



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la  
recherche scientifique

Université Chahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département: Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème:

# Sur les orbites périodiques de quelques classes de systèmes Hamiltoniens

Présenté Par:

**Bouznad Asma**

Devant le jury :

Mr, Hannachi Fareh

M.C.A Université Chahid Cheikh Larbi Tébessi Président

Mr, Boukhalfa Elhafsi

M.C.B Université Chahid Cheikh Larbi Tébessi Examineur

Mr, Zouhair Diab

M.C.A Université Chahid Cheikh Larbi Tébessi Encadreur

Date de soutenance : 05/06/2023



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ





## شكر و عرفان :

قال رسول الله صلى الله عليه و سلم:  
" من لم يشكر الناس لم يشكر الله "  
صدق رسول الله صلى الله عليه و سلم  
الحمد لله على إحسانه و الشكر له على توفيقه و إمتنانه  
و نشهد أن لا إله إلا الله وحده لا شريك له تعظيماً لشأنه  
و نشهد أن سيدنا و نبينا محمد عبده و رسوله صلى الله  
عليه و على آله و أصحابه و أتباعه و سلم.  
بعد شكر الله سبحانه و تعالى على توفيقه لنا لإتمام  
هذا البحث المتواضع أتقدم بجزيل الشكر إلى من شرفني  
بإشرافه على مذكرة بحثي الأستاذ " ذياب زهير " الذي  
لن تكفي حروف هذه المذكرة لإيفائه حقه بصبره  
الكبير علي. ولتوجيهاته العلمية التي لا تقدر بثمن. و  
التي ساهمت بشكل كبير في إتمام و إستكمال هذا  
العمل. إلى كل أساتذة قسم الرياضيات والإعلام الآلي.  
كما أتوجه بخالص شكري و تقديري إلى كل من  
ساعدني من قريب أو من بعيد على إنجاز و إتمام هذا  
العمل.

" رب أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي و على  
والدي و أن أعمل صالحاً ترضاه و أدخلني برحمتك في  
عبادك الصالحين "



## إهداء :

أحمد الله عز وجل على منه وعونه لإتمام هذا البحث.  
إلى الذي وهبني كل ما يملك حتى أحقق له آماله، إلى  
من كان يدفعني قدما نحو الأمام لنيل المبتغى، إلى  
الإنسان الذي إمتلك الإنسانية بكل قوة، إلى الذي سهر  
على تعليمي بتضحيات جسام مترجمة في تقديسه للعلم،  
إلى مدرستي الأولى في الحياة، أبي الغالي على قلبي  
أطال الله في عمره.

إلى التي وهبت فلذة كبدها كل العطاء و الحنان، إلى  
التي صبرت على كل شيء، التي رعتني حق الرعاية و  
كانت سندي في الشدائد، و كانت دعواتها لي  
بالتوفيق تتبطني خطوة خطوة في عملي، إلى من ارتحت  
كلما تذكرت إبتسامتها في وجهي نبع الحنان أمي أعز  
ملاك على القلب والعين جزأها الله عني خير الجزاء في  
الدارين.

إليهما أهدي هذا العمل المتواضع لكي أدخل على  
قلبهما شيئا من السعادة.

إلى أخواتي الذين تقاسموا معي عبء الحياة.  
كما أهدي ثمرة جهدي لصديقاتي .. أنتهى مشوار  
طويل برفقتهم فيه حزن وفرح ومشاعر جميلة، مهما كثر  
الكلام عن الأجابة ستبقون أغلاهم.

و إلى كل من يؤمن بأن بذور نجاح التغيير هي في  
ذواتنا و في أنفسنا قبل أن تكون في أشياء أخرى..

# Résumé

Dans ce travail, on étudie d'abord les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique à imperfections périodiques sur ses variables composées de trois condensateurs, dont un sans charge, et de deux bobines. Nous modélisons ce système par l'approche lagrangienne en utilisant la morphologie du problème d'Hill. La méthode principale utilisée pour prouver les résultats obtenus est la méthode de moyennisation des systèmes dynamiques.

Dans la deuxième partie de ce travail, on étudie les solutions périodiques du système Hamiltonien avec le potentiel d'Armburster-Guckenheimer-Kim de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x, \\ \dot{p}_x = -x + ax(x^2 + y^2) + bxy^2, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p}_y = -y + ay(x^2 + y^2) + bx^2y. \end{cases}$$

Où  $a$  et  $b$  des paramètres réels, on étudie aussi la non-intégrabilité au sens de Liouville-Arnold de ce système.

**Mots clés** : Méthode de moyennisation, Solution périodique, Système Hamiltonien.

# Abstract

In this work, we first study the periodic auto-oscillations of an electric circuit with periodic imperfections on its variables composed by three condensers, one of them without charge, and two bobbins. We model this system by the Lagrangian approach using the morphology of the Hill problem and the main tool used for proving the results is the averaging theory of dynamical systems.

In the second part of this work, we study the periodic solutions of the Hamiltonian system with the Armburster-Guckenheimer-Kim potential of the form:

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x, \\ \dot{p}_x = -x + ax(x^2 + y^2) + bxy^2, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p}_y = -y + ay(x^2 + y^2) + bx^2y. \end{cases}$$

Where  $a$  and  $b$  are real parameters, we also study the non-integrability in the sense of Liouville-Arnold of this system.

**Keywords** : Averaging theory, Periodic solution, Hamiltonian system.

# ملخص:

في هذا العمل، نقوم أولاً بدراسة التذبذبات الذاتية الدورية لدارة كهربائية مع وجود عيوب دورية في متغيراتها المكونة من ثلاثة مكثفات، إحداها دون شحنة، و وشيعتان نقوم بنمذجة هذا النظام من خلال نهج لاغرانج باستخدام مورفولوجيا مشكلة هيل. الطريقة الرئيسية المستخدمة لإثبات النتائج التي تم الحصول عليها هي طريقة المتوسط للأنظمة الديناميكية. في الجزء الثاني من هذا العمل، ندرس الحلول الدورية لنظام هاملتون التالي:

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x, \\ \dot{p}_x = -x + ax(x^2 + y^2) + bxy^2, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p}_y = -y + ay(x^2 + y^2) + bx^2y. \end{cases}$$

حيث  $a$  و  $b$  وسيطان حقيقيان، ندرس أيضاً عدم قابلية التكامل بمفهوم ليوفيل-أرنولد لهذا النظام.

الكلمات المفتاحية : طريقة المتوسط، حل دوري ، نظام هاملتون.

---

---

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>2</b>
<b>1 Notions préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Systèmes dynamiques . . . . .	3
1.2 Système différentiel du premier ordre . . . . .	3
1.3 Système différentiel autonome . . . . .	4
1.4 Point critique et point critique hyperbolique . . . . .	4
1.5 Plan et portrait de phase . . . . .	4
1.6 Cycle limite . . . . .	4
1.7 Cycle limite hyperbolique . . . . .	5
1.8 Orbite périodique . . . . .	5
1.9 Transformation de Legendre . . . . .	5
1.10 Formulation Hamiltonienne de Mécanique . . . . .	6
1.10.1 Système Hamiltonien . . . . .	6
1.11 Crochet de Poisson . . . . .	8
1.11.1 Propriétés du crochet de Poisson . . . . .	8
1.12 Champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$ . . . . .	9
1.13 Champ de vecteurs conservatif et central . . . . .	9
1.14 Stabilité des systèmes différentiels linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$ . . . . .	9
1.15 Stabilité du point critique . . . . .	12
1.16 Matrice fondamentale . . . . .	13
1.17 Conditions de stabilité d'un système différentiel linéaire . . . . .	13
1.18 Fonction lisse . . . . .	13
1.19 Fonction localement Lipschitzienne . . . . .	14
1.20 L'intégrabilité des systèmes différentiels . . . . .	14
<b>2 Méthode de la moyennisation</b>	<b>15</b>
2.1 Méthode de la moyennisation du premier ordre . . . . .	15
2.2 Résultats de base sur l'autre méthode de moyennisation du premier ordre . . . . .	17



## Table des matières

---

<b>3</b>	<b>Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables</b>	<b>19</b>
3.1	Introduction et résultats principaux . . . . .	19
3.2	Preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2 . . . . .	24
3.3	Preuve des deux corollaires . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Les orbites périodiques du système hamiltonien avec potentiel d'Armbruster-Guckenheimer-Kim</b>	<b>30</b>
4.1	Introduction et résultats principaux . . . . .	30
4.2	Preuve du Théorème 4.1.1 . . . . .	32
4.3	Preuve du Théorème 4.1.2 . . . . .	35
4.4	Orbites périodiques et intégrabilité au sens de Liouville-Arnold . . . . .	35
	<b>Conclusion générale</b>	<b>37</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>38</b>

---

---

## Introduction générale

Le 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert pose essentiellement la question d'une borne supérieure uniforme  $H(n)$  pour le nombre maximal de cycles limites d'un champ de vecteurs polynomial du plan

$$X_{(a,b)}^n \leftrightarrow \left\{ x' = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j a_{ij} x^i y^{j-1} \text{ et } y' = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j b_{ij} x^i y^{j-1} \right\} \text{ où } a_{ij}, b_{ij} \in \mathbb{R},$$

uniformément en terme de degré  $n$ . Ce problème a plus de 100 ans et ses recherches ont donné lieu à de nombreux articles contribuant au vaste développement de la théorie des systèmes dynamiques. On ne sait pas si une borne supérieure uniforme ne dépendant que du degré du champ vectoriel pourrait exister, même lorsque le degré est deux. Cette partie du 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert est généralement appelée le problème de finitude uniforme.

Même le théorème de Dulac pour prouver que pour des champs de vecteurs individuels le nombre de cycles limites est fini était loin d'être trivial (voir par exemple [31]); ce problème est également appelé problème de finitude individuelle. En 1923, Dulac a présenté une preuve de ce théorème. Plus tard, il a été constaté que la preuve contenait une lacune. Ce manque a été résolu pour la première fois pour les systèmes quadratiques par Bamon en 1985 et pour un degré arbitraire par Ecalle et Ilyashenko indépendamment dans les années 1990.

Les programmes de résolution du 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert consistent principalement en sa réduction à plusieurs sous-problèmes, basés soit sur la considération de problèmes de cyclicité locale [26], soit sur la restriction de la classe des champs de vecteurs à une classe particulière plus simple, voir par ex. [31] pour un aperçu.

En utilisant différentes techniques (intégrales abéliennes, bifurcations simultanées de centres, . . . ), il existe des estimations inférieures connues pour les nombres de Hilbert, par exemple :  $H(2) \geq 4$  [7, 27, 32],  $H(3) \geq 13$  [19],  $H(4) \geq 22$  [8],  $H(5) \geq 28$  [28],  $H(6) \geq 35$  [30],  $H(7) \geq 50$  [20],  $H \geq kn^2 \ln n$  [9], et  $H(n) \geq 4(n+1)^2(1,442695 \ln(n+1) - 1/6) + n - 2/3$  [18].

Notons enfin que le 16<sup>ème</sup> problème de Hilbert a également été considéré pour les champs de vecteurs sur des espaces de phase de dimension arbitraire  $\geq 3$  par Bobiński et Zoladek ; dans [4], ils illustrent que le problème de finitude uniforme a alors une réponse négative.

## Introduction générale

---

Ce mémoire est structuré comme suit

**Dans le premier chapitre**, nous présentons quelques concepts, définitions et résultats préliminaires des systèmes dynamiques que nous utiliserons tout au long de ce travail.

**Dans le deuxième chapitre**, nous présenterons quelques méthodes de la moyennisation du premier ordre.

**Dans le troisième chapitre**, on étudie d'abord les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique à imperfections périodiques sur ses variables composées de trois condensateurs, dont un sans charge, et de deux bobines. Nous modélisons ce système par l'approche lagrangienne en utilisant la morphologie du problème d'Hill. La méthode principale utilisée pour prouver les résultats obtenus est la méthode de moyennisation du premier ordre.

**Dans le dernier chapitre**, on utilise la méthode de moyennisation du premier ordre pour étudier les orbites périodiques du système hamiltonien avec potentiel d'Armburster-Guckenheimer-Kim de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x, \\ \dot{p}_x = -x + ax(x^2 + y^2) + bxy^2, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p}_y = -y + ay(x^2 + y^2) + bx^2y. \end{cases}$$

Où  $a$  et  $b$  des paramètres réels, on étudie aussi la non-intégrabilité au sens de Liouville-Arnold de ce système.

