الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي - تبسة -
قسم الرياضيـات و الإعلام الآلي

مذكرة تخرج

للحصول على

شهادة ماستر في ميدان: الرياضيـات و الإعلام الآلي

شعبة : الرياضيات

تخصص : معادلات تفاضلية جزئية و تطبيقات

بعض الطرق الدالية لحل مسألة إستقرار حلول المعادلات التطورية

تقديم : قتال وفاء

أمام اللجنـــة :

الرئيـس:	هوام كمال	أستـاذ التعليـم العـالي	جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي
الممتحنة:	مسلوب فتيحة	أستـاذة محاضرة "أ"	جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي
المشرف :	زارعي عبد الرحمان	أستـاذ التعليـم العـالي	جامعة الشهيد الشيخ العربي التبسي

نـوقشـــت يـوم : 04 / 06 / 2023

السنة الجامعية : 2022 / 2023

الشكر والتقدير

الحمد لله نحمده وهو المستحق للحمد والثناء ونستعين به في السراء والضراء، ونتوكل عليه في جميع حالاتنا، ونصلي ونسلم على خير خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم وصحبه أجمعين ومن إتبع هداه إلى يوم الدين.

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم: ﴿ مَنْ لَمْ يَشكُرُ القليل لَم يَشكُر الكثير ومَنْ لَمْ يَشكُر النَّاس لَم يَشكُرُ الله ﴾ رواه " أحمد والترميذي "

سبحانك اللهم لا علم لنا إلا ما علمتنا، نشكر الله ونحمده فضل نعمه علينا، نعمة العقل التي أنار بها دربنا وفكرنا ونعمة الذاكرة التي حفظنا بها سرنا وجهرنا.

والصلاة والسلام على قدوة المربين نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

أتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير إلى كل من أوقد لي مشعل الحياة وحملني على سفينة النجاة.

إلى كل من صرني بفضله أكتب وأقرأ و.....

إلى كل من علمني علما ينتفع به وأدب يرتفع به.

بدءا من معلمي الإبتدائي وصولا إلى أساتذة التعليم العالي والبحث العلمي في قسم الرياضيات والإعلام الآلي بجامعة العربي التبسي .

تحية عطرة وشكر خاص للأستاذ المشرف " زارعي عبد الرحمان " الذي أفادني بنصائحه وتوجيهاته طيلة إنجاز هذه المذكرة.

كما أشكر أعضاء لجنة المناقشة التي شرفتني بقبولها مناقشة مذكرتي، كل من الأستاذ " كمال هوام " رئيسا و الأستاذة " مسلوب فتيحة " ممتحنة اللذين لاشك أنهما سيفيضون عليا بتوجيهاتهما القيمة وملاحظاتهما السديدة.

دون أن أغض الطرف بالشكر والثناء على إخواننا الطلبة المقربين بصلة العلم في فيحاء الأخوة والسند. وخاصة طلبة ماستر 2 دفعة 2023 راجين من المولى العليّ القدير كل التوفيق والفلاح.

وفي الأخير أشكر كل من قدم لي يد العون والمساعدة سواء من قريب أو من بعيد ولو بكلمة طيبة أو بتوجيه أو حتى بدعوة في ظهر الغيب لهم جزيل الشكر والعرفان.

ولكم مني فائق التقدير والاحترام.

إهـــداء

حمد لله الذي وهبني عقلا مفكرا، ولسانا ناطقا وأنار دربي، ويسر أمري لانهاء هذا العمل، والصلاة والسلام على رسول الله صلى الله عليه وسلم.

إذا كان الإهداء يعبر ولو بجزء من الوفاء، فأهدي ثمرة جهدي:

إلى التي على بساط الأوجاع ولدتني وبأيدي الآلام ربتني وبعيون التعب رعتني وبصدر المشقات حمتني، إلى من كان دعاؤها سر نجاحي: أمي أمي أمي.

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار وعلمني العطاء دون الإنتظار، إلى الذي أحمل إسمه بكل إفتخار، إلى قدوتي في الحياة، والدي حفظه الله.

إلى من قال فيهم الشاعر:

أخاك أخاك فمن لا أخا له * * * كساع إلى الهيجاء بغير سلاح.

والذي تربطني بهم أسمى علاقة في الوجود، إخوتي الأعزاء "زوبير"،"عماد"،"صابر"،"سفيان"،"صلاح الدين"،"أشرف".

إلى التي يأنس بها قلبي و تقر بها عيني ومثل أخت لي خالتي: " سمية ".

إلى كل الأهل والأقارب.

إلى كل الأصدقاء الأوفياء والزملاء الأعزاء التي جمعتني بهم الحياة خصوصا حبيبات قلبي "علاق حكيمة" " فردي نهال "، " طاهر إيمان " ، " بوذيبة إبتسام "، "حاجي بثينة "، " بوعكاز سلافة "، " بناد نور الهدى " " برهوم آية"، " أمال قتال" .

إلى كل من جال مفكرتي وسقط سهوا من قلمي ولم تكتبهم مذكرتي.

إلى كل من يعرفني من قريب أو بعيد.

إلى كل من تصفح هذه المذكرة وانتفع بها وتذكرني بدعائه.

** قتال وفاء **

الملخص

الغرض من عملنا في هذه المذكرة هو تحديد شروط كافية يمكن في ظلها أن تؤول الحلول الى الصفر عندما يؤول الزمن الى ما لا نهاية وهو ما يصطلح عليه بالسلوك التقاربي لبعض المسائل التطورية من صنف معادلات القطوع الزائدية في وجود قوة خارجية تعمل على تبديد الحلول بمعنى ان الحلول تؤول الى مالانهاية عندما يقترب الزمن من زمن منتهي والذي يسمى زمن الانفجار و لاثبات نتيجة الاستقرار الاسي للحلول نستخدم ثلاث طرق دالية وهي طريقة ناكاؤو وطريقة كومورنيك وطريقة دالية ليابينوف.

الكلمات المفتاحية : معادلة الامواج, معادلة كيرشوف, الاستقرار الاسي, طريقة ناكاؤو, طريقة كومورنيك, طريقة دالية ليابينوف.

Abstract

The object of this master's thesis focuses on the determination of sufficient conditions that can lead the solution to approach to zero when t goes to infinity (This is called asymptotic behavior) for certain hyperbolic problems in the presence of a source term of polynomial type. And to prove the result of exponential stability of solutions, we use three functional methods: Nakao's method, Komornik's method and Lyabinov's method.

Keywords : wave equation, Kirchhoff's equation, exponential stability, Nakao's method, Komornik's method, Lyapinov's method.

Résumé

L'objet de cette mémoire de master porte essentiellement sur la détermination de conditions suffisantes pouvant mener la solution à tendre vers zéro lorsque t tend vers l'infini (C'est ce qu'on appelle le comportement asymptotique) pour certains problèmes hyperbolique en présence d'un terme source de type polynomiale Et pour prouver le résultat de la stabilité exponentielle des solutions, nous utilisons trois méthodes fonctionnelles: la méthode de Nakao, la méthode de Komornik et la méthode de Lyabinov.

Mots Clés : équation d'onde, équation de Kirchhoff, stabilité exponentielle, méthode de Nakao, méthode de Komornik, méthode de Lyapinov.

ترميزات

الرمــــز	مدلـــــولـــــه
$\mathbb{N}$	مجموعة الأعداد الطبيعية.
$\mathbb{R}$	مجموعة الأعداد الحقيقية.
Ω	مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$.
$\Gamma = \partial\Omega$	حافة منتظمة لـ Ω.
$L^P(\Omega)$	$L^P(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \ mesurables \ et \ \int_\Omega \lvert f(x) \rvert^p dx < \infty \right\}.$
$L^2(\Omega)$	هو فضاء الدوال القابلة لتكامل بالتربيع.
$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \ mesurables, \ni c > 0 \ tel \ que \ \lvert f(x) \rvert \leq c \ p.p \ sur \ \Omega \}.$
$L^1(\Omega)$	$L^1(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \ mesurables \ et \ \int_\Omega \lvert f(x) \rvert dx < \infty \right\}.$
$L^1_{loc}(\Omega)$	فضاءالدوال القابلة للتكامل محليا.
$W^{1,p}(\Omega)$	$W^{1,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega); telle \ que \ \partial_i u \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n \}.$
$W^{m,p}(\Omega)$	$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega); telle \ que \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, \lvert\alpha\rvert \leq m \}.$
$u(x,t)$	دالة معرفة على Ω.
$C(\Omega)$	فضاء الدوال $u(x,t)$ المستمرة على Ω.
C_0^∞	فضاء الدوال القابلة للإشتقاق مالانهاية مرة بحوامل متراصة، ويسمى فضاء دوال الإختبار.
ξ_0،ξ_1،pوν	ثوات موجبةمفروضة.
$(.,.)$	الجداء السلمي في الفضاء $L^2(\Omega)$.
$\lVert . \rVert$	النظيم في $L^2(\Omega)$.
$E(t)$	دالة الطاقة.
$H^1(\Omega)$	$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i = 1, ..., n \right\}.$
$H^1_0(\Omega)$	$H^1_0(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), u \mid_\Gamma = 0, \forall i = 1, ..., n \right\}.$
x	نقطة تنتمي للمفتوح Ω من $\mathbb{R}^n$.
$D^i u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}$	المشتق الجزئي للدالة u بالنسبة لـ x_i.
$\nabla u(x)$	$\nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T.$
$\Delta u(x)$	$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)(x).$

الفهـــــــرس

1 مفاهيم أساسية 3
1 فضـاءات لوبيغ و سوبوليـف 4
1 -1 فضـاءات لوبيغ $L^p(\Omega)$ 4
1 -2 فضـاءات سوبوليـف 5
1 -1-2 المشتق الضعيف 5
1 -3 الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$ 5
1 -4 الفضاء $W^{1,p}(\Omega)$ 6
2 علاقة التكامل بالتجزئة وعلاقة قرين 6
2 -1 علاقة التكامل بالتجزئة 6
2 -2 علاقة قرين 6
2 -1-2 علاقة قرين1 6
2 -2-2 علاقة قرين2 6
3 المتراجحات 7
3 -1 متراجحة هولدر 7
3 -2 متراجحة كوشي شوارتز 7
3 -3 متراجحة بوان كاري 7
3 -4 متراجحة سبولاف بوانكاري 7
3 -5 متراجحة ε-يونغ 8
4 قانون لا يبنيتز الخاص بالتكاملات 8

2 الإستقرار الأسي لحلول معادلة كيرشوف الغير خطية 9
1 المقدمة 10
2 مفاهيم أساسية 10
2 -1 الوجود المحلي للحلول 10
2 -2 توطئة نا كاؤو 12
3 الإستقرار الأسي 14

3 الإستقرار الأسي لمسألة كيرشوف بتخامد ضعيف 22
1 المقدمة 23
2 مفاهيم أساسية 23
3 الإستقرار الأسي 24

4 الإستقرار الأسي لمعادلة الأمواج بإستخدام طريقة دالية ليابنوف 38
1 مقدمة 39

2 االإستقرار الأسي 39

الخاتمــة **43**

المراجع العلميــة **43**

المقدمـــــة

إن الكثير من الظواهر الفيزيائية سواء كانت في مجال سريان الموائع، الكهرباء، الميكانيك، البصريات وإنتشار الحرارة ... يمكن أن توصف وتمذج بشكل عام بمعادلات تفاضلية جزئية (م-ت-ج) وفي الحقيقة إن معظم قوانين الطبيعة في الفيزياء مثل معادلات ماكسويل وقوانين نيوتن للحركة ومعادلات نافيير-ستوكس ومعادلات شرودنكر في الميكانيك الكمي ومعادلة كيرشوف كلها وغيرها يمكن كتابتها بدلالة المعادلات التفاضلية الجزئية حيث أن هذه فالمشتقات الجزئية مثلا بالنسبة للزمن تمثل أشياء طبيعية كالسرعة والتسارع وقوة الاحتكاك. تنقسم (م-ت-ج) إلى معادلات قارة لا تتعلق بالزمن كمعادلات لابلاس ومعادلات بواسون ومعادلات تطورية تتعلق بالزمن وهي المعادلات الإهليجية كمعادلة إنتشار الحرارة ومعادلات القطوع الزائدية كمعادلات الأمواج. في نظرية المعادلات التطورية، أهم المسائل التي يجب حلها: الوجود المحلي للحلول في فترة زمنية منتهية ثم الإجابة على مسألة الوجود الكلي للحلول لأي زمن أو العكس من ذلك إيجاد شروط كافية لإنفجار الحلول في زمن منتهي، يمكن الرجوع في هذا الشأن إلى [1]-[3]،[5]-[10]،[12]-[19]. عند إثبات الوجود الكلي للحلول تظهر مسألة مهمة وتحوز على إهتمام الكثير من الباحثين وهي مسألة السلوك التقاربي للحلول وهي موضوع هذه المذكرة حيث نثبت بإستخدام ثلاث طرق مختلفة الإستقرار الأسي لحلول معادلة كيرشوف في وجود قوى تخامد مختلفة.

الطريقة الاولى: (طريقة ناكاؤو)[12] أساس هذه الطريقة إيجاد متراجحة للطاقة على الشكل التالي:

$$E(t) \leq \omega \left(E(t) - E(t+1)\right); \quad \omega > 1.$$

الطريقة الثانية: (المتراجحات التكاملية) [10] طريقة كومورنيك تعتمد أساسا على إيجاد متراجحة تكاملية على الشكل التالي:

$$\int_S^{+\infty} E(t)dt \leq CE(S); \quad \forall S \geq S_0.$$

الطريقة الثالثة: (دالية ليابنوف) [13] ننشئ دالية موجبة ومتناقصة تحقق المتراجحة التفاضلية التالية:

$$\frac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} \leq -CL(t); \quad C > 0.$$

بالإضافة إلى مقدمة، وقسم يحتوي على 19 مرجعا، تتضمن المذكرة أربعة فصول:

الفصل الأول نستعرض بعض المفاهيم والنظريات الأساسية والتي نحتاجها في بقية المذكرة.

في الفصل الثاني ندرس الإستقرار الأسي لحلول معادلة كيرشوف غير خطية في وجود حد تخامد قوي يمثل قوة الإحتكاك وهذا بإستخدام طريقة ناكاؤو.

