République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi-Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème:

Théorème de point fixe de krasnoselskii et certaines applications

Présenté Par:

Alleg Hakima

Devant le jury :

Dr Hafdallah Abdalhak	MCA	UnivérsitéLarbi Tébessi	Président
Dr Berrah Khaled	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Dr Merghadi Fayçal	PROF	UnivérsitéLarbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance :
04/06/2023

بسم الله الرحمن الرحيم

شكر وعرفان

أحمد الله على جزيل نعمه، وأشكره الشكر المعترف بمننه وآلائه وأصلي وأسلم على صفوة أنبيائه، وعلى آله وصحبه و أوليائه

قال رسول الله صلى الله عليه وسلم:"لايشكر الله من لايشكر الناس"

وعملا بهذا القول

نتقدم بأسمى عبارات الشكر و التقدير إلى كل من أوقد لنا مشعل الحياة وحملنا على سفينة النجاة.

إلى كل من صرنا بفضله نكتب ونقرأ و....

إلى كل من علمنا علما ينتفع به وأدب يرتفع به .

وأخص بالذكر أستاذي ومشرفي الأستاذ "مرغادي فيصل" على قبوله الإشراف على هذه المذكرة، ولما منحه لي من وقت وجهد وما قدمه لي من نصح وإرشاد طيلة انجاز هذا العمل المتواضع

كما نشكرلجنة المناقشة لقبولها مناقشة هذه المذكرة

زادنا حضوركم شرفا

كما نتقدم بالشكر إلى جميع أساتذة قسم الرياضيات على ما بذلوه من جهد في تعليمنا،

وجميع زملائنا في الجامعة ..لم ولن ننسى تلك الأيام

وإلى طلبة ماستر 2 تخصص الرياضيات دفعة 2022/2023

من قريب أو بعيد ولو بكلمة دعم.

إلى هؤلاء جميعا و إلى غيرهم الذين نعتذر لهم على عدم إدراج أسمائهم سهوا لا جحودا،

نقدم ثمرة هذه الجهود والتي نتمنى أن يستفيد منها الباحثون في مجالي العلم والمعرفة.

الإهداء

الحمد لله الذي وهبني عقلا مفكرا، ولسانا ناطقا وأنار دربي، ويسر أمري لإنهاء هذا العمل والصلاة والسلام على رسول الله صلى الله عليه وسلم

أهدي ثمرة جهدي

إلى من جرع الكأس فارغا ليسقيني قطرة الحب، إلى من كلت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة، إلى الذي أحمل اسمه بكل فخرإلى قدوتي في الحياة

أبي الحبيب أطال الله في عمره

إلى مدرسة الحب و الوفاء والحنان، إلى التي جعلت تحت أقدامها الجنان

إلى ضياء قلبي ونور حياتي، زهرة بيضاء كلما ابتسمت ذهب عني العناء

أمي الحبيبة أطال الله في عمرها

إلى سندي وقوتي وملاذي بعد الله...إلى من آ ثروني على أنفسهم، إخوتي الأعزاء

" سمير"،"توفيق"،"مصطفى"،"فيصل"،"جلال"،"إسماعيل"،"نجيب"

إلى من هي أقرب إلي من روحي وشاركتني حضن الأم وكانت معي في السراء والضراء أختي العزيزة"سليمة"

إلى الكتاكيت:"أية" ،"عبد الحق"،"عصام"،"لؤي"،"براءة".

إلى توأم روحي ورفيقة دربي، إلى من تقاسمت معها شقاء هذا العمل

صديقتي"وفاء"

إلى من سأفتقدهم صديقاتي ورفيقات اللاتي قاسمنني اللحظات الممتعة التي قضيناها معا رعاهم الله ووفقهم

"وفاء"، "إيمان"، "نهال"، "نور"، "بثينة"، "آمال"، "إبتسام"، "سلافة"، "آية" "مريم"، " أسماء".

إلى كل من كان لهم أثر على حياتي وإلى كل من أحبهم قلبي ولم يذكرهم قلمي.

حكيمة" علاق"

Résumé

Dans ce mémoir, nous nous intéressons à l'étude du théorème du point fixe de Krasnoselskii et à certaines de ses applications.

Tout d'abord, nous allons rappeler quelques concepts de base de l'analyse fonctionnelle dont on aura besoin dans la suite du memoir, tout en bordant également quelques théorèmes de base tels que le théorème du point fixe de Banach et celui de Schöder, et leur relation dans la construction du théorème de point fixe de Krasnoselskii.

Ensuite, nous allons étudier l'existance et la stabilité des solutions d'une équation différentielle non linéaire à retard de type neutre en utilisant le théorème du point Fixe de Krasnoselskii-Burton.

Enfin, nous étudierons également l'existance, la stabilité et la stabilité asymptotique des solutions d'une équation différentielle fonctionnelle non linéaire à retard dans un cas plus général.

Mots clés *: point fixe, stabilité, stabilité asymptotique, retard, théorème de Krasnoselskii-Burton, équation non linéaire neutre*

Abstract

In this master's thesis, we are interested in the study of the fixed point theorem of Krasnoselskii and some of its applications.

First, we will recall some basic concepts of functional analysis which we will need in the rest of the manuscript,while also bordering on some basic theorems such as Banach's fixed point theorem and Schöder's fixed point theorem, and their relationship in the construction of Krasnoselskii's fixed point theorem.

Then, we will study the existence and the stability of the solutions of a nonlinear differential equation with delay of neutral type by using the fixed point theorem of Krasnoselskii-Burton.

Finally, we will also study the existence, the stability and asymptotic stability of the solutions of a nonlinear functional differential equation with delay in a more general case.

Keywords: *fixed point, stability, asymptotic stability, delay, Krasnoselskii- Burton Theorem, Equation neutral nonlinear*

ملخص:

في هذه المذكرة نهتم بدراسة نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي-بورتن وتطبيقاتها.
سنبدأ أولا: بالتذكير ببعض المفاهيم الأساسية للتحليل الدالي،كما سنقدم بعض النظريات الأساسية للنقطة الثابتة، مثل نظرية باناخ و شودر، وسنولي الأهمية لنظرية كراسنوسلسكي-بورتن.
ثانيا:ندرس وجود و إستقرار حلول المعادلات التفاضلية الغير خطية حيادية ذات تأخر زمني بإستخدام نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي-بورتن.
وأخيرا ندرس الوجودية، الإستقرار والإستقرار المقارب للحل المعدوم لمعادلة تفاضلية غير خطية حيادية ذات تأخر زمني في حالة عامة بإستخدام نظرية النقطة الثابتة لكراسنوسلسكي-بورتن.

الكلمات المفتاحية: نظريات النقطة الثابتة، الإستقرار، الإستقرار المقارب، تأخر زمني، كراسنوسلسكي-بورتن، المعادلة غير الخطية الحيادية.

Table des matières

Introduction générale

Un point fixe, en mathématiques, est un point qui ne change pas lorsqu'une certaine opération est appliquée dessus. Par exemple, si $f(x)$ est une fonction qui prend une valeur x et renvoie une valeur $f(x)$, un point fixe est la valeur x qui est transformée en elle-même sous l'effet de $f(x)$, c'est-à-dire :

$$f(x) = x$$

Le concept de point fixe peut être appliqué à une variété de sujets en mathématiques, y compris le calcul différentiel et intégral, l'algèbre linéaire, l'analyse fonctionnelle, la géométrie spatiale et bien d'autres.

Le point fixe est un concept important en mathématiques car il peut être utilisé pour trouver des solutions à un certain nombre de problèmes, y compris la résolution d'équations et la recherche de la convergence de certains outils analytiques, tels que la détermination du point fixe de la fonction de transmission.

Le concept du point fixe a été introduit en 1922 par Banach, qui a utilisé le principe de la contraction pour résoudre les équations impliquant des intégrales et des algorithmes, en étudiant l'approximation de ce point. Cette étude a été appliquée dans un espace métrique complet.

En 1930, Schauder a amélioré et généralisé le problème d'existence et d'unicité de Brouwer en insistant sur l'application continue sur un ensemble convexe et compact, par opposition à Brouwer, qui ne considérait que la compacité en raison de son étude de la topologie.

En 1955, Krasnoselskii a remarqué qu'il y avait des difficultés pour intégrer certaines équations différentielles. Pour résoudre ce problème, il a combiné le théorème de Banach et de Schauder en décomposant l'application étudiée en deux parties, l'une étant une contraction et l'autre étant continue et compacte. Ce théorème est très important pour trouver la solution de plusieurs équations intégrales et équations différentielles. Au fil du temps, le théorème de Krasnoselskii est resté un outil très efficace pour étudier de nombreux problèmes, avec des améliorations telles que la notion de contraction large due à Burton. Burton a présenté un nouveau théorème appelé Krasnoselskii-Burton, qui remplace la condition de contraction de Krasnoselskii par une nouvelle notion, la contraction large.

La généralisation du théorème de point fixe ne s'arrête pas, car de nouvelles notions sur la contraction ont été introduites, rassemblant tous les types précédents sous la contraction séparée. Cela implique un changement dans le théorème de Krasnoselskii, qui est désormais appelé la contraction séparée. Malgré les développements des mathématiques au fil du temps, le théorème de Krasnoselskii joue un rôle très important dans la résolution de nombreux problèmes mathématiques.

Les équations différentielles à retard sont des équations différentielles dans les quelles la dérivée dépend de la valeur de la fonction à un temps antérieur. Elles sont souvent utilisées pour modéliser des systèmes dynamiques avec des retards, tels que les réseaux de neurones, les circuits électroniques et les processus biologiques.
Une équation différentielle à retard peut être écrite sous la forme générale :

$$y'(t) = f(y(t), y(t - \tau)),$$

où y est une fonction inconnue de t, τ est le retard et f est une fonction donnée. La solution de cette équation doit satisfaire à la fois l'équation elle-même et une condition initiale $y(t_0) = y_0$ pour un temps initial t_0.
Les applications des équations différentielles à retard sont nombreuses, notamment en biologie pour modéliser le comportement des populations animales ou l'évolution de maladies infectieuses, en économie pour modéliser les effets du temps sur les décisions d'investissement et en ingénierie pour modéliser le comportement des systèmes de contrôle avec retards.
Les équations différentielles de type neutre sont des équations qui contiennent une fonction retardée ou avancée dans leur expression. Elles peuvent être écrites sous la forme générale :

$$y\prime(t) = f(t, y(t), y(g(t))),$$

où $g(t)$ est une fonction retardée ou avancée, et f est une fonction donnée.
Les équations différentielles de type neutre sont souvent utilisées pour modéliser des systèmes dynamiques avec des retards, tels que les systèmes de contrôle, les réseaux de communication et les processus biologiques.
La résolution des équations différentielles de type neutre peut être difficile en raison de la présence d'une fonction retardée ou avancée. Des méthodes numériques spéciales doivent être utilisées pour résoudre ces équations, telles que la méthode des pas multiples ou la méthode des différences finies.
En général, les solutions des équations différentielles de type neutre peuvent avoir un comportement complexe et imprévisible en raison de la présence d'un retard ou d'une avance dans le système. Cependant, ces équations sont importantes pour comprendre le comportement dynamique des systèmes avec retards et pour concevoir des stratégies de contrôle efficaces.
Depuis plus d'un siècle, la méthode directe de Liapunov a été l'outil principal pour étudier les propriétés de stabilité d'un large éventail d'équations différentielles ordinaires, fonctionnelles, aux dérivées partielles et intégrales de Volterra. Cependant, l'application de cette méthode aux problèmes de stabilité dans les équations différentielles et intégrales de Volterra avec retard a

rencontré des obstacles importants lorsque le retard est non borné ou lorsque l'équation comporte des termes non bornés (voir [[16], [11] – [15], [13], [26], [38]] et la littérature associée), ce qui suggère la nécessité d'explorer d'autres alternatives. Ces dernières années, plusieurs chercheurs ont tenté d'étudier la stabilité en utilisant une nouvelle technique. En particulier, Burton, Furumochi, Zhang et d'autres ont lancé une étude dans la quelle ils ont constaté que certaines de ces difficultés peuvent être éliminées ou surmontées en utilisant la théorèmee des points fixes (voir [[2], [16], [11] – [20], [23], [24]] et [[28]]).

La méthode du point fixe est une approche remarquable qui ne résout pas seulement les problèmes de stabilité, mais offre également un avantage significatif par rapport à la méthode directe de Liapunov. Contrairement à la méthode de Liapunov qui repose généralement sur des conditions ponctuelles, la méthode du point fixe utilise souvent des conditions moyennes, comme noté dans [[16]]. Bien que la construction d'une fonctionnelle de Liapunov puisse être difficile, si elle existe, la méthode du point fixe offre un chemin direct pour établir l'existence, l'unicité et la stabilité en une seule étape. Avec simplement un espace métrique complet, un théorème de point fixe approprié et une formule élémentaire de variation de paramètres, les chercheurs peuvent résoudre des problèmes qui les ont frustrés pendant des décennies.

Ce mémoire est divisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on introduit les définitions, propositions et des théorèmes fondamentaux relatifs au point fixe qu'on va utiliser à travers ce mémoire.

le deuxième chapitre, on va appliquer le théorème de Krasnospolskii-Burton pour étudier l'existence et la stabilité de la solution d'une équation différentielle à retard.

Dans le troisième chapitre, nous allons utiliser le théorème du point fixe de Krasnospolskii-Burton pour étudier l'existence et la stabilité et la stabilité asymptotique d'équations différentielles complètement non linéaires avec une fonction de retard dans un cas généralisé.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nons commençons par rappeler briévement quelque notions et notations de base : les espaces, les définitions, les propositions et quelques théorèmes fondamentaux.

1.1 Quelques éléments de la topologie

1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.1 [21] *.Soit X un ensemble. On appelle métrique ou distance tout application :*

$$d : X \times X \to .\mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\},$$

telle que, pour tout x, y et $z \in X$, on ait

(D_1) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

(D_2) $d(x,y) = d(y,x)$; (symétrie)

(D_3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$; (inégalité triangulaire)

(X, d) s'appelle espace métrique.

Exemple 1.1 *(1) Métrique discréte. Elle est définie par :*

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & si\ x = y \\ 1 & si\ x \neq y \end{cases} . \tag{1}$$

(2) Done $X = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a une métrique définie, pour tout $x, y \in X$ par :

$$d(x,y) = \mid x - y \mid, \tag{2}$$

où $\mid . \mid$ représente la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$
(3) Soit $X = \Lambda^n (\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$. Pour tous $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ de Λ^n, l'application définie par :

$$d(x, y) = \sup_{1 \leq i \leq n} \mid x_i - y_i \mid, \tag{3}$$

est une métrique.
si α est réel ≥ 1, on a une métrique par :

$$d_\alpha \left\{ \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

1.1.2 Espace métrique complet

Définition 1.2 [[22]] (***Suite de Cauchy***)

Soit (X, d) un espace métrique. Une suite $(x_n) \subset E$ est dite de Cauchy si $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$ lorsque $n, n \rightarrow \infty$. Autrememt dit si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } d(x_n, x_m) \leq \varepsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

Exemple 1.2 *On munit l'ensemble $C([0,1], \mathbb{R})$ de la distance fondamentale d_1 et considére les suites $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :*

$$f_n(x) = \min\left(n, \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = \begin{cases} n & si \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n^2}, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & si \quad \frac{1}{n^2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout n et m de $\mathbb{N}^*$, avec $n > m$, on écrit :

$$\begin{aligned} d_1(f_n, f_m) &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| \, dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{n^2}} (n - m) \, dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{m^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - m\right) dx + \int_{\frac{1}{m^2}}^{1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \\ &= \left(\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{m}{n^2}\right) + 2\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) - m\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{m} - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Il en résulte qu'il suffit de prendre $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ dans le critère de Cauchy.

Définition 1.3 [[22]] *Un espace métrique (E,d) est dit complet si toute suite de Cauchy de (E,d) est convergente dans (E,d).*

Exemple 1.3 *(i) $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$ est complet mais $(\mathbb{Q}, |\ .\ |)$ n'est pas complet.*

(ii) considérons $E =]0,1]$ muni de la distance usuelle $|\ .\ |$et $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right) \subset E$. Puisque $x_n \longrightarrow 0$ dans $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$, (x_n) est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\ .\ |)$.

Proposition 1.1 [22] *Soit (E,d) un espace métrique et soit $F \subset E$. Si (F,d) est un espace métrique complet alors F est un fermé de E.*

1.1.3 Espace compact

Un espace topologique X est dit compact s'il est séparé et si tout recouvrement ouvert de X admet un sous-recouvrement fini.
Un espace discret est compact si et seulement s'il est fini, car famille de ses singletons est un recouvrement ouvert.

Définition 1.4 [22] ***(Ensemble compact)***

Soit (E,d) un espace métrique. On dit E est compact si et seulement si de tout recouvrement de E par une famille d'ouverts $(O_i)_{i \in I}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini. En d'autres termes, pour tout famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts telle que $E = \cup_{i \in I} O_i$, il existe $i_1, i_2, \ldots, i_n$ tel que $E = O_{i1} \cup O_{i2} \cup \ldots \cup_n O_{in}$.

Proposition 1.2 *Tout espace compacte est borné.*

Proposition 1.3 *Un espace compact est complet.*

Preuve. Soit (X,d) un espace compact. Alors toute suite de cauchy admet une valeur d'qdhérence, elle est donc convergent, par conséquent (X,d) est complet. ■

1.1.4 Espace de Banach

Définition 1.5 [22] *Un espace vectoriel normé et complet (pour la distance induite par la norme) est appelé un espace de Banache.*

Exemple 1.4 *L'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne, $C[a,b]$ muni de la norme du maximum et les espaces L^p munis de leurs normes usuelle sontdes espaces de Banach.*

Définition 1.6 [22] ***(Ensemble fermé)***

soit (E, d) un espace métrique. Un ensemble $F \subset E$ est fermé. Si et seulement si son complémentaire $E \setminus F$ noté $C_E F$ est un ouvert.