---

## Notions préliminaires

Nous rappelons dans ce chapitre quelques concepts, définitions et résultats préliminaires des systèmes dynamiques qui seront utilisés dans ce mémoire.

### 1.1 Systèmes dynamiques

**Définition 1.1.1** *Un système dynamique sur  $\mathbb{R}^n$  est une application  $\xi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tel que*

- (1)  $\xi(\cdot, x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue
- (2)  $\xi(t, \cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est continue
- (3)  $\xi(0, x) = x$
- (4)  $\xi(t + s, x) = \xi(t, \xi(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

### 1.2 Système différentiel du premier ordre

**Définition 1.2.1** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ , un système différentiel du premier ordre est l'équation*

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.1}$$

*où  $f$  est une fonction continue sur  $I \times U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Un couple  $(J, x)$ , où  $J \subset I$  est un intervalle ouvert  $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , est une solution de (1.1) si*

- (1) *Pour tout  $t \in J$ ,  $x(t) \in U$ ,*
- (2) *Pour tout  $t \in J$ ,  $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$ .*

### 1.3 Système différentiel autonome

**Définition 1.3.1** *un système différentiel*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où l'expression  $f(x)$  ne dépend pas du  $t$ , est un système autonome.

### 1.4 Point critique et point critique hyperbolique

**Définition 1.4.1** *On appelle point critique, point d'équilibre, point singulier ou point fixe du système différentiel*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.2}$$

un point  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x_0) = 0$ .

**Définition 1.4.2** *Soit  $x_0$  un point critique de (1.2). Soit le système linéaire*

$$\dot{x} = Ax \text{ ou } A = Df(x_0),$$

$Ax$  est une bonne approximation de (1.2) au voisinage de  $x_0$ , un point critique  $x_0$  est dit hyperbolique si aucune des valeurs propres de  $A$  n'a de partie réelle nulle.

### 1.5 Plan et portrait de phase

**Définition 1.5.1** *Soit le système planaire*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \tag{1.3}$$

un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions  $(x(t), y(t))$  du système (1.3) représentent dans le plan  $(xoy)$  des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan  $(xoy)$  est le plan de phase.

### 1.6 Cycle limite

**Définition 1.6.1** *Pour un système plan, on appelle cycle limite une orbite périodique qui est isolée dans l'ensemble des orbites périodiques.*

## 1.7 Cycle limite hyperbolique

**Définition 1.7.1** Supposons que le système (1.3) a une orbite périodique  $(x(t), y(t))$  de période  $T$ . Soit

$$\delta = \int_0^T \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (x(t), y(t)) dt.$$

Si  $\delta > 0$  (resp.  $\delta < 0$ ) alors l'orbite périodique  $(x(t), y(t))$  est un cycle limite instable (resp. stable). Une orbite périodique  $(x(t), y(t))$  ayant  $\delta \neq 0$  est un cycle limite hyperbolique.

## 1.8 Orbite périodique

**Définition 1.8.1** On appelle orbite périodique toute trajectoire  $\eta_t(x)$  du système différentiel (1.1) telle qu'il existe un nombre  $T > 0$ , vérifiant

$$\eta(t + T, x) = \eta(t, x) \text{ pour } T > 0.$$

Le plus petit réel  $T > 0$  qui vérifie la formule précédente est appelé période. Pour un système autonome, à toute solution périodique correspond une orbite fermée dans l'espace de phase.

## 1.9 Transformation de Legendre

**Définition 1.9.1** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lisse. On suppose que  $f$  est strictement convexe, c'est-à-dire  $\frac{d^2 f}{dx^2} > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . La transformation de Legendre est l'opération mathématique qui affecte à toute paire  $(x, f(x))$  la nouvelle paire  $(p, F(p))$  telle que

$$F(p) = \max_{x \in \mathbb{R}} [px - f(x)],$$

puisque  $-\frac{d^2 f}{dx^2} < 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un unique  $p$  est

$$p = f'(x).$$

En d'autres termes, la transformée de Legendre peut s'écrire comme suit

$$(x, f(x)) \longmapsto \begin{cases} F(p) = px - f(x), \\ p = f'(x). \end{cases}$$

L'égalité supérieure du côté droit doit être considérée comme une fonction de  $p$  uniquement, ce qui implique que la relation  $p = f'(x)$  doit être inversée pour trouver

## Chapitre 1. Notions préliminaires

---

$x$  en fonction de  $p$ . C'est ce qui fait de la transformation de Legendre une transformation non linéaire, et ce qui rend parfois la transformation difficile à évaluer en pratique.

**Exemple 1.9.1** on considère la fonction  $f(x) = e^x$ , la transformation de Legendre de  $f$  est donnée par

$$\begin{cases} F(p) = px - e^x, \\ p = e^x, \end{cases}$$

seconde équation s'inverse facilement pour  $p > 0$  :  $x = \ln p$ . En introduisant ceci dans la première équation, nous avons

$$F(p) = p(\ln p - 1),$$

on remarque que  $F$  est convexe pour tout  $p > 0$ .

## 1.10 Formulation Hamiltonienne de Mécanique

### 1.10.1 Système Hamiltonien

Considérons un Lagrangien à une dimension  $L(q, \dot{q}, t)$ , la fonction Hamiltonienne  $H(q, p, t)$  est liée au Lagrangien  $L$  par la transformation de Legendre par rapport à la seconde variable de  $L$

$$H(q, p, t) = \max_{\dot{q}} [p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t)],$$

qui peut s'écrire, comme suit

$$\begin{cases} H(q, p, t) = p\dot{q} - L(q, \dot{q}, t), \\ p = \partial_2 L(q, \dot{q}, t). \end{cases}$$

Notez que l'Hamiltonien  $H$  a la même valeur que l'énergie du système, mais l'Hamiltonien dépend de  $(p, q, t)$ , tandis que l'énergie dépend de  $(q, \dot{q}, t)$ . Les relations ci-dessus sont valables pour n'importe quel chemin, qu'il soit physiquement réalisable ou non. Le long d'un chemin physiquement réalisable, on peut déduire une relation supplémentaire

$$\partial_1 H(q, p, t) = -\partial_1 L(q, \dot{q}, t).$$

L'équation d'Euler Lagrange pour  $q$  peut donc être réécrite comme

$$\frac{d}{dt} (\partial_2 L(q, \dot{q}, t)) = \frac{dp}{dt}, \partial_1 L(q, \dot{q}, t) = -\partial_1 H(q, p, t).$$

## Chapitre 1. Notions préliminaires

---

En résumé, dans la formulation hamiltonienne, la dynamique du système est donnée par

$$\begin{cases} \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(q, p, t), \\ \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p, t), \end{cases}$$

ce système s'appelle système Hamiltonien.

**Exemple 1.10.1** soit

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 + gl \cos \theta.$$

L'hamiltonien est donné par

$$\begin{aligned} H(\theta, p_\theta, t) &= p_\theta \dot{\theta} - L(\theta, \dot{\theta}, t), \quad p_\theta = \partial_2 L(\theta, \dot{\theta}, t), \\ \Leftrightarrow H(\theta, p_\theta, t) &= p_\theta \dot{\theta} - \frac{1}{2}l^2\dot{\theta}^2 - gl \cos \theta, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{l^2}, \\ \Leftrightarrow H(\theta, p_\theta, t) &= \frac{1}{2}\frac{p_\theta^2}{l^2} - gl \cos \theta, \end{aligned}$$

le système Hamiltonien est

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \\ \frac{dp_\theta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta}. \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{l^2}, \\ \frac{dp_\theta}{dt} = -gl \sin \theta. \end{cases}$$

**Exemple 1.10.2** soit

$$L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{c_1}x^2 - \frac{1}{c_2}y^2 - \frac{1}{c}xy.$$

L'hamiltonien est donné par

$$\begin{aligned} &\begin{cases} H(x, y, p_x, p_y, t) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t), \\ p_x = \partial_3 L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \dot{x}, \\ p_y = \partial_4 L(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \dot{y}, \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} H(x, y, p_x, p_y, t) = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{c_1}x^2 + \frac{1}{c_2}y^2 + \frac{1}{c}xy, \\ \dot{x} = p_x, \\ \dot{y} = p_y, \end{cases} \\ \Leftrightarrow &H(x, y, p_x, p_y, t) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{c_1}x^2 + \frac{1}{c_2}y^2 + \frac{1}{c}xy, \end{aligned}$$



le système Hamiltonien est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \\ \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \\ \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y}. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = p_x, \\ \frac{dp_x}{dt} = -\frac{2}{c_1}x - \frac{1}{c}y, \\ \frac{dy}{dt} = p_y, \\ \frac{dp_y}{dt} = -\frac{2}{c_2}y - \frac{1}{c}x. \end{array} \right.$$

## 1.11 Crochet de Poisson

**Définition 1.11.1** Soient  $f(q, p, t)$  et  $g(q, p, t)$  deux fonctions. Le crochet de Poisson de  $f$  et  $g$  est défini par

$$\{f, g\} = \partial_1 f \partial_2 g - \partial_2 f \partial_1 g,$$

La définition peut être étendue aux fonctions  $f(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t)$  et  $g(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N, t)$  comme suit

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^N (\partial_i f \partial_{N+i} g - \partial_{N+i} f \partial_i g).$$

### 1.11.1 Propriétés du crochet de Poisson

Une première propriété triviale mais importante du crochet de Poisson est que pour toute fonction  $f(q, p, t)$ , on a

$$\{f, f\} = 0.$$

Si  $g(q, p, t)$  est une autre fonction, le crochet de Poisson est antisymétrique

$$\{f, g\} = -\{g, f\}.$$

Si  $h(q, p, t)$  est une troisième fonction, et  $c$  une constante réelle, on a

$$\{f, g+h\} = \{f, g\} + \{f, h\}, \quad \{f+g, h\} = \{f, h\} + \{g, h\}, \quad \{f, cg\} = c\{f, g\} = \{cf, g\}.$$

Le crochet de Poisson satisfait à l'identité de Jacobi

$$\{f, \{g, h\}\} + \{h, \{f, g\}\} + \{g, \{h, f\}\} = 0.$$

### 1.12 Champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^k$

**Définition 1.12.1** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , un champ de vecteurs  $X$  de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$  est la donnée d'une application  $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^k$

$$X : x \mapsto f(x).$$

On lui associe le système différentiel

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.4}$$

où les composantes du  $f(x)$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur l'ouvert  $U$ .

### 1.13 Champ de vecteurs conservatif et central

**Définition 1.13.1** Le champ de vecteurs  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , est dit conservatif s'il existe  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que

$$f(x) = -\nabla V(x).$$

Une telle fonction  $V$  est appelée un potentiel. Le potentiel est unique à une constante additive près.

**Définition 1.13.2** Un champ de vecteurs  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , avec  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , est dit central si pour tout  $x$ ,  $f(x)$  est colinéaire à  $x$ , c'est-à-dire s'il existe  $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$f(x) = \lambda(x)x,$$

pour tout  $x \in \Omega$ .

### 1.14 Stabilité des systèmes différentiels linéaire à coefficients constants dans $\mathbb{R}^2$

Soit le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}, \text{ où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } \det A \neq 0.$$

Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de cette matrice. On distingue les différents cas selon ces valeurs propres :

## Chapitre 1. Notions préliminaires

---

1. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles non nulles et de signe différent, alors le point critique  $(0, 0)$  est un point selle, il est toujours instable (voir Fig 1.1)

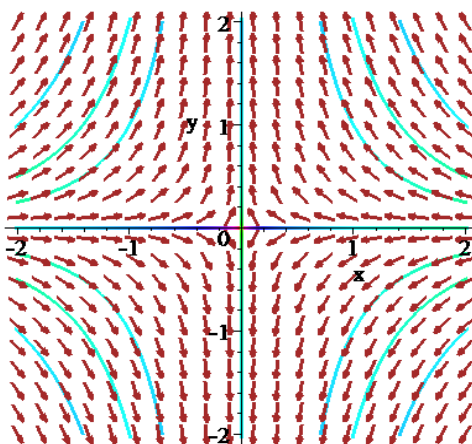


Fig 1.1. Selle

2. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réelles de même signe, on a quatre cas :
  - (a) Si  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ , le point critique  $(0, 0)$  est un nœud stable (voir Fig 1.2).
  - (b) Si  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$  le point critique  $(0, 0)$  est un nœud instable (voir Fig 1.3).

