



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la  
recherche scientifique

Université Chahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département: Mathématiques et Informatique



كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة  
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES  
ET DES SCIENCES DE LA NATURE ET DE LA VIE

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

*Étude de la bifurcation de Zéro - Hopf des cycles limites pour quelques classes de systèmes différentiels*

Présenté Par:

Rahal Ilham

Devant le jury:

Dr. Degaichia Hakima	M.C.A	Université Chahid Cheikh Larbi Tébessi	Présidente
Dr. Djeddi Nadir	M.C.B	Université Chahid Cheikh Larbi Tébessi	Examineur
Dr. Diab Zouhair	M.C.A	Université Chahid Cheikh Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 05/06/2023



## **Remerciements**

*Je remercie tout d'abord, "Allah" Tout-Puissant qui m'a donné la santé, le courage et la patience pour pouvoir accomplir cet humble travail.*

*Je tiens à remercier **Dr. "Diab Zouhair"** pour ses orientations et ses encouragements, ses conseils avisés, sa présence constante et surtout sa patience unique qui a grandement contribué au bon déroulement de ce travail.*

*Je remercie également les membres du jury; **Dr. "Degaichia Hakima"** et **Dr. "Djeddi Nadir"** de m'avoir fait l'honneur d'avoir accepté de corriger et de juger ce travail et de l'enrichir de leurs sages suggestions.*

*Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation et l'élaboration de ce travail.*





## ***Dédicace***

*Je dédie ce mémoire  
A tous qui m'ont apporté du  
soutien toute ma vie.*

***"Rahal Ilham"***

# Résumé

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de la bifurcation de zéro-Hopf des cycles limites pour quelques classes de systèmes différentiels en dimension 3.

Dans la première partie de ce travail, on étudie la présence de bifurcations du type zéro-Hopf pour une équation de Jerk de la forme:

$$\ddot{x} = -a\dot{x} + x\dot{x}^2 - x^3 - bx + c\dot{x}, \text{ avec } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Plus précisément, en transformant cette équation en un système différentiel du premier ordre dans  $\mathbb{R}^3$ . On peut prouver l'existence d'une bifurcation du type zéro-Hopf de laquelle des solutions périodiques apparaissent proches du point d'équilibre situé à l'origine lorsque les paramètres  $a = b = 0$  et  $c < 0$ .

Dans la deuxième partie de ce travail, on utilise la méthode de moyennisation des systèmes dynamiques pour étudier l'existence de bifurcation de zéro-Hopf pour un système de Genesio suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -cx - by - az + x^2, \end{cases}$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des paramètres réels.

**Mots clés:** Solutions périodiques, Point d'équilibre, Méthode de moyennisation, Bifurcation de zéro-Hopf.

# Abstract

In this work, we are interested in the study of the zero-Hopf bifurcation of limit cycles for some classes of differential systems in dimension 3.

In the first part of this work, we study the presence of zero-Hopf bifurcation in the Jerk equation of the form:

$$\ddot{x} = -a\ddot{x} + x\dot{x}^2 - x^3 - bx + cx, \text{ with } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

More precisely, we transforme this equation into a first-order differential system in the space  $\mathbb{R}^3$ . We are able to prove the existence of a zero-Hopf bifurcation from which appears periodic solutions close to the equilibrium point located at the origin when the parameters  $a = b = 0$  et  $c < 0$ .

In the second part of this work, we use the averaging theory of dynamical systems to study the existence of zero-Hopf bifurcation at the following Genesisio system:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -cx - by - az + x^2, \end{cases}$$

where  $a, b$  and  $c$  are real parameters.

**Keywords:** Periodic solutions, Equilibrium point, Averaging theory, zero-Hopf bifurcation.

# ملخص:

في هذا العمل، نهتم بدراسة تشعب صفر- هوف لل دورات الحدية لبعض الأنظمة التفاضلية في البعد 3.

في الجزء الأول من هذا العمل، ندرس وجود تشعب صفر- هوف لمعادلة جيرك المعرفة بالشكل الآتي:

$$\ddot{x} = -a\dot{x} + x\dot{x}^2 - x^3 - bx + cx, \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

بتعبير أدق، نحول هذه المعادلة التفاضلية إلى جملة معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى في الفضاء ثلاثي الأبعاد  $\mathbb{R}^3$ ، نبين وجود تشعب صفر- هوف الذي تظهر منه حلول دورية قريبة من مبدأ الإحداثيات عندما تكون الوسائط  $a = b = 0$  و  $c < 0$ .

في الجزء الثاني من هذا العمل، استخدمنا نظرية المتوسط للأنظمة الديناميكية لدراسة وجود تشعب صفر- هوف لنظام جينزبو الآتي:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -cx - by - az + x^2, \end{cases}$$

حيث  $a, b, c$  وسائط حقيقية.

**الكلمات المفتاحية:** حل دوري، نقطة توازن، طريقة المتوسط، تشعب صفر-هوف.

---

---

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>2</b>
<b>1 Notions préliminaires et généralités</b>	<b>3</b>
1.1 Système différentiel d'ordre 1 . . . . .	3
1.2 Système différentiel linéaire . . . . .	3
1.3 Système différentiel homogène . . . . .	4
1.4 Systèmes dynamiques . . . . .	4
1.5 Flot d'un système différentiel . . . . .	4
1.6 Point d'équilibre . . . . .	4
1.7 Système linéarisé et point d'équilibre hyperbolique . . . . .	5
1.8 Flot hyperbolique et système hyperbolique . . . . .	5
1.9 Système différentiel autonome . . . . .	5
1.10 Sous-espaces stables et instables . . . . .	6
1.11 Plan et portrait de phase . . . . .	6
1.12 Cycle limite et Cycle limite hyperbolique . . . . .	6
1.13 Amplitude d'un cycle limite . . . . .	7
1.14 Centre et centre isochrone . . . . .	7
1.15 Classification des points d'équilibres d'un système différentiel linéaire planaire . . . . .	7
1.16 Système quadratique dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	11
1.17 Fonction localement Lipschitzienne . . . . .	11
<b>2 Méthode de la moyennisation</b>	<b>12</b>
2.1 Méthode de la moyennisation du premier ordre . . . . .	12
2.2 Méthode de la moyennisation du second ordre . . . . .	13
<b>3 Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Jerk en dimension 3</b>	<b>14</b>
3.1 Introduction et résultats principaux . . . . .	14
3.2 Preuve du Proposition 3.1.1 et Théorème 3.1.1 . . . . .	16
<b>4 Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Genesis</b>	<b>22</b>
4.1 Introduction et résultats principaux . . . . .	22
4.2 Bifurcation transcritique . . . . .	24

## Table des matières

---

4.2.1	Preuve du Théorème 4.2.1 . . . . .	25
4.3	Preuve du Proposition 4.1.1 et Théorème 4.1.2 . . . . .	26
	<b>Conclusion générale</b>	<b>31</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>32</b>

---

---

## Introduction générale

Soit  $H(n)$  le nombre maximal de cycles limites des systèmes polynomiaux de degré  $n$  de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = P_n(x, y), \\ \dot{y} = Q_n(x, y). \end{cases} \quad (1)$$

C'est ce qu'on appelle le nombre de Hilbert. L'essentiel du 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert posé en 1900 est de trouver sa valeur. Le problème reste ouvert même pour  $n = 2$ . Comme mentionné dans Li [24], il existe peu d'études sur une borne supérieure de  $H(n)$ . Cependant, de nombreux résultats intéressants ont été obtenus sur sa borne inférieure pour  $n \geq 2$ . Voir Li [24], Schlomiuk [35] et Ilyashenko [45]. Nous mentionnons ici quelques résultats qui sont étroitement liés au sujet principal du présent article. Chen et Wang [6] et Shi [36] ont indépendamment prouvé  $H(2) \geq 4$ . Li et Li [23] ont prouvé  $H(3) \geq 11$  en utilisant la méthode de la fonction de détection, puis Han et al. [18, 19] ont également obtenu  $H(3) \geq 11$  avec de nouvelles distributions différentes de cycles limites en utilisant la méthode de changement de stabilité des orbites homoclines. Yu et Han [46, 47] ont en outre prouvé  $H(3) \geq 12$  en étudiant la bifurcation de Hopf. Récemment, Li et Liu [26] et Li et al. [25] ont respectivement prouvé que  $H(3) \geq 13$ . Zhang et al. [48] ont étudié des perturbations quartic à un système hamiltonien cubique et ont obtenu  $H(4) \geq 15$ . Han et al. [17] ont obtenu  $H(4) \geq 20$ . Li et al. [22] ont obtenu  $H(5) \geq 24$ . Wang et Yu [41, 42] ont prouvé que  $H(6) \geq 35$  et  $H(11) \geq 121$ . Li et al. [50] ont obtenu  $H(7) \geq 50$ . Johnson et Tucker [20] ont obtenu  $H(7) \geq 53$ . Wang et al. [43] ont prouvé  $H(9) \geq 80$ . Récemment, Han et Li [16] ont étudié le système général de (1).

Le mémoire qui suit se divise en quatre chapitres.

**Dans le premier chapitre**, nous présentons de nombreuses définitions et concepts de base sur les systèmes dynamiques dont nous avons besoin dans ce mémoire.

**Dans le deuxième chapitre**, on rappelle par quelques méthodes de moyennisation du premier et second ordre pour étudier les orbites périodiques des systèmes différentiels.

**Dans le troisième chapitre**, on étudie la présence de bifurcations du type zéro-Hopf pour une équation de Jerk de la forme

$$\ddot{x} = -a\ddot{x} + x\dot{x}^2 - x^3 - bx + c\dot{x},$$

## Introduction générale

---

où  $a, b$  et  $c$  sont des paramètres réels. Plus précisément, en transformant cette équation en un système différentiel du premier ordre dans  $\mathbb{R}^3$ . On peut prouver l'existence d'une bifurcation du type zéro-Hopf de laquelle des solutions périodiques apparaissent proches du point d'équilibre situé à l'origine lorsque les paramètres  $a = b = 0$  et  $c < 0$ .

**Dans le dernier chapitre**, on utilise la méthode de moyennisation des systèmes dynamiques pour étudier l'existence de bifurcation transcritique et bifurcation de zéro-Hopf pour un système de Genesio de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -cx - by - az + x^2, \end{cases}$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des paramètres réels.

---

## Notions préliminaires et généralités

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et concepts de base sur les systèmes dynamiques qui seront utilisés dans ce mémoire.

### 1.1 Système différentiel d'ordre 1

**Définition 1.1.1** *Un système différentiel d'ordre 1 est l'équation*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

où  $f$  est une fonction continue sur  $I \times U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  étant un intervalle ouvert et  $U$  étant un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Un couple  $(J, x)$ , où  $J \subset I$  est un intervalle ouvert et  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , est une solution de (1.1) si

- (1) pour tout  $t \in J$ ,  $x(t) \in U$ ,
- (2) pour tout  $t \in J$ ,  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .

