République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equation aux deriveés partielles et applications
Thème :

Non existence de solutions globales de certains problèmes d'équations d'évolution fractionnaires non linéaires

Présenté Par :

Tahar Imane

Devant le jury :

Mr Boumaza Nouri	MCA	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr Rebiai Belgacem	Prof	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur
Mr Toualbia Abdelatif	MCB	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur

Date de soutenance : 04/06/2023

بسم الله الرحمن الرحيم

شكر و عرفان

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله نحمده وهو المستحق للحمد والثناء ونستعين به

في السراء والضراء ونتوكل عليه في جميع حالاتنا،

ونصلي ونسلم على خير خلق الله سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

وعلى آله وصحبه أجمعين ومن إتبع هداه إلى يوم الدين.

وعملا بقوله صلى الله عليه وسلم :

(مَنْ لَمْ يَشْكُرْ القَليلَ لَمْ يَشْكُرْ الكَثيرَ و مَنْ لَمْ يَشْكُر النّاسَ لَمْ يَشْكُر اللَّهَ)

رواه" أحمد و الترمذي"

أتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير إلى كل من علمني

حرفا ومن أزال غيمة جهلا

مررت بها برياح العلم الطيبة.

إلى كل من علمني علما به أنتفع وأدبا به أرتفع.

بدءا من معلمي الابتدائي وصولا إلى أساتذة

التعليم العالي

والبحث العلمي بقسم الرياضيات

و الإعلام الآلي بجامعة العربي التبسي –تبسة

تحية عطرة وشكر خاص للأستاذ المشرف :"ربيعي بلقاسم"
الذي أفادني بنصائحه و توجيهاته طيلة فترة إنجازي لهذه المذكرة
مع كامل تقديري و احترامي لما بذله من مجهودات قيمة
كما أتوجه بالشكر الجزيل إلى أعضاء لجنة المناقشة
التي شرفتني بقبولها مناقشة هذه المذكرة،
كل من الأستاذ: "نوري بومعزة" رئيسا للجنة
و الأستاذ "طوالبية عبد اللطيف" ممتحنا
الذين لا شك أنهما سيفيضون
عليا بتوجيهاتهما القيمة و ملاحظاتهما السديدة.
كما أتقدم بالشكر و الثناء إلى إخواننا الطلبة بصلة العلم،
و خاصة طلبة الماستر2 دفعة 2023
راجين من المولى عز وجل كل التوفيق والنجاح.
وفي الأخير أشكر كل من قدم لي يد العون و المساعدة
سواء من قريب أومن بعيد
ولو بكلمة طيبة أو بتوجيه أو حتى بدعوة في ظهر الغيب
لهم جزيل الشكر و العرفان.
ولكم مني فائق التقدير و الاحترام.

إهداء

بســم الله الرحمن الرحيــم

الحمد لله على منه وإمتنانه و الشكر له على نعمه و إنعامه حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه، الذي أنعم علي بنعمة العلم وسهل لي طريقا أبغي فيه علما ووفقني في إنهاء عملي المتواضع هذا.

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة، إلى نبي الرحمة ونور العالمين سيدنا وحبيبنا محمد صلى الله عليه وسلم أما بعد:

الحمد لله الذي وفقني لتثمين هذه الخطوة في مسيرتي الدراسية بمذكرتي هذه ثمرة الجهد و النجاح بفضله تعالى مهداة إلى الوالدين الكريمين حفظهما الله وأدامهما نورا لدربي.

إلى من أحمل إسمه بكل فخر وأعتز به في كل مكان، إلى من جرع الكأس فارغا ليسقيني قطرة الحب،

إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق

العلم إلى قدوتي الحسنة :"أبي العزيز"

إلى التي بالأماني حملتني، والتهاني استقبلتني، وبالحنان رعتني، إلى من لم يعرف دعاؤها حدودا ولا عطاؤها قيودا، إلى بسمة الحياة وسر الوجود، إلى ينبوع الصبر والتفاؤل والأمل:"أمي الغالية"

إلى من ظفرت بهم هدية من الأقدار إخوة عرفوا معنى الأخوة، إخوتي

الأحباء و الأعزاء على قلبي: أونيس، عبد القادر

أشكركم كثير الشكر على كل شيء فعلتموه من أجلي، أنتم السند و

القوة التي أتباهى بها في كل مكان، أشكركم من أعماق قلبي،

إخوتي أنتم الأغلى مهما مرت الأيام.

إلى أخواتي العزيزات أحلى النعم و زهرات حياتي إلى

من تشاطرت معهم أفراحي وأحزاني: نادية ،صليحة، مروة

أنتن مثال للعطاء و التضحية .

إلى عمي الوحيد رعاه الله وحفظه وأدامه سند لي "محمد الحاج"

إلى جدتي الغالية

إلى زهرات العائلة :"علياء"، "رؤية"، "حفناوي"، "محمد"،"سيرين"

"أريج"،"أمين"

إلى من قاسمنني مشواري الدراسي رفيقاتي اللاتي شاركنني مراحل

دراستي حلوها ومرها رعاكم الله :

"قتال وفاء"، "علاق حكيمة"، "فردي نهال"، "قتال أمال"

"حاجي بثينة"،"برهوم آية"،"بوذيبة ابتسام"،"بوعكاز سلافة"

"بناد نور الهدى"، "بوزيان إيمان".

لكم مني جزيل الشكرو وافر الإحتــرام.

إيمان

Resumé

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de certains problèmes liés aux équations différentielles fractionnaires en temps et en espace avec des non-linéarités non locales en temps de croissance polynomiale.

Tout d'abord, nous avons présenté certaines définitions et notions de base, puis nous avons abordé l'étude de l'existence locale en utilisant le théorème du point fixe de Banach et l'explosion des solutions en temps fini via la fonction de test pour une équation différentielle fractionnaire, puis pour un système de deux équations différentielles fractionnaires.

Mots clés: Dérivées et intégrales fractionnaires, équations aux dérivées partielles fractionnaires, existence locale, explosion des solutions.

Abstract

In this memory, we are interested in the study of certain problems related to fractional differential equations in time and space with non-local nonlinearities in time of polynomial growth.

Firstly, we presented some definitions and basic notions, and then we studied the local existence using Banach's fixed point theorem and the blow-up of solutions in finite time using the test function for a fractional differential equation, and then for a system of two fractional differential equations.

Keywords: Fractional derivatives and integrals, fractional partial differential equations, local existence, blow-up of solutions.

ملخص

في هذه المذكرة، إهتممنا بدراسة بعض المسائل المرتبطة بمعادلات التطور ذات المشتقات الكسرية بالنسبة للزمن والمكان ذات حدود غير خطية وغير محلية بالنسبة للزمن وذات تزايد كثير حدودي.

في البداية قمنا بعرض بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية، ثم تطرقنا لدراسة الوجود المحلي بإستخدام نظرية النقطة الثابتة لبناخ وإنفجار الحلول في زمن منته بواسطة دالة الإختبار لمعادلة تفاضلية ذات مشتقات كسرية ثم لجملة معادلتين تفاضليتين كسريتين.

الكلمات المفتاحية: المشتقات والتكاملات الكسرية ، المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية،

الوجود المحلي، إنفجار الحلول.

Table des matières

Introduction générale

L'utilisation du calcul fractionnaire dans des domaines variés comme la physique, la mécanique, la chimie et l'ingénierie a rendu cette discipline considérablement importante. Pour cette raison, de nombreux chercheurs ont consacré une attention significative à l'étude des problèmes liés aux équations différentielles fractionnaires. (voir [9] – [29], [16] , [30] , [31]).
Le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^{\beta/2}$ est lié aux vols de Lévy en physique. De nombreuses observations et expériences liées aux vols de Lévy (super-diffusion), par exemple la diffusion collective par glissement sur des surfaces solides, l'optique quantique ou la diffusion turbulente de Richardson, ont été réalisées ces derniéres années. Les processus symétriques β-stables, $0 < \beta < 2$, sont les caractéristiques de base pour une classe de processus de Lévy sautants. En comparaison au processus brownien continu $\beta = 2$, les processus symétriques β-stables ont des sauts infinis dans une période de temps arbitraire. Les sauts importants de ces processus rendent leurs variance et leurs attentes infinies selon $0 < \beta < 2$ où $0 < \beta \leq 1$, respectivement (voir [16]). Rappelons que lorsque $\beta = 3/2$, les processus symétriques β-stables apparaissent dans l'étude de la dynamique stellaire (voir[8]).
Ce travail se concentre sur l'étude de la non existence de solution globale pour certains problèmes d'équations et de systèmes différentiels fractionnaires en temps et en espace avec des non-linéarités non locales en temps de croissance polynomiale. Les solutions de ces équations et systèmes peuvent exploser en un temps fini. Dans ce cas, le temps maximal d'existence est lié a une explosion alternative. Cependant, pour donner une signification précise à la notion d'explosion à un nstant précis, il est nécessaire de définir l'espace de travail et l'étalon avec lequel mesurer la solution.
Ce mémoire est divisé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, nous avons présenté quelques notations et notions de base, comme la dérivation et l'intégration fractionnaire et quelques applications des dérivées fractionnaires.
Dans le deuxième chapitre nous considérons une équation différentielle fractionnaire en temps et en espace avec une non linéarité non locale de croisance polynomiale, notre but est de montrer l'existence locale des solutions en utilisant le théorème du point fixe de Banach et l'explosion des solutions en temps fini via la fonction de test sous certaines conditions sur les données initiales.
Dans le troisième chapitre, nous aborderons le même objectif que dans le chapitre précédent, mais cette fois-ci pour un système de deux équations différentielles fractionnaires.
Enfin, ce travail se conclut par une conclusion qui résume les résultats principaux qui ont été étudiés.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de rappeler quelques notions et résultats préliminaires qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieures. Nous commençons par rappeler brièvement quelques notions et notations de base : les espaces fonctionnels, des inégalité célèbres et l'existence locale et globale. Puis nous présentons un petit rappel sur l'intégration et la dérivation fractionnaire(non entière) selon quelques approches (Riemann-Liouville et Caputo), où nous avons besoin des fonctions comme Gamma et Bêta et Mittag-Leffler.

