, 31, 6717.
- [19] M. Pacheco, R. Landim, C. Almeida, *Phys. Lett. A* **2003**, 311, 93–96.
- [20] J. Wang, K. Li, *Chinese. Phys C* **2008**, 32, 803–806.
- [21] B. P. Mandal, S. Verma, *Phys. Lett. A* **2012**, 376, 2467–2470.
- [22] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, E. Solano, *Phys. Rev. A* **2007**, 76, 041801.
- [23] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, A. Luis, *Phys. Rev. A* **2008**, 77, 063815.
- [24] O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. deArago, P. Castorina, D. Zappala, *Phys. Rev D* **2005**, 72, 025010.
- [25] H. Hassanabadi, S. S. Hosseini, A. N. Ikot, A. Boumali, S. Zarrinkamar, *Eur. Phys. J. Plus* **2014**, 129, 132.
- [26] H. H. A. Boumali, *Eur. Phys. J. Plus* **2013**, 128, 124.
- [27] A. Boumali, T. I. Rouabhia, *Phys. Lett. A* **2021**, 385, 126985.
- [28] N. m. Abdelmalek Boumali, *Can J Phys* **2014**, 92, 1460–1463.
- [29] A. Boumali, L. Chetouani, *Phys. Lett. A.* **2005**, 346, 261–268.
- [30] A. Boumali, Ph.D. thesis, Universite d'Annaba, **2006**.
- [31] A. Boumali, *J. Math. Phys.* **2008**, 49, 022302.
- [32] A. Boumali, *Turkish Journal of Physics* **2008**, 31, 307–316.
- [33] A. Boumali, *J. Phys. A : Math. Theor.* **2009**, 42, 235301.
- [34] A. Boumali, A. Hafdallah, A. Toumi, *Phys. Scr.* **2011**, 84, 037001.
- [35] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur Phys. J Plus.* **2013**, 128, 124.
- [36] A. Boumali, L. Chetouani, H. Hassanabadi, *Can. J. Phys* **2013**, 91, 1–11.
- [37] A. Boumali, N. Messai, *Can. J. Phys* **2014**, 92, 1460–1463.
- [38] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Z. Naturforsch. A* **2015**, 70, 619–627.

- [39] A. Boumali, M. Labidi, *Mod. Phys. Lett. A* **2018**, *33*, 1850033.
- [40] A. Boumali, Z. Selama, *Phys. Part. Nuclei Lett* **2018**, *15*, 473–477.
- [41] A. Boumali, M. Labidi, *Modern Physics Letters A* **2018**, *33*, 1850033.
- [42] A. Boumali, H. Aounallah, *Rev. Mex. Fis* **2020**, *66*, 192–208.
- [43] A. Boumali, M. Labidi, *J. Low. Temp. Phys* **2021**, *203*, s10909–021–02596–6.
- [44] N. Korichi, A. B. Y. Chargui, *J. Low. Temp. Phys.* **2021**, *206*, 32–50.
- [45] N. Korichi, A. Boumali, H. hassanabadi, *Physica. A.* **2022**, *587*, 126508.
- [46] N. Korichi, A. Boumali, Y. Chargui, *J. Low Temp. Phys.* **2022**, *206*, 32–50.
- [47] M. Labidi, A. Boumali, A. N. Ikot, *Rev. Mex. Fis* **2020**, *66*, 671–682.
- [48] Z. Selama, A. Boumali, *Rev. Mex. Fis.* **2021**, *67*, 226–237.
- [49] E. Sadurni, J. M. Torres, T. H. Seligman, *J. Phys. A : Math. Theor* **2010**, *43*, 285204.
- [50] B. Mirza, M. Zarei, *Eur. Phys. J C* **2004**, *32*, 583.
- [51] B. Mirza, R. Narimani, M. Zarei, *Eur. Phys. J C* **2006**, *48*, 641.
- [52] B. Mirza, R. Narimani, S. Zare, *Commun. Theor. Phys* **2011**, *55*, 405–409.
- [53] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, A. Boumali, *Int. J. Geom. Metho. Mod. Phys* **2017**, *14*, 1750112.