### 1.2 Système différentiel linéaire

**Définition 1.2.1** *Soit  $f : I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue, où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle ouvert et  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que le système différentiel*

$$\dot{x} = f(t, x),$$

est linéaire lorsqu'il existe deux fonctions  $A : I \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , continues, telles que

$$f(t, x) = A(t)x + B(t).$$

## 1.3 Système différentiel homogène

**Définition 1.3.1** *Le système différentiel*

$$\dot{x} = A(t)x,$$

*est appelé système différentiel homogène associé à  $\dot{x} = A(t)x + B(t)$ .*

## 1.4 Systèmes dynamiques

**Définition 1.4.1** *Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifiant les propriétés suivantes*

- (1)  $\mathcal{F}(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue
- (2)  $\mathcal{F}(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue
- (3)  $\mathcal{F}(0, x) = x$
- (4)  $\mathcal{F}(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

## 1.5 Flot d'un système différentiel

**Définition 1.5.1** *Soit le système non linéaire*

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.2}$$

*et le problème à valeurs initiales*

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n,$$

*E un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f \in C^1(E)$ . Pour  $x_0 \in E$  et  $\phi(t, x_0)$  la solution du problème à valeurs initiales, l'ensemble des applications  $\phi_t$  définis par*

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

*est appelé le flot du système différentiel.*

## 1.6 Point d'équilibre

**Définition 1.6.1** *Un point  $x_e$  est dit point d'équilibre (critique, singulier, stationnaire, fixe), du système  $\dot{x} = f(x)$ , si  $f(x_e) = 0$ .*

### Stabilité d'un point d'équilibre

- Un point d'équilibre  $x_e$  est dit stable si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \|x_0 - x_e\| \leq \eta \Rightarrow \|\varphi(t, x_0) - x_e\| \leq \varepsilon, \quad t \geq 0,$$

- $x_e$  est dit asymptotiquement stable s'il est stable et si

$$\exists \rho > 0 \text{ tel que } \|x_0 - x_e\| \leq \rho \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, x_0) = x_e,$$

- Un point d'équilibre qui n'est pas stable est dit instable.

### 1.7 Système linéarisé et point d'équilibre hyperbolique

**Définition 1.7.1** On appelle système linéarisé de (1.2) au voisinage du point d'équilibre  $x_e$ , le système

$$\dot{x} = Ax \text{ où } A = Df(x_e) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (1.3)$$

où  $Df(x_e)$  est la jacobienne de  $f$  au point  $x_e$ .

**Définition 1.7.2** Un point d'équilibre  $x_e$  est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne  $Df(x_e)$  n'ont pas de partie réelle nulle.

**Remarque 1.1** Si l'une des valeurs propres a une partie réelle nulle, le point d'équilibre est dit non-hyperbolique.

### 1.8 Flot hyperbolique et système hyperbolique

**Définition 1.8.1** Si toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  des parties réelles non nulles alors le flot du système (1.3) est dit hyperbolique et le système (1.3) est dit hyperbolique.

### 1.9 Système différentiel autonome

**Définition 1.9.1** Soit le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

Ce système est dit autonome si  $f(x)$  ne dépend pas explicitement de  $t$  (dépend seulement de la variable  $x$ ).

### 1.10 Sous-espaces stables et instables

Soit  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . Il existe une décomposition

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c,$$

en sous-espaces invariants par  $A$  et par  $e^{tA}$ . Les valeurs propres de

- la restriction de  $A$  à  $E^s$  ont partie réelle strictement négative,
- la restriction de  $A$  à  $E^c$  sont de partie réelle nulle,
- la restriction de  $A$  à  $E^u$  ont partie réelle strictement positive.

**Définition 1.10.1** On appelle  $E^s$  le sous-espace stable,  $E^c$  le sous-espace centre,  $E^u$  le sous-espace instable.

### 1.11 Plan et portrait de phase

**Définition 1.11.1** Soit le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.4)$$

un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.4) représentent dans le plan  $(xoy)$  des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan  $(xoy)$  est le plan de phase.

### 1.12 Cycle limite et Cycle limite hyperbolique

**Définition 1.12.1** Pour un système plan, on appelle cycle limite est une orbite fermée isolée. C'est à dire, au voisinage de cette orbite on ne peut pas avoir une autre orbite fermée. La stabilité du cycle limite est liée au comportement des trajectoires de son voisinage.

**Définition 1.12.2** Supposons que le système plan (1.4) a une orbite périodique  $\Gamma(t)$  de période  $T$ . Soit

$$\delta = \int_0^T \operatorname{div}(\Gamma(t)) dt.$$

Si  $\delta > 0$  (resp.  $\delta < 0$ ) alors l'orbite périodique  $\Gamma(t)$  est un cycle limite instable (resp. stable). Une orbite périodique  $\Gamma(t)$  ayant  $\delta \neq 0$  est un cycle limite hyperbolique.

### 1.13 Amplitude d'un cycle limite

**Définition 1.13.1** L'amplitude d'un cycle limite est la valeur maximale de la variable  $x$  du cycle limite.

### 1.14 Centre et centre isochrone

**Définition 1.14.1** On dit que  $p \in \mathbb{R}^2$  est un centre pour le système différentiel (1.4) s'il existe un voisinage  $U$  de  $p$  dans lequel toutes les orbites de  $U \setminus \{p\}$  sont périodiques.

**Définition 1.14.2** Soit  $T(q)$  la période de l'orbite périodique passant par  $q$  où  $q \in U \setminus \{p\}$ . on dit que  $p$  est un centre isochrone. Lorsque  $T(q)$  est constant pour chaque  $q \in U \setminus \{p\}$ .

### 1.15 Classification des points d'équilibre d'un système différentiel linéaire planaire

Considérons le système différentiel planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by, \\ \dot{y} = cx + dy, \end{cases} \text{ où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On supposera que  $\det A \neq 0$ ; L'origine est un seul point critique de ce système.

(1) **Les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $A$  sont réelles**

Si  $\lambda_1, \lambda_2 < 0, (\lambda_1 \neq \lambda_2)$  l'origine est un nœud stable ( voir Fig 1.1 ).

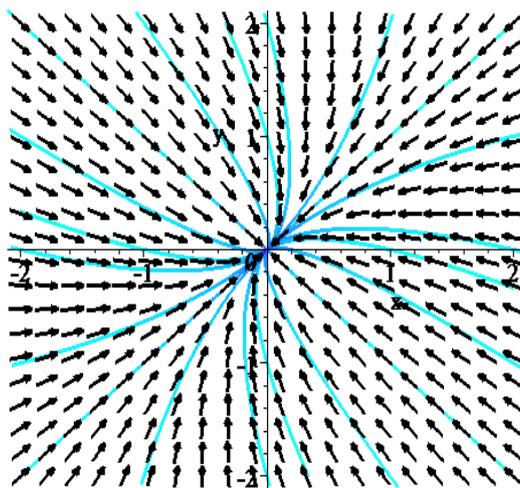


Fig 1.1. Nœud stable

## Chapitre 1. Notions préliminaires et généralités

---

Si  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ , ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) l'origine est un nœud instable ( voir Fig 1.2 ).

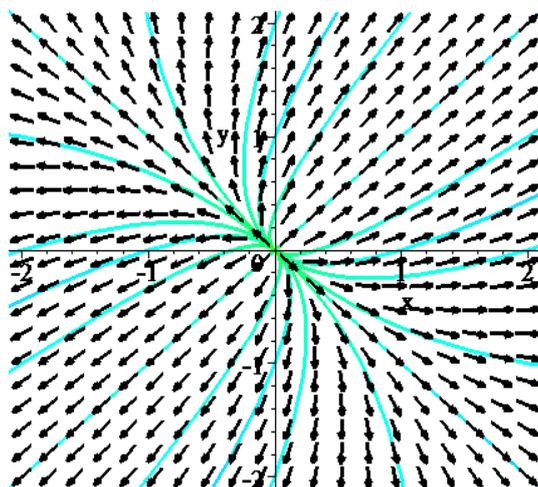


Fig 1.2. Nœud instable

Si  $\lambda_1, \lambda_2$  sont de signe opposé, l'origine est un point selle ou col ( voir Fig 1.3 )

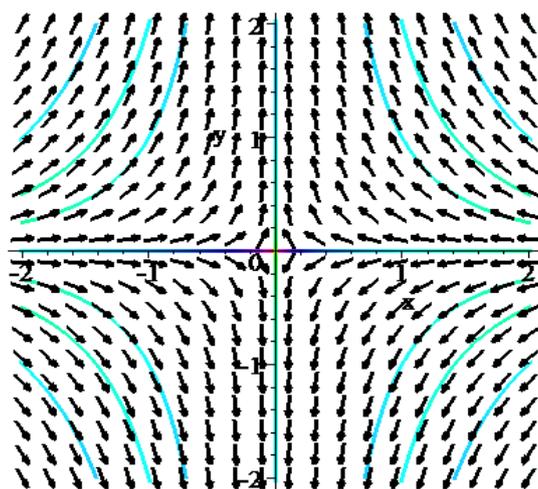


Fig 1.3. Selle ou Col

Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ .  $A$  est diagonalisable, l'origine est un nœud étoile

## Chapitre 1. Notions préliminaires et généralités

( voir Fig 1.4, Fig 1.5 ).

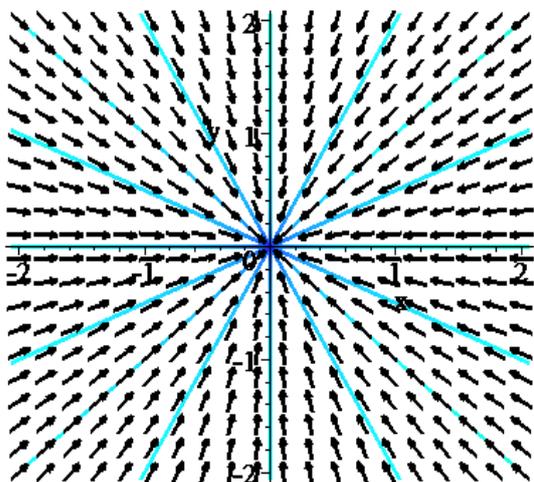


Fig 1.4. Nœud étoile stable si :  
 $\lambda < 0$ .

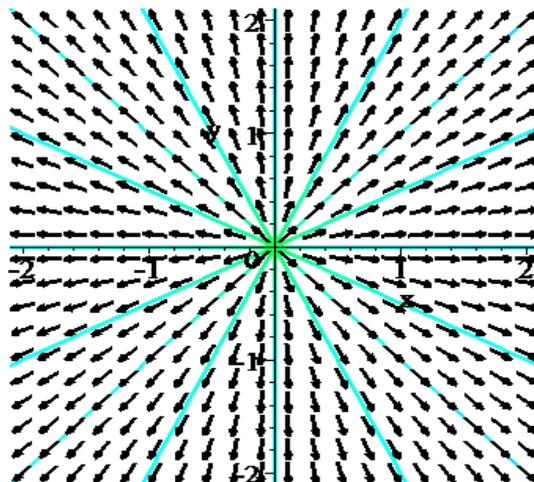


Fig 1.5. Nœud étoile instable si :  
 $\lambda > 0$ .

Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ .  $A$  est non diagonalisable, l'origine est un nœud dégénéré ( voir Fig 1.6, Fig 1.7 ).

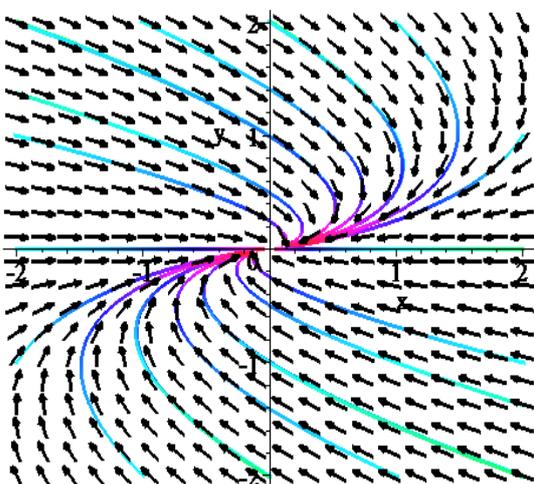


Fig 1.6. Nœud dégénéré stable si :  
 $\lambda < 0$ .