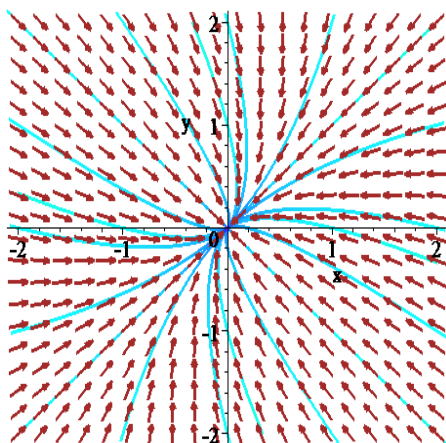


Fig 1.2. Nœud stable

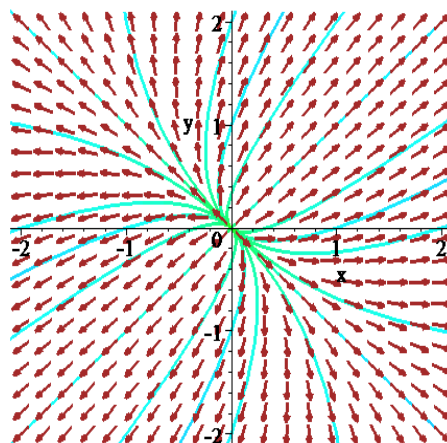


Fig 1.3. Nœud instable

- (c) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ , et  $A$  est diagonalisable alors le point critique  $(0, 0)$  est

un nœud propre, il est stable si  $\lambda < 0$  et instable si  $\lambda > 0$  (voir Fig 1.4 et 1.5).

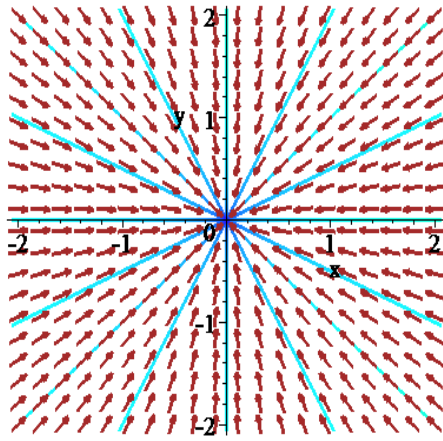


Fig 1.4. Nœud propre stable

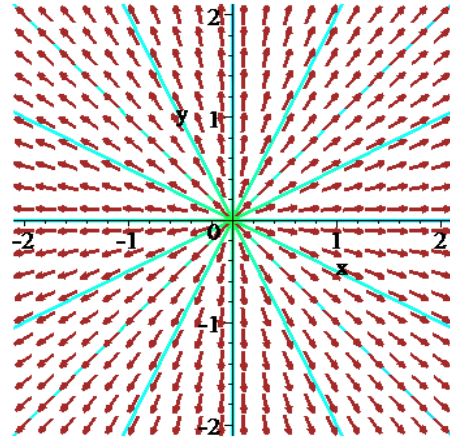


Fig 1.5. Nœud propre instable

(d) Si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ , et  $A$  est non diagonalisable alors le point critique  $(0, 0)$  est un nœud exceptionnel, il est stable si  $\lambda < 0$  et instable si  $\lambda > 0$  (voir Fig 1.6 et 1.7).

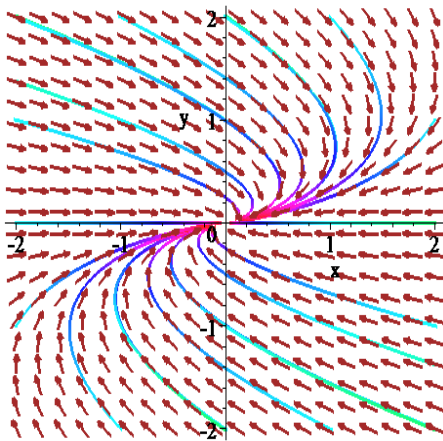


Fig 1.6. Nœud exceptionnel stable

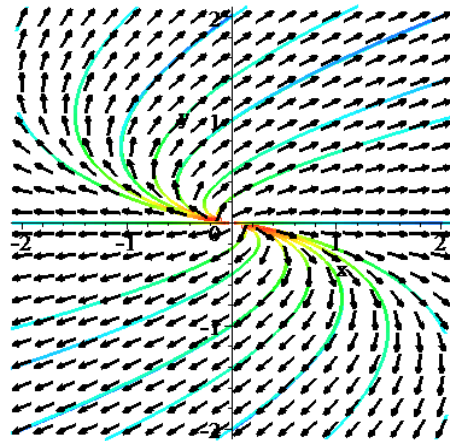


Fig 1.7. Nœud exceptionnel instable

3. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont des complexes conjuguées et  $\text{Im}(\lambda_{1,2}) \neq 0$ , alors le point critique  $(0, 0)$  est un foyer. Il est stable si  $\text{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$  et instable si

$\text{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$  (voir Fig 1.8 et 1.9).

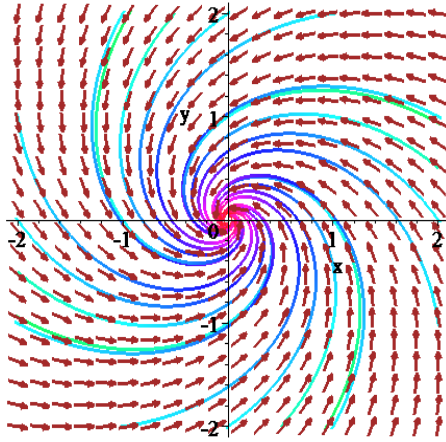


Fig 1.8. Foyer stable

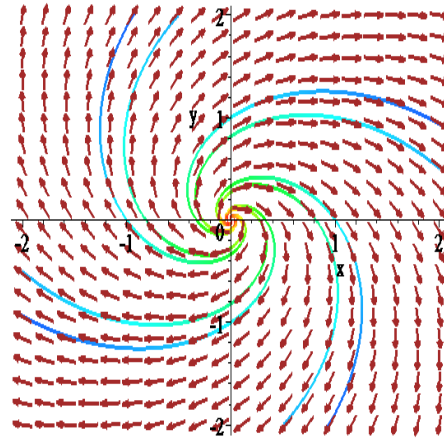


Fig 1.9. Foyer instable

4. Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont imaginaires pures, alors le point critique  $(0,0)$  est un centre, il est stable mais pas asymptotiquement stable (voir Fig 1.10).

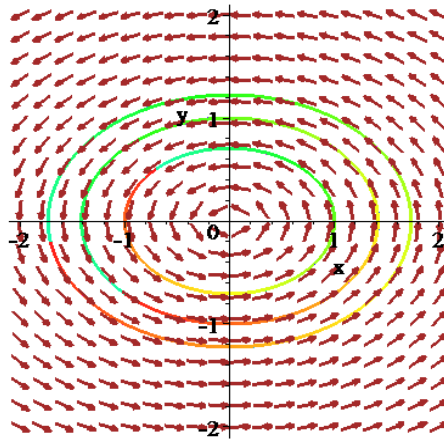


Fig 1.10. Centre

### 1.15 Stabilité du point critique

L'étude de la stabilité d'un point critique nous amène à connaître le comportement des trajectoires voisines de ce point d'équilibre.

**Définition 1.15.1** Soit le système différentiel

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}. \quad (1.5)$$

## Chapitre 1. Notions préliminaires

---

Supposons que  $f$  satisfait les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution et soit  $\phi(t)$  la solution du système (1.5).

On dit qu'un point critique  $p$  est stable si  $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  tel que si

$$\|\phi(t_0) - p\| < \delta \implies \|\phi(t) - p\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0.$$

S'il existe de plus un voisinage de  $p$  tel que pour tout  $x$  dans ce voisinage  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = p$  alors le point d'équilibre  $p$  est dit asymptotiquement stable.

### 1.16 Matrice fondamentale

**Définition 1.16.1** soit  $x'(t) = A(t)x(t)$  un système différentiel linéaire à coefficients constants, où  $A$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ , chaque  $A(t)$  étant une matrice carrée réelle  $n \times n$ , la solution  $x(t)$  est un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ .

soit  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  un système fondamentale de solution c'est-à-dire que  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  est base de l'espace vectoriel des solutions. on appelle **matrice fondamentale** associée à ce système de solution la matrice  $M(t)$  dont les coordonnées des vecteurs  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t)$ .

En particulier on a  $u_i(t) = M(t)e_i$  si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

### 1.17 Conditions de stabilité d'un système différentiel linéaire

Considérons le système différentiel linéaire  $x' = Ax$ , où  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $A$  est une matrice carrée  $n \times n$  à coefficients réelles constants.

**Définition 1.17.1** Si toutes les valeurs propres de la matrice  $A$  ont leur partie réelle strictement négative, alors toutes les solutions de  $x' = Ax$  tendent vers 0 quand  $t$  tend vers  $+\infty$  et l'origine est un équilibre stable.

Si l'une au moins des valeurs propres est de partie réelle strictement positive, l'origine est un point d'équilibre instable.

Si la matrice  $A$  est diagonalisable et si toutes ses valeurs propres sont de partie réelle négative ou nulle, alors l'origine est un point d'équilibre stable.

### 1.18 Fonction lisse

on écrira les coordonnées sur  $\mathbb{R}^n$  sous la forme  $x_1, \dots, x_n$  et soit  $p$  un point de  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble ouvert.

## Chapitre 1. Notions préliminaires

---

**Définition 1.18.1** Soit  $k$  un entier non négatif. Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est dite de classe  $\mathcal{C}^k$  en  $p$  si ses dérivées partielles  $\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_j}}$  de tous ordres  $j \leq k$  existent et sont continues en  $p$ . La fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  en  $p$  si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $k \geq 0$ ; en d'autres termes, ses dérivées partielles de tous les ordres

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}$$

existent et sont continues en  $p$ . On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $U$  si c'est de classe  $\mathcal{C}^k$  en tout point de  $U$ . Une définition similaire vaut pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur un ensemble ouvert  $U$ . Un synonyme de classe  $\mathcal{C}^\infty$  est "lisse".

### 1.19 Fonction localement Lipschitzienne

**Définition 1.19.1** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert, une fonction  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dite localement Lipschitzienne si pour tout  $x \in U$ , il existe un voisinage  $U_x \subset U$  de  $x$  et une constante  $k > 0$  tels que

$$\forall y, z \in U_x, \quad \|f(y) - f(z)\| \leq k \|y - z\|.$$

### 1.20 L'intégrabilité des systèmes différentiels

**Définition 1.20.1** On considère le système différentiel autonome

$$\dot{x} = f(x),$$

où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $x \in U$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\phi(t, x_0)$  sa solution telle que  $\phi(0, x_0) = x_0 \in U$ . On dit que la solution  $\phi(t, x_0)$  est  $T$ -périodique avec  $T > 0$  si et seulement si  $\phi(T, x_0) = x_0$  et  $\phi(t, x_0) \neq x_0$  pour  $t \in (0, T)$ . Soit  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction non constante de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que

$$\nabla F(x) \cdot f(x) = 0,$$

où

$$\nabla F(x) = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

Alors  $F$  est appelée l'intégrale première du système différentiel  $\dot{x} = f(x)$ , car  $F$  est constante sur les solutions de ce système.

---

## Méthode de la moyennisation

### 2.1 Méthode de la moyennisation du premier ordre

Le théorème suivant fournit une approximation du premier ordre pour les solutions périodiques d'un système différentiel périodique, pour la preuve voir les théorèmes 11.5 et 11.6 de Verhulst [29].

On considère le système différentiel

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon F_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.1)$$

avec  $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ . De plus, on suppose que  $F_1(t, \mathbf{x})$  et  $F_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon)$  sont  $T$ -périodiques en  $t$ . Séparément on considère dans  $D$  le système différentiel moyenné

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon f_1(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (2.2)$$

où

$$f_1(\mathbf{y}) = \frac{1}{T} \int_0^T F_1(t, \mathbf{y}) dt.$$

Avec si certaines conditions, les points d'équilibre de système moyenné correspondent aux solutions  $T$ -périodiques de (2.1).

