République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Echahid Cheick Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude

Pour l'obtention du diplôme de MASTER,

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème:

Théorèmes du point fixe commun pour plusieurs applications dans un espace b-métrique généralisé

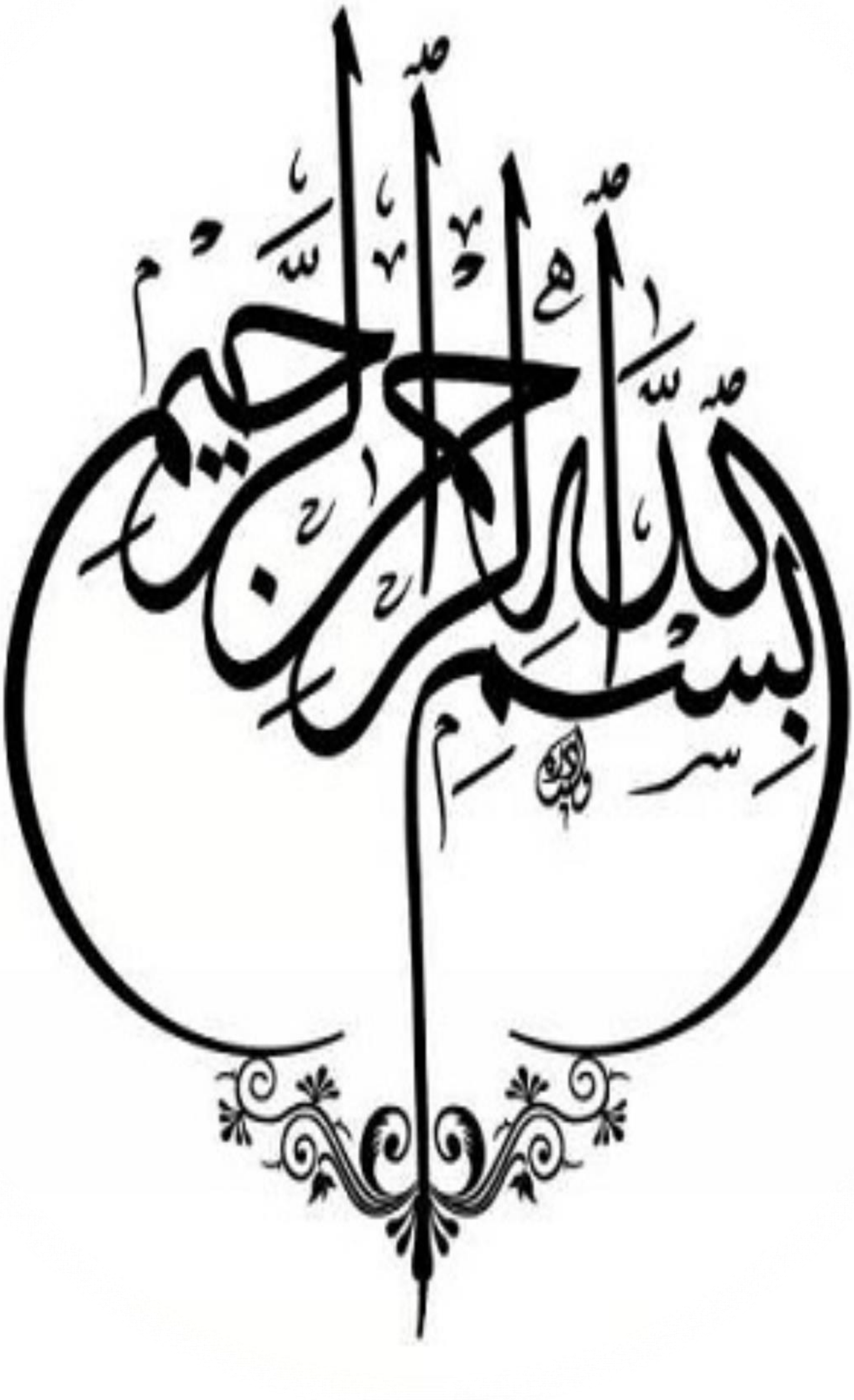
Présenté Par:

TORCHANE Mohamed cherif

Devant le jury:

Dr. Merghadi Faycal	Prof	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Dr. Berrah Khaled	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Dr. Bazine Safia	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance :04/06/2023


بسم الله الرحمن الرحيم

الإهداء

الحمد لله المعطاء المرجوّ سخاؤه، خالق القضاء المضمون بقاؤه

رافع السماء المستحق فداؤه،مشرف العلم والعلماء الذي شمل العالمين إنعامه

وعمّ جميع المخلوقات إكرامه وبعد:

فأهدي ثمرة سنيني وجهدها

رفقائي أولًا وثانيًا وثالثًا وعاشرًا وأخيرًا... ماما الغالية أخواتي الحبيبات

إلى قصيدة القلوب المشهود فضلها، مفتاح الدروب البهي ظلها، بطلة الاحلام المستحيل مثلها، وعروس الأيام المكتوب عدلها، هدية الحياة المرجو نيلها، هي ربيع البيت وأغنية أركانه،ضحكة ليله وبهجة نهاره

أمي الغالية أدامك الله تاج فوق رأسي

إلى من رصّع فينا معنى الأدب، وجعل معدننا قح الذهب، وواصل المسيرة معنا من عز الشتاء إلى حر الصهيد،وضحى بسنينه فأعطى ووهب، و غاص لأجلنا في معنى التعب، مهما حييت لن أجد لمثله قلبا محب، فعجبا له من أب تقي وألف عجب.

أبي العظيم بعد الله سبحانه

إلى خواتي كل بإسمه ومقامه

فائق الإحترام و التقدير

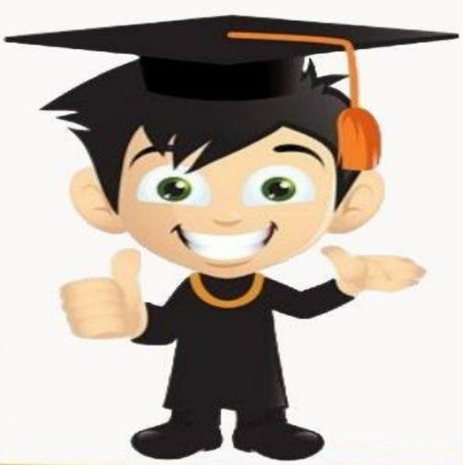
Remerciement

Avant tout Je remercie Allah car à lui seul revient les louanges. le tout puissant pour la force, la volonté et la patience qu'il mía donnée pour réaliser ce travail. Je tiens à remercier ici tous ceux qui ont contribué à ce que je parvienne au bout de ce mémoire.

Je tiens à remercier chaleureusement mon encadreur. **Dr.BazineSafia**, pour ses précieux conseils qui ont mené à bien l'évolution de notre mémoire et ces motivations pour réaliser ce modeste travail.

Je voudrais aussi remercier chaleureusement chacun des membres du jury: Le **Dr.Merghadi Faycal** Qui m'a honoré en acceptant d'étre président de ce jury. J'exprime ma reconnaissance au **Dr.Berrah Khaled** pour avoir accepté de rapporter ce mémoire.

Avant de terminer, je tiens à dire merci à tous ceux qui mon soutien out participé à moral.



Résumé

Dans ce travail, on étudie quelques résultats sur l'existence et l'unicité du point fixe commun pour quatre opérateurs sur des espaces b-métriques généralisées qui ne sont pas nécessairement continue. Nous prouvons également que les mêmes résultats sont valables même si l'espace est muni de deux b-métriques.

Les mots clés: espace métrique, espace métrique généralisé, espace b-métrique, espace b-métrique généralisé, point fixe commun.

Abstract

In this work, we study some results on the existence and uniqueness of the common fixed point for four maps on generalized b-metric spaces that are not necessarily continuous. We also prove that the same results hold even if the space is endowed with two b-metrics.

Keywords: metric space, generalized metric space, b-metric space, generalized b-metric space, common fixed point.

ملخص

قمنا في هذا العمل بدراسة بعض النتائج حول وجود ووحدانية النقطة الثابتة المشتركة لأربع مؤثرات في فضاءات ب-مترية معممة دون إستعمال شرط الإستمرارية. بالإضافة إلى هذا أثبتنا أن نفس النتائج تكون محققة في الحالة التي يكون فيها عندنا مزودة ب-دالتي مسافة.

الكلمات المفتاحية: الفضاء المتري، الفضاء المتري المعمم، الفضاء ب-متري، الفضاء ب-متري المعمم، النقطة الثابتة المشتركة.

Table des matières

Introduction **2**

1 Préliminaires **5**

1.1 Quelques notions de base 5

1.1.1 L'espace métrique 5

1.1.2 La convergence et la continuité des suites 7

1.1.3 Complétude et compacité dans un espace métrique 8

1.1.4 Les applications contractantes 9

1.1.5 Théorème du point fixe de Banach 10

1.2 Quelques types de contractions 11

1.2.1 Contraction de Edelstien 11

1.2.2 Contraction de Rakotch 12

1.2.3 Contraction de Kannan 12

1.2.4 Contraction de Chatterjea 12

1.2.5 Contraction de Reich 13

1.2.6 Contraction de Hardy et Rogers 13

1.3 Compatibilité des applications 13

1.3.1 Les applications compatibles 13

1.3.2 Applications faiblement compatibles 14

2 Théorème du point fixe dans l'espace métrique généralisé **16**

2.1 Quelques définitions et notions de base 16

2.1.1 Espace métrique généralisé 16

2.1.2 Concepts de base 17

2.1.3 Convergence matricielle 20

2.2 Résultats principaux 21

2.2.1 Théorème du point fixe de Perov 21

2.2.2 Théorème du point fixe de Brouwer 22
2.2.3 Théorème du point fixe de Schauder 23
2.2.4 Théorème du point fixe de Krasnoselskii 24
2.3 Comparaison entre la norme vectorielle et la norme scalaire 26

3 Théorème du point fixe dans l'espace b-métrique généralisé **29**
3.1 L'espace b-métrique 29
3.1.1 Concepts de base 30
3.2 L'espace b-métrique généralisé 32
3.3 Théorème du point fixe dans l'espace b-métrique généralisé 33
3.3.1 Théorème du point fixe pour deux opérateurs sur un espace b-métrique généralisé 33
3.3.2 Théorème du point fixe pour deux opérateurs sur un espace b-métrique généralisé avec deux b-métriques 37
3.3.3 Théorème du point fixe pour quatre opérateurs sur un espace b-métrique généralisé 39
3.3.4 Théorème du point fixe pour quatre opérateurs sur un espace b-métrique généralisé avec deux b-métriques 43

Conclusion **46**

Bibliographie **47**

Introduction

La théorie du point fixe joue un rôle crucial dans de nombreuses branches des mathématiques ainsi que leurs applications. Elle est un bon mélange d'analyse, de la topologie et de la géométrie, les idées topologiques sont présentes dans presque tous les domaines des mathématiques d'aujourd'hui. Elle est intervient dans la résolution de plusieurs équations différentielles non linéaires, où elle fournit les méthodes pour les problèmes d'existence et d'unicité. De plus, le développement de la théorie de point fixe qui est la branche cardinale de l'analyse non linéaire a donné un grand effet sur l'avancement de l'analyse non linéaire. Dans les années 1950, l'analyse non linéaire a été développée comme une branche distincte des mathématiques par des mathématiciens comme Browder, comme une combinaison d'analyse fonctionnelle et d'analyse variationnelle.

Cependant, les premier résultats avaient déjà été obtenus dans les années 1920, les résultats non linéaires sont applicables à un large éventail domaines.

La théorie des points fixes traite des conditions qui garantissent l'existence de points x d'un ensemble E qui résolvent une équation d'opérateur $x = Nx$, où N est une transformation définie sur un ensemble E. L'ensemble solution d'un tel problème peut être vide, un ensemble fini, un ensemble infini dénombrable ou indénombrable.

Le siècle dernier a été l'âge d'or de cette théorie, en 1922, S. Banach a prouver un théorème qui portait sur l'existence et l'unicité d'un point fixe dans un espace métrique complet [36]. Ce théorème fut plus tard connu sous le nom de principe de contraction de Banach et fut étendu dans plusieurs directions.

L'une de ces directions de recherche impliquant les application dites de contractions généralisées. Les travaux les plus influents sont [29] de Perov 1964 qui montrent le principe de contraction de Banach dans des espaces métriques complets généralisés en utilisant le concept d'application de M-contraction où M est une matrice convergente vers zéro [39].

En 1989, Bakhtin [3] a introduit le concept d'espace b-métrique. Ensuite en 1993, Czerwik [14] a étendu les résultats des espaces b-métriques. La théorie du point fixe dans l'espace b-métrique est un domaine très dynamique dans la recherche mathématique. Pour cette raison, de nombreux chercheurs ont présenté la généralisation du célèbre théorème des points fixes de Banach dans l'espace b-métrique. Bota [8], Bazine [5], Boriceanu [6], Czerwik [15], Mehmet Kir [26], Pacurar [28] ont étendu le théorème des points fixes dans l'espace b-métrique.

L'un des aspects importants à étudier, concernant le théorème de point fixe commun dans l'espace b-métrique est d'obtenir les conditions nécessaires et suffisantes impliquant l'existence d'un point fixe commun.