في الفصل الثالث ندرس السلوك التقاربي لحل مسألة كيرشوف بتخامد ضعيف حيث نعوض قوة الإحتكاك بقوة المرونة اللزجة ممثلة في حد الذاكرة حيث نثبت أنه إذا تناقصت نواة الذاكرة أسيا فإن الحل كذلك يتناقص أسيا وهذا بإستخدام طريقة المتراجحات التكاملية.

في الفصل الرابع نثبت أن الحلول تؤول إلى الصفر أسيا عندما يؤول الزمن الى ما لانهاية لمعادلة الأمواج الغير الخطية بتخامد ضعيف وهذا بإستخدام طريقة دالية ليابينوف [3, 5, 6, 13] الأكثر إستخداما من طرف الباحثين لسهولتها.

1 مفاهيم أساسية

محتويات الفصل

1 فضاءات لوبيغ و سوبوليف 4
1- 1 فضاءات لوبيغ $L^p(\Omega)$ 4
2- 1 فضاءات سوبوليف 5
1 -1-2 المشتق الضعيف 5
3- 1 الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$ 5
4- 1 الفضاء $W^{1,p}(\Omega)$ 6
2 علاقة التكامل بالتجزئة وعلاقة قرين 6
1- 2 علاقة التكامل بالتجزئة 6
2- 2 علاقة قرين 6
2 -1-2 علاقة قرين1 6
2 -2-2 علاقة قرين2 6
3 المتراجحات 7
1- 3 متراجحة هولدر 7
2- 3 متراجحة كوشي شوارتز 7
3- 3 متراجحة بوان كاري 7
4- 3 متراجحة سبولاف بوانكاري 7
5- 3 متراجحة ε-يونغ 8
4 قانون لايبنيتز الخاص بالتكاملات 8

تمهيد

هذا الفصل مخصص للمفاهيم الأساسية والتي إنتقيناها بشكل مختصر لتساعدنا في معالجة الفصول الموالية والمتمثلة في فضاءات $L^p(\Omega)$، فضاءات سوبولاف و بعض المتراجحات.

1 فضـاءات لوبيغ و سوبوليف

في كل ما سيأتي يرمز ب Ω إلى مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^n$، بحدود منتظمة.

1 -1 فضـاءات لوبيغ $L^p(\Omega)$

تعريف 1.1.1 [4] ليكن $p \in \mathbb{R}$ مع $1 \leq p < \infty$، نعرف فضاء لوبيغ $L^p(\Omega)$ بـ :

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ f \ measurable \ et \ |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

و هو فضاء بناخ على $\mathbb{R}^n$، مزود بالنظيم:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

- من أجل $p = 2$، $L^2(\Omega)$ هو فضاء هلبرتي مزود بجداء سلمي:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx,$$

ومزود بالنظيم :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- من أجل $p = \infty$ معرف كما يلي :

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \ mesurables, \ni c > 0 \ telle \ que \ |f(x)| \leq c \, p.p \ sur \ \Omega \},$$

مزود بنظيم:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf \{ c, |u(x)| \leq c \ p.p \ sur \ \Omega \}.$$

1 -2 فضـاءات سوبوليف

1 -1-2 المشتق الضعيف

تعريف 2.1.1 ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}$ و$u \in L^1_{loc}(\Omega)$ حيث $1 \leq i \leq n$، نقول عن دالة أنها تملك مشتقة ضعيفة من الرتبة i في $L^1_{loc}(\Omega)$ إذا وجدت دالة $f_i \in L^1_{loc}$ بحيث من أجل كل $\varphi \in C_0^\infty$ لدينا:

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx.$$

وهذا يسمح لنا بالقول أن f_i هو المشتق من الرتبة i ل $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ بمفهوم التوزيعات ونكتب :

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f^i.$$

1 -3 الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$

ليكن m عددا طبيعيا و p عددا حقيقيا مع $1 \leq p \leq \infty$

تعريف 3.1.1 [4]
نعرف فضاء سوبوليف $W^{m,p}$ بـ

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega)\ tel\ que\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall\alpha,\ |\alpha| \leq m\},$$

مع $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^n$، $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i$
و $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}$ هي مشتقات بمفهوم التوزيعات أي

$$\langle D^\alpha u, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha\varphi\rangle, \forall\varphi \in D(\Omega).$$

الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$، $p \in [1, +\infty[$ مزود بالنظيم مع

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}.$$

- من أجل $p = 2$ نضع $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ بحيث $H^m(\Omega)$ مزود بالجداء السلمي

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|\leq m}^{N}\langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

حيث

$$\langle u, u\rangle_{H^m(\Omega)} = \|u\|^2_{H^m(\Omega)}\ ,\ u \in H^m(\Omega).$$

1 -4 الفضاء $W^{1,p}(\Omega)$

تعريف 4.1.1 [4]
من أجل $m=1$ الفضاء $W^{1,p}(\Omega)$ هو فضاء سوبوليف معرف ب

$$W^{1,p}(\Omega)=\{u\in L^p(\Omega);\ tel\ que\ \partial_i u\in L^p(\Omega), 1\leq i\leq n\}.$$

من أجل كل $1\leq p<+\infty$ يكون الفضاء مزود بالنظيم

$$\|u\|_{W^{1,p}}=\left(\|u\|_{L^p}+\sum_{0<|\alpha|\leq 1}\|D^\alpha u\|_{L^p}\right)^{1/p}.$$

إذن $W^{1,p}(\Omega)$ هو فضاء بناخ لكل $1\leq p\leq+\infty$.

2 علاقة التكامل بالتجزئة وعلاقة قرين

2 -1 علاقة التكامل بالتجزئة

تعريف 1.2.1 لتكن u وvدالتين من $H^1(\Omega)$.من أجل $1\leq i\leq n$، لدينا

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}vdx=-\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx+\int_{\partial\Omega}vu\eta_i ds,$$

بحيث $\eta_i(x)=\cos(\eta,x_i)$ هو الشعاع العمودي على الحافة $\partial\Omega$.

2 -2 علاقة قرين

2 -1-2 علاقة قرين1

تعريف 2.2.1 لتكن u و v دالتين من $H^1(\Omega)$. إذن لدينا

$$\int_\Omega u\Delta udx=-\int_\Omega \nabla u.\nabla vdx+\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\eta}vds.$$

2 -2-2 علاقة قرين2

تعريف 3.2.1 لتكن $u\in H^1(\Omega)$ و$v\in H^2(\Omega)$. إذن لدينا

$$\int_\Omega \Delta uvdx=\int_\Omega u\Delta vdx+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}v-\frac{\partial v}{\partial\eta}u\right)ds.$$

3 المتراجحات

3 -1 متراجحة هولدر

نظريـة 1.3.1 $\forall (f,g) \in L^p(\Omega) \times L^q(\Omega)$ إذن $f.g \in L^1(\Omega)$ و

$$\int_\Omega |f(x)g(x)dx| \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

مع p وq أعداد موجبة بحيث $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

3 -2 متراجحة كوشي شوارتز

نظريـة 2.3.1 $\forall (f,g) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$، لدينا

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \, dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |g(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

مع

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}.$$

3 -3 متراجحة بوان كاري

نظريـة 3.3.1 ليكن Ω مفتوح محدود من $\mathbb{R}^n$ بحافة منتظمة إذن

$$\|u\| \leq B \|\nabla u\|, \; pour \; u \in H_0^1(\Omega).$$

بحيث $B^{-1} = \inf\limits_{\|u\| \neq 0} \frac{\|\nabla u\|}{\|u\|}$.

3 -4 متراجحة سبولاف بوانكاري

نظريـة 4.3.1 ليكن p عدد مع $0 \leq p \leq +\infty$ $(n=1,2)$ أو $0 \leq p \leq \frac{4}{n-2}$ $(n>2)$. إذن يوجد ثابت وحيد $C(p,\Omega)$ بحيث

$$\|u\|_{p+1} \leq C(p,\Omega) \|\nabla u\|_2, \; pour \; u \in H_0^1(\Omega).$$

3 -5 متراجحة ε-يونغ

نظريـة 5.3.1 ليكن ε عدد موجب، إذن $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2.$$

بوضع $\varepsilon = 2\delta$ يصبح لدينا :

$$|ab| \leq \delta a^2 + \frac{1}{4\delta}b^2.$$

4 قانون لايبنيتز الخاص بالتكاملات

تعريف 1.4.1 ليكن $-\infty < a(t)$، $b(t) < +\infty$ إذن:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)dt\right) = f(x,b(x))\frac{\mathrm{d}b(x)}{\mathrm{d}x} - f(x,a(x))\frac{\mathrm{d}a(x)}{\mathrm{d}x} + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x}f(x,t)dt.$$

2

الإستقرار الأسي لحلول معادلة كيرشوف الغير خطية

محتويات الفصل

1 المقدمة 10
2 مفاهيم أساسية 10
2 -1 الوجود المحلي للحلول 10
2 -2 توطئة ناكاؤو 12
3 الإستقرار الأسي 14

1 المقدمة

الهدف من هذا الفصل هو دراسة المسألة الحدية بالشروط الإبتدائية التالية:

$$\begin{cases} u_{tt}-(\xi_0+\xi_1\left\|\nabla u(t)\right\|^2)\Delta u+\Delta^2u+\nu\Delta^2u_t=\left|u\right|^p u\ dans\ \Omega\times[0,+\infty) \\ u(x,0)=u_0(x) \quad ,u_t(x,0)=u_1(x)\ dans\ \Omega \\ u(x,t)=\dfrac{\partial u}{\partial\eta}(x,t)=0 \quad sur\ \Gamma \end{cases} \tag{1.2}$$

حيث Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ حيث Γ حافته المنتظمة. $u(x,t)$ هو الإنتقال العمودي لنقطة x في الزمن t على عارضة. كل المتغيرات p، ξ_0، ξ_1 و ν هي ثوابت فيزيائية موجبة. عندما يكون $\xi_1=\nu=0$ وبدون قوة الإحتكاك Δ^2u، المعادلة (1.2) تختزل إلى معادلة الأمواج الغير الخطية التي تمت دراستها على نطاق واسع، وتم الحصول على العديد من النتائج المتعلقة بالوجود وعدم الوجود [3, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. إذا كان $\xi_1\neq0$، ξ_0 وبدون قوة الإحتكاك Δ^2u تختزل المعادلة (1.2) إلى معادلة كيرشوف المعروفة التي تم تقديمها في [11] لوصف الإهتزازات الغير الخطية لخيط مرن.

المعادلة الأصلية لكيرشوف هي :

$$ph\,\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=\left\{\rho_0+\frac{Eh}{2L}\int_0^t(\frac{\partial u}{\partial x})^2dx\right\}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+f,$$

حيث $0<x<L$، $t\geq0$ و $u(x,t)$ هو الإنتقال العمودي لنقطة x في الزمن t، E هو معامل يونغ للمادة، ρ الكثافة h مساحة المقطع العرضي للخيط، ρ_0 شدة الخيط الأولي و f القوة الخارجية (أنظر [12, 17]).

في هذا الفصل سنحدد شروط كافية تعطي الإستقرار الأسي للحلول وهذا بإستحدام توطنة ناكاؤو[12].

2 مفاهيم أساسية

2 -1 الوجود المحلي للحلول

في هذا القسم، نقوم بصياغة المسألة (1.2) كمسألة قيمة أولية لكوشي، نرمز لـ H لفضاء هيلبرت.

نعرف المؤثر الخطي $\mathbf{A}:D(\mathbf{A})\to H$ بـ :

$$\mathbf{A}u=\Delta^2u \quad pour \quad u\in D(\mathbf{A}).$$

حيث:

$$D(\mathbf{A})=\left\{u\in H^4(\Omega):u(x,t)\mid_\Gamma=\frac{\partial u}{\partial\eta}(x,t)\mid_\Gamma=0\right\}.$$

و المشتقات مأخوذة ضمن معنى التوزيعات. هذا المؤثر الخطي المغلق $\mathbf{A}$ هو المؤثر القرين $auto-adjoint$ والمعرف الموجب.

يمكن كتابة المسألة (1.2) على النحو التالي:

$$\begin{cases} u''+\left(\xi_0+\xi_1\left\|\mathbf{A}^{1/4}u(t)\right\|^2\right)\mathbf{A}^{1/2}u+\mathbf{A}u+\nu\mathbf{A}u'=\left|u\right|^p u,\ t\geq0, \\ u(0)=u_0,\ u'(0)=u_1,\ u(x,t)\mid_\Gamma=\dfrac{\partial u}{\partial\eta}(x,t)\mid_\Gamma=0. \end{cases} \tag{2.2}$$

نعيد كتابة (1.2) كنظام من الرتبة الأولى. V يرمز للفضاء الجزئي المغلق $D(\mathbf{A})$ من الفضاء الهلبرتي $H^4(\Omega)$ ونعرف فضاء الجداء الهلبرتي $X = V \times H$، وليكن $\tilde{X} = V \times V = D(\mathbf{A}) \times D(\mathbf{A})$.
أخيرا نحدد المؤثر الخطي A بـ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\mathbf{A} & -\nu\mathbf{A} \end{pmatrix} : D(A) \to X, \quad avec \quad D(A) = V \times V,$$

حيث I مصفوفة الوحدة على V و F معرفة بـ:

$$F\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ |u|^p\, u - \left(\xi_0 + \xi_1 \left\|\mathbf{A}^{\frac{1}{4}} u(t)\right\|_2^2\right) \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} u \end{pmatrix}.$$

(بالطبع يجب أن يكون $|u|^p u$ تنتمي L^{p+1})أنظر[19]. من الواضح الآن أنه لا يزال من الممكن صياغة المسألة (1.2) كمسألة قيم إبتدائية من الرتبة الأولى شبه خطية.

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + F\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in X \end{cases} \tag{3.2}$$

حيث $v_0 = u_1$، نضع $w(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ و $w_0(t) = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
إذن المسألة(3.2) تصبح من الشكل:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w = Aw + F(w) \quad t \geq 0 \quad w(0) = w_0 \in X. \tag{4.2}$$

يمكن إثبات أن المؤثر $-A$ هو مؤثر قطاع (أنظر[19]) وأن A تولد $\{S(t) : t \geq 0\}$. $F : X \to X$ هو ليبشيتزي محليا ومحدود. لذلك، وفقا لنظرية هيل-يوشيدا فإن المسالة تقبل حل وحيد (أنظر [18]).