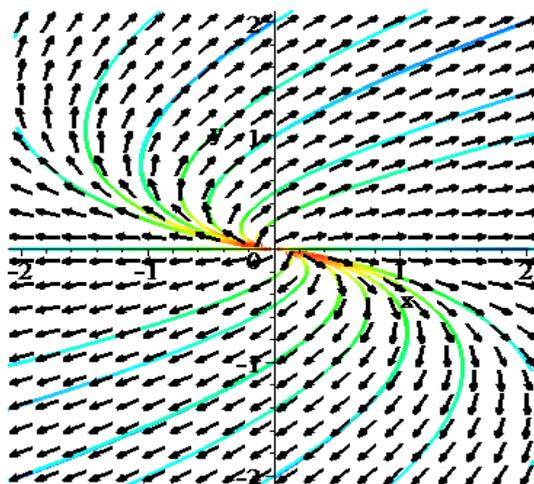


Fig 1.7. Nœud dégénéré instable si :  
 $\lambda > 0$ .

### (2) Les valeurs propres de $A$ sont complexes

Si  $\lambda_1, \lambda_2$  complexe conjuguées avec la partie réelle non nulle, ( $\lambda_1 = \alpha - i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha + i\beta$ ).

## Chapitre 1. Notions préliminaires et généralités

---

La partie réelle des valeurs propres est négative, l'origine est un foyer stable ( voir Fig 1.8 ).

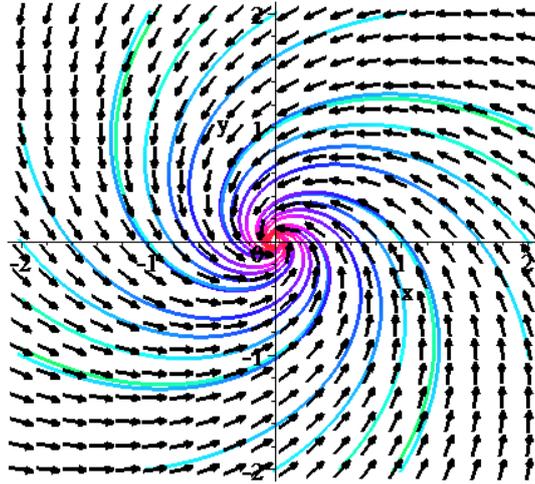


Fig 1.8. *Foyer stable*

La partie réelle des valeurs propres est positive, l'origine est un foyer instable (voir Fig 1.9).

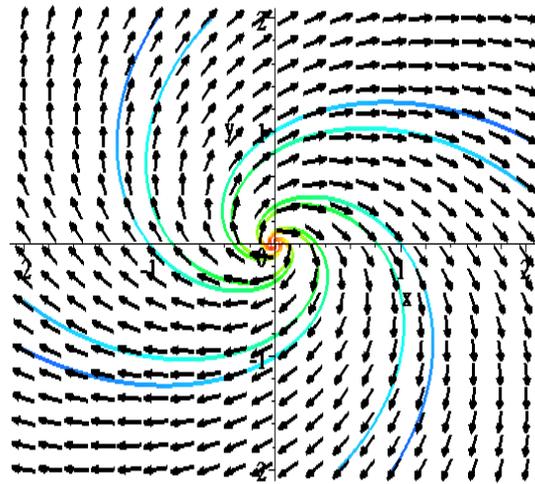


Fig 1.9. *Foyer instable*

Si  $\lambda_1, \lambda_2$  imaginaires pures, ( $\lambda_1 = i\beta, \lambda_2 = -i\beta$ ), l'origine est un centre

( voir Fig 1.10 ).

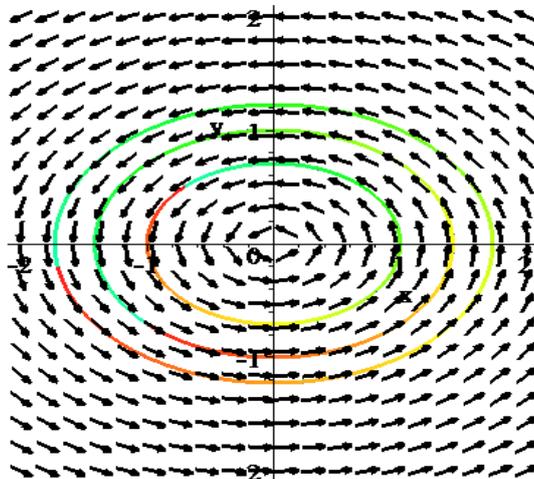


Fig 1.10. Centre

### 1.16 Système quadratique dans $\mathbb{R}^3$

**Définition 1.16.1** On considère le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{0,0,0} + a_{1,0,0}x + a_{2,0,0}x^2 + a_{0,1,0}y + a_{1,1,0}xy + a_{0,2,0}y^2 + \\ \quad a_{0,0,1}z + a_{1,0,1}xz + a_{0,1,1}yz + a_{0,0,2}z^2, \\ \dot{y} = b_{0,0,0} + b_{1,0,0}x + b_{2,0,0}x^2 + b_{0,1,0}y + b_{1,1,0}xy + b_{0,2,0}y^2 + \\ \quad b_{0,0,1}z + b_{1,0,1}xz + b_{0,1,1}yz + b_{0,0,2}z^2, \\ \dot{z} = c_{0,0,0} + c_{1,0,0}x + c_{2,0,0}x^2 + c_{0,1,0}y + c_{1,1,0}xy + c_{0,2,0}y^2 + \\ \quad c_{0,0,1}z + c_{1,0,1}xz + c_{0,1,1}yz + c_{0,0,2}z^2. \end{cases}$$

ce système est dit quadratique dans  $\mathbb{R}^3$ .

### 1.17 Fonction localement Lipschitzienne

**Définition 1.17.1** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert, une fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite localement Lipschitzienne si pour tout  $x \in U$ , il existe un voisinage  $U_x \subset U$  de  $x$  et une constante  $k > 0$  tels que

$$\forall y, z \in U_x, \quad \|f(y) - f(z)\| \leq k \|y - z\|.$$

---

## Méthode de la moyennisation

### 2.1 Méthode de la moyennisation du premier ordre

On considère le problème à valeur initial suivant

$$\dot{x} = \varepsilon F(t, x) + \varepsilon^2 G(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0, \quad (2.1)$$

et l'équation différentielle moyennée

$$\dot{y} = \varepsilon f(y), \quad y(0) = x_0. \quad (2.2)$$

Dans (2.1) et (2.2),  $x, y \in D$ , où  $D \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble ouvert,  $t \in [0, \infty)$  et  $\varepsilon$  suffisamment petit positif. On suppose que les fonctions  $F : [0, \infty) \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $G : [0, \infty) \times D \times (0, \varepsilon_0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont  $T$ -périodiques en la variable  $t$ , et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est donnée par

$$f(y) = \frac{1}{T} \int_0^T F(t, y) dt. \quad (2.3)$$

Le théorème suivant établit que, sous certaines conditions, les points d'équilibre de l'équation moyennée (2.2) correspondent à des solutions  $T$ -périodiques du système (2.1).

**Théorème 2.1.1** *On considère les problèmes de valeurs initiales (2.1) et (2.2) et supposons que  $F, D_x F, D_{xx} F, G$  et  $D_x G$  sont continues et bornés par une constante indépendante de  $\varepsilon$  dans  $[0, \infty) \times D$  et  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ . De plus, on suppose que  $F$  et  $G$  sont  $T$ -périodiques en  $t$ , avec  $T$  indépendant de  $\varepsilon$ . Alors, les hypothèses suivantes sont valables.*

## Chapitre 2. Méthode de la moyennisation

---

- (a) Pour  $t \in [0, 1/\varepsilon]$  on a  $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  
 (b) Si  $p$  est un point d'équilibre du système (2.2) tel que

$$\det D_y f(p) \neq 0, \quad (2.4)$$

alors il existe une solution périodique  $x(t, \varepsilon)$  de période  $T$  du système (2.1) telle que  $x(t, \varepsilon) - p = O(\varepsilon)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

- (c) Si toutes les parties réelles des valeurs propres de la matrice  $D_y f(p)$  sont négatives, alors la solution périodique  $x(t, \varepsilon)$  est stable. Si une partie réelle des valeurs propres est positive, alors la solution périodique  $x(t, \varepsilon)$  est instable.

Pour la preuve de théorème 2.1.1 voir [40]. Pour une introduction générale à la méthode de moyennisation, voir par exemple le livre de Sanders, Verhulst et Murdock [33].

### 2.2 Méthode de la moyennisation du second ordre

**Théorème 2.2.1** Soit  $A$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $\varepsilon_0 > 0$ . On considère le système différentiel

$$\dot{x}(t) = \varepsilon F_1(x, t) + \varepsilon^2 F_2(x, t) + \varepsilon^3 R(x, t, \varepsilon), \quad (2.5)$$

où  $F_1, F_2 : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, R : A \times \mathbb{R} \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions continues,  $T$ -périodiques en la seconde variable  $t$ ,  $F_1(\cdot, t) \in C^1(A)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $F_1, F_2, R$  et  $D_x F_1$  sont localement Lipchitziennes par rapport à  $x$ , et  $R$  est différentiable par rapport à  $\varepsilon$ . On définit les deux fonctions  $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  comme suit

$$f(z) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(z, s) ds, \quad (2.6)$$

$$g(z) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ D_z F_1(z, s) \cdot \int_0^s F_1(z, t) dt + F_2(z, s) \right] ds. \quad (2.7)$$

- (a) posons  $h = f$  si  $f \neq 0$  sinon posons  $h = g$ . S'il existe  $p \in A$  tel que  $h(p) = 0$  et  $\det Dh(p) \neq 0$ , alors, pour  $|\varepsilon| > 0$  suffisamment petit, il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(\cdot, \varepsilon)$  du système (2.5) tel que  $\varphi(t, \varepsilon) - p = O(\varepsilon)$ .  
 (b) Pour  $p$  et  $\varphi$  qui sont dans (a), si les valeurs propres de  $Dh(p)$  ont des parties réelles négatives, alors la solution périodique  $\varphi$  est stable. Si une des valeurs propres de  $Dh(p)$  a une partie réelle positive, alors  $\varphi$  est instable.

Dans l'énoncé (a) du théorème 2.2.1, si  $f \neq 0$  on obtient la moyennisation du premier ordre, sinon on obtient la moyennisation du second ordre.

Pour la preuve du théorème 2.2.1 et plus d'informations sur la méthode de moyennisation, voir [1, 3, 40].

---

## Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Jerk en dimension 3

### 3.1 Introduction et résultats principaux

En mécanique classique, un *Jerk* est une équation différentielle explicite du troisième ordre de la forme

$$\ddot{x} = J(\ddot{x}, \dot{x}, x, t),$$

décrivant l'évolution de la position  $x(t)$  avec le temps  $t$ . La fonction  $J$  fournit le taux de variation de l'accélération du mouvement.