1.1.5 Ensembles convexes-Fonction convexe

Définition 1.7 [37]***(Ensembles convexes)***

Soit E un espace vectoiel sur $\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $A \subset E$. On dit que A et convexe si :

$$\forall x, y \in A, \forall \lambda \in \left]0,1\right[: \lambda x + (1-\lambda)\, y \in A.$$

Définition 1.8 [37] (***Fonction convexe***). *Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie sur un interval I de $\mathbb{R}$. f est convexe si seulement si :*

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \left]0,1\right[: f(\lambda x + (1-\lambda)\, y) \leq \lambda . f(x) + (1-\lambda) . f(y) .$$

Définition 1.9 [21] ***(Homéomrphisme)***. *Si f bijective, continue et f^{-1}continue, alors $f : E \to F$ est une application homéomrphisme.*

Définition 1.10 ***(Convergence)***. *Soit S espace de Banach, et soit φ_n une suite de S. On dit que φ_n converge vers $l \in S_\psi$ si $\forall \varepsilon < 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n < n_0$;*

$\|\varphi_n - l\|_S \leq \varepsilon.$

Définition 1.11 *[29, 29]**(Convergence uniforme)**.Soient $f_n,\ f : (X, d) \to (Y, D)$. La suite (f_n) Convergence uniformément vers $f \iff \exists \alpha_n \geq 0$ tel que $D(f_n(x), f(x)) \leq \alpha_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$ et $\alpha_n \to 0$.*

Définition 1.12 [22] ***(Application continue).*** *Soient (E_1, d_1) et (E_2, d_2) deux espaces métriques et $f : E_1 \to E_2$ une application. On dit que f est continue en point $a \in E_1$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \ \text{ tel que } d_1(x, a) \leq \alpha \Longrightarrow d_2(f(x), f(a)) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.13 ***(Application Contractant)***. *Soient (X, d) est un espace métrique et $T : X \to X$ une application. On dit que T contractante s'il existe une constante $0 < \alpha < 1$ tel que*

$$\forall x, y \in X,\ d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) .$$

Définition 1.14 ***(Application Lipschitzienne).*** *$\forall x, y \in X$, $f : (X, d) \to (Y, d')$ est k-lipschitizienne si $d'(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. f est lipschitzienne s'il existe un $k > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne.*

Théorème 1.1 ***(Ascoli-Arzela).*** *Si f_n est un suite de fonctions réelles uniformément bornée et équi-continue définie sur un intervalle $[a, b]$, alors il existe une sous-suite de f qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction continue.*

1.2 Quelques théorèmes de base du point fixe

1.2.1 Théorème du point fixe

Théorème 1.2 *: Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application de contractante k. Alors on a L'application f possède un unique point fixe $x \in X$.*

$$f(x) = x.$$

Exemple 1.5 *.Soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 1.$$

On va chercher les points fixes de l' application f

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \frac{1}{3}x + 1 = x \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Alors f admet un seul point fixe dans $\mathbb{R}$.

1.2.2 Théorème du point fixe de Banach

Le théorème de l'application contractante dit qu'il existe un point fixe dans un espace où la distance entre deux points change. Ce théorème est basé sur l'idée qu'il existe une manière "naturelle" de se dèplacer dans un espace.

Théorème 1.3 *Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application contractante de constant k. Alors il existe un point unique $x \in X$ tel que $f(x) = x$.*
De plus, pour tout point initial $x_0 \in X$, la suite itérée $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donnée par

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

converge vers x
avec

$$d(x, x_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0)).$$

Preuve. $i)$. <u>L'existence :</u> Soit x_0 point initial quelconque et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 \in X \\ x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nous allons établir que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque f contractante, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f(x_{n-1}), f(x_n)) \\ &\leq kd(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \\ &\quad \vdots \\ &\leq k^n d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $m > n$, où $n \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq k^n d(x_1, x_0) + k^{n+1} d(x_1, x_0) + \ldots + k^{m-1} d(x_1, x_0) \\ &\leq \left(k^n + k^{n+1} + \ldots + k^{m-1}\right) d(x_1, x_0) \\ &\leq k^n \left(1 + k + k^2 + \ldots + k^{m-n-1}\right) d(x_0, x_1) \\ &\leq k^n \left(\frac{1-k^{m-n}}{1-k}\right) d(x_1, x_0) \text{ puisque } 1 - k^{m-n} < 1 \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \to 0 \text{ quand } n \to \infty \text{ car } \alpha \in [0,1]. \end{aligned}$$

Ceci montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de suite Cauchy et comme X qui est espace complet, alors il existe x danc X tel que $x_n \to x$.
Par ailleurs puisque f est continue, on a

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x).$$

Donc x est un point fixe de f.
$ii)$<u>*Unicité :*</u> supposons qu'il existe de points $x, y \in X$ tel que $x \neq y$, $x = f(x)$ et $y = f(y)$.
Alors, on a

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

Donc

$$\frac{d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)}{d\left(x,y\right)}=1.$$

D'autre part, f est contractante donc

$$\frac{d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)}{d\left(x,y\right)}\leq k<1.$$

Ce qui est contradictoire d'où l'unicité. ■

1.2.3 Théorème du fixe de Schauder

Le théorème du point fixe de Schauder dit qu'il existe un point fixe d'un application continue sur un ensemble convexe compact, qui peut ne pas être le seul point fixe possible.

Théorème 1.4 *Soit C un sous ensemble non vide, convexe et compact d'un espace de Banach X. Alors toute application continue $T : C \rightarrow C$ possède un point fixe.*

Preuve. Soit $T : C \rightarrow C$ une application continue. Comme C est compact, T est uniformément continue sur C, donc, si on fixe $\epsilon > 0$,il existe $\delta > 0$ tel que, pout tout $x, y \in C$, on ait

$$\parallel T\left(x\right)-T\left(y\right)\parallel\leq\epsilon,\text{ dès que }\parallel x-y\parallel\leq\delta.$$

De plus, il existe un ensemble fini des point $\{x_1,\ldots,x_p\}\subset C$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_j recouvrent C;
i.e

$$C\subset\bigcup_{1\leq j\leq p}B\left(x_j,\delta\right).$$

Si on désigne $L := Vect\left(T\left(x_j\right)\right)_{1\leq j\leq p}$, alors L est de dimension fnie, $C^* := C \cap L$ est compact convexe de dimension fnie.
Pour $1 \leq j \leq p$, no définit la fonction continue $\psi_j : X \rightarrow R$ par :

$$\psi_j\left(x\right)=\begin{cases}0 & \text{si }\parallel x-x_j\parallel\geq\delta\\ 1-\frac{\|x-x_j\|}{\delta} & \text{si non}\end{cases},$$

et on voit que ψ_j est strictement positive sur $B\left(x_j,\delta\right)$ et nulle dehors.

On a donc, pour tout $x \in C$, $\sum_{j=1}^{p}\psi_j\left(x\right) > 0$,et donc on peut définir sur C les fonctions continues positives φ_j par

$$\varphi_j = \frac{\psi_j(x)}{\sum_{k=1}^{p} \psi_k(x)},$$

pour lesquelles on a $\sum_{i=1}^{p} \varphi_j(x) = 1$ pour tout $x \in C$.

Posons maintenan, pour $x \in C$,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(x) T(x_j).$$

g est continue (somme des fonctions continues), et prend ses valeurs dans C^* (car g est un barycentre des $T(x_j)$).

Donc, si on prend la restriction $g/C^* : C^* \to C, g$ possède un point fixe $y \in C^*$.

De plus

$$\begin{aligned} T(y) - y &= T(y) - g(y) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) T(y) - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j T(x_i) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) (T(y) - T(y)). \end{aligned}$$

Or si $\varphi_j(y) \neq 0$ alors $\| y - x_j \| < \delta$, et par suite $\| T(y) - T(x_j) \| < \epsilon$. Donc, on a pour tout j

$$\begin{aligned} \| \quad T(y) - y \| &\leq \sum_{j=1}^{p} \varphi_j(y) \| T(y) - T(x_j) \| \\ \leq \quad \sum_{j=1}^{p} \epsilon \varphi_j(y) = \epsilon. \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier, m on peut trouver un point $y_m \in C$ tel que

$$\| T(y_m) - y_m \| \leq 2^{-m}.$$

Et puisque C est compact, alors de la suite $(y_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous (y_{m_C}) qui converge vers un point $y^* \in C$.

Alors T étant continue, la suite $(T(y_{mC}))$ converge vers $T(y^*)$, et on conclut que

$$T(y^*) = y^*.$$

C'est-a-dire y^* est un point fixe de T sur C. ∎

1.2.4 Théorème du point fixe de Krasnoselskii

Le Théorème du point fixe de Krasnoselskii est un résultat hybride et est basé sur les Théorèmes de Banach et Schauder.

Théorème 1.5 *Soit M un sous-ensemble non vide ferme et convexe d'un espace de Banach $(S, \| \, . \, \|)$. On suppose que A, B sont deux applications de M dans X telles que :*

$i)$ $Ax + By \in M$ $(\forall x, y \in M)$;
$ii)$ A est continue et AM est contenu dans un ensemble compact ;
$iii)$ B est une contraction de constante $\alpha < 1$.
Alors il existe $z \in M$, avec $Az + Bz = z$.

C'est un résultat passionnant et a de numbreuses applications intéressantes. il est motivé par l'observation que l'inversion de l'opérateur différentil perturbé peut donner la somme des opérateurs compacts et contraction.
Mais le résultat a une faiblesse majeure. Opérateurs donnés A et B, il peut être possible de trouver des ensmbles M_1 et M_2 à $A : M_1 \to M_1$ et $B : M_2 \to M_2$, mais si les ensembles sont bornés (qui est souvent nécessaire si AM doit être dans un ensemble compact), alors il est souvent impossible d'arranger les maths de sorte que $M_1 = M_2$ et $Bx + By \in M$.
Le point de cette note est qu'un lecture attentive de la preuve révèle deux éléments.
$a)$ Les quantifiées en (i) sont trop strictes. Ce qu'il faut en fait c'est que pour les fixes $y \in M$, si x est point fixe unique de l'application de contraction $x \to x + Ay$, alors $x \in M$. Cette observation est très utile dans les

applications, d'ailleurs, les enquêteurs ultérieurs cherchant à étendre le résultat ne l'ont par remarqué, comme on peut le voir, par exemple, dans un travail récent de ce type par O'Regan $[3, p.2]$.
$b)$ La preuve du Théorème 1 dépend du fait que $(I - B)$ est un inverse continue et B contraction. on a

$$\begin{aligned}
& \| \quad (I - B)\, x - (I - B)\, y \, \| \\
= & \;\; \| \, (x - y) - (Bx - By) \, \| \\
\geq & \;\; \| \, x - y \, \| - \| \, Bx - By \, \| \\
\geq & \;\; \| \, x - y \, \| - \alpha \, \| \, x - y \, \| \\
\geq & \;\; (1 - \alpha) \, \| \, x - y \, \| \, .
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
&\| \quad (I-B)\,x-(I-B)\,y \,\| \\
&= \quad \| \,(x-y)-(Bx-By)\, \| \\
&\leq \quad \| \,x-y\, \| + \| \,Bx-By\, \| \\
&\leq \quad \| \,x-y\, \| + \alpha \| \,x-y\, \| \\
&\leq \quad (1+\alpha) \| \,x-y\, \| \,.
\end{aligned}$$

En résumé,

$$(1-\alpha) \| \,x-y\, \| \leq \| \,(I-B)\,x-(I-B)\,y\, \| \leq (1+\alpha) \| \,x-y\, \| \tag{1}$$

On pose : $z=x-y$, alors

$$(1-\alpha) \| \,z\, \| \leq \| \,(I-B)\,x\, \| \leq (1+\alpha) \| \,x\, \| \,.$$

Donc

$$(1-\alpha) \| \,x\, \| \leq \| \,(I-B)\,x\, \| \leq (1+\alpha) \| \,x\, \| \,. \tag{2}$$

Ces relations reposent uniquement sur la seule propriété de contraction.
Nous notons qu'un serrage de (2) nous permet de confirmer l'exigence que $x=Bx+Ay$ $x \in M$.C'est illustré dans un exemple.

Théorème 1.6 *Soit M un sous-ensemble fermé, convexe et non vide d'un espace de Banach $(S, \| \,.\, \|)$ .On supposons qu'un $A : M \to S$ et $B : S \to S$ tel que :*
(i) B est un contraction de constante $\alpha < 1$;
(ii) A est un continue, AM réside un sous-ensemble compact de S;
(iii) $[x=Bx+Ay, y \in M] \Longrightarrow x \in M$.
Alors, il existe $z \in M$ avec $Az+Bz=z$.

Remarque 1.1 *Il sera clair que B n'a besoin d'être défini que sur un ensemble $H \subset S$ tel que M et si $[y \in M$ et $x \in H]$, alors $Bx+Ay \in H$.*

Proposition 1.4 *Soit (i) et (ii) du Théorème 2 sont satisfaites. Supposons il y un $r>0$ pour que M $=\{y \in S \,|\| \,y\, \| \leq r\}$ et $AM \subset M$.*
Si (2) est fait souvent,

$$\| \,x\, \| \leq \| \,(I-B)\,x\, \| \,. \tag{2*}$$

Alors, la condition (iii). Du Théorème 2 est satisfaite.

Exemple 1.6 *Soit $0 < \alpha < 1$ et considérons l'équation intégrale suivante :*

$$x(t) = -\alpha \sin^2 t \left[\frac{x^3(t)}{(1 + 2x^2(t))}\right] + p(t) + \int_{-\infty}^{t} D(t-s)\, g(x(s))\, ds. \tag{3}$$

Où p, D et g sont applications continus et $p(t + 2\pi) = p(t)$.
Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que

$$| x | \leq r \Longrightarrow | g(x) | \leq r - \| p \|, \tag{4}$$

et que

$$\int_{-\infty}^{t} | D(t-s) | \, ds \leq 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{t} | D'(t-s) | \, ds < \infty. \tag{5}$$

Alors l'equation intégrale (3) admet une solution $2\pi-$périodique.
Ici,

$$(Bx)(t) = -\alpha \sin^2 t \left[\frac{x^3(t)}{(1 + 2x^2(t))}\right].$$

Et

$$(Ax)(t) = p(t) + \int_{-\infty}^{t} D(t-s)\, g(x(s))\, ds.$$

Tandis que $(S, \| \, . \, \|)$ est l'éspace de Banach des fonctions continues $2\pi-$périodiques avec la norme de supremum, et $M = \{y \in S \mid \| y \| \leq r\}$.
Il est clair que la condition (2^{*})est satisfaite. Nous ne voyons aucun moyen d'établir un ensemble M tel que (i) du Théorème1 soit vérifié.
Pour tout ensemble M que l'on construit, on trouve des $x, y \in M$ avec Ay, $Bx \in M$, mais $Ay + Bx \notin M$.
Le résultat de Krasnoselskii a été d'un intérêt continu. En 1971, Reinermann $[4]$ a obtenu deux Théorèmes liés au Théorème 1.
Il a demandé que $A + B : M \to M$, tandis que $A, B : M \to S$.
Cette année seulement, O'Regan $[3]$ déclare avoir étendu le résultat de Reinermann en supposant que
(i) $A + B : M \to S$,
(ii) $A + B$ se condense, et
(iii) si $\{(x_j, \lambda_j)\}_{j=1}^{\infty}$ est une suite dans $\partial Mx\ [0, 1]$ convergeant vers (x, λ) avec $x = \lambda(A + B)x$ et $0 < \lambda < 1$, alors $\lambda_j(A + B)x_j \in M$ pour un grand j.

Lemme 1.1 *Si B est un application contraction d'un sous-ensemble X d'un espace normé S en S,alors $(I - B)$ est un homeomorphism de X sur $(I - B)X$. Si $(I - B)X$ est précompact, ainsi est X.*

D'autres part, pour tout y fixé dans M, l'application $z \to Bx + Ay$ définit une contraction de X dans X.
$z = Bx + Ay$ possède une solution unique $z \in M$. Ainsi, $(I - B)\,z = Ay$ ou $z = (I - B)^{-1}\,Ay$ est un élément de M pour tout $y \in M$. Maintenant AM résidez dans un sous-ensemble compact de S, tandis que $(I - B)^{-1}$ est continue, et donc $(I - B)^{-1}\,AM$ réside dans un sous-ensemble compact de l'ensemble fermé M. D'après le Théorème de Schauder's $(I - B)^{-1}\,A$ possède un point fixe $y \in M$: $y = (I - B)^{-1}\,Ay$
•Pour prouver la proposition. Si

$$x = Bx + Ay,$$

alors

$$(I - B)\,x = Ay.$$

Donc, par la première partie (2^*) , nous avons

$$\| \; x \; \| \leq \| \; (I - B)\,x \; \| = \| \; Ay \; \| \leq r,$$

comme

$$y \in M \Longrightarrow Ay \in M \Longrightarrow \| \; Ay \; \| \leq r.$$

Alors, $x \in M$.
•Nous montrons maintenant que les conditions du Théorème 2 sont vérifiées pour l'exemple. Rappelez-vous que A, B, S et M sont définis dans l'exemple.
de plus, si $y \in M$, avec $\| \; y \; \| \leq r$ on a :

$$\| \; Ay \; \| \leq \| \; p \; \| + \int_{-\infty}^{t} \mid D\,(t - s) \mid [r - \| \; p \; \|]\,ds$$

$$\leq \| \; p \; \| + 1\,[r - \| \; p \; \|] = r,$$

et un changement de variable montre que $(Ay)(t + 2\pi) = (Ay)(t)$. Donc, $A : M \to M$.
C'est un exercice élémentaire de montrer que A envoie M dans un ensemble équicontinu. De plus, la continuité de A sur M se vérifie facilement.B est une contraction à constante α.

$$\begin{aligned} & \|Bx\,(t) - By\,(t)\| \\ = \; & \left\| -\alpha \sin^2 t \left[\frac{x^3\,(t)}{(1 + 2x^2\,(t))} \right] + \alpha \sin^2 t \left[\frac{y^3\,(t)}{(1 + 2y^2\,(t))} \right] \right\| . \end{aligned}$$

On a, $0 < \alpha < 1$ et $\sin t \leq 1$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\|Bx(t) - By(t)\| &\leq \alpha \left\| \frac{y^3(t)}{(1+2y^2(t))} - \frac{x^3(t)}{(1+2x^2(t))} \right\| \\
&\leq \alpha \left\| \frac{y^3(t)(1+2x^2(t)) - x^3(t)(1+2y^2(t))}{(1+2y^2(t))(1+2x^2(t))} \right\| \\
&\leq \alpha \left\| \frac{y^3(t) + 2y^3(t)x^2(t) - x^3(t) - x^3(t)2y^2(t)}{(1+2y^2(t))(1+2x^2(t))} \right\| \\
&\leq \alpha \left\| \frac{(x^3 - y^3) + x^3(t)2y^2(t) - 2y^3(t)x^2(t)}{(1+2y^2(t))(1+2x^2(t))} \right\|.
\end{aligned}$$

D'autre par, $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$.
Alors,

$$\begin{aligned}
\|Bx(t) - By(t)\| &\leq \alpha \left\| \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2) + (x-y)(2x^2y^2)}{(1+2y^2(t))(1+2x^2(t))} \right\| \\
&\leq \alpha \|x-y\| \left\| \frac{x^2+xy+y^2+2x^2y^2}{4x^2y^2+2y^2+x^2+1} \right\| \\
&\leq \alpha \|x-y\|.
\end{aligned}$$

Car, $\frac{x^2+xy+y^2+2x^2y^2}{4x^2y^2+2y^2+x^2+1} \leq 1$.
Donc, B est une contraction à constante α.