**Théorème 2.1.1** *On considère les deux problèmes de valeur initiale (2.1) et (2.2).*

*On suppose que*

*(i)  $F_1$ ,  $\partial F_1/\partial x$ ,  $\partial^2 F_1/\partial x^2$ ,  $F_2$  et  $\partial F_2/\partial x$  sont continues et bornées par une constante indépendante de  $\varepsilon$  dans  $[0, \infty) \times D$  et  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ .*

*(ii)  $F_1$  et  $F_2$  sont  $T$ -périodiques en  $t$  ( $T$  indépendant de  $\varepsilon$ ).*



## Chapitre 2. Méthode de la moyennisation

---

(iii)  $y(t)$  appartient à  $\Omega$  sur l'intervalle de temps  $[0, 1/\varepsilon]$ .

Alors les hypothèses suivantes sont valables.

(a) Pour  $t \in [1, \varepsilon]$  on a que  $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$ , lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(b) Si  $p$  est un point singulier de système moyenné (2.2) et

$$\det \left( \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{y}} \right) \Big|_{\mathbf{y}=p} \neq 0,$$

alors il existe une solution  $T$ -périodique  $\varphi(t, \varepsilon)$  de (2.1) telle que  $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow p$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

(c) La stabilité ou l'instabilité du cycle limite  $\varphi(t, \varepsilon)$  est donnée par la stabilité ou l'instabilité du point singulier  $p$  du système moyenné (2.2). En fait, le point singulier  $p$  a le comportement de stabilité de l'application de Poincaré associée au cycle limite  $\varphi(t, \varepsilon)$ .

Dans la suite, nous utilisons les idées de la preuve du théorème 2.1.1 (c). Pour plus de détails, voir les sections 6.3 et 11.8 de Verhulst [29]. Supposons que  $\varphi(t, \varepsilon)$  est une solution périodique de (2.1) correspondant à  $y = p$  n point d'équilibre du système moyenné (2.2). En linéarisant (2.1) au voisinage de la solution périodique  $\varphi(t, \varepsilon)$  on obtient une équation linéaire à coefficients  $T$ -périodiques

$$\dot{x} = \varepsilon A(t, \varepsilon) x, \quad A(t, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} [F_1(t, x) - F_2(t, x, \varepsilon)] \Big|_{x=\varphi(t, \varepsilon)}. \quad (2.3)$$

On introduit les matrices  $T$ -périodiques

$$B(t) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(t, p), \quad B_1 = \frac{1}{T} \int_0^T B(t) dt,$$

$$C(t) = \int_0^t (B(s) - B_1) dt.$$

D'après le théorème 2.1.1 (c) nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(t, \varepsilon) = B(t),$$

et  $B_1$  est la matrice du système moyenné linéarisé. La matrice  $C$  est de moyenne nulle. La transformation

$$x \mapsto y = (I - \varepsilon C(t))x, \quad (2.4)$$

permet d'écrire (2.3) comme suit

$$\dot{y} = \varepsilon B_1 y + \varepsilon [A(t, \varepsilon) - B(t)] y + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (2.5)$$

## Chapitre 2. Méthode de la moyennisation

---

On remarque que  $A(t, \varepsilon) - B(t) \rightarrow 0$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et aussi les exposants caractéristiques de (2.5) dépendent du petit paramètre  $\varepsilon$ . Il s'ensuit que, pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, si le déterminant de  $B_1$  is not zero, then 0 n'est pas nul, alors 0 n'est pas une valeur propre de la matrice  $B_1$  et alors ce n'est pas un exposant caractéristique de (2.5). Par la transformation (2.4) on obtient que le système (2.3) n'a pas de multiplicateurs égaux à 1.

### 2.2 Résultats de base sur l'autre méthode de moyennisation du premier ordre

Dans cette section, nous présentons le résultat de base de la méthode de moyennisation dont nous aurons besoin pour prouver les principaux résultats de ce travail.

On considère le problème de la bifurcation de solutions  $T$ -périodiques du système différentiel de la forme

$$\dot{x}(t) = G_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon G_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 G_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (2.6)$$

avec  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit. Ici les fonctions  $G_0, G_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $G_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $T$ -périodiques dans la première variable, et  $\Omega$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'hypothèse principale est que le système non perturbé

$$\dot{x}(t) = G_0(t, x), \quad (2.7)$$

possède une sous-variété de solutions périodiques. Une solution de ce problème est donnée en utilisant la méthode de moyennisation.

Soit  $\mathbf{x}(t, z, \varepsilon)$  la solution du système (2.7) telle que  $\mathbf{x}(0, z, \varepsilon) = z$ . On écrit la linéarisation du système non perturbé le long d'une solution périodique  $\mathbf{x}(t, z, 0)$  comme

$$\dot{y} = D_x G_0(t, \mathbf{x}(t, z, 0))y. \quad (2.8)$$

Dans ce qui suit, nous désignons par  $M_z(t)$  une matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.8), et par  $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$  la projection de  $\mathbb{R}^n$  sur ses premières  $k$  coordonnées; c'est-à-dire  $\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$ .

On suppose qu'il existe une sous-variété  $\mathcal{Z} \subset \Omega$  de dimension  $k$  avec des solutions  $T$ -périodiques de (2.7). Ensuite, une réponse au problème de bifurcation des solutions  $T$ -périodiques à partir des solutions périodiques contenues dans  $\mathcal{Z}$  pour le système (2.6) est donnée dans le résultat suivant.

**Théorème 2.2.1** *Soit  $V$  un sous-ensemble ouvert et borné de  $\mathbb{R}^k$ , et soit  $\beta : \text{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que*

## Chapitre 2. Méthode de la moyennisation

---

(i)  $\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in \text{Cl}(V)\} \subset \Omega$  et que pour chaque  $z_\alpha \in \mathcal{Z}$  la solution  $\mathbf{x}(t, z_\alpha)$  de (2.7) est  $T$ -périodique ;

(ii) pour chaque  $z_\alpha \in \mathcal{Z}$  il existe une matrice fondamentale  $M_{z_\alpha}(t)$  de (2.8) telle que la matrice  $M_{z_\alpha}^{-1}(0) - M_{z_\alpha}^{-1}(T)$  a dans le bloc supérieur droit la matrice  $k \times (n-k)$  nulle et dans le bloc inférieur droit la matrice  $\Delta_\alpha(n-k) \times (n-k)$  avec  $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$ .

On considère la fonction  $\mathcal{G} : \text{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{G}(\alpha) = \xi \left( \frac{1}{T} \int_0^T M_{z_\alpha}^{-1}(t) G_1(t, \mathbf{x}(t, z_\alpha, 0)) dt \right).$$

S'il existe  $a \in V$  avec  $\mathcal{G}(a) = 0$  et  $\det((d\mathcal{G}/d\alpha)(a)) \neq 0$ , alors il existe une solution  $T$ -périodique  $\mathbf{x}(t, \varepsilon)$  du système (2.6) telle que  $\mathbf{x}(0, \varepsilon) \rightarrow z_\alpha$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour une preuve du théorème 2.2.1, voir Malkin [23] et Roseau [25], ou [5], pour une preuve plus courte.

---

---

## Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables

### 3.1 Introduction et résultats principaux

Nous considérons des systèmes dynamiques cohérents dans un circuit électrique composé de trois condensateurs et de deux bobines tel que ses variables ont des imperfections périodiques, c'est-à-dire que notre modèle est une perturbation du circuit idéal, voir Fig. 3.1.

Le but de notre travail est d'étudier les orbites périodiques, c'est-à-dire les auto-oscillations, produites par le système. Nous utiliserons la méthode de moyennisation des systèmes dynamiques. Nous sommes inspirés d'autres travaux où ces techniques ont été utilisées pour étudier d'autres problèmes de dynamique perturbée, voir par exemple [6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 21, 22].

On considère la formulation lagrangienne du circuit, en utilisant la morphologie du problème de Hill

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(L_1\dot{q}_1^2 + L_2\dot{q}_2^2) - \frac{q_1^2}{c_1} - \frac{q_2^2}{c_2} - \frac{(q_1 + q_2)^2}{c},$$

où  $q_i$  sont les charges et  $c_i$  sont les capacités des condensateurs,  $i \in \{1, 2\}$ . Les variables  $L_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , représentent les auto-inductions des bobines.  $c$  représente la capacité d'un troisième condensateur sans charge.

Si on fait le changement de variables

$$x = \sqrt{L_1}q_1, \quad y = \sqrt{L_2}q_2,$$

### Chapitre 3. Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables

---

on obtient

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{c_1}x^2 - \frac{1}{c_2}y^2 - \frac{1}{c}xy,$$

étant, pour  $i = 1, 2$ ,

$$\frac{1}{c_i} = \frac{1}{L_i \bar{c}_i} + \frac{1}{L_i \bar{c}},$$

et

$$\frac{1}{c} = \frac{2}{\bar{c} \sqrt{L_1 L_2}},$$

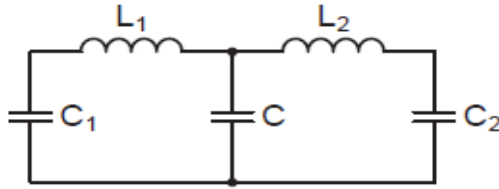


Fig. 3.1. Circuit

En utilisant la transformation de Legendre, on obtient l'Hamiltonien

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{c_1}x^2 + \frac{1}{c_2}y^2 + \frac{1}{c}xy.$$

Ainsi, notre modèle perturbé a la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = p_1, \\ \ddot{x} + \frac{2}{c_1}x + \frac{1}{c}y = \varepsilon F_1(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}), \\ \dot{y} = p_2, \\ \ddot{y} + \frac{1}{c}x + \frac{2}{c_2}y = \varepsilon F_2(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}), \end{cases} \quad (3.1)$$

où  $p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$  et  $p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}$ . Le point désigne la dérivée par rapport au temps  $t$ , le paramètre  $\varepsilon$  est petit et les fonctions lisses  $F_1$  et  $F_2$ , en général, sont des fonctions périodiques en la variable  $t$  en résonance  $p : q$  avec certaines des solutions périodiques pour  $\varepsilon = 0$ , avec  $p$  et  $q$  sont des entiers positifs relativement premiers.

### Chapitre 3. Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables

---

L'objectif de ce travail est de fournir, en utilisant la méthode de la moyennisation, un système d'équations non linéaires dont les zéros simples fournissent des solutions périodiques du système différentiel (3.1). Afin de présenter nos résultats, nous avons besoin de quelques définitions et notations préliminaires.

Le système non perturbé à quatre équations différentielles du second ordre

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = p_1, \\ \ddot{x} = -\frac{2}{c_1}x - \frac{1}{c}y, \\ \dot{y} = p_2, \\ \ddot{y} = -\frac{1}{c}x - \frac{2}{c_2}y, \end{array} \right. \quad (3.2)$$

écrit comme un système différentiel du premier ordre dans les quatre variables  $(X_1 = x, X_2 = \dot{x}, X_3 = y, X_4 = \dot{y})$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_2 = -\frac{2}{c_1}X_1 - \frac{1}{c}X_3, \\ \dot{X}_3 = X_4, \\ \dot{X}_4 = -\frac{1}{c}X_1 - \frac{2}{c_2}X_3, \end{array} \right.$$

a un point singulier unique à l'origine avec des valeurs propres

$$\pm\omega_1 i, \pm\omega_2 i,$$

qui sont les racines du polynôme

$$4c^2 - c_1c_2 + 2c^2c_1\omega^2 + 2c^2c_2\omega^2 + c^2c_1c_2\omega^4,$$

où  $c, c_1$  et  $c_2 \in \mathbb{R}^+$  et  $c_1c_2 < 4c^2$ .

Les fréquences  $\omega_i$  sont données par

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{cc_1(c(c_1 + c_2) + \sqrt{c^2(c_1 - c_2)^2 + c_1^2c_2^2})}}{cc_1c_2},$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{cc_1(c(c_1 + c_2) - \sqrt{c^2(c_1 - c_2)^2 + c_1^2c_2^2})}}{cc_1c_2}.$$

Noter que

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 = \frac{2\sqrt{c^2(c_1 - c_2)^2 + c_1^2c_2^2}}{cc_1c_2}.$$

### Chapitre 3. Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables

---

Comme d'habitude, on définit que le rapport des deux fréquences  $\omega_i$  et  $\omega_j$  est non résonant avec  $\pi$  si  $\omega_i\pi/\omega_j$  n'est pas un nombre rationnel,  $i \neq j$ .