L'équation différentielle non linéaire du troisième ordre suivante est un Jerk qui étudiait par Vaidyanathan [39]

$$\ddot{x} = -a\ddot{x} + x\dot{x}^2 - x^3 - bx + c\dot{x}, \quad (3.1)$$

avec  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , généralisant l'équation étudiée par Sprott [38], où  $b = c = 0$ . La principale motivation de Vaidyanathan dans l'étude de cette équation est que sa solution est chaotique pour certains paramètres, par exemple, il montre que (3.1) présente le chaos lorsque  $a = 3.6$ ,  $b = 1.3$  et  $c = 0.1$ . De nombreux chercheurs ont été intéressés à trouver d'autres systèmes chaotiques, principalement motivés par les circuits de Chua. Voir aussi [8] pour les oscillateurs chaotiques de Jerk.

L'équation différentielle (3.1) est équivalente au système de Jerk suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -az - bx + cy + xy^2 - x^3. \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans ce travail, nous ne sommes pas concernés par le chaos du système (3.2). Notre objectif principal est d'analyser la bifurcation de zéro-Hopf à l'origine et de prouver l'existence de cycles limites qui dépendent par les paramètres  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

### Chapitre 3. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Jerk en dimension 3

---

Nous rappelons qu'un équilibre de zéro-Hopf d'un système différentiel autonome en dimension 3 est un point d'équilibre isolé  $z_0$  tel que les valeurs propres de la matrice jacobienne du système en  $z_0$  a un zéro et une paire purement imaginaires. En outre, on considère un système différentiel autonome en dimension 3 dépendant d'un paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}^2$  ayant un point d'équilibre de zéro-Hopf  $z_0$  lorsque  $\alpha = (0, 0)$ . L'apparition de différents types de dynamique dans un voisinage de  $z_0$ , comme  $\alpha$  varie près de  $(0, 0)$ , est appelé une bifurcation de zéro-Hopf du système en  $z_0$ . Pour plus d'informations sur la bifurcation zéro-Hopf et d'autres bifurcations, nous adressons le lecteur à Kuznetsov [21] ou Guckenheimer, Guckenheimer et Holmes, Han, Marsden et Scheurle [13, 14, 15, 34], respectivement.

Pour autant que nous sachions, il n'y a pas encore d'analyse de bifurcation de zéro-Hopf du système de Jerk (3.2) dans la littérature. L'objectif de ce travail est de persuader une telle étude.

Afin d'étudier la bifurcation de zéro-Hopf des cycles limites d'un système différentiel (3.2), nous utiliserons la méthode de moyennisation. Cette méthode a déjà été utilisée pour étudier les bifurcations Hopf et zéro-Hopf dans d'autres systèmes différentiels, voir par exemple [2, 4, 9, 12, 27, 28, 29].

**Proposition 3.1.1** *Le système de Jerk (3.2) admet un point d'équilibre de zéro-Hopf si et seulement si  $a = b = 0$  et  $c < 0$ . Dans ce cas, l'équilibre de zéro-Hopf est le seul point singulier du système, et il est localisé à l'origine.*

Ainsi, posons  $c = -\delta^2$ ,  $\delta > 0$ , on peut laisser  $\alpha = (a, b)$  être le paramètre en dimension 2 comme dans la définition ci-dessus afin d'étudier la bifurcation de zéro-Hopf du système (3.2) à l'origine. Notre principal résultat est

**Théorème 3.1.1** *Soient  $a_2, b_2, \delta \in \mathbb{R}$  tels que  $\delta > 0$ ,  $\delta^2 - 3 \neq 0$  et  $2a_2\delta^2 - b_2 \neq 0$ , et posons  $(a, b, c) = (\varepsilon^2 a_2, \varepsilon^2 b_2, -\delta^2)$ . Pour le système de Jerk (3.2), on obtient*

- (1) *si  $2a_2\delta^2 - b_2 > 0$ ,  $\frac{2b_2 + a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} > 0$  et  $\frac{b_2 - a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} > 0$ , alors trois orbites périodiques nées au point d'équilibre lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*
- (2) *si  $2a_2\delta^2 - b_2 > 0$ ,  $\frac{2b_2 + a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} > 0$  et  $\frac{b_2 - a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} \leq 0$ , alors deux orbites périodiques nées au point d'équilibre lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*
- (3) *si  $2a_2\delta^2 - b_2 < 0$ ,  $\frac{2b_2 + a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} \leq 0$  et  $\frac{b_2 - a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} > 0$ , alors une orbite périodique naît au point d'équilibre lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

De plus, dans le Tableau 1, nous présentons toutes ces possibilités d'orbites périodiques ainsi que leur stabilité ou leur instabilité.

**Remarque 3.1** *les hypothèses sur  $\delta, a_2$  et  $b_2$  autres que celles du théorème 3.1.1 ou du Tableau 1 ne fournissent pas d'orbites périodiques.*

### Chapitre 3. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Jerk en dimension 3

**Tableau 1**

Le nombre d'orbites périodiques, exemples explicites de  $(\delta, a_2, b_2)$  réalisant chaque possibilité et la stabilité de chaque orbite. Les cas non apparaissants ne fournissent pas d'orbites périodiques ou ne sont pas réalisables.

		$\delta^2-3>0$	$\delta^2-3<0$
		$b_2-a_2\delta^2>0$	$b_2-a_2\delta^2\leq 0$
			$b_2-a_2\delta^2<0$
$2a_2\delta^2-b_2>0$	$2b_2+a_2\delta^2>0$	3, (2, 1, 5) 1 stable, 2 instable	2, (2, 1, 0), (2, 1, 4) les deux instables
	$2b_2+a_2\delta^2=0$	pas possible	aucune, (2, 1, -1)
	$2b_2+a_2\delta^2<0$	pas possible	aucune, (2, 0, -1)
$2a_2\delta^2-b_2<0$		1, (2, 0, 1) instable	1, (1, 2, -1) instable
			3, (1, $a_2$ , -3). $2 a_2 <3$ 1 instable, et l'autre 2 stable si $a_2>0$ et instable si $a_2<0$
			1, (1, -2, 3) instable

**Remarque 3.2** *Nous prouvons le théorème 3.1.1 en appliquant la méthode de moyennisation du second ordre. Puisque nous prouvons que la fonction moyennée ne peut pas être identiquement nulle, il s'ensuit que la méthode habituelle de la méthode de moyennisation d'ordre supérieur ne peut pas être appliquée pour trouver éventuellement plus de solutions périodiques.*

## 3.2 Preuve du Proposition 3.1.1 et Théorème

### 3.1.1

**Preuve du Proposition 3.1.1.** Il est clair que  $(x, 0, 0)$  avec  $x = 0$  ou  $x^2 = -b$ , si  $b \leq 0$ , sont les points singuliers du système (3.2).

Le polynôme caractéristique de la partie linéaire du système en  $(x, 0, 0)$  est

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - a\lambda^2 + c\lambda - b - 3x^3.$$

Pour avoir un équilibre de zéro-Hopf, nous avons besoin d'une valeur nulle et de deux valeurs propres purement imaginaires, disons  $\pm i\delta$ , avec  $\delta > 0$ . Posons

$$p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + \delta^2),$$

on obtient  $a = b = 0$  et  $c = -\delta^2$ . En particulier, le seul équilibre de zéro-Hopf est  $(0, 0, 0)$ . ■

### Chapitre 3. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Jerk en dimension 3

---

**Preuve du Théorème 3.1.1.** Posons  $(a, b, c) = (\varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2, \varepsilon b_1 + \varepsilon^2 b_2, -\delta^2 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2)$ , alors le système de jerk (3.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\varepsilon(a_1 + \varepsilon a_2)z - \varepsilon(b_1 + \varepsilon b_2)x + (-\delta^2 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2)y + xy^2 - x^3. \end{cases} \quad (3.3)$$

Ici nous considérons aussi la perturbation  $\varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2$ , mais comme il sera clair dans la preuve, cela n'apportera aucune information sur les cycles limites après application de la méthode de moyennisation.

Remarquons que comme dans la preuve de proposition 3.1.1, lorsque  $\varepsilon = 0$ , les valeurs propres à l'origine du système (3.3) sont 0 et  $\pm i\delta$ .

En utilisant le changement de variable  $(x, y, z) = (\varepsilon X, \varepsilon Y, \varepsilon Z)$ , le système (3.3) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{X} = Y, \\ \dot{Y} = Z, \\ \dot{Z} = -\delta^2 Y + \varepsilon(-a_1 Z - b_1 X + c_1 Y) + \varepsilon^2(-a_2 Z - b_2 X + c_2 Y + XY^2 - X^3). \end{cases} \quad (3.4)$$

En faisant maintenant un changement de variable linéaire

$$(X, Y, Z) = \left(w + \frac{v}{\delta}, u, -\delta v\right), \quad (3.5)$$

afin d'obtenir la matrice de la partie linéaire à l'origine du système (3.4) lorsque  $\varepsilon = 0$  écrit sous sa forme normale réelle de Jordan

$$\begin{pmatrix} 0 & -\delta & 0 \\ \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

avec ces nouvelles variables, le système (3.4) s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \dot{u} = -\delta v, \\ \dot{v} = \delta u + \varepsilon \delta (h_1 + \varepsilon h_2), \\ \dot{w} = -\varepsilon (h_1 + \varepsilon h_2), \end{cases} \quad (3.6)$$

où

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1(u, v, w) = \frac{b_1 v}{\delta^3} - \frac{c_1 u - b_1 w}{\delta^2} - \frac{a_1 v}{\delta}, \\ h_2 &= h_2(u, v, w) = \frac{v^3}{\delta^5} + \frac{3v^2 w}{\delta^4} + \frac{(b_2 - u^2 + 3w^2)v}{\delta^3} - \frac{c_2 u + (u^2 - b_2)w - w^3}{\delta^2} - \frac{a_2 v}{\delta}. \end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, w)$  où  $u = r \cos \theta$ ,  $v = r \sin \theta$ ,  $w = w$ , avec  $r > 0$ , le système (3.6) devient

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \delta + \varepsilon \delta \frac{\cos \theta}{r} (h_1 + \varepsilon h_2), \\ \dot{r} = \varepsilon \delta \sin \theta (h_1 + \varepsilon h_2), \\ \dot{w} = -\varepsilon (h_1 + \varepsilon h_2), \end{cases} \quad (3.7)$$

### Chapitre 3. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Jerk en dimension 3

---

avec  $h_1 = h_1(r \cos \theta, r \sin \theta, w)$  et  $h_2 = h_2(r \cos \theta, r \sin \theta, w)$ . prenons  $\theta$  comme nouvelle variable indépendante, on obtient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \frac{\varepsilon (h_1 + \varepsilon h_2)}{r + \varepsilon \cos \theta (h_1 + \varepsilon h_2)} r \sin \theta, \\ \quad = \varepsilon h_1 \sin \theta + \sin \theta \varepsilon^2 \frac{h_2 r - h_1^2 \cos \theta}{r} + \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ \frac{dw}{d\theta} = \frac{\varepsilon (h_1 + \varepsilon h_2)}{r + \varepsilon \cos \theta (h_1 + \varepsilon h_2)} \frac{r}{\delta}, \\ \quad = -\varepsilon \frac{h_1}{\delta} - \varepsilon^2 \frac{h_2 r - h_1^2 \cos \theta}{r \delta} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{cases} \quad (3.8)$$

Dans la notation du théorème 2.2.1, prenons  $t = \theta, T = 2\pi$  et  $z = (r, w)t$ , et considérons  $A = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ , on obtient

$$F_1(r, w, \theta) = h_1 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -1/\delta \end{pmatrix}, \quad F_2(r, w, \theta) = \frac{h_2 r - h_1^2 \cos \theta}{r} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -1/\delta \end{pmatrix},$$

nous sommes donc sous les hypothèses de ce théorème. Calculons  $f(r, w)$  on trouve

$$f(r, w) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(r, w, \theta) d\theta = \begin{pmatrix} \frac{r}{2\delta^3} (b_1 - a_1 \delta^2) \\ -\frac{b_1 w}{\delta^3} \end{pmatrix}.$$