Dans ce mémoire, nous nous intéressons à l'étude de ce théorème dans le cadre des espaces b-métriques généralisés, une généralisation des espaces métriques traditionnels qui permet une modélisation plus fine de certains phénomènes.

Dans le premier chapitre, on rappelle quelques notions mathématiques de base nécessaires à la compréhension de théorème du point fixe commun sur les espaces métriques. On y présente notamment les définitions d'un espace métrique ainsi que les fonctions contractantes.

Le deuxième chapitre est consacré à la théorie du point fixe dans les espaces métriques généralisés, où nous définissons les espaces métriques généralisés au sens de Perov et nous donnons quelques définitions et propriétés dans cet espace. Ensuite, nous avons introduit quelques outils de théorème de point fixe représentés dans : le théorème du point fixe de Perov, le théorème du point fixe de Brouwer, le théorème du point fixe de Schauder et le théorème du point fixe de Krasnoselskii.

Le troisième chapitre est consacré au théorème du point fixe commun pour plusieurs fonctions dans les espaces b-métriques généralisés. Nous présentons les théorèmes du point fixe commun pour plusieurs fonctions, ainsi que leurs généralisations.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré à quelques définitions et des éléments basiques qui nous utiliseront dans la suite du mémoire.

1.1 Quelques notions de base

1.1.1 L'espace métrique

Définition 1.1.1 *[21] Un espace métrique (E, d) est un ensemble non vide E muni d'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ appelée distance ou métrique, vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) $\forall x, y \in E : d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(2) $\forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x)$ *(La symétrie),*

(3) $\forall x, y, z \in E : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(L'inégalité triangulaire).*

Exemple 1.1.1

(1) *L'ensemble des réels muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique.*

(2) *Soit x_i, y_i deux éléments de $\mathbb{R}^n$, chacune des expressions suivantes définit une distance sur $\mathbb{R}^n$:*

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\},$$

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (p \geq 1).$$

(3) *Soit* $C([0,1],\mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \ / \ f \quad continue\}$. *Si* $f, g \in C([0,1],\mathbb{R})$, *on pose :*

$$d_\infty(x,y) = \sup\{|f(t) - g(t)|\,,\, t \in [0,1]\}\,.$$

(4) *Soit* E *un ensemble quelconque, pour* $x, y \in E$ *on définie :*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 \ si \ x \neq y, \\ 0 \ si \ x = y, \end{cases}$$

on l'appelle métrique discrète.

Définition 1.1.2 *[21] Soit* (E,d) *un espace métrique. On définit :*

(1) *Une boule ouverte de centre* $x_0 \in E$ *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble :*

$$B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\}.$$

(2) *Une boule fermée de centre* $x_0 \in E$ *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble :*

$$B_f(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\}.$$

(3) *Une sphère de centre* $x_0 \in E$ *et de rayon* $r > 0$ *l'ensemble :*

$$S(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) = r\}.$$

Remarque 1.1.1

1. *On a* $B_f(x_0, r) = B(x_0, r) \cup S(x_0, r)$.
2. *Toute boule contient son centre et par conséquent est non vide.*

Définition 1.1.3 *[21] Soit* (E,d) *un espace métrique.*

(1) *On dit que* O *est ouvert dans* E*, si pour tout* x *dans* O *il existe un* $r > 0$ *tel que* $B(x,r) \subset O$.

(2) F *est une partie fermé dans* E*, si son complément* $E \backslash F$ *est ouvert dans* E.

(3) *On dit qu'un ensemble* $V \subset E$ *est un voisinage de* $x \in E$*, s'il existe une boule ouverte centrée en* x *inclue dans* V *tel que :*

$$\upsilon \in V(x) \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \subset \upsilon.$$

1.1.2 La convergence et la continuité des suites

Définition 1.1.4 (Application continue) *[21] Soit (E, d) et $(E^{'}, d^{'})$ deux espaces métrique et soit $a \in E$, on dit que $f : E \to E^{'}$ est une application continue au point a si :*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ d(x, a) < \delta \Longrightarrow d^{'}(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

Définition 1.1.5 (Continuité sur un ensemble) *[21] On dit que $f : (E, d) \to (E^{'}, d^{'})$ est continue sur E si elle est continue en tout point de E.*

Définition 1.1.6 (Suite de Cauchy) *[21] Une suite $\{u_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ dans un espace métrique (E, d) est dite de Cauchy si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq p(\varepsilon) : d(u_p, u_q) < \varepsilon,$$

c'est à dire :

$$\lim_{p,q \to +\infty} d(u_p, u_q) = 0.$$

Exemple 1.1.2 *Soit dans $(\mathbb{R}, |.|)$ une suite $\{u_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ définie par :*

$$u_p = \frac{1}{p}.$$

Soit $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$:

$$\begin{aligned} d(u_p, u_q) &= \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right|, \\ &= \left|\frac{p-q}{pq}\right|, \\ &\leq \frac{p}{pq}, \\ &\leq \frac{1}{q}, \end{aligned}$$

alors :

$$d(u_p, u_q) \leq \lim_{q \to +\infty} \frac{1}{q} = 0,$$

donc $\{u_p\}$ est une suite de Cauchy.

Définition 1.1.7 (Suite convergente) *[21] Soit (E, d) un espace métrique et $\{u_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ une suite dans E. On dit que cette suite converge vers $u^* \in E$ si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall p \geq p(\varepsilon) : d(u_p, u^*) < \varepsilon,$$

on note alors :

$$\lim_{p\to+\infty} u_p = u^*, \text{ ou encore } u_p \to u^*, \text{ si } p \to +\infty.$$

Proposition 1.1.1 *Toute suite convergente est de Cauchy, l'inverse est généralement faux.*

Preuve. Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{R}$ qui converge vers $a \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_p - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ pour tout $p \geq N$. Alors, pour $p, q \geq N$ on a :

$$|u_p - u_q| < |u_p - a| + |u_q - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Exemple 1.1.3 *Soit la suite $\{u_p\}$ dans l'espace métrique $(\mathbb{R} - \{1\}, |.|)$, tel que $u_p = \frac{p}{p+1}$. On a $\lim\limits_{p\to+\infty} u_p = 1 \notin \mathbb{R} - \{1\}$, donc la suite $\{u_p\}$ diverge.*
Soit $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$:

$$\begin{aligned} d(u_p, u_q) &= \left|\frac{p}{p+1} - \frac{q}{q+1}\right|, \\ &= \left|\frac{p-q}{(p+1)(q+1)}\right|, \\ &\leq \frac{p}{p(q+1)}, \\ &\leq \frac{1}{q+1}, \end{aligned}$$

alors $\lim\limits_{q\to+\infty} \frac{1}{q+1} = 0$. D'ou $\lim\limits_{p,q\to+\infty} d(u_p, u_q) = 0$, donc la suite $\{u_p\}$ est de Cauchy.

1.1.3 Complétude et compacité dans un espace métrique

Définition 1.1.8 (Espace métrique complet) *[21] Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

Exemple 1.1.4 *[21] 1) $\mathbb{R}$ est complet. En effet, si (u_p) est une suite de Cauchy, alors (u_p) est bornée et donc ses éléments sont dans un intervalle compact $[a, b]$, (u_p) admet donc une valeur d'adhérence et donc elle est convergente.*

2) $\mathbb{C}$ *est complet.*

3) L'intervalle $]0,1[$, *sous-espace de* $\mathbb{R}$, *n'est pas complet. Il suffit de considérer* $u_n = \frac{1}{n}$.

Définition 1.1.9 (Espace métrique compact) *[21] Un espace métrique* (E, d) *est dit compact si toute suite d'éléments de* (E, d) *admet une suite extraite convergeant vers un point de* E. *Une partie* A *de* E *est dite compacte si le sous-espace métrique* (A, d) *est compact.*

Proposition 1.1.2 *[21] On a :*

1. *Si* A *est un sous-espace complet dans* E *métrique, alors* A *est fermé.*
2. *Si* A *est un sous-espace fermé de* E *métrique complet alors* A *est complet.*

Preuve.

1. Montrons que $\overline{A} \subset A$. Soit $a \in \overline{A}$, comme E est un espace métrique, il existe une suite (u_n) de points de A tel que $u_n \to a$ dans E. Donc (u_n) est une suite de Cauchy dans E, donc une suite de Cauchy dans A (car tous les $u_n \in A$) et comme A est complet, alors $u_n \to a' \in A$. Maintenant (u_n) converge vers a et a' dans E implique $a = a'$ (à cause de l'unicité de la limite). Comme $a' \in A$, on a $a \in A$, et par conséquent A est fermé.
2. Soit (u_n) une suite de Cauchy dans A, donc (u_n) est de Cauchy dans E complet, donc (u_n) convergente vers a dans E. Par ailleurs comme $u_n \in A$ fermé et $u_n \to a$, alors $a \in A$. Finalement $u_n \to a$ dans A et donc A est complet.

■

1.1.4 Les applications contractantes

Définition 1.1.10 (Application Lipschitzienne) *[11] Soient* (E, d) *et* (E', d') *deux espaces métriques, on dit que l'application* $T : E \to E'$ *est lipschitzienne ou* ($k-$ *Lipschitzienne) s'il existe une constante* $k \in \mathbb{R}^+$ *tel que :*

$$\forall x, y \in E,\ d'(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

Proposition 1.1.3 *Une application* $T : E \to E$ *est* $k-$*lipchitzienne est uniformément continue.*

Preuve. Sachant que $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ pour un $k > 0$ donné, il suffit de prendre $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$, il s'ensuit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \frac{\varepsilon}{k}, d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{k},$$

$$\Longrightarrow d\left(Tx,Ty\right) \leq kd\left(x,y\right),$$
$$\Longrightarrow d\left(Tx,Ty\right) \leq k\frac{\varepsilon}{k},$$
$$\Longrightarrow d\left(Tx,Ty\right) \leq \varepsilon.$$

Donc T est uniformément continue. ■

Définition 1.1.11 (Application contractante) *[11]Soit (E,d) un espace métrique et soit l'application $T : E \to E$. On dit que T est contractante s'il existe une constante $k \in [0,1[$ telle que :*

$$\forall x,y \in E, d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq kd\left(x,y\right).$$

On pourra alors dire que T est $k-$contractante.

Définition 1.1.12 (Application contractive) *[11] Soit (E,d) un espace métrique, l'application $T : E \to E$ est dite contractive si :*

$$d(Tx,Ty) < d(x,y), \forall x,y \in E \text{ avec } x \neq y.$$

Remarque 1.1.2 *Notons que contraction $\Longrightarrow$ contractive $\Longrightarrow$ lipschitzienne.*

Définition 1.1.13 *[11] Soit (E,d) un espace métrique et $T : E \to E$ une application, on dit qu'un point $x \in E$ est un point fixe de T si et seulement si :*

$$T(x) = x.$$

1.1.5 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème du point fixe de Banach [4], connu aussi sous le nom du principe de contraction de Banach ou théorème du point fixe de Picard, est apparu pour la première fois en 1922 dans le cadre de la résolution d'une équation intégrale. Ce théoréme donne l'existence et l'unicité d'un point fixe pour une contraction sur un espace métrique complet.

Théorème 1.1.1 *[4] Soit (E,d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application contractante. Alors il existe un unique $u^* \in E$ tel que $T(u^*) = u^*$.*
De plus, toute suite d'éléments de E vérifiant la récurrence $u_{n+1} = T\left(u_n\right)$ vérifie la majoration :

$$d(u_n,u^*) \leq \frac{k^n}{1-k}d(u_0,u_1),$$

donc T converge vers u^*.

Preuve.

1) Existence : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in E, \\ u_{n+1} = Tu_n,\, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace métrique complet E. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d(u_n, u_{n+p}) &\leq \sum_{n=0}^{p-1} d(u_{n+q}, u_{n+q+1}) \leq \sum_{n=0}^{p-1} k^{n+q} d(u_0, u_1) \\ &\leq k^n \sum_{n=0}^{p-1} k^q d(u_0, u_1) \leq k^n \left(\frac{1-k^p}{1-k} \right) d(u_0, u_1) \\ d(u_n, u_{n+p}) &\leq \frac{k^n}{1-k} d(u_0, u_1). \end{aligned}$$

Comme $0 < k < 1$, on a $k^n \to 0$ quand $n \to +\infty$ et il en résulte immédiatement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge vers une limite u^*, comme T est continue on a :

$$u^* = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} T\left(u_{n+1}\right) = T\left(\lim_{n\to\infty} u_{n+1}\right) = T\left(u^*\right).$$

Donc u^* est un point fixe de T.

2) L'unicité : Supposons que $\alpha, \beta \in E$ deux points fixes de T tel que $\alpha \neq \beta$.

Donc $T(\alpha) = \alpha$, $T(\beta) = \beta$, alors :

$$d\left(\alpha, \beta\right) = d\left(T\left(\alpha\right), T\left(\beta\right)\right) \leq kd\left(\alpha, \beta\right),\; 0 < k < 1.$$

Par conséquent, $d(\alpha, \beta) = 0$ ce qui entraîne $\alpha = \beta$.

■

1.2 Quelques types de contractions

1.2.1 Contraction de Edelstien

Dans l'année 1962, Edelstein [17] a prouvé la version suivante du principe de contraction de Banach.