Le système (3.2) dans l'espace des phases  $(x, \dot{x}, y, \dot{y})$  a deux plans passant par l'origine remplis de solutions périodiques à l'exception de l'origine. Ces solutions périodiques ont des périodes  $T_1 = 2\pi/\omega_1$  et  $T_2 = 2\pi/\omega_2$ , selon qu'elles appartiennent au plan associé aux vecteurs propres de valeurs propres  $\pm\omega_1 i$  ou  $\pm\omega_2 i$ , respectivement. Nous étudierons laquelle de ces solutions périodiques persiste pour le système perturbé (3.1) lorsque le paramètre  $\varepsilon$  est suffisamment petit et que les fonctions perturbées  $F_i$ , pour  $i = 1, 2$ , ont une période soit  $pT_1/q$  ou  $pT_2/q$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers positifs relativement premiers.

Nous définissons les constantes  $\phi$  et  $\rho$  par

$$\phi = \frac{c_2 - c_1}{c_1 c_2}, \rho = \omega_1^2 - \omega_2^2,$$

et les fonctions

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1^1(X_1^0, X_2^0) = \frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} \cos(\omega_1 t) F_1^*(t) dt, \\ \mathcal{G}_1^2(X_1^0, X_2^0) = \frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} \sin(\omega_1 t) F_1^*(t) dt, \end{cases} \quad (3.3)$$

où

$$F_1^*(t) = \frac{1}{4c\rho} [2F_1 + c(\rho - 2\phi)F_2],$$

avec

$$F_i = F_i(\sigma_1^1(t), \sigma_1^2(t), \sigma_1^3(t), \sigma_1^4(t)), i = 1, 2,$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_1^1(t) &= \frac{-2cc_2\omega_1}{c_2 + c^2(\rho - 2\phi)} (X_2^0 \cos(\omega_1 t) - X_1^0 \sin(\omega_1 t)), \\ \sigma_1^2(t) &= c(\rho + 2\phi) (X_1^0 \cos(\omega_1 t) + X_2^0 \sin(\omega_1 t)), \\ \sigma_1^3(t) &= \frac{-2}{\omega_1} (X_2^0 \cos(\omega_1 t) - X_1^0 \sin(\omega_1 t)), \\ \sigma_1^4(t) &= 2 (X_1^0 \cos(\omega_1 t) + X_2^0 \sin(\omega_1 t)). \end{aligned}$$

Un zéro  $(X_1^{0*}, X_2^{0*})$  du système non linéaire

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1^1(X_1^0, X_2^0) = 0, \\ \mathcal{G}_1^2(X_1^0, X_2^0) = 0, \end{cases} \quad (3.4)$$

tel que

$$\det \left( \frac{\partial (\mathcal{G}_1^1, \mathcal{G}_1^2)}{\partial (X_1^0, X_2^0)} \right) \Big|_{(X_1^0, X_2^0) = (X_1^{0*}, X_2^{0*})} \neq 0,$$

est appelé zéro simple du système (3.4).

### Chapitre 3. Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables

**Théorème 3.1.1** Soient  $p$  et  $q$  des entiers positifs relativement premiers et supposons que les fonctions lisses  $F_1$  et  $F_2$  des équations de mouvement de (3.1) sont périodiques en la variable  $t$  de période  $pT_1/q$ . On suppose que le rapport des fréquences  $\omega_2/\omega_1$  n'est pas résonant avec  $\pi$ . Alors pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit et pour tout zéro simple  $(X_1^{0*}, X_2^{0*}) \neq (0, 0)$  du système non linéaire (3.4), le système perturbé (3.1) a une solution périodique  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  tendant vers la solution périodique  $(x(t), y(t)) = (\sigma_1^1(t), \sigma_1^3(t))|_{(x_1^0, x_2^0) = (x_1^{0*}, x_2^{0*})}$  du système non perturbé (3.2) a parcouru  $p$  fois.

Une application du théorème 3.1.1 est présentée par le corollaire suivant

**Corollaire 3.1.1** Soit  $F_1(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$  et  $F_2(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \sin(\omega_1 t)(1 - \dot{x}^2) + \cos(\omega_1 t)(x - \dot{y})$  des fonctions lisses et que le rapport des fréquences  $\omega_2/\omega_1$  n'est pas résonant avec  $\pi$ . Alors le système (3.1) pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit admet deux solutions périodiques  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  tendant vers les deux solutions périodiques  $(x(t), y(t)) = (\sigma_1^1(t), \sigma_1^3(t))|_{(x_1^0, x_2^0) = (x_1^*, x_2^*)}$  et  $(x(t), y(t)) = (\sigma_1^1(t), \sigma_1^3(t))|_{(x_1^0, x_2^0) = (x_3^*, x_4^*)}$  de (3.2) lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , où  $(X_1^*, X_2^*) = \left(0, \pm \frac{2\sqrt{3}}{3c(\rho + 2\phi)}\right)$  et  $(X_3^*, X_4^*) = \left(\pm \frac{2}{c(\rho + 2\phi)}, 0\right)$ .

On définit maintenant les fonctions

$$\begin{cases} \mathcal{G}_2^1(X_5^0, X_6^0) = \frac{1}{pT_2} \int_0^{pT_2} \cos(\omega_2 t) F_3^*(t) dt, \\ \mathcal{G}_2^2(X_5^0, X_6^0) = \frac{1}{pT_2} \int_0^{pT_2} \sin(\omega_2 t) F_3^*(t) dt, \end{cases}$$

où

$$F_3^*(t) = \frac{1}{4c\rho} [-2F_1 + c(\rho + 2\phi) F_2],$$

avec

$$F_i = F_i(\sigma_2^1(t), \sigma_2^2(t), \sigma_2^3(t), \sigma_2^4(t)), i = 1, 2,$$

et

$$\begin{aligned} \sigma_2^1(t) &= \frac{-2cc_2\omega_2}{c_2 + c^2(\rho - 2\phi)} (X_6^0 \cos(\omega_2 t) - X_5^0 \sin(\omega_2 t)), \\ \sigma_2^2(t) &= -c(\rho - 2\phi) (X_5^0 \cos(\omega_2 t) + X_6^0 \sin(\omega_2 t)), \\ \sigma_2^3(t) &= \frac{-2}{\omega_2} (X_6^0 \cos(\omega_2 t) - X_5^0 \sin(\omega_2 t)), \\ \sigma_2^4(t) &= 2 (X_5^0 \cos(\omega_2 t) + X_6^0 \sin(\omega_2 t)), \end{aligned}$$

Considérons le système non linéaire

$$\begin{cases} \mathcal{G}_2^1(X_5^0, X_6^0) = 0, \\ \mathcal{G}_2^2(X_5^0, X_6^0) = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$



### Chapitre 3. Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables

---

**Théorème 3.1.2** Soient  $p$  et  $q$  des entiers positifs relativement premiers et supposons que les fonctions lisses  $F_1$  et  $F_2$  des équations de mouvement de (3.1) sont périodiques en la variable  $t$  de période  $pT_2/q$ . On suppose que le rapport des fréquences  $\omega_2/\omega_1$  n'est pas résonant avec  $\pi$ . Alors pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit et pour tout zéro simple  $(X_5^{0*}, X_6^{0*}) \neq (0, 0)$  du système non linéaire (3.5), le système perturbé (3.1) a une solution périodique  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  tendant vers la solution périodique  $(x(t), y(t)) = (\sigma_2^1(t), \sigma_2^3(t))|_{(X_5^0, X_6^0) = (X_5^{0*}, X_6^{0*})}$  du système non perturbé (3.2) a parcouru  $p$  fois.

Une application du théorème 3.1.2 est présentée par le corollaire suivant

**Corollaire 3.1.2** Soit  $F_1(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}) = \sin(\omega_2 t)(1 + x + y)$  et  $F_2(t, x, \dot{x}, y, \dot{y}) = 1 + \dot{x}$  des fonctions lisses et que le rapport de les fréquences  $\omega_2/\omega_1$  n'est pas résonant avec  $\pi$ . Alors le système (3.1) pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit admet une solution périodique  $(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon))$  tendant vers la solution périodique  $(x(t), y(t)) = (\sigma_2^1(t), \sigma_1^3(t))|_{(X_5^0, X_6^0) = (X_5^{0*}, X_6^{0*})}$  de (3.2) lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , donné par  $(X_5^{0*}, X_6^{0*}) = \left(0, \frac{2}{c^2(4\phi^2 - \rho^2)}\right)$ .

## 3.2 Preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2

En introduisant les variables  $(X_1, X_2, X_3, X_4) = (x, \dot{x}, y, \dot{y})$  on peut écrire le système différentiel (3.1) comme un système différentiel du premier ordre de la forme

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_2 = -\frac{2}{c_1}X_1 - \frac{1}{c}X_3 + \varepsilon F_1(X_1, X_2, X_3, X_4), \\ \dot{X}_3 = X_4, \\ \dot{X}_4 = -\frac{1}{c}X_1 - \frac{2}{c_2}X_3 + \varepsilon F_2(X_1, X_2, X_3, X_4). \end{cases} \quad (3.6)$$

Notons que le système différentiel (3.6) lorsque  $\varepsilon = 0$  est équivalent au système différentiel (3.2), appelé le système non perturbé. Lorsque  $\varepsilon \neq 0$  nous l'avons appelé le système perturbé.

Le changement de variables

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \rightarrow \mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4),$$

donné par

$$\mathbf{X} = B\mathbf{x}, \quad (3.7)$$

### Chapitre 3. Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables

---

avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-2cc_2\omega_1}{c_2 + c^2(\rho - 2\phi)} & 0 & \frac{-2cc_2\omega_2}{c_2 - c^2(\rho + 2\phi)} \\ c(\rho + 2\phi) & 0 & -c(\rho - 2\phi) & 0 \\ 0 & \frac{-2}{\omega_1} & 0 & \frac{-2}{\omega_2} \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

On écrit la partie linéaire du système différentiel (3.6) sous sa forme normale réelle de Jordan, et ce système dans les nouvelles variables  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  devient

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2 + \varepsilon F_1^*, \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1 + \varepsilon F_2^*, \\ \dot{x}_3 = \omega_2 x_4 + \varepsilon F_3^*, \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3 + \varepsilon F_4^*, \end{cases} \quad (3.8)$$

où

$$\begin{aligned} F_1^* &= \frac{1}{4c\rho} [2F_1 + c(\rho - 2\phi) F_2], \\ F_2^* &= 0, \\ F_3^* &= \frac{1}{4c\rho} [-2F_1 + c(\rho + 2\phi) F_2], \\ F_4^* &= 0, \end{aligned}$$

avec  $F_i = F_i(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4)$ , et

$$\begin{aligned} \sigma^1 &= -\frac{2cc_2\omega_1}{c_2 + c^2(\rho - 2\phi)} x_2 - \frac{2cc_2\omega_2}{c_2 - c^2(\rho + 2\phi)} x_4, \\ \sigma^2 &= c(\rho + 2\phi) x_1 - c(\rho - 2\phi) x_3, \\ \sigma^3 &= -\frac{2}{\omega_1} x_2 - \frac{2}{\omega_2} x_4, \\ \sigma^4 &= 2x_1 + 2x_3. \end{aligned}$$

Maintenant, dans le lemme suivant, nous caractérisons les orbites périodiques du système non perturbé comme une première étape pour prouver les théorèmes 3.1.1 et 3.1.2.

**Lemme 3.2.1** *Les solutions périodiques  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$  du système différentiel (3.8) avec  $\varepsilon = 0$  sont*

$$(X_1^0 \cos(\omega_1 t) + X_2^0 \sin(\omega_1 t), X_2^0 \cos(\omega_1 t) - X_1^0 \sin(\omega_1 t), 0, 0), \quad (3.9)$$

de période  $T_1$ ,

$$(0, 0, X_5^0 \cos(\omega_2 t) + X_6^0 \sin(\omega_2 t), X_6^0 \cos(\omega_2 t) - X_5^0 \sin(\omega_2 t)),$$

de période  $T_2$ .

### Chapitre 3. Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables

---

**Preuve.** Puisque (3.8) pour  $\varepsilon = 0$  est un système différentiel linéaire, la preuve s'ensuit facilement. ■

**Preuve du Théorème 3.1.1.** On suppose que les fonctions  $F_1$  et  $F_2$  de (3.1) sont périodiques en  $t$  de période  $pT_1/q$  avec  $p$  et  $q$  entiers positifs relativement premiers. Ensuite, on peut considérer que le système différentiel (3.8) et les solutions périodiques (3.9) ont la même période  $pT_1$ .