1.1 Notations et notions de base

Dans cette section nous avons défini quelques espaces fonctionnels (voir [5]).

1.1.1 Espaces fonctionnels

Définition 1.1 *[5] L' espace $L^p(\Omega)$*
soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, telle que

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, u \text{ est mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On vérifiera ultérieurement que est une norme.

Définition 1.2 *[5] L' espace* $L^{\infty}(\Omega)$

Si $p=\infty$ *on a*

$$L^{\infty}(\Omega)=\left\{\begin{array}{c} u:\Omega\longrightarrow\mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et il existe une constante positive } C, \text{ telle que} \\ |u(x)|\leq C \text{ p.p sur } \Omega\,. \end{array}\right\}.$$

On note

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)}=\sup_{t\in(0,T)} ess\,|u(x)|=inf\,\{C,|u(x)|\leq C \text{ p.p sur } \Omega\}\,.$$

Définition 1.3 ***L' espace de Lebesgue*** *[18]*

Soient E un espace de Banach, $1\leq p\leq\infty$ et $[0,T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans E et on note $L^p((0,T),E)$ l'espace des fonctions $u:]0,T[\longrightarrow E$, mesurable qui vérifient

$$\begin{array}{rcl} i)\text{ Si } 1 & \leq & p<\infty,\ \|u\|_{L^p((0,T),E)}=\left(\int_0^T\|u\|_E^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}<\infty. \\ ii)\text{ Si } p & = & \infty,\ \|u\|_{L^{\infty}((0,T),E)}=ess\sup_{t\in(0,T)}|u(x)|<\infty. \end{array}$$

Définition 1.4 *[5]$C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ est l'espace de toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ tendant vers zéro lorsque x tend vers l'infini.*

Définition 1.5 *[5]* ***L' espace de sobolev***

$H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev défini par

$$H^1(\Omega)=\left\{u\in L^p(\Omega):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^p(\Omega)\,,1\leq i\leq n\right\},$$

Définition 1.6 *[5]* (***L' espace*** $W^{m,p}(\Omega)$)

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m\geq 2$ et $p\in R$, $1\leq p\leq+\infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega)=\left\{\begin{array}{c} u\in L^p(\Omega):\forall\alpha \text{ avec } 0\leq|\alpha|\leq m,\ \exists\ f_\alpha\in L^p(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_\Omega u\,D^\alpha\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f_\alpha\varphi dx,\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega) \end{array}\right\},$$

où $\alpha\in\mathbb{N}^n$, $D^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}+\partial x_2^{\alpha_2}+...+\partial x_n^{\alpha_n}}$ et $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$ est la dérivée au sens des distributions.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}\,.$$

Définition 1.7 *[5] L'espace $W^{m,2}(\Omega)$*
Si $p=2$, on note par $W^{m,2}(\Omega)=H^m$ et $W_0^{m,2}(\Omega)=H_0^m(\Omega)$ muni par la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}=\left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\left(\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

tel que $H^m(\Omega)$ espace de Hilbert, avec le produit scalaire $\langle u,v\rangle_{H^m(\Omega)}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\langle D^\alpha u,D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)}=\sum_{0\leq|\alpha|\leq m}\int_\Omega \partial^\alpha u\partial^\alpha v dx$ pour tout $u,v\in H^m(\Omega)$.

Définition 1.8 *[5] L'espace $L^\infty_{loc}(\Omega)$*
$L^\infty_{loc}(\Omega)$ est l'espace des fonctions localement intégrable défini par

$$L^\infty_{loc}(\Omega)=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R}\text{ mesurable}, \int_K|u|^p dx<\infty \text{ pour tout compact } K\subset\ \Omega\right\}.$$

1.1.2 Inégalités utiles

Dans cette section, nous connaissons quelques inégalités utiles.

• **Inégalité de Hölder [5]**

Soient $u\in L^p(\Omega)$ et $v\in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $1\leq p<\infty$, $1<q\leq\infty$. Alors,

$$\int_\Omega|uv|\,dx\leq\left(\int_\Omega|u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega|v|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

• **Inégalité de Young [5]**

Soient a,b deux nombres réels et p,q deux nombres réels tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, alors on a l'inégalité de Young suivante :

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

• **Inégalité de $\varepsilon-$Young [7]**

Soient $u\geq0$, $v\geq0$ et p,q deux nombres réels positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, pour tout $\varepsilon>0$, on a :

$$uv\leq\varepsilon u^P+C(\varepsilon)v^q.$$

• **Inégalité de Ju [5]**

Soient $N\geq1$, $\delta\in[0.2]$ et $q\geq1$, pour toute fonction non négative de Schwartz Ψ, on a :

$$(-\triangle)^{\frac{\delta}{2}}\psi^q\leq q\psi^{q-1}(-\triangle)^{\frac{\delta}{2}}\psi.$$

où $\triangle$ est le Laplacien.

1.1.3 Théorèmes importants

Théorème 1.1 ***(Théorème du point fixe de Banach [16])***

Soient (E,d) un espace métrique complet, $0<\varpi<1$ et $T:E\to E$ une application telle que pour tout $u,v\in E$, ona

$$d(Tu,Tv)\leq \varpi d(u,v). \tag{1.1}$$

Alors l'opérateur T admet un unique point fixe $u^\star\in E$. Deplus, si T^k $(k\in\mathbb{N})$ est la suite d'opérateur définie par

$$T^1=T \text{ et } T^k=TT^{k-1}(k\in\mathbb{N}\backslash\{1\}),$$

alors, pour tout $u_0\in E$ la suite $\{T^k u_0\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers le point fixe $u^\star$. On note que l'application $T:E\to E$ vérifiant (1.1) est dite application contractante.
Maintenant, on présente le théorème de Fubini qui nous permet d'échanger l'ordre d'intégration dans les intégrales répétées.

Théorème 1.2 ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue [29])***

Soient E un ensemble mesurable et $\{f_n\}_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables telles que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ pour presque tout $x\in E$ et pour tout $n\in N$, $|f_n(x)|\leq g(x)$ presque par tout dans E, où g est une fonction intégrable sur E. Alors,

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx=\int_E f(x)dx.$$

1.1.4 Existence locale et globale

L'étude d'existence locale et d'unicité de solutions d'équations aux dérivées partielles est basée sur la théorie d'existence pour des équations différentielles semi linéaires abstraites (voir A.Friedman, D. Henry, A. Pazy). Soit $(X,\|.\|)$ un espace de Banach et soit $A:D(A)\subset X\to X$ un opérateur linéaire, et $f:X\to X$. Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}-Au=f,\ t>0, \\ u(0)=u_0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Définition 1.9 *On dit qu'une fonction u de la variable $t\geq 0$ à valeurs dans X est une solution locale du problème (1.2), s'il existe un intervalle maximal $[0,T)$, sur le quel u est définie, et elle est l'unique solution de (1.2) dans $C^1([0,T),X)$.*
En particulier, l'une des deux éventualités suivantes a lieu
i) $T=+\infty$.

ii) $T < +\infty$ *et* $\lim_{t \to T} \|u\| = +\infty$.
On dit que la solution est globale si i) est satisfaite, et que la solution explose en temps fini si on a ii).

1.2 Dérivation et intégration fractionnaire

Avant de donner la définition de la dérivation et l'intégration fractionnaires, on introduit les définitions de quelques fonctions utiles pour la suite.
Fonction Gamma [16]
La fonction Gamma prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (sauf en certains points), elle est définie comme suit.

Définition 1.10 *[16] Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $Re(\alpha) > 0$, on définit la fonction Gamma par*

$$\Gamma : \alpha \to \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt.$$

Cette intégrale converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive.On trouve, en intégrant par parties, que

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)\,,\ Re(\alpha) > 0.$$

Et en particulier

$$\Gamma(n+1) = n!,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Fonction Bêta [16]
La fonction bêta est définie par

$$\beta(p,q) = \int_0^1 \tau^{p-1}(1-\tau)^{q-1}\,d\tau, Re(p) > 0, Re(q) > 0.$$

Remarque 1.1 *Le lien entre la fonction Gamma et la fonction bêta est*

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, Re(p) > 0, Re(q) > 0.$$

On note que l'idée de la dérivation et l'intégration fractionnaire est la généralisation de la dérivation et l'intégration itérées.
Fonction de Mittag-Leffler

Définition 1.11 *La fonction de Mittag-Leffler est définie pour $z \in \mathbb{C}$ (voir[6]) par*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)},\ \alpha \in \mathbb{C},\ \Re e(\alpha) > 0,\ z \in \mathbb{C},$$

et son intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville satisfait

$$_0I_t^{1-\alpha}(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha).$$

Fonction de type Wright

la fonction de type Wright qui a été considérée par Mainardi [19]

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!\Gamma(-\alpha k + 1 - \alpha)} \\
&= \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k \Gamma(k+1) \sin(\pi(k+1)\alpha)}{k!},\ 0 < \alpha < 1;
\end{aligned}$$

ϕ_α est une fonction entière et possède les propriétés suivantes
(a) $\phi_\alpha(\theta) \geq 0$, pour $\theta \geq 0$ et $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta) d\theta = 1$;
(b) $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta) \theta^r d\theta = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+\alpha r)}$, pour $r > -1$;
(c) $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta) e^{-z\theta} d\theta = E_{\alpha,1}(-z), z \in \mathbb{C}$;
(d) $\alpha \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta) e^{-z\theta} d\theta = E_{\alpha,\alpha}(-z), z \in \mathbb{C}$.