- [54] H. T.I.Rouabhia, A.Boumali, *Phys. Part. Nucl. Lett.* **2023**, *20*, 112–119.
- [55] A. T.I.Rouabhia, *Theor. Math. Phys.* **2023**, *217*, 1609–1619.
- [56] W.Rindler, *Essential relativity : special, general, and cosmological*, Springer Science & Business Media, **1977**.
- [57] R.M.Wald, *General Relativity*, C. U. Press (Ed.), **1984**.
- [58] L. D. Landau, *Course of theoretical physics* **1975**, *2*.
- [59] M. Socolovsky, *Ann. Fond. Louis de Broglie* **2014**, *39*.
- [60] W. Rindler, *Am. J. Phys* **1966**, *34*.
- [61] S. A. Fulling, *Phys. Rev. D* **1973**, *7*, 2850.

- [62] V.Mukhanov, S.Winitzki, *Introduction to quantum effects in gravity*, Cambridge university press, **2007**.
- [63] W. G. Unruh, *Phys. Rev. D* **1976**, *14*, 870.
- [64] S. D. Bievre, M. Merkli, *Classical Quantum Gravity* **2006**, *23*, 6525.
- [65] P. C. W.Davies, *J. Phys. A : Math. Gen.* **1975**, *8*, 272.
- [66] S.W.Hawking, *Hawking on the big bang and black holes*, Vol. 8, World Scientific, **1993**.
- [67] S. W. Hawking, *Nature* **1974**, *248*, 30–31.
- [68] E. Elizalde, *J. Math. Phys.* **1994**, *35*, 6100–6122.
- [69] E. Elizalde, *J. Phys. A : Math. Gen.* **2001**, *34*, 3025.
- [70] M. A. Dariescu, O. Buhucianu, A. Iordana, *ROMANIAN JOURNAL IN PHYSICS* **2011**, *56*, 1043–1052.
- [71] A. M. Frassino, D. Marinelli, O. Panella, P. Roy, *J. Phys. A : Math. Theor* **2020**, *53*, 185204.
- [72] M.-A. Dariescu, C. Dariescu, *J. Phys : Condens. Matter* **2007**, *19*, 256203.
- [73] M.-A. Dariescu, C. Dariescu, *Chaos. Solitons and Fractals* **2007**, *33*, 776–781.
- [74] M.-A. Dariescu, C. Dariescu, *Rom. Journ. Phys* **2011**, *56*, 1043–1052.
- [75] A.M.Frassino, D.Marinelli, O.Panella, P. Roy, *J. Phys. A : Math. Theor.* **2020**, *53*, 185204.
- [76] Carroll, M.Sean, *An introduction to general relativity : spacetime and geometry*, Vol. 101, **2004**.
- [77] M.Nakahara, *Geometry, topology and physics*, Iop Publishing, **2018**.
- [78] B.F.Schutz, Schutz, F.D.Bernard, *Geometrical methods of mathematical physics*, Cambridge university press, **1980**.
- [79] S.Weinberg, *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity*, John Wiley Sons, Inc., **1972**.
- [80] K. D. Krori, P. Borgohain, P. K. Kar, D. Das, *J. Math. Phys* **1988**, *29*, 1645–1649.
- [81] K. D. Krori, P. Borgohain, D. Das, *Journal of Mathematical Physics* **1994**, *35*, 1032–1036.
- [82] J. Carvalho, C. Furtado, F. Moraes, *Phys. Rev. A* **2011**, *84*, 032109.

- [83] Krumsvik, R.Alexander, Master's thesis, NTNU, **2021**.
- [84] M.Marino, *QFT in curved space*.
- [85] Mukhanov, F. Viatcheslav, S.Winitzki, Sergei, *Introduction to quantum fields in classical backgrounds*, **2007**.
- [86] D. Oriti, *arXiv preprint gr-qc/9912082* **1999**.
- [87] S. Takeuchi, *Phys. Lett. B* **2015**, 750, 209–217.
- [88] N. Alkofer, G. D'Odorico, F. Saueressig, F. Versteegen, *Phys. Rev. D* **2016**, 94, 104055.