On applique le théorème 2.2.1 du chapitre 2 au système différentiel (3.8), et on utilise la notation qui y est introduite. Notons que le système (3.8) peut s'écrire sous la forme du système (2.6) prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad G_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_1 x_2 \\ -\omega_1 x_1 \\ \omega_2 x_4 \\ -\omega_2 x_3 \end{pmatrix}, \quad G_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ F_3^* \\ F_4^* \end{pmatrix}, \quad G_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous allons maintenant étudier quelles solutions périodiques du système non perturbé (3.8) avec  $\varepsilon = 0$  du type (3.9) persistent comme solutions périodiques du système perturbé pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit.

Nous commençons par la description des différents éléments qui apparaissent dans l'énoncé du théorème 2.2.1 pour le cas particulier du système différentiel (3.8). Ainsi, nous avons que  $\Omega = \mathbb{R}^4$ ,  $k = 2$  et  $n = 4$ . Maintenant, soit  $r_1 > 0$  arbitrairement petit et soit  $r_2 > 0$  arbitrairement grand. Soit  $V$  un sous ensemble ouvert et borné du plan  $x_3 = x_4 = 0$  de la forme

$$V = \left\{ (X_1^0, X_2^0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : r_1 < \sqrt{(X_1^0)^2 + (X_2^0)^2} < r_2 \right\}.$$

Comme d'habitude  $\text{Cl}(V)$  désigne la fermeture de  $V$ . Si  $\alpha = (X_1^0, X_2^0)$ , alors on identifie  $V$  avec l'ensemble  $\{\alpha \in \mathbb{R}^2 : r_1 < \|\alpha\| < r_2\}$ , ici  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^2$ . La fonction  $\beta : \text{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^2$  est  $\beta(\alpha) = (0, 0)$ . Par conséquent, pour notre système, nous avons

$$\mathcal{Z} = \{z_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in \text{Cl}(V)\} = \left\{ (X_1^0, X_2^0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : r_1 \leq \sqrt{(X_1^0)^2 + (X_2^0)^2} \leq r_2 \right\}.$$

On considère maintenant, pour chaque  $z_\alpha \in \mathcal{Z}$ , la solution périodique  $\mathbf{x}(t, z_\alpha) = (X_1(t), X_2(t), 0, 0)$  donnée par (3.9) de période  $pT_1$ .

Calcul de la matrice fondamentale  $M_{z_\alpha}(t)$  du système différentiel linéaire (3.8) avec  $\varepsilon = 0$  associée à la solution  $pT_1$ -périodique  $z_\alpha = (X_1^0, X_2^0, 0, 0)$  telle que  $M_{z_\alpha}(0) = I$ , on obtient

$$M_{z_\alpha}(t) = M(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & \sin(\omega_1 t) & 0 & 0 \\ -\sin(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_2 t) & \sin(\omega_2 t) \\ 0 & 0 & -\sin(\omega_2 t) & \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix}.$$

### Chapitre 3. Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables

---

Notez que la matrice  $M_{z_\alpha}(t)$  ne dépend pas de la solution périodique particulière  $\mathbf{x}(t, z_\alpha, 0)$ . Depuis la matrice

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(pT_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \sin^2\left(\frac{p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) & \sin\left(\frac{2p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) \\ 0 & 0 & -\sin\left(\frac{2p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) & 2 \sin^2\left(\frac{p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) \end{pmatrix},$$

satisfait les hypothèses de l'énoncé (ii) du théorème 2.2.1 parce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 \sin^2\left(\frac{p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) & \sin\left(\frac{2p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) \\ -\sin\left(\frac{2p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) & 2 \sin^2\left(\frac{p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) \end{vmatrix} = 4 \sin^2\left(\frac{p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) \neq 0,$$

parce que le rapport des fréquences n'est pas résonant avec  $\pi$ . En bref, toutes les hypothèses du théorème 2.2.1 sont satisfaites par le système (3.8). Pour notre système l'application  $\xi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a la forme  $\xi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2)$ .

Calcul de la fonction

$$\mathcal{G}_1(X_1^0, X_2^0) = \mathcal{G}(\alpha) = \xi \left( \frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} M_{z_\alpha}^{-1}(t) G_1^1(t, x(t, z_\alpha, 0)) dt \right),$$

on obtient que

$$\mathcal{G}_1(X_1^0, X_2^0) = (\mathcal{G}_1^1(X_1^0, X_2^0), \mathcal{G}_1^2(X_1^0, X_2^0)),$$

où les fonctions  $\mathcal{G}_1^k$ , pour  $k = 1, 2$ , sont celles données par (3.3). Alors, par le théorème 2.2.1 nous avons que pour tout zéro simple  $(X_1^{0*}, X_2^{0*}) \in V$  du système de fonctions non linéaires (3.4) nous avons une solution périodique  $(x_1, x_2, x_3, x_4)(t, \varepsilon)$  du système (3.8) tel que  $(x_1, x_2, x_3, x_4)(0, \varepsilon) \rightarrow (X_1^{0*}, X_2^{0*}, 0, 0)$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

En revenant par le changement de coordonnées (3.7) on obtient une solution périodique  $(x_1, x_2, x_3, x_4)(t, \varepsilon)$  du système (3.8) telle que

$$\begin{pmatrix} x_1(t, \varepsilon) \\ x_2(t, \varepsilon) \\ x_3(t, \varepsilon) \\ x_4(t, \varepsilon) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{-2cc_2\omega_1}{c_2 + c^2(\rho - 2\phi)} (X_2^{0*} \cos(\omega_1 t) - X_1^{0*} \sin(\omega_1 t)) \\ c(\rho + 2\phi) (X_1^{0*} \cos(\omega_1 t) + X_2^{0*} \sin(\omega_1 t)) \\ \frac{-2}{\omega_1} (X_2^{0*} \cos(\omega_1 t) - X_1^{0*} \sin(\omega_1 t)) \\ 2(X_1^{0*} \cos(\omega_1 t) + X_2^{0*} \sin(\omega_1 t)) \end{pmatrix},$$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

### Chapitre 3. Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables

---

Par conséquent on obtient une solution périodique  $(x, y)(t, \varepsilon)$  du système (3.1) telle que

$$(x, y)(t, \varepsilon) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-2cc_2}{c_2 + c^2(\rho - 2\phi)} (X_2^{0*} \cos(\omega_1 t) - X_1^{0*} \sin(\omega_1 t)) \\ \frac{-2}{\omega_1} (X_2^{0*} \cos(\omega_1 t) - X_1^{0*} \sin(\omega_1 t)) \end{pmatrix},$$

lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . ■

**Preuve du Théorème 3.1.2.** La preuve est analogue à la preuve du théorème 3.1.1. ■

### 3.3 Preuve des deux corollaires

**Preuve du Corollaire 3.1.1.** Sous les hypothèses du corollaire 3.1.1, le système non linéaire (3.4) devient

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1^1(X_1^0, X_2^0) = \frac{c^2 X_1^0 X_2^0 (-\rho^3 + 8\phi^3 - 2\rho^2\phi + 4\phi^2\rho)}{16p\rho}, \\ \mathcal{G}_1^2(X_1^0, X_2^0) = \frac{-6c^2\rho^2\phi(X_2^0)^2 - 2c^2\rho^2\phi(X_1^0)^2 + 12c^2\phi^2(X_2^0)^2\rho + 4c^2\phi^2(X_1^0)^2\rho}{32p\rho} \\ \quad + \frac{-3c^2\rho^3(X_2^0)^2 - c^2\rho^3(X_1^0)^2 + 8c^2\phi^3(X_1^0)^2 - 8\phi + 4\rho + 24c^2\phi^3(X_2^0)^2}{32p\rho}. \end{cases}$$

Ce système admet les quatre solutions suivantes

$$\begin{aligned} (X_1^{0*}, X_2^{0*}) &= \left(0, \pm \frac{2\sqrt{3}}{3c(\rho + 2\phi)}\right), \\ (X_3^{0*}, X_4^{0*}) &= \left(\pm \frac{2}{c(\rho + 2\phi)}, 0\right). \end{aligned}$$

Notons que les solutions qui diffèrent par un signe sont des conditions initiales différentes d'une même solution périodique du système (3.2). De plus, depuis

$$\det \left( \frac{\partial(\mathcal{G}_1^1, \mathcal{G}_1^2)}{\partial(X_1^0, X_2^0)} \Big|_{(X_1^{0*}, X_2^{0*})} \right) = \frac{(4\phi^2 - \rho^2)^2 c^2}{256c^2\rho^2} \neq 0,$$

et

$$\det \left( \frac{\partial(\mathcal{G}_1^1, \mathcal{G}_1^2)}{\partial(X_1^0, X_2^0)} \Big|_{(X_3^{0*}, X_4^{0*})} \right) = -\frac{(4\phi^2 - \rho^2)^2 c^2}{64c^2\rho^2} \neq 0,$$

ces solutions sont simples. Enfin, d'après le théorème 3.1.1., nous n'avons que deux solutions périodiques pour le système de ce corollaire. ■

### Chapitre 3. Les auto-oscillations périodiques d'un circuit électrique avec des imperfections périodiques sur ses variables

---

**Preuve du Corollaire 3.1.2.** Sous les hypothèses du corollaire 3.1.2, le système non linéaire (3.4) devient

$$\begin{cases} \mathcal{G}_2^1(X_5^0, X_6^0) = -\frac{X_5^0(4\phi^2 - \rho^2)}{8\rho}, \\ \mathcal{G}_2^2(X_5^0, X_6^0) = \frac{-2 + 4c^2\phi^2 X_6^0 - c^2\rho^2 X_6^0}{c\rho}. \end{cases}$$

Ce système admet la solution suivante

$$(X_5^{0*}, X_6^{0*}) = \left(0, \frac{2}{c^2(4\phi^2 - \rho^2)}\right).$$

De plus, depuis

$$\det \left( \frac{\partial (\mathcal{G}_2^1, \mathcal{G}_2^2)}{\partial (X_5^0, X_6^0)} \Big|_{(X_5^{0*}, X_6^{0*})} \right) = \frac{(4\phi^2 - \rho^2)^2 c^2}{64c^2\rho^2} \neq 0,$$

cette solution est simple. Enfin, d'après le théorème 3.1.2, nous n'avons qu'une seule solution périodique pour le système de ce corollaire. ■

## Les orbites périodiques du système hamiltonien avec potentiel d'Armbruster-Guckenheimer-Kim

### 4.1 Introduction et résultats principaux

L'objectif principal de ce travail est d'étudier les orbites périodiques et la non-intégrabilité du système hamiltonien avec l'énergie potentielle donnée par le potentiel d'Armbruster-Guckenheimer-Kim, voir Armbruster et al. [2], qui a souvent été utilisé dans l'étude de la dynamique des galaxies. Nous étudions les orbites périodiques en utilisant la méthode de moyennisation et la non-intégrabilité est étudiée à travers l'existence d'orbites périodiques qui n'ont pas tous leurs multiplicateurs égaux à 1.

Cet hamiltonien se compose d'un potentiel harmonique de dimension 2 plus les termes quartiques suivants

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + x^2 + y^2) - \frac{a}{4}(x^2 + y^2)^2 - \frac{b}{2}x^2y^2. \quad (4.1)$$

Le système hamiltonien est donné par

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x, \\ \dot{p}_x = -x + ax(x^2 + y^2) + bxy^2, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p}_y = -y + ay(x^2 + y^2) + bx^2y. \end{cases} \quad (4.2)$$

Nous désignons par le point, la dérivée par rapport à la variable indépendante  $t$ . Nous appelons (4.2) le système hamiltonien d'Armbruster-Guckenheimer-Kim, ou simplement le système d'AGK.

## Chapitre 4. Les orbites périodiques du système hamiltonien avec potentiel d'Armbruster-Guckenheimer-Kim

---

Dans ce travail, nous utilisons la méthode de moyennisation du premier ordre pour calculer les orbites périodiques, voir chapitre 2. Cette méthode permet de trouver analytiquement les orbites périodiques de système d'AGK (4.2) à toutes les valeurs positives de l'énergie en fonction des paramètres  $a$  et  $b$ . En effet, cette méthode réduit le problème de trouver des solutions périodiques d'un système différentiel à celui de trouver des zéros de certaines fonctions convenables de dimension finie. Cette méthode a également été utilisée par Jiménez – Lara et Llibre [16, 17].