توطئة 1.2.2 من أجل $w_0 \in X$، يوجد $T = T(w_0) > 0$ بحيث أن الحل المعمم $w(t)$ للمسألة (4.2) مع الشرط الإبتدائي $w(0) = 0$ موجود ووحيد من أجل كل $t \in [0, T]$ و

$$w \in C([0, T]; X) \ \cap \ C^1((0, T); X) \ \cap C((0, T); \tilde{X}).$$

إذا كان $w_0 \in \tilde{X}$ فإن هذا الحل المعمم هو حل كلاسيكي للمسألة (4.2) من أجل $t \in [0, T]$.

2 -2 توطئة ناكاؤو

نستعرض الآن توطئة ناكاؤو مع البرهان.

توطئة 2.2.2 لتكن $\Phi(t)$ دالة موجبة ومتناقصة على $[0,T]$، k و α ثوابت موجبة:

$$k\Phi(t)^{\alpha+1} \le \Phi(t) - \Phi(t+1),\ \forall t \ge 0,$$

إذن لدينا

$$\Phi(t) \le (\alpha k(t-1) + M^{-\alpha})^{-1/\alpha}\ , \forall t \ge 1.$$

حيث

$$M = \max_{t\in[0,1]} \Phi(t).$$

برهان. نضع $y(t) = \Phi(t)^{-\alpha}$

$$\begin{aligned} y(t+1) - y(t) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left\{\theta\Phi(t+1) + (1-\theta)\Phi(t)\right\}^{-\alpha} d\theta \\ &= -\alpha \int_0^1 \left\{\theta\Phi(t+1) + (1-\theta)\Phi(t)\right\}^{-\alpha-1} d\theta\,(\Phi(t+1) - \Phi(t)) \\ &\ge \alpha k\Phi(t)^{\alpha+1} \int_0^1 (\Phi(t))^{-\alpha-1} d\theta \\ &= \alpha k. \end{aligned}$$

من أجل $t \ge 0$، نختار العدد الصحيح n بحيث $n \le t < n+1$، وبوضع $s = t+1$ في العلاقة التالية

$$y(t+1) \ge \alpha k + y(t)$$

نجد:

$$\begin{aligned} y(s) &\ge \alpha k + y(s-1) \\ &\ge \alpha k + [\alpha k + y(s-2)] \\ &\ge \alpha k + \alpha k + [\alpha k + y(s-3)] \\ &\ \vdots \\ &\ge n\alpha k + y(s-n), \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned} y(t) &\ge y(t-n) + n\alpha k \\ &\ge y(t-n) + (t-1)\alpha k, \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$\Phi(t)^{-\alpha} \ge \Phi(t-n)^{-\alpha} + (t-1)\alpha k,$$

ومنه:

$$\Phi(t) \leq (\Phi(t-n)^{-\alpha} + (t-1)\alpha k)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leq (\alpha k(t-1) + M^{-\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

وهو المطلوب. □

توطئة 3.2.2 ناكاؤو[12]. لتكن $\Phi(t)$ دالة موجبة ومتناقصة على $[0,T]$ بحيث:

$$\Phi(t) \leq w_0(\Phi(t) - \Phi(t+1)).$$

مع $w_0 > 1$. إذن:

$$\Phi(t) \leq \Phi(0)e^{-w_1 t},$$

بحيث:

$$w_1 = \ln\left(\frac{w_0}{w_0 - 1}\right).$$

برهان. لدينا

$$\Phi(t) \leq w_0\left(\Phi(t) - \Phi(t+1)\right), \quad w_0 > 1,$$

ومنه بالإمكان أن نكتب:

$$\Phi(t+1) \leq \frac{w_0 - 1}{w_0}\Phi(t) = (1 - \frac{1}{w_0})\Phi(t).$$

بوضع $k = \dfrac{1}{w_0}$ لتصبح لدينا:

$$\Phi(t+1) \leq (1-k)\Phi(t), \ k < 1.$$

لذلك إذا كان $t \geq 0$ فإنه يوجد عدد صحيح n بحيث $n \leq t < n+1$ وبوضع $s = t+1$ نجد:

$$\begin{aligned}\Phi(s) \leq& (1-k)\Phi(s-1)\\ \leq& (1-k)[(1-k)\Phi(s-2)]\\ &\vdots\\ \leq& (1-k)^n\Phi(t-n),\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &\leq (1-k)^n\Phi(t-n)\\ &\leq (1-k)^n \max_{t\in[0,1]} \Phi(t)\\ &= (1-k)^n\Phi(0),\end{aligned}$$

وعليه فإن:

$$\begin{aligned}\Phi(t) &\leq \Phi(0)(1-k)^n\\ &\leq \Phi(0)(1-k)^t\\ &= \Phi(0)e^{-w_1 t}.\end{aligned}$$

على مجال $[0,T]$. بحيث $w_1 = \ln(\dfrac{w_0}{w_0 - 1})$. □

3 الإستقرار الأسي

في هذا القسم سوف نوضح االإستقرار الأسي لحلول المسألة (1.2). نعرف طاقة المسألة (1.2) بـ:

$$E(t) = \|u'\|^2 + \left(\xi_0 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^2\right)\|\nabla u\|^2 + \|\Delta u\|^2 - \frac{2}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2}. \tag{5.2}$$

توطئة 1.3.2 $E(t)$ دالة متناقصة على $[0,+\infty[$ و

$$E'(t) = -2\nu\|\Delta u'\|^2 \leq 0. \tag{6.2}$$

برهان. بضرب المعادلة (1.2) في u_t وإجراء التكامل على Ω نجد:

$$\begin{aligned}\int_\Omega u_{tt}\, u_t\, dx \; - \int_\Omega \left(\xi_0 + \xi_1 \| \nabla u(t) \|^2\right)\Delta u\; u_t\; dx \; + \int_\Omega \Delta^2 u\; u_t\; dx \\ +\,\nu\int_\Omega \Delta^2 u_t\; u_t\; dx = \int_\Omega |u|^p\, u\; u_t\; dx\end{aligned} \tag{7.2}$$

نحسب كل طرف حدا حدا فنجد:

$$\bullet \int_\Omega u_{tt}\; u_t\; dx \;= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(u_t)^2 dx = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\|u'\|^2\right\}. \tag{8.2}$$

$$\begin{aligned}\bullet -\int_\Omega \left(\xi_0 + \xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\Delta u\; u_t\; dx &= -\left(\xi_0 + \xi_1 \| \nabla u(t) \|^2\right)\left\{-\int_\Omega \nabla u.\nabla u_t\; dx + \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta}\; u_t\; ds\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\xi_0 + \xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\nabla u)^2\; dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\xi_0 + \xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\|\nabla u(t)\|^2\right\} \\ &= \frac{\xi_0}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\|\nabla u(t)\|^2\right\} + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u(t)\|^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\|\nabla u(t)\|^2\right\} \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\int_\Omega\left(\xi_0 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u(t)\|^2\right)\|\nabla u(t)\|^2,\right\}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\bullet -\int_\Omega \left(\xi_0 + \xi_1 \| \nabla u(t) \|^2\right)\Delta u\; u_t\; dx \;= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\int_\Omega\left(\xi_0 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u(t)\|^2\right)\|\nabla u(t)\|^2.\right\} \tag{9.2}$$

$$\begin{aligned}\bullet \int_\Omega \Delta^2 u\; u_t\; dx &= \int_\Omega \Delta(\Delta u)\; u_t\; dx \\ &= \int_\Omega \Delta u\; \Delta u_t\; dx + \int_\Gamma\left\{\frac{\partial(\Delta u)}{\partial\eta}\; u_t - \frac{\partial u_t}{\partial \eta}\;\Delta u\right\}ds \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\|\Delta u\|^2\right\}\end{aligned} \tag{10.2}$$

$$\begin{aligned}\bullet \int_\Omega \Delta^2 u_t\; u_t\; dx &= \int_\Omega \Delta(\Delta u_t)\; u_t\; dx \\ &= \int_\Omega \Delta u_t\; \Delta u_t\; dx + \int_\Gamma\left\{\frac{\partial(\Delta u_t)}{\partial\eta}\; u_t - \frac{\partial u_t}{\partial \eta}\;\Delta u_t\right\}ds \\ &= \int_\Omega (\Delta u_t)^2\; dx \\ &= \|\Delta u'\|^2.\end{aligned} \tag{11.2}$$

$$\bullet \int_\Omega |u|^p\, u\; u_t\; dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |u|^p \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u^2)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u|^p\, u^2\right) dx \;-\frac{1}{2}\int_\Omega u^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(|u|^p)dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u|^p\, u^2\right) dx \;-\frac{p}{2}\int_\Omega |u|^p\, u'\; u\; dx,$$

ومنه:

$$(1+\frac{p}{2})\int_\Omega |u|^p\, u\; u' dx = \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(|u|^p\, u^2\right) dx,$$

إذن:

$$\bullet \int_\Omega |u|^p\, u\; u' dx = \frac{1}{p+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\| \,u\, \|_{p+2}^{p+2}\right\}. \tag{12.2}$$

نعوض الآن (8.2)-(12.2) في (7.2) نجد:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\| \,u'\, \|^2 + \left(\xi_0 + \frac{\xi_1}{2} \| \,\nabla u(t)\, \|^2\right) \| \,\nabla u(t)\, \|^2 + \| \,\Delta u\, \|^2 - \frac{2}{p+2} \| \,u\, \|^2\right\} = -\nu \, \|\Delta u'\|^2$$

ومنه فإن معادلة الطاقة نكتب كما يلي:

$$E(t) = \| \,u'\, \|^2 + \left(\xi_0 + \frac{\xi_1}{2} \| \,\nabla u(t)\, \|^2\right) \| \,\nabla u(t)\, \|^2 + \| \,\Delta u\, \|^2 - \frac{2}{p+2} \| \,u\, \|_{p+2}^{p+2},$$

و

$$E'(t) = -2\nu \| \,\Delta u'\, \|^2 .$$

□

لنضع

$$I_1(t) = \xi_0 \| \,\nabla u(t)\, \|^2 - \| \,u\, \|_{p+2}^{p+2},$$
$$I_2(t) = \xi_0 \| \,\nabla u(t)\, \|^2 + \| \,\Delta u\, \|^2 + \frac{\xi_1}{2} \| \,\nabla u\, \|^4 - \| \,u\, \|_{p+2}^{p+2}, \tag{13.2}$$
$$J(t) = \xi_0 \| \,\nabla u\, \|^2 + \| \,\Delta u\, \|^2 + \frac{\xi_1}{2} \| \,\nabla u\, \|^4 - \frac{2}{p+2} \| \,u\, \|_{p+2}^{p+2},$$

إذن

$$E(t) = \| \,u'\, \|^2 + J(t), \tag{14.2}$$

و

$$J(t) \geq \xi_0 \| \,\nabla u\, \|^2 + \| \,\Delta u\, \|^2 - \frac{2}{p+2} \| \,u\, \|_{p+2}^{p+2}$$
$$= \xi_0 \| \,\nabla u\, \|^2 + \frac{2}{p+2}\xi_0 \| \,\nabla u\, \|^2 - \frac{2}{p+2} \| \,u\, \|_{p+2}^{p+2} - \frac{2}{p+2}\xi_0 \| \,\nabla u\, \|^2 + \| \,\Delta u\, \|^2$$
$$= \xi_0 \| \,\nabla u\, \|^2 + \frac{2}{p+2} I_1 - \frac{2\xi_0}{P+2} \| \,\nabla u\, \|^2 + \| \,\Delta u\, \|^2$$
$$= \frac{p\xi_0}{p+2} \| \,\nabla u\, \|^2 + \frac{2}{p+2} I_1 + \| \,\Delta u\, \|^2,$$

ومنه:

$$J(t) \geq \frac{p\xi_0}{p+2} \| \,\nabla u\, \|^2 + \frac{2}{p+2} I_1 + \| \,\Delta u\, \|^2 . \tag{15.2}$$

نحدد مايعرف ببئر الكمون[19]:

$$w=\left\{u/I_1(u(t))=\xi_0 \parallel \nabla u \parallel^2-\parallel u \parallel_{p+2}^{p+2}>0\right\}\cup\left\{0\right\}.$$

توطئة 2.3.2 لنفرض u حلا للمسألة (1.2). إذا كان $u_0\in w$ و

$$\alpha=\frac{C(p,\Omega)^{p+2}}{\xi_0^{\frac{p+2}{2}}}\left(\frac{p+2}{p}E(0)\right)^{\frac{p}{2}}<1, \tag{16.2}$$

إذن $u(t)\in w$ من أجل $t\in[0,T]$. حيث $C(p,\Omega)$ ثابت سبولاف بوانكاري.

برهان. ليكن $u_0\in w$ إذن $I_1(u_0)>0$. من خلال الإستمرار فإنه يوجد $T_m\leq T$ بحيث $I_1(u(t))\geq 0$ من أجل $t\in[0,T_m]$. لذلك من (14.2)،(15.2) و التوطئة 1.3.2 لدينا

$$J(t)\geq \xi_0 \parallel \nabla u \parallel^2-\frac{2}{p+2}\parallel u \parallel_{p+2}^{p+2},$$

نضرب طرفي المتراجحة في $\left(\frac{p+2}{p}\right)$ نجد:

$$\begin{aligned}\frac{p+2}{p}J(t)&\geq\left(1+\frac{2}{p}\right)\xi_0 \parallel \nabla u \parallel^2-\frac{2}{p}\parallel u \parallel_{p+2}^{p+2}\\&=\xi_0 \parallel \nabla u \parallel^2+\frac{2}{p}\left(\xi_0 \parallel \nabla u \parallel^2+\parallel u \parallel_{p+2}^{p+2}\right)\\&\geq\xi_0 \parallel \nabla u \parallel^2,\end{aligned}$$

نعلم أن $E(t)=\parallel u' \parallel^2+J(t)\geq J(t)$، إذن:

$$\begin{aligned}\xi_0 \parallel \nabla u \parallel^2&\leq\frac{p+2}{p}J(t)\\&\leq\frac{p+2}{p}E(t)\\&\leq\frac{p+2}{p}E(0),\end{aligned}$$

بإستخدام هذه العلاقة، بالإضافة إلى متراجحة سبولاف بوانكاري أنه من أجل $t\in[0,T_m]$، لدينا

$$\begin{aligned}\parallel u \parallel_{p+2}^{p+2}\leq C(p,\Omega)^{p+2}\parallel \nabla u \parallel^{p+2}&=C(p,\Omega)^{p+2}\parallel \nabla u \parallel^{p}\parallel \nabla u \parallel^{2}\\&\leq\frac{C(p,\Omega)^{p+2}}{\xi_0^{\frac{p+2}{p}}}\left(\frac{p+2}{p}E(0)\right)^{\frac{p}{2}}\xi_0\left\|\nabla u\right\|^2,\end{aligned}$$

وعليه فإن

$$\|u\|_{p+2}^{p+2}\leq\alpha\ \xi_0\left\|\nabla u\right\|^2<\xi_0\left\|\nabla u\right\|^2\quad,\forall t\in[0,T_m]. \tag{17.2}$$

ومنه

$$\xi_0\left\|\nabla u\right\|^2-\|u\|_{p+2}^{p+2}>0.$$

إذن $I_1(u(t))>0$ من أجل $t\in[0,T_m]$ مما يعني أن $u(t)\in w$ من أجل $t\in[0,T_m]$. يتوسع T_m بشكل متزايد حتى يصل إلى T. □

توطئة 3.3.2 إذا كان u يحقق فرضية التوطئة 2.3.2 إذن يوجد η بحيث $0<\eta<1$ و

$$\xi_0 \|\nabla u\|^2 \leq \frac{1}{\eta} I_1 \leq \frac{1}{\eta} I_2.$$

في الواقع يمكننا أخذ $\eta = 1-\alpha$.