REMARQUE

Cette proposition n'est pas la seule façon de tester (iii) du Théorème 2 peut être vérifié.
Si $Px = Bx + Ay$ est une contraction du point fixe z et si φ est un point quelconque, alors $\|z - \varphi\| \leq (1/(1-\alpha)) \|\varphi - P\varphi\|$ (voir$[6, p.3]$).
Dans un problème donne, un choix judicieux de φ peut déterminer $z \in M$. Appliquer la Théorème du point fixe est un art.
La plupart des bons résultats sont basés sur des choix intelligents. Mais si l'imagination échoue, $P^k\varphi \to z$, il y a donc toujours l'alternative d'essayer d'itérer sur P.
L'equation $x = bx + ay$, $y \in M$ peut avoir des propriétés telles qu'elle peut montrer qu'il existe une limite a priori aux solutions dans l'ensemble S ; cette limite peut donner $x \in M$.
Mais il y a une idée beaucoup plus précise que le lecteur peut trouver attrayante.
CONJECTURE. La proposition est toujours vraie si (2^*) est remplacé par

$$x \neq 0 \Longrightarrow \|(I - B)x\| < \|x\|. \tag{2**}$$

Nous n'avons pas pu prouver la conjecture. Mais une certaine symétrie du problème suggère que c'est vrai. Il peut s'agir d'un simple argument de rétractation, lorsqu'il est vu correctement.

Définition 1.15 *L'application* $f : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *est dite satisfaire aux conditions de Carathéodory par rapport à* $L^1 [0, \infty)$ *si les conditions suivantes sont vérifiées.*
$i)$ *Pour tout* $z \in \mathbb{R}^n$*, l'application* $t \to f(t, z)$ *est Lebesgue mesurable.*
$ii)$ *Pour presque tout* $t \in [0, \infty)$*, l'application* $z \to f(t, z)$ *est continue sur* $\mathbb{R}^n$*.*
$iii)$ *Pour tout* $r > 0$*, il existe* $\alpha_r \in L^1 ([0, \infty), \mathbb{R}^+)$ *tel que pour presque tout* $t \in [0, \infty)$ *et pour tout* z *tel que* $\mid z \mid < r$*, on a* $\mid f(t, z) \mid \leq \alpha_r(t)$

Définition 1.16 *Soit* (M, d) *un espace metrique et supposons que* $B : M \to M$*. On dit que* B *est une grande contraction, si pour* $\varphi, \phi \in M$*, avec* $\varphi \neq \phi$*,*
on a
$d(B\varphi, B\phi) < d(\varphi, \phi)$*, et si* $\epsilon > 0, \exists \delta < 1$*tel que*

$$[\varphi, \phi \in M, \quad d(\varphi, \phi) \geq \epsilon] \Longrightarrow d(B\varphi, B\phi) < \delta d(\varphi, \phi).$$

Il est prouvé dans [[11]] qu'une contraction large définie sur un espace métrique borné et complet a un unique point fixe.

1.3 La stabilité

Définition 1.17 [16, 16]*La solution triviale* $x = 0$ *est dite stable en* $t_0 = 0$ *si pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\psi : [m_0, 0] \to (-\delta, \delta) \Longrightarrow |x(t)| < \varepsilon \text{ pour } t > m_{0.}$$

Définition 1.18 [16, 16]*La solution triviale* $x = 0$ *est dite asymptotiquement stable si elle stable en* $t_0 = 0$ *et si il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute les fonctions continue* $\psi : [m_0, 0] \to (-\delta, \delta)$*, la solution* $x(t)$ *avec* $x(t) = \psi(t)$ *converge vers* 0 *comme* $t \to 0$*.*

Chapitre 2

Solutions et stabilité d'une équation différentieille non linéaires de type neutre par le théoréme de Krasnoselskii-Burton

Dans ce chapitre, nous prouverons l'existence et stabilité de solution zéro d'une classe d'équations différentielles non linéaires complètement neutres avec une fonctionnelle de retard par le Théorème du point fixe de Krasnoselskii-Burton.

L'étude suivante porte sur une équation différentielle neutre totalement non linéaire avec retard fonctionnel. Pour appliquer la théorème du point fixe, il est crucial de convertir l'équation différentielle en une équation d'application appropriée. Cependant, dans notre cas, l'absence d'un terme linéaire nous empêche d'utiliser la méthode de variation des paramètres. Par conséquent, nous nous appuyons sur l'approche traditionnelle d'ajouter et de soustraire un terme linéaire à l'équation de application.

Notre équation est une équation différentielle neutre totalement non linéaire avec un retard fonctionnel exprimé comme suit :

$$x'(t) = -a(t)\,x^3(t) + c(t)\,x'(t - r(t)) + b(t)\,x^3(t - r(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

avec une condition initiale

$$x(t) = \psi(t), \ t \in [m_0, 0],$$

et

$$\psi \in C([m_0, 0], \mathbb{R}), [m_0, 0] = \{u \leq 0 \mid u = t - r(t), t \geq 0\}.$$

On suppose que $a, b \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ avec $a(t) \geq 0, c \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ est $r \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ tel que :

$$r'(t) \neq 1, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{2.2}$$

Des cas particuliers de l'équation (2.1) ont été considéré et examiné sous conditions différentes et avec plusieurs méthodes. En particulier, lorsque $c = 0$ on obtient l'équation à retard suivante :

$$x'(t) = -a(t)\,x^3(t) + b(t)\,x^3(t - r(t)), \quad t \geq 0. \tag{2.3}$$

Théorème 2.1 (*Burton*).*Supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :*

$$\int_0^\infty a(u)\,du = \infty, \; J\,|b(t)| \leq a(t) \;\; \textit{avec } J > 1,$$

$$\frac{b(t)}{a(t)} \to \infty \;\; \textit{lorsque} \;\; t \to \infty.$$

Si $L = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et si ψ est une fonction continue telle que :

$$\|\psi\| + \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{3}}{9J} \leq L,$$

alors il existe une solution $x(t, 0, \psi)$ de (2.3), avec $|x(t, 0, \psi)| < L$ pour tout $t \geq 0$ et $x(t, 0, \psi) \to 0$ quand $t \to \infty$.

Motivé par ce travail de Burton, nous allon essayer, ici, de donner une étude de la délimitation et de la stabilité de la solution zéro qui concerne d'équations différentielles totalement non linéaire de type neutre (2.1).

2.1 L'inversion et le théorème de point fixe

Nous allons inverser (2.1) et au cours de cette procédure une intégration par partie va être effectuée sur le terme neutre $x(t - r(t))$. Malheureusement, en faisant cela, une dérivée $r'(t)$ retard va apparaître sur le chemin et nous devons donc la supporter.

Lemme 2.1 *Supposons que* (2.2) *est vérifiée.* $x(t)$ *est solution de l'équation* (2.1) *si et seulement si*

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[\psi(0) - \frac{c(0)}{1 - r'(0)}\psi(-r(0))\right] e^{-\int_0^t a(u)du} \\ &\quad + \frac{c(t)}{1 - r'(t)}x(t - r(t)) - \int_0^t \mu(s)\,x(s - r(s))\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\ &\quad + \frac{c(t)}{1 - r'(t)}x(t - r(t)) - \int_0^t \mu(s)\,x(s - r(s))\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\ &\quad + \int_0^t b(s)\,x^3(s - r(s))\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\ &\quad + \int_0^t a(s)\left[x(s) - x^3(s)\right] e^{-\int_s^t a(u)du}ds. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Où
$$\mu(t) = \frac{(c'(t) + a(t)c(t)(1 - r'(t)) + c(t)r''(t)}{(1 - r'(t))^2}. \tag{2.5}$$

Preuve. Supposons que $x(t)$ est une solution de l'équation (2.6) . Mettons l'équation (2.6) sous la forme

$$x'(t) + a(t)x(t) - a(t)x(t) = -a(t)x^3(t) + c(t)x'(t - r(t)) + b(t)x^3(t - r(t)).$$

Alors

$$x'(t) + a(t)x(t) = a(t)x(t) - a(t)x^3(t) + c(t)x'(t - r(t)) + b(t)x^3(t - r(t)).$$

En multipliant les deux côtés de cette équation par $e^{\int_0^t a(u)du}$ et puis en intégrant de 0 à t, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^t [(x'(s) + a(s)x(s))e^{\int_0^s a(u)du}]ds &= \int_0^t [a(s)x(s) - a(s)x^3(s) + c(s)x'(s - r(s)) \\ &\quad + b(s)x^3(s - r(s))]e^{\int_0^s a(u)du}ds,\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}&\int_0^t x'(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t a(s)x(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds \\ = &\int_0^t a(s)x(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds - \int_0^t a(s)x^3(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds \\ &+ \int_0^t c(s)x'(s - r(s))e^{\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t b(s)x^3(s - r(s))e^{\int_0^s a(u)du}ds.\end{aligned}$$

Par intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^t x'(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds \\ &= [x(s)e^{\int_0^s a(u)du}]_0^t - \int_0^t x(s)a(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds \\ &= x(t)e^{\int_0^t a(u)du} - x(0) - \int_0^t x(s)a(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds.\end{aligned}$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&x(t)e^{\int_0^t a(u)du} - x(0) - \int_0^t x(s)a(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t a(s)x(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds \\ = &\int_0^t a(s)x(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds - \int_0^t a(s)x^3(s)e^{\int_0^s a(u)du}ds \\ &+ \int_0^t c(s)x'(s - r(s))e^{\int_0^s a(u)du}ds + \int_0^t b(s)x^3(s - r(s))e^{\int_0^s a(u)du}ds.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} x(t)\, e^{\int_0^t a(u)du} &= x(0) + \int_0^t a(s)\, x(s)\, e^{\int_0^s a(u)du} ds - \int_0^t a(s)\, x^3(s)\, e^{\int_0^s a(u)du} ds \\ &+ \int_0^t c(s)\, x'(s-r(s))\, e^{\int_0^s a(u)du} ds + \int_0^t b(s)\, x^3(s-r(s))\, e^{\int_0^s a(u)du} ds. \end{aligned}$$

En divisant les deux membres de l'équation ci-dessus par $e^{\int_0^t a(u)du}$

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0)\, e^{-\int_0^t a(u)du} + \int_0^t a(s)\, x(s)\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds - \int_0^t a(s)\, x^3(s)\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &+ \int_0^t c(s)\, x'(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \int_0^t b(s)\, x^3(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \end{aligned}$$

On a : $x(t) = \psi(t)$

Alors

$$\begin{aligned} x(t) &= \psi(0)\, e^{-\int_0^t a(u)du} + \int_0^t a(s)\, x(s)\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds - \int_0^t a(s)\, x^3(s)\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &+ \int_0^t c(s)\, x'(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \int_0^t b(s)\, x^3(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} x(t) &= \psi(0)\, e^{-\int_0^t a(u)du} + \int_0^t a(s)\, [x(s) - x^3(s)] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &+ \int_0^t c(s)\, x'(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \int_0^t b(s)\, x^3(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ecrivons

$$\begin{aligned} &\int_0^t c(s)\, x'(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &= \int_0^t (1-r'(s))\, x'(s-r(s))\, \frac{c(s)}{(1-r'(t))} e^{-\int_s^t a(u)du} ds. \end{aligned}$$

En effectuant une intégration par partie avec

$$U = \frac{c(s)}{(1-r'(t))} e^{-\int_s^t a(u)du},$$

et

$$dV = (1-r'(s))\, x'(s-r(s)).$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\int_0^t (1-r'(s))\, x'(s-r(s)) \frac{c(s)}{(1-r'(t))} e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
= &\left[\frac{c(s)}{(1-r'(t))} e^{-\int_s^t a(u)du} x(s-r(s))\right]_0^t \\
&-\int_0^t [(\frac{c'(s)(1-r'(s))-r''(s)c(s)}{(1-r'(s))^2}) e^{-\int_s^t a(u)du} - a(s)\, e^{-\int_s^t a(u)du} \frac{c(s)}{(1-r'(s))}] x(s-r(s))\, ds \\
= &\left[\frac{c(s)}{(1-r'(t))} e^{-\int_s^t a(u)du} x(s-r(s))\right]_0^t - \int_0^t [(\frac{c'(s)(1-r'(s))+r''(s)c(s)}{(1-r'(s))^2}) x(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
&-\int_0^t a(s) \frac{c(s)}{(1-r'(s))} x(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
= &\frac{c(t)}{1-r'(t)} x(t-r(t)) - \frac{c(0)}{1-r'(0)} e^{-\int_0^t a(u)du} x(-r(0)) \\
&-\int_0^t [(\frac{(c'(s)+a(s)c(s))(1-r'(s))+r''(s)c(s)}{(1-r'(s))^2}) e^{-\int_s^t a(u)du} x(s-r(s))\, ds.
\end{aligned}$$

Nous avons $\mu(t)$ est donné par 2.5

on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^t c(s)\, x'(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
= &\frac{c(t)}{1-r'(t)} x(t-r(t)) - \frac{c(0)}{1-r'(0)} e^{-\int_0^t a(u)du} x(-r(0)) \\
&-\int_0^t \mu(t)\, e^{-\int_s^t a(u)du} x(s-r(s))\, ds.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Alors la substitution de (2.7) dans (2.6).

Donc

$$\begin{aligned}
x(t) = &\left[\psi(0) - \frac{c(0)}{1-r'(0)} \psi(-r(0))\right] e^{-\int_0^t a(u)du} \\
&+\frac{c(t)}{1-r'(t)} x(t-r(t)) - \int_0^t \mu(s)\, x(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
&+\int_0^t b(s)\, x^3(s-r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
&+\int_0^t a(s) \left[x(s) - x^3(s)\right] e^{-\int_s^t a(u)du} ds,
\end{aligned}$$

■

Soit (M,d) un espace métrique et $F : M \to M$. F est une contraction large si $\varphi, \psi \in M$ avec $\varphi \neq \psi$ alors $d(F\varphi, F\psi) < d(\varphi,\psi)$ et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta < 1$ tel que

$$[\varphi, \psi \in M,\ d(\varphi,\psi) \geq \varepsilon] \Longrightarrow d(F\varphi, F\psi) \leq \eta d(\varphi,\psi).$$

Théorème 2.2 $(Burton)$. *Soient* (M, d) *un espace métrique complet et* F *un contraction large. Supposons qu'il existe un* $x \in M$ *et un* $\rho > 0$ *tels que*

$d(x; F^n x) \leq \rho$ pour tout $n \geq 1$. Alors F admet un unique point fixe dans M.
Nous énonçons ci-dessous le Théorème du point fixe hybride de Krasnoselskii-Burton qui nous permettra d'établir un résultat de stabilité de la solution triviale de (2.1). Pour plus de détails sur le Théorème captivant de Krasnoselskii nous renvoyons à smart [[35]] ou [[16]].

Théorème 2.3 .$(Krasnoselskii - Burton)$. *Soit* M *un sous-ensemble non vide, convexe, bornée et fermée d'un espace de Banach* $(S, \| \,.\, \|)$.

On supposons A et B application M dans M tel que
(i) $Ax + By \in M$ $\forall x, y \in M$;
(ii) A est continue et AM est contenu dans un sous-ensemble compact de M;
(iii) B est une contraction large.
Alors il existe $z \in M$ avec $z = Az + Bz$.
Il est à noter que le troisième auteur avec H. Deham (voir[[17], [18]]) a prouvé des résultats d'exitence de solutions périodiques, au moyen du théorème (2.3), d'équations très proches de (2.1) et (2.3).
Ici, nous manipulons des espaces de fonctions définis sur des intervalles t-infinis. Donc, pour la compacité, nous avons besoin d'une extension du Théorème d'Arzelà-Ascoli. Cette extension est tirée de [[16], Théorème 1.2.2 p. 20] et est la suivante.

Théorème 2.4 *Soit* $q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *est un fonction continue tel que* $q(t) \to 0$ *comme* $t \to \infty$. *Si* $\{\varphi_n(t)\}$ *est une suite équicontinue de fonctions* $\mathbb{R}^m$ *sur* $\mathbb{R}_+$

avec $|\varphi_n(t)| \leq q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, alors il existe une sous-suite qui converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction continue $\varphi(t)$ avec $|\varphi(t)| \leq q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$, où $|.|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^m$.

2.2 Stabiltié par le théoréme de Krasnoselskii-Burton

De la Théorème de l'existence, que l'on retrouve dans [[25]] ou [[16]], on conclut que pour chaque fonction initiale continue $\psi : [m_0; 0] \to \mathbb{R}$, il existe une solution continue $x(t, 0, \psi)$ qui vérifie (2.1) sur un intervalle $[0, \sigma)$ pour certains $\sigma > 0$ et $x(t, 0, \psi) = \psi(t)$, $t \in [m_0, 0]$, Nous renvoyons à [[16]] pour les définitions de stabilité
Soit S l'espace de Banach des fonctions continues bornées $\varphi : [m_0, 1) \to \mathbb{R}$ avec la norme supremum $\|.\|$.

Pour appliquer le théorème (2.3), nous devons construire deux applications, une contraction large et un opérateur compact. Soit donc S l'espace de Banach des fonctions bornées continues de norme supremum $\|.\|$.

Soit $L = \frac{1}{\sqrt{3}}$et définir l'ensemble

$$\begin{aligned} S_{\psi} \quad &: \quad = \{\varphi \in S \mid \varphi \text{ est Lipschitzian, } |\varphi(t)| \leq L,\ t \in [m_0, \infty)\,, \\ \varphi(t) \quad &= \quad \psi(t) \text{ si } t \in [m_0, 0] \text{ et } \varphi(t) \to 0 \text{ comme } t \to \infty\}. \end{aligned}$$

On affirme que si $\{\varphi_n\}$ est une suite de fonctions k-Lipschitzienne convergeant vers une fonction φ alors

$$\begin{aligned} |\varphi(u) - \varphi(v)| &= |\varphi(u) - \varphi(v) + \varphi_n(u) - \varphi_n(u) + \varphi_n(v) - \varphi_n(v)| \\ &\leq |\varphi(u) - \varphi_n(u)| + |\varphi_n(u) - \varphi_n(v)| + |\varphi_n(v) - \varphi(v)| \\ &\leq \|\varphi - \varphi_n\| + k\,|u - v| + \|\varphi - \varphi_n\| \\ &\leq k\,|u - v|\,. \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque $n \to \infty$, nous voyons que φ est k-Lipschitzienne.