On divise le plan de paramètres  $(a, b)$  en quatre parties : les deux droites

$$\begin{aligned} L_1 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b + a = 0\}, \\ L_2 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b = 0\}, \end{aligned}$$

et les deux régions

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b - 2a \leq 0, b > 0\} \cup \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : b - 2a \geq 0, b < 0\}, \\ R_2 &= \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{Cl}(R_1) \cup L_1\}. \end{aligned}$$

Ici, la fermeture d'un sous-ensemble  $R$  de  $\mathbb{R}^2$  est notée par  $\text{Cl}(R)$ .

Notre résultat principal sur les orbites périodiques du système d'AGK (4.2) est résumé comme suit.

**Théorème 4.1.1** *Pour chaque niveau d'énergie positive, le système hamiltonien d'Armbruster–Guckenheimer–Kim (4.2) admet au moins 2 orbites périodiques si  $(a, b) \in L_2$ , 2 orbites périodiques si  $(a, b) \in R_1$ , et 6 orbites périodiques si  $(a, b) \in R_2$ .*

En particulier, le théorème 4.1.1 stipule que si  $(a, b) \notin L_1$  alors le système hamiltonien pour chaque niveau d'énergie positive admet des orbites périodiques et nous pouvons utiliser ces orbites périodiques particulières pour prouver notre deuxième résultat principal sur la non-intégrabilité au sens de Liouville du système d'AGK (4.2).

**Théorème 4.1.2** *Le système hamiltonien d'Armbruster–Guckenheimer–Kim (4.2) avec l'hamiltonien  $\mathcal{H}$  donné par (4.1) ne peut pas avoir une seconde première intégrale  $G$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que les gradients de  $\mathcal{H}$  et  $G$  sont linéairement indépendants en chaque point des orbites périodiques trouvées dans le théorème 4.1.1.*

La preuve du théorème 4.1.1. est basée sur la méthode de moyennisation pour le calcul des orbites périodiques, voir le chapitre 2. Et la preuve du théorème 4.1.2 est basée sur la méthode de Poincaré qui permet de prouver la non-intégrabilité au sens de Liouville–Arnold indépendamment de la classe de dérivabilité de la seconde première intégrale. La principale difficulté dans l'application de la méthode de non-intégrabilité de Poincaré à un système hamiltonien donné est de trouver pour un tel système des orbites périodiques ayant des multiplicateurs différents de 1. Pour appliquer la théorie de non-intégrabilité de Poincaré au système d'AGK, nous devons étudier certaines des orbites périodiques de ce système et de calculer leurs multiplicateurs.



## 4.2 Preuve du Théorème 4.1.1

Pour appliquer le théorème 2.1.1, nous avons besoin d'un petit paramètre  $\varepsilon$ . On considère le changement de variables

$$(x, p_x, y, p_y) \mapsto (X, p_X, Y, p_Y) = (x/\sqrt{\varepsilon}, p_x/\sqrt{\varepsilon}, y/\sqrt{\varepsilon}, p_y/\sqrt{\varepsilon}).$$

Avec les nouvelles variables, le système (4.2) devient

$$\begin{cases} \dot{X} = p_X, \\ \dot{p}_X = -X + \varepsilon(aX^3 + (a+b)XY^2), \\ \dot{Y} = p_Y, \\ \dot{p}_Y = -Y + \varepsilon((a+b)X^2Y + aY^3). \end{cases} \quad (4.3)$$

Ce système est encore hamiltonien avec l'hamiltonien

$$\frac{1}{2}(P_X^2 + P_Y^2 + X^2 + Y^2) - \varepsilon\frac{a}{4}(X^2 + Y^2)^2 - \varepsilon\frac{b}{2}X^2Y^2. \quad (4.4)$$

On remarque que le système (4.3) n'est pas sous la forme normale pour appliquer la méthode de moyennisation, voir l'équation différentielle (2.1).

On considère le changement de variables

$$X = r \cos \theta, \quad p_X = r \sin \theta, \quad Y = \rho \cos(\theta + \alpha), \quad p_Y = \rho \sin(\theta + \alpha).$$

Rappelons que ce changement de variables est possible lorsque  $r > 0$  et  $\rho > 0$ . En outre, ce changement de variables apparaît dans le système avec les variables périodiques  $\theta$  et  $\alpha$ . Plus tard la variable  $\theta$  sera utilisée pour obtenir la périodicité nécessaire à l'application de la méthode de moyennisation.

L'énergie du hamiltonien avec ces nouvelles variables devient

$$H = \frac{1}{2}(r^2 + \rho^2) - \frac{1}{4}\varepsilon a(r^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \cos^2(\theta + \alpha))^2 - \frac{1}{2}\varepsilon b r^2 \rho^2 \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha). \quad (4.5)$$

et les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon r \sin \theta \cos \theta (ar^2 \cos^2 \theta + (a+b)\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha)), \\ \dot{\theta} = -1 + \varepsilon(ar^2 \cos^4 \theta + (a+b)\rho^2 \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha)), \\ \dot{\rho} = \varepsilon \rho \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \alpha) ((a+b)r^2 \cos^2 \theta + a\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha)), \\ \dot{\alpha} = \varepsilon(-ar^2 \cos^4 \theta + (a+b)(r^2 - \rho^2) \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha) + a\rho^2 \cos^4(\theta + \alpha)). \end{cases} \quad (4.6)$$

Cependant, les dérivées du membre de gauche de ces équations sont par rapport à la variable  $t$ , qui n'est pas périodique. Alors on passe à la variable  $\theta$  comme une variable indépendante et on désigne par prime, la dérivée par rapport à  $\theta$ . Alors, le

## Chapitre 4. Les orbites périodiques du système hamiltonien avec potentiel d'Armbruster-Guckenheimer-Kim

---

système (4.6) devient

$$\begin{cases} r' = \frac{\varepsilon r \sin \theta \cos \theta (ar^2 \cos^2 \theta + (a+b)\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha))}{-1 + ar^2 \varepsilon \cos^4 \theta + (a+b)\varepsilon \rho^2 \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha)}, \\ \rho' = \frac{\varepsilon \rho \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \alpha) ((a+b)r^2 \cos^2 \theta + a\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha))}{-1 + ar^2 \varepsilon \cos^4 \theta + (a+b)\varepsilon \rho^2 \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha)}, \\ \alpha' = \frac{\varepsilon (-ar^2 \cos^4 \theta + (a+b)(r^2 - \rho^2) \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha) + a\rho^2 \cos^4(\theta + \alpha))}{-1 + ar^2 \varepsilon \cos^4 \theta + (a+b)\varepsilon \rho^2 \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha)}. \end{cases}$$

Bien sûr, ce système n'a plus que trois équations car nous n'avons pas besoin de l'équation de  $\theta$ . Si on écrit le système précédent sous la forme d'une série de Taylor en puissance de  $\varepsilon$ , on obtient

$$\begin{cases} r' = -\varepsilon r \sin \theta \cos \theta (ar^2 \cos^2 \theta + (a+b)\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha)) + O(\varepsilon^2), \\ \rho' = -\varepsilon \rho \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \alpha) ((a+b)r^2 \cos^2 \theta + a\rho^2 \cos^2(\theta + \alpha)) + O(\varepsilon^2), \\ \alpha' = \varepsilon (ar^2 \cos^4 \theta - (a+b)(r^2 - \rho^2) \cos^2 \theta \cos^2(\theta + \alpha) - a\rho^2 \cos^4(\theta + \alpha)) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (4.7)$$

Maintenant le système (4.7) est  $2\pi$ -périodique en la variable  $\theta$ . On appliquera le théorème 2.1.1 au niveau hamiltonien  $H = h$  pour  $h > 0$ , et on résout l'équation  $H = h$  pour  $\rho$  on obtient

$$\rho = \sqrt{2h - r^2}, \quad (4.8)$$

Puis en substituant  $\rho$  dans (4.7) et en développant en séries entières de  $\varepsilon$ , on obtient les deux équations différentielles

$$\begin{cases} r' = \varepsilon r \sin \theta \cos \theta ((a+b)(r^2 - 2h) \cos^2(\alpha + \theta) - ar^2 \cos^2 \theta) + O(\varepsilon^2), \\ \alpha' = \varepsilon (2(a+b)(h - r^2) \cos^2 \theta \cos^2(\alpha + \theta) + a(r^2 - 2h) \cos^4(\alpha + \theta) + ar^2 \cos^4 \theta) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (4.9)$$

Il est clair que le système (4.9) satisfait les hypothèses du théorème 2.1.1 et il a la forme (2.1) avec  $F_1 = (F_{11}, F_{12})$ , donnée par

$$\begin{aligned} F_{11} &= r \sin \theta \cos \theta ((a+b)(r^2 - 2h) \cos^2(\alpha + \theta) - ar^2 \cos^2 \theta), \\ F_{12} &= 2(a+b)(h - r^2) \cos^2 \theta \cos^2(\alpha + \theta) + a(r^2 - 2h) \cos^4(\alpha + \theta) + ar^2 \cos^4 \theta. \end{aligned}$$

On remarque que  $F_1$  est  $2\pi$ -périodique par rapport à la variable  $\theta$ , la variable indépendante du système (4.9). Alors nous avons  $f_1(r, \alpha)$  définie comme suit

$$f_1(r, \alpha) = (f_{11}(r, \alpha), f_{12}(r, \alpha)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F_{11}, F_{12}) d\theta,$$

## Chapitre 4. Les orbites périodiques du système hamiltonien avec potentiel d'Armbruster-Guckenheimer-Kim

---

où

$$f_{11}(r, \alpha) = -\frac{1}{8}r(a+b)(r^2 - 2h)\sin(2\alpha),$$

et

$$f_{12}(r, \alpha) = \frac{1}{4}(h - r^2)((a+b)\cos(2\alpha) - a + 2b).$$

Il faut trouver les zéros  $(r^*, \theta^*)$  de  $f_1(r, \theta)$ , et vérifier que le jacobien en ces points n'est pas nul, c'est-à-dire

$$\det \left( \frac{\partial(f_{11}, f_{12})}{\partial(r, \alpha)} \Big|_{(r, \alpha)=(r^*, \theta^*)} \right) \neq 0. \quad (4.10)$$

de  $f_{11}(r, \alpha) = 0$  on obtient  $r = 0$  ou,  $r = \pm\sqrt{2h}$  ou  $\alpha = 0, \pi/2, 3\pi/2, \pi$ . Les solutions  $r = 0$  et  $r = -\sqrt{2h}$  ne sont pas bonnes, car  $r > 0$ . Ainsi, les bonnes solutions de  $f_{11}(r, \alpha) = 0$  sont  $r = \sqrt{2h}$  et  $\alpha = 0, \pi/2, 3\pi/2, \pi$ . Maintenant, nous cherchons les solutions de  $f_{12}(r, \alpha) = 0$ . On obtient six solutions possibles  $(r^*, \alpha^*)$  avec  $r^* > 0$  :

$$\begin{aligned} s_1 &= (\sqrt{h}, 0), & s_2 &= (\sqrt{h}, \pi), \\ s_3 &= (\sqrt{h}, \pi/2), & s_4 &= (\sqrt{h}, 3\pi/2), \\ s_5 &= (\sqrt{2h}, \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{a-2b}{a+b}\right)), \\ s_6 &= (\sqrt{2h}, 2\pi - \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{a-2b}{a+b}\right)), \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec des valeurs correspondantes de  $\rho$  données par (4.8) tendant vers  $\sqrt{h}$  pour les solutions  $s_1, s_2, s_3, s_4$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  et tendant vers 0 pour les solutions  $s_5, s_6$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Bien sûr dans (4.11) pour les solutions  $s_5$  et  $s_6$ , on suppose que  $-1 \leq (a-2b)/(a+b) \leq 1$ . Ces inégalités n'apparaissent que dans les deux secteurs fermés limités par les deux droites  $b = 0$  et  $b = 2a$  moins l'origine et contenus dans les quadrants  $\{(a, b) : a > 0, b > 0\}$  et  $\{(a, b) : a < 0, b < 0\}$  du plan  $(a, b)$ .