1.2.1 Intégration fractionnaire

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. On considère l'intégrale

$$I^1 f(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

et

$$I^2 f(x) = \int_a^x dt \int_a^t f(u)\, du = \int_a^x (x-t) f(t)\, dt.$$

Le $n^{ième}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire

$$I^n f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \frac{1}{n-1} \int_a^x (x-t)^{(n-1)} f(t)\, dt,$$

pour tout entier n.
Cette formule est appelée formule de Cauchy.
Riemann a généralisé cette formule pour n non entier, et l'intégration fractionnaire est définie par

Définition 1.12 *[16] Soit $f \in [a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}^{+}$, l'intégrale*

$$ {}_{a}I_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \ t > a $$

est appelée intégrale fractionnaire (à gauche) de Riemann-Liouville d'ordre α, et l'intégrale

$$ {}_{t}I_{b}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t}^{b} (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau, \ t < b $$

est appelée l'intégrale fractionnaire (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre α.

1.2.2 Dérivation fractionnaire

On va citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications.

Approche de Riemann-Liouville

Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre α, avec $n-1 \leq \alpha < n$, au sens de Riemann-Liouville est définie par

$$ {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau = \frac{d^n}{dt^n} \left(I^{n-\alpha} f(t) \right). $$

Exemple 1.1 ***1)-Dérivée d'une fonction constante***

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la fonction constante, en générale, n'est pas nulle ni constante, et on a

$$ \begin{aligned} {}^{RL}D^{\alpha} C &= \frac{d^n}{dt^n} \left(I^{n-\alpha} C \right) \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} C\, d\tau \right) \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{a}^{t} (t-\tau)^{n-\alpha-1} d\tau \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{n-\alpha} (t-\tau)^{n-\alpha} \right) \\ &= \frac{C}{(n-\alpha)\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \left((t-\tau)^{n-\alpha} \right), \end{aligned} $$

on utilise $\frac{d^m}{dt^m}(t^n) = \frac{n!}{(n-m)!} t^{n-m}$,
et $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, $\Gamma(n+1) = n!$, *alors*

$$ \begin{aligned} {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha} C &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{(n-\alpha)!}{(-\alpha)!} (t-\tau)^{-\alpha} \\ &= \frac{C}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{\Gamma(n-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)} (t-\tau)^{-\alpha} \\ &= \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} (t-\tau)^{-\alpha}. \end{aligned} $$

2) -La dérivée de la fonction $f(t) = (t-a)^{\beta}$:

Soit α un nombre non entier, $0 \leq n-1 \leq \alpha < n$ et $\beta > -1$, alors on a

$$\begin{aligned} {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(I^{n-\alpha}(t-a)^{\beta}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}(\tau-a)^{\beta}d\tau\right]. \end{aligned}$$

Utilisant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned} {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}(t-a)^{\beta} &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\int_{0}^{1}(t-a-s(t-a))^{n-\alpha-1}(s(t-a))^{\beta}(t-a)\,ds\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[(t-a)^{n-\alpha-1}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta}(t-a)^{\beta+1}ds\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[(t-a)^{n-\alpha+\beta}\right]\int_{0}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{\beta}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[(t-a)^{n-\alpha+\beta}\right]\beta(\beta+1,n-\alpha) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{(n-\alpha+\beta)!}{(\beta-\alpha)!}(t-a)^{\alpha-p}\beta(\alpha+1,n-\alpha) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(n-\alpha+\beta+1)}(t-a)^{\beta-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}(t-a)^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

3)-La dérivée de la fonction $f(t) = t^{\beta}$:

$$\begin{aligned} {}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}\left(t^{\beta}\right) &= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(I^{n-\alpha}t^{\beta}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau\right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[t^{n-\alpha-1}\int_{a}^{t}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}\tau^{\beta}d\tau\right] \end{aligned}$$

Utilisant le changement de variables $s = \frac{\tau}{t}$, on obtient

$${}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}\left(t^{\beta}\right) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[t^{n-\alpha-1}\int_{\frac{a}{t}}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}(st)^{\beta}t\,ds\right],$$

on pose $a = 0$, alors

$$\begin{aligned}
{}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}\left(t^{\beta}\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[t^{n-\alpha-1}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{n-\alpha-1}s^{\beta}t^{\beta+1}ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[t^{n-\alpha+\beta}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{n-\alpha-1}s^{\beta}ds\right] \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[t^{n-\alpha-\beta}\right]\beta\left(\beta+1,n-\alpha\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(n-\alpha\right)}{\Gamma\left(\beta+n-\alpha+1\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[t^{n-\alpha+\beta}\right] \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+n-\alpha+1\right)}\frac{\left(n-\alpha+\beta\right)!}{\left(\beta-\alpha\right)!}t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta+n-\alpha+1\right)}\frac{\Gamma\left(\beta+n-\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}t^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}t^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

4)-**La dérivée de la fonction** $f\left(t\right) = e^{\lambda t}$

$$\begin{aligned}
{}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}e^{\lambda t} &= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1}e^{\lambda t}dt\right] \\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}\tau^{k}}{k!}d\tau\right] \\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{\lambda^{k}}{k!}\int_{a}^{t}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}\tau^{k}d\tau\right]
\end{aligned}$$

Utilisant le changement de variables $s=\frac{\tau}{t}$, on obtient dans le cas $a=0$,

$$\begin{aligned}
{}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}e^{\lambda t} &= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^{k}}{k!}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}(st)^{k}tds\right]\\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^{k}}{k!}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{k}t^{k+1}ds\right]\\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^{k}}{k!}\int_{0}^{1}(1-s)^{n-\alpha-1}s^{k}ds\right]\\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^{k}}{k!}\beta(k+1,n-\alpha)\right]\\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(k+1)}\beta(k+1,n-\alpha)\right]\\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\frac{t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(k+1)}\frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(k+1+n-\alpha)}\right]\\
&= \frac{d^{n}}{dt^{n}}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}t^{n-\alpha+k}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(n-\alpha+k)!}{(k-\alpha)!}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(k+1+n-\alpha)}t^{k-\alpha}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n-\alpha+k+1)}{(k-\alpha)!}\frac{t^{k-\alpha}\lambda^{k}}{\Gamma(n-\alpha+k+1)}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k-\alpha}\lambda^{k}}{\Gamma(k-\alpha)}
\end{aligned}$$

À titre d'exemple

$$^{RL}D^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}=\frac{\Gamma(1.5)}{\Gamma(1)}=\Gamma(1.5)\,.$$

Propriétés

1)- Composition avec l'intégrale fractionnaire [16]

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, c-à-d

$${}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}\left({}_{a}^{RL}I_{t}^{\alpha}f(t)\right)=f(t)\,.$$

Mais en générale, on a

$${}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}\left({}_{a}^{RL}I_{t}^{\beta}f(t)\right)={}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha-\beta}f(t)\,.$$

Si $p-q<0$, ${}^{RL}D^{\alpha-\beta}f(t)=I^{\beta-\alpha}f(t)$.
Généralement les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires ne commutent pas

$$^{RL}D^{-\alpha}\left({}^{RL}D^{\beta}f\left(t\right)\right)={}_{a}^{RL}D_{t}^{\beta-\alpha}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left({}_{a}^{RL}D_{t}^{\beta-k}f(t)\right)_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{\alpha-k}}{\Gamma\left(\alpha-k+1\right)},$$

avec $m-1\leq\beta<m$.

2)- Composition avec les dérivées d'ordre entier [16]

La dérivation fractionnaire et la dérivation classique ne commutent que si $f^{(k)}\left(a\right)=0,k=0,1,2,...,n$, on a dans ce cas

$$\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left({}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}f\left(t\right)\right)={}_{a}^{RL}D_{t}^{n+\alpha}f\left(t\right),$$

et

$${}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\left(t\right)\right)={}_{a}^{RL}D_{t}^{n+\alpha}f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha-n}}{\Gamma\left(k-\alpha-n+1\right)}.$$

3)- Composition avec les dérivées fractionnaires [16]

Soit $n-1\leq\alpha<n$ et $m-1\leq\beta<m$, alors

$${}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}\left({}_{a}^{RL}D_{t}^{\beta}f\left(t\right)\right)={}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha+\beta}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left[D^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{-\alpha-k}}{\Gamma\left(\alpha-k+1\right)},$$

et

$${}_{a}^{RL}D_{t}^{\beta}\left({}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}f\left(t\right)\right)={}_{a}^{RL}D_{t}^{\beta+\alpha}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left[D^{\alpha-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{-\beta-k}}{\Gamma\left(\beta-k+1\right)}.$$

Donc pour que les opérateurs de dérivations fractionnaires ${}_{a}^{RL}D_{t}^{\beta}$ et ${}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}$ $(\alpha\neq\beta)$, commutent, il faut que $\left[D^{\beta-k}f(t)\right]_{t=a}=0$, et $\left[D^{\alpha-k}f(t)\right]_{t=a}=0$. pour tout $k=0,1,2,...,m$.