- [89] S. Ben-Benjamin, M. O. Scully, S. A. Fulling, D. M. Lee, D. N. Page, A. A. Svidzinsky, M. S. Zubairy, *Int. J. Mod. Phys. A* **2019**, 34, 1941005.
- [90] L. C. B. Crispino, A. Higuchi, G. E. A. Matsas, *Rev. Mod. Phys* **2008**, 80, 787.
- [91] S.Flugge, *Practical Qunatum Mechanics*, American Association of Physics Teachers, **1974**.
- [92] L. C. N. Santos, C. C. Barros, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.* **2019**, 16, 1950140.
- [93] K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus* **2012**, 127, 1–8.
- [94] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions, Vol. 3*, The University Press, **1922**.
- [95] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical methods for physicists 6th* **2005**.
- [96] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge : Cambridge University Press, **1999**.
- [97] G. E. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge University Press, **2001**.
- [98] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, **1965**.
- [99] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier (Ed.), Academic Press., **1995**.
- [100] S. Flugge, *American Journal of Physics* **1973**, 41, 140–140.
- [101] S. Flugge, *Practical quantum mechanics*, Springer Science & Business Media, **2012**.
- [102] O. W.J.Frank, *NIST handbook of mathematical functions*, Cambridge university press, **2010**.
- [103] T. Padmanabhan, *Phys. Rep.* **1990**, 188, 285–362.
- [104] T. Padmanabhan, *Rep. Prog. Phys.* **2010**, 73, 046901.

- [105] J.Bagla, S.Engineer, *Gravity and the Quantum*, Springer, 2017.
- [106] E.Elizalde, S.D.Odintsov, A.Romeo, A.A.Bytsenko, S.Zerbini, *Zeta regularization techniques with applications (World Sci., Singapore, 1994)*; E. Elizalde, *Ten physical applications of spectral zeta functions*, 1995.
- [107] M.A.Dariescu, C.Dariescu, *Chaos, Solitons & Fractals* 2007, 33, 776–781.
- [108] E.G.Andrews, R.Askey, R.Ranjan, *Special functions, Vol. 71*, Cambridge university press Cambridge, 1999.
- [109] E. Elizalde, S. Odintsov, A. Romeo, A. Bytsenko, S. Zerbini, *Zeta regularization techniques with applications*, Springer, Berlin, 1995.
- [110] G. B. Arfken, H. J. Weber 1999.
- [111] E. Elizalde, *Ten Physical Applications of Spectral Zeta Functions*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, 1995.
- [112] A. Boumali, *Phys. Scr.* 2015, 90, 045702.
- [113] L. L. Foldy, *Phys. Rev.* 1952, 87, 688.
- [114] H. K. F. B. Neil W. Ashcroft, N. David Mermin, *Physique des solides*, E. Sciences (Ed.), 2002.
- [115] R. Szmytkowski, M. Gruchowski, *J. Phys. A. Math. Gen* 2001, 34, 4991–4998.
- [116] A. R. Bertlmann, *Anomalies in quantum field theory, Vol. 91*, Oxford university press, 2000.
- [117] R. Jackiw, C. Rebbi, *Phys. Rev. D* 1976, 13, 3398.
- [118] S. K. Moayedi, F. Darabi, *Phy. Lett A* 2004, 322, 173–178.
- [119] S.Flugge, *Electron-Emission Gas Discharges I/Elektronen-Emission Gasentladungen I, Vol. 4*, Springer Science & Business Media, 2012.
- [120] A. Boumali, *Phys. Scr* 2015, 90, 045702.
- [121] J. Carvalho, A. M. de M. Carvalho, E. Cavalcante, C. Furtado, *Eur. Phys. J. C.* 2016, 76, 365.
- [122] M. Kontsevich, *Commun. Math. Phys* 1992, 147, 1–23.
- [123] V.Olivier, Others, *Airy functions and applications to physics*, World Scientific, 2010.
- [124] M. Katori, H. Tanemura, *J. Stat. Phys.* 2009, 136, 1177–1204.
- [125] L. C. N. Santos, C. E. Mota, J. Barros, L. B. Castro, VB.Bezerra, *Ann. Phys* 2020, 421, 168276.