برهان.

$$\begin{aligned}
\xi_0 \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2} &= \xi_0 \|\nabla u\|^2 - \eta\xi_0 \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2} + \eta\xi_0 \|\nabla u\|^2 \\
&= (1-\eta)\xi_0 \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2} + \eta\xi_0 \|\nabla u\|^2 \\
&= I_1(t).
\end{aligned}$$

إذن، إذا كان $\eta = (1-\alpha)$ و $\left\{\alpha\xi_0 \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2}\right\} + \eta\xi_0 \|\nabla u\|^2 = I_1$ ومن خلال تعريف I_2 والعلاقة (17.2) نجد:

$$\xi_0 \|\nabla u\|^2 \leq \frac{1}{\eta} I_1 \leq \frac{1}{\eta} I_2.$$

□

الآن نحن في وضع يسمح لنا بإثبات الإستقرار الأسي.

نظرية 1.3.2 لنفرض $u_0 \in w$ وتحقق (16.2) إذن

$$E(t) \leq E(0)e^{-ct}.$$

على $[0,\infty[$، حيث أن c ثابت موجب تماما.

برهان. نكامل (6.2) على $[t,t+1]$ نحصل على:

$$E(t) - E(t+1) = 2\nu \int_t^{t+1} \|\Delta u'\|^2 \, ds. \tag{18.2}$$

لنفرض أن:

$$E(t) - E(t+1) = D(t)^2. \tag{19.2}$$

يوجد $t_1 \in [t, t+\frac{1}{4}]$ و$t_2 \in [t+\frac{3}{4}, t+1]$ حيث:

$$2\nu \int_t^{t+\frac{1}{4}} \left\|\Delta u(t_1)'\right\|^2 ds \leq D(t)^2,$$

ومنه

$$2\nu \|\Delta u'(t_1)\|^2 \int_t^{t+\frac{1}{4}} ds \leq D(t)^2,$$

إذن

$$2\nu \|\Delta u'(t_1)\|^2 \leq 4D(t)^2.$$

وبنفس الطريقة من أجل $t_2 \in [t+\frac{3}{4}, t+1]$ نجد:

$$2\nu \|\Delta u'(t_2)\|^2 \leq 4D(t)^2.$$

وعليه نجد:

$$2\nu \left\|\Delta u'(t_i)\right\|^2 \leq 4D(t)^2 \quad , i=1,2. \tag{20.2}$$

بضرب المعادلة (1.2) في u وإجراء التكامل على $\Omega \times [t_1, t_2]$ نجد:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{\xi_0 \left\|\nabla u\right\|^2 + \xi_1 \left\|\nabla u\right\|^4 + \quad \left\|\Delta u\right\|^2 - \left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}\right\} dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} u_{tt}\, udxdt - \nu \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} \Delta u'.\Delta udxdt.$$

التعريف (13.2) يسمح لنا بالكتابة الآتية:

$$\int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt \leq -\int_{\Omega}\int_{t_1}^{t_2} u'' udtdx - \nu \int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} \Delta u'.\Delta udxdt. \tag{21.2}$$

وبإستخدام متراجحة كوشي شوارتز على:

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_{\Omega} \Delta u'.\Delta udxdt \leq \left|-\int_{t_1}^{t_2} \Delta u' \Delta udxdt\right| \leq \int_{t_1}^{t_2} \left\|\Delta u'\right\| \left\|\Delta u\right\| dt. \tag{22.2}$$

بعد ذلك، عن طريق التكامل بالتجزئة ومتراجحة كوشي شوارتز نحصل على:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega}\int_{t_1}^{t_2} u_{tt}\; u\; dtdx &\leq \left|\int_{\Omega}\int_{t_1}^{t_2} u_{tt}\; udtdx\right| \\
&= \left|\int_{\Omega} u(t_2)u'(t_2)dx - \int_{\Omega} u(t_1)u'(t_2)dx - \int_{t_1}^{t_2} \left\|u'\right\|^2 dt\right| \\
&\leq \int_{\Omega} \left|u(t_2)\right| \left|u'(t_2)\right| dx + \int_{\Omega} \left|u(t_1)\right| \left|u'(t_1)\right| dx + \int_{t_1}^{t_2} \left\|u'\right\|^2 dt \\
&\leq \left\|u(t_2)\right\| \left\|u'(t_2)\right\| + \left\|u(t_1)\right\| \left\|u'(t_1)\right\| + \int_{t}^{t+1} \left\|u'\right\|^2 dt,
\end{aligned}$$

ومن خلال متراجحة بوانكاري نجد:

$$-\int_{\Omega}\int_{t_1}^{t_2} u_{tt}.u\; dtdx \leq B^2 \sum_{i=1}^{2} \left\|\nabla u'(t_i)\right\| \left\|\nabla u(t_i)\right\| + B^2 \int_{t}^{t+1} \left\|\nabla u'\right\|^2 dx. \tag{23.2}$$

بحيث:

$$B^{-1} = \max\left\{\inf_{\|u\|\neq 0} \frac{\|\nabla u\|}{\|u\|}, \inf_{\|u'\|\neq 0} \frac{\|\nabla u'\|}{\|u'\|}, \inf_{\|\nabla u'\|\neq 0} \frac{\|\Delta u'\|}{\|\nabla u'\|}\right\}.$$

من (21.2)-(23.2) نحصل على النتيجة التالية:

$$\int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt \leq B^2 \sum_{i=1}^{2} \left\|\nabla u'(t_i)\right\| \left\|\nabla u(t_i)\right\| + B^2 \int_{t}^{t+1} \left\|\nabla u'\right\|^2 dx + \nu \int_{t_1}^{t_2} \left\|\Delta u'\right\| \left\|\Delta u\right\| dt. \tag{24.2}$$

و من خلال العلاقة (14.2) و(15.2) نجد أن $E(t) \geq 0$.

علاوة على ذلك، لدينا من خلال متراجحة بوانكاري والعلاقات (14.2)، (15.2)، (20.2) و أن $E(t)$ غير متزايدة فإن:

$$\left\|\nabla u(t_i)\right\| \left\|\nabla u'(t_i)\right\| \leq B^2 \left\|\Delta u(t_i)\right\| \left\|\Delta u'(t_i)\right\|,$$

ولدينا

$$\|\Delta u'(t_i)\| \leq \sqrt{\frac{2}{\nu}}\, D(t),$$

ومنه

$$\begin{aligned}
\|\nabla u'(t_i)\| \, \|\nabla u(t_i)\| &\leq \sqrt{\frac{2}{\nu}} B^2 D(t) \, \|\Delta u(t_i)\| \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\nu}} B^2 D(t) \, \|\Delta u(t)\| \\
&\leq \sqrt{\frac{2}{\nu}} B^2 D(t) \sup_{s\in[t,t+1]} \sqrt{E(s)},
\end{aligned}$$

وبما أن $E(t)$ متناقصة فإن:

$$\|\nabla u'(t_i)\| \, \|\nabla u(t_i)\| \leq B^2 \sqrt{\frac{2}{\nu}} D(t) \sqrt{E(t)},$$

إذن، من خلال متراجحة ε - يونغ يمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned}
B^2 \sum_{i=1}^{2} \|\nabla u'(t_i)\| \, \|\nabla u(t_i)\| &\leq B^4 \sum_{i=1}^{2} \sqrt{\frac{2}{\nu}} D(t) \sqrt{E(t)} \\
&= 2B^4 \sqrt{\frac{2}{\nu}} D(t) \sqrt{E(t)} \\
&\leq \frac{1}{4\varepsilon_0} (4B^8 \frac{2}{\nu} D(t)^2) + \varepsilon_0 E(t) \\
&= \frac{2B^8}{\nu\varepsilon_0} D(t)^2 + \varepsilon_0 E(t).
\end{aligned}$$

وبإستخدام متراجحة بوانكاري، (18.2) و(19.2) نجد:

$$\begin{aligned}
B^2 \int_t^{t+1} \|\nabla u'\|^2 \, ds &\leq B^4 \int_t^{t+1} \|\Delta u'\|^2 \, ds \\
&\leq \frac{B^4}{4} \|\Delta u(t_i)\|^2 \\
&\leq \frac{B^4}{2\nu} D(t)^2.
\end{aligned}$$

وبما أن $E(t)$ متناقصة وبإستخدام (14.2)، (15.2) و(18.2) نجد:

$$\begin{aligned}
\nu \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta u'\| \, \|\Delta u\| \, dt &\leq \frac{\nu}{4\varepsilon_1} \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta u'\|^2 \, dt + \varepsilon_1 \nu \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta u\|^2 \, dt \\
&\leq \frac{\nu}{4\varepsilon_1} \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta u'\|^2 \, dt + \varepsilon_1 \nu \sup_{s\in[t,t+1]} \|\Delta u(s)\|^2 \int_t^{t+1} ds \\
&\leq \frac{2\nu}{8\varepsilon_1} \int_{t_1}^{t_2} \|\Delta u'\|^2 \, dt + \varepsilon_1 \nu \, \|\Delta u(t)\|^2 \\
&= \frac{1}{8\varepsilon_1} D(t)^2 + \nu\varepsilon_1 \, \|\Delta u(t)\|^2 \\
&\leq \frac{1}{8\varepsilon_1} D(t)^2 + \nu\varepsilon_1 E(t).
\end{aligned}$$

وبتعويض كل هذه النتائج في العلاقة (24.2) نجد:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt &\leq \frac{2B^8}{\nu\varepsilon_0}D(t)^2+\varepsilon_0 E(t)+\frac{B^4}{2\nu}D(t)^2+\frac{1}{8\varepsilon_1}D(t)^2+\nu\varepsilon_1 E(t)\\ &=\left(\frac{2B^8}{\nu\varepsilon_0}+\frac{B^4}{2\nu}+\frac{1}{8\varepsilon_1}\right)D(t)^2+\left(\varepsilon_0+\nu\varepsilon_1\right)E(t),\end{aligned}$$

وعليه فإن:

$$\int_{t_1}^{t_2} I_2(t)dt \leq C_1 D(t)^2+C_2E(t). \tag{25.2}$$

حيث:

$$\begin{aligned}C_1&=\frac{2B^8}{\nu\varepsilon_0}+\frac{B^4}{2\nu}+\frac{1}{8\varepsilon_1}.\\ C_2&=\varepsilon_0+\nu\varepsilon_1.\end{aligned}$$

من ناحية أخرى، من (5.2) و(13.2) نجد:

$$\begin{aligned}E(t)&=\|u'\|^2+\xi_0\|\nabla u\|^2+\frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^4+\|\Delta u\|^2-\frac{2+p-p}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2}\\ &=\|u'\|^2+\xi_0\|\nabla u\|^2+\frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|^4+\|\Delta u\|^2-\|u\|_{p+2}^{p+2}+\frac{p}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2}\\ &=\|u'\|^2+I_2(t)+\frac{p}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2}.\end{aligned}$$

وبإستخدام هذه العلاقة نجد:

$$E(t)\leq\|u'\|^2+\left(\frac{p+4}{p+2}\right)I_2(t)+\frac{p\xi_0}{p+2}\|\nabla u\|^2.$$

وبمساعدة التوطئة 3.3.2 نجد:

$$E(t)\leq\|u'\|^2+\left(\frac{\eta(p+4)+p}{(p+2)\eta}\right)I_2. \tag{26.2}$$

نكامل (26.2) من t_1 إلى t_2 فنتحصل على:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}E(t)dt&\leq\int_{t_1}^{t_2}\|u'\|^2dt+\left(\frac{\eta(p+4)+p}{(p+2)\eta}\right)\int_{t_1}^{t_2}I_2(t)dt\\ &\leq B^2\int_{t_1}^{t_2}\|\nabla u'\|^2dt+\left(\frac{\eta(p+4)+p}{(p+2)\eta}\right)\int_{t_1}^{t_2}I_2(t)dt\\ &\leq B^4\int_{t_1}^{t_2}\|\Delta u'\|^2dt+\left(\frac{\eta(p+4)+p}{(p+2)\eta}\right)\int_{t_1}^{t_2}I_2(t)dt\\ &=\frac{B^4}{2\nu}D(t)^2+\left(\frac{\eta(p+4)+p}{(p+2)\eta}\right)\int_{t_1}^{t_2}I_2(t)dt.\end{aligned} \tag{27.2}$$

من الواضح أن تكامل (6.2) على المجال $[t,t_2]$ يعطي كما يلي:

$$E(t)=E(t_2)+2\nu\int_t^{t_2}\|\Delta u'\|^2ds, \tag{28.2}$$

وبما أن $\frac{1}{2} \geq t_2 - t_1$، إذن:

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt \geq E(t_2) + 2\nu \int_{t_1}^{t_2} dt \geq \frac{1}{2}E(t_2). \tag{29.2}$$

ثم من (18.2)-(19.2):

$$E(t) \leq 2\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt + D(t)^2, \tag{30.2}$$

تعطي العلاقة(30.2)بدورها مع (25.2) و(27.2):

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{B^4}{\nu}D(t)^2 + \frac{2(p+4)\eta + p}{(p+2)\eta}\left[C_1 D(t)^2 + C_2 E(t)\right] + D(t)^2 \\ &= \left(\frac{B^4}{\nu} + 1 + \frac{2C_1(p+4)\eta + p}{(p+2)\eta}\right) D(t)^2 + 2C_2\frac{(p+4)\eta + p}{(p+2)\eta}E(t), \end{aligned}$$