Approche de Caputo [16]

L'avantage principal de l'approche de Caputo est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec des dérivées de Caputo acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c-à-d, contient les valeurs limites des dérivées d'ordres entiers des fonctions inconnues en borne inférieur $x=a$.

Définition 1.13 *[16] Soit $n\in\mathbb{N}^{*}$, $n-1<\alpha<n$, et f une fonction telle que $\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\in L_{1}[a,b]$. La dérivée fractionnaire d'ordre α de f au sens de Caputo est définie par*

$${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1}f^{(n)}\left(\tau\right)d\tau=I^{n-\alpha}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\left(t\right)\right).$$

Propriétés :

1)- Soit $p>0$ avec $n-1<p<n$, $(n\in\mathbb{N}^{*})$, supposons que f est une fonction telle que ${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t)$ et ${}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}f(t)$ existent, alors

$${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t)={}_{a}^{RL}D_{t}^{\alpha}f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma\left(k-\alpha+1\right)},$$

et on remarque que si $f^{(k)}(a) = 0$, pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aura

$$ {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^{RL} D_t^\alpha f(t). $$

2)- Soit $T > 0$ et $0 < \alpha < 1$, si ${}_0^C D_t^\alpha f \in L^1(0,T), g \in C^1([0,T])$ et $g(T) = 0$, alors nous avons la formule suivante d'intégration par parties (voir par exemple [20])

$$ \int_0^T g(t) {}_0^C D_t^\alpha f(t) dt = \int_0^T (f(t) - f(0)) {}_t^C D_T^\alpha g(t) dt, \tag{1.3} $$

où

$$ {}_t^C D_T^\alpha g(t) = -\frac{d}{dt} {}_t J_T^{1-\alpha} g(t), $$

$$ {}_t I_T^{1-\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T (s-t)^{-\alpha} g(s) ds, $$

3)- Si f est une fonction continue, on a :

$$ {}_a^C D_t^\alpha \left({}_a^{RL} I_t^\alpha f(t) \right) = f(t) \text{ et } {}_a^{RL} I_t^\alpha \left({}_a^C D_t^\alpha f(t) \right) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{k}. $$

Donc l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais n'est pas un inverse à droite.

4)- La dérivée fractionnaire est une opération linéaire

$$ D^\alpha(\lambda f(t) + \mu g(t)) = \lambda D^\alpha f(t) + \mu D^\alpha g(t). $$

5)- Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, t]$ ainsi que toutes leurs dérivées ; la formule de Leibniz (voir [16]) est

$$ D^\alpha(f(t) \times g(t)) = \sum_{k=o}^{n} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{(\alpha-k)} g(t). $$

Exemples :

1)- La dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle

$$ {}_a^C D_t^\alpha C = 0. $$

2)- La dérivée de la fonction $f(t) = (t-a)^\beta$ au sens de Caputo est

$$ f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)} (\tau-a)^{\beta-n}. $$

Et pour le prouver, on a

$$ \begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha (t-a)^\beta &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n} d\tau. \end{aligned} $$

Utilisant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
{}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\left(t-a\right)^{\beta} &= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(n-\alpha\right)\Gamma\left(\beta-n+1\right)}\int_{0}^{1}\left(t-a-s\left(t-a\right)\right)^{n-\alpha-1}\left(s\left(t-a\right)\right)^{\beta-n}\left(t-a\right)ds \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(n-\alpha\right)\Gamma\left(\beta-n+1\right)}\left(t-a\right)^{n-\alpha-1}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}\left(t-a\right)^{\beta-n+1}ds \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(n-p\right)\Gamma\left(\alpha-n+1\right)}\left(t-a\right)^{\beta-\alpha}\int_{0}^{1}\left(1-s\right)^{n-\alpha-1}s^{\beta-n}ds \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)\beta\left(\beta-n+1,n-\alpha\right)}{\Gamma\left(n-\alpha\right)\Gamma\left(\beta-n+1\right)}\left(t-a\right)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)\Gamma\left(n-\alpha\right)\Gamma\left(\beta-n+1\right)}{\Gamma\left(n-\alpha\right)\Gamma\left(\beta-n+1\right)\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^{\beta-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-\alpha+1\right)}\left(t-a\right)^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}$$

3)- La dérivée de la fonction $f\left(t\right) = t^{\beta}$ est

$$f^{(n)}\left(\tau\right) = \frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-n+1\right)}\tau^{\beta-n}.$$

Et pour démontrer cela, nous avons

$$\begin{aligned}
{}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\left(t^{\beta}\right) &= \frac{1}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-\alpha-1}f^{(n)}\left(\tau\right)d\tau \\
&= \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{a}^{t}\left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1}\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-n+1\right)}\tau^{\beta-n}d\tau.
\end{aligned}$$

Utilisant le changement de variables $s = \frac{\tau}{t}$, on obtient

$${}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}\left(t^{\beta}\right) = \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\frac{\Gamma\left(\beta+1\right)}{\Gamma\left(\beta-n+1\right)}\int_{\frac{a}{t}}^{1}\left(1-s\right)^{n-\alpha-1}\left(st\right)^{\beta-n}tds.$$

On pose $a=0$ alors

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_t^{\alpha}\left(t^{\beta}\right) &= \frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} t^{\beta-n+1} ds \\
&= \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n} ds \\
&= \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\beta(\beta-n+1, n-\alpha) \\
&= \frac{t^{\beta-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-n+1)}\frac{\Gamma(\beta-n+1)\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} t^{\beta-\alpha}.
\end{aligned}
$$

4)-La dérivée de la fonction $f(t)=e^{\lambda t}$ est

$$
f^{(n)}(\tau) = \frac{d^n}{d\tau^n}\left(e^{\lambda\tau}\right) = \lambda^n e^{\lambda\tau}.
$$

Parce que

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_t^{\alpha}\left(e^{\lambda t}\right) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\frac{d^n}{d\tau^n}\left(e^{\lambda\tau}\right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1}\lambda^n e^{\lambda\tau} d\tau \\
&= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} e^{\lambda\tau} d\tau.
\end{aligned}
$$

Utilisant le changement de variables $y=t-\tau$, on obtient

$$
\begin{aligned}
{}_a^C D_t^{\alpha}\left(e^{\lambda t}\right) &= \frac{-\lambda^n}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t-a}^0 y^{n-\alpha-1} e^{\lambda(t-y)} dy \\
&= \frac{\lambda^n e^{\lambda t}}{\Gamma(n-\alpha)}\int_0^{t-a} y^{n-\alpha-1} e^{-\lambda y} dy.
\end{aligned}
$$

Utilisant le changement de variables $s=\lambda y$, on obtient

$$
{}_a^C D_t^{\alpha}\left(e^{\lambda t}\right) = \frac{\lambda^n e^{\lambda t}}{\Gamma(n-p)}\int_0^{\lambda(t-a)}\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{n-\alpha-1} e^{-s}\frac{ds}{\lambda}.
$$

On pose $a = -\infty$, alors

$$\begin{aligned} {}^{C}D^{p}\left(e^{\lambda t}\right) &= \frac{\lambda^{n}e^{\lambda t}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\int_{0}^{+\infty}\lambda^{\alpha-n}s^{n-\alpha-1}e^{-s}ds \\ &= \frac{\lambda^{\alpha}e^{\lambda t}}{\Gamma\left(n-p\right)}\int_{0}^{+\infty}s^{n-\alpha-1}e^{-s}ds \\ &= \frac{\lambda^{\alpha}e^{\lambda t}}{\Gamma\left(n-\alpha\right)}\Gamma\left(n-\alpha\right) \\ &= \lambda^{\alpha}e^{\lambda t}. \end{aligned}$$

1.3 Applications des dérivées et intégrales fractionnaires

Les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires ce qui simplifient leur usage pour résoudre des problèmes appliqués dans plusieurs champs de la science.

Cependant, le calcul fractionnaire est né le 30 septembre 1695 mais il n'y avait pas d'interprétation géométrique et physique acceptable de ces opérations pour plus de 300 années.

1.3.1 Interprétation physique de l'intégration fractionnaire

Pour donner l'interprétation physique de l'intégration non entière, nous considérons l'exemple d'un conducteur d'une voiture [16]. Supposons que la voiture est équipée de deux appareils de mesure, le compteur de vitesse qui enregistre la vitesse de conducteur et l'horloge qui affiche le temps τ.