Il est clair que l'ensemble S_{ψ} est convexe,

Preuve. Soit $\forall \lambda \in [0,1]\,, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in S_{\psi} \Longrightarrow \forall \lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2$, telque :

$$\begin{cases} |\varphi_{1,2}| \leq L_{1,2} \\ \varphi(t) = \psi(t)\,,\ t \in [m_0, 0] \\ \varphi_{1,2}(t) \to 0, \text{comme } t \to \infty \end{cases}.$$

Soit $\lambda \in [0,1] : |\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2| \leq L$

$$\begin{aligned} |\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2| &\leq |\lambda|\,|\varphi_1| + |(1-\lambda)|\,|\varphi_2| \\ &\leq L_1 + L_2 = L, \end{aligned}$$

$\lambda\varphi_1 + (1-\lambda)\varphi_2 \to 0$ comme $t \to \infty$.

Donc, l'ensemble S_{ψ} est convexe,bornée et complet par rapport la norme supremum $\|.\|$. ■

Pour $\varphi \in S_{\psi}$ et $t \geq 0$, on définit les applications A et B sur S_{ψ} respectivement par :

$$\begin{aligned} A\varphi(t) \quad : \quad &= \frac{c(t)}{1 - r'(t)}\varphi(t - r(t)) + \int_0^t b(s)\,\varphi^3(s - r(s))\exp\left(-\int_s^t a(u)\,du\right)ds \\ &+ \int_0^t \mu(s)\,\varphi(s - r(s))\exp\left(-\int_s^t a(u)\,du\right)ds, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} B\varphi(t) \quad : \quad &= \left[\psi(0) - \frac{c(0)}{1 - r'(0)}\psi(-r(0))\right]\exp\left(-\int_0^t a(u)\,du\right) \\ &+ \int_0^t a(s)\left[\varphi(s) - \varphi^3(s)\right]\exp\left(-\int_s^t a(u)\,du\right)ds, \end{aligned} \tag{2.9}$$

et

$$H\varphi(t) := A\varphi(t) + B\varphi(t). \tag{2.10}$$

D'après le Lemme 2.1 si on sera capable de prouver que H possède un point fixe φ sur l'ensemble S_ψ alors $x(t,0,\psi) = \varphi(t)$ pour $t \geq 0$, $x(t,0,\psi) = \psi(t)$ sur $[m_0, 0]$, $x(t,0,\psi)$ va satisfaire (2.1) lorsque elle est dérivable et $x(t,0,\psi) \to 0$ si $t \to \infty$.
Posons $\alpha(t) = \frac{c(t)}{1-r'(t)}$ et supposons qu'il existe des constantes $k_1, k_2, k_3 > 0$ telles que pour $0 \leq t_1 < t_2$ on a :

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} a(u)\,du\right| \leq k_1 |t_2 - t_1|, \tag{2.11}$$

$$|r(t_2) - r(t_1)| \leq k_2 |t_2 - t|, \tag{2.12}$$

et

$$|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \leq k_3 |t_2 - t_1|. \tag{2.13}$$

On suppose aussi que pour tout $t \geq 0$

$$|\mu(t)| \leq \delta a(t), \tag{2.14}$$

$$|b(t)| L^2 \leq \beta a(t), \tag{2.15}$$

$$\sup_{t\geq 1} |\alpha(t)| = \alpha, \tag{2.16}$$

et

$$J(\alpha + \beta + \delta) < 1, \tag{2.17}$$

où α, β, δ et J sont des constantes avec $J > 3$.
Choisissons $\gamma > 0$ assez petit tel que :

$$\left(1 + \left|\frac{c(0)}{1 - r'(0)}\right|\right) \gamma \exp\left(-\int_0^t a(u)\,du\right) + \frac{L}{J} + \frac{2L}{3} \leq L. \tag{2.18}$$

Le choix de γ dans l'expression (2.18) va servir dans le Lemme (2.3) , pour montrer que si $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et si $\|\psi\| < \gamma$, alors la solution de (2.1) vérifie : $|x(t,0,\psi)| < \varepsilon$.
Supposons en outre que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$t - r(t) \to \infty \text{ lorsque } t \to \infty \text{ et } \int_0^t a(u)\,du \to \infty \text{ lorsque } t \to \infty \tag{2.19}$$

$$\alpha(t) \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty, \tag{2.20}$$

$$\frac{\mu(t)}{a(t)} \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty, \tag{2.21}$$

et

$$\frac{b(t)}{a(t)} \to 0 \text{ lorsque } t \to \infty. \tag{2.22}$$

Commençons d'abord par l'exemple suivant (voir[[16], [11]]).

Soit $\|.\|$la norme de supremum et

$$M := \left\{ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ est continue, } \|\varphi\| \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \right\},$$

et définir $(F\varphi)(t) := \varphi(t) - \varphi^3(t)$.

$$\begin{aligned} |(F\varphi)(t) - (F\psi)(t)| &= \left|\varphi(t) - \varphi^3(t) - \psi(t) + \psi^3(t)\right| \\ &= |\varphi(t) - \psi(t)| \left|1 - \left(\varphi^2(t) + \varphi(t)\psi(t) + \psi^2(t)\right)\right|. \end{aligned}$$

Alors pour

$$|\varphi(t) - \psi(t)|^2 = \varphi^2(t) - 2\varphi(t)\psi(t) + \psi^2(t) \leq 2\left(\varphi^2(t) + \psi^2(t)\right),$$

et

$$\varphi^2(t) + \psi^2(t) < 1.$$

On a

$$\begin{aligned} |(F\varphi)(t) - (F\psi)(t)| &= |\varphi(t) - \psi(t)| \left|1 - \left(\varphi^2(t) + \psi^2(t)\right) - \varphi(t)\psi(t)\right| \\ &\leq |\varphi(t) - \psi(t)| \left[1 - \left(\varphi^2(t) + \psi^2(t)\right) + |\varphi(t)\psi(t)|\right]. \end{aligned}$$

D'autre part on a

$$(\varphi(t) - \psi(t))^2 = \varphi^2(t) + \psi^2(t) - 2\varphi(t)\psi(t) \geq 0 \Longrightarrow \frac{1}{2}(\varphi^2(t) + \psi^2(t)) \geq \varphi(t)\psi(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} |(F\varphi)(t) - (F\psi)(t)| &\leq |\varphi(t) - \psi(t)| \left[1 - \left(\varphi^2(t) + \psi^2(t)\right) + \frac{\varphi^2(t) + \psi^2(t)}{2}\right] \\ &\leq |\varphi(t) - \psi(t)| \left[1 - \frac{\varphi^2(t) + \psi^2(t)}{2}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi, F est ponctuel une contraction large. Mais l'application F est toujours une contraction large de la norme supremum.Soit $\varepsilon \in (0,1)$ et soit $\varphi, \psi \in M$ avec $\|\varphi - \psi\| \geq \varepsilon$.

$a)$ Suppose que pour certains, nous avons

$$\varepsilon/2 \leq |\varphi(t) - \psi(t)|.$$

Alors

$$(\varepsilon/2)^2 \leq |\varphi(t) - \psi(t)|^2 \leq 2\left(\varphi^2(t) - \psi^2(t)\right)$$

C'est

$$\varphi^2(t) - \psi^2(t) \geq \varepsilon^2/8,$$

pour tout t on a

$$\begin{aligned}
|(F\varphi)(t) - (F\psi)(t)| &\leq |\varphi(t) - \psi(t)| \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right] \\
&\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t) - \psi(t)| \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right] \\
&\leq \|\varphi - \psi\| \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right].
\end{aligned}$$

$b)$ Suppose que pour certains, nous avons

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a

$$\|\varphi - \psi\| \geq \varepsilon \Longrightarrow \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\| \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre par

$$|(F\varphi)(t) - (F\psi)(t)| \leq |\varphi(t) - \psi(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{2}\|\varphi - \psi\|,$$

par conséquent, nous obtenons

$$\|(F\varphi)(t) - (F\psi)(t)\| \leq \min\left\{\frac{1}{2}, 1 - \frac{\varepsilon^2}{16}\right\}\|\varphi - \psi\|.$$

Par une série d'étapes, nous prouverons la satisfaction de (i), (ii) et (iii) dans le Théorème 2.3

Lemme 2.2 *Supposons que 2.14 -2.17 et 2.19 sont satisfaites. Si $\varphi \in S_\psi$, alors $|A\varphi(t)| \leq L/J < L$. où A est l'application définie par 2.8. En outre, $A\varphi(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.*

Preuve. En utilisant les conditions 2.14-2.17 et l'expression 2.8 de l'application A, on obtient :

$$\begin{aligned}
|A\varphi(t)| \leq & \left|\frac{c(t)}{1 - r'(t)}\varphi(t - r(t))\right| + \int_0^t \left|b(s)\varphi^3(s - r(s))\right| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
& + \int_0^t |\mu(s)\varphi(s - r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds.
\end{aligned}$$

On a

$$\left|\frac{c(t)}{1 - r'(t)}\varphi(t - r(t))\right| \leq \alpha L.$$

Car

$$\left|\frac{c(t)}{1 - r'(t)}\right| \leq \sup_{t\geq 0}|\alpha(t)| \leq \alpha,$$

et

$$|\varphi(t-r(t))| \leq \sup|\varphi(t-r(t))| \leq \|\varphi(t-r(t))\| \leq L.$$

Parceque :$\varphi \in S_{\psi}$.

Alors

$$\begin{aligned}
|A\varphi(t)| &\leq \alpha L + L\int_0^t L^2|b(s)|\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds + L\int_0^t |\mu(s)|\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
&\leq L\left\{\alpha + \int_0^t \beta a(s)\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds + \int_0^t \delta a(s)\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds\right\} \\
&\leq L\left\{\alpha + \int_0^t (\beta+\delta)\,a(s)\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds\right\} \\
&\leq L\left(\alpha + (\beta+\delta)\int_0^t a(s)\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds\right) \leq L(\alpha+\beta+\delta) \leq L/J < L.
\end{aligned}$$

Parceque

$$\int_0^t a(s)\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds \leq 1. \qquad (*)$$

On a

$$-\int_s^t a(u)\,du = [-A(u)]_s^t = A(s) - A(t) \Longrightarrow e^{-\int_s^t a(u)du} = e^{A(s)-A(t)}.$$

En dérivant, nous trouvons :

$$\left(e^{-\int_s^t a(u)du}\right)' = a(s)\,e^{A(s)-A(t)} = a(s)\,e^{-\int_s^t a(u)du}.$$

En remplaçant par * on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^t a(s)\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds &= \int_0^t \left(e^{-\int_s^t a(u)du}\right)' ds = \left[e^{-\int_s^t a(u)du}\right]_0^t \\
&= 1 - e^{-\int_0^t a(u)du}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
a(u) &\geq 0 \Longrightarrow \int_0^t a(u) \geq 0 \Longrightarrow -\int_0^t a(u) \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq e^{-\int_0^t a(u)} \leq 1 \\
&\Longrightarrow -1 \leq -e^{-\int_0^t a(u)} \leq 0.
\end{aligned}$$

Alors,

$$0 \leq 1 - e^{-\int_0^t a(u)} \leq 1.$$

Donc,

$$\int_0^t a(s)\,e^{-\int_s^t a(u)du}ds \leq 1.$$

Ainsi, AS_{ψ} est bornée par L.

Soit $\varphi \in S_\psi$ fixée. Nous allons prouver que $A\varphi(t) \to 0$ comme $t \to \infty$. C'est évident, car aux conditions $t - r(t) \to \infty$ comme $t \to \infty$ dans 2.16 et 2.19, que le premier terme du second membre de A tend vers 0 lorsque $t \to \infty$, c'est-à-dire,

$$\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\varphi(t-r(t))\right| \leq \alpha\left|\varphi(t-r(t))\right| \to 0 \text{ comme } t \to 0.$$

On a

$$\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\right| \leq \alpha,$$

et

$$t - r(s) \to \infty \text{ comme } t \to \infty.$$

Comme φ continue, donc

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t-r(t)) = \lim_{t\to\infty}\varphi\left(\lim_{t\to\infty}(t-r(s))\right) = \lim_{t\to\infty}\varphi(\infty).$$

D'autre par, on a

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 0.$$

Alors,

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(\infty) = 0.$$

Donc,

$$\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\varphi(t-r(t))\right| \leq \alpha\left|\varphi(t-r(t))\right| \to 0 \text{ comme } t \to 0.$$

Il reste à montrer que les deux termes entiers restants de A tendent vers zéro lorsque $t \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Trouver T tel que $|\varphi(t-r(t))| < \varepsilon$ pour $t \geq T$,d'apres la définition de convergent,

$$|\varphi(t-r(t))| < \varepsilon \Longrightarrow \lim_{t\to\infty}\varphi(t-r(t)) = 0.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
& \left|\int_0^t \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^t a(u)du}ds\right| \\
\leq\; & \int_0^T |\mu(s)\varphi(s-r(s))|e^{-\int_s^t a(u)du}ds + \int_T^t |\mu(s)\varphi(s-r(s))|e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
\leq\; & Le^{-\int_T^t a(u)du}\int_0^T |\mu(s)|e^{-\int_s^T a(u)du}ds + \varepsilon\int_T^t |\mu(s)|e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
\leq\; & L\delta e^{-\int_T^t a(u)du}\int_0^T a(s)e^{-\int_s^T a(u)du}ds + \varepsilon\delta\int_T^t a(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds.
\end{aligned}$$

D'autre par

$$\int_0^T a(s)e^{-\int_s^T a(u)du}ds \leq 1.$$

Parceque

$$\begin{aligned} -\int_S^T a(u)\,du &= [-A(u)]_s^T = A(s) - A(T) \\ &\Longrightarrow e^{-\int_S^T a(u)du} = e^{A(s)-A(T)}. \end{aligned}$$

En dérivant, nous trouvons

$$\left(e^{-\int_S^T a(u)du}\right)' = a(s)\, e^{A(s)-A(T)} = a(s)\, e^{-\int_s^T a(u)du}.$$

Alors

$$\int_0^T a(s)\, e^{-\int_s^T a(u)du} ds = \int_0^T \left(e^{-\int_s^T a(u)du}\right)' = \left[e^{-\int_s^T a(u)du}\right]_0^T = 1 - e^{-\int_0^T a(u)du}.$$

Ainsi, On a : $a(u) \geq 0$

$$\begin{aligned} a(u) &\geq 0 \Longrightarrow \int_0^T a(u)\,du \geq 0 \Longrightarrow -\int_0^T a(u)\,du \leq 0 \\ &\Longrightarrow 0 \leq e^{-\int_0^T a(u)du} \leq 1 \Longrightarrow -1 \leq -e^{-\int_0^T a(u)du} \leq 0 \\ &\Longrightarrow 0 \leq 1 - e^{-\int_0^T a(u)du} \leq 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_0^T a(s)\, e^{-\int_s^T a(u)du} ds \leq 1.$$

De la même manière, nous allons prouver que $\int_T^t a(s)\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds$.

Donc

$$\left| \int_0^t \mu(s)\, \varphi(s - r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \leq L\delta^{-\int_T^t a(u)du} + \varepsilon\delta.$$

Lorsque $t \to \infty$, le terme $L\delta e^{-\int_T^t a(u)du}$ est arbitrairement petit en raison de 2.19.

On a :

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t a(u)\,du = \infty,$$

et

$$\int_0^t a(u)\,du = \int_0^T a(u)\,du + \int_T^t a(u)\,du.$$

D'autre par : $\int_0^T a(u)\,du$ est un intégration terminée, alors

$$\int_0^T a(u)\,du = \alpha.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^t a(u)\,du &= \alpha + \int_T^t a(u)\,du \\ &\Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \int_0^t a(u)\,du = \lim_{t\to\infty} \left(\alpha + \int_T^t a(u)\,du\right) = \infty \\ &\Longrightarrow \alpha + \lim_{t\to\infty} \int_T^t a(u)\,du = \infty \Longrightarrow \lim_{t\to\infty} \int_T^t a(u)\,du = -\alpha + \infty = \infty. \end{aligned}$$

Alors, $L\delta e^{-\int_T^t a(u)du} \to 0$ comme $t \to 0$.
Donc,

$$\left| \int_0^t \mu(s)\varphi(s - r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \leq \varepsilon\delta.$$

On pose : $\varepsilon\delta = \varepsilon'$.
Soit $\varepsilon' > 0$ $\exists T > 0$, $\forall t \geq T$

$$\left| \int_0^t \mu(s)\varphi(s - r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \leq \varepsilon'.$$

D'apre la définition de la limite

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mu(s)\varphi(s - r(s))\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds = 0.$$

Le terme intégral qui reste dans A tend vers zéro par une procédure analogue. Ceci achève cette preuve.
Le même méthode pour term

$$\int_0^t \left| b(s)\varphi^3(s - r(s)) \right| e^{-\int_s^t a(u)du} ds.$$

■

Lemme 2.3 *Soit 2.14-2.17 et 2.19 sont vérifiée. Si $\phi, \varphi \in S_\psi$ sont arbitraires, pour A, B données par 2.8-2.9 on l'inégalité*

$$|B\varphi + A\phi| \leq L.$$

En outre, B est une contraction large sur S_ψ avec un point fixe unique dans S_ψ et $B\varphi(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.
Preuve. Notons d'abord que la condition $|z| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ implique que $|z - z^3| \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{2}{3}L$.
Maintenant, en utilisant les définitions 2.8 et 2.9 de A et B respectivement et appliquant les

conditions 2.14-2.17, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left|B\varphi(t)+A\phi(t)\right| \\
\leq\ & \left[\left|\psi(0)\right|-\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\psi(-r(0))\right|\right]e^{-\int_0^t a(u)du}+\int_0^t a(s)\left[\left|\varphi(s)-\varphi^3(s)\right|\right]e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
& +\left|\frac{c(t)}{1-r'(t)}\varphi(t-r(t))\right|+\int_0^t\left|b(s)\varphi^3(s-r(s))\right|e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
& +\int_0^t\left|\mu(s)\varphi(s-r(s))\right|e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
\leq\ & \left[1+\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\right]\|\psi\|e^{-\int_0^t a(u)du}+\frac{2}{3}L\int_0^t a(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds+\alpha L \\
& +\int_0^t\left|b(s)\right|L^3e^{-\int_s^t a(u)du}ds+L\int_0^t\left|\mu(s)\right|e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
\leq\ & \left[1+\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\right]\|\psi\|e^{-\int_0^t a(u)du}+\frac{2}{3}L\int_0^t a(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds+\alpha L \\
& +L\beta\int_0^t a(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds+L\delta\int_0^t a(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
\leq\ & \left[1+\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\right]\|\psi\|e^{-\int_0^t a(u)du}+\frac{2}{3}L\int_0^t a(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds \\
& +L\left(\alpha+(\beta+\delta)\int_0^t a(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds\right).
\end{aligned}$$

On a :

$$\int_0^t a(s)e^{-\int_s^t a(u)du}ds\leq 1.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\left|B\varphi(t)+A\phi(t)\right| &\leq \left(1+\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\right)\|\psi\|e^{-\int_0^t a(u)du}+\frac{2L}{3}+L(\alpha+\beta+\delta) \\
&\leq \left(1+\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\right)\|\psi\|e^{-\int_0^t a(u)du}+\frac{L}{J}+\frac{2L}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant la fonction initiale ψ de petite norme, disons $\|\psi\|<\gamma$, puis, à partir de l'inégalité ci-dessus et en se référant à 2.18,
On obtient

$$\begin{aligned}
\left|B\varphi(t)-A\phi(t)\right| &\leq \left(1+\left|\frac{c(0)}{1-r'(0)}\right|\right)\gamma e^{-\int_0^t a(u)du}+\frac{L}{J}+\frac{2L}{3} \\
&\leq L.
\end{aligned}$$

De puis $0\in S_\psi$, nous avons aussi prouvé que $|B\varphi(t)|\leq L$. La preuve que $B\varphi$ est Lipschitzien est similaire à celle de l'application $A\varphi$ ci-dessous. Pour voir que B est une contraction large sur S_ψ

avec un point fixe unique, on sait par l'exemple 3.1 que $F\varphi = \varphi - \varphi^3$ est un contraction large au sein de l'intégrande. Ainsi, pour le ε de la preuve de cet exemple, nous ont trouvé η tel que

$$\begin{aligned} |B\varphi(t) - B\phi(t)| &\leq \int_0^t a(s)\,|F\varphi(s) - F\phi(t)|\, e^{-\int_0^t a(u)du} ds \\ &\leq \eta \int_0^t a(s)\,\|\varphi - \phi\|\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\ &\leq \eta\,\|\varphi - \phi\|. \end{aligned}$$

D'où B est une contraction large sur S_ψ.