Théorème 1.2.1 *[17] Soient (E,d) un espace métrique compact et $T : E \to E$ une application contractive.*
Alors T a un point fixe unique dans E.

1.2.2 Contraction de Rakotch

On sait que le principe de Banach a été généralisé par plusieurs auteurs. Par exemple, Rakotch [31], où il a remplacé la constante de la contraction par une fonction positive, décroissante à image dans l'intervalle $[0,1[$.

Théorème 1.2.2 *[31] Soit (E,d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application satisfaisant :*

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha d(x,y), \text{ pour chaque } x,y \in E.$$

où $\alpha : [0,+\infty[\to [0,1)$ est une fonction décroissante. Alors T admet un point fixe unique dans E.

1.2.3 Contraction de Kannan

Dans le théorème de Banach nous utilisons la continuité de l'application T pour prouver l'existence du point fixe. Ainsi, il est naturel de se poser la question suivante : existe-t-il des conditions de contraction qui n'obligent pas l'application T d'être continue ?

En 1968, Kannan [25] a répondu à cette question par l'affirmative et a prouvé un théorème de point fixe pour la condition de contraction suivante, qui est applée contraction Kannan.

Définition 1.2.1 *[25] Soient (E,d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application. On dit que T est une application de Kannan s'il existe $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, tel que :*

$$d(Tx,Ty) \leq \alpha \left[d(x,Tx) + d(y,Ty)\right], \text{ pour tout } x,y \in E.$$

Théorème 1.2.3 *[25] Soient (E,d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application de Kannan. Alors T admet un point fixe unique dans E.*

1.2.4 Contraction de Chatterjea

Définition 1.2.2 *[10] Soient (E,d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application. On dit que T est une application de Chatterjea s'il existe $\lambda \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$, tel que :*

$$d(Tx,Ty) \leq \lambda \left[d(Tx,y) + d(Ty,x)\right], \text{ pour tout } x,y \in E.$$

Théorème 1.2.4 *[10] Soient (E, d) un espace métrique complet et T :$E \to E$ une application de Chatterjea. Alors T admet un point fixe unique dans E.*

1.2.5 Contraction de Reich

Définition 1.2.3 *[32] Soient (E, d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application. On dit que T est une application de Reich s'il existe des nombres positifs $a, b, c \in [0, 1[$ avec $a+b+c < 1$, tels que :*

$$d(Tx, Ty) \leq ad(x, Tx) + bd(y, Ty) + cd(x, y), \text{ pour tout } x, y \in E.$$

Théorème 1.2.5 *[32] Soient (E, d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application de Reich. Alors T admet un point fixe unique dans E.*

1.2.6 Contraction de Hardy et Rogers

Définition 1.2.4 *[19] Soient (E, d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application. On dit que T est une application de Hardy et Rogers s'il existe des nombres positifs $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in [0, 1[$ avec $\sum_{i=1}^{5} a_i < 1$, pour tous $x, y \in E$ tels que :*

$$d(Tx, Ty) \leq a_1 d(x, y) + a_2 d(x, Tx) + a_3 d(y, Ty) + a_4 d(x, Ty) + a_5 d(y, Tx).$$

Théorème 1.2.6 *[19] Soient (E, d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application de Hardy et Rogers. Alors T admet un point fixe unique dans E.*

1.3 Compatibilité des applications

Jungck [23] a introduit et utilisé la commutativité de deux applications d'un espace métrique dans lui-même pour établir un point fixe commun. Cette dernière notion a été généralisée par Sessa [34] en introduisant la commutativité faible. En 1986 Jungck [22] a amélioré la propriété de commutativité et commutativité faible, à une nouvelle notion plus générale, c'est la propriété de compatibilité entre deux applications d'un espace métrique dans lui-même.

1.3.1 Les applications compatibles

Définition 1.3.1 (Sessa) *[34] Soit F et G deux applications d'un espace métrique (E, d) dans lui même. F et G sont dites commutatives si :*

$$FG(x) = GF(x), \text{ pour tout } x \in E.$$

F et G sont dits faiblement commutatives si et seulement si :

$$d(FG(x), GF(x)) \leq d(G(x), F(x)), \text{ pour tout } x \in E.$$

Définition 1.3.2 *[22] Soit $F, G : E \to E$ deux applications définies sur un espace métrique (E, d) dans lui même. On dit que F et G sont des applications compatibles sur E si :*

$$\lim_{n\to\infty} d(FG(x_n), GF(x_n)) = 0,$$

pour tout $\{x_n\}$ dans E telle que :

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} G(x_n) = x,$$

pour un certains points $x \in E$.

Remarque 1.3.1 *De toute évidence, les applications faiblement commutatives sont des compatibles, mais la réciproque est fausse en général [22].*

Exemple 1.3.1 *Soit $E = \mathbb{R}$ avec la métrique euclidienne d. On définie les applications :*
$F, G : E \to E$ par :

$$F(x) = \sqrt{x}, \text{ et } G(x) = 4x - 3\ .$$

Soit la suite $\{x_n\}$ définie pour tout $n \geq 1$ par $x_n = 1 + \frac{1}{n}$. On a :

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} G(x_n) = 1,$$

de plus

$$\lim_{n\to\infty} F(G(x_n)) = \lim_{n\to\infty} F(4x_n - 3) = 1,$$
$$\lim_{n\to\infty} G(F(x_n)) = \lim_{n\to\infty} G(\sqrt{x_n}) = 1.$$

Donc la paire (F, G) est compatible.

1.3.2 Applications faiblement compatibles

Définition 1.3.3 *[24] Soit F et G deux applications définies sur un ensemble E. On dit que F*

et G sont faiblement compatibles s'ils commutent aux points de coincidence; i.e, pour tout $u \in E$ satisfaisant $F(u) = G(u)$, alors $F(G(u)) = G(F(u))$.

Exemple 1.3.2 *[24] Soit $E = [0, 1]$ muni de la métrique euclidienne d. On définie les applications F, G par :*

$$F(x) = x^2, \;\; G(x) = \frac{x}{x-1} \text{ , pour tout } x \in E.$$

Le point 0 satisfaisant $F(0) = G(0) = 0$ et $F(G(0)) = G(F(0)) = 0$, alors la paire (F, G) est faiblement compatible.

Voici un exercice qui permet de mettre en pratique la différence entre les applications faiblement commutatives et les applications faiblement compatibles :

Exercice : Soit (E, d) un espace métrique complet et $f, g : E \to E$ deux applications telles que

$f(g(x)) = g(f(x))$ pour tout x dans E. On suppose en outre que f et g vérifient les propriétés suivantes :

$f(a) = b$ et $g(b) = c$, pour certains éléments a, b et c de E.

$f(b) = c$ et $g(c) = a$.

Montrez que f et g sont faiblement compatibles mais pas faiblement commutatives.

Solution : Pour montrer que f et g sont faiblement compatibles, il suffit de vérifier que l'ordre

d'application de f et g n'a pas d'importance. Soit x un élément arbitraire de E. On a :

$f(g(f(x))) = f(g(x))$ (en utilisant la propriété $f(g(x)) = g(f(x))$).

- $g(f(g(x)))$ (en utilisant la même propriété, mais dans l'autre sens),
- $g(g(f(x)))$ (en utilisant la propriété $f(b) = c$ et $g(b) = c$),
- $f(g(g(x)))$ (en utilisant la propriété $g(c) = a$ et $f(b) = c$),
- $f(g(f(x)))$ (en utilisant à nouveau la propriété $f(g(x)) = g(f(x))$).

On a donc montré que $f(g(f(x))) = f(g(g(x)))$, ce qui implique que f et g sont faiblement compatibles. En revanche, pour montrer que f et g ne sont pas faiblement commutatives, il suffit de trouver un élément x tel que $f(g(x)) \neq g(f(x))$. En utilisant les propriétés données dans l'énoncé, on peut prendre $x = a$. Alors :

$f(g(a)) = f(b) = c$,

$g(f(a)) = g(b) = c$.

On a donc $f(g(a)) = g(f(a))$, ce qui montre que f et g sont faiblement compatibles. Cependant, si on applique successivement f deux fois, on obtient $f(f(a)) = f(b) = c$, alors que si on applique successivement g deux fois, on obtient $g(g(a)) = g(c) = a$. On a donc $f(g(a)) \neq g(f(a))$, ce qui montre que f et g ne sont pas faiblement commutatives.

Chapitre 2

Théorème du point fixe dans l'espace métrique généralisé

Dans ce chapitre, on introduit la notion de l'espaces métrique généralisé au sens de Perov [38] et nous donnons quelques définitions et propriétés dans cet espace. Nous proposons également quelques résultats de point fixe pour des contractions généralisées sur un espace métrique généralisé.

2.1 Quelques définitions et notions de base

2.1.1 Espace métrique généralisé

Définition 2.1.1 *[27] Un espace métrique généralisé (E, d) est un ensemble E muni d'une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^n_+$ appelée distance ou métrique généralisé, qui satisfait les propriétés suivantes :*

(1) $\forall x, y \in E : d(x, y) \geq 0$, *Si* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

(2) $\forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x)$,

(3) $\forall x, y, z \in E : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

On appelle le couple (E, d) un espace métrique généralisé avec :

$$d(x,y) = \begin{pmatrix} d_1(x,y) \\ \vdots \\ d_n(x,y) \end{pmatrix}.$$

Remarque 2.1.1 *Si $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$, par $x \leq y$ on veut dire $x_i \leq y_i$, pour tout $i = 1, ..., n$. Donné $\alpha \in \mathbb{R}^n$, par $x \leq \alpha$ on veut dire $x_i \leq \alpha$ pour tout $i = 1, ..., n$. De plus,* *on a :*

$$|x| = (|x_1|, ..., |x_n|).$$

Définition 2.1.2 *[27] Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par une norme vectorielle sur E, on a l'application $\|.\| : E \to \mathbb{R}_+^n$ avec les propriétés suivantes :*

1. $\|x\| \geq 0$ *pour tout* $x \in E$, *si* $\|x\| = 0$ *alors* $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *pour tous les* $x \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{k}$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *pour tous les* $x, y \in E$.

La paire $(E, \|.\|)$ est appelée un espace normé généralisé. Si la métrique généralisée générée par $\|.\|$ (c'est-à-dire $d(x, y) = \|x - y\|$) est complet alors l'espace $(E, \|.\|)$ est appelé un espace de Banach généralisé. De plus, si $\|.\|_i$, $i = \overline{1, n}$, sont normes sur E, alors $(E, \|.\|)$, où :

$$\|x - y\| = \begin{pmatrix} \|x - y\|_1 \\ \vdots \\ \|x - y\|_n \end{pmatrix},$$

est un espace de Banach généralisé.

2.1.2 Concepts de base

Définition 2.1.3 *[27] Pour une boule ouverte de centre x_0 et un rayon r, on a l'ensemble :*

$$B(x_0, r) = \{x \in E : d(x_0, x) < r\},$$

pour $r = (r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}_+^n$.
Pour une boule fermé de centre x_0 et de rayon r, on a l'ensemble :

$$\overline{B(x_0, r)} = \{x \in E : d(x_0, x) \leq r\},$$

comme $r = (r_1, ..., r_n) > 0$, $r_i > 0$, $i = \overline{1, n}$.

Définition 2.1.4 *[27] Soit (E, d) un espace métrique généralisé :*

(1) *Une suite (u_p) dans E (ou dans $\mathbb{R}_+^n$) converge vers $u \in E$, si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$, $\varepsilon > 0$ il existe $p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$d(u_p, u) \leq \varepsilon, \text{ pour tout } p \geq p_0(\varepsilon).$$

(2) *On dit qu'une suite* (u_p) *est de Cauchy si pour tout* $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$, $\varepsilon > 0$ *il existe* $p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tel que :*

$$d\left(u_p, u_q\right) \leq \varepsilon, \text{ pour tout } p, q \geq p_0(\varepsilon).$$

(3) *On dit que* (E, d) *est un espace métrique généralisé complet si pour tout suite de Cauchy de* E *converge vers une limite dans* E.

(4) *On dit qu'un sous-ensemble* F *d'un espace métrique généralisé* E *est fermé si* $(u_p) \subset F$ *et* $u_p \to u$, *quand* $p \to +\infty$ *implique* $u \in F$.

En utilisant les définitions ci-dessus, nous avons les propriétés suivantes :Si $u_p \to u$ *quand* $p \to +\infty$, *alors :*

(a) *La limite* u *est unique.*

(b) *Toute sous-suite de* (u_p) *converge vers* u.

(c) *Si aussi* $u_p \to u$ *quand* $p \to +\infty$, *alors :*

$$d\left(u_p, v_p\right) \to d\left(u, v\right) \text{ quand } p \to +\infty.$$

Théorème 2.1.1 *[27] Pour l'espace métrique généralisé* (E, d), *on a :*

1) *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

2) *Toute suite de Cauchy est bornée.*

3) *Si une suite de Cauchy* (u_p) *a une sous-suite* (u_{p_k}) *telle que :*

$$u_{p_k} \to u \text{ quand } p_k \to +\infty,$$

alors :

$$u_p \to u \text{ quand } p \to +\infty.$$

Preuve.

1) Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans E. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^n$ il existe $p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$d(u_p, u) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } p \geq p_0(\varepsilon).$$

Alors pour tout $p, q \geq p_0(\varepsilon)$ on a :

$$d(u_p, u_q) \leq d(u_p, u) + d(u_q, u) \Longrightarrow d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.$$

Donc $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E.

2) Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$ il existe $p_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$d(u_p, u_q) \leq \varepsilon, \text{ pour tout } p, q \geq p_0(\varepsilon).$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$, on obtient :

$$u_p \in B\left(u_{p_0(\varepsilon)}, \varepsilon + r\right), \; r = \max_{1\leq i,j\leq p_0(\varepsilon)-1} d\left(u_i, u_j\right),$$

ceci implique que $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est borné dans E.

3) Soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy et soit $(u_{p_k})_{p_k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{p_k\to\infty} u_{p_k} = u$. Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$ il existe $p_*(\varepsilon), q_*(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$d\left(u_p, u_q\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } p, q \geq p_*(\varepsilon),$$

et

$$d\left(u_{p_k}, u\right) \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } p_k \geq q_*(\varepsilon).$$

Alors :

$$d\left(u_p, u\right) \leq d\left(u_p, u_{p_k}\right) + d\left(u_{p_k}, u\right) \leq \varepsilon, \text{ pour tout } p \geq \max\left(q_*\left(\varepsilon\right), p_*\left(\varepsilon\right)\right).$$

Ainsi :

$$u_p \to u \text{ quand } p \to +\infty.$$

■

Définition 2.1.5 *[27] Soit (E,d) et $(F,d^{'})$ deux espaces métriques généralisés, et soit $x \in E$. Une fonction $f : E \to F$ est dite continue en x si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}^n_+$, $\varepsilon > 0$ il existe un certain $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^n_+$, $\delta(\varepsilon) > 0$ tels que :*

$$d^{'}\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) < \varepsilon,$$

pour tout $x, y \in E$ et $d\left(x,y\right) < \delta(\varepsilon)$.

Définition 2.1.6 *[27] Soit (E,d) un espace métrique généralisé, un sous-ensemble $A \subset E$ est dit ouvert si pour toute $x_0 \in A$, il existe $r \in \mathbb{R}^n_+$ avec $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset A$.*

Définition 2.1.7 *[27] Soit (E,d) un espace métrique généralisé. Un sous-ensemble C de E est appelé compact si toute suite de C admet une sous-suite convergente dans C.*

Remarque 2.1.2 *[27] Dans l'espace métrique généralisé au sens de Perov, les notions de suite de convergence, de suite de Cauchy, de complétude, de sous-ensemble ouvert et de sous-ensemble fermé sont similaires à celles des éspaces métriques usuels.*

2.1.3 Convergence matricielle

Définition 2.1.8 *[38] Une matrice carrée M avec des éléments non négatifs est dite convergente vers zéro si et seulement si :*

$$M^k \to 0, \text{ quand } k \to \infty.$$

Pour prouver les résultats principaux, nous avons besoin du théorème suivant, dont une partie est un résultat classique en analyse matricielle, voir [25],[23].

Lemme 2.1.1 *[30] Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- **(i)** *M est convergente vers zéro.*
- **(ii)** *La matrice $(I - M)$ est non singulier (inversible) et :*

$$(I - M)^{-1} = I + M + M^2 + \ldots + M^k \ldots$$

- **(iii)** *Les valeurs propres de M sont dans le disque ouvert, c'est-à-dire $|\lambda| < 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\det(M - \lambda I) = 0$.*
- **(iv)** *$(I - M)$ est non singulier et $(I - M)^{-1}$ a des éléments non négatifs.*
- **(v)** *$M^n q \to 0$ et $qM^n \to 0$ quand $n \to \infty$, pour tout $q \in \mathbb{R}^n$.*

Définition 2.1.9 *[27] On dit qu'une matrice non singulière $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ a la propriété de valeur absolue si :*

$$A^{-1}|A| \le I,$$

où

$$|A| = (|a_{ij}|)_{1\le i,j\le n} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+).$$

Exemple 2.1.1 *Voici quelques exemples de matrices convergentes vers zéro :*

1. $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, *où $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $\max(a, b) < 1$.*
2. $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ 0 & b \end{pmatrix}$, *où $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ et $a + b < 1$, $c < 1$.*
3. $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$, *où $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ et $|a - b| < 1$, $a > 1, b > 0$.*

2.2 Résultats principaux

Définition 2.2.1 *[33] Soit (E,d) un espace métrique généralisé.*
On dit que $f : E \to E$ est un opérateur de Picard si : $Fix(f) = x$ et pour tout $x \in E$, la suite $x_n = f^n(x_0)$ converge vers le point fixe de f.

Remarque 2.2.1 *Le résultat principal pour les auto-contractions sur les espaces métriques généralisés est le théorème du point fixe de Perov.*

Dans la suite, nous intéressons à la solvabilité d'un système d'opérateur semi-linéaire de la forme suivante :
Soit $T_i : X^2 \to X (i = 1, 2)$ des opérateurs non linéaires, X est un espace de Banach avec la norme $|.|$, tel que :

$$\begin{cases} T_1\left(x_1, x_2\right) = x_1, \\ T_2\left(x_1, x_2\right) = x_2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Le système (2.1) peut être présenté comme un problème du point fixe : $T\left(u\right) = u$, dans l'espace X^2, où $x = (x_1, x_2)$ et $T = (T_1, T_2)$. Le but de cette partie est de montrer qu'on peut obtenir des résultats amélioré pour le système (2.1), si dans X^2 on considère la norme vectorielle :

$$\|x\| = \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{pmatrix},$$

pour $x = (x_1, x_2) \in X^2$, au lieu de la norme scalaire habituelle :

$$|x|_l = |x_1| + |x_2|,$$
$$|x|_m = \max\left\{|x_1|, |x_2|\right\},$$
$$|x|_e = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}.$$

2.2.1 Théorème du point fixe de Perov

Le mathématicien russe A . I. Pervo [38] a défini l'espace canonique généralisé en introduisant une métrique à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. En suite, ce concept d'espace métrique lui a permis de définir une nouvelle classe d'applications appelées contractions de Pervo qui satisfesaient une condition contractive similaire à celle de Banach, mais avec une matrice $M \in \mathcal{M}_{n\times n}\left(\mathbb{R}_+\right)$ avec des entrées non négatives au lieu d'une constante [37].

Définition 2.2.2 *[27],[29] Soit (E,d) un espace métrique généralisé. Une application $T : E \to E$ est dite contractive s'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ convergente vers zéro et :*

$$\forall x, y \in E,\ d(T(x), T(y)) \leq Md(x,y). \tag{2.2}$$

Théorème 2.2.1 *[27] Soit (E,d) un espace métrique généralisé complet et $T : E \to E$ un opérateur qui vérifie (2.2). Si la matrice M converge vers zéro, alors :*

- **(i)** *T admet un point fixe unique x^*.*
- **(ii)** *Pour tout $x_0 \in E$, la suite des approximations successives $\left(T^k(x_0)\right)_k$ converge vers x^*.*
- **(iii)** *Pour tout $k \in \mathbb{N}^+$, $d(T^k(x_0), x^*) \leq M^k(I-M)^{-1}d(T(x_0), x_0)$.*

2.2.1.1 Application du théorème de Perov

Au début, nous présentons une application du théorème de Perov pour le système (2.1).

Théorème 2.2.2 *[30] Supposons que pour tout $i \in \{1,2\}$, il existe des nombres non négatifs α_i et β_i tel que pour tout $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$:*

$$|T_i(x_1,x_2) - T_i(y_1,y_2)| \leq \alpha_i |x_1 - y_1| + \beta_i |x_2 - y_2|. \tag{2.3}$$

De plus, nous supposons que :

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{bmatrix}, \tag{2.4}$$

est une matrice convergente vers zéro.
Alors (2.1) admet une solution unique $x = (x_1, x_2)$ dans X^2 et $T_i^k(y) \to x_i$, quand $k \to \infty$, pour chaque $y \in X^2$ et $i = 1, 2$.

Preuve. [30] La condition (2.3) peut être réécrit comme suit :

$$\|T(x) - T(y)\| \leq M\|x - y\|.$$

Ainsi, le théorème du point fixe de Perov est applicable avec $E = X^2$ et $d(x,y) = \|x-y\|$. ■

2.2.2 Théorème du point fixe de Brouwer

Ce théorème de Brouwer donne l'existence d'un point fixe (mais pas nécessairement l'unicité) pour une fonction continue sur une boule fermé dans un espace de dimension finie.

Théorème 2.2.3 *[35] Soit E un compact, convexe non vide de $\mathbb{R}^n$ et $T : E \to E$ une application continue. Alors T admet au moins un point fixe dans E.*

Remarque 2.2.2 *[35] Les parties convexes et compactes de $\mathbb{R}$ sont les segments. Ce théoréme prend donc dans le cas $n = 1$ la forme particuliére suivante :*

Théorème 2.2.4 *[35] Si $T : [a, b] \to [a, b]$ est continue, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $T(x) = x$.*

Preuve. [35] Si T est continue de $[a, b]$ dans lui-même, la fonction $N : x \to T(x) - x$ est continue, prend en a :

$$T(a) - a \geq 0,$$

et en b la valeur :

$$T(b) - b \leq 0.$$

Alors par le théoréme des valeurs intermédiaires, la fonction N s'annule en un point x_0, qui est un point fixe de T. ■

2.2.3 Théorème du point fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder est une extension aux espaces vectoriels normés de dimension infinie du théorème de point fixe de Brouwer.

Théorème 2.2.5 *[30] Soit C un sous-ensemble convexe, fermé, borné, non vide d'un espace de Banach E et $T : C \to C$ une application compacte. Alors T possède un point fixe. Plus généralement, si C est un compact convexe alors toute fonction continue de C sur C possède un point fixe.*

2.2.3.1 Application du théorème de Schauder

Théorème 2.2.6 *[30] Supposons que pour tout $i \in \{1, 2\}$, l'opérateur T_i est continue et qu'il existe des nombres non négatifs α_i, β_i et γ_i, et pour tout $x_1, x_2 \in X$, on a :*

$$|T_i(x_1, x_2)| \leq \alpha_i |x_1| + \beta_i |x_2| + \gamma_i. \tag{2.5}$$

De plus, supposons que la condition (2.4) est vérifie. Alors (2.1) admet au moins une solution $x = (x_1, x_2)$ avec :

$$\begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix} \leq (I - M)^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Preuve. [30] On peut écrire (2.5) sous forme de matrice comme suit :

$$\begin{bmatrix} |T_1(x)| \\ |T_2(x)| \end{bmatrix} \leq M \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

On applique le théorème de Schauder pour une restriction de T à un sous ensemble de X^2 de la forme :

$$D = \left\{ x = (x_1, x_2) \in X^2 : |x_1| \leq R_1 \text{ et } |x_2| \leq R_2 \right\}.$$

Ainsi, le problème d'existence se réduit à la condition d'invariance $N(D) \subset D$. Par conséquent, il faut trouver deux nombres non négatifs R_1,R_2 tel que :

$$|x_1| \leq R_1,\ |x_2| \leq R_2 \text{ implique } |T_1(x)| \leq R_1,\ |T_2(x)| \leq R_2.$$

D'après (2.6), si $|x_i| \leq R_i$ pour $i = 1, 2$, alors :

$$\begin{bmatrix} |T_1(x)| \\ |T_2(x)| \end{bmatrix} \leq M \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, il suffirait que :

$$M \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix},$$

qu'est :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = (I - M)^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{bmatrix}. \tag{2.7}$$

L'équation (2.7) nous donne des constantes non négatives R_1,R_2, puisque $\gamma_1, \gamma_2 \geq 0$ et $(I - M)^{-1}$ a des éléments non négatifs d'après le Lemme (2.1.1). ■

2.2.4 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Krasnoselskii a combiné le théorème de point fixe de Banach et celui de Schauder et a établi un nouveau théorème de point fixe qui a porté son nom. Ce théorème a été l'objet de plusieurs articles de recherche et possède de nombreuses applications intèressantes en analyse non linèair.

Théorème 2.2.7 *[30] Soit $(E, |.|_0)$ un espace de Banach, et W un ensemble convexe et fermé qui satisfait $\lambda W \subset W$ pour tout $\lambda \geq 0$ et qui n'est pas un sous-espace linéaire de E. On suppose que*

$T : W \to W$ est un opérateur continue avec $\alpha, \beta > 0$ et $\alpha \neq \beta$ tel que :

$$x \neq \lambda T(x), \text{ pour } |x|_0 = \alpha \text{ et } \lambda \in (0,1), \tag{2.8}$$

$$x \neq \lambda T(x), \text{ pour } |x|_0 = \beta \text{ et } \lambda \in (1,\infty), \tag{2.9}$$

et

$$\inf\{|T(x)|_0 : |x|_0 = \beta\} > 0. \tag{2.10}$$

Alors T possède au moins un point fixe x avec :

$$\min\{\alpha,\beta\} \leq |x|_0 \leq \max\{\alpha,\beta\}.$$

Notez qu'une condition suffisante pour (2.8) est que :

$$|T(x)|_0 \leq |x|_0, \text{ pour } |x|_0 = \alpha.$$

De plus, une condition suffisante pour (2.9) et (2.10) est que :

$$|T(x)|_0 \leq |x|_0, \text{ pour } |x|_0 = \beta.$$

2.2.4.1 Application du théorème de Krasnoselskii

Dans cette section, la notation $|.|_0$ représente toute norme sur X^2. Aussi, pour une matrice carrée M de nombres non négatifs, la notation $M \leq 1$ signifie que μM est convergent vers zéro pour tous $\mu \in (0,1)$, ou équivalent, que $|\lambda| \leq 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\det(M - \lambda I) = 0$.