Cependant, le temps τ affiché par l'horloge est incorrect. Nous supposons que la relation entre le temps incorrect (affiché par l'horloge et dont le conducteur considère comme le temps exact), et le temps exact T est donnée par la fonction $g_t(\tau)$ telle que $T = g_t(\tau)$ et

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma\left(t\right)}\left[t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha}\right]. \tag{1.4}$$

Ceci signifie que si le conducteur mesure l'intervalle de temps $d\tau$, le vrai intervalle de temps est $dT = dg_t(\tau)$.Le conducteur A représente le conducteur de la voiture ; ignorant l'erreur de l'horloge, calcule la distance parcourue au moyen d'une intégrale classique

$$S_A\left(t\right) = \int_0^t V\left(\tau\right)d\tau, \tag{1.5}$$

Un observateur O, lui en connaissance de la mauvaise mesure de l'horloge et de la fonction $g_t(\tau)$ reliant le temps incorrect au temps exact, calcule la distance réellement parcourue par la voiture

$$S_0\left(t\right) = \int_0^t V\left(\tau\right)dg_t(\tau) = I^{\alpha}V\left(t\right), \tag{1.6}$$

avec

$$I^{\alpha}V\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(t\right)}\int_{0}^{t}\left(t-\tau\right)^{\alpha-1}V\left(\tau\right)d\tau.$$

L'intégrale donnée par l'équation (1.5) peut être interprétée comme la distance parcourue par un mobile pour lequel nous avons effectué deux mesures :
Une mesure correct de la vitesse et une mesure incorrect du temps. L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville donnée par l'équation (1.6) peut être interprétée comme la véritable distance parcourue par l'objet mobile, pour le quel nous avons enregistré ses valeurs locales de la vitesse $V(\tau)$ (c'est sa vitesse individuelle) et la valeur locale du temps τ (temps individuel), sachant que la relation entre le temps enregistré localement et le temps cosmique est donnée par la fonction $g_t(\tau)$.
La fonction $g_t(\tau)$ décrit le temps échelle non homogène, qui dépend non seulement de τ, mais aussi du paramètre t qui représente la dernière valeur mesurée du temps individuel de l'objet mobile. quand t change, l'intervalle de temps cosmique change également.
La notion du temps cosmique est reliée au changement de la gravité dans l'espace temps d'un corps en déplacement. En effet un corps mobile change sa position dans l'espace temps, le champ de la gravité dans l'espace-temps tout entier change également en raison de mouvement. Par conséquent ; l'intervalle de temps cosmique, qui correspond à l'histoire du mouvement de l'objet mobile, change. Ceci affecte le calcul de la vraie distance $S_0\left(t\right)$ parcourue par cet objet mobile.
Donc, l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville de la vitesse individuelle $V(\tau)$, d'un objet mobile, pour lequel la relation entre son temps individuel τ, et le temps cosmique T à chaque instant t est donnée par la fonction connue $T=g_t(\tau)$, décrite par l'équation (1.4) représente la véritable distance $S_0\left(t\right)$ parcourue par cet objet.

1.3.2 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire

En utilisant les propriétés de la dérivation et de l'intégration fractionnaire, on peut exprimer l'expression de la vitesse individuelle $V(\tau)$ à partir de la véritable distance parcourue $S_0\left(t\right)$ [16].
La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville de la vraie distance $S_0\left(t\right)$ parcourue par le mobile permet de donner l'expression de la vitesse individuelle $V(t)$: $V(\tau)=D^{\alpha}S_0\left(t\right)$ avec

$$D^{\alpha}S_0\left(t\right)=\frac{1}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{d}{dt}\int_{0}^{t}\frac{S_0\left(t\right)}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}}d\tau\ 0\leq\alpha\leq1.$$

On peut aussi dériver la valeur de la véritable distance par rapport à la variable de temps t qui donne la relation entre la vitesse $V_0(t)=S_0'(t)$ du mouvement de point de vue de l'observateur indépendant O et la vitesse individuelle $V(t)$:

$$V_0(t)=\frac{d}{dt}I^{\alpha}V\left(t\right)=D^{1-\alpha}V\left(t\right).$$

Par conséquent, la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $(1-\alpha)$, de la vitesse individuelle $V(t)$ est égale à la vitesse de vue de l'observateur indépendant $V_0(t)$, si le temps individuel τ et le temps cosmique T sont reliés par la fonction $T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)} \left[t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha} \right],$$

pour $\alpha = 1$, quand il n'y a aucune déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncident :

$$V_0(t) = V(t).$$

Chapitre 2

Non-existence des solutions pour une équation différentielle fractionnaire

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous considérons l'équation fractionnaire suivante

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} u + (-\Delta)^{\beta/2} u = {}_0 I_t^{\gamma} |u|^{p-1} u, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{2.1}$$

avec les données initiales

$$u(x,0) = u_0(x) \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right), \tag{2.2}$$

où $C_0(\mathbb{R}^N)$ désigne l'espace de toutes les fonctions continues et décroissantes vers zéro à l'infini, $N \geq 1$, $0 < \alpha < 1-\gamma$, $0 < \gamma < 1$, $0 < \beta \leq 2$, $p > 1$ et ${}_0^C D_t^{\alpha}$ est la dérivée de caputo d'ordre α définie, pour une fonction différentiable u, par

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} u(t) = {}_0 I_t^{1-\alpha} u'(t),$$

${}_0 I_t^{1-\alpha}$ désigne l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $1-\alpha$ définie, pour une fonction intégrable u, par

$$ {}_0 I_t^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds,$$

où Γ est la fonction Gamma. L'opérateur non-locale $(-\Delta)^{\beta/2}$ est défini par

$$(-\Delta)^{\beta/2} v(x) := \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\beta} \mathcal{F}(v)(\xi))(x),$$

pour chaque $v \in D((-\Delta)^{\beta/2}) = H^{\beta}(\mathbb{R}^N)$, où $H^{\beta}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace de Sobolev homogène d'ordre β, défini par

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{ v \in S' : (-\Delta)^{\beta/2} v \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}, \qquad \text{si } \beta \notin \mathbb{N},$$

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}^N) : (-\Delta)^{\beta/2} v \in L^2(\mathbb{R}^N) \right\}, \quad \text{si } \beta \in \mathbb{N},$$

où S' est l'espace des distributions de Schwartz, $\mathcal{F}$ représente la tronsformée de Fourier, $\mathcal{F}^{-1}$ est son inverse.

Lorsque $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $\gamma = 0$, le problème $(2.1) - (2.2)$ se réduit a l'équation de la chaleur semi-linéaire suivante

$$u_t - \Delta u = |u|^{p-1} u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0. \tag{2.3}$$

Cette équation a été traité par Fujita dans [15]. Il a montré que si

$$u_0 \geq 0, u_0(x) \not\equiv 0 \text{ et } p < 1 + 2/N,$$

alors toute solution explose en temps fini.

Lorsque $\alpha = 1$, $\beta = 2$, Cazenave et *al. [6]* ont prouvé que toutes les solutions de l'équation

$$u_t - \Delta u = \int_0^t (t-s)^{-\gamma} |u(s)|^{p-1} u(s) ds, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \tag{2.4}$$

explosent en temps fini.Si

$$u_0 \geq 0, \ u_0 \not\equiv 0 \text{ et } p \leq \max\left\{1 + 2(2-\gamma)/(N-2+2\gamma)_+, \ 1/\gamma\right\}.$$

Lorsque $\gamma = 0$, alors toutes les solutions non triviales explosent comme l'a démontré Souplet [23]. Dans [14], Fino et Kirane ont considéré l'équation suivante

$$u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-s)^{-\gamma} |u(s)|^{p-1} u(s) ds, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0. \tag{2.5}$$

Ils ont prouvé que si

$$u_0 \geq 0, \ u_0 \not\equiv 0 \text{ et } p \leq \max\left\{1 + \beta(2-\gamma)/(N-\beta+\beta\gamma)_+, \ 1/\gamma\right\},$$

alors toute solution explose en temps fini.

Quand $\beta = 2$ et $\gamma = 0$, Zhang et Sun [27] ont traité le problème suivant

$${}_0^C D_t^{\alpha} u - \Delta u = |u|^{p-1} u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0. \tag{2.6}$$

Ils ont prouvés que si

$$u_0 \geq 0, u_0(x) \not\equiv 0 \text{ et } p < 1 + 2/N,$$

alors toute solution explose en temps fini.

Si $\gamma = 0$, Kirane et *al.* [17] ont discuté de l'équation d'évolution suivante

$${}_0^C D_t^{\alpha} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = h(x,t) |u|^{p-1} u, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \ t > 0, \tag{2.7}$$

où $h(x,t) \geq C\,|x|^{\sigma}\,t^{\rho}$ pour $C>0,\ \sigma,\ \rho$ et satisfaire à certaines conditions. Ils ont prouvé que si

$$0 < p \leq 1 + (\alpha(\sigma+\beta)+\beta\rho)/(\alpha N + \beta(1-\alpha)),$$

le problème ne possède aucune solution positive globale.
Dans ce chapitre, nous étudierons l'existence locale et la non-existence de solutions pour le problème (2.1)-(2.2).