Pour prouver que $B\varphi(t) \to 0$ comme $t \to \infty$ on utilise 2.19 pour le premier terme et pour le second terme on argumente comme ci-dessus pour l'application A. ■

Lemme 2.4 *Supposons que les conditions 2.14-2.17 sont valides. Alors l'application A est continue sur S_ψ.*

Preuve. Soit $\varphi, \phi \in S_\psi$,alors

$$\begin{aligned} & |A\varphi(t) - A\phi(t)| \\ \leq & \left\{ \frac{c(t)}{1 - r'(t)} \left(|\varphi(t - r(t)) - \phi(t - r(t))|\right) \right. \\ & + \left| \int_0^t b(t) \left[\varphi^3(s - r(s)) - \phi^3(s - r(s))\right] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \\ & \left. + \left| \int_0^t \mu(s) \left[\varphi(s - r(s)) - \phi(s - r(s))\right] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \right\} \\ \leq & \left\{ \alpha\,|\varphi(t - r(t)) - \phi(t - r(t))| \right. \\ & + \left| \int_0^t b(t) \left[\varphi^3(s - r(s)) - \phi^3(s - r(s))\right] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \\ & \left. + \left| \int_0^t \mu(s) \left[\varphi(s - r(s)) - \phi(s - r(s))\right] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \right| \right\}. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} \varphi^3 - \phi^3 &= (\varphi - \phi)\left(\varphi^2 + \phi^2 + \varphi\phi\right) \\ &\Longrightarrow \left|\varphi^3 - \phi^3\right| = \left|(\varphi - \phi)\left(\varphi^2 + \phi^2 + \varphi\phi\right)\right| \\ &\Longrightarrow \left|\varphi^3 - \phi^3\right| \leq |(\varphi - \phi)|\left|\left(\varphi^2 + \phi^2 + \varphi\phi\right)\right|. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
& |A\varphi(t) - A\phi(t)| \\
\leq\; & \alpha |\varphi(t - r(t)) - \phi(t - r(t))| + \int_0^t |b(t)| \left|(\varphi(s - r(s)) - \phi(s - r(s)))\right| \\
& \times \left| \left(\varphi^2(s - r(s)) + \phi^2(s - r(s)) + \varphi(s - r(s))\,\phi(s - r(s))\right) \right| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
& + \int_0^t |\mu(s)| |\varphi(s - r(s)) - \phi(s - r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds.
\end{aligned}$$

D'autre par, $|\varphi| \leq L$.

$$\left|\varphi^3 - \phi^3\right| \leq |(\varphi - \phi)| \left(L^2 + L^2 + LL\right) \leq 3L^2 |(\varphi - \phi)|.$$

Alors

$$\begin{aligned}
& |A\varphi(t) - A\phi(t)| \\
\leq\; & \alpha |\varphi(t - r(t)) - \phi(t - r(t))| \\
& +3 \int_0^t L^2 |b(t)| |(\varphi(s - r(s)) - \phi(s - r(s)))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
& + \int_0^t |\mu(s)| |\varphi(s - r(s)) - \phi(s - r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
\leq\; & \alpha \sup_{t\in} |\varphi(t - r(t)) - \phi(t - r(t))| \\
& +3 \int_0^t L^2 |b(t)| \sup |(\varphi(s - r(s)) - \phi(s - r(s)))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
& + \int_0^t |\mu(s)| \sup |\varphi(s - r(s)) - \phi(s - r(s))| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
\leq\; & \alpha \|\varphi - \phi\| + 3\beta \|\varphi - \phi\| \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \delta \|\varphi - \phi\| \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
\leq\; & \left(\alpha + (3\beta + \delta) \int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds\right) \|\varphi - \phi\|.
\end{aligned}$$

On a : $\int_0^t a(s) e^{-\int_s^t a(u)du} ds$ et la condition 2.17.

Donc

$$|A\varphi(t) - A\phi(t)| \leq (\alpha + 3\beta + \delta) \|\varphi - \phi\| \leq \left(\frac{3}{J}\right) \|\varphi - \phi\|.$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Définissons $\eta = \frac{\varepsilon J}{3}$. Alors si $\|\varphi - \phi\| \leq \eta$, on aura

$$\|A\varphi - A\phi\| \leq \frac{3}{J} \|\varphi - \phi\| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, A est continue. ■

Lemme 2.5 *Soit 2.11-2.16 et 2.20-2.22 sont valides.*
La fonction $A\varphi$ est Lipschitzienne et l'application A envoie S_ψ dans un sous ensemble compact de S_ψ.

Preuve. Soit $\varphi \in S_\psi$ et soient $0 \leq t_1 < t_2$. Alors

$$\begin{aligned}
& |A\varphi(t_2) - A\varphi(t_1)| \\
\leq\ & \left| \frac{c(t_2)}{1 - r'(t_2)}\varphi(t_2 - r(t_2)) - \frac{c(t_1)}{1 - r'(t_1)}\varphi(t_1 - r(t_1)) \right| \\
& + \left| \int_0^{t_2} \mu(s)\varphi(s - r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds - \int_0^{t_1} \mu(s)\varphi(s - r(s))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right| \\
& + \left| \int_0^{t_2} b(s)\varphi^3(s - r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds - \int_0^{t_1} b(s)\varphi^3(s - r(s))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right|. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Par les hypothèses 2.12-2.13, on aura

$$\begin{aligned}
& |\alpha(t_2)\varphi(t_2 - r(t_2)) - \alpha(t_1)\varphi(t_1 - r(t_1))| \\
=\ & |\alpha(t_2)\varphi(t_2 - r(t_2)) - \alpha(t_1)\varphi(t_1 - r(t_1)) + \alpha(t_2)\varphi(t_1 - r(t_1)) - \alpha(t_2)\varphi(t_1 - r(t_1))| \\
\leq\ & |\alpha(t_2)| \, |\varphi(t_2 - r(t_2)) - \varphi(t_1 - r(t_1))| + |\varphi(t_1 - r(t_1))| \, |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \\
\leq\ & |\alpha(t_2)| \, k \, |t_2 - r(t_2) - t_1 - r(t_1)| + L \, |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \\
\leq\ & \alpha k \, |(t_2 - t_1) - (r(t_2) - r(t_1))| + L k_3 \, |t_2 - t_1| \\
\leq\ & \alpha k \, |t_2 - t_1| + \alpha k k_2 \, |t_2 - t_1| + L k_3 \, |t_2 - t_1| \\
\leq\ & (\alpha k + \alpha k k_2 + L k_3) \, |t_2 - t_1| \, , \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

où k est la constante de Lipschitz de φ. Par les hypothèses 2.11 et 2.14, on aura

$$\begin{aligned}
& \left|\int_0^{t_2} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds - \int_0^{t_1} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}ds\right| \\
= & \left|\int_0^{t_1} \mu(s)\varphi(s-r(s))\left(e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du}\right)ds + \int_{t_1}^{t_2} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds\right. \\
& \left. - \int_0^{t_1} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}ds\right| \\
= & \left|\int_0^{t_1} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}\left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du}-1\right)ds + \int_{t_1}^{t_2} \mu(s)\varphi(s-r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds\right| \\
\leq & L\left|e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du}-1\right|\int_0^{t_1}\delta a(s)e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}ds + L\int_{t_1}^{t_2}|\mu(s)|\,e^{\int_s^{t_2} a(u)du}ds \\
\leq & L\delta\left|-\int_0^{t_2} a(s)e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}ds + \int_{t_2}^{t_1} a(s)e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}ds\right| + L\int_{t_1}^{t_2}|\mu(s)|\,e^{\int_s^{t_2} a(u)du}ds \\
\leq & L\delta\int_{t_2}^{t_1} a(s)e^{-\int_s^{t_1} a(u)du}ds + L\int_{t_1}^{t_2}|\mu(s)|\,e^{\int_s^{t_2} a(u)du}ds \\
\leq & L\delta\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + L\int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}d\left(\int_{t_1}^{s}|\mu(v)|\,dv\right) \\
\leq & L\delta\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + L\left\{\left[e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}\int_{t_1}^{s}|\mu(v)|\,dv\right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} a(s)e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}\int_{t_1}^{s}|\mu(v)|\,dvds\right\} \\
\leq & L\delta\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + L\int_{t_1}^{t_2}|\mu(s)|\,ds\left(1+\int_{t_1}^{t_2} a(s)e^{-\int_s^{t_2} a(u)du}ds\right) \\
\leq & L\delta\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + 2L\int_{t_1}^{t_2}|\mu(s)ds| \\
\leq & L\delta\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds + 2L\delta\int_{t_1}^{t_2} a(s)ds \leq 3L\delta k_1\,|t_2-t_1|\,. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

De même, par les conditions 2.11 et 2.15, on en déduit

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^{t_2} b(s)\varphi^3(s-r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds - \int_0^{t_1} b(s)\varphi^3(s-r(s))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right| \\
= & \left| \int_0^{t_1} b(s)\varphi^3(s-r(s)) \left(e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du} \right) ds + \int_{t_1}^{t_2} b(s)\varphi^3(s-r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right. \\
& \left. - \int_0^{t_1} b(s)\varphi^3(s-r(s))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds \right| \\
= & \left| \int_0^{t_1} b(s)\varphi^3(s-r(s))e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} \left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du} - 1 \right) ds + \int_{t_1}^{t_2} b(s)\varphi^3(s-r(s))e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right| \\
\leq & L \left| e^{-\int_{t_1}^{t_2} a(u)du} - 1 \right| \int_0^{t_1} \beta a(s)e^{-\int_s^{t_1} a(u)du} ds + L^3 \int_{t_1}^{t_2} |b(s)|\, e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \\
\leq & L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + L^3 \int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} d\left(\int_{t_1}^{s} |b(v)|\, dv \right) \\
\leq & L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + L^3 \left\{ \left[e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} \int_{t_1}^{t_2} |b(v)|\, dv \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} a(s)e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} \int_{t_1}^{s} |b(v)|\, dv ds \right\} \qquad (2.26) \\
\leq & L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + L^3 \int_{t_1}^{t_2} |b(s)|\, ds \left(1 + \int_{t_1}^{t_2} a(s)e^{-\int_s^{t_2} a(u)du} ds \right) \\
\leq & L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + 2L^3 \int_{t_1}^{t_2} |b(s)|\, ds \\
\leq & L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(u)du + 2L\beta \int_{t_1}^{t_2} a(s)ds \\
\leq & 3L\beta k_1 \left| t_2 - t_1 \right| .
\end{aligned}$$

Ainsi, en substituant 2.24-2.26 dans 2.23, on obtient

$$\begin{aligned}
& |A\varphi(t_2) - A\varphi(t_1)| \\
\leq & (\alpha k + \alpha k k_2 + L k_3) |t_2 - t_1| + 3L\delta k_1 |t_2 - t_1| + 3L\beta k_1 |t_2 - t_1| \\
\leq & K |t_2 - t_1| , \qquad (2.27)
\end{aligned}$$

tel que, $K = \alpha k + \alpha k k_2 + L k_3 + 3L\delta k_1 + 3L\beta k_1$
D'autre part, notons que pour $\varphi \in S_\psi$ arbitraire, nous avons

$$\begin{aligned}
& |\varphi(t)| \left| \frac{c(t)}{1-r'(t)} \varphi(t-r(t)) \right| + \int_0^t \left| b(s)\varphi^3(s-r(s)) \right| e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
& + \int_0^t |\mu(s)\varphi(s-r(s))|\, e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
\leq & L\alpha(t) + L^3 \int_0^t a(s) \left[|b(s)| \;/\; a(s) \right] e^{-\int_s^t a(u)du} ds + \; + L \int_0^t a(s) \left[|\mu(s)| \;/\; a(s) \right] e^{-\int_s^t a(u)du} ds \\
: & = q(t).
\end{aligned}$$

Car sous les hypothèses 2.13 et 2.22 et en utilisant une procédure similaire à l'application A, on remarque que $q(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.
L'application du Théorème 2.4, montre que AS_ψ existe dans un ensemble compact. ■

Théorème 2.5 *Soit* $L = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *et supposons que les conditions 2.2 et 2.11-2.22 sont valides. Si* ψ *est une fonction initiale continue et suffisamment petite, alors il existe une solution* $x(t, 0, \psi)$ *de 2.14 telle que* $|x(t, 0, \psi)| \leq L$ *et* $x(t, 0, \psi) \to 0$ *quand* $t \to \infty$.

Preuve. D'après les Lemmes (2.2) et (2.5), on en déduit que A est bornée par L, Lipschitzienne et $A\phi(t) \to 0$ si $t \to \infty$. Donc, A applique S_ψ vers S_ψ. D'après le Lemme (2.3) et le Lemme (2.5), on a, pour $\phi, \varphi \in S_\psi$ arbitrairement, $B\varphi +\ A\phi \in S\psi$, car $A\phi$ et $B\varphi$ sont Lipschitzienne, $A\phi + B\varphi$ bornée par L et $B\varphi(t) \to 0$ quand $t \to \infty$. Enfin le Lemme (2.4) et le Lemme(2.5), montrent que A est continue et AS_ψ réside dans un ensemble compact. Il est clair que toute les hypothèses du Théorème (2.3) de Krasnoselskii-Burton sont vérifiées. Ainsi, il existe une solution de (2.1) avec $x(t, 0, \psi) \leq L$ et $x(t, 0, \psi) \to 0$ quand $t \to \infty$. ■

Chapitre 3

Étude généralisée de la stabilité des équations différentielles neutres non linéaires à retard fonctionnel

Dans ce chapitre, nous nous intéressons principalement à la stabilité et à la stabilité asymptotique de la solution nulle de l'équation différentielle non linéaire neutre avec le retard fonctionnel exprimé comme suit

$$\frac{d}{dt}x(t) = -a(t)\,h(x(t-\tau(t))) + \frac{d}{dt}Q(t, x(t-\tau(t))) + G(t, x(t), x(t-\tau(t))), \tag{3.1}$$

$$x(t) = \psi(t),\ t \in [m_0, 0],$$

où $\psi \in C([m_0, 0], \mathbb{R}), m_0 = \inf\{t - \tau(t) : t \geq 0\}$. Tout au long de ce chapitre, nous supposons que $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}), \tau \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est borné et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, $Q : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaisant la condition de Caratheodory avec $h(0) = Q(t, 0) = G(t, 0, 0) = 0$. Notre but ici est d'utiliser une modification du Théorème du point fixe de Krasnoselskii due à Burton (voir [11], Théorème 3 pour montrer la stabilité et la stabilité asymptotique de la solution nulle de l'équation (3.1). .