Puisque  $r > 0$ , il n'y a pas de solutions de  $f(r, w) = 0$  avec  $b_1 - a_1 \delta^2 \neq 0$ . Par contre, si  $b_1 - a_1 \delta^2 = 0$ , les zéros de  $f(r, w)$  ne sont pas isolés. En particulier on ne peut pas appliquer la méthode de moyennisation du premier ordre. On passe alors à la méthode de moyennisation du second ordre. Pour obtenir  $f \equiv 0$  nous prenons  $a_1 = b_1 = 0$  et on simplifie  $F_2$ , on obtient

$$F_2(r, w, \theta) = 2 (h_2 - c_1^2 r \cos^3 \theta / \delta^4) \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -1/\delta \end{pmatrix}.$$

Calculons  $g(r, w)$ , on obtient

$$\begin{aligned} g(r, w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( D_{(r,w)} F_1(r, w, \theta) \int_0^\theta F_1(r, w, s) ds + F_2(r, w, \theta) \right) d\theta, \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{c_1^2 r}{2\delta^5} \begin{pmatrix} \delta \cos \theta \sin^3 \theta \\ -\cos \theta \sin^2 \theta \end{pmatrix} + F_2(r, w, \theta) \right) d\theta, \\ &= \frac{1}{2\delta^5} \begin{pmatrix} r \left( (3 - \delta^2) r^2 + 4b_2 \delta^2 - 4a_2 \delta^4 + 12\delta^2 w^2 \right) / 4 \\ -w \left( (3 - \delta^2) r^2 + 2b_2 \delta^2 + 2\delta^2 w^2 \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Chapitre 3. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Jerk en dimension 3

---

On analyse les solutions de  $g(r, w) = 0$ , avec  $r > 0$ . On observe d'abord que l'on peut supposer  $\delta^2 \neq 3$ , sinon  $g = 0$  n'a pas de solutions isolées. Avec cette hypothèse, on obtient

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{4(b_2 - a_2\delta^2)\delta^2}{\delta^2 - 3}, & w &= 0, & \text{ou} \\ r^2 &= \frac{4(2b_2 + a_2\delta^2)\delta^2}{5(\delta^2 - 3)}, & w^2 &= \frac{2a_2\delta^2 - b_2}{5} > 0. \end{aligned}$$

Le Jacobien de  $g$  à ces solutions est

$$\frac{(b_2 - a_2\delta^2)(2a_2\delta^2 - b_2)}{\delta^6} \text{ et } -\frac{2(2b_2 + a_2\delta^2)(2a_2\delta^2 - b_2)}{5\delta^6}, \quad (3.9)$$

respectivement.

Avec ces informations, nous analysons maintenant l'existence de solutions simples réelles. Observons d'abord que nous pouvons supposer  $2a_2\delta^2 - b_2 \neq 0$ , sinon il ne reste aucune solution simple.

Si  $\frac{b_2 - a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} > 0$ ,  $\frac{2b_2 + a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} > 0$  et  $2a_2\delta^2 - b_2 > 0$ , on a les solutions isolées simples  $(r_i, w_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  donné par

$$\begin{aligned} (r_1, w_1) &= \left( 2\delta \sqrt{\frac{b_2 - a_2\delta^2}{\delta^2 - 3}}, 0 \right), & (r_2, w_2) &= \left( 2\delta \sqrt{\frac{2b_2 + a_2\delta^2}{5(\delta^2 - 3)}}, \sqrt{\frac{2a_2\delta^2 - b_2}{5}} \right), \\ (r_3, w_3) &= (r_2, -w_2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Si  $\frac{b_2 - a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} > 0$ ,  $\frac{2b_2 + a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} \leq 0$  ou  $2a_2\delta^2 - b_2 < 0$  alors on a seulement la solution isolée  $(r_1, w_1)$  comme défini par (3.10). Si  $\frac{b_2 - a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} \leq 0$ ,  $\frac{2b_2 + a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} > 0$  ou  $2a_2\delta^2 - b_2 > 0$  on a seulement les solutions  $(r_2, w_2)$  et  $(r_3, w_3)$ . Enfin, si  $\frac{b_2 - a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} \leq 0$ ,  $\frac{2b_2 + a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} \leq 0$  ou  $2a_2\delta^2 - b_2 < 0$ , on n'a pas de solutions.

Les conditions ci-dessus fournissant au moins une solution sont en accord avec les conditions du théorème 3.1.1. Il est maintenant simple de remplir le tableau 1 avec les informations sur le nombre d'orbites périodiques. Nous soulignons que la colonne "manquée" correspondant à  $\delta^2 - 3 < 0$  et  $b_2 - a_2\delta^2 \geq 0$  soit ne fournit pas de solutions soit elle est impossible.

En effet, sous ces hypothèses, si  $2a_2\delta^2 - b_2 > 0$  et  $2b_2 + a_2\delta^2 > 0$ , il s'ensuit que  $\frac{b_2 - a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} \leq 0$  et  $\frac{2b_2 + a_2\delta^2}{\delta^2 - 3} \leq 0$ , et donc nous n'avons pas de solutions (ici  $(\delta, a_2, b_2) = (1, 2, 3)$  vérifie l'hypothèse).

### Chapitre 3. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Jerk en dimension 3

---

Supposons  $\delta^2 - 3 < 0$  et  $b_2 - a_2\delta^2 \geq 0$  avec  $2a_2\delta^2 - b_2 < 0$  (ici  $(\delta, a_2, b_2) = (1, 0, 1)$  satisfait les hypothèses). Par contre, il est simple de voir que les hypothèses  $b_2 - a_2\delta^2 \geq 0$ ,  $2a_2\delta^2 - b_2 > 0$  et  $2b_2 + a_2\delta^2 \leq 0$  ne peuvent pas se produire simultanément.

Nous continuons par analysant chaque solution  $(r_i, w_i)$  et le cycle limite correspondant dans le théorème 2.2.1.

Ce théorème garantit que, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, à chaque racine  $(r_i, w_i)$  de  $g$  correspond une solution périodique de période  $2\pi$  du système (3.8) de la forme  $(r(\theta, \varepsilon), w(\theta, \varepsilon))$ , avec  $(r(\theta, \varepsilon), w(\theta, \varepsilon)) - (r_i, w_i) = O(\varepsilon)$ . Correspondant à celui-ci, le système (3.7) admet la solution périodique  $(\theta(t, \varepsilon), r(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon))$  d'une certaine période  $T_\varepsilon$  vérifiant  $(\theta(t, \varepsilon), r(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon)) - (0, r_i, w_i) = O(\varepsilon)$ . Alors le système (3.6) possède une solution périodique de période  $T_\varepsilon$

$$(u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon)) = (r(t, \varepsilon) \cos \theta(t, \varepsilon), r(t, \varepsilon) \sin \theta(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon)),$$

pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, avec  $(u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon)) - (r_i, 0, w_i) = O(\varepsilon)$ . On applique maintenant le changement de variables (3.5) à celle-ci et on obtient pour  $\varepsilon$  petit la solution périodique  $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$  du système (3.4) avec la même période, tel que  $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon)) - (w_i + r_i/\delta, r_i, 0) = O(\varepsilon)$ . Enfin, pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit, le système (3.3) aura la solution périodique  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) = \varepsilon(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$ , avec

$$(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) - \varepsilon(w_i + r_i/\delta, r_i, 0) = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Alors correspondant à chaque solution réelle  $(r_i, w_i)$ , pour chaque  $\varepsilon$  suffisamment petit, le système (3.3) possède une solution périodique  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$  tel que  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$  tend vers l'origine lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il s'agit donc d'une solution périodique bifurquant de point d'équilibre de zéro-Hopf situé à l'origine des coordonnées lorsque  $\varepsilon = 0$ . Nous observons que  $c_1$  et  $c_2$  ne sont pas pertinents pour nos conclusions. Nous les négligeons donc dans l'énoncé du théorème.

Afin de terminer la démonstration du théorème 3.1.1, nous passons à l'étude de la stabilité. Nous analyserons chaque entrée du tableau 1 ayant des orbites périodiques, fournissant la stabilité de chacune d'elles dans l'énoncé (b) du théorème 2.2.1. Puisque la matrice jacobienne  $Dg(r_i, w_i)$  est une matrice  $2 \times 2$ , il s'ensuit que les parties réelles des deux valeurs propres sont négatives si son déterminant est positif avec une trace négative. Par contre, si le déterminant est négatif, ou positif avec trace positive, alors l'une des valeurs propres a une partie réelle positive.

Les expressions dans (3.9) fournissent le déterminant des matrices  $Dg(r_1, w_1)$  et  $Dg(r_i, w_i)$ ,  $i = 2, 3$ , respectivement. Il est simple aussi de vérifier que la trace de la matrice jacobienne de  $g$  en chaque solution possible  $(r_i, w_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , dans la notation de la preuve précédente, est  $-\frac{a_2}{\delta}$  dans les trois possibilités.

On considère donc la première ligne et la première colonne du tableau 1 : les deux orbites périodiques correspondant à  $(r_i, w_i)$ ,  $i = 2, 3$ , sont instables car le Jacobien de  $g$  en chacune d'elles est négatif. Maintenant, le Jacobien en  $(r_1, w_1)$  est positif,

### Chapitre 3. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Jerk en dimension 3

nous devons donc analyser la trace : les conditions  $2a_2\delta^2 - b_2 > 0$  et  $b_2 - a_2\delta^2 > 0$  impliquent que  $a_2 > 0$ , donc la trace est négative, et donc la solution est stable. Dans la première ligne et la deuxième colonne du tableau 1, nous n'avons que les solutions  $(r_i, w_i), i = 2, 3$ , avec les hypothèses, il s'ensuit que les deux sont instables car le Jacobien est négatif. La dernière colonne de la première ligne n'aura que l'orbite périodique associée à la solution  $(r_1, w_1)$ , qui est instable car le Jacobien  $g$  est négatif. On complète donc la première ligne du tableau 1.

Maintenant, dans la deuxième ligne, il ne reste plus qu'à analyser la dernière colonne, qui ne contient que l'orbite périodique correspondant à  $(r_1, w_1)$ . Il sera instable car le Jacobien est négatif. Ceci complète la deuxième ligne du tableau 1.

Dans la dernière colonne de la troisième ligne, on a une orbite périodique correspondant à  $(r_1, w_1)$ , celle-ci est instable car le jacobien est négatif, et deux solutions correspondant à  $(r_i, w_i), i = 2, 3$ . Le jacobien de  $g$  dans les derniers est positif et la trace est négative si  $a_2 > 0$  (par exemple  $(\delta, a_2, b_2) = (1, 1, -3)$ ) et positive si  $a_2 < 0$  (par exemple  $(\delta, a_2, b_2) = (1, -1, -3)$ ). Si la trace est nulle (par exemple  $(\delta, a_2, b_2) = (1, 0, -3)$ ), nous n'avons pas pu conclure à la stabilité ou à l'instabilité de ces orbites périodiques. Ceci complète la troisième ligne du tableau 1.

Enfin, dans la première colonne de la dernière ligne du tableau 1, nous n'avons que l'orbite périodique associée à  $(r_1, w_1)$  telle que  $g$  a un Jacobien négatif, et il s'ensuit que cette orbite est instable. Maintenant dans la dernière colonne, nous avons aussi seulement l'orbite associée à  $(r_1, w_1)$ , mais maintenant avec un Jacobien positif.