Théorème 2.2.8 *[30] Soit K un ensemble un ensemble fermé et convexe qui satisfait $\lambda K \subset K$ pour tout $\lambda \geq 0$, et qui n'est pas un sous-espace linéaire de X de l'espace de Banach $(X, |.|)$ et soit $T_i : K^2 \to K$ des applications continues, $i = 1,2$. Supposons qu'il existe α,$\beta \in (0,\infty)$ avec $\alpha \neq \beta$, et les nombres non négatifs $a_i, b_i, a_i^{'}, b_i^{'}$ $(i = 1,2)$ tel que :*

$$|T_i(x)| \leq a_i |x_1| + b_i |x_2|, \text{ pour } |x|_0 = \alpha, i = 1,2, \tag{2.11}$$

$$|x_i| \leq a_i^{'} |T_1(x)| + b_i^{'} |T_2(x)|, \text{ pour } |x|_0 = \beta, i = 1,2. \tag{2.12}$$

Si en plus $M \leq 1$ et $M^{'} \leq 1$ où :

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \text{ et } M^{'} = \begin{bmatrix} a_1^{'} & b_1^{'} \\ a_2^{'} & b_2^{'} \end{bmatrix},$$

alors (2.1) possède au moins une solution $x = (x_1, x_2) \in K \times K$ *satisfaisant :*

$$\min\{\alpha, \beta\} \leq |x|_0 \leq \max\{\alpha, \beta\}.$$

Preuve. [30] Notez que les conditions (2.11) et (2.12) peuvent être écrites sous la forme :

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|, \text{ pour } |x|_0 = \alpha,$$

et respectivement :

$$M'\|T(x)\| \geq \|x\|, \text{ pour } |x|_0 = \beta. \tag{2.13}$$

D'abord, nous montrons que $x \neq \lambda T(x)$ pour tous les $x \in K^2$ avec $|x|_0 = \alpha$ et $\lambda \in (0,1)$. En effet, si $x = \lambda T(x)$ pour certains x avec $|x|_0 = \alpha$ et $\lambda \in (0,1)$, puis $\|x\| = \lambda\|T(x)\| \leq \lambda M\|x\|$. Ainsi $(I - \lambda M)\|x\| \leq 0$.

Puisque λM est convergent vers zéro, on en déduit que $\|x\| \leq (I - \lambda M)^{-1} 0 = 0$, d'où $x = 0$. Cela contredit $|x|_0 = \alpha > 0$.

Ensuite, nous prouvons que $x \neq \lambda T(x)$ pour tous $x \in K^2$ avec $|x|_0 = \beta$ et $\lambda \in (1, \infty)$.

En effet, si $x \in \lambda T(x)$ pour certains x avec $|x|_0 = \beta$ et $\lambda \in (1, \infty)$, puis $\|x\| = \lambda\|T(x)\|$,et ainsi $M'\|x\| = \lambda M'\|T(x)\| \geq \lambda\|x\|$.

Par conséquent, $\left(I - \frac{1}{\lambda}M'\right)\|x\| \leq 0$, d'où :$\|x\| \leq \left(I - \frac{1}{\lambda}M'\right)^{-1} 0$. Ainsi $x = 0$, ce qui contredit $|x|_0 = \beta > 0$.

Enfin, nous notons que (2.13) garantit que : $\inf\{|T(x)|_0 : |x|_0 = \beta\} > 0$. Par conséquent, nous pouvons appliquer le théorème de Krasnoselskii à $E \in X^2$ et à $W \in K^2$. ■

2.3 Comparaison entre la norme vectorielle et la norme scalaire

Premièrement, on considère la norme scalaire $|x|_l = |x_1| + |x_2|$. Alors, si N_1, N_2 vérifiant les conditions de Lipschitz (2.3), on obtient :

$$|N(x) - N(y)|_l \leq \max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\}|x - y|_l, \text{ pour tout } x, y \in X^2. \tag{2.14}$$

De la même manière , si N_1, N_2 satisfaisant (2.5), alors :

$$|N(x)|_l \leq \max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\}|u|_l + c_1 + c_2. \tag{2.15}$$

Enfin, si N_1,N_2 sont comme dans le théorème (2.2.6), et x est une solution quelconque de :

$$\begin{cases} \lambda N_1(x_1, x_2) = x_1, \\ \lambda N_2(x_1, x2) = x_2. \end{cases}$$

Alors :

$$|x|_l \leq \max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\}|x|_l + c_1 + c_2. \tag{2.16}$$

Par conséquent, le principe de contraction de Banach et le théorème de Schauder peuvent être appliqués tant que :

$$\alpha = \max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\} < 1. \tag{2.17}$$

Deuxièmement, si dans X^2, on considère la norme scalaire $|x|_{|m} = \max\{|x_1|, |x_2|\}$, alors les formules correspondantes pour (2.14) et (2.16) sont respectivement :

$$\begin{aligned} |N(x) - N(y)|_m &\leq \max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}|x - y|_m \\ |N(x)|_m &\leq \max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}|x|_m + \max\{c_1 + c_2\} \\ |x|_m &\leq \max\{a_1 + b_1, a_2 + b_2\}|x|_m + \max\{c_1 + c_2\}. \end{aligned}$$

Ainsi, avec ce choix de la norme scalaire dans X^2, les trois résultats précédents de l'analyse fonctionnelle non linéaire s'appliquent à condition que :

$$\beta = \max\{a_1 + a_2, b_1 + b_2\} < 1.$$

Troisième, de la même manière, si la norme euclidienne $|x|_e = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2}$ est considérée dans X^2, les formules correspondantes de (2.14) et (2.16) sont respectivement :

$$\begin{aligned} |N(x) - N(y)|_e &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2}|x - y|_e, \\ |N(x)|_e &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2}|x|_e + \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \\ |x|_e &\leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2}|x|_e + \sqrt{c_1^2 + c_2^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, la condition d'applicabilité des résultats abstraits ci-dessus est l'inégalité suivante :

$$\gamma = a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 < 1. \tag{2.18}$$

Exemple 2.3.1 *Les exemples suivants montrent qu'en général la condition que M est une matrice* *convergente vers zéro et plus faible que les conditions (2.17)-(2.18).*

1. *Soit :*
$$M = \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix},$$
alors, les valeurs propres de M *sont :* $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = a + b$. *Ainsi, la matrice* M *converge vers zéro si et seulement si* $a + b < 1$. *De plus, on a :*
$$\alpha = a + b, \beta = \max\{2a + 2b\}, \gamma = 2(a^2 + b^2),$$
qui montrent qu'en général, chacune des conditions $\beta < 1$ *et* $\gamma < 1$ *sont plus restrictive que la condition* M *converge vers zéro.*

2. *Soit :*
$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix},$$
les valeurs propres de M *sont :* $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = c$. *Alors,* M *converge vers zéro si et seulement si* $\max\{a, c\} < 1$. *Par conséquent :*
$$\alpha = \max\{a, b + c\}, \beta = \max\{a + b, c\}, \gamma = a^2 + b^2 + c^2,$$
qui montrent qu'en général, chacune des conditions $\alpha < 1$, $\beta < 1$ *et* $\gamma < 1$ *sont plus restrictive que la condition* M *converge vers zéro.*

Chapitre 3

Théorème du point fixe dans l'espace b-métrique généralisé

La théorie du point fixe dans l'espace b-métrique est un domaine très dynamique dans la recherche mathématique. En 1989, Bakhtin [3] a introduit le concept d'espace b-métrique comme une généralisation d'espace métrique. Ensuite en 1993, Czerwik [15] a étendu cette notion. Pour cette raison, de nombreux chercheurs ont présenté la généralisation du célèbre théorème des points fixes de Banach dans l'espace b-métrique (voir [9].[2].[5].[8]).

3.1 L'espace b-métrique

Définition 3.1.1 *[1]Soit E un ensemble non vide et $s \geq 1$ un nombre réel donné. L'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ est appelée b-métrique si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) $\forall x, y \in E : d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

2) $\forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x)$,

4) $\forall x, y, z \in E : d(x, z) \leq s[d(x, y) + d(y, z)]$.

Le couple (E, d) est un espace b-métrique.

Il est clair que la définition de l'espace b-métrique est une extension de l'espace métrique habituel. De plus, si nous considérons $s = 1$ dans la définition 3.1.1, nous obtenons la définition de l'espace métrique habituel. Cependant, une b-métrique sur E n'est pas nécessairement une métrique sur E comme le montre les exemples suivantes.

Exemple 3.1.1 **1)** *Soit $E = \{4, 5, 6\}$ et :*

$d(4,5) = d(5,4) = 1$, $d(4,6) = d(6,4) = 4$, $d(5,6) = d(6,5) = 2$ *et*

$d(4,4) = d(5,5) = d(6,6) = 0$. *Alors :*

$$d(x,y) \leq \frac{4}{3}\left[d(x,z) + d(z,y)\right] \text{ pour tout } x,y,z \in E.$$

Alors (E,d) *est un espace b-métrique* ($s = \frac{4}{3}$) *mais* (E,d) *n'est pas un espace métrique car l'inégalité triangulaire n'est pas vérifiée :*

$$4 = d\,(4,6) > d\,(4,5) + d\,(5,6) = 1 + 2 = 3.$$

2) *Si* (E,d) *un espace métrique et* $\alpha \geq 1$, *alors* $d^{\alpha}(x,y)$ *est une b-métrique :*

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \\ d^{\alpha}(x,y) &\leq \left[d(x,z) + d(z,y)\right]^{\alpha} \\ &\leq 2^{\alpha}\left[\max(d(x,z), d(z,y))\right]^{\alpha} \\ &\leq 2^{\alpha}\left[d^{\alpha}(x,z) + d^{\alpha}(z,y)\right]. \end{aligned}$$

3.1.1 Concepts de base

Définition 3.1.2 *[12]Soit* (E,d) *un espace b-métrique,*

1) *La boule ouverte notée par* $B(x,r)$ *de centre* $x \in E$ *et de rayon* $r > 0$ *donné par :*

$$B(x,r) = \{y \in E : d(x,y) < r\}.$$

2) *Un sous ensebmle* Y *de* E *est appelé ouvert si pour chaque* $x \in Y$ *il existe* $r_x > 0$ *telle que* $B(x, r_x) \subseteq Y$.

Définition 3.1.3 *[13]Soit* (E,d) *un espace b-métrique. Les notions suivantes sont des déductions naturelles des versions métriques correspondantes :*

(i) *Une suite* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* E *est convergente vers* $u \in E$ *si* $\lim\limits_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0$.

(ii) *Une suite* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* E *est de Cauchy si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* N_{ε} *tel que :*

$$d(u_n, u_m) < \varepsilon, \text{ pour tout } m,n \geq N_{\varepsilon}.$$

(iii) *On dit que* (E,d) *est un espace b-métrique complet si toute suite de Cauchy est convergente* *dans E.*

Définition 3.1.4 *[13] Soient (E, d) et $(E^{'}, d^{'})$ deux espaces b-métriques de coefficient s et $s^{'}$, respectivement. Une application $T : E \to E^{'}$ est dite continue si chaque suite $\{u_n\}$ dans E, qui converge vers $u \in E$ par rapport à d, alors Tu_n converge vers Tu par rapport à $d^{'}$.*

Remarque 3.1.1 *[13] Dans un espce b-métrique, les affirmations suivantes sont satisfaisantes :*

1) *Une suite convergente a une unique limite.*

2) *Toute suite convergente est une suite de Cauchy.*

3) *On générale l'espace b-metrique est non continu [18].*

Exemple 3.1.2 *[20] Soit $E = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $d : E \times E \to \mathbb{R}$ est définie par :*

$$d(m, n) = \begin{cases} 0, & si \;\; m = n, \\ \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|, & si \; n{,}m \; sont \; pairs \; ou \; nm = \infty, \\ 5, & si \; n, m \; sont \; impairs \; et \; m \neq n, \\ 2, & sinon. \end{cases}$$

Ensuite, en considérant tous les cas possibles, on peut vérifier que (E, d) est un espace b-métrique avec $s = \frac{5}{2}$. Cependant, soit $u_n = 2n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$d(2n, \infty) = \frac{1}{2n} \to 0 \; quand \; n \to +\infty.$$

C'est à dire, $u_n \to +\infty$ mais $d(u_{2n}, 1) = 2 \nrightarrow 5 = d(+\infty, 1)$ quand $n \to +\infty$.