Nous commemçons cette section par le Lemme suivant

Lemme 3.1 *: Soit $v : [m_0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ être une fonction de continue bornée arbitaire. Alors x est un solution de 3.1 si seulement si*

$$\begin{aligned}
&x(t) \\
=\ & \left[\psi(0) - Q(0,\psi(-\tau(0))) - \int_{-\tau(0)}^{0} v(s)\, h(\psi(s))\, ds\right] e^{-\int_0^t v(u)du} \\
&+ \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} H(x(s))\, ds + Q(t, x(t-\tau(t))) + \int_{t-\tau(t)} v(s)\, h(x(s))\, ds \\
&- \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} \left[\int_{s-\tau(s)}^{s} v(u)\, h(x(u))\, du\right] ds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} [b(s)\, h(x(s-\tau(s))) - v(s)\, Q(s, x(s-\tau(s))) \\
&+ G(s, x(s), x(s-\tau(s)))] ds.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Où

$$H(x) = x - h(x), \tag{3.3}$$

et

$$b(s) = (1-\tau'(s))\, v(s-\tau(s)) - a(s). \tag{3.4}$$

Preuve. Soit x est un solution de 3.1. réécrire le eq.3.1 comme

$$\frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}Q(t, x(t-\tau((t)))) = -a(t)\, h(x(t-\tau(t))) + G(t, x(t), x(t-\tau(t))).$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[x(t) - Q(t, x(t-\tau(t)))] + v(t)[x(t) - Q(t, x(t-\tau(t)))] \\
&-v(t)[x(t) - Q(t, x(t-\tau(t)))] + v(t)\, h(x(t)) - v(t)\, h(x(t)) \\
=\ & -a(t)\, h(x(t-\tau(t))) + G(t, x(t), x(t-\tau(t))).
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}[x(t) - Q(t, x(t-\tau(t)))] + v(t)[x(t) - Q(t, x(t-\tau(t)))] \\
=\ & v(t)[x(t) - Q(t, x(t-\tau(t)))] - v(t)\, h(x(t)) + v(t)\, h(x(t)) \\
& -a(t)\, h(x(t-\tau(t))) + G(t, x(t), x(t-\tau(t))) \\
=\ & v(t)\, x(t) - v(t)\, Q(t, x(t-\tau(t))) - v(t)\, h(x(t)) + v(t)\, h(x(t)) \\
& -a(t)\, h(x(t-\tau(t))) + G(t, x(t), x(t-\tau(t))).
\end{aligned}$$

D'aprer la formule de Leibniz

$$\frac{d}{dt}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(x,t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{d}{dt} f(x,t)\, dx + f(\beta(t), t)\frac{d\beta(t)}{dt} - f(\alpha(t), t)\frac{d\alpha(t)}{dt},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{t-\tau(t)}^{t} v(u)\, h(x(u))\, du &= \int_{t-\tau(t)}^{t} \frac{d}{dt}\left(v(u)\, h(x(u))\right) + \left(v(t)\, h(x(t))\right)\frac{d(t)}{dt} \\ &\quad - \left(v(t-\tau(t))\, h(x(t-\tau(t)))\right)\frac{d(t-\tau(t))}{dt} \\ &= v(t)\, h(x(t)) - v(t-\tau(t))\, h(x(t-\tau(t)))\left(1-\tau'(t)\right).\end{aligned}$$

Alors

$$v(t)\, h(x(t)) = \frac{d}{dt}\int_{t-\tau(t)}^{t} v(u)\, h(x(u))\, du + v(t-\tau(t))\, h(x(t-\tau(t)))\left(1-\tau'(t)\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[x(t) - Q(t, x(t-\tau(t)))\right] + v(t)\left[x(t) - Q(t, x(t-\tau(t)))\right] \\ =\;& v(t)\, x(t) - v(t)\, Q(t, x(t-\tau(t))) - v(t)\, h(x(t)) + \frac{d}{dt}\int_{t-\tau(t)}^{t} v(u)\, h(x(u))\, du \\ &+ \left(1-\tau'(t)\right) v(t-\tau(t))\, h(x(t-\tau(t))) - a(t)\, h(x(t-\tau(t))) + G(t, x(t), x(t-\tau(t))) \\ =\;& v(t)\left[x(t) - h(x(t))\right] + \frac{d}{dt}\int_{t-\tau(t)}^{t} v(u)\, h(x(u))\, du + \left[\left(1-\tau'(t)\right) v(t-\tau(t)) - a(t)\right] h(x(t-\tau(t))) \\ &- v(t)\, Q(t, x(t-\tau(t))) + G(t, x(t), x(t-\tau(t))).\end{aligned}$$

Multiplier les deux côtés de l'equation ci-dessus par $e^{\int_0^t v(u)du}$ puis intégrer de 0 à t,nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left(\frac{d}{ds}\left[x(s) - Q(s, x(s-\tau(s)))\right]\right) e^{\int_0^s v(u)du} ds + \int_0^t \left(v(s)\left[x(s) - Q(s, x(s-\tau(s)))\right]\right) e^{\int_0^s v(u)du} ds \\ =\;& \int_0^t v(s)\left[x(s) - h(x(s))\right] e^{\int_0^s v(u)du} ds + \int_0^t \left[\frac{d}{ds}\int_{s-\tau(s)}^{s} v(u)\, h(x(u))\, du\right] e^{\int_0^s v(u)du} ds \\ &+ \int_0^t \left[\left[\left(1-\tau'(s)\right) v(s-\tau(s)) - a(s)\right] h(x(s-\tau(s)))\right] ds \\ &- \int_0^t v(s)\, Q(s, x(s-\tau(s)))\, e^{\int_0^s v(u)du} ds + \int_0^t G(s, x(s), x(s-\tau(s)))\, e^{\int_0^s v(u)du} ds.\end{aligned}$$

Integration par partie

$$\begin{aligned}&\int_0^t \left(\frac{d}{ds}\left[x(s) - Q(s, x(s-\tau(s)))\right]\right) e^{\int_0^s v(u)du} ds \\ =\;& \left[\left[x(s) - Q(s, x(s-\tau(s)))\right] e^{\int_0^s v(u)du}\right]_0^t - \int_0^t v(s)\left[x(s) - Q(s, x(s-\tau(s)))\right] e^{\int_0^s v(u)du} ds.\end{aligned}$$

Où $b(s) = (1 - \tau'(s))\, v(s - \tau(s)) - a(s)$. En conséquence, nous arrivons à

$$\begin{aligned}
& [x(t) - Q(t, x(t - \tau(t)))] e^{\int_0^t v(u)du} - \psi(0) + Q(0, \psi(-\tau(0))) \\
= & \int_0^t v(s) [x(s) - h(x(s))] e^{\int_0^s v(u)du} ds \\
& + \int_0^t \left[\frac{d}{ds} \int_{s-\tau(s)}^s v(u) h(x(u)) du \right] e^{\int_0^s v(u)du} ds \\
& + \int_0^t [b(s) h(x(s - \tau(s))) - v(s) Q(s, x(s - \tau(s))) \\
& + G(s, x(s), x(s - \tau(s)))] e^{\int_0^s v(u)du} ds.
\end{aligned}$$

En divisant les deux côtés de l'equation ci-dessus par $e^{\int_0^t v(u)du}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
& x(t) - Q(t, x(t - \tau(t))) - [\psi(0) + Q(0, x(-\tau(0)))] e^{-\int_0^t v(u)du} \\
= & \int_0^t v(s) [x(s) - h(x(s))] e^{-\int_s^t v(u)du} ds + \int_0^t \left[\frac{d}{ds} \int_{s-\tau(s)}^s v(u) h(x(u)) du \right] e^{-\int_s^t v(u)du} ds \\
& + \int_0^t [b(s) h(x(s - \tau(s))) - v(s) Q(s, x(s - \tau(s))) + G(s, x(s), x(s - \tau(s)))] e^{-\int_s^t v(u)du} ds. \qquad (3.5)
\end{aligned}$$

Integration par partie

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \left[\frac{d}{ds} \int_{s-\tau(s)}^s v(u) h(x(u)) du \right] e^{-\int_s^t v(u)du} ds \\
= & \left[\int_{s-\tau(s)}^s v(u) h(x(u)) du e^{-\int_s^t v(u)du} \right]_0^t \\
& - \int_0^t \left[\int_{s-\tau(s)}^s v(u) h(x(u)) du \right] v(s) e^{-\int_s^t v(u)du} ds \\
= & \int_{t-\tau(t)}^t v(s) h(x(s)) ds - \int_{-\tau(0)}^0 v(s) h(\psi(s)) ds e^{-\int_0^t v(u)du} \\
& - \int_0^t \left[\int_{t-\tau(t)}^t v(u) h(x(u)) du \right] v(s) e^{-\int_s^t v(u)du} ds. \qquad (3.6)
\end{aligned}$$

Puis remplacer 3.6 par 3.5.

Alors

$$\begin{aligned}
& x(t) - Q(t, x(t-\tau(t))) - [\psi(0) + Q(0, x(-\tau(0)))] e^{-\int_0^t v(u)du} \\
= & \int_0^t v(s)[x(s) - h(x(s))] e^{-\int_s^t v(u)du} ds \\
& + \int_{t-\tau(t)}^t v(s) h(x(s)) ds - \int_{-\tau(0)}^0 v(s) h(\psi(s)) ds e^{-\int_0^t v(u)du} \\
& - \int_0^t \left[\int_{t-\tau(t)}^t v(u) h(x(u)) du\right] v(s) e^{-\int_s^t v(u)du} ds \\
& \int_0^t [b(s) h(x(s-\tau(s))) - v(s) Q(s, x(s-\tau(s))) + G(s, x(s), x(s-\tau(s)))] e^{-\int_s^t v(u)du} ds.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
x(t) = & \left[\psi(0) - Q(0, \psi(-\tau(0))) - \int_{-\tau(0)}^0 v(s) h(\psi(s)) ds\right] e^{-\int_0^t v(u)du} \\
& + \int_0^t v(s) e^{-\int_s^t v(u)du} H(x(s)) ds + Q(t, x(t-\tau(t))) \\
& + \int_{t-\tau(t)} v(s) h(x(s)) ds - \int_0^t v(s) e^{-\int_s^t v(u)du} \left[\int_{s-\tau(s)}^s v(u) h(x(u)) du\right] ds \\
& + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} [b(s) h(x(s-\tau(s))) - v(s) Q(s, x(s-\tau(s))) \\
& + G(s, x(s), x(s-\tau(s)))] ds.
\end{aligned}$$

L'implication inverse est facilement obtenue et la preuve est complète. ■

Théorème 3.1 *Soit M un sous-ensemble non vide, convexe, borné et fermé d'un espace de Banach $(S, \| \, . \, \|)$.*
Supposons que A et B application M dans M tel que
$i)$ A est continue et AM est contenu dans un sous-ensemble compact de M,
$ii)$ B est une contraction large,
$iii)$ $\forall\, x, y \in M$, implique $Ax + By \in M$, Alors il existe $z \in M$ avec $z = Az + Bz$.
Ici, nous manipulons des espaces de fonctions définis sur des intervalles t-infinis. Donc, pour la compacité, nous avons besoin d'une extension du théorème d'Arzelà-Ascoli.
Cette extension est tirée de ([[16]], Théorème $1.2.2$ p. 20) et est la suivante.

Théorème 3.2 *Soit $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $q(t) \to 0$ comme $t \to \infty$.*
Si $\{\varphi_n(t)\}$ est une suite équicontinue de fonctions $\mathbb{R}^m$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $|\varphi_n(t)|$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, alors il existe une sous-suite qui converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction continue $\varphi(t)$ avec $|\varphi(t)| \leq q(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^n$, où $|.|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

3.1 Stabilité de la solution zéro

De la Théorème de l'existence, que l'on retrouve dans [[16]] ou [[25]], on conclut que pour tout fonction initiale continue $\psi \in C([m_0, 0], \mathbb{R})$, il existe une solution continue $x(t, 0, \psi)$ qui vérifie 3.1 sur un intervalle $[0, \sigma)$ pour certains $\sigma > 0$ et $x(y, 0, \psi) = \psi(t), t \in [m_0, 0]$.
Nous renvoyons le lecteur à [[16]] pour les définitions de stabilité.
Pour appliquer le Théorème 1, nous devons définir un espace de Banach X, un sous-ensemble convexe borné fermé M de X et construire deux applications ; une contraction large et l'autre est un opérateur compact.
Soit donc $w : [m_0, \infty) \to [1, \infty)$ une fonction strictement croissante et continue avec $w(m_0) = 1, w(t) \to \infty$ comme $t \to \infty$.
Soit $(S, ||_w)$ l'espace de Banach de continue $\varphi : [m_{0,}\infty) \to \mathbb{R}$ pour lequel

$$|\varphi|_w = \sup_{t\in[m_0,\infty)} \left| \frac{\varphi(t)}{w(t)} \right| < \infty.$$

Soit $R \in (0, 1]$ et définir l'ensemble

$$M := \{\varphi \in S : \varphi \text{ est Lipschitzien, } |\varphi(t, 0, \psi)| \leq R, t \in [m_0, \infty)\}. \tag{3.7}$$

Clairement, si $\{\varphi_n\}$ est une suite de fonctions l_1-Lipschitziennes convergeant vers une fonction φ, alors

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi((s))| &= |\varphi(t) - \varphi_n(t) + \varphi_n(t) - \varphi_n(s) + \varphi_n(s) - \varphi(t)| \\ &\leq |\varphi(t) - \varphi_n(t)| + |\varphi_n(t) - \varphi_n(s)| + |\varphi_n(s) - \varphi(s)| \\ &\leq l_1 |t - s|, \end{aligned}$$

comme $n \to \infty$, ce qui implique que φ est l_1-Lipschitzien.
Il est clair que M est fermé convexe et borné. Pour $\varphi \in M$ et $t \geq 0$, on définit par 3.1 l'application $P : M \to S$ comme suit :

$$\begin{aligned} &(P\varphi)(t) \\ = &\left[\psi(0) - Q(0, \psi(-\tau(0))) - \int_{-\tau(0)}^{0} v(s) h(\psi(s)) ds\right] e^{-\int_0^t v(u)du} \\ &+ \int_0^t v(s) e^{-\int_s^t v(u)du} H(\varphi(s)) ds + Q(t, \varphi(t - \tau(t))) \\ &+ \int_{t-\tau(t)} v(s) h(\varphi(s)) ds - \int_0^t v(s) e^{-\int_s^t v(u)du} \left[\int_{s-\tau(s)}^{s} v(u) h(\varphi(u)) du\right] ds \\ &+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} [b(s) h(\varphi(s - \tau(s))) - v(s) Q(s, \varphi(s - \tau(s))) \\ &+ G(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(s)))] ds. \end{aligned} \tag{3.8}$$

On exprime l'Eq. 3.2 comme

$$P\varphi = A\varphi + B\varphi,$$

où $A; B : M \to S$ sont donnés par

$$\begin{aligned}(A\varphi)(t) &= Q(t, \varphi(t-\tau(t))) + \int_{t-\tau(t)}^{t} v(u)\, h(\varphi(u))\, du \\ &- \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} \left[\int_{s-\tau(s)}^{s} v(u)\, h(\varphi(u))\, du\right] ds \\ &+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} [b(s)\, h(\varphi(s-\tau(s))) - v(s)\, Q(s, \varphi(s-\tau(s))) \\ &+ G(s, \varphi(s), \varphi(s-\tau(s)))] ds. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Et

$$\begin{aligned}(B\varphi)(t) &= \left[\psi(0) - Q(0, \psi(-\tau(0))) - \int_{-\tau(0)}^{0} v(s)\, h(\psi(s))\, ds\right] e^{-\int_0^t v(u)du} \\ &+ \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} H(\varphi(s))\, ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

En appliquant le Théorème 3.1, nous devons prouver que P admet un point fixe φ sur l'ensemble M, où $\varphi(t) = x(t, 0, \psi)$ pour $t \geq 0$ et $x(t, 0, \psi) = \psi(t)$ sur $[m_0, 0]$, $x(t, 0, \psi)$ satisfait 3.1 et $|\varphi(t, 0, \psi)| \leq R$ avec $R \in (0, 1]$.

Pour $t \geq 0$, nous supposons que les conditions suivantes sont remplies.

Les fonctions h, Q sont localement continues de Lipschitz, alors pour $t \geq 0$ et $x, y \in M$ il existe une constante E_h, E_Q, tel que

$$|Q(t, x) - Q(t, y)| \leq E_Q \parallel x - y \parallel, \tag{3.11}$$

$$|h(x) - h(y)| \leq E_h \parallel x - y \parallel. \tag{3.12}$$

Les fonctions Q, G satisfait aux conditions de Carathéodory par rapport à $L^1[0, \infty)$, tel que

$$|Q(t, \varphi(t-\tau(t)))| \leq q_R(t) \leq \frac{\alpha_1}{2} R, \tag{3.13}$$

$$|G(t, \varphi(t), \varphi(t-\tau))| \leq g_{\sqrt{2}R}(t) \leq \alpha_2 v(t)\, R, \tag{3.14}$$

$$\beta_1 \beta_2 E_h \leq \frac{\alpha_3}{2}, \tag{3.15}$$

Où $\beta_1 = \sup_{t\in[0,\infty)} |\tau(t)|, \beta_2 = \sup_{t\in[0,\infty)} \{v(t)\}$,

$$|b(t)|\, E_h \leq \alpha_4 v(t), \tag{3.16}$$

$$J[\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4] \leq 1. \tag{3.17}$$

Où $\alpha_i, 1 \leq i \leq 4$ sont des constantes positives et $J > 3$.
Supposons maintenant qu'il existe des constantes $l_1, l_2 > 0$ tel que pour $0 \leq t_1 \leq t_2$

$$|\tau(t_2) - \tau(t_1)| \leq l_2 \mid t_2 - t_1 \mid, \tag{3.18}$$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} v(u)\, du \right| \leq l_3 \mid t_2 - t_1 \mid. \tag{3.19}$$

Par une série d'étapes, nous prouverons l'accomplissement de $(i), (ii)$ et (iii) dans le Théorème 1.

Lemme 3.2 *Pour A défini dans 3.9, supposons que 3.11- 3.19 soient vérifiées.*
Alors, $A : M \to M$ et A sont continus et AM est continus dans un sous-ensemble compact de M.