Ici, les hypothèses sont facilement données que  $a_2 < 0$  et il s'ensuit donc que l'orbite périodique est instable. Ceci complète le tableau 1. ■

**Exemple 3.2.1** *En prenant  $\delta = 2, a_2 = 1, b_2 = 5, \varepsilon = 0.1$  il résulte du théorème 3.1.1 que nous avons trois orbites périodiques bifurquent de l'origine. Voir Fig 3.1.*

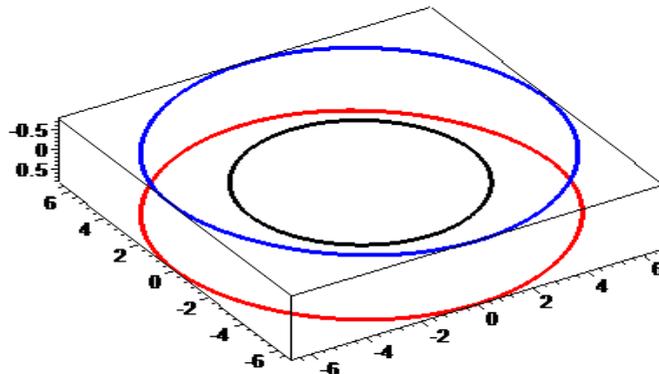


Fig 3.1. Trois orbites priodiques bifurquent de l'origine, pour les valeurs  $\delta = 2, a_2 = 1, b_2 = 5, \varepsilon = 0.1$ .

---

## Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Genesisio

### 4.1 Introduction et résultats principaux

Dans [10], Genesisio et Tesi, inspirés par le problème de la détermination des conditions dans lesquelles un système dynamique non linéaire présente un comportement chaotique, ont introduit l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre suivante

$$\ddot{x} + a\ddot{x} + b\dot{x} + cx - x^2 = 0, \quad (4.1)$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des paramètres et le point désigne la dérivée par rapport au temps  $t$ . Si on pose  $y = \dot{x}$  et  $z = \dot{y}$ , alors l'équation (4.1) est équivalente au système différentiel suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -cx - by - az + x^2, \end{cases} \quad (4.2)$$

qui est communément connu sous le nom système de Genesisio. Basés sur le principe de l'équilibre harmonique, les auteurs de [10] ont présenté deux méthodes pratiques pour prédire l'existence et la localisation des mouvements chaotiques. Par exemple, le système (4.2) présente des comportements dynamiques chaotiques lorsque  $a = 1.2, b = 2.92$  et  $c = 6$ .

On trouve dans la littérature plusieurs articles concernant le système (4.2). Par exemple, les problèmes de synchronisation du système chaotique de Genesisio ont été étudiés dans les articles [5, 30, 31, 44]. Déjà dans [49] les auteurs ont étudié la bifurcation de Hopf et l'existence d'une orbite homocline de Silnikov pour ce système. L'analyse de stabilité et la bifurcation de Hopf du système de Genesisio avec retour de retard distribué ont été étudiées dans [11].

## Chapitre 4. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Genesisio

---

Dans ce travail, nous avons deux objectifs principaux. La première est de montrer que le système (4.2) présente une bifurcation transcritique, c'est-à-dire qu'il y a un échange de stabilité qui a lieu à un certain point d'équilibre de ce système pour certaines valeurs de bifurcation des paramètres du système. L'analyse de la bifurcation transcritique se produisant dans le système de Genesisio sera effectuée pour le paramètre  $c$ .

Le second objectif est d'étudier l'existence des équilibres de zéro-Hopf et des bifurcations de zéro-Hopf pour le système de Genesisio (4.2). Nous rappelons qu'un point d'équilibre de zéro-Hopf d'un système différentiel autonome en dimension 3 est un point d'équilibre isolé du système tel que la partie linéaire en cet équilibre a une valeur propre nulle et une paire de valeurs propres purement imaginaires.

Habituellement, l'outil principal pour étudier une bifurcation de zéro-Hopf est de passer le système à la forme normale d'une bifurcation de zéro-Hopf. Cependant, notre analyse de la bifurcation zéro-Hopf se produisant dans le système de Genesisio utilisera la méthode de moyennisation, un résumé des résultats de cette méthode dont nous avons besoin ici est donné dans le chapitre 2. La méthode de moyennisation a déjà été utilisée pour étudier les bifurcations de Hopf et zéro-Hopf de certains autres systèmes différentiels, voir par exemple [2, 4, 27, 29].

Autant que nous sachions, personne n'a étudié l'existence ou non-existence de bifurcation transcritique, équilibres de zéro-Hopf et bifurcation de zéro-Hopf pour un système de Genesisio (4.2).

**Théorème 4.1.1** *Considérons le système de Genesisio (4.2) et supposons que les paramètres  $a$  et  $b$  varient dans l'ensemble  $K$  donné par*

$$K = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \neq 0\} \setminus \{(0, b) \in \mathbb{R}^2 : b > 0\}.$$

*Alors, le système (4.2) présente une bifurcation transcritique au point d'équilibre localisé en l'origine des coordonnées lorsque  $c = 0$ .*

**Proposition 4.1.1** *Le système de Genesisio (4.2) possède un unique équilibre de zéro-Hopf localisé en l'origine des coordonnées lorsque  $a = c = 0$  et  $b > 0$ .*

**Théorème 4.1.2** *Considérons le système de Genesisio (4.2) et supposons que  $a = \varepsilon\alpha, b = \omega^2 + \varepsilon\beta, c = \varepsilon\gamma$ , avec  $\omega > 0$  et  $\varepsilon$  suffisamment petit. Alors, ce système présente une bifurcation de zéro-Hopf au point d'équilibre localisé en l'origine des coordonnées lorsque  $\varepsilon = 0$  si  $\gamma^2 - \alpha^2\omega^4 > 0$ . De plus, l'orbite périodique  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$  bifurquent de l'origine et  $(x(0, \varepsilon), y(0, \varepsilon), z(0, \varepsilon))$  est*

$$\varepsilon \left( \frac{\gamma - \alpha\omega^2}{2} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2\omega^4}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\omega^2\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2\omega^4}}{\sqrt{2}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (4.3)$$

*si  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, voir Fig 4.1. Si  $\lambda_{\pm} = (-\alpha\omega^2 \pm \sqrt{3\alpha^2\omega^4 - 2\gamma^2})/(2\omega^3)$ , alors cette orbite périodique est stable lorsque  $\text{Re}(\lambda_{\pm}) < 0$ , et instable si  $\text{Re}(\lambda_{+}) > 0$  ou  $\text{Re}(\lambda_{-}) > 0$ .*

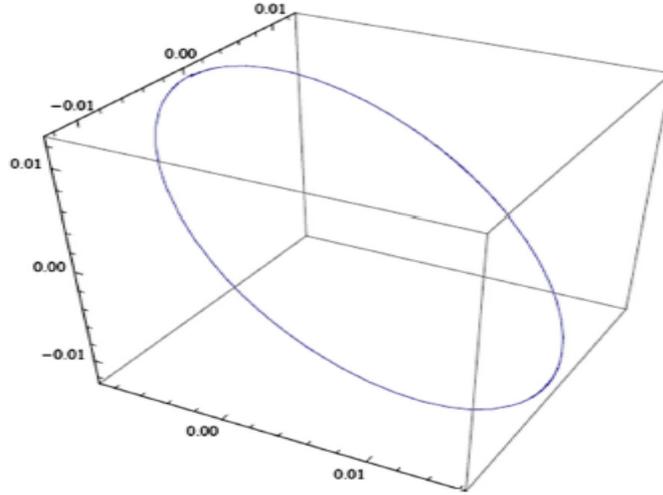


Fig 4.1. L'orbite périodique (4.3) pour les valeurs  $\alpha = \omega = 1, \beta = 0, \gamma = 2$  et  $\varepsilon = 1/100$ .

pour les valeurs  $\alpha = \omega = 1, \beta = 0, \gamma = 2$  et  $\varepsilon = 1/100$ .

## 4.2 Bifurcation transcritique

On considère l'équation différentielle suivante

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (4.4)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $f$  est différentiable. Le théorème suivant (voir [37]) énonce les conditions nécessaires pour que le système (4.4) présente une bifurcation transcritique. Voir aussi [14] page 149, ou [32] page 338. Nous utiliserons le théorème 4.2.1 pour prouver le théorème 4.1.1.

Dans le théorème ci-dessous, nous utilisons la notation  $D_x f$  pour désigner la matrice jacobienne de la fonction  $f$ . On utilise aussi la notation  $(\partial f / \partial \mu)$  pour indiquer le vecteur de dérivées partielles des composantes de  $f$  par rapport à  $\mu \in \mathbb{R}$ .  $A^T$  désignera la transposée de la matrice  $A$ .

**Théorème 4.2.1** *On considère la famille à un paramètre (4.4) et on suppose qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x_0, \mu) = 0$  pour tout  $\mu$ , c'est-à-dire que  $x_0$  est un point d'équilibre du système (4.4) pour toutes les valeurs de paramètre. De plus, lorsque  $\mu = \mu_0$  supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées.*

## Chapitre 4. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Genesisio

---

- (H1) La matrice jacobienne  $M = D_x f(x_0, \mu_0)$  possède une valeur propre simple  $\lambda = 0$  de vecteur propre  $v$ , et  $M^T$  possède un vecteur propre  $w$  correspondant à la valeur propre  $\lambda = 0$ .
- (H2)  $M$  possède  $k$  valeurs propres à parties réelles négatives, et  $n - k - 1$  valeurs propres à parties réelles positives.
- (H3)  $w^T ((\partial f / \partial \mu)(x_0, \mu_0)) = 0$ .
- (H4)  $w^T (D_x (\partial f / \partial \mu)(x_0, \mu_0)v) \neq 0$ .
- (H5)  $w^T (D_x^2 f(x_0, \mu_0)(v, v)) \neq 0$ .

Alors, le système (4.4) présente une bifurcation transcritique en point d'équilibre  $x_0$  à la valeur de bifurcation  $\mu = \mu_0$ .

### 4.2.1 Preuve du Théorème 4.2.1

Nous rappelons que l'analyse de la bifurcation transcritique se produisant dans le système Genesisio sera effectuée par rapport au paramètre  $c$ . Donc en utilisant la notation introduite de section 4.2, on a  $\mu = c$  et le champ de vecteurs  $f$  associé au système Genesisio (4.2) est donné par

$$f(x, c) = (y, z, -cx - by - az + x^2),$$

où  $x = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On remarque, pour simplifier la notation, nous remplaçons  $(x, y, z)$  par  $(x_1, x_2, x_3)$ .

Le champ de vecteurs  $f$  admet deux points d'équilibre  $x_0 = (0, 0, 0)$  et  $x_c = (c, 0, 0)$  qui se heurtent à l'origine lorsque  $c = 0$ . De plus, lorsque  $c = 0$  La matrice jacobienne dans ce cas est

$$M = D_x f(x_0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & -a \end{pmatrix},$$

le polynôme caractéristique de  $M$  est donné par

$$p(\lambda) = -\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda,$$

dont les racines sont

$$\lambda = 0, \quad \lambda_{\pm} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Puisque par hypothèse les paramètres  $a$  et  $b$  appartiennent à l'ensemble  $K = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b \neq 0\} \setminus \{(0, b) \in \mathbb{R}^2 : b > 0\}$ , alors les deux valeurs propres  $\lambda_{\pm}$  ont partie réelle non nulle.