Définition 3.1.5 *[7] Soit (E, d) un espace b-métrique. Si Y est un sous ensemble non vide de E, alors la fermeture $\overline{Y}$ de Y est l'ensemble des limites de toutes les suites convergentes dans Y, c'est-à-dire :*

$$\overline{Y} = \left\{ u \in E : il \; existe \; une \; suite \; \{u_n\} \; dans \; Y \; tel \; que \; \lim_{n \to +\infty} u_n = u \right\}.$$

Définition 3.1.6 *[7]Soit (E, d) un espace b-métrique. Alors un sous-ensemble $Y \subset X$ est appelé :*

1) *Fermé si et seulement si pour chaque suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dans Y qui converge vers un élément u, on a $u \in Y$ (i.e.$Y = \overline{Y}$).*

2) *Compact si et seulement si pour toute suite d'éléments de Y il existe une sous-suite qui converge vers un élément de Y.*

3.2 L'espace b-métrique généralisé

Définition 3.2.1 *[16]Soit E un ensemble non vide et $s \geq 1$ un nombre réel donné. L'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ est appelée b-métrique généralisé à condition que :*

i) $\forall x, y \in E : d(x, y) = 0, x = y,$

ii) $\forall x, y \in E : d(x, y) = d(y, x),$

iii) $\forall x, y, z \in E : d(x, z) \leq s\,[d(x, y) + d(y, z)].$

Le couple (E, d) est un espace b-métrique généralisé.

Remarque 3.2.1 1. *La classe des espaces b-métriques généralisés est plus grande que celle des espaces métriques, car un espace b-métrique généralisé est un espace métrique généralisé si $s = 1$ dans la troisième hypothèse définie ci-dessus.*

2. *Si $n = 1$, on obtient le concept de b-métrique introduit par Bakhtin.*

Définition 3.2.2 *[16] Soit (E, d) un espace b-métrique généralisé :*

(i) *On dit qu'une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans E est convergente si et seulement s'il existe $u \in E$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n(\varepsilon)$ on a $d(u_n, u) < \varepsilon$. Dans ce cas, on note :*

$$\lim_{n\to+\infty} d(u_n, u) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = u.$$

(ii) *On dit qu'une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans E est de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \forall m, n \geq n(\varepsilon), d(u_n, u_m) < \varepsilon.$$

(iii) *On dit que (E, d) est un espace b-métrique généralisé complet si toute suite de Cauchy est convergente dans E.*

Définition 3.2.3 *[16]Soit (E, d) un espace b-métrique généralisé. Alors un sous-ensemble $Y \subset X$ est appelé :*

1) *Fermé si et seulement si pour chaque suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dans Y qui converge vers un élément u, on a $u \in Y$ (i.e.$Y = \overline{Y}$).*

2) *Compact si et seulement si pour toute suite d'éléments de Y il existe une sous-suite qui converge vers un élément de Y.*

La convergence matricielle dans l'espace b-métrique généralisé elle est comme dans l'espace métrique généralisé.

3.3 Théorème du point fixe dans l'espace b-métrique généralisé

Définition 3.3.1 *[5] Soit f et g deux fonction d'un espace b-métrique généralisé (E, d). Un élément $x \in E$ est dit point fixe commun de f et g si et seulement si $x = f(x) = g(x)$.*

3.3.1 Théorème du point fixe pour deux opérateurs sur un espace b-métrique généralisé

Théorème 3.3.1 *Soit (E, d) un espace b-métrique généralisé complet, supposons que les opérateurs $f, g : E \to E$ satisfaisant les conditions suivantes :*
il existe des matrices $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :

- **i)** *$(I - N - Ps)$ est inversible $(I - N - Ps)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ et $(I - sN - s^2P)$ est inversible et $(I - sN - s^2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$,*
- **ii)** *sC converge vers zéro, où $C = (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)$,*
- **iii)** *$d(fx, gy) \leq Md(x, y) + N[d(x, fx) + d(y, gy)] + P[d(x, gy) + d(y, fx)]$, pour tout $x, y \in E$.*

Alors :

1. *f et g admet un point fixe commun x^* dans E.*
2. *Si, de plus $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors x^* est unique.*

Preuve.

1) Soit x_0 un point de E, on considère la suite d'approximations successives $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour f et g, définie par :

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= fx_{2n}, \ n = 0, 1, ... \\ x_{2n+2} &= gx_{2n+1}, \ n = 0, 1, ... \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} d(x_{2n}, x_{2n+1}) &= d(gx_{2n-1}, fx_{2n}) \\ &\leq Md(x_{2n-1}, x_{2n}) + N[d(x_{2n}, fx_{2n}) + d(x_{2n-1}, gx_{2n-1})] \\ &+ P[d(x_{2n}, gx_{2n-1}) + d(x_{2n-1}, fx_{2n})] \\ &= Md(x_{2n-1}, x_{2n}) + N[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})] \\ &+ Pd(x_{2n-1}, x_{2n+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x_{2n}, x_{2n+1}) &\leq Md(x_{2n-1}, x_{2n}) + N\left[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n-1}, x_{2n})\right] \\ &+ Ps\left[d(x_{2n-1}, x_{2n}) + d(x_{2n}, x_{2n+1})\right]. \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$d(x_{2n}, x_{2n+1}) \leq (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)d(x_{2n-1}, x_{2n}) = Cd(x_{2n-1}, x_{2n}).$$

De manière similaire, on a :

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) &= d(fx_{2n}, gx_{2n+1}) \\ &\leq Md(x_{2n}, x_{2n+1}) + N\left[d(x_{2n}, fx_{2n}) + d(x_{2n+1}, gx_{2n+1})\right] \\ &+ P\left[d(x_{2n}, gx_{2n-1}) + d(x_{2n+1}, fx_{2n})\right] \\ &= Md(x_{2n}, x_{2n+1}) + N\left[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\right] \\ &+ Pd(x_{2n}, x_{2n+2}) \\ &\leq Md(x_{2n}, x_{2n+1}) + N\left[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\right] \\ &+ Ps\left[d(x_{2n}, x_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\right]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$d(x_{2n+1}, x_{2n+2}) \leq (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)d(x_{2n}, x_{2n+1}) = Cd(x_{2n}, x_{2n+1}).$$

On obtient :

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq C^n d(x_0, x_1), \text{pour chaque } n \in \mathbb{N}.$$

Pour prouver que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, nous estimons $d(x_n, x_{n+p})$ en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+p}) &\leq sd(x_n, x_{n+1}) + s^2 d(x_{n+1}, x_{n+2}) + ... + s^{p-2} d(x_{n+p-3}, x_{n+p-2}) \\ &+ s^{p-1} d(x_{n+p-2}, x_{n+p-1}) + s^{p-1} d(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \\ &\leq sC^n d(x_0, x_1) + s^2 C^{n+1} d(x_0, x_1) + ... + s^{p-2} C^{n+p-3} d(x_0, x_1) \\ &+ s^{p-1} C^{n+p-2} d(x_0, x_1) + s^{p-1} C^{n+p-1} d(x_0, x_1) \\ &= sC^n d(x_0, x_1)\left[I + sC + ... + s^{p-2}C^{p-2} + s^{p-2}C^{p-1}\right] \\ &\leq sC^n d(x_0, x_1)\left[I + sC + ... + s^{p-2}C^{p-2} + s^{p-1}C^{p-1}\right] \\ &\leq sC^n d(x_0, x_1)(I - sC)^{-1} \\ &\leq (sC)^n d(x_0, x_1)(I - sC)^{-1}. \end{aligned}$$

Notez que $(I - sC)$ est inversible puisque sC converge vers zéro. Cela implique que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. En utilisant le fait que (E, d) est complet, nous obtenons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E. Ainsi, il existe $x^* \in E$ tel que $d(x_n, x^*) \to 0$, quand $n \to +\infty$.

Maintenant, nous montrons que x^* est un point fixe pour f en estimant $d(f(x^*), x^*)$, on obtient :

$$\begin{aligned} d(fx^*, x^*) &\leq sd(fx^*, gx_{2n+1}) + sd(x_{2n+2}, x^*) \\ d(fx^*, x^*) - sd(x_{2n+2}, x^*) &\leq sd(fx^*, gx_{2n+1}) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d(fx^*, gx_{2n+1}) &\leq Md(x^*, x_{2n+1}) + N\left[d(x^*, fx^*) + d(x_{2n+1}, gx_{2n+1})\right] \\ &\quad + P\left[d(x^*, gx_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, fx^*)\right] \\ &= Md(x^*, x_{2n+1}) + N\left[d(x^*, fx^*) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\right] \\ &\quad + P\left[d(x^*, x_{2n+2}) + d(x_{2n+1}, fx^*)\right]. \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} d(fx^*, x^*) - sd(x_{2n+2}, x^*) &\leq sMd(x^*, x_{2n+1}) + sN[d(x^*, fx^*) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})] \\ &\quad + sP[d(x^*, x_{2n+2}) + s(d(x_{2n+1}, x^*) + d(x^*, fx^*))]. \end{aligned}$$

Passant à la limite et comme $(I - sN - s^2P)$ est inversible et $(I - sN - s^2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, donc x^* est un point fixe pour f.

Pour montrer que $g(x^*) = x^*$ en utilisant la condition (iii), on trouve :

$$\begin{aligned} d(x^*, gx^*) &= d(fx^*, gx^*) \\ &\leq Md(x^*, x^*) + N\left[d(x^*, fx^*) + d(x^*, gx^*)\right] \\ &\quad + P\left[d(x^*, gx^*) + d(x^*, fx^*)\right]. \end{aligned}$$

On obtient :

$$(I - N - P)d(x^*, gx^*) \leq 0.$$

Notant que $(I - N - P)$ est inversible et $(I - N - P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors $x^* = gx^*$, donc x^* est un point fixe commun pour f et g.

2) Maintenant, nous montrons que f et g ont un point fixe commun unique.

Nous supposons qu'il existe un autre point fixe w pour f, en utilisant la condition (iii), on aura :

$$\begin{aligned} d(w,x^*) &= d(fw,gx^*) \\ &\leq Md(w,x^*) + N\left[d(w,fw) + d(x^*,gx^*)\right] \\ &+ P\left[d(w,gx^*) + d(x^*,fw)\right] \\ &\leq (M+2P)d(w,x^*). \end{aligned}$$

On obtient :

$$(I-M-2P)d(w,x^*) \leq 0.$$

Comme $(I-M-2P)$ est inversible et $(I-M-2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, donc x^* est un point fixe commun unique pour f et g.

■

Dans le théorème précédent si $s=1$, nous obtenons le concept d'espace métrique généralisé, dans ce cas on a :

Corollaire 3.3.1 *Soit (E,d) un espace métrique complet, supposons que les opérateurs $f,g : E \to E$ satisfaisant les conditions suivantes :*
il existe des matrices $M,N,P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :

- **i)** *$(I-N-P)$ est inversible $(I-N-P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$,*
- **ii)** *C converge vers zéro, où $C=(I-N-P)^{-1}(M+N+P)$,*
- **iii)** *$d(fx,gy) \leq Md(x,y) + N\left[d(x,fx)+d(y,gy)\right] + P\left[d(x,gy)+d(y,fx)\right]$, pour tout $x,y \in E$.*

Alors :

1. *f et g admet un point fixe commun x^* dans E.*
2. *Si, de plus $(I-M-2P)$ est inversible et $(I-M-2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors x^* est unique.*

Preuve. On suit les mêmes étapes de la preuve du théorème (3.3.1), on obtient :

$$d(x_n,x_{n+p}) \leq C^n d(x_0,x_1)(I-C)^{-1}.$$

Puisque C converge vers zéro alors $(I-C)$ est inversible. Cela implique que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. D'autre part (E,d) est complet alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans E. Donc il existe $x^* \in E$ tel que $d(x_n,x^*) \to 0$, quand $x^* \to +\infty$.