بفرض أن:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \frac{(1+\nu)^{-1}}{4} \times \frac{(p+2)\eta}{(p+4)\eta + p},$$

فنجد:

$$E(t) \leq 2\left(\frac{B^4}{\nu} + 1 + 2C_1\frac{(p+4)\eta + p}{(p+2)\eta}\right) D(t)^2,$$

إذن:

$$E(t) \leq C_3\, D(t)^2,$$

حيث

$$C_3 = 2\left(\frac{B^4}{\nu} + 1 + 2C_1\frac{(p+4)\eta + p}{(p+2)\eta}\right) > 1.$$

وعليه فإن:

$$E(t) \leq C_3\left(E(t) - E(t+1)\right), \quad t \geq 0.$$

وبتطبيق التوطئة 3.2.2 وبأخذ $\Phi(t) = E(t)$ على $[0, \infty)$ نجد:

$$E(t) \leq E(0)e^{-C_4 t}. \tag{31.2}$$

حيث

$$C_4 = \ln\left(\frac{C_3}{C_3 - 1}\right).$$

□

3

الإستقرار الأسي لمسألة كيرشوف بتخامد ضعيف

محتويات الفصل

1 المقدمة 23

2 مفاهيم أساسية 23

3 الإستقرار الأسي 24

1 المقدمة

الهدف من هذا الفصل هو دراسة المسألة بالقيم الأولية التالية:

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(\xi_0 - \xi_1 \|\nabla u(t)\|^2\right) \Delta u + \int_0^t h(t-s)\Delta u \, ds = |u|^p u \quad dans\ \Omega \times [0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x)\ et\ u_t(x,0) = u_1(x)\ dans\ \Omega \\ u(x,t) = 0\ sur\ \Gamma \end{cases} \tag{1.3}$$

بحيث Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ مع Γ حافته منتظمة. هنا تمثل h نواة الذاكرة .يفرض أن تكون جميع المتغيرات ξ_0،ξ_1 وp ثوابت فيزيائية موجبة.لنفصيل أكثر حول المعنى الفيزيائي للمسالة نوجه القارىء إلى [1, 2] أثار كلارك قضية مهمة تتعلق بالسلوك المتقارب للحلول في [7, 8]. لقد أثبت بأن الحل يتناقص بشكل أسي إلى حالة الإستقرار بشرط أن يكون لدينا قوة تخامد قوية Δu_t.
في هذا الفصل نستبدل قوة التخامد Δu_tالقوية بتخامد ضعيف متمثلة في $\int_0^t h(t-s)\Delta u \, ds$ ونثبت أن الحلول تؤول إلى 0 عندما t تؤول إلى مالانهاية.

2 مفاهيم أساسية

في هذا الفصل نقدم توطئة كومورنيك المشهورة والتي سنحتاجها لاحقا.

توطئة 1.2.3 (أنظر[9]) لتكن $E(t)$ دالة متناقصة وموجبة معرفة على $[0,\infty)$و

$$\int_S^\infty E(t)dt = CE(S),\ \forall S \geq S_0,$$

من أجل S_0 و C ثوابت موجبة، إذن

$$E(t) \leq E(0)\exp\left(1 - \frac{t}{S_0 + C}\right),\ \forall t \geq 0.$$

الآن نعطي الإفتراضات العامة التالية:

1. $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ هي دالة محدودة من الصنف C^1 تحقق

$$\xi_0 - \int_0^\infty h(s)ds = \ell > 0,$$

2. يوجد ثابت k موجب بحيث:

$$h'(t) \leq -kh(t),\ t > 0.$$

3 الإستقرار الأسي

نعرف طاقة المسألة(1.3) كمايلي:

$$\begin{aligned}E(t)&=\|u'\|^2+\left(\xi_0+\frac{\xi_1}{2}\|\nabla u(t)\|^2\right)\|\nabla u(t)\|^2+(h\Box\nabla u)(t)\\&-\int_0^t h(s)\|\nabla u(t)\|^2ds-\frac{2}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2},\quad t>0.\end{aligned}\tag{2.3}$$

بحيث

$$(h\Box\nabla u)(t)=\int_0^t h(t-s)\int_\Omega|\nabla u(s)-\nabla u(t)|^2dxds.$$

توطئة 1.3.3 $E(t)$ هي دالة غير متزايدة على $[0,\infty)$ و

$$E'(t)=(h'\Box\nabla u)(t)-h(t)\|\nabla u(t)\|^2\le 0,\ t>0.\tag{3.3}$$

برهان. بضرب المعادلة (1.3) في u_t وبالمكاملة على Ω نجد:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_{tt}u_t\,dx-\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\int_\Omega\Delta u\,u_tdx\\&+\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\Delta u\,u_tdsdx=\int_\Omega|u|^p uu_tdx\end{aligned}\tag{4.3}$$

نحسب كل طرف حدا حدا:

$$\bullet\int_\Omega u_{tt}u_t\,dx=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|u'\|^2.\tag{5.3}$$

$$\bullet-\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\int_\Omega\Delta uu_tdx=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\left(\xi_0+\frac{\xi_1}{2}\|\nabla u(t)\|^2\right)\|\nabla u(t)\|^2\right\}.\tag{6.3}$$

$$\begin{aligned}\bullet\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\Delta u(x,s)\,u_t(x,t)dsdx&=-\int_0^t h(t-s)\int_\Omega\nabla u(x,s).\nabla u_t(x,t)dxds\\&=-\int_\Omega\nabla u_t(x,t)\left\{\int_0^t h(t-s)\nabla u(x,s)ds\right\}dx\\&=-\int_\Omega\nabla u'(x,t)\left\{\int_0^t h(t-s)\nabla u(x,s)ds\right\}dx.\end{aligned}\tag{7.3}$$

$$\bullet\int_\Omega|u|^p uu_tdx=\frac{1}{p+2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\|u\|_{p+2}^{p+2}\right\}.\tag{8.3}$$

نعوض (5.3)-(8.3) في (4.3) نجد:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\|u'\|^2+\left(\xi_0+\frac{\xi_1}{2}\|\nabla u(t)\|^2\right)\|\nabla u(t)\|^2-\frac{2}{p+2}\|u\|_{p+2}^{p+2}\right\}\\&-\int_\Omega\nabla u'(x,t)\left\{\int_0^t h(t-s)\nabla u(x,s)ds\right\}dx=0.\end{aligned}\tag{9.3}$$

ولدينا:

$$-\int_{\Omega}\nabla u'(t)\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\left(h\square\nabla u\right)(t)-\int_0^t h(s)ds\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left(h'\square\nabla u\right)(t)+\frac{1}{2}h(t)\left\|\nabla u(t)\right\|^2.$$

نعوض هذه النتيجة في (9.3) نجد:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left\|u'\right\|^2+\left(\xi_0+\frac{\xi_1}{2}\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right.\left\|\nabla u(t)\right\|^2-\frac{2}{p+2}\left\|u'\right\|_{p+2}^{p+2}+\left(h\square\nabla u\right)(t)-\int_0^t h(s)ds\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right.$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(h'\square\nabla u\right)(t)-h(t)\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right\}$$

إذن

$$E(t)=\left\|u'\right\|^2+\left(\xi_0+\frac{\xi_1}{2}\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right)\left\|\nabla u(t)\right\|^2-\frac{2}{p+2}\left\|u'\right\|_{p+2}^{p+2}+\left(h\square\nabla u\right)(t)-\int_0^t h(s)ds\left\|\nabla u(t)\right\|^2.$$

و

$$E'(t)=\left(h'\square\nabla u\right)(t)-h(t)\left\|\nabla u(t)\right\|^2.$$

□

الآن بفرض:

$$F(t)=\left(\xi_0+\int_0^t h(s)\right)\left\|\nabla u\right\|^2+\frac{\xi_1}{2}\left\|\nabla u\right\|^4+\left(h\square\nabla u\right)(t)-\frac{2}{p+2}\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}. \quad (10.3)$$

إذن

$$E(t)=\left\|u'\right\|^2+F(t). \quad (11.3)$$

نعرف بئر الكمون كما في الفصل الثاني:

$$\boldsymbol{w}=\left\{u/I(u(t)):=\ell\left\|\nabla u(t)\right\|^2-\left\|u\right\|_{p+2}^{p+2}>0\right\}\cup 0.$$

توطئة 2.3.3 ليكن u حلا للمعادلة (1.3). إذا كان $u_0\in\boldsymbol{w}$ و

$$\alpha=\frac{C(p,\Omega)^{p+2}}{\ell^{\frac{p+2}{p}}}\left(\frac{p+2}{p}E(0)\right)^{p/2}<1, \quad (12.3)$$

فإن $u(t)\in\boldsymbol{w}$، من أجل $t\in[0,T]$. حيث $C(p,\Omega)$ ثابت سوبولاف بوانكاري.

برهان. لتكن $u_0\in\boldsymbol{w}$، إذن $I(u_0)>0$. بإستخدام الإستمرارية فإنه يوجد $T_m\leq T$ بحيث $I(u(t))\geq 0$ من أجل $t\in[0,T_m]$. لذلك من العلاقة (10.3)، (11.3) والتوطئة 1.3.3 لدينا:

$$\ell\left\|\nabla u\right\|^2\leq\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\left\|\nabla u\right\|^2,$$

ولدينا

$$F(t) \geq \left(\xi_0 - \int_0^\infty h(s)ds\right) \|\nabla u\|^2 - \frac{2}{p+2} \|u\|_{p+2}^{p+2},$$

بضرب الطرفين في $\frac{p+2}{p}$ نجد:

$$\begin{aligned} \frac{p+2}{p}F(t) &\geq \frac{p+2}{p}\ell \|\nabla u\|^2 - \frac{2}{p} \|u\|_{p+2}^{p+2} \\ &= (1+\frac{2}{p})\ell \|\nabla u\|^2 - \frac{2}{p} \|u\|_{p+2}^{p+2} \\ &= \ell \|\nabla u\|^2 + \frac{2}{p} \left(\ell \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2}\right) \\ &\geq \ell \|\nabla u\|^2 . \end{aligned}$$

ولدينا

$$E(t) = \|u'\|^2 + F(t) \geq F(t),$$

و$E'(t)$سالبة إذن

$$\ell \|\nabla u\|^2 \leq \left(\xi_0 - \int_0^t h(s)ds\right) \|\nabla u\|^2 \leq \frac{p+2}{p}F(t) \leq \frac{p+2}{p}E(t) \leq \frac{p+2}{p}E(0). \tag{13.3}$$

تعطي هذه العلاقة مع متراجحة سوبولاف بوانكاري من أجل $t \in [0, T_m]$ إلى:

$$\|u\|_{p+2}^{p+2} \leq C(p,\Omega)^{p+2} \|\nabla u\|^{p+2} = C(p,\Omega)^{p+2} \|\nabla u\|^p . \|\nabla u\|^2 ,$$

ولدينا من (13.3):

$$\|\nabla u\|^p \leq \left(\frac{p+2}{p\ell}E(0)\right)^{p/2},$$

إذن

$$\|u\|_{p+2}^{p+2} \leq \frac{C(p,\Omega)^{p+2}}{\ell} \left(\frac{p+2}{p\ell}E(0)\right)^{p/2} \ell \|\nabla u\|^2 .$$

يأتي بفرضنا علىα أن:

$$\|u\|_{p+2}^{p+2} \leq \alpha\ell \|\nabla u\|^2 < \alpha \left(\xi_0 - \int_0^t h(s)ds\right) \|\nabla u\|^2 < \ell \|\nabla u\|^2 , \quad \forall t \in [0, T_m]. \tag{14.3}$$

إذن وجدنا:

$$\ell \|\nabla u\|^2 - \|u\|_{p+2}^{p+2} > 0$$

ومنه

$$I(u(t)) > 0, \forall t \in [0, T_m].$$

مما يعني أن $u(t) \in w$ من أجل $t \in [0, T_m]$. يمتد T_m بشكل متزايد حتى يصل إلى T. □

الآن نثبت نظريتنا.

نظريـة 1.3.3 نفرض أن $u_0 \in w$، $u_1 \in L^2(\Omega)$ وعلاقة (12.3) محققة، إذن لدينا التقدير التالي:

$$E(t) \leq E(0)\exp(1-\bar{C}t),\ \forall t \geq 0.$$

من أجل $\bar{C}$ ثابت موجب.

برهان. نكامل على المجال $[S,T]$ العبارة (2.3) نجد:

$$\begin{aligned}\int_S^T E(t)dt &= \int_S^T \|u'\|^2 dt + \frac{\xi_1}{2}\int_S^T \|\nabla u\|^4 dt + \int_S^T (h\Box\nabla u)(t)dt\\ &+ \int_S^T \left(\xi_0 - \int_0^t h(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2 dt - \frac{2}{p+2}\int_S^T \|u\|_{p+2}^{p+2} dt.\end{aligned} \tag{15.3}$$

نضرب طرفي المعادلة (1.3) في uونكامل على $\Omega \times [S,T]$ نجد:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_S^T u_{tt}udtdx - \int_S^T \left(\xi_0 + \xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\Delta u.udxdt + \int_S^T\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\Delta u(x,s)u(x,t)dsdxdt\\ &= \int_S^T\int_\Omega |u|^p u^2 dxdt,\end{aligned}$$

ومنه

$$\int_S^T \left\{\xi_0\|\nabla u(t)\|^2 + \xi_1\|\nabla u(t)\|^4 - \|u\|_{p+2}^{p+2}\right\}dt$$

$$= -\int_\Omega\int_S^T u''udtdx + \int_S^T\int_0^t h(t-s)\int_\Omega \nabla u(s).\nabla u(t)dxdsdt$$

نضيف إلى الطرفين $-\int_S^T\int_0^t h(s)ds\|\nabla u\|^2 dt$ نجد:

$$\begin{aligned}&\int_S^T\left\{\left(\xi_0 - \int_0^t h(s)ds\right)\|\nabla u\|^2 + \xi_1\|\nabla u(t)\|^4 - \|u\|_{p+2}^{p+2}\right\}dt = -\int_\Omega\int_S^T u''udtdx\\ &+ \int_S^T\int_\Omega \nabla u(t).\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s) - \nabla u(t)\right]dsdxdt,\end{aligned}$$

وعن طريق التكامل بالتجزئة نحصل على:

$$-\int_\Omega\int_S^T u''udtdx = \int_S^T \|u'\|^2 dx - \int_\Omega u'(t)u(t)\Big|_S^T dx.$$

يمكننا كتابة مايلي:

$$\begin{aligned}&\int_S^T\left\{\xi_0 - \int_0^t h(s)ds\right\}\|\nabla u(t)\|^2 dt = \int_S^T \|u'\|^2 dt - \int_\Omega u'(t)u(t)\Big|_S^T dx\\ &+ \int_S^T\int_\Omega \nabla u(t).\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]dsdxdt - \xi_1\int_S^T \|\nabla u\|^4 dt + \int_S^T \|u\|_{p+2}^{p+2} dt.\end{aligned} \tag{16.3}$$

بإستخدام متراجحة كوشي شوارتز ومتراجحة ε -يونغ نحصل على:

$$\int_S^T\int_\Omega \nabla u(t).\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]dsdxdt$$

$$\leq \int_S^T \|\nabla u(t)\|\int_0^t h(t-s)\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|dsdt \tag{17.3}$$

$$\leq \frac{\varepsilon_0}{2}\int_S^T \|\nabla u(t)\|^2 dt + \frac{1}{2\varepsilon_0}\int_S^T\left(\int_0^t h(t-s)\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|ds\right)^2 dt.$$

من أجل $\varepsilon_0 > 0$.