Enfin, nous calculons le jacobien (4.10), c'est-à-dire

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4}(a+b)\pi(2h - 3r^2)\sin(2\alpha) & -\frac{1}{2}(a+b)\pi r(r^2 - 2h)\cos(2\alpha) \\ -\pi r(-a + 2b + (a+b)\cos(2\alpha)) & (-a-b)\pi(h - r^2)\sin(2\alpha) \end{vmatrix}, \quad (4.12)$$

le Jacobien (4.12) en  $s_1$  et  $s_2$  est

$$\frac{3}{8}h^2b(a+b), \quad (4.13)$$

le Jacobien (4.12) en  $s_3$  et  $s_4$  est

$$\frac{1}{8}h^2(2a-b)(a+b), \quad (4.14)$$

## Chapitre 4. Les orbites périodiques du système hamiltonien avec potentiel d'Armbruster-Guckenheimer-Kim

---

et le jacobien en  $s_5$  et  $s_6$  est

$$\frac{3}{4}h^2b(b-2a), \quad (4.15)$$

on remarque que pour  $h \neq 0$  le jacobien est non nul en  $s_1$  et  $s_2$  lorsque  $b(a+b) \neq 0$ , le jacobien est non nul en  $s_3$  et  $s_4$  lorsque  $(2a-b)(a+b) \neq 0$ , et le jacobien est non nul en  $s_5$  et  $s_6$  lorsque  $b(b-2a) \neq 0$ .

En résumant, par le théorème 2.1.1, les solutions  $s_1$  et  $s_2$  de  $f(r^*, \alpha^*) = 0$  fournissent deux solutions périodiques du système (4.9) (et par conséquent du système hamiltonien (4.3) au niveau  $h > 0$ ) si  $b \neq 0$  et  $b = 2a$ . De même, les solutions  $s_3$  et  $s_4$  fournissent deux solutions périodiques du système (4.9) si  $a \neq 0$  et  $b = 0$ . Et, si  $b(a+b)(2a-b) \neq 0$  les solutions  $s_i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  de  $f_1 = 0$  fournissent au moins six solutions périodiques pour le système hamiltonien (4.3).

On remarque que si  $a + b = 0$ , alors on n'a pas de solution périodique donnée par  $s_i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  car soit leur jacobien est nul (pour  $i = 1, 2, 3, 4$ ) ou ils ne sont pas définis (pour  $i = 5, 6$ , voir (4.11)).

### 4.3 Preuve du Théorème 4.1.2

On suppose que l'on est sous les hypothèses du théorème 4.1.1, et que l'une des six solutions périodiques établies correspondant aux solutions  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5$  et  $s_6$  existe, et que leurs jacobiennes associées (4.13), (4.14) et (4.15) sont non nuls. Ainsi, les multiplicateurs correspondants ne sont pas tous égaux à 1. Par conséquent, sous les hypothèses du théorème 4.1.1, du théorème 4.4.1, il découle du théorème 4.1.2.

### 4.4 Orbites périodiques et intégrabilité au sens de Liouville-Arnold

On rappelle qu'un système hamiltonien avec hamiltonien  $H$  à deux degrés de liberté est intégrable au sens de Liouville-Arnold s'il admet une première intégrale  $G$  indépendante de  $H$  (c'est-à-dire les vecteurs gradients de  $H$  et  $G$  sont indépendants en tous les points du espace des phases sauf peut-être dans un ensemble de mesure de Lebesgue nulle), et en involution avec  $H$  (c'est-à-dire que le crochet de Poisson de  $H$  et  $G$  est nulle). Le théorème de Liouville-Arnold décrit la dynamique des systèmes hamiltoniens intégrables, voir pour plus de détails Abraham et Marsden [1], Arnold et al. [3] et la section. 7.1.2 d'Arnold et al. [3], respectivement.

On considère le système différentiel autonome

$$\dot{x} = f(x), \quad (4.16)$$

où  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $U$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Nous écrivons sa solution générale sous la forme  $\phi(t, x_0)$  avec  $\phi(0, x_0) = x_0 \in U$  et  $t$  appartient à son intervalle maximal de définition.

## Chapitre 4. Les orbites périodiques du système hamiltonien avec potentiel d'Armbruster-Guckenheimer-Kim

---

On dit que  $\phi(t, x_0)$  est  $T$ -périodique avec  $T > 0$  si et seulement si  $\phi(T, x_0) = x_0$  et  $\phi(t, x_0) \neq x_0$  pour  $t \in (0, T)$ . L'orbite périodique associée à la solution périodique  $\phi(t, x_0)$  est  $\gamma = \{\phi(t, x_0), t \in [0, T]\}$ . L'équation variationnelle associée à la solution  $T$ -périodique  $\phi(t, x_0)$  est

$$\dot{M} = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=\phi(t, x_0)} \right) M, \quad (4.17)$$

où  $M$  est une matrice  $n \times n$ . La matrice de monodromie associée à la solution  $T$ -périodique  $\phi(t, x_0)$  est la solution  $M(T, x_0)$  de (4.17) qui vérifie  $M(0, x_0)$  est la matrice identité. Les valeurs propres  $\lambda$  de la matrice de monodromie associée à la solution périodique  $\phi(t, x_0)$  sont appelées les multiplicateurs de l'orbite périodique.

Pour un système différentiel autonome, l'un des multiplicateurs est toujours égal à 1 et son vecteur propre correspondant est tangent à l'orbite périodique.

Une solution périodique d'un système hamiltonien autonome a toujours deux multiplicateurs égaux à 1. Le premier multiplicateur est égal à 1 parce que le système hamiltonien est autonome, et le deuxième égal à 1 parce que la première intégrale est donnée par l'hamiltonien.

**Théorème 4.4.1** *Si un système hamiltonien à deux degrés de liberté et hamiltonien  $H$  est intégrable au sens de Liouville–Arnold et  $G$  est une seconde intégrale première telle que les gradients  $H$  et  $G$  sont linéairement indépendants en chaque point de l'orbite périodique du système, alors tous les multiplicateurs de cette orbite périodique sont égaux à 1.*

Le théorème 4.4.1 est dû à Poincaré [24]. elle nous donne un outil pour étudier la non-intégrabilité au sens de Liouville–Arnold, indépendamment de la classe de dérivabilité de la seconde intégrale première. Le principal problème pour appliquer ce théorème est de trouver des orbites périodiques ayant des multiplicateurs différents de 1.

---

---

## Conclusion générale

La méthode de moyennisation est une technique de perturbation réussie dont l'importance lui permet d'être utilisée pour étudier l'existence et la stabilité des solutions périodiques pour les systèmes d'équations différentielles ordinaires. C'est un outil puissant qui a prouvé son efficacité à plusieurs reprises dans la littérature en examinant l'existence et la stabilité de la périodicité des systèmes dynamiques, tant en sciences physiques qu'en sciences de l'ingénieur. Dans ce travail l'application de cette méthode aux systèmes hamiltoniens en dimension 4, nous permis de trouver analytiquement les orbites périodiques.

Notre travail futur si dieu le veut, consistera à l'application de méthode de la moyennisation pour étudier des solutions périodiques d'autres systèmes hamiltoniens en dimension supérieur à 4.

---

---

## Bibliographie

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden. Foundations of Mechanics. Benjamin, Reading (1978).
- [2] D. Armbruster, J. Guckenheimer, S. Kim. Chaotic dynamics in systems with square symmetry. *Phys. Lett. A* 140, 416 – 420 (1989).
- [3] V. I. Arnold, V. Kozlov, A. Neishtadt. Dynamical Systems III. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics, 3rd edn. Encyclopaedia of Mathematical Science. Springer, Berlin (2006).
- [4] M. Bobiński and H. Zoladek, A Counterexample to a multidimensional version of the Weakened Hilbert’s 16th Problem. *Moscow Mathematical Journal* 7, 1 – 20 (2007).
- [5] A. Buica, J. P. Francoise and J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, *Comm. on Pure and Applied Analysis*, 6, 103 – 111 (2007).
- [6] M. T. de Bustos, J. L. G. Guirao and J. A. Vera, The spatial Hill lunar problem : periodic solutions emerging from equilibria. *Dynamical Systems*, 32, 340 – 353 (2017).
- [7] L. Chen and M. Wang, Relative position and number of limit cycles of a quadratic differential system. (Chinese), *Acta Mathematica Sinica* 22, 751 – 758 (1979).
- [8] C. J. Christopher, Estimating Limit Cycles Bifurcations from Centers. in : *Trends in Mathematics : Differential Equations with Symbolic Computation*, Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland, pp. 23 – 35, (2006).
- [9] C. J. Christopher and N.G. Lloyd, Polynomial Systems : A Lower Bound for the Hilbert Numbers. *Proceedings : Mathematical and Physical Sciences* 450, 219 – 224 (1995).
- [10] J. M. Ferrándiz, J. L. G. Guirao and J. A. Vera, A note on the periodic orbits of a self excited rigid body. *Mechanics Research Communications*, 56, 50 – 52 (2014).
- [11] J. L. G. Guirao, J. Llibre and J. A. Vera, Generalized van der Waals Hamiltonian : Periodic orbits and  $C^1$  non-integrability, *Physical Review E*, 85, 1 – 5 (2012).

## Bibliographie

---

- [12] J. L. G. Guirao, J. Llibre and J. A. Vera, Periodic solutions induced by an upright position of small oscillations of a sleeping symmetrical gyrostat, *Nonlinear Dynamics*, 73, 417 – 425 (2013).
- [13] J. L. G. Guirao, J. Llibre and J. A. Vera, On the dynamics of the rigid body with a fixed point : periodic orbits and integrability. *Nonlinear Dynamics*, 74, 327 – 333 (2013).
- [14] J. L. G. Guirao, M. A. López and J. A. Vera,  $C^1$  nonintegrability of a hydrogen atom in a circularly polarized microwave field, *Central European Journal of Physics*, 10, 742 – 748 (2012).
- [15] J. L. G. Guirao, J. A. Vera and B. A. Wade, On the periodic solutions of a rigid dumbbell satellite in a circular orbit, *Astrophysics and Space Science*, 346, 437 – 442 (2013).
- [16] L. Jiménez-Lara, J. Llibre. Periodic orbits and non-integrability of Henon-Heiles system. *J. Phys. A, Math. Theor.* 44, 205103 – 14 (2011a).
- [17] L. Jiménez-Lara, J. Llibre. Periodic Orbits and non-integrability of generalized classical Yang-Mills Hamiltonian system vol. 52 *pp.* 032901 – 9 (2011b).
- [18] J. Li, H. S. Y. Chan and K.W. Chung, Some Lower Bounds for  $H(n)$  in Hilbert's 16th Problem. *Qualitative Theory of Differential Equations* 3, 345 – 360 (2003).
- [19] C. Li, C. Liu and J. Yang, A cubic system with thirteen limit cycles. *Journal of Differential Equations* 246, 3609 – 3619 (2009).
- [20] J. Li, M. Zhang and S. Li, Bifurcations of limit cycles in a  $Z_2$ -equivariant planar polynomial vector field of degree 7. *International Journal of Bifurcation and Chaos* 16, 925 – 943 (2006).
- [21] J. Llibre and L. Roberto, On the periodic orbits of the third-order differential equation  $x''' - \mu x'' + x' - \mu x = \varepsilon F(x, x', x'')$ , *Applied Mathematics Letters*, 26, 425 – 430 (2013).
- [22] J. Llibre and L. Roberto, Periodic orbits and non integrability of Armbruster-Guckenheimer-Kim potential, *Astrophysics and Space Science*, 343, 69 – 74 (2013).
- [23] I. G. Malkin, Some problems of the theory of nonlinear oscillations, (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.–Teor. Lit., Moscow, (1956).
- [24] H. Poincaré. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Vol. I. Gauthier-Villars, Paris (1899).
- [25] M. Roseau, Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité, (French) Springer Tracts in Natural Philosophy, Springer-Verlag, Berlin-New York, 8, (1966).
- [26] R. Roussarie, Bifurcations of Planar Vector Fields and Hilbert's Sixteenth Problem. *Progress in Mathematics* 164, Birkhauser-Verlag, Basel, (1998).
- [27] Shi Songling, A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems. *Scientia Sinica* 23, 154 – 158 (1980).



## Bibliographie

---

- [28] Y. Wu, Y. Gao and M. Han, On the number and distributions of limit cycles in a quintic planar vector field. *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, 18, 1939 – 1955 (2008).
- [29] F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems* (Universitext). Springer, Berlin (1991).
- [30] S.Wang and P. Yu, Bifurcation of limit cycles in a quintic Hamiltonian system under a sixth-order perturbation. *Chaos, Solitons and Fractals* 26(5), 1317 – 1335 (2005).
- [31] S. Yu. Ilyashenko, Centennial history of Hilbert's 16th Problem. *Bulletin of the American Mathematical Society (N.S.)* 39, 301 – 354 (2002).
- [32] Zhang Zhi-fen, Ding Tong-ren, Huang Wen-zoa, Dong Zhen-xi. *Qualitative Theory of Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, (1992).