Maintenant, nous montrons que x^* est un point fixe pour f, pour tout entier positif n, en utilisant la condition (iii), on a :

$$\begin{aligned} d(fx^*, x_{2n+2}) &\leq d(fx^*, gx_{2n+1}) \\ &\leq Md(x^*, x_{2n+1}) + N\left[d(x^*, fx^*) + d(x_{2n+1}, gx_{2n+1})\right] \\ &+ P\left[d(x^*, gx_{2n+1}) + d(x_{2n+1}, fx^*)\right] \\ &= Md(x^*, x_{2n+1}) + N\left[d(x^*, fx^*) + d(x_{2n+1}, x_{2n+2})\right] \\ &+ P\left[d(x^*, x_{2n+2}) + d(x_{2n+1}, fx^*)\right]. \end{aligned}$$

Passant à la limite et comme dans l'espace métrique généralisé d est continue, alors $(I - N - P)$ est inversible et $(I - N - P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$. Cela implique que $x^* = f(x^*)$ donc x^* est un point fixe pour f. Le reste de la preuve se fait comme dans la preuve du théorème (3.3.1). ■

Si $n = 1$ dans le théorème précédent, on obtient le concept d'espace b-métrique introduit par Bakhtin, dans ce cas on a :

Corollaire 3.3.2 *Soit (E, d) un espace b-métrique complet. Supposons que les opérateurs $f, g : E \to E$ satisfaisant les conditions suivantes :*
Il existe des matrices $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :

i) *$d(fx, gy) \leq Md(x, y) + N[d(x, fx) + d(y, gy)] + P[d(x, gy) + d(y, fx)]$, pour tout $x, y \in E$.*

ii) *$sC < 1$ avec $C = \frac{M+N+Ps}{1-N-Ps}$, $sN + s^2P < 1$ et $N + Ps < 1$.*

1. *f et g admet un point fixe commun x^* dans E.*
2. *Si $M + 2P < 1$ alors x^* est unique.*

3.3.2 Théorème du point fixe pour deux opérateurs sur un espace b-métrique généralisé avec deux b-métriques

Théorème 3.3.2 *[6] Soit (E, δ) un espace b-métrique généralisé complet et d une autre b-métrique à valeur vectorielle sur E. Supposons que les opérateurs $f, g : E \to E$ satisfaisant les conditions suivantes :*

a) *Il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ tel que $\delta(x, y) \leq Ud(x, y)$, pour tous $x, y \in E$,*

b) *f est (δ, δ)-continue,*

c) *Il existe des matrices $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :*

1. *$(I - N - Ps)$ est inversible $(I - N - Ps)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$.*

2. *sC est converge vers zéro, où $C = (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)$.*
3. *$d(fx, gy) \leq Md(x, y) + N[d(x, fx) + d(y, gy)] + P[d(x, gy) + d(y, fx)]$, pour tout $x, y \in E$.*

Alors :

i) *f et g admet un point fixe commun x^* dans E.*

ii) *Si $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors x^* est un point fixe commun unique de f ,g.*

Preuve. Comme dans la preuve du théorème(3.3.1), on obtient que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d-Cauchy. D'après la condition (a) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est δ-Cauchy. Puisque (E, δ) est un espace b-métrique généralisé complet, il existe $x^* \in E$ tel que $\delta(x_{2n+1}, x^*) \to 0$, quand $n \to +\infty$.
Par (b), on a que $\delta(f(x_{2n}), f(x^*)) \to 0$, quand $n \to \infty$. Mais $\delta(f(x_{2n}), f(x^*)) = \delta(x_{2n+1}, f(x^*))$. Alors,on a $x^* = f(x^*)$. Donc x^* est un point fixe pour f et $\delta(f^n(x_0), x^*) \to 0$, quand $n \to +\infty$.
Le reste de la preuve ce fait comme dans le théorème(3.2.1). ■

Maintenant, nous présentons le théorème précédent dans le cas d'espace métrique généralisé.

Corollaire 3.3.3 *Soit (E, δ) un espace métrique généralisé complet et d une autre métrique à valeur vectorielle sur E. Supposons que les opérateurs $f, g : E \to E$ vérifiant les conditions suivantes :*

a) *Il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ tel que $\delta(x, y) \leq Ud(x, y)$, pour tous $x, y \in E$,*

b) *f est (δ, δ)-continue,*

c) *Il existe des matrices $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :*

i) *$(I - N - P)$ est inversible $(I - N - P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$,*

ii) *C converge vers zéro, où $C = (I - N - P)^{-1}(M + N + P)$,*

iii) *$d(fx, gy) \leq Md(x, y) + N[d(x, fx) + d(y, gy)] + P[d(x, gy) + d(y, fx)]$, pour tout $x, y \in E$.*

Alors :

1. *f et g admet un point fixe commun x^* dans E.*
2. *Si, de plus $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors x^* est un point fixe commun unique de f ,g.*

3.3.3 Théorème du point fixe pour quatre opérateurs sur un espace b-métrique généralisé

Définition 3.3.2 *Soient f,g deux opérateurs d'un espace b-métrique généralisé (E, d). f et g sont dites faiblement compatibles s'ils commutent à leurs points de coïncidence, l'égalité $fu = gu$ pour un certain $u \in E$ implique que $fgu = gfu$.*

Le premier résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 3.3.3 *[5] Soit (E, d) un espace b-métrique généralisé, supposons que les opérateurs $f, g, S et\ T$ satisfaisant les conditions suivantes :*

$$f(E) \subset T(E), g(E) \subset S(E). \tag{3.1}$$

Supposons que l'un de $S(E)$, $T(E)$, $f(E)$ et $g(E)$ est un sous-espace complet de E et les paires (S, f) et (T, g) sont faiblement compatibles. Il existe des matrices $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :

- **i)** *$(I - N - Ps)$ est inversible $(I - N - Ps)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$,*
- **ii)** *sC converge vers zéro, où $C = (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)$,*
- **iii)** *$(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$,*
- **iv)** *$d(fx, gy) \leq Md(Sx, Ty) + N[d(Sx, fx) + d(Ty, gy)] + P[d(Sx, gy) + d(Ty, fx)]$, pour tout $x, y \in E$.*

Alors f, g, S, T ont un point fixe commun unique x^*.

Preuve. [5] Soit x_0 un point de E. Par (3.1), on peut définir une suite $\{y_n\}$ dans E tel que :

$$y_{2n} = Tx_{2n+1} = fx_{2n},$$
$$y_{2n+1} = Sx_{2n+2} = gx_{2n+1}.$$

On a :

$$\begin{aligned}
d(y_{2n}, y_{2n+1}) &= d(fx_{2n}, gx_{2n+1}) \\
&\leq Md(Sx_{2n}, Tx_{2n+1}) + N[d(Sx_{2n}, fx_{2n}) + d(Tx_{2n+1}, gx_{2n+1})] \\
&+ P[d(Sx_{2n}, gx_{2n+1}) + d(Tx_{2n+1}, fx_{2n})] \\
&= Md(y_{2n-1}, y_{2n}) + N[d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})] \\
&+ Pd(y_{2n-1}, y_{2n+1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq & \, Md(y_{2n-1}, y_{2n}) + N\left[d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})\right] \\ & + Ps\left[d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})\right]. \end{aligned}$$

Cela implique que :

$$d(y_{2n}, y_{2n+1}) \leq (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)d(y_{2n-1}, y_{2n}) = Cd(y_{2n-1}, y_{2n}).$$

De manière similaire, on a :

$$\begin{aligned} d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) &= d(fx_{2n+2}, gx_{2n+1}) \\ &\leq Md(Sx_{2n+2}, Tx_{2n+1}) + N[d(Sx_{2n+2}, fx_{2n+2}) \\ &+ d(Tx_{2n+1}, gx_{2n+1})] + P[d(Sx_{2n+2}, gx_{2n+1}) + d(Tx_{2n+1}, fx_{2n+2})] \\ &= Md(y_{2n+1}, y_{2n}) + N\left[d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})\right] \\ &+ Pd(y_{2n}, y_{2n+2}) \\ &\leq Md(y_{2n}, y_{2n+1}) + N\left[d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) + d(y_{2n}, y_{2n+1})\right] \\ &+ Ps\left[d(y_{2n}, y_{2n+1}) + d(y_{2n+1}, y_{2n+2})\right]. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$d(y_{2n+1}, y_{2n+2}) \leq (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)d(y_{2n}, y_{2n+1}) = Cd(y_{2n}, y_{2n+1}).$$

On obtient :

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq C^n d(x_0, x_1), \text{pour chaque } n \in \mathbb{N}.$$

Pour prouver que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, nous estimons $d(y_n, y_{n+p})$ en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+p}) &\leq sd(y_n, y_{n+1}) + s^2 d(y_{n+1}, y_{n+2}) + ... + s^{p-2}d(y_{n+p-3}, y_{n+p-2}) \\ &+ s^{p-1}d(y_{n+p-2}, y_{n+p-1}) + s^{p-1}d(y_{n+p-1}, y_{n+p}) \\ &\leq sC^n d(y_0, y_1) + s^2 C^{n+1} d(y_0, y_1) + ... + s^{p-2}C^{n+p-3}d(y_0, y_1) \\ &+ s^{p-1}C^{n+p-2}d(y_0, y_1) + s^{p-1}C^{n+p-1}d(y_0, y_1) \\ &= sC^n\left[I + sC + ... + s^{p-2}C^{p-2} + s^{p-2}C^{p-1}\right] d(y_0, y_1) \\ &\leq sC^n\left[I + sC + ... + s^{p-2}C^{p-2} + s^{p-1}C^{p-1}\right] d(y_0, y_1) \\ &\leq sC^n(I - sC)^{-1}d(y_0, y_1) \end{aligned}$$

$$d(y_n, y_{n+p}) \leq (sC)^n (I - sC)^{-1} d(y_0, y_1).$$

Notez que $(I - sC)$ est inversible puisque sC converge vers zéro. Cela implique que $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy dans E, donc la sous-suite $\{y_n\} = \{fx_{2n}\} \subset f(E)$ est une suite de Cauchy dans $f(E)$. Puisque $T(E)$ est complet, il converge vers un point $x^* = Tv$ pour un certain $v \in E$.
Par conséquent, la suite $\{y_n\}$ converge aussi vers x^* et les sous-suites $\{Sx_{2n+2}\}$, $\{gx_{2n+1}\}$ et $\{fx_{2n}\}$ convergent vers x^*.

Si $x^* \neq gv$, en utilisant la condition de contraction, on obtient :

$$\begin{aligned}
d(fx_{2n}, gv) &\leq Md(Sx_{2n}, Tv) + N\left[d(Sx_{2n}, fx_{2n}) + d(Tv, gv)\right] \\
&+ P\left[d(Sx_{2n}, gv) + d(Tv, fx_{2n})\right] \\
&= Md(y_{2n-1}, x^*) + N\left[d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(x^*, gv)\right] \\
&+ Ps\left[d(y_{2n-1}, x^*) + d(x^*, gv)\right] + Pd(x^*, y_{2n}).
\end{aligned}$$

Lorsque $n \to \infty$, on obtient :

$$(I - N - Ps)d(x^*, gv) \leq 0.$$

Notant que $(I - N - Ps)$ est inversible et $(I - N - Ps)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors on obtient que $x^* = Tv = gv$. Puisque $g(E) \subset S(E)$, il existe un $u \in E$ tel que $x^* = Su = gv$.

Si $x^* \neq fu$, en utilisant la condition de contraction, on a :

$$\begin{aligned}
d(fu, gv) &\leq Md(Su, Tv) + N\left[d(Su, fu) + d(Tv, gv)\right] \\
&+ P\left[d(Su, gv) + d(T(v), f(u))\right] \\
&= Md(x^*, x^*) + N\left[d(x^*, fu) + d(x^*, x^*)\right] \\
&+ P\left[d(x^*, x^*) + d(x^*, fu)\right].
\end{aligned}$$

On obtient :

$$(I - N - P)d(fu, x^*) \leq 0.$$

Comme $(I - N - P)$ est inversible et $(I - N - P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, on obtient que $x^* = Su = fu$. Comme les couples (S, f) et (T, g) sont faiblement compatibles, on obtient $fx^* = Sx^*$ et $gx^* = Tx^*$.

Maintenant, nous prouvons que $x^* = fx^* = Sx^*$,

$$\begin{aligned}
d(fx^*, x^*) &= d(fx^*, gv) \\
&\leq Md(Sx^*, Tv) + N[d(Sx^*, fx^*) + d(Tv, gv)] \\
&+ P[d(Sx^*, gv) + d(Tv, fx^*)]
\end{aligned}$$

$$d(fx^*, x^*) = Md(fx^*, x^*) + P[d(fx^*, x^*) + d(x^*, fx^*)].$$

Comme $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ cela implique que $x^* = fx^* = Sx^*$.

De même, on peut prouver que $x^* = gx^* = Tx^*$. Donc x^* est un point fixe commun de f, g, S et T.

S'il existe un autre point fixe commun w dans E pour f, g, S et T, alors :

$$\begin{aligned} d(w, x^*) &= d(fw, gx^*) \\ &\leq Md(Sw, Tx^*) + N[d(Sw, fw) + d(Tx^*, gx^*)] \\ &+ P[d(Sw, gx^*) + d(Tx^*, fw)], \\ &= Md(w, x^*) + P[d(w, x^*) + d(x^*, w)]. \end{aligned}$$

Comme $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ cela implique que x^* est un point fixe commun unique de f, g, S et T. ■

Nous obtenons le concept d'espace métrique généralisé dans le théorème précédent si $s = 1$, dans ce cas on a :

Corollaire 3.3.4 *[5] Soit f, g, S et T des opérateurs d'un espace métrique généralisé (E, d) satisfaisant les conditions suivantes :*

$$f(E) \subset T(E), g(E) \subset S(E).$$

Supposons que l'un de $S(E)$, $T(E)$, $f(E)$ et $g(E)$ est un sous-espace complet de E et les paires (S, f) et (T, g) sont faiblement compatibles. Il existe des matrices $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :

- **i)** *$(I - N - P)$ est inversible $(I - N - P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$,*
- **ii)** *C converge vers zéro, où $C = (I - N - P)^{-1}(M + N + P)$,*
- **iii)** *$(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$.*
- **iv)** *$d(fx, gy) \leq Md(Sx, Ty) + N[d(Sx, fx) + d(Ty, gy)] + P[d(Sx, gy) + d(Ty, fx)]$, pour tout $x, y \in E$.*

Alors f, g, S, T ont un point fixe commun unique x^*.

Pour la preuve de ce corollaire, nous suivons les mêmes étapes que dans le théorème (3.3.2) mais la différence ici est que la fonction métrique généralisée d est continue. Comme nous le voyons dans le théorème (3.3.2), nous n'avons pas supposé de conditions supplémentaires pour prouver l'existence et l'unicité du point fixe bien que nous n'ayons pas la continuité de la fonction d qui prouve que les techniques utilisées dans le théorème (3.3.2) peuvent être utilisé dans la configuration des espaces b-métriques discontinus.