بإستخدام الفرضية الثانية $h'(t) \leq -kh(t)$ وبإستخدام (3.3) نجد أن:

$$\int_S^T \left(\int_0^t h(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\| ds\right)^2 dt = \int_S^T \left(\int_0^t \sqrt{h(t-s)}\sqrt{h(t-s)}\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\| ds\right)^2 dt$$

$$\leq \int_S^T \left(\int_0^t h(t-s)ds \int_0^t h(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right) dt$$

$$= \int_S^T \left(\int_0^t h(s)ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right) dt$$

$$\leq \int_S^T \left(\int_0^\infty h(s)ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 ds\right) dt$$

$$\leq -\frac{1}{k}(\xi_0-\ell)\int_S^T \int_0^t h'(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2 dsdt$$

ولدينا

$$-E'(t) = -\left(h'\Box\nabla u(t)\right)(t) + h(t)\left\|\nabla u\right\|^2 \geq -\left(h'\Box\nabla u(t)\right)(t),$$

ومنه

$$\begin{aligned}\int_S^T \left(\int_0^t h(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\| ds\right)^2 dt &\leq -\frac{1}{k}(\xi_0-\ell)\int_S^T E'(t)dt \\ &= -\frac{1}{k}(\xi_0-\ell)\left(E(T)-E(S)\right) \\ &\leq \frac{\xi_0-\ell}{k}E(S).\end{aligned} \tag{18.3}$$

نتيجة ل(17.3) و(18.3) نجد:

$$\int_S^T \int_\Omega \nabla u(t)\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right] dsdxdt \leq \frac{\varepsilon_0}{2}\int_S^T \left\|\nabla u(t)\right\|^2 dt + \frac{\xi_0-\ell}{2k\varepsilon_0}E(S). \tag{19.3}$$

ثم نلاحظ من (10.3) أن:

$$F(t) \geq \frac{p}{p+2}\left\{\left(\xi_0 - \int_0^t h(s)ds\right)\left\|\nabla u\right\|^2 + \left(h\Box\nabla u\right)(t)\right\} + \frac{\xi_1}{2}\left\|\nabla u\right\|^4, \tag{20.3}$$

وما تتضمنه

$$\left\|\nabla u\right\|^2 \leq \frac{(p+2)}{p\left(\xi_0 - \int_0^t h(s)ds\right)}E(t), \tag{21.3}$$

وبالتالي، بمساعدة متراجحة بوانكاري:

$$\left\|u\right\|^2 \leq B\left\|\nabla u\right\|^2 \leq \frac{(p+2)B}{p\ell}E(t), \tag{22.3}$$

حيث B ثابت بوانكاري.
وبتطبيق المتراجحة (22.3) وبمعرفة أن $F(t)\geq 0$ وبإستخدام متراجحة ε-يونغ مع أخذ $\varepsilon=1$ نجد:

$$\left|\int_{\Omega}u'(t)u(t)dx\right|\leq\frac{1}{2}\left\|u'\right\|^2+\frac{1}{2}\left\|u\right\|^2\leq\frac{1}{2}\left(1+\frac{(p+2)}{p\ell}B\right)E(t). \tag{23.3}$$

ثم من (23.3) وحقيقة أن $E(t)$ غير متزايدة نستنتج أن:

$$\begin{aligned}-\int_{\Omega}u'(t)u(t)\Big|_S^T dx\leq&\left|\int_{\Omega}u'(t)u(t)\Big|_S^T dx\right|\\=&\left|\int_{\Omega}u'(T)u(T)dx-\int_{\Omega}u'(S)u(S)dx\right|\\\leq&\left|\int_{\Omega}u'(T)u(T)dx\right|+\left|\int_{\Omega}u'(S)u(S)dx\right|\\\leq&\frac{1}{2}\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}\right)E(T)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}\right)E(S)\\=&\frac{1}{2}\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}\right)[E(T)+E(S)]\\\leq&\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}\right)E(S),\end{aligned}$$

ومنه

$$-\int_{\Omega}u'(t)u(t)\Big|_S^T dx\leq\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}\right)E(S). \tag{24.3}$$

الآن، بإستعمال (14.3) من السهل رؤية:

$$\int_S^T\|u\|_{p+2}^{p+2}dt\leq\alpha\int_S^T\ell\left\|\nabla u\right\|^2dt<\alpha\int_S^T\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\left\|\nabla u\right\|^2dt. \tag{25.3}$$

مع الأخذ بعين الإعتبار المتراجحات (19.3)، (24.3) و(25.3) في (16.3) فهي نجد:

$$\begin{aligned}\int_S^T\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt\leq&\int_S^T\left\|u'\right\|^2dt+\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}+\frac{\xi_0-\ell}{2\varepsilon_0 k}\right)E(S)\\-\xi_1\int_S^T\left\|\nabla u(t)\right\|^4dt+&\alpha\int_S^T\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\left\|\nabla u\right\|^2dt+\frac{\varepsilon_0}{2}\int_S^T\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt.\end{aligned}$$

إذا إفترضنا $\varepsilon_0=(1-\alpha)\left(\xi_0-\int_0^{\infty}h(s)ds\right)$ فإن:

$$\begin{aligned}\int_S^T\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt\leq&\int_S^T\left\|u'\right\|^2dt+\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}+\frac{\xi_0-\ell}{2(1-\alpha)\ell k}\right)E(S)\\-\xi_1\int_S^T\left\|\nabla u(t)\right\|^4dt+\alpha\int_S^T\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)&\left\|\nabla u\right\|^2dt+\frac{(1-\alpha)}{2}\int_S^T\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\left\|\nabla u\right\|^2dt.\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}(1-\alpha-\frac{(1-\alpha)}{2})\int_S^T\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt\leq&\int_S^T\left\|u'\right\|^2dt-\xi_1\int_S^T\left\|\nabla u(t)\right\|^4dt\\&+\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}+\frac{\xi_0-\ell}{2(1-\alpha)\ell k}\right)E(S)\end{aligned}$$

إذن

$$\int_S^T \left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2 dt \leq \frac{2}{1-\alpha}\int_S^T \|u'\|^2 dt-\frac{2}{1-\alpha}\xi_1\int_S^T \|\nabla u(t)\|^4 dt + \frac{2}{1-\alpha}\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}+\frac{\xi_0-\ell}{2(1-\alpha)\ell k}\right)E(S). \tag{26.3}$$

الآن بضرب طرفي المعادلة (1.3) في $\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds$ ونكامل على $\Omega\times[S,T]$ نجد:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_S^T u''\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdtdx-\int_S^T\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\\&\times\int_\Omega \Delta u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdxdt\\&+\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\Delta u ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right)dxdt\\&=\int_\Omega\int_S^T |u|^p u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdtdx,\end{aligned} \tag{27.3}$$

من خلال التكامل بالتجزئة، نحصل على:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_S^T u''\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdtdx\\&=\int_\Omega u'(t)\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\Big|_S^T dx-\int_\Omega\int_S^T u'(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\{\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right\}dtdx\\&=-\int_\Omega\int_S^T u'(t)\left\{\int_0^t h'(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds-\int_0^t h(t-s)u_t(t)ds\right\}\\&+\int_\Omega u'(t)\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\Big|_S^T dx\\&=\int_\Omega u'(t)\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\Big|_S^T dx+\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds\right)\|u'(t)\|^2 dt\\&-\int_\Omega\int_S^T u'(t)\int_0^t h'(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdtdx,\end{aligned}$$

ونعوض في (27.3) نجد:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u'(t)\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdx\Big|_S^T-\int_\Omega\int_S^T u'(t)\int_0^t h'(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdtdx\\&+\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds\right)\|u'(t)\|^2 dt-\int_S^T\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\times\int_\Omega\Delta u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdxdt\\&+\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\Delta u ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right)dxdt\\&=\int_\Omega\int_S^T |u|^p u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdtdx,\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}&\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds\right)\|u'(t)\|^2 dt=\int_\Omega\int_S^T |u|^p u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdtdx\\&-\int_\Omega u'(t)\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdx\Big|_S^T+\int_\Omega\int_S^T u'(t)\int_0^t h'(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdtdx\\&+\int_S^T\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\times\int_\Omega\Delta u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdxdt\\&-\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\Delta u ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right)dxdt.\end{aligned} \tag{28.3}$$

كذلك بحكم (11.3) و (20.3) فإن:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega u'(t)\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdx\right|\\
\leq&\frac{\varepsilon_1}{2}\int_\Omega (u'(t))^2dx+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right)^2dx\\
\leq&\frac{\varepsilon_1}{2}E(t)+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_\Omega\left(\int_0^t \sqrt{h(t-s)}\sqrt{h(t-s)}\left[u(s)-u(t)ds\right]\right)^2dx\\
\leq&\frac{\varepsilon_1}{2}E(t)+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]^2ds\right)dx\\
=&\frac{\varepsilon_1}{2}E(t)+\frac{1}{2\varepsilon_1}\left(\int_0^t h(s)ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left\|u(s)-u(t)\right\|^2ds\right)\\
\leq&\frac{\varepsilon_1}{2}E(t)+\frac{B^2}{2\varepsilon_1}\left(\int_0^\infty h(s)ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2ds\right)\\
\leq&\frac{1}{2}\left(\varepsilon_1+\frac{B^2(\xi_0-\ell)}{\varepsilon_1}\right)E(t)\leq\frac{1}{2}\left(\varepsilon_1+\frac{B^2(\xi_0-\ell)}{\varepsilon_1}\right)E(S),
\end{aligned}$$

من أجل $\varepsilon_1\geq 0$، إذن

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u'(t)\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdx\Big|_S^T\leq&\left|\int_\Omega u'(t)\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdx\Big|_S^T\right|\\
\leq&\left|\int_\Omega u'(T)\int_0^T h(T-s)\left[u(s)-u(T)\right]dsdx\right|\\
+&\left|\int_\Omega u'(S)\int_0^S h(S-s)\left[u(s)-u(S)\right]dsdx\right|\\
\leq&\frac{1}{2}\left(\varepsilon_1+\frac{B^2(\xi_0-\ell)}{\varepsilon_1}\right)\left[E(S)+E(S)\right]\\
=&\left(\varepsilon_1+\frac{B^2(\xi_0-\ell)}{\varepsilon_1}\right)E(S).
\end{aligned}\tag{29.3}$$

من ناحية أخرى لدينا:

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega u'(t)\int_0^t h'(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdxdt\\
\leq&\frac{\varepsilon_2}{2}\int_S^T\int_\Omega (u'(t))^2dx+\frac{1}{2\varepsilon_2}\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t\left|h'(t-s)\right|\left|u(s)-u(t)\right|ds\right)^2dxdt,
\end{aligned}$$

من أجل $\varepsilon_2>0$.

من $h'(t)\leq 0$، فإن العلاقة (3.3) فتصبح:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(\int_0^t |h'(t-s)|\,|u(s)-u(t)|\,ds^2dx\right.\\
&=\int_\Omega \left(\int_0^t \sqrt{-h'(t-s)}\sqrt{-h'(t-s)}\,|u(s)-u(t)|\,ds\right)^2 dx\\
&\leq \int_\Omega \left(\int_0^t -h'(t-s)ds\right)\left(-\int_0^t h'(t-s)\,|u(s)-u(t)|^2\,ds\right)dx\\
&=-\int_0^t h'(s)ds\left(-\int_0^t h'(t-s)\,\|u(s)-u(t)\|^2\,ds\right)\\
&=-\left.h'(s)\right|_0^t\left(-\int_0^t h'(t-s)\,\|u(s)-u(t)\|^2\,ds\right)\\
&=(h(0)-h(t))\left(-\int_0^t h'(t-s)\,\|u(s)-u(t)\|^2\,ds\right)\\
&\leq h(0)\left(-\int_0^t h'(t-s)\,\|u(s)-u(t)\|^2\,ds\right)\\
&\leq -h(0)B\left(\int_0^t h'(t-s)\,\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\|^2\,ds\right)\\
&=-h(0)B\,(h'\Box\nabla u)(t)\leq -h(0)BE'(t)
\end{aligned}$$

نتيجة لـ:

$$\begin{aligned}
\int_S^T\int_\Omega u'(t)\int_0^t h'(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdxdt &\leq \frac{\varepsilon_2}{2}\int_S^T\|u'(t)\|^2\,dx-\frac{h(0)B}{2\varepsilon_2}\int_S^T E'(t)dt\\
&\leq \frac{\varepsilon_2}{2}\int_S^T\|u'(t)\|^2\,dx+\frac{h(0)B}{2\varepsilon_2}E(S).
\end{aligned}\tag{30.3}$$

من جهة أخرى:

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\times\int_\Omega \Delta u\int_0^t h(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdxdt\\
&=\int_S^T\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\left\{-\int_\Omega \nabla u\int_0^t h(t-s)\,[\nabla u(s)-\nabla u(t)]\,dsdxdt\right\}\\
&=-\xi_0\int_S^T\int_\Omega \nabla u.\int_0^t h(t-s)\,[\nabla u(s)-\nabla u(t)]\,dsdxdt\\
&-\xi_1\int_S^T\|\nabla u(t)\|^2\int_\Omega \nabla u.\int_0^t[\nabla u(s)-\nabla u(t)]\,dsdxdt.
\end{aligned}$$

بتطبيق متراجحة ε-يونغ والعلاقة (13.3) و(3.3) نجد:

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\left(\xi_0+\xi_1\|\nabla u(t)\|^2\right)\times\int_\Omega \Delta u\int_0^t h(t-s)\,[u(s)-u(t)]\,dsdxdt\\
&\leq -\xi_0\int_S^T\int_\Omega \nabla u\int_0^t h(t-s)\,[\nabla u(s)-\nabla u(t)]\,dsdxdt\\
&+\frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T\|\nabla u(t)\|^2\,dt+\frac{\xi_1^2(\xi_0-\ell)(p+2)^2}{2\varepsilon_3(p\ell)^2k}E^2(0)E(S).
\end{aligned}\tag{31.3}$$

من أجل $\varepsilon_3>0$.