2.2 Préliminaires

Dans cette section, nous présentons quelques préliminaires qui seront utilisés dans la suite de cette étude. Pour $T>0$ et $n>0$, si on pose

$$\varphi(t) = (1-\frac{t}{T})^{n}_{+},$$

alors

$${}^{C}_{t}D^{\alpha}_{T}\varphi(t) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)}T^{-\alpha}(1-\frac{t}{T})^{n-\alpha}, t \leq T.$$

Soit $T(t)=e^{-t(-\Delta)^{\beta/2}}$. Comme $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint défini positif dans $L^{2}(\mathbb{R}^N)$, $T(t)$ est un semi-groupe fortement continu sur $L^{2}(\mathbb{R}^N)$, (voir par exemple [10], [11]) , et pour $t>0$, $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} T(t)u_0 &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x-y,t)u_0(y)dy, \\ G_\beta(x,t) &= \tfrac{1}{(2\pi)^{N/2}}\textstyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{\left(ix\xi - t|\xi|^{\beta}\right)}d\xi. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Il est bien connu que $G_\beta(x,t)$ satisfait

$$G_\beta(x,1) \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N) \cap L^{1}(\mathbb{R}^N),\ G_\beta(x,t) \geq 0,\ \int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,t)dx = 1.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Young pour la convolution et la forme $G_\beta(x,t) = t^{-N/\beta}G_\beta(xt^{-1/\beta},1)$, nous avons

$$\|G_\beta(t) * v\|_{L^{q}(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{-\frac{N}{\beta}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})}\,\|v\|_{L^{r}(\mathbb{R}^N)}\,, \tag{2.9}$$

pour tout $v \in L^{r}(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq r \leq q \leq \infty$.
On définit les opérateurs $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ par

$$P_{\alpha,\beta}(t)u_0 = \int_0^{\infty} \phi_\alpha(\theta)T(t^{\alpha}\theta)u_0 d\theta,\ t \geq 0, \tag{2.10}$$

et

$$S_{\alpha,\beta}(t)u_0 = \alpha\int_0^{\infty} \theta\phi_\alpha(\theta)T(t^{\alpha}\theta)u_0 d\theta,\ t \geq 0. \tag{2.11}$$

Considérons l'équation de diffusion fractionnaire temps-espace linéaire suivante

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} u(x,t) + (-\Delta)^{\beta/2} u(x,t) = f(x,s), \; x \in \mathbb{R}^N, \; t > 0, \tag{2.12} $$

avec

$$ u(x,0) = u_0(x), $$

où $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^1((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$. Si u est une solution de (2.12), alors elle satisfait (voir [25], [3]).

$$ u(x,t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) f(x,s) ds, $$

où $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ sont respectivement données par (2.10) et (2.11).

On pose, pour $0 < \alpha < 1$,

$$ K(x,t) = \int_0^{\infty} \phi_\alpha(\theta) G_\beta(x, t^\alpha \theta) d\theta \text{ , } x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, t > 0. $$

Notons que, pour donné $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$, $G_\beta(x, t^\alpha\theta) \to 0$ quand $\theta \to 0$, alors K est bien défini.

Puisque $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta) d\theta = 1$, $\int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,t) dx = 1$, on a

$$ \|K(t,.)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1, \qquad t > 0. $$

On annonce maintenant les lemmes suivants qui donnent quelques propriétés utiles des opérateurs $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ (voir [27]).

Lemme 2.1 *L'opérateur $P_{\alpha,\beta}(t)$, $t > 0$ a les propriétés suivantes*

(a) si $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, alors $P_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ et $\|P_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$,

(b) si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{\beta}{N}$, alors

$$ \|P_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{\beta r}} \frac{\Gamma(1 - N/\beta r)}{\Gamma(1 - \alpha N/\beta r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.13} $$

Lemme 2.2 *Pour l'opérateur $S_{\alpha,\beta}(t)$, $t > 0$, nous avons les résultats suivants*

(a) si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors $S_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ et

$$ \left\| S_{\alpha,\beta}(t)u_0 \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}; $$

(b) Pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, soit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, si $\frac{1}{r} < \frac{2\beta}{N}$, alors

$$ \left\| S_{\alpha,\beta}(t)u_0 \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha (4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{\beta r}} \frac{\Gamma(2 - N/\beta r)}{\Gamma(1 + \alpha - \alpha N/\beta r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.14} $$

Lemme 2.3 *Soit $A = (-\Delta)^{\beta/2}$. Pour $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, nous avons $P_{\alpha,\beta}(t)u_0 \in D(A)$, pour $t > 0$, et*

$$\begin{aligned} {}_0^C D_t^\alpha P_{\alpha,\beta}(t)u_0 &= AP_{\alpha,\beta}(t)u_0, \ t > 0, \\ \|AP_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} &\leq \frac{C}{t^\alpha} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \ t > 0, \end{aligned}$$

pour certaine constante $C > 0$.

Lemme 2.4 *Supposons que $f \in L^q((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$, $q > 1$, et soit*

$$z(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) f(s) ds,$$

alors

$${}_0I_t^{1-\alpha} z(t) = \int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s) f(s) ds.$$

De plus, si $\alpha q > 1$, alors $z \in C((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$.

2.3 Existence locale

Dans cette section, en utilisant le théorème du point fixe, nous prouvons l'existence locale pour le problème (2.1)-(2.2).
Premièrement, nous donnons la définition de la solution douce (lisse) de (2.1)-(2.2)

Définition 2.1 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $T > 0$. On dit que $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution douce de (2.1)-(2.2), si u satisfait :*

$$u(x,t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) {}_0I_s^\gamma (|u|^{p-1} u)(x,s) ds, \ t \in [0,T]. \tag{2.15}$$

Théorème 2.1 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, il existe un temps maximale $T_{\max} = T(u_0) > 0$ et une solution douce unique $u \in C([0,T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N))$ du problème (2.1)-(2.2). De plus,*
- Soit $T_{\max} = +\infty$;
- Soit $T_{\max} < +\infty$, et dans ce cas $\|u\|_{L^\infty((0,t),C_0(\mathbb{R}^N))} \to +\infty$ quand $t \to T_{\max}$.
- Si, en outre, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, alors $u(t) \geq P_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ pour $t \in (0,T_{\max})$. De plus,
- Si $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour certains $r \in [1,\infty)$, alors $u \in C([0,T_{\max}), L^r(\mathbb{R}^N))$.

Preuve. Pour $T > 0$ et $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, on définit

$$E_T = \left\{ u \mid u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N)) : \|u\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right\},$$

et

$$d(u,v) = \max_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \ u,v \in E_T.$$

Puisque $C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est un espace de Banach, il en résultat que (E_T, d) est un espace métrique complet.
Maintenant, nous définissons l'opérateur

$$G(u)(t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds,\ u \in E_T.$$

Ensuite, en utilisant (2.14), nous avons

$$\begin{aligned}
& \|G(u)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
= & \left\| P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{\gamma-1} \|u(\sigma)\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
\leq & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u(t)\|^p_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{2^p T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0\|^p_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \\
\leq & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{2^p T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Si nous choisissons T assez petit telle que

$$\frac{2^p T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u(t)\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq 1,$$

nous obtenons

$$\|G(u)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

En outre, pour $u, v \in E_T$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \|G(u)(t) - G(v)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
= & \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 I_s^\gamma(|v|^{p-1}v)ds \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (s-t)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{\gamma-1} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} d\tau ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
\leq & \frac{T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{C(p)2^p T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u-v\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{1}{2} \|u-v\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))},
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité suivante

$$\left||u|^{p-1}u-|v|^{p-1}v\right|\leq C(p)\,|u-v|\,(|u|^{p-1}+|v|^{p-1}),$$

où T est choisi tel que

$$\frac{C(p)2^pT^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}\,\|u_0(t)\|^{p-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq\frac{1}{2}.$$

Par conséquent, G est contractif sur E_T. Donc, G a un point fixe unique $u\in E_T$ par l'argument du point fixe de Banach. Ensuite, en utilisant l'unicité des solutions, nous concluons l'unicité de la solution sur un intervalle maximal $[0,T_{\max})$, où

$$T_{\max}=\sup\left\{T>0:\text{il existe une solution lisse }u\in L^\infty([0,T]\,,C_0(\mathbb{R}^N))\text{ pour }(2.1)-(2.2)\right\}.$$

Supposons que $T_{\max}<\infty$ et qu'il existe une constante positive M telle que :

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\leq M,\qquad\qquad t\in[0,T_{\max}).$$

Puisque $P_{\alpha,\beta}(t)u_0$ est uniformément continue sur $[0,T_{\max}]$, donc la limite $\lim_{t\to T_{\max}}u(x,t)$ existe. On note $u_{T_{\max}}=\lim_{t\to T_{\max}}u(x,t)$. Donc, $u\in C([0,T_{\max}]\,,C_0(\mathbb{R}^N))$ et par le Lemme 2.4 nous avons

$$\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds\in C([0,T_{\max}]\,,C_0(\mathbb{R}^N)).$$

Pour $h>0$, $\delta>0$, soit

$$E_{h,\delta}=\left\{u\in C([T_{\max},T_{\max}+h]\,,C_0(\mathbb{R}^N)):u(T_{\max})=u_{T_{\max}},d(u,u_{T_{\max}})\leq\delta\right\},$$

où

$$d(u,v)=\max_{t\in[T_{\max},T_{\max}+h]}\|u-v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)},\qquad u,v\in E_{h,\delta}.$$

Comme $C([T_{\max},T_{\max}+h]\,,C_0(\mathbb{R}^N))$ est un espace de Banach, alors $(E_{h,\delta},d)$ est un espace métrique complet.