Preuve. Soit A défini par 3.9. Remarquons que compte tenu de 3.12 on a

$$\begin{aligned} |h(x)| &= |h(x) - h(0) + h(0)| \\ &\leq |h(x) - h(0)| + |h(0)| \\ &\leq E_h \|x\|. \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\varphi \in M$, nous avons

$$\begin{aligned}
|A\varphi(t)| &\leq |Q(t,\varphi(t-\tau(t)))| + \int_{t-\tau(t)}^{t} v(u)|h(\varphi(u))|du \\
&\quad + \int_0^t v(s) e^{-\int_s^t v(u)du}\left[\int_{s-\tau(s)}^{s} v(u)|h(\varphi(u))|du\right]ds \\
&\quad + \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}[|b(s)||h(\varphi(s-\tau(s)))| + v(s)|Q(s,\varphi(s-\tau(s)))| \\
&\quad + |G(s,\varphi(s),\varphi(s-\tau(s)))|]ds. \\
&\leq q_R(t) + R\int_{t-\tau(t)}^{t} v(u)E_h du + R\int_0^t v(s)e^{-\int_s^t v(u)du}\left[\int_{s-\tau(s)}^{s} v(u)E_h du\right]ds \\
&\quad + R\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}|b(s)|E_h ds + R\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}\left(v(s)q_R(s) + \frac{g_{\sqrt{2}R}(s)}{R}\right)ds \\
&\leq \frac{\alpha_1}{2}R + RE_h\int_{t-\tau(t)}^{t} \sup_{t\in[0,\infty)}\{v(u)\}du \\
&\quad + RE_h\int_0^t v(s)e^{-\int_s^t v(u)du}\left[\int_{s-\tau(s)}^{s}\sup_{t\in[0,\infty)}\{v(u)\}du\right]ds \\
&\quad + R\alpha_4\int_0^t v(s)e^{-\int_s^t v(u)du}ds + R\int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du}\left(v(s)\frac{\alpha_1}{2}R + \alpha_2 v(s)\right)ds \\
&\leq \frac{\alpha_1}{2}R + RE_h\beta_2\sup_{t\in[0,\infty)}|\tau(t)| + RE_h\beta_2\sup_{t\in[0,\infty)}|\tau(t)|\int_0^t v(s)e^{-\int_s^t v(u)du}ds \\
&\quad + R\alpha_4\int_0^t v(s)e^{-\int_s^t v(u)du}ds + \left(\frac{\alpha_1}{2}R^2 + \alpha_2 R\right)\int_0^t v(s)e^{-\int_s^t v(u)du}ds \\
&\leq \frac{\alpha_1}{2}R + RE_h\beta_1\beta_2 + \left(RE_h\beta_1\beta_2 + R\alpha_4 + \frac{\alpha_1}{2}R^2 + \alpha_2 R\right)\int_0^t v(s)e^{-\int_s^t v(u)du}ds \\
&\leq \frac{\alpha_1}{2}R + \frac{\alpha_3}{2}R + \frac{\alpha_3}{2}R + R\alpha_4 + \frac{\alpha_1}{2}R + \alpha_2 R \leq \frac{R}{J} < R
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^t v(s)e^{-\int_s^t v(u)du}ds &= \int_0^t \left(e^{-\int_s^t v(u)du}\right)' \\
&= \left[e^{-\int_s^t v(u)du}\right]_0^t \\
&= 1 - e^{-\int_0^t v(u)du} \leq 1
\end{aligned}$$

Soit $\|A\varphi\| < R$. Deuxièmement, nous montrons que, pour tout $\varphi \in M$ la fonction $A\varphi$ est liposchitzienne. Soit $\varphi \in M$, et soit $0 < t_1 < t_2$, alors

$$\begin{aligned}
& \left|A\varphi(t_2) - A\varphi(t_1)\right| \\
\leq\ & \left|Q(t_2, \varphi(t_2 - \tau(t_2))) - Q(t_1, \varphi(t_1 - \tau(t_1)))\right| \\
& + \left|\int_{t_2-\tau(t_2)}^{t_2} v(s)\, h(\varphi(s))\, du - \int_{t_1-\tau(t_1)}^{t_1} v(s)\, h(\varphi(s))\, ds\right| \\
& + \left|\int_0^{t_2} v(s)\, e^{-\int_s^{t_2} v(u)du} \left[\int_{s-\tau(s)}^{s} v(u)\, h(\varphi(u))\, du\right] ds\right. \\
& \left. - \int_0^{t_1} v(s)\, e^{-\int_s^{t_1} v(u)du} \left[\int_{s-\tau(s)}^{s} v(u)\, h(\varphi(u))\, du\right] ds\right| \\
& \left| + \int_0^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} v(u)du} b(s)\, h(\varphi(s - \tau(s)))\, ds\right. \\
& \left. - \int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_1} v(u)du} b(s)\, h(\varphi(s - \tau(s)))\, ds\right| \\
& + \left|\int_0^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} v(u)du} \left[-v(s)\, Q(s, \varphi(s - \tau(s))) + G(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(t)))\right] ds\right. \\
& \left. - \int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_1} v(u)du} \left[-v(s)\, Q(s, \varphi(s - \tau(s))) + G(s, \varphi(s), \varphi(s - \tau(s)))\right] ds\right|. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Par les hypothèses 3.11, 3.12, 3.18 et 3.19, on a

$$\begin{aligned}
& \left|\int_{t_2-\tau(t_2)}^{t_2} v(s)\, h(\varphi(s))\, ds - \int_{t_1-\tau(t_1)}^{t_1} v(s)\, h(\varphi(s))\, ds\right| \\
\leq\ & \left|\int_{t_2-\tau(t_2)}^{t_2} v(s)\, h(\varphi(s))\, ds - \int_{t_1-\tau(t_1)}^{t_2-\tau(t)} v(s)\, h(\varphi(s))\, ds + \int_{t_2-\tau(t_2)}^{t_1} v(s)\, h(\varphi(s))\, ds\right| \\
\leq\ & \left|\int_{t_1}^{t_2} v(s)\, h(\varphi(s))\, ds\right| + \left|\int_{t_1-\tau(t_1)}^{t_2-\tau(t)} v(s)\, h(\varphi(s))\, ds\right| \\
\leq\ & E_h R\left(\int_{t_1}^{t_2} v(s)\, ds + \int_{t_1-\tau(t_1)}^{t_2-\tau(t_2)} v(s)\, ds\right) \\
\leq\ & E_h R\,|t_2 - t_1| + E_h R\,|t_2 - \tau(t_2) - t_1 + \tau(t_1)| \\
\leq\ & E_h R\,|t_2 - t_1| + E_h R\,(|t_2 - t_1| + l_2\,|t_2 - t_1|) \\
\leq\ & E_h R l_3 \mid t_2 - t_1 \mid + E_h R l_3\,(1 + l_2)\,|t_2 - t_1| \\
\leq\ & (2E_h R l_3 + E_h R l_3 l_2)\,|t_2 - t_1|, \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left|Q(t_2, \varphi(t_2 - \tau(t_2))) - Q(t_1, \varphi(t_1 - \tau(t_1)))\right| \\
\leq\ & E_Q l_1\,|(t_2 - t_1) - (\tau(t_2) - \tau(t_1))| \\
\leq\ & (E_Q l_1 + E_Q l_1 l_2)\,|t_2 - t_1|, \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

où l_1 est la constante de Lipschitz de φ. Par les hypothèses 3.12, 3.16 et 3.19, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} v(u)du} ub(s)\, h(\varphi(s-\tau(s)))\, ds - \int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_1} v(u)du} b(s)\, h(\varphi(s-\tau(s)))\, ds\right| \\
\leq\ & \left|\int_0^{t_1} b(s)\, h(\varphi(s-\tau(s)))\, e^{-\int_s^{t_1} v(u)du}\left(e^{-\int_{t_1}^{t_2} v(u)du}-1\right) ds\right| \\
&+\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} v(u)du} b(s)\, h(\varphi(s-\tau(s)))\, ds\right| \\
\leq\ & \alpha_4 R\left|e^{-\int_{t_1}^{t_2} v(u)du}-1\right|\int_0^{t_1} v(s)\, e^{-\int_s^{t_1} v(u)du} ds + E_h R\int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} v(u)du}\,|b(s)|\, ds.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{t_2} e^{-\int_{t_1}^{t_2} v(u)du} b(s)\, h(\varphi(s-\tau(s)))\, ds - \int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_1} v(u)du} b(s)\, h(\varphi(s-\tau(s)))\, ds\right| \\
\leq\ & \alpha_4 R\int_{t_1}^{t_2} v(u)\, du + E_h R\int_{t_1}^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} v(u)du} d\left(\int_{t_1}^{s}|b(r)|\, dr\right) ds \\
=\ & \alpha_4 R\int_{t_1}^{t_2} v(u)\, du + E_h R\left[e^{-\int_s^{t_2} v(u)du}\int_{t_1}^{s}|b(r)|\, dr\right]_{t_1}^{t_2} \\
&+E_h R\int_{t_1}^{t_2} v(s)\, e^{-\int_s^{t_2} v(u)du}\int_{t_1}^{s}|b(r)|\, dr ds \\
\leq\ & \alpha_4 R\int_{t_1}^{t_2} v(u)\, du + E_h R\int_{t_2}^{t_2}|b(s)|\, ds\left(1+\int_{t_1}^{t_2} v(s)\, e^{-\int_s^{t_2} v(u)du} ds\right) \\
\leq\ & \alpha_4 R\int_{t_1}^{t_2} v(u)\, du + 2E_h R\int_{t_2}^{t_2}|b(s)|\, ds \\
\leq\ & \alpha_4 R\int_{t_1}^{t_2} v(u)\, du + 2\alpha_4 R\int_{t_1}^{t_2} v(u)\, du \leq 3\alpha_4 R l_3\,|t_2-t_1|\,.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

De même, par 3.13- 3.15 et 3.19, on a

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{t_2} e^{-\int_s^{t_2} v(u)du}\left[-v(s)\, Q(s,\varphi(s-\tau(s))) + G(s,\varphi(s),\varphi(s-\tau(s)))\right] ds\right. \\
&\left. -\int_0^{t_1} e^{-\int_s^{t_1} v(u)du}\left[-v(s)\, Q(s,\varphi(s-\tau(s))) + G(s,\varphi(s),\varphi(s-\tau(s)))\right] ds\right| \\
\leq\ & 3R\left(\frac{\alpha_1}{2}+\alpha_2\right) l_3\,|t_2-t_1|\,,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{t_2} v(s)\, e^{-\int_s^{t_2} v(u)du}\left[\int_{s-\tau(s)}^{s} v(u)\, h(\varphi(u))\, ds\right]\right. \\
&\left. -\int_0^{t_1} v(s)\, e^{-\int_s^{t_1} v(u)du}\left[\int_{s-\tau(s)}^{s} v(u)\, h(\varphi(u))\, du\right] ds\right| \\
\leq\ & \frac{3}{2} R\alpha_3 l_3\,|t_2-t_1|\,.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Ainsi, en remplaçant 3.21- 3.25 dans 3.20, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left|A\varphi\left(t_2\right)-A\varphi\left(t_1\right)\right| \\
\leq\ & \left(E_Q l_1+E_Q l_1 l_2\right)\left|t_2-t_1\right|+\left(2E_h R l_3+E_h R l_3 l_2\right)\left|t_2-t_1\right| \\
& +3R\left(\frac{\alpha_1}{2}+\alpha_2+\frac{\alpha_3}{2}+\alpha_4\right) l_3\left|t_2-t_1\right| \\
\leq\ & \left|t_2-t_1\right|\left(E_Q l_1+E_Q l_1 l_2+2E_h R l_3+E_h R l_3 l_2+3R\left(\frac{\alpha_1}{2}+\alpha_2+\frac{\alpha_3}{2}+\alpha_4\right) l_3\right) \\
=\ & K\left|t_2-t_1\right|.
\end{aligned}$$

Pour une constante $K>0$. Cela montre que $A\varphi$ est Lipschitzien si φ l'est.
Ceci complet pour prouver $A: M \rightarrow M$.Puisque $A\varphi$ est Lipschitzien, alors AM est équicontinu, ce qui implique que l'ensemble AM réside dans un ensemble compact dans l'espace $\left(S,||_w\right)$.
Montrons, maintenant que A est continue dans la norme pondérée, soit $\varphi_n \in M$ où n est un entier positif tel que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ comme $n \rightarrow \infty$. Alors

$$\begin{aligned}
& \left|\frac{A\varphi_n(t)-A\varphi(t)}{w(t)}\right| \\
\leq\ & \left|Q\left(t, \varphi_n(t-\tau(t))\right)-Q(t, \varphi(t-\tau(t)))\right|_w \\
& +\int_{t-\tau(t)}^t v(s)\left|h\left(\varphi_n(s)\right)-h(\varphi(s))\right|_w ds \\
& +\int_0^t v(s) e^{-\int_s^t v(u) du} \int_{s-\tau(t)}^s v(s)\left|h\left(\varphi_n(u)\right)-h(\varphi(u))\right|_w du ds \\
& +\int_0^t e^{-\int_s^t v(u) du}|b(s)|\left|h\left(\varphi_n(s-\tau(s))\right)-h(\varphi(s-\tau(s)))\right|_w \\
& +\int_0^t v(s) e^{-\int_s^t v(u) du}\left|Q\left(s, \varphi_n(s-\tau(s))\right)-Q(s, \varphi(s-\tau(s)))\right|_w ds \\
& +\int_0^t e^{-\int_s^t v(u) du}\left|G\left(s, \varphi_n(s), \varphi_n(s-\tau(s))\right)-G(s, \varphi(s), \varphi(s-\tau(s)))\right|_w ds.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de convergence dominée, $\lim_{n \rightarrow \infty}\left|A\varphi_n(t)-A\varphi(t)\right|=0$.
Alors A est continue.
Ceci complet pour prouver que $A: M \rightarrow M$ est continue et que AM est continue dans un sous-ensemble compact de M.

■

Maintenant, nous énonçons un résultat important impliquant que l'application H donnée par 3.3 est une contraction large sur l'ensemble M.
Ce résultat a déjà été obtenu dans [1, Théorème 3.4] et par commodité nous présentons ci-dessous sa preuve.
Nous supposerons que,

$(H1)$ $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continuous sur $[-\mathbb{R},\mathbb{R}]$ et differentiable sur $(-\mathbb{R},\mathbb{R})$,
$(H2)$ h est strictement croissante sur $[-\mathbb{R},\mathbb{R}]$,
$(H3)$ $\sup_{t\in(-\mathbb{R},\mathbb{R})} h'(t)\leq 1$.

Théorème 3.3 *Soit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction vérifiant$(H1)-(H3)$. Alors l'application H dans 3.3 est une contraction large sur l'ensemble M.*

Preuve. Soit $\varphi,\varphi\in M$ avec $\varphi\neq\phi$. Alors $\varphi(t)\neq\phi(t)$ pour un certain $t\in\mathbb{R}$.
Notons l'ensemble de tous ces t par $D(\varphi,\phi)$, c'est-à-dire,

$$D(\varphi,\phi)=\{t\in\mathbb{R}:\varphi(t)\neq\phi(t)\}.$$

Pour tout $t\in D(\varphi,\phi)$, on a

$$\begin{aligned}
&|(H\varphi)(t)-(H\phi)(t)|\\
\leq\ &|\varphi(t)-\phi(t)-h(\varphi(t))+h(\phi(t))|\\
\leq\ &|\varphi(t)-\phi(t)|\left|1-\frac{h(\varphi(t))-h(\phi(t))}{\varphi(t)-\phi(t)}\right|.
\end{aligned}\tag{3.26}$$

Comme h est une fonction strictement croissante, on a

$$\frac{h(\varphi(t))-h(\phi(t))}{\varphi(t)-\phi(t)}>0.\tag{3.27}$$

Pour tout fixe $t\in D(\varphi,\phi)$ définir l'intervalle $I_t\subset[-\mathbb{R},\mathbb{R}]$ par

$$I_t=\begin{cases}(\varphi(t),\phi(t)) & \text{if } \varphi(t)<\phi(t),\\ (\phi(t),\varphi(t)) & \text{if } \phi(t)<\varphi(t).\end{cases}.$$

Le Théorème de la valeur moyenne implique que pour tout $t\in D(\varphi,\phi)$ fixe il existe un nombre réel $c_t\in I_t$ tel que

$$\frac{h(\varphi(t))-h(\phi(t))}{\varphi(t)-\phi(t)}=h'(c_t).$$

Par $(H2)$,$(H3)$ on a

$$\begin{aligned}
0\ &\leq \inf_{s\in(-\mathbb{R},\mathbb{R})} h'(s)\leq\inf_{s\in I_t} h'(s)\leq h'(c_t)\\
&\leq \sup_{s\in I_t} h'(s)\leq\sup_{s\in(-\mathbb{R},\mathbb{R})} h'(s)\leq 1.
\end{aligned}\tag{3.28}$$

Ainsi, par 3.20- 3.22 on obtient

$$|h(\varphi(t))-h(\phi(t))|\leq|\varphi(t)-\phi(t)|\left|1-\inf_{s\in(-\mathbb{R},\mathbb{R})} h'(s)\right|,\tag{3.29}$$

pour tout $t \in D(\varphi, \phi)$.
Cela implique une forte contraction de la norme supremum.
Pour voir cela, choisissez $\epsilon \in (0,1)$fixe et supposons que φet ϕ sont deux fonctions dans M vérifiant :

$$\epsilon \leq \sup_{t\in(-\mathbb{R},\mathbb{R})} |\varphi(t) - \phi(t)| = \|\varphi - \phi\|.$$

Si $|\varphi(t) - \phi(t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ pour un certain $t \in D(\varphi, \phi)$, alors on obtient par 3.22 et 3.23 que

$$|h(\varphi(t)) - h(\phi(t))| \leq \frac{1}{2}\|\varphi - \phi\|. \tag{3.30}$$

Comme h est continue et strictement croissante, la fonction $h\left(s + \frac{\epsilon}{2}\right) - h(s)$ atteint son minimum sur l'intervalle fermé et borné $[-\mathbb{R}, \mathbb{R}]$.
Ainsi, si $\frac{\epsilon}{2} \leq |\varphi(t) - \phi(t)|$ pour un certain $t \in D(\varphi, \phi)$, alors par $(H2)$ et $(H3)$ on conclut que

$$1 \geq \frac{h(\varphi(t)) - h(\phi(t))}{\varphi(t) - \phi(t)} > \lambda,$$

où

$$\lambda := \frac{1}{2R}\min\left\{h\left(s + \frac{\epsilon}{2}\right) - h(s) : s \in [-R, R]\right\} > 0.$$

Par conséquent, 3.20 implique

$$|(H\varphi)(t) - (H\phi)(t)| \leq (1-\lambda)\|\varphi - \phi\|. \tag{3.31}$$

Par conséquent, en combinant 3.24 et 3.25 on obtient

$$|(H\varphi)(t) - (H\phi)(t)| \leq \delta\|\varphi - \phi\|, \tag{3.32}$$

où

$$\delta = \max\left\{\frac{1}{2}, 1-\lambda\right\}.$$

La preuve est complète. ■
Le résultat suivant montre la relation entre les applications H et B au sens des contractions large, pour cela supposons que

$$\max\{|H(-R)|, |H(R)|\} \leq \frac{2R}{J}. \tag{3.33}$$

Choisissez $\gamma > 0$ suffisamment petit pour que

$$\left[1 + E_Q + E_h\int_{-\tau(0)}^{0} v(u)\,du\right]\gamma e^{-\int_0^t v(u)du} + \frac{R}{J} + \frac{2R}{J} \leq R. \tag{3.34}$$

Le choisi dans la relation 3.28 sera utilisé plus loin dans le lemme 3 et le Théorème 4 pour montrer que si $\epsilon = R$ et si $\|\psi\| < \gamma$, alors les solutions satisfont $|x(t, 0, \psi)| < \epsilon$.