إذن لدينا:

$$
\begin{aligned}
&-\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\Delta u\,ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&=\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\nabla u\,ds\right).\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&=\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega\nabla u\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]dsdxdt\\
&+\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)^2dxdt.
\end{aligned}
\tag{32.3}
$$

لأن

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)^2dxdt\\
&=\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&=\int_S^T\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&-\int_S^T\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\nabla u(t)ds\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt.
\end{aligned}
$$

لذلك بفضل (18.3) لدينا:

$$
\begin{aligned}
&-\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\Delta u\,ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&\le\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega\nabla u\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt+\frac{\xi_0-\ell}{k}E(S).
\end{aligned}
\tag{33.3}
$$

من العلاقة(33.3) والعلاقة (32.3) نجد:

$$
\begin{aligned}
&-\xi_0\int_S^T\int_\Omega\nabla u\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]dsdxdt\\
&+\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega\nabla u\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&=\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds-\xi_0\right)\int_\Omega\nabla u\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&\le\int_S^T\left(-\int_0^t h(s)ds+\xi_0\right)\left|\int_\Omega\nabla u\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt\right|\\
&\le\xi_0\int_S^T\left|\int_\Omega\nabla u\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt\right|,
\end{aligned}
$$

لأن

$$
\xi_0>\int_0^t h(s)ds.
$$

وبتعويض(19.3) نحصل على:

$$
\begin{aligned}
&\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds-\xi_0\right)\int_\Omega\nabla u(t)\left(\int_0^t h(t-s)\left[\nabla u(s)-\nabla u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&\qquad\le\frac{\xi_0\varepsilon_3}{2}\int_S^T\|\nabla u(t)\|^2dt+\frac{\xi_0(\xi_0-\ell)}{2\varepsilon_3 k}E(S).
\end{aligned}
\tag{34.3}
$$

الآن، من (31.3)-(34.3) لدينا:

$$\begin{aligned}
&\int_S^T \left(\xi_0+\xi_1\left\|\nabla u(t)\right\|^2\right)\times\int_\Omega \Delta u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdxdt\\
&-\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\Delta u\, ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right)dxdt\\
&\leq(\xi_0-\ell)\left(\frac{\xi_0}{2\varepsilon_3 k}+\frac{\xi_1^2E^2(0)(p+2)^2}{2(p\ell)^2\varepsilon_3 k}+\frac{1}{k}\right)E(S)+\varepsilon_3(\frac{\xi_0}{2}+\frac{1}{2})\int_S^T\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt.
\end{aligned}\tag{35.3}$$

بالإضافة إلى ذلك لدينا:

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega |u|^p u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdxdt\\
&\leq\int_S^T\left(\int_\Omega |u|^{2p}u^2\right)^{1/2}\left(\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right)^2dx\right)^{1/2}dt\\
&\leq\frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T\left(\int_\Omega |u|^{2p+2}dx\right)dt+\frac{1}{2\varepsilon_3}\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]ds\right)^2dxdt\\
&\leq\frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}dt+\frac{1}{2\varepsilon_3}\int_S^T\int_\Omega\left(\int_0^t h(s)ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]^2ds\right)dxdt\\
&=\frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}dt+\frac{1}{2\varepsilon_3}\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left\|u(s)-u(t)\right\|^2ds\right)dt\\
&\leq\frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}dt+\frac{\int_0^\infty h(s)dsB}{2\varepsilon_3}\int_0^t h(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2dsdt\\
&\leq\frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}dt-\frac{B(\xi_0-\ell)}{2\varepsilon_3 k}\int_0^t h'(t-s)\left\|\nabla u(s)-\nabla u(t)\right\|^2dsdt\\
&\leq\frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}dt-\frac{B(\xi_0-\ell)}{2\varepsilon_3 k}\int_0^t E'(t)dt\\
&\leq\frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}dt+\frac{B(\xi_0-\ell)}{2\varepsilon_3 k}E(S),
\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
&\int_S^T\int_\Omega |u|^p u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdxdt\\
&\leq\frac{\varepsilon_3}{2}\int_S^T\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}dt+\frac{B(\xi_0-\ell)}{2\varepsilon_3 k}E(S).
\end{aligned}\tag{36.3}$$

ولتقدير $\int_S^T\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}dt$ نستخدم متراجحة سوبولاف بوانكاري

$$\begin{aligned}
\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}&\leq C_*(p,\Omega)^{2p+2}\left\|\nabla u\right\|^{2p+2}\\
&\leq C_*^{2p+2}(p,\Omega)\left(\frac{p+2}{p\ell}E(0)\right)^p\left\|\nabla u\right\|^2\\
&\leq C^{p+2}(p,\Omega)\left(\frac{p+2}{p\ell}E(0)\right)^p\left\|\nabla u\right\|^2=\beta\left\|\nabla u\right\|^2.
\end{aligned}$$

إذن

$$\left\|u\right\|_{2p+2}^{2p+2}\leq C^{p+2}(p,\Omega)\left(\frac{p+2}{p\ell}E(0)\right)^p\left\|\nabla u\right\|^2=\beta\left\|\nabla u\right\|^2.\tag{37.3}$$

حيث $C_*(p,\Omega)$ هو ثابت سوبولاف بوانكاري، مع $0<P<+\infty \;\; (n=1,2)$ أو $0<p\leq \dfrac{2}{n-2} \;\; (n>2)$.
وعليه فإن

$$\int_S^T\int_\Omega |u|^p u\int_0^t h(t-s)\left[u(s)-u(t)\right]dsdxdt\leq \frac{\varepsilon_3}{2}\beta\int_S^T\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt+\frac{B(\xi_0-\ell)}{2\varepsilon_3 k}E(S) \tag{38.3}$$

الآن بدمج الصيغ (29.3)، (30.3)، (35.3) و(38.3) مع (28.3) نحصل على:

$$\begin{aligned}&\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds\right)\left\|u'(t)\right\|^2dt+\frac{\varepsilon_2}{2}\int_S^T\left\|u'(t)\right\|dt\leq \varepsilon_3\left(\frac{\beta+\xi_0+1}{2}\right)\int_S^T\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt\\&+(\xi_0-\ell)\left[\frac{\beta}{2\varepsilon_3 k}+\frac{\varepsilon_1}{\xi_0-\ell}+\frac{B^2}{\varepsilon_1}+\frac{h(0)B}{2\varepsilon_3 k(\xi_0-\ell)}+\frac{\xi_0}{2\varepsilon_3 k}+\frac{\xi_1^2E^2(0)(p+2)^2}{2(p\ell)^2\varepsilon_3 k+(p\ell)^2(\xi_0+B)}+\frac{1}{k}\right]E(S),\end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned}&\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds\right)\left\|u'(t)\right\|^2dt\leq CE(S)+\frac{\varepsilon_2}{2}\int_S^T\left\|u'(t)\right\|dt\\&+\varepsilon_3\left(\frac{\beta+\xi_0+1}{2}\right)\int_S^T\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt.\end{aligned}$$

حيث

$$C=(\xi_0-\ell)\left[\frac{\varepsilon_1}{\xi_0-\ell}+\frac{B^2}{\varepsilon_1}+\frac{h(0)B}{2\varepsilon_3 k(\xi_0-\ell)}+\frac{\xi_0}{2\varepsilon_3 k}+\frac{\xi_1^2E^2(0)(p+2)^2+(p\ell)^2(\xi_0+B)}{2(p\ell)^2\varepsilon_3 k}+\frac{1}{k}\right].$$

ومنه

$$\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds-\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left\|u'(t)\right\|^2dt\leq CE(S)+\varepsilon_3\left(\frac{\beta+\xi_0+1}{2}\right)\int_S^T\left\|\nabla u(t)\right\|^2dt. \tag{39.3}$$

إنه من الواضح:

$$\int_0^S h(s)ds\geq\int_0^{S_0}h(s)ds>0,\;\; S\geq S_0,$$

وبإختيار:

$$\varepsilon_2<\int_0^{S_0}h(s)ds\leq\int_0^S h(s)ds,$$

فإن

$$\frac{\varepsilon_2}{2}<\frac{1}{2}\int_0^{S_0}h(s)ds\leq\frac{1}{2}\int_0^S h(s)ds,$$

وعليه فإن:

$$-\frac{\varepsilon_2}{2}>-\frac{1}{2}\int_0^{S_0}h(s)ds\geq-\frac{1}{2}\int_0^S h(s)ds,$$

إذن:

$$\begin{aligned}&\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds-\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left\|u'(t)\right\|^2dt\\&\geq\int_S^T\left(\int_0^S h(s)ds-\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left\|u'(t)\right\|^2dt\\&\geq\int_S^T\left(\int_0^{S_0}h(s)ds-\frac{1}{2}\int_0^{S_0}h(s)ds\right)\left\|u'(t)\right\|^2dt\\&=\frac{1}{2}\int_S^T\left(\int_0^{S_0}h(s)ds\right)\left\|u'(t)\right\|^2dt.\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_S^T\left(\int_0^{S_0}h(s)ds\right)\|u'(t)\|^2\,dt\leq&\int_S^T\left(\int_0^t h(s)ds-\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\|u'(t)\|^2\,dt\\ \leq& CE(S)+\varepsilon_3\left(\frac{\beta+\xi_0+1}{2}\right)\int_S^T\|\nabla u(t)\|^2\,dt,\end{aligned}$$

وعليه فإن

$$\int_S^T\|u'(t)\|^2\,dt\leq\frac{2CE(S)}{\int_0^{S_0}h(s)ds}+\frac{\varepsilon_3(\beta+1+\xi_0)}{\int_0^{S_0}h(s)ds}\int_S^T\|\nabla u(t)\|^2\,dt. \tag{40.3}$$

نعوض العلاقة (40.3) في (26.3) نجد:

$$\begin{aligned}&\int_S^T\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2\,dt\\ \leq&\frac{4CE(S)}{(1-\alpha)\int_0^{S_0}h(s)ds}+\frac{2\varepsilon_3(\beta+1+\xi_0)}{(1-\alpha)\int_0^{S_0}h(s)ds}\int_S^T\|\nabla u(t)\|^2\,dt\\ +&\frac{2}{1-\alpha}\left(1+\frac{(p+2)B}{p\ell}+\frac{\xi_0-\ell}{2\ell(1-\alpha)k}\right)E(S)-\frac{2}{1-\alpha}\xi_1\int_S^T\|\nabla u(t)\|^4\,dt.\end{aligned} \tag{41.3}$$

وبفرض $\left(\xi_0-\int_0^\infty h(s)ds\right)\left(\int_0^{S_0}h(s)ds\right)\frac{(1-\alpha)}{4(1+\xi_0+\beta)}=\varepsilon_3$ يتيح لنا كتابة:

$$\int_S^T\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2\,dt+\frac{4\xi_1}{1-\alpha}\int_S^T\|\nabla u\|^4\,dt\leq\bar{C}E(S)$$

وعليه فإن:

$$\int_S^T\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\|\nabla u\|^2+\frac{\xi_1}{2}\int_S^T\|\nabla u\|^4\,dt\leq\bar{C}E(S). \tag{42.3}$$

حيث

$$\bar{C}=\frac{4}{1-\alpha}\left[2C\left(\int_0^{S_0}h(s)ds\right)^{-1}+1+\frac{(p+2)B}{p\ell}+\frac{\xi_0-\ell}{2(1-\alpha)\ell k}\right].$$

ثم من (40.3) و(42.3) فإن:

$$\int_S^T\|u'(t)\|^2\,dt\leq 2CE(S)\left(\int_0^{S_0}h(s)ds\right)^{-1}+\frac{1-\alpha}{4}\int_S^T\left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\|\nabla u(t)\|^2\,dt.$$

ومن (42.3) نجد:

$$\begin{aligned}\int_S^T\|u'(t)\|^2\,dt\leq&2CE(S)\left(\int_0^{S_0}h(s)ds\right)^{-1}+\frac{1-\alpha}{4}\bar{C}E(S)\\ \leq&\frac{1-\alpha}{4}\bar{C}E(S)+\frac{1-\alpha}{4}\bar{C}E(S)\\ =&\frac{1-\alpha}{2}\bar{C}E(S).\end{aligned} \tag{43.3}$$

وبشكل واضح لدينا:

$$\int_S^T(h\Box\nabla u)(t)\leq\frac{-1}{k}\int_S^T(h'\Box\nabla u)(t)\leq\frac{E(S)}{k}\leq\bar{C}E(S). \tag{44.3}$$

وأخيرا

$$\begin{aligned}\frac{2}{p+2}\int_S^T \|u\|_{p+2}^{p+2}\,dt \leq & \frac{2\alpha}{p+2}\int_S^t \left(\xi_0-\int_0^t h(s)ds\right)\|\nabla u\|^2\,dt \\ \leq & \frac{2\alpha\bar{C}}{p+2}E(S) \leq \bar{C}E(S).\end{aligned} \tag{45.3}$$

لذلك بدمج العلاقات من (42.3)-(45.3) يعطي لنا:

$$\int_S^T E(t)dt \leq 4\bar{C}E(S).$$

و لما $T\to\infty$ تعطي

$$\int_S^\infty E(t)dt \leq 4\bar{C}E(S),\ \forall S\geq S_0>0.$$

وبتطبيق التوطئة 1.2.3 فإن

$$E(t)\leq E(0)\exp\left(1-\frac{t}{S_0+4\bar{C}}\right),\ \forall t\geq 0.$$

□

4

الإستقرار الأسي لمعادلة الأمواج بإستخدام طريقة دالية ليابنوف

محتويات الفصل

1 مقدمة 39

2 االإستقرار الأسي 39

1 مقدمة

لتكن معادلة الأمواج المزودة بتخامد ضعيف:

$$\begin{cases} u_{tt} + au_t = \Delta u - \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds \quad dans\ \Omega \times \mathbf{R}_+ \\ u = 0, \quad sur\ \Gamma \times \mathbf{R}_+ \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x),\ dans\ \Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

بحيثΩ مفتوح من $\mathbb{R}^n$ مع $\Gamma = \partial\Omega$حافته المنتظمة. حيث $u_0(x)$الوضع الإبتدائي و $u_1(x)$ السرعة الإبتدائية للموجة$h(t)$ نواة الذاكرة والتي تمثل التخامد الضعيف أنظر[5, 6, 13]. كل المتغيرات ξ_0، ξ_1 و a ثوابت فيزيائية موجبة.
في الفصل الثالث إعتمدنا على الفرضية التالية على النواة:

$$h'(t) \leq -\eta h(t),\ \forall t \geq 0.$$

الغرض من هذا الفصل هو إثبات الإستقرار الأسي بشروط وفرضيات أقل على النواة. سنثبت أن الحل مستقر بشرط أن تتقارب النواة إلى الصفر. علاوة على ذالك، فإننا نستبدل الإفتراض المستخدم بشكل متكرر $h'(t) \leq -\eta h(t),\ \forall t \geq 0.$ بالشرطين $h'(t) \leq 0$ و$e^{\alpha t}h(t) \in L^1(0,\infty)$ من أجل $\alpha > 0$. لا يوجد شرط آخر بشأن المشتق $h(t)$مفروض.
تحقيقا لهذه الغاية قمنا بإنشاء دالية الطاقة. في الواقع، سنعدل في صيغة الطاقة للمسألة(1.4).