La bifurcation transcritique est caractérisée par l'échange de stabilité du point d'équilibre  $x_c = (c, 0, 0)$  lorsque le paramètre  $c$  passe par la valeur de bifurcation  $c = 0$ . On remarque qu'il est difficile d'étudier la stabilité du point d'équilibre  $x_c$ , pour

## Chapitre 4. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Genesisio

---

$c \neq 0$ , en analysant les racines du polynôme caractéristique de la matrice  $D_x f(x_c, c)$ , c'est-à-dire le polynôme  $q(\lambda) = -\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda + c$ . Ainsi, nous utiliserons le théorème 4.1.1 pour montrer que le système (4.2) présente une bifurcation transcritique.

On remarque que les vecteurs  $v = (1, 0, 0)$  et  $w = (b, a, 1)$  sont des vecteurs propres des matrices  $M$  et  $M^T$ , respectivement, correspondant à la valeur propre  $\lambda = 0$ . De plus, nous avons cela

$$w^T ((\partial f / \partial \mu)(x_0, 0)) = (b \ a \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$w^T (D_x (\partial f / \partial \mu)(x_0, 0)v) = (b \ a \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$$

$$w^T (D_x^2 f(x_0, 0)(v, v)) = (b \ a \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Ainsi, toutes les hypothèses du théorème 4.1.1 sont satisfaites. Ainsi, le système (4.2) présente une bifurcation transcritique au point d'équilibre en l'origine à la valeur de bifurcation  $c = 0$ .

### 4.3 Preuve du Proposition 4.1.1 et Théorème

#### 4.1.2

**Preuve du Proposition 4.1.1.** Le polynôme caractéristique de la partie linéaire du système (4.2) en point d'équilibre  $x_c = (c, 0, 0)$  est  $q(\lambda) = -\lambda^3 - a\lambda^2 - b\lambda + c$ . On veut trouver les valeurs de paramètres pour lesquelles le polynôme  $q$  admet une valeur propre nulle et une paire de valeurs propres purement imaginaires, c'est-à-dire les valeurs de paramètres pour lesquelles  $q$  est de la forme  $-\lambda(\lambda^2 + B)$  avec  $B > 0$ . Afin de simplifier les expressions, on posera  $B = \omega^2$ , avec  $\omega > 0$ . Ainsi, en posant  $q(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + \omega^2)$ , on obtient  $a = c = 0$  et  $b = \omega^2$ . Par conséquent, lorsque  $a = c = 0$  et  $b > 0$  il existe un unique point d'équilibre de zéro-Hopf en l'origine des coordonnées. De plus, si on pose  $b = \omega^2$ , avec  $\omega > 0$ , alors les valeurs propres sont 0 et  $\pm i\omega$ . ■

**Preuve du Théorème 4.1.2.** Nous utiliserons la méthode de moyennisation de premier ordre décrite dans le chapitre 2 (voir théorème 2.1.1) afin d'étudier si, le point d'équilibre de zéro-Hopf situé à l'origine des coordonnées, il bifurque une

## Chapitre 4. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Genesio

certaine orbite périodique en déplaçant les paramètres  $a, b$  et  $c$  du système (4.2). Ainsi, que les paramètres  $a, b$  et  $c$  du système (4.2) soient donnés par  $a = \varepsilon\alpha, b = \omega^2 + \varepsilon\beta$  et  $c = \varepsilon\gamma$ , avec  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit. Alors, le système de (4.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -\varepsilon\gamma x - (\omega^2 + \varepsilon\beta) y - \varepsilon\alpha z + x^2. \end{cases} \quad (4.5)$$

La première étape pour écrire notre système différentiel (4.5) sous la forme standard pour appliquer la méthode du moyennisation est d'écrire la partie linéaire à l'origine du système (4.5) lorsque  $\varepsilon = 0$  de sa forme normale réelle de Jordan, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En faisant le changement linéaire de variables  $(x, y, z) \rightarrow (X, Y, Z)$ , où

$$x = \frac{Z - \omega X}{\omega^2}, \quad y = Y, \quad z = \omega X. \quad (4.6)$$

avec les nouvelles variables  $(X, Y, Z)$ , le système (4.5) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = \frac{Z^2 - 2\omega XZ + \omega^2 X^2 - \omega^6 Y}{\omega^5} \\ \quad + \varepsilon \frac{(\gamma - \alpha\omega^2)\omega X - \beta\omega^2 Y - \gamma Z}{\omega^3}, \\ \dot{Y} = \omega X, \\ \dot{Z} = \frac{(\omega X - Z)^2}{\omega^4} + \varepsilon \frac{(\gamma - \alpha\omega^2)\omega X - \beta\omega^2 Y - \gamma Z}{\omega^2}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Maintenant, en posant  $(X, Y, Z) = (\varepsilon u, \varepsilon v, \varepsilon w)$ . Alors, le système (4.7) devient

$$\begin{cases} \dot{u} = -\omega v, \\ \quad + \varepsilon \frac{(\gamma - \alpha\omega^2)\omega^3 u - \beta\omega^4 v - \gamma\omega^2 w + \omega^2 u^2 - 2\omega u w + w^2}{\omega^5}, \\ \dot{v} = \omega u, \\ \dot{w} = \varepsilon \frac{(\gamma - \alpha\omega^2)\omega^3 u - \beta\omega^4 v - \gamma\omega^2 w + \omega^2 u^2 - 2\omega u w + w^2}{\omega^4}. \end{cases} \quad (4.8)$$

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta, w)$  où  $u = r \cos \theta$  et  $v = r \sin \theta$ , le système différentiel (4.8) devient

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\varepsilon}{\omega^5} [(w - \gamma\omega^2)w - \omega r (2w - \gamma\omega^2 + \alpha\omega^4) \cos \theta \\ \quad + \omega^2 r^2 \cos^2 \theta - \beta\omega^4 r \sin \theta \cos \theta], \\ \dot{\theta} = \omega + \frac{\varepsilon}{\omega^5} r [( \gamma\omega^2 - w)w + \omega r (2w - \gamma\omega^2 + \alpha\omega^4) \cos \theta \\ \quad - \omega^2 r^2 \cos^2 \theta + \beta\omega^4 r \sin \theta] \sin \theta, \\ \dot{w} = \frac{\varepsilon}{\omega^4} [(w - \gamma\omega^2)w - \omega r (2w - \gamma\omega^2 + \alpha\omega^4) \cos \theta \\ \quad + \omega^2 r^2 \cos^2 \theta - \beta\omega^4 r \sin \theta]. \end{cases} \quad (4.9)$$

## Chapitre 4. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Genesisio

---

Dans le système (4.9) nous prenons  $\theta$  comme une nouvelle variable indépendante, et on obtient

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\theta} = \varepsilon F_1(\theta, r, w) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{dw}{d\theta} = \varepsilon F_2(\theta, r, w) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (4.10)$$

où

$$\begin{aligned} F_1(\theta, r, w) &= \frac{1}{\omega^6} [(w - \gamma\omega^2)w - \omega r(2w - \gamma\omega^2 + \alpha\omega^4) \cos \theta \\ &\quad + \omega^2 r^2 \cos^2 \theta - \beta\omega^4 r \sin \theta] \cos \theta, \\ F_2(\theta, r, w) &= \frac{1}{\omega^5} [(w - \gamma\omega^2)w - \omega r(2w - \gamma\omega^2 + \alpha\omega^4) \cos \theta \\ &\quad + \omega^2 r^2 \cos^2 \theta - \beta\omega^4 r \sin \theta]. \end{aligned}$$

En utilisant les notations introduites dans le chapitre 2, on a  $t = \theta, T = 2\pi, x = (r, w)^T$  et

$$\begin{aligned} F(\theta, r, w) &= \begin{pmatrix} F_1(\theta, r, w) \\ F_2(\theta, r, w) \end{pmatrix} \quad \text{and} \\ f(r, w) &= \begin{pmatrix} f_1(r, w) \\ f_2(r, w) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est immédiat de vérifier que le système (4.10) satisfait toutes les hypothèses du théorème 4.

Maintenant, nous calculons les intégrales (2.3). On obtient

$$\begin{aligned} f_1(r, w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(\theta, r, w) d\theta \\ &= \frac{r(\gamma\omega^2 - \alpha\omega^4 - 2w)}{2\omega^5}, \\ f_2(r, w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_2(\theta, r, w) d\theta \\ &= \frac{2w^2 - 2\gamma\omega^2 w + \omega^2 r^2}{2\omega^5}. \end{aligned}$$

Le système  $f_1(r, w) = f_2(r, w) = 0$  admet une solution unique  $(r^*, w^*)$  avec  $r^* > 0$ , c'est-à-dire

$$r^* = \frac{\omega\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2\omega^4}}{\sqrt{2}}, \quad w^* = \frac{\omega^2(\gamma - \alpha\omega^2)}{2}.$$

Le jacobien (2.4) en  $(r^*, w^*)$  prend la valeur

$$\det \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (r, w)} \Big|_{(r, w) = (r^*, w^*)} = \frac{\gamma^2 - \alpha^2\omega^4}{2\omega^6},$$

## Chapitre 4. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Genesisio

---

qui est non nulle par hypothèse. De plus, les valeurs propres de la matrice jacobienne

$$\det \frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (r, w)} \Big|_{(r,w)=(r^*,w^*)}$$

sont donnés par

$$\frac{-\alpha\omega^2 \pm \sqrt{3\alpha^2\omega^4 - 2\gamma^2}}{2\omega^3}.$$

Le reste de la preuve du théorème 4.1.2 suit immédiatement du théorème 2.1.1 si nous montrons que la solution périodique correspondant à  $(r^*, w^*)$  fournit une orbite périodique bifurquant de l'origine du système différentiel (4.5) en  $\varepsilon = 0$ .