Lemme 3.3 *Soit B défini par 3.10, supposons 3.18, 3.19, $(H1)-(H3)$, 3.35 et 3.36. Alors $B : M \to M$ and B est une contraction large.*

Preuve. Soit B défini par 3.10, Évidemment, B est continue avec la norme pondérée.
Soit $\varphi \in M$,

$$\begin{aligned}
|(B\varphi)(t)| &= \left|\psi(0) - Q(0,\psi(-\tau(0))) - \int_{-\tau(0)}^{0} v(s)\, h(\psi(s))\, ds e^{-\int_0^t v(u)du}\right| \\
&\quad + \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} |H(\varphi(s))|\, ds \\
&\leq \left(|\psi| + |Q(0,\psi(-\tau(0)))| + \int_{-\tau(0)}^{0} v(s)\, |h(\psi(s))|\right) e^{-\int_0^t v(u)du} \\
&\quad + \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} |H(\varphi(s))|\, ds \\
&\leq \left(\|\psi\| + E_Q\|\psi\| + E_h \int_{-\tau(0)}^{0} v(s)\, \|\psi\|\right) e^{-\int_0^t v(u)du} \\
&\quad + \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} |H(\varphi(s))|\, ds \\
&\quad + \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} \max\{|H(-R)|, |H(R)|\}\, ds \\
&< R,
\end{aligned}$$

Ona, $\|\psi\| < \gamma$
Alors

$$\begin{aligned}
|(B\varphi)(t)| &= \left[1 + E_Q + E_h \int_{-\tau(0)}^{0} v(u)\, du\right] \gamma e^{-\int_0^t v(u)du} \\
&\quad + \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} \max\{|H(-R)|, |H(R)|\}\, ds \\
&< R
\end{aligned}$$

et on utilisé une méthode comme dans le Lemme 2, on a en déduit que, pour tout $\varphi \in M$ la fonction $B\varphi$ est Lipschitzienne, ce qui implique $B : M \to M$.D'après le Théorème 3.3, H est une contraction large sur M, alors pour tout $\varphi, \phi \in M$, avec $\varphi \neq \phi$ et pour tout $\epsilon > 0$, d'après la preuve de cela Théorème, nous avons trouvé un $\delta < 1$, tel que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{B\varphi(t) - B\phi(t)}{w(t)}\right| &\leq \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} |H(\varphi(u)) - H(\phi(u))|_w\, du \\
&\leq \delta\, |\varphi - \phi|_w\, .
\end{aligned}$$

La preuve est complète. ■

Théorème 3.4 *Supposons l'hypothèse des Lemmes* 2 *et* 3*. Soit* M *défini par 3.7. Puis l'éq. 3.1 admet une solution dans* M.

Preuve. Par les Lemmes 2, 4, $A : M \to M$ est continu et $A(M)$ est continu dans un ensemble compact. De plus, d'après le Lemme 3, l'application $B : M \to M$ est une contraction large. Ensuite, on montre que si $\varphi, \phi \in M$, on a $\|A\varphi + B\phi\| \leq R$. Soit $\varphi, \phi \in M$ avec $\|\varphi\|, \|\phi\| \leq R$. D'après 3.13- 3.17

$$\begin{aligned} \|A\varphi + B\phi\| &\leq \left[1 + E_Q + E_h \int_{-\tau(0)}^{0} v(u)\, du\right] \gamma e^{-\int_0^t v(u)du} \\ &\quad + [\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4] R + \frac{2R}{J} \\ &\leq \left[1 + E_Q + E_h \int_{-\tau(0)}^{0} v(u)\, du\right] \gamma e^{-\int_0^t v(u)du} + \frac{R}{J} + \frac{2R}{J} \\ &\leq R. \end{aligned}$$

Clairement, toutes les hypothèses du Théorème de Krasnoselskii-Burton sont satisfaites. Il existe donc un point fixe $z \in M$ tel que $z = Az + Bz$. D'après le Lemme 1, ce point fixe est une solution de 3.1. Donc 3.1 est stable. ■

3.2 Stabilité asymptotique

Maintenant, pour la stabilité asymptotique, définir M_0 par

$$\begin{aligned} M_0 &: = \{\varphi \in S : \varphi \text{ est Lipschitzian, } |\varphi(t, 0, \psi)| \leq R, t \in [m_0, \infty), \\ \varphi(t) &= \psi(t) \text{ si } t \in [m_0, 0] \text{ et } |\varphi(t)| \to 0\ t \to \infty\}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Tous les calculs de la preuve du Théorème 4 sont valables avec $w(t) = 1$ lorsque $|.|_w$ est remplacé par la norme supremum $|.|$. Maintenant, suppose que

$$t - \tau(t) \to \infty \text{ comme } t \to \infty \text{ et } \int_0^t v(s)\, ds \to \infty \text{ comme } t \in \infty, \tag{3.36}$$

$$\frac{b(t)}{v(t)} \to 0 \to \text{ comme } t \to \infty, \tag{3.37}$$

$$q_R(t) \to 0 \text{ comme } t \to \infty, \tag{3.38}$$

$$\frac{g_{\sqrt{2R}}(t)}{v(t)} \to 0 \text{ comme } t \to \infty. \tag{3.39}$$

Lemme 3.4 *Soit 3.11- 3.19 et 3.36- 3.39. Ensuite, l'opérateur* A *application* M_0 *en un sous-ensemble compact de* M_0.

Preuve. D'abord, on déduit par le lemme 2 que $A(M_0)$ est équicontinue. Ensuite, on remarque que pour φ arbitraire $\varphi \in M_0$ on a

$$\begin{aligned}
|A\varphi(t)| &\leq q_R(t) + E_h R \int_{t-\tau(t)}^{t} v(s)\, ds + E_h R \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} \int_{t-\tau(t)}^{t} v(u)\, duds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} \left[\left| \frac{b(s)}{v(s)} \right| E_h + Rq_R(s) + \frac{g_{\sqrt{2R}}(s)}{v(s)} \right] ds \\
: &= q(t).
\end{aligned}$$

On voit ça $q(t) \to 0$ comme $t \to \infty$, ce qui implique que l'ensemble AM_0 réside dans un ensemble compact dans l'espace $(S, \|.\|)$ par Théorème 3.2. ■

Théorème 3.5 *Supposons que l'hypothèse des lemmes 3 et 4 soit vérifiée. Soit M_0 défini par 3.35. Puis l'éq.3.1 admet une solution en M_0.*

Preuve. Notez que toutes les étapes de la preuve du Théorème 4 sont valables avec $w(t) = 1$ lorsque $\|.\|_w$ est remplacé par la norme supremum $\|.\|$.
Il suffit de montrer, pour $\varphi \in M_0$ alors $A\varphi \to 0$ et $B\varphi \to 0$. Soit $\varphi \in M_0$ fixé, on va prouver que $|A\varphi(t)| \to 0$ comme $t \to \infty$, comme ci-dessus nous avons

$$\begin{aligned}
|A\varphi(t)| &\leq |Q(t, \varphi(t-\tau(t)))| + \int_{t-\tau(t)}^{t} v(u)\, |h(\varphi(u))|\, du \\
&+ \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} \left[\int_{s-\tau(t)}^{s} v(u)\, |h(\varphi(u))|\, du \right] ds \\
&+ \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} \left[|b(s)|\, |h(\varphi(s-\tau(s)))| + v(s) \right] |Q(s-\tau(s))| \\
&+ |G(s, \varphi(s), \varphi(s-\tau(s)))|\, ds.
\end{aligned}$$

Premièrement, nous avons

$$|Q(t, \varphi(t-\tau(t)))| \leq q_R(t) \to 0 \text{ comme } t \to 0,$$

et

$$\int_{t-\tau(t)}^{t} v(u)\, |h(\varphi(u))|\, du \leq E_h R \int_{t-\tau(t)}^{t} v(u)\, du \to 0 \text{ comme } t \to 0.$$

Deuxièmement, que $\epsilon > 0$ soit donné . Trouver T tel que $|\varphi(t-\tau(t))|, |\varphi(t)| < \epsilon$, pour $t \geq T$. Alors on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} \left[\int_{s-\tau(t)}^s v(u)\, |h(\varphi(u))|\, du\right] ds \\
= \;& e^{-\int_T^t v(u)du} \int_0^T v(s)\, e^{-\int_s^T v(u)du} \left[\int_{s-\tau(s)}^s v(u)\, |h(\varphi(u))|\, du\right] ds \\
& + \int_T^t v(s)\, e^{-\int_s^t v(u)du} \left[\int_{s-\tau(s)}^s v(u)\, |h(\varphi(u))|\, du\right] ds \\
\leq \;& e^{-\int_T^t v(u)du} \frac{\alpha_3}{2} R + \frac{\alpha_3}{2}\epsilon,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{-\int_s^t v(u)du} (|b(s)|\, |h(\varphi(s-\tau(s)))| \\
& + v(s)\, |Q(s,\varphi(s-\tau(t)))| + |G(s,\varphi(s),\varphi(s-\tau(s)))|) ds \\
= \;& e^{-\int_T^t v(u)du} \int_0^T e^{-\int_s^T v(u)du} (|b(s)|\, |h(\varphi(s-\tau(s)))| \\
& + v(s)\, |Q(s,\varphi(s-\tau(s)))| + |G(s,\varphi(s),\varphi(s-\tau(s)))|) ds \\
& + \int_T^t e^{-\int_s^t v(u)du} (|b(s)|\, |h(\varphi(s-\tau(s)))| \\
& + v(s)\, |Q(s,\varphi(s-\tau(s)))| + |G(s,\varphi(s),\varphi(s-\tau(s)))|) ds \\
\leq \;& e^{-\int_T^t v(u)du} (\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2 + \alpha_4) R + (\frac{\alpha 1}{2} + \alpha_2 + \alpha_4)\epsilon.
\end{aligned}$$

D'après (3.36) les termes $e^{-\int_T^t v(u)du} \frac{\alpha_3}{2} R$ et $e^{-\int_T^t v(u)du} \left(\frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2 + \alpha_4\right) R$ sont, comme $t \to \infty$, arbitrairement petits. De même pour $B\varphi \to 0$. Ceci termine la preuve. ■

Nous donnons un exemple pour illustrer l'application des théorèmes 3.4 et 3.5.

Exemple 3.1 *Considérez l'équation différentielle neutre non linéaire suivante avec un retard variable*

$$\frac{d}{dt} x(t) = -a(t)\, h(x(t-\tau(t))) + \frac{d}{dt} Q(t, x(t-\tau(t))) + G(t, x(t), x(t-\tau(t))), \tag{3.40}$$

où $\tau(t) = 2.10^{-2} e^{-t}$, $a(t) = \frac{1+4.10^{-4}e^{-2t} - 2.10^{-2} t e^{-t}}{1+t-2.10^{-2}e^{-t}}$, $Q(t,x) = \frac{x}{100 e^t}$, $G(t,x,y) = \frac{x^2+y^2}{50 e^t}$, $h(x) = x^3$. Alors la solution nulle de 3.40 est asymptotiquement stable.

Preuve. Nous avons $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\left[_{-\sqrt{3}/3, 3\sqrt{3}/3}\right]$ dérivable sur $\left[_{-\sqrt{3}/3, 3\sqrt{3}/3}\right]$, strictement croissante sur $\left[_{-\sqrt{3}/3, 3\sqrt{3}/3}\right]$ et $\sup_{t \in \left(_{-\sqrt{3}/3, 3\sqrt{3}/3}\right)} h'(t) \leq 1$. D'après le Théorème 3, l'application $H(x) = x - x^3$ est une contraction large sur l'ensemble

$$\begin{aligned}
M_0 \;\; : & = \{\varphi \in B : B \text{ est Lipschitzien, } |\varphi(t,0,\psi)| \leq \sqrt{3}/3, t \in \left[-2.10^{-2}, \infty\right) \\
\varphi(t) \;\; & = \;\; \psi(t) \text{ si } t \in \left[-2.10^{-2}, 0\right] \text{ et } |\varphi(t)| \to 0 \text{ comme } t \to \infty\}.
\end{aligned}$$

En choisissant $v(t) = \frac{1}{1+t}$, il est clair que la condition 3.19 est vérifiée. De plus, nous avons $m_0 = -2, 10^{-2}$, $R = \sqrt{3}/3, b(t) = 2.10^{-2}e^{-t}, h(0) = Q(t, 0) = G(t, 0, 0) = 0, E_h = 1, E_Q = \frac{1}{100}, q_R = \frac{\sqrt{3}e^{-t}}{300}, g_{\sqrt{2}R}(t) = \frac{e^t}{75}, \alpha_1 = \frac{1}{50}, \alpha_2 = \frac{1}{25\sqrt{3}}, \alpha_3 = 4.10^{-2}, \alpha_4 = 2.10^{-2}, \beta_1 = 2.10^{-2}, \beta_2 = 1, l_1 = 2.10^{-2}$, $l_3 = 1,\ J \in (3, \frac{25\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}]$.
Il est facile de voir que toutes les conditions des Théorèmes 3.4 et 3.5 sont vérifiées. Ainsi, le Théorème 3.5 implique que la solution nulle de 3.40 est asymptotiquement stable.

■

Conclusion

Dans ce mémoire, les résultats ont renforcé l'idée du théorème du point fixe de Krasnoselskii-Burton et de la stabilité des équations différentielles neutre avec retard, ainsi que le cadre général présenté ici peut être utile à ceux qui rencontreront probablement des défis similaires.
En guise de conclusion, les modèles proposés contiennent, d'une part, comme cas particulier dépendant d'une équation différentielle neutre totalement non linéaire à retard fonctionnel exprimée comme suit

$$x'(t) = -a(t)\, x^3(t) + b(t)\, x^3(t - r(t)), \quad t \geq 0.$$

Deuxièmement, pour la situation générale considérée sur l'étude de la stabilité dans les équations différentielles neutres non linéaires à retard en utilisant le théorème de point fixe de Krasnoselskii-Burton, nous avons étudié un type d'équations exprimé comme suit :

$$\frac{d}{dt}x(t) = -a(t)\, h(x(t - \tau(t))) + \frac{d}{dt}Q(t, x(t - \tau(t))) + G(t, x(t), x(t - \tau(t)))$$

Informés sur les idées nouvelles et fascinantes relatives à la théorème du point fixe en général, nous attendons avec impatience d'autres travaux résultant de la combinaison des contractions généralisées et de la théorème du point fixe de Schauder pour la résolution des equations differentielles non linéaires à retard.

Bibliographie

[1] M. Advar , M. N. Islam and Y.N. Raffoul, Separate contraction and existence of periodic solution in totally nonlinear delay differential equations, Hacet. J. Math. Stat. 41,. 2012.

[2] A. Ardjouni and A. Djoudi, Fixed points and stability in linear neutral differential equations with variable delays, non linear Anal. 74 ,.2011.

[3] A. Ardjouni and I. Derrardjia, A. Djoudi, Stability in totally nonlinear neutral differential equations with variable delay, acta Math. Univ. Comenianae LXXXIII ,. 2014.

[4] T. A. Burton, Integral equations, implicit functions, and fixed points, Proc. Amer. Math. Soc. 124,. 1996.

[5] T. A. Burton, Krasnoselskii's inversion principle and fixed points, nonlinear Anal. 30,. 1997.

[6] T. A. Burton, A fixed-point theorem of Krasnoselskii, Appl. Math. Lett. 11,. 1998.

[7] T. A. Burton and C. Kirk, A fixed point theorem of Krasnoselskii-Schaefer type, Math. Nachr. 189,. 1998.

[8] T. A. Burton, Lyapunov functionals, fixed points, and stability by Krasnoselskii's theorem, non linear Stud. 9,. 2001.

[9] T. A. Burton and T. Furumochi, Fixed points and problems in stability theory, Dynam. Systems Appl. 10,. 2001.

[10] T. A. Burton and T. Furumochi, A note on stability by Schauder's theorem, Funkcial. Ekvac. 44,. 2001.

[11] T. A. Burton, Lyapunov functionals, fixed points and stability by Krasnoseskii's theorem, non linear Stud. 9,. 2002.

[12] T. A. Burton and T. Furumochi, Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems, Dynam. Systems Appl. 11,. 2002.

[13] T. A. Burton, T. Furumochi, Krasnoselskii's fixed point theorem and stability, Nonlinear Anal. 49,. 2002.

[14] T. A. Burton, Stability by fixed point theoryor Liapunov's theory : A comparison, Fixed Point Theory. 4,. 2003.

[15] TA. Burton, Fixed points and stability of a nonconvolution equation, Proc. Amer. Math. Soc. 132,. 2004.

[16] T. A. Burton, Stability by Fixed Point Theory for Functional Differential Equations, Dover Publications, New York,. 2006.

[17] H. Deham and A. Djoudi, Periodic solutions for nonlinear differential equation with functional delay, Georgian Math. J. 15,. 2008.

[18] H. Deham and A. Djoudi, Existence of periodic solutions for neutral nonlinear differential equations with variable delay, Electron. J. Differential Equations. 127,. 2010.

[19] I. Derrardjia, A. Ardjouni and A. Djoudi, Stability by Krasnoselskii's theorem in totally nonlinear neutral differential equation, Opuscula Math. 33,. 2013.

[20] A. Djoudi and R. Khemis, Fixed point techniques and stability for neutral nonlinear differential equations with unbounded delays, Georgian Math. J. 13,. 2006.

[21] A. EL Jai, Eléments de topologie et Espaces métriques, Presses Universitares de perping, Mars 2007.

[22] L, Jeanjean, Espaces métrique, Cours et TD, Universitares de Franche-Comé,16 route de Gray, 25030 Besan, com cedex.

[23] C. H. Jin and J.W. Luo, Stability in functional differential equations established using fixed point theory, nonlinear Anal. 68,. 2008.

[24] C. H. Jin and J.W. Luo, Fixed points and stability in neutral differential equations with variable delays, Proc. Amer. Math. Soc. 136,. 2008.

[25] J. K. Hale, Theory of Functional Differential Equation, Springer, New York,. 1077.

[26] L. Hatvani, Annulus arguments in the stability theory for functional differential equation, Differential Integral Equations. 10,. 1997.

[27] M. A. Krasnoselskii, Amer. Math. Soc. Transl. 10,. 1958.

[28] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, Wiley, New York,. 1978.

[29] P. Mironescu. Cour de topologie métrique. 2005.

[30] D. O'Regan, Fixed-point theory for the sum of two operators, Appl. Math. Lett. 9,. 1996.

[31] F. Paulin. Topologie, analyse et calcul différentiel. École Normale Supérieure. 2008-2009.

[32] Y. R. Raffoul, Stability in neutral nonlinear differential equations with functional delays using fixed-point theory, Math. Comput. Model. 40,. 2004.

[33] J. Reinermann, Fixpunkts~itze vom Krasnoselski-typ, Math. Z. 119,. 1971.

[34] B. N. Sadovskii, A fixed-point principle, f-~nc. Anal. and Applications 1,. 1967.

[35] D. R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge Tracts in Mathematics, no. Cambridge University Press, London-New York, 66,. 1974.

[36] D. R. Smart, Fixed Point Theorems, Cambridge University Press, Cambridge,. 1980.

[37] Y. Soontag. Topologie analyse fonctionnelle.

[38] B. Zhang, Fixed points and stability in differential equations with variable delays, nonlinear Anal. 63,. 2005.