Si n = 1 dans le théorème (3.3.2) alors on obtient le concept de b-métrique introduit par Bakhtin.

Pour montrer la validité de notre travail, nous pouvons prouvons que les mêmes résultats sont valables même si l'espace est doté de deux métriques.

3.3.4 Théorème du point fixe pour quatre opérateurs sur un espace b-métrique généralisé avec deux b-métriques

Théorème 3.3.4 *[5] Soit (E, δ) un espace b-métrique généralisé complet et d une autre b-métrique à valeur vectorielle sur E. Supposons que les opérateurs f, g, S, T satisfaisant les conditions suivantes :*

$$f(E) \subset T(E), g(E) \subset S(E).$$

Supposons que l'un de $S(E)$, $T(E)$, $f(E)$ et $g(E)$ est un sous-espace complet de E et les paires (S, f) et (T, g) sont faiblement compatibles.

a) *Il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ tel que $\delta(x, y) \leq Ud(x, y)$, pour tous $x, y \in E$,*

b) *f est (δ, δ)-continue,*

c) *Il existe des matrices $M, N, P \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ avec :*

1. *$(I - N - Ps)$ est inversible $(I - N - Ps)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$,*
2. *sC est converge vers zéro, où $C = (I - N - Ps)^{-1}(M + N + Ps)$,*
3. *$(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$,*
4. *$d(fx, gy) \leq Md(Sx, Ty) + N[d(Sx, fx) + d(Ty, gy)] + P[d(Sx, gy) + d(Ty, fx)]$, pour tout $x, y \in E$.*

Alors f, g, S, T ont un point fixe commun unique x^*.

Preuve. [5] Comme dans la preuve du théorème(3.3.2), on obtient que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d-Cauchy. D'après la condition (a) la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est δ-Cauchy. Par conséquent, la sous-suite $\{y_{2n}\} = \{fx_{2n}\} \subset f(E)$ est une suite de Cauchy dans $f(E)$. Puisque $T(E)$ est complet, il converge vers un point $x^* = Tv$ pour un certain $v \in E$.

Par conséquent, la suite $\{y_n\}$ converge aussi vers x^* et les sous-suites $\{Sx_{2n+2}\}$, $\{gx_{2n+1}\}$ et $\{fx_{2n}\}$ convergent vers x^*.

Si $x^* \neq gv$, en utilisant la condition de contraction, on obtient :

$$\begin{aligned}
d(fx_{2n}, gv) &\leq Md(Sx_{2n}, Tv) + N\left[d(Sx_{2n}, fx_{2n}) + d(Tv, gv)\right] \\
&+ P\left[d(Sx_{2n}, gv) + d(Tv, fx_{2n})\right] \\
&= Md(y_{2n-1}, x^*) + N\left[d(y_{2n-1}, y_{2n}) + d(x^*, gv)\right] \\
&+ Ps\left[d(y_{2n-1}, x^*) + d(x^*, gv)\right] + Pd(x^*, y_{2n}),
\end{aligned}$$

quand $n \to \infty$, on obtient :

$$(I - N - Ps)d(x^*, gv) \leq 0.$$

Notant que $(I - N - Ps)$ est inversible et $(I - N - Ps)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, alors on obtient que $x^* = Tv = gv$. Puisque $g(E) \subset S(E)$, il existe un $u \in E$ tel que $x^* = Su = gv$.
Si $x^* \neq fu$, en utilisant la condition de contraction, on a :

$$\begin{aligned}
d(fu, gv) &\leq Md(Su, Tv) + N\left[d(Su, fu) + d(Tv, gv)\right] \\
&+ P\left[d(Su, gv) + d(Tv, fu)\right] \\
&= Md(x^*, x^*) + N\left[d(x^*, fu) + d(x^*, x^*)\right] \\
&+ P\left[d(x^*, x^*) + d(x^*, fu)\right].
\end{aligned}$$

On obtient :

$$(I - N - P)d(fu, x^*) \leq 0.$$

Comme $(I - N - P)$ est inversible et $(I - N - P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$, on obtient que $x^* = Su = fu$.
Comme les couples (S, f) et (T, g) sont faiblement compatibles, on obtient $fx^* = Sx^*$ et $gx^* = Tx^*$.

Maintenant, nous prouvons que $x^* = fx^* = Sx^*$,

$$\begin{aligned}
d(fx^*, x^*) &= d(fx^*, gv) \\
&\leq Md(Sx^*, Tv) + N[d(Sx^*, fx^*) + d(Tv, gv)] \\
&+ P[d(Sx^*, gv) + d(Tv, fx^*)] \\
&= Md(fx^*, x^*) + P[d(fx^*, x^*) + d(x^*, fx^*)].
\end{aligned}$$

Comme $(I - M - 2P)$ est inversible et $(I - M - 2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ cela implique que $x^* = fx^* = Sx^*$.
De même, on peut prouver que $x^* = gx^* = Tx^*$. Donc x^* est un point fixe commun de f, g, S et T.

S'il existe un autre point fixe commun w en E pour f, g, S et T, alors :

$$\begin{aligned}
d(w,x^*) &= d(fw,gx^*) \\
&\leq Md(Sw,Tx^*) + N\left[d(Sw,fw) + d(Tx^*,gx^*)\right] \\
&+ P\left[d(Sw,gx^*) + d(Tx^*,fw)\right], \\
&= Md(w,x^*) + P\left[d(w,x^*) + d(x^*,w)\right].
\end{aligned}$$

Comme $(I-M-2P)$ est non singulier et $(I-M-2P)^{-1} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}_+)$ cela implique que x^* est un point fixe commun unique de f, g, S et T. ∎

Conclusion

Les théorèmes du point fixe commun dans un espace b-métrique généralisé sont des résultats importants en mathématiques qui trouvent des applications dans de nombreux domaines des mathématiques. Ces théorèmes énoncent l'existence d'un point fixe commun à plusieurs fonctions contractantes dans un espace b-métrique généralisé, sous certaines conditions.

Dans ce travail, nous avons tenté de présenter la théorie dans trois espaces différents : les espaces métriques, les espaces métriques généralisé et les espaces b-métriques généralisé, avec des propriétés contractives. Plusieurs travaux ont été réalisés précédemment dans ce domaine, la différenciation entre ces travaux se trouve : soit dans les propriétés des applications, soit dans les conditions de contraction, soit dans les espaces utilisés, avec des applications dans divers domaines des mathématiques et autres sciences techniques.

Ce mémoire a examiné le théorème de point fixe commun pour plusieurs applications dans un espace b-métrique généralisé en définissant les notions de base et en mettant en évidence les conditions nécessaires pour leur application. Les résultats ont été appliqués pour étudier le cas de quatre applications dans un espace b-métrique généralisé, montrant des résultats sur l'existence et l'unicité du point fixe commun pour des applications qui ne sont pas nécessairement continues. Ces résultats peuvent être utiles dans divers domaines de recherche, tels que les mathématiques appliquées, et peuvent ouvrir la voie à de nouvelles applications dans ces domaines.

Cependant, il reste encore beaucoup à explorer dans ce domaine. Par exemple, il serait intéressant d'étudier des généralisations de ce théorème pour des espaces métriques différents. De plus, il serait utile de chercher des applications concrètes de ce théorème dans des domaines tels que l'analyse numérique.

En somme, cette mémoire a posé les bases pour de futures recherches dans le domaine des espaces b-métriques généralisés et du théorème de point fixe commun.

Bibliographie

[1] H. Aydi ,M.F. Bota ,E Karapınar, S. Mitrović, "A fixed point theorem for set-valued quasi-contractions in b-metric spaces". Fixed Point Theory Appl 2012, 88 (2012).

[2] H. Aydi, E. Karapınar, and B. Samet, "Fixed points for generalized (α,ψ) contractions on generalized metric spaces," Journal of Inequalities and Applications, vol. 2014, article 229, (2014).

[3] I.A. Bakhtin, "The contraction mapping principle in almost metric spaces". Funct. Anal. (1989), 30, 26–37.

[4] S. Banach, "Theorie des poetations lineaires", Monograph, PWN, Warszawa, (1932).

[5] S. Bazine, "Fixed point of four maps in generalized b-metric spaces", Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 13 (2022) 1, 2723-2730.

[6] M. Boriceanu, "Fixed Point theory for multivalued generalized contraction on a set with two b-metrics", studia Univ Babes, Bolya. Math. LIV(3)(2009), 1-14.

[7] M. Boriceanu, M.Bota and A. Petrusel, "Multivalued fractals in b-metric spaces", Cent. Eur. J. Math, 8(2) (2010), 367-377.

[8] M. Bota, A. Molnar and C. Varga, "On ekeland's variational principle in b-metric spaces", Fixed Point Theory 12(2011), no. 2, 21-28.

[9] A. Branciari, "A fixed point theorem of Banach-Caccioppoli type on a class of generalized metric spaces", Publicationes Mathematicae, vol. 57, no. 1-2, pp. 31–37, (2000).

[10] S. K. Chatterjea, "Fixed-point theorems", Doklady Bolgarskoi Akademii Nauk. Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences, Vol. 25,pp. 727-730, (1972).

[11] L. B. Ćirć, "On some maps with non-unique fixed points",Publications de l'Institut Mathématique, vol. 17, no. 31, pp. 52–58, (1974).

[12] S.Cobzas, "b-metric.space.fixed.point.and.Lipschitz.functions",ResearchGate, Feb (2018).

[13] M. Cosentino, M. Jleli, B. Samet, C. Vetro, "Solvability of integrodifferential problems via fixed point theory in b-metric spaces". Fixed Point Theory and Appl, 70(2015).

[14] S. Czerwik, Contraction mappings in b-metric spaces, Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis 1(1993), 5-11.

[15] S. Czerwik, K. Dlutek, SL. Singh, "Round-off stability of iteration procedures for operators in b-metric spaces", J. Natur. Phys. Sci. 11(1997),87-94.

[16] S. Czerwik, "Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces", Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 46(2) (1998) 263–276.

[17] M. Edelstein, "On fixed and periodic points under contractive mappings". Journal of the London Mathematical Society, 1(1), 74-79(1962).

[18] C. Farkas, A. É. Molnár, S. Nagy, "A generalized variational principle in b-metric spaces". Le Matematiche, 69(2), 205-221.(2014).

[19] G. E. Hardy and T. D. Rogers, "A generalization of a fixed point theorems of Reich", Canad. Math. Bull. 16(1973), 201-206.

[20] N. Hussain, V. Parvaneh, J. R. Roshan, Z. Kadelburg, "Fixed points of cyclic weakly (ψ, φ,L,A,B)-contractive mappings in ordered b-metric spaces with applications", Fixed Point Theory Appl. (2013).

[21] A El Jai. "Eléments de topologie et espaces métriques". Presses Universitaires de Perpignan,(2007).

[22] G. Jungck, "Compatible mappings and common fixed points", Int. J. Math. Math. Sci., 9(1986), 771-779.

[23] G. Jungck, "Commuting mappings and fixed points", Amer. Math. Monthly, 83 (4) (1976),261-263.

[24] G. Jungck and B. E. Rhoades, "Fixed point for set valued functions without continuity", Indian J. Pure Appl. Math., 29 (3) (1998), 227-238.

[25] R. Kannan, "Some results on fixed points", Bull. Calcutta. Math. Soc.60 (1968), 71-76.

[26] M. Kir, H. Kiziltune, "On some well known fixed point theorems in B-metric space",Turkish journal of analysis and number theory, (2013), vol. 1,no. 1, 13-16.

[27] J. R. G. J. H. A. Ouahab. "Topological Methods for Differential Equations and Inclusions". Taylor & Francis Group, LLC.

[28] M. Pacurar, "Sequences of almost contractions and fixed points in b-metric spaces",Analele Universitat de Vest, Timisoara, Seria Matematica Informatica XLVIII(2010),no. 3,125-137.

[29] A.I. Perov, "On Cauchy problem for a system of ordinary diferential equations", (in Russian), Priblizhen. Metody Reshen. Difer. Uravn. 2 (1964), 115-134.

[30] R. Precup, "The role of matrices that are convergent to zero in the study of semilinear operator systems", Math. Comput. Modelling, Vol. 49, No.3-4 (2009), 703-708.

[31] E. Rakotch, "A note on contractive mappings", Proc. Amer. Math. Soc.13 (1962), 459-465.

[32] S. Reich, "A comparison of various definitions", Trans. Amer. Math. Soc.226 (1977), 257-290.

[33] I. A. Rus, "Generalized contractions and applications, Cluj University Press", Cluj-Napoca, (2001).

[34] S. Sessa, "On a weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations",Publ. Inst. Math. Beograd 32 (46) (1982), 149-153.

[35] D.R. Smart, "Fixed Point Theorem, Cambridge Tracts in Mathematics", No.66, Cambridge University Press, London.New York,(1974).

[36] D. R. Smart. "Fixed point theorems", volume 66. Cup Archive, (1980).

[37] Y. Sonntag, "Topologie et Analyse Fonctionnelle", Berlin 23-4-1880, (1997).

[38] R. S. Varga, "Matrix Iterative Analysis", Springer Series in Computational Mathematics27, Springer, Berlin, (2000).

[39] R. S. Varga. "Matrix iterative analysis", volume 27. Springer Science & Business Media,(1999).