Théorème 2.1.1 garantit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit l'existence d'une solution périodique  $(r(\theta, \varepsilon), w(\theta, \varepsilon))$  du système (4.10) tel que

$$(r(0, \varepsilon), w(0, \varepsilon)) \rightarrow \left( \frac{\omega\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2\omega^4}}{\sqrt{2}}, \frac{\omega^2(\gamma - \alpha\omega^2)}{2} \right),$$

Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De la deuxième équation de système (4.9) nous obtenons  $\theta(t, \varepsilon) = \omega t + O(\varepsilon)$ . De plus, nous avons que  $(r(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon))$  est une solution périodique du système (4.9) tel que

$$(r(0, \varepsilon), \theta(0, \varepsilon), w(0, \varepsilon)) \rightarrow \left( \frac{\omega\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2\omega^4}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\omega^2(\gamma - \alpha\omega^2)}{2} \right),$$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Alors pour  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, le système (4.8) admet la solution périodique

$$(u(t, \varepsilon), v(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon)) = \begin{pmatrix} r(t, \varepsilon) \cos \theta(t, \varepsilon), \\ r(t, \varepsilon) \sin \theta(t, \varepsilon), w(t, \varepsilon) \end{pmatrix}$$

tel que

$$(u(0, \varepsilon), v(0, \varepsilon), w(0, \varepsilon)) \rightarrow \left( \frac{\omega\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2\omega^4}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\omega^2(\gamma - \alpha\omega^2)}{2} \right),$$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . La solution périodique de système différentiel (4.7) écrit comme

$$(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon)) = (\varepsilon u(t, \varepsilon), \varepsilon v(t, \varepsilon), \varepsilon w(t, \varepsilon)),$$

où

$$(X(0, \varepsilon), Y(0, \varepsilon), Z(0, \varepsilon)) \rightarrow \left( \frac{\varepsilon\omega\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2\omega^4}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\varepsilon\omega^2(\gamma - \alpha\omega^2)}{2} \right),$$

## Chapitre 4. Bifurcation de Zéro-Hopf pour un système de Genesisio

---

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Enfin, on conclut que le système (4.5) possède une solution périodique  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon))$  obtenu de la solution  $(X(t, \varepsilon), Y(t, \varepsilon), Z(t, \varepsilon))$  par le changement de variables (4.6), tel que  $(x(0, \varepsilon), y(0, \varepsilon), z(0, \varepsilon))$  est

$$\varepsilon \left( \frac{\gamma - \alpha\omega^2}{2} - \frac{\sqrt{\gamma^2 - \alpha^2\omega^4}}{\sqrt{2}}, 0, \frac{\omega^2 \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2\omega^4}}{\sqrt{2}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

si  $\varepsilon$  suffisamment petit. Alors,  $(x(0, \varepsilon), y(0, \varepsilon), z(0, \varepsilon)) \rightarrow (0, 0, 0)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il s'agit donc d'une solution périodique commençant au point d'équilibre de zéro-Hopf localisé en l'origine des coordonnées lorsque  $\varepsilon = 0$ . ■

---

---

## Conclusion générale

L'étude des solutions périodiques des systèmes différentiels non linéaires a suscité un grand intérêt depuis de nombreuses années. Il convient de souligner que l'étude de ces solutions périodiques se fait généralement de méthode numérique, car leur étude par des méthodes analytiques est très difficile. Dans ce travail, nous avons étudié analytiquement les solutions périodiques des deux systèmes différentiels en dimension 3. Ces systèmes présentent des bifurcations du type zéro-Hopf au point d'équilibre localisé en l'origine, et des orbites périodiques bifurquent de ce point d'équilibre. Notre travail futur consistera à l'application de méthode de la moyennisation pour étudier le nombre des solutions périodiques de quelques systèmes différentiels non linéaires en dimension  $n$ ,  $n \geq 4$ .

---

---

## Bibliographie

- [1] A. Buică, J. Llibre, Averaging methods for finding periodic orbits via Brouwer degree, *Bull. Sci. Math.* 128 (2004) 7 – 22.
- [2] C. Buzzì, J. Llibre, J. Medrado, Hopf and zero-Hopf bifurcations in the Hindmarsh-Rose system, *Nonlinear Dynam.* 83 (3) (2016) 1549 – 1556.
- [3] M. R. Cândido, J. Llibre, D. D. Novaes, Persistence of periodic solutions for higher order perturbed differential systems via Lyapunov-Schmidt reduction, *Nonlinearity* 30 (2017) 3560 – 3586.
- [4] V. Castellanos, J. Llibre, I. Quilantán, Simultaneous periodic orbits bifurcating from two zero-hopf equilibria in a tritrophic food chain model, *J. Appl. Math. Phys.* 1(7) (2013) 31 – 38.
- [5] M. Chen, Z. Han, Controlling and synchronizing chaotic Genesio system via nonlinear feedback control, *Chaos Solitons Fractals.* 17(4) (2003) 709 – 716.
- [6] L. Chen, M. Wang, The relative position and the number of limit cycles of a quadratic differential system. *Acta. Math. Sinica*, 22 (1979) 751 – 758.
- [7] L. O. Chua, The genesis of Chua’s circuit, *Arch. Elektron. Übertrag.tech.* 46 (1992) 250 – 257.
- [8] R. Eichhorn, S.J. Linz, P. Hänggi, Transformations of nonlinear dynamical systems to jerk motion and its application to minimal chaotic flows, *Phys. Rev. E* 58 (1998) 7151 – 7164.
- [9] R. Euzébio, J. Llibre, Zero-Hopf bifurcation in a Chua system, *Nonlinear Anal. RWA* 37 (2017) 31 – 40.
- [10] R. Genesio, A. Tesi, Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems, *Automatica* 28(3) (1992) 531 – 548.
- [11] J. Guan, F. Chen, G. Wang, Chaos control and Hopf bifurcation analysis of the Genesio system with distributed delays feedback. *Adv. Differ. Equ.* 2012, (2012) 16.
- [12] J.M. Ginoux, J. Llibre, Zero-Hopf bifurcation in the volterra-gause system of predator–prey type, *Math. Methods Appl. Sci.* 40 (18) (2017) 7858 – 7866.
- [13] J. Guckenheimer, On a Codimension Two Bifurcation, in : *Lectures Notes in Math.*, vol. 898, 1980, pp. 99 – 142.

## Bibliographie

---

- [14] J. Guckenheimer, P. Holmes, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, in : Applied Mathematical Sciences, vol. 42, Springer-Verlag, New York, 1990, Revised and Corrected Reprint of the 1983 Original.
- [15] M. Han, Existence of periodic orbits and invariant tori in codimension two bifurcation of three dimensional systems, *J. Syst. Sci. Math. Sci.* 18 (1998) 403 – 409.
- [16] M. Han, J. Li, Lower bounds for the Hilbert number of polynomial systems, *J. Differential Equations*, 252(4) (2012) 3278 – 3304.
- [17] M. Han, D. Shang, Z. Wang, et al., Bifurcation of limit cycles in a 4th-order near-Hamiltonian polynomial systems, *Internat. J. Bifur. Chaos*, 17(11) (2007) 4117 – 4144.
- [18] M. Han, Y. Wu, P. Bi, A new cubic system having eleven limit cycles, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 12(4) (2005) 675 – 686.
- [19] M. Han, T. Zhang, H. Zang, On the number and distribution of limit cycles in a cubic system, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 14(12) (2004) 4285 – 4292.
- [20] T. Johnson, W. Tucker, An improved lower bound on the number of limit cycles bifurcating from a Hamiltonian planar vector field of degree 7. *Internat. J. Bifur. Chaos*, 20(5) (2010) 1451 – 1458.
- [21] Y.A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, third ed., Springer-Verlag, 2004.
- [22] J. Li, H. Chan, K. Chung, Bifurcations of limit cycles in a  $Z_6$ -equivariant planar vector field of degree 5, *Sci. China Ser. A*, 45(7) (2002) 817 – 26.
- [23] J. Li, C. Li, Planar cubic Hamiltonian systems and distribution of limit cycles of (E3), *Acta Math. Sin.*, 28(4) (1985) 509 – 521.
- [24] J. Li, Hilbert’s 16th problem and bifurcations of planar polynomial vector fields, *Internat. J. Bifur. Chaos*, 13(1) (2003) 47 – 106.
- [25] C. Li, C. Liu, J. Yang, A cubic system with thirteen limit cycles. *J. Differential Equations*, 246 (2009) 3609 – 3619.
- [26] J. Li, Y. Liu, New results on the study of  $Z_q$ -equivariant planar polynomial vector fields. *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 9 (2010) 167 – 219.
- [27] J. Llibre, Periodic orbits in the zero-hopf bifurcation of the rossler system, *Rom. Astron. J.* 24 (1) (2014) 49 – 60.
- [28] J. Llibre, A. Makhlof, Zero-hopf periodic orbit of a quadratic system of differential equations obtained from a third-order differential equation, *Differ. Equ. Dyn. Syst.* 27 (2019) 75 – 82.
- [29] J. Llibre, R. D. S. Oliveira, C. Valls, On the integrability and the zero-Hopf bifurcation of a Chen-Wang differential system, *Nonlinear Dynam.* 80 (1 – 2) (2015) 353 – 361.

## Bibliographie

---

- [30] J. H. Park, Synchronization of Genesio chaotic system via backstepping approach, *Chaos Solitons Fractals*. 27(5) (2006) 1369 – 1375.
- [31] J. H. Park, Adaptive controller design for modified projective synchronization of Genesio-Tesi chaotic system with uncertain parameters, *Chaos Solitons Fractals*. 34(4) (2007) 1154 – 1159.
- [32] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Volume 7 of Texts in Applied Mathematics, 3rd edn. Springer, New York (2001).
- [33] J. A. Sanders, F. Verhulst, J. Murdock, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Volume 59 of Applied Mathematical Sciences, 2nd edn. Springer, New York (2007).
- [34] J. Scheurle, J. Marsden, Bifurcation to quasi-periodic tori in the interaction of steady state and Hopf bifurcations, *SIAM J. Math. Anal.* 15 (1984) 1055 – 1074.
- [35] D. Schlomiuk, Algebraic and geometric aspects of the theory of polynomial vector fields, In : *Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields*, ed. Schlomiuk, D., NATO ASI Series C, Vol. 408, Kluwer Academic, London, 1993, 429 – 467.
- [36] S. Shi, A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems. *Sci. Sinica*, 23 (1980) 153 – 158.
- [37] J. Sotomayor, Generic bifurcations of dynamical systems. In : *Proceedings of a Symposium held at the University of Bahia, Salvador, 1971 on Dynamical systems* , pp 561–582. Acade.
- [38] J.C. Sprott, Some simple chaotic jerk functions, *Amer. J. Phys.* 65 (1997) 537 – 543.
- [39] S. Vaidyanathan, A new 3-D jerk chaotic system with two cubic nonlinearities and its adaptive backstepping control, *Arch. Control Sci.* 27 (2017) 409 – 439.
- [40] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, second ed., in : *Universitext*, Springer-Verlag, Berlin, 1996, p. x+303, Translated from the 1985 Dutch original. *mic Press*, New York (1973).
- [41] S. Wang, P. Yu, Bifurcation of limit cycles in a quintic Hamiltonian system under a sixth-order perturbation, *Chaos Solitons Fractals*, 26(5) (2005) 1317 – 1335.
- [42] S. Wang, P. Yu, Existence of 121 limit cycles in a perturbed planar polynomial Hamiltonian vector field of degree 11, *Chaos Solitons Fractals*, 30(3) (2006) 606 – 621.
- [43] S. Wang, P. Yu, J. Li, Bifurcation of limit cycles in  $Z_{10}$ -equivariant vector fields of degree 9, *Internat. J. Bifur. Chaos*, 16(8) (2006) 2309 – 2324.
- [44] X. Wu, Z. Guan, Z. Wu, T. Li, Chaos synchronization between Chen system and Genesio system. *Phys. Lett. A* 364(6) (2007) 484 – 487.
- [45] S. Yu, Ilyashenko, Centennial history of Hilberts 16th problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 39(3) (2002) 301 – 354.

## Bibliographie

---

- [46] P. Yu, M. Han, Twelve limit cycles in a cubic order planar system with  $Z_2$  symmetry. *Comm. Pure Appl. Anal.*, 3(3) (2004) 515 – 525.
- [47] P. Yu, M. Han, Twelve limit cycles in a cubic case of the 16th Hilbert problem, *Internat. J. Bifur. Chaos* 15(7) (2005) 2191 – 2205.
- [48] T. Zhang, M. Han, H. Zang, et al, Bifurcations of limit cycles for a cubic Hamiltonian system under quartic perturbations. *Chaos Solitons Fractals*, 22 (2004) 1127 – 1138.
- [49] L. Zhou, F. Chen, Hopf bifurcation and Shilnikov chaos of Genesio system, *Chaos Solitons Fractals*. 40(3) (2009) 1413 – 1422.
- [50] J. Li, M. Zhang, S. Li, Bifurcations of limit cycles in a  $Z_2$ -equivariant planar polynomial vector field of degree 7, *Internat. J. Bifur. Chaos*, 16(4) (2006) 925 – 943.