Nous définissons l'opérateur G sur $E_{h,\delta}$ par

$$\begin{aligned}G(v)(t)=P_{\alpha,\beta}(t)u_0+\textstyle\int_0^{T_{\max}}(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds\\+\textstyle\int_{T_{\max}}^t(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^\gamma(|v|^{p-1}v)ds,\end{aligned}$$

pour $v\in E_{h,\delta}$. Clairement, on a $G(v)\in C([T_{\max},T_{\max}+h]\,,C_0(\mathbb{R}^N))$, et $G(v)(T_{\max})=u(T_{\max})$. En répétant l'argument ci-dessus, nous pouvons prouver que G admet un point fixe $v\in E_{h,\delta}$. Puisque

$$v(T_{\max})=G(v)(T_{\max})=u(T_{\max}),$$

si on pose

$$\tilde{u}(x,t)=\begin{cases} u(x,t), & t\in[0,T_{\max}[\,, \\ v(x,t), & t\in[T_{\max},T_{\max}+h]\,, \end{cases}$$

alors $\tilde{u}\in C([0,T_{\max}+h]\,,C_0(\mathbb{R}^N))$ et

$$\tilde{u}(x,t)=P_{\alpha,\beta}(t)u_0+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^{\gamma}(|\tilde{u}|^{p-1}\tilde{u})ds.$$

Ensuite, $\tilde{u}$ est une solution de (2.1)-(2.2), ce qui est en contradiction avec la définition de $T_{\max}$. Supposons que $u_0\in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour $1\leq r<\infty$, alors nous répétons le même argument que ci-dessus dans l'espace suivant :

$$\begin{array}{rcl} E_{T,r} & = & \{u\in C([0,T]\,,C_0(\mathbb{R}^N)\cap L^r(\mathbb{R}^N)),\ \text{tel que} \\ \|u\|_{L^\infty([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^N))} & \leq & 2\,\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\,,\ \ \|u\|_{L^\infty([0,T],L^r(\mathbb{R}^N))}\leq 2\,\|u_0\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\}. \end{array}$$

En estimant de $\|u^p\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ par $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-1}\|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ dans le théorème de mappage de contraction, en utilisant (2.14), nous obtenons une solution unique dans $E_{T,r}$. Puis nous concluons que

$$u\in C([0,T_{\max})\,,C_0(\mathbb{R}^N)\cap L^r(\mathbb{R}^N)).$$

Si $u_0\geq 0$ et $u_0\not\equiv 0$, alors nous pouvons construire une solution non négative de (2.1)-(2.2) sur $[0,T]$ en appliquant l'argument ci-dessus dans l'ensemble $E_T^+=\{u\in E_T : u\geq 0\}$. En particlier, il résulte de (2.15) que $u(t)\geq 0$ sur $(0,T_{\max})$. ■

2.4 Explosions des solutions

Premièrement, nous donnons la définition de la solution faible de (2.1)-(2.2) et après nous prouvons l'explosion des solutions.

Définition 2.2 *Soit $u_0\in L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$, $0<\beta\leq 2$, $0<\alpha<1-\gamma$, $0<\gamma<1$ et $T>0$. On dit que $u\in L^p((0,T),L_{loc}^{\infty}(\mathbb{R}^N))$ est u solution faible de (2.1)-(2.2) si*

$$\begin{array}{l} \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}{}_0I_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u_0{}_t^CD_T^{\alpha}\psi(x,t)dxdt \\ =\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u(-\Delta)^{\beta/2}\psi(x,t)dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u_t^CD_T^{\alpha}\psi(x,t)dxdt, \end{array}\tag{2.16}$$

pour toute fonction test $\psi\in C^1([0,T]\,,H^{\beta}(\mathbb{R}^N))$ avec $\operatorname{supp}_x\psi\subset\subset\mathbb{R}^N$ et $\psi(.,T)=0$.

Nous donnons maintenant le lemme suivant qui prouve que toute solution lisse du problème (2.1)-(2.2) est une solution faible.

Lemme 2.5 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, et $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ une solution lisse de (2.1)-(2.2). Alors u est une solution faible de (2.1)-(2.2), pour tous $0 < \beta \leq 2$, $0 < \alpha < 1-\gamma$, $0 < \gamma < 1$ et $T > 0$.*

Preuve. *Supposons que $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution lisse de (2.1)-(2.2), alors nous avons*

$$ {}_0I_t^{1-\alpha}(u-u_0) = {}_0 I_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0) + {}_0 I_t^{1-\alpha}\Big(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) {}_0I_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)ds\Big).$$

En utilisant le Lemme 2.4, nous obtenons

$$ {}_0I_t^{1-\alpha}(u-u_0) = {}_0 I_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}u_0 - u_0) + \int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s) {}_0I_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)ds.$$

Alors, pour tout $\psi \in C^1([0,T], H_\beta(\mathbb{R}^N))$ avec $\mathrm{supp}_x\, \psi \subset \mathbb{R}^N$ et $\psi(x,T) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha}(u-u_0)\psi dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s) {}_0I_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi ds dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)\, u_0 - u_0)\psi dx \\ &= H_1(t) + H_2(t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Par le $Lemme 2.3$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dH_2}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^N} {}_0^C D_t^{\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0)\psi dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0)\psi_t dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} A(P_{\alpha,\beta}(t)u_0)\psi dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0)\psi_t dx. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Soit $h > 0, t \in [0, T)$ *et* $t + h \to T$, *alors on a*

$$\begin{aligned}
\frac{H_1(t+h) - H_1(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t+h-s)_0I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi(x,t+h)dxds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi(x,t)dxds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty} \Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta)_0I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi(x,t+h)d\theta dxds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty} \Phi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)_0I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi(x,t)d\theta dxds \\
&= H_3 + H_4 + H_5,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
H_3 &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_t^{t+h}\int_0^{\infty}\Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta)_0I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\quad \times\psi(x,t+h)dx, \\
H_4 &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{t}\int_0^{\infty}\Phi_\alpha(\theta)\left(T((t+h-s)^\alpha\theta) - T((t-s)^\alpha\theta)\right)_0 I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\quad \times\psi(x,t)dx, \\
H_5 &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{t}\int_0^{\infty}\Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta)_0I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\quad \times(\psi(x,t+h) - \psi(x,t))dx.
\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, quand $h \to 0$, *nous concluons que*

$$\begin{aligned}
H_3 &\to \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi dx, \\
H_4 &\to \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds\psi_t dx, \\
H_5 &\to \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^\gamma(|u|^{p-1}u)dsA\psi dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la dérivée droite de H_1 sur $[0,T)$ est donnée par

$$\frac{dH_1}{dt} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi dx + \int_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi_t dxds$$
$$+ \int_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)A\psi dxds.$$

Alors, on a

$$\frac{dH_1}{dt} = \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi dx \tag{2.19}$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)ds\right)\psi_t dx$$
$$+ \int_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)A\psi dxds,$$

pour $t \in [0,T)$. Par (2.17)-(2.19), nous avons

$$\int_0^T \frac{dH_1}{dt} + \frac{dH_2}{dt}dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha}(u-u_0)\psi dxdt = 0.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t)u_0(-\Delta)^{\beta/2}\psi dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (u-u_0){}_0^CD_T^{\alpha}\psi dxdt\\ &\textstyle+\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi dxdt\\ &\textstyle+\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0I_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)ds(-\Delta)^{\beta/2}\psi dxdt = 0.\end{aligned}$$

Enfin, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0{}_t^CD_T^{\alpha}\psi dxdt\\ &\textstyle= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^{\beta/2}\psi dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u{}_t^CD_T^{\alpha}\psi dxdt,\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve du Lemme.Maintenant, nous donnons un résultat d'explosion pour les solutions du problème (2.1)-(2.2). ■

Théorème 2.2 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $u_0 \geq 0,\ u_0 \not\equiv 0$. Si*

$$1 < p < 1 + \frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\alpha N},$$

alors toute solution du problème (2.1)-(2.2) explose en temps fini.

Preuve. La preuve est par contradiction. Supposons que u est une solution globale lisse pour le problème (2.1)-(2.2). En utilisant le Lemme 2.5 et la Définition 2.2, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^\gamma\left(|u|^{p-1}u\right)\psi(x,t)\,dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0{}_t^C D_T^\alpha\psi(x,t)\,dxdt\\&=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\psi(x,t)\,dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_t^C D_T^\alpha\psi(x,t)\,dxdt,\end{aligned}$$

pour tout $\psi\in C^1([0,T],H^\beta(\mathbb{R}^N))$ avec $\mathrm{supp}_x\,\psi\subset\subset\mathbb{R}^N$ et $\psi(.,T)=0$, où $0<\alpha<1-\gamma$ et $0<\gamma<1$.Soit $\Phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(s)=1$ pour $|s|\le1$, $\Phi(s)=0$ pour $|s|>2$ et $0\le\Phi(s)\le1$. Maintenant, nous prenons

$$\psi(x,t)={}_t^C D_T^\gamma\varphi(x,t)={}_t^C D_T^\gamma\left(\varphi_1^l(x)\,\varphi_2(t)\right),\ l\ge\frac{p}{p-1},$$

pour tout $\Phi\in C^1([0,T],H^\beta(\mathbb{R}^N))$ avec $\mathrm{supp}_x\,\varphi\subset\subset\mathbb{R}^N$ et $\varphi(x,T)=0$, avec

$$\varphi_1(x)=\Phi\left(\frac{|x|}{T^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right),\ \varphi_2(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)^m,\ m\ge\max\left\{2,\frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1}\right\},$$

pour $t\in[0,T]$. Ainsi

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)_t^C D_T^{\alpha+\gamma}(\varphi_2(t))\,dxdt\\&=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1^l(x)_t^C D_T^\gamma(\varphi_2(t))\,dxdt\\&+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1^l(x)_t^C D_T^{\alpha+\gamma}(\varphi_2(t))\,dxdt.\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Ju (voir [1])

$$(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\left(\varphi_1^l\right)\le l\varphi_1^{l-1}(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1,$$

on trouve

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)_t^C D_T^{\alpha+\gamma}(\varphi_2(t))\,dxdt\\&\le C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1^{l-1}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1\,{}_t^C D_T^\gamma(\varphi_2(t))\right|dxdt\\&+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1^l(x)\ \left|{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}(\varphi_2(t))\right|dxdt,\end{aligned}$$

pour une constante positive C indépendante de T. Ensuite, par l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\psi dxdt + CT^{1-\alpha-\gamma}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx \\
&\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\varphi^{\frac{1}{p}}\varphi^{-\frac{1}{p}}\varphi_1^{l-1}\left|\left(-\triangle^{\frac{\beta}{2}}\right)\varphi_1{}_t^C D_T^{\gamma}(\varphi_2(t))\right| dxdt \\
&+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\varphi^{\frac{1}{p}}\varphi^{-\frac{1}{p}}\varphi_1^l(x)\ \left|{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}(\varphi_2(t))\right| dxdt \\
&\leq \frac{1}{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt + \frac{2^{q-1}}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^{l-q}\varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1^l\right|^q\left|{}_t^C D_T^{\gamma}(\varphi_2(t))\right|^q dxdt \\
&+\frac{1}{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt + \frac{2^{q-1}}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^l\varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left|{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}(\varphi_2(t))\right|^q dxdt.
\end{aligned}$$