نظريـة 1.1.4 نفرض أن $h(t)$دالة مستمرة و $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ فإنه يوجد حل وحيد للمسألة (1.4) بحيث

$$u \in L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)), u_t \in L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)), u_{tt} \in L^2(0,\infty; L^2(\Omega)).$$

الفرضيات على$h(t)$ ليست ضرورية لإثبات الوجود أو الوحدانية. في هذا الفصل سوف نركز فقط على الإجابة على سؤال السلوك المقارب.

2 االإستقرار الأسي

نفرض أن النواة $h(t)$ هي دالة من الصنف $C^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$ تحقق

1. $h'(t) \leq 0$ من أجل $t \in \mathbf{R}_+$،
2. $1 - \int_0^\infty h(s)ds = \ell > 0$،
3. $e^{\alpha t}h(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$من أجل $\alpha > 0$.

نعرف معادلة الطاقة للمسألة(1.4) كالتالي:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right) dx.,$$

وذلك بفرض أن $a = 1$ و

$$\left(h\Box u\right)(t) = \int_0^t \int_\Omega h(t-s)\left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 dxds.$$

نظريـة 1.2.4 بفرض أن الفرضيات (1)-(3) صحيحة، فإن طاقة المسألة (1.4) تحلل إلى الصفر أسيا ،أي أن هناك ثابت موجب C و $\beta > 0$ فإن
$$E(t) \leq Ce^{-\beta t},\ t \geq 0.$$

برهان. بضرف المعادلة (1.4) في u_t ونكامل على Ω نجد:

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx - \int_\Omega \Delta u.u_t dx + \int_\Omega u_t^2 dx + \int_\Omega \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)u_t dsdx = 0, \tag{2.4}$$

بحساب كل طرف في (2.4) على حدة:

$$\bullet \int_\Omega u_{tt}u_t dx = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\|u'\|^2\right\}. \tag{3.4}$$

$$\bullet - \int_\Omega \Delta u u_t dx = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\|\nabla u(t)\|^2\right\}. \tag{4.4}$$

$$\bullet \int_\Omega \int_0^t h(t-s)\Delta u(x,s).u_t(x,t)dsdx = -\int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx. \tag{5.4}$$

$$\bullet \int_\Omega (u_t)^2 dx = \|u'\|^2. \tag{6.4}$$

بتعويض العلاقات (3.4)-(6.4) في (2.4) نجد:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\|u'\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2\right\} = -\|u'\|^2 + \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx.$$

إذن:

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t} = -\|u'\|^2 + \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx. \tag{7.4}$$

وبإستخدام العلاقة التالية:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h\Box\nabla u)(t) &= -\int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx + \frac{1}{2}\left(h'\Box\nabla u\right)(t)\\ &+ \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\left(\int_0^t h(s)\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right\} - \frac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.\end{aligned} \tag{8.4}$$

نعرف الطاقة المعدلة:

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\left(h\Box\nabla u\right)(t),$$

من خلال العلاقتين (7.4) و (8.4)

$$e'(t) = -\int_\Omega |u_t|^2 dx - \frac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\left(h'\Box\nabla u\right)(t). \tag{9.4}$$

نلاحظ أنه من خلال الفرض (1) لدينا $e'(t) =\leq 0,\ t \geq 0$. علاوة على ذلك، من التعريفات $e(t)$ و الفرضية $(h\Box\nabla u)(t)$ (2)، فإنه يوجد $M > 0$ حيث:

$$E(t) \leq Me(t),\ t \geq 0. \tag{10.4}$$

بعد ذالك، نعرف الدوال المساعدة التالية:

$$\Phi(t)=\int_\Omega u_t u dx,$$

و

$$\Psi(t)=\int_\Omega\int_0^t H_\alpha(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx.$$

بحيث

$$H_\alpha(t)=e^{-\alpha t}\int_t^{+\infty}h(s)e^{\alpha s}ds.$$

وα كما هو الحال في الفرضية (3).

بإستخدام المعادلة (1.4) من مسألتنا، نحصل على:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}&=\int_\Omega|u_t|^2dx+\int_\Omega u_{tt}udx=\int_\Omega|u_t|^2dx\\&-\int_\Omega u_t udx-\|\nabla u(t)\|^2+\int_\Omega\nabla u\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx.\end{aligned}$$

بوضوح لدينا

$$\begin{aligned}\int_\Omega\nabla u\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx\leq&\frac12\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac12\int_\Omega\left(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds\right)^2dx\\ \leq&\frac12\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac12\int_0^t h(t-s)ds\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2dsdx\\ \leq&\frac12\|\nabla u\|^2+\frac{1-\ell}{2}\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2dsdx.\end{aligned}$$

ومنه يصبح لدينا

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}\leq&\int_\Omega|u_t|^2dx-\int_\Omega u_t udx-\|\nabla u(t)\|^2\\&+\frac12\|\nabla u(t)\|^2+\frac{1-\ell}{2}\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2dsdx.\end{aligned}\tag{11.4}$$

ينتج عن إشتقاق الدالة $\Psi(t)$ بالنسبة ل t بإستخدام قاعدة لايبنز

$$\frac{\mathrm{d}\Psi(t)}{\mathrm{d}t}=\left(\int_0^{+\infty}h(s)e^{\alpha s}ds\right)\|\nabla u(t)\|^2-\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2dsdx-\alpha\Psi(t).\tag{12.4}$$

الآن نعرف الدالية $L(t)$ كما يلي:

$$L(t)=e(t)+\varepsilon\Phi(t)+\eta\Psi(t).$$

مع $0<\varepsilon<1$ و $\eta>0$. من العلاقات المذكورة أعلاه (9.4)، (11.4) و(12.4) نستنتج أن

$$\begin{aligned}L'(t)=&e'(t)+\varepsilon\Phi'(t)+\eta\Psi'(t)\\ \leq&-\|u'\|^2-\frac12 h(t)\|\nabla u\|^2+\frac12(h'\Box\nabla u)(t)+\varepsilon\|u'\|^2+\varepsilon\int_\Omega|u_t|^2dx\\ &-\varepsilon\int_\Omega u_t udx-\varepsilon\|\nabla u\|^2+\frac{\varepsilon}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{\varepsilon(1-\ell)}{2}\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2dsdx\\ &+\eta\left(\int_0^{+\infty}h(s)e^{\alpha s}ds\right)\|\nabla u\|^2-\eta\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2dsdx-\alpha\eta\Psi(t),\end{aligned}$$

ومنه

$$L'(t) \leq -(1-\varepsilon)\|u'\|^2 - \left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta\left(\int_0^{+\infty} h(s)e^{\alpha s}ds\right)\right]\|\nabla u\|^2$$
$$+\frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) - \varepsilon\Phi(t) - \alpha\eta\Psi(t) - \left(\eta - \frac{\varepsilon(1-\ell)}{2}\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2\, dsdx. \quad (13.4)$$

إذا إخترنا α بحيث $\int_0^{+\infty} h(s)e^{\alpha s}ds < \frac{1}{1-\ell}$، فيمكننا تعيين ηعلى النحو التالي:

$$\frac{\varepsilon(1-\ell)}{2} < \eta < \frac{\varepsilon}{2}\left(\int_0^{+\infty} h(s)e^{\alpha s}ds\right)^{-1}.$$

وبالتالي، فإن معاملات $\|\nabla u\|^2$ و $\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2\, dsdx$ في العلاقة (13.4) سالبة.
نجمع ونطرح $\mu(h\Box\nabla u)(t)$من الجانب الأيمن من العلاقة (13.4)، فإن:

$$(h\Box\nabla u)(t) = \int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2\, dsdx$$
$$\leq 2(1-\ell)\int_\Omega|\nabla u|^2\, dx + 2\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2\, dsdx$$

ومنه

$$L'(t) \leq -\left[\frac{\varepsilon}{2} - \eta\left(\int_0^{+\infty} h(s)e^{\alpha s}ds\right) - 2(1-\ell)\mu\right]\|\nabla u\|^2$$

$$-(1-\varepsilon)\|u'\|^2 - \varepsilon\Phi(t) - \alpha\eta\Psi(t) - \mu(h\Box\nabla u)(t)$$

$$-\left(\eta - \frac{\varepsilon(1-\ell)}{2} - 2\mu\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)|\nabla u(s)|^2\, dsdx.$$

أخيرا، نختار μ صغير بدرجة كافية بحيث يكون كلا المعاملين الموجودين بين قوسين موجبين. لذلك، يوجد ثابت موجب β يحقق

$$L'(t) \leq -\beta L(t),\ t \geq 0.$$

ومنه

$$L(t) \leq L(0)e^{-\beta t},\ t \geq 0.$$

وهو المطلوب.

$\square$

الخاتمــة

الغرض من عملنا في هذه المذكرة هو دراسة السلوك التقاربي لبعض المسائل التطورية من صنف معادلات القطوع الزائدية في وجود قوة خارجية تعمل على تبديد الحلول بمعنى ان الحلول تؤول الى مالانهاية عندما يقترب الزمن من زمن منتهي والذي يسمى زمن الانفجار ولإثبات نتيجة الإستقرار الأسي للحلول نستخدم ثلاث طرق دالية وهي طريقة ناكاؤو وطريقة كومورنيك وطريقة دالية ليابينوف.

إن قوى التخامد هي التي تحقق الإستقرار في حلول المسألة، فمن السهل أن نرى أن في غياب القوى الخارجية إذا كان هذا الحل موجودا محليا يمكننا دائما تمديده الى حل كلي. إن التفاعل بين القوى الخارجية وقوى التخامد قضية مركزية في العديد من الدراسات وإنها لا تزال كذلك، ومن المهم أن نعرف من يتفوق.

نرجو أن نكون قد وفقنا في توفير مرجع باللغة العربية للباحثين حيث أن هذه الطرق حديثة وذات فعالية في ميدان المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الجزئية.

المراجع العلميـــة

[1] Ball, J. M. .(1973) Initial-boundary value problems for an extensible beam. Journal of Mathematical Analysis and Applications, ,(1)42 .90-61

[2] Bass. Zes, R. B. D. Spillover nonlinearity, and flexible structures. In NASA. Langley Research Center, Fourth NASA Workshop on Computational Control of Flexible Aerospace Systems, Part (Vol. .(1

[3] Berrimi, S., Messaoudi, S. A. .(2006) Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source. Nonlinear Analysis : Theory, Methods Applications, ,(10)64 .2331-2314

[4] Brezis, H. .(1983) Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.

[5] Carrier, G. F. .(1945) On the vibration problem of elastic string. QJ Appl. Math, ,3 .165-151

[6] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V. N., Prates Filho, J. S., Soriano, J. A. .(2001) Existence and unfiorm decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping.

[7] Cavalcanti, M. M., Oquendo, H. P. .(2003) Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. SIAM journal on control and optimization, ,(4)42 .1324-1310

[8] Clark, H. .(2002) Elastic membrane equation in bounded and unbounded domains. Electronic Journal of Qualitative Theory of Dffierential Equations, ,(11)2002 .21-1

[9] Clark, H. R. .(2000) Asymptotic and smoothness properties of a nonlinear equation with damping. Communications in Applied Analysis, ,(3)4 .338-321

[10] Komornik, V. .(1994) Exact controllability and stabilization : the multiplier method (Vol. ,39 p. .(351 Chichester : Wiley.

[11] Kirchhoff, G., über Mechanik, V. .(1883) ch. ,9 § .7 Leipzig, Tauber, .144

[12] Nakao, M. .(1977) Decay of solutions of some nonlinear evolution equations. J. Math. Anal. Appl, ,(4)60 .549-542

[13] Medjden, M., Tatar, N. E. .(2007) On the wave equation with a temporal non-local term. Dynamic Systems and Applications, ,(4)16 .665

[14] Nohel, J. A., Shea, D. F. .(1976) Frequency domain methods for Volterra equations. Advances in Mathematics, ,(3)22 .304-278

[15] Ono, K. .(1997) Global existence, decay, and blowup of solutions for some mildly degenerate nonlinear Kirchhoff strings. Journal of dffierential equations, ,(2)137 .301-273

[16] Ono, K. .(1997) On global existence, asymptotic stability and blowing up of solutions for some degenerate non-linear wave equations of Kirchhoff type with a strong dissipation. Mathematical Methods in the Applied Sciences, ,(2)20 .177-151

[17] Ono, K. .(1997) On global solutions and blow-up solutions of nonlinear Kirchhoff strings with nonlinear dissipation. Journal of Mathematical Analysis and Applications, ,(1)216 .342-321

[18] Pazy, A. .(2012) Semigroups of linear operators and applications to partial dffierential equations (Vol. .(44 Springer Science Business Media.

[19] Zaraï, A., Tatar, N. E. .(2017) Le problème de Kirchhoff avec dffiérents type de dissipations.