Dans cette étape, on introduit le changement de variables suivant

$$\tau = \frac{t}{T},\ \xi = \frac{x}{T^{\frac{\alpha}{\beta}}},$$

nous obtenons

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt + T^{1-\alpha-\gamma}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx \leq CT^{1+\frac{\alpha N}{\beta}-\frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1}}. \tag{2.21}$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx \leq CT^{\frac{\alpha N}{\beta}-\frac{(\alpha+\gamma)}{p-1}}.$$

Donc, si une solution de (2.1)-(2.2) existe globalement, alors en prenant $T \to +\infty$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0\varphi_1^l dx = 0 \Rightarrow u_0 \equiv 0, \tag{2.22}$$

ce qui est une contradiction. Donc la solution de (2.1)-(2.2) explose en temps fini. ■

Chapitre 3

Non existence des solutions pour un système différentiel fractionnaire

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous considérons le système fractionnaire suivant

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{\alpha_1} u + (-\Delta)^{\beta_1/2} u = {}_0 I_t^{\gamma_1} |v|^{p-1} v, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ {}_0^C D_t^{\alpha_2} v + (-\Delta)^{\beta_2/2} v = {}_0 I_t^{\gamma_2} |u|^{q-1} u, & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

avec les données initiales

$$u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N), \tag{3.2}$$

où $C_0(\mathbb{R}^N)$ désigne l'espace de toutes les fonctions continues et décroissantes vers zéro à l'infini. $N \geq 1$, $0 < \alpha_i < 1 - \gamma_i\, (i = 1, 2)$, $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$, $0 < \beta \leq 2$, $p > 1$, $q > 1$ et ${}_0^C D_t^{\alpha_i}$ la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha_i\, (i = 1, 2)$ définie par

$${}_0^C D_t^{\alpha_i} u(t) = {}_0 I_t^{1-\alpha_i} u'(t),\ i = 1, 2$$

où ${}_0 I_t^{1-\alpha_i}$ désigne l'intégrale fractionnaire à gauche de Riemann-Liouville d'ordre $1 - \alpha_i$ définie, pour une fonction intégrable w par

$${}_0 I_t^{1-\alpha_i} w(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha_i} w(s) ds,$$

où Γ est la fonction Gamma. L'opérateur $(-\Delta)^{\beta/2}$ est défini par

$$(-\Delta)^{\beta/2} v(x) := \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{\beta} \mathcal{F}(v)(\xi))(x).$$

Lorsque $\alpha_i = 1$, $\beta_i = 2$, et $\gamma_i = 0$, $i = 1, 2$, le système (3.1) se réduit au système suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = |v|^{p-1} v, & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ v_t - \Delta v = |u|^{q-1} u, & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Dans [12], Escobedo et Herrero ont montré que si

$$N \leq \max\left(\frac{2(p+1)}{pq-1}, \frac{2(q+1)}{pq-1}\right),$$

alors toute solution explose en temps fini.
Dans [13], Fino et Kirane, ont étudié le système suivant

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = \int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} |v(s)|^{p-1} v(s) ds, & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ v_t - \Delta v = \int_0^t (t-s)^{-\gamma_2} |u(s)|^{q-1} u(s) ds, & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \end{cases} \tag{3.4}$$

Ils ont montré que si

$$\begin{aligned} \frac{N}{2} &\leq \max\left\{\frac{(1+\gamma_2)p + \gamma_1 pq + 1}{pq-1}, \frac{(1+\gamma_1)q + \gamma_2 pq + 1}{pq-1}\right\}, \\ \text{ou } p &< \frac{1}{1-\gamma_2} \text{ et } q < \frac{1}{1-\gamma_1}, \end{aligned}$$

alors toute solution explose en temps fini.

Si en remplaçant respectivement u_t, v_t,par ${}_0^C D_t^{\alpha_1} u$ et ${}_0^C D_t^{\alpha_2} v$ dans les résultats précédents, on trouve que dans le cas $\beta_i = 2$ et $\gamma_i = 0, (i = 1, 2)$ Zhang et Sun [27] ont traité le problème suivant

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{\alpha_1} u - \Delta u = |v|^{p-1} v, & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \\ {}_0^C D_t^{\alpha_2} v - \Delta v = |u|^{q-1} u, & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Ils ont prouvés que si$N < \max\left\{\frac{2(q+1)}{pq-1}, \frac{2(p+1)}{pq-1}\right\}$,
lors toute solution explose en temps fini.
Si $\gamma_i = 0, (i = 1, 2)$, Kirane et *al.* [17] ont considéré le système d'évolution suivant

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^{\alpha_1} u_t + (-\Delta)^{\beta_1/2} u = h_1(x,t) |v|^{p-1} v, & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ {}_0^C D_t^{\alpha_2} v_t + (-\Delta)^{\beta_2/2} v = h_2(x,t) |u|^{q-1} u, & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \end{cases} \tag{3.6}$$

où $h_1(x,t) \geq C_1 |x|^{\sigma_1} t^{\rho_1}$, $h_2(x,t) \geq C_2 |x|^{\sigma_2} t^{\rho_2}$ pour $C_1, C_2 > 0$, $\sigma_i, \rho_i\, (i = 1, 2)$ et satisfaire à certaines conditions. Ils ont prouvé que si

$$N \leq \max\{N_1, N_2\},$$

où

$$\begin{cases} N_1 = \frac{\frac{\alpha_2}{q}+\alpha_1-\left(1-\frac{1}{pq}\right)+\frac{1}{pq}\left(\rho_1+\frac{\alpha_2}{\beta_2}\sigma_1\right)+\frac{1}{q}\left(\rho_2+\frac{\alpha_1}{\beta_1}\sigma_2\right)}{\frac{\alpha_2}{\beta_2 q\tilde{p}}+\frac{\alpha_1}{\beta_1\tilde{q}}}, \\ N_2 = \frac{\frac{\alpha_1}{p}+\alpha_2-\left(1-\frac{1}{pq}\right)+\frac{1}{pq}\left(\rho_2+\frac{\alpha_1}{\beta_1}\sigma_2\right)+\frac{1}{p}\left(\rho_1+\frac{\alpha_2}{\beta_2}\sigma_1\right)}{\frac{\alpha_1}{\beta_1 p\tilde{q}}+\frac{\alpha_2}{\beta_2\tilde{p}}}, \end{cases}$$

le problème (3.2)-(3.6) n'a pas de solutions positives globales.
Dans ce chapitre, nous étudierons l'existence locale et la non-existence de solutions pour le problème (3.1)-(3.2).

3.2 Existence locale

Dans cette section, en utilisant le théorème du point fixe de Banach, nous prouvons l'existence locale pour le problème (3.1)-(3.2).

Définition 3.1 *Soit $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $T > 0$.On dit que $(u,v) \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N)) \times C([0,T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution lisse de (3.1)-(3.2), si (u,v) satisfait, pour $t \in [0,T]$, les équations suivantes*

$$u(x,t) = P_{\alpha_1,\beta_1}(t)u_0(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1} S_{\alpha_1,\beta_1}(t-s)_0 I_s^{\gamma_1}(|v|^{p-1}v)(x,s)ds, \ t \in [0,T]. \tag{3.7}$$

$$v(x,t) = P_{\alpha_2,\beta_2}(t)v_0(x) + \int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1} S_{\alpha_2,\beta_2}(t-s)_0 I_s^{\gamma_2}(|u|^{q-1}u)(x,s)ds, \ t \in [0,T]. \tag{3.8}$$

Théorème 3.1 *Soit $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$. Alors, il existe un temps maximale $T_{\max} = T(u_0) = T(v_0) > 0$ telque le problème (3.1)-(3.2) a une solution lisse unique $(u,v) \in C([0,T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N)) \times C([0,T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N))$. De plus, on a l'alternative*

- Soit $T_{\max} = +\infty$;

- Soit $T_{\max} < +\infty$ avec $\left(\|u\|_{L^\infty((0,t),C_0(\mathbb{R}^N))} + \|v\|_{L^\infty((0,t),C_0(\mathbb{R}^N))}\right) \to +\infty$ quand $t \to T_{\max}$.

- Si, en outre, $u_0, v_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0, v_0 \not\equiv 0$ alors $u(t) \geq P_{\alpha_1,\beta_1}(t)u_0 > 0$, $v(t) \geq P_{\alpha_2,\beta_2}(t)u_0 > 0$ pour $t \in (0,T_{\max})$. De plus,

- Si, $u_0, v_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour certains $r \in [1,\infty)$, alors $u, v \in C([0,T_{\max}), L^r(\mathbb{R}^N))$.

Preuve. voir [20]. ■

3.3 Explosion des solutions

Premièrement, nous donnons la définition de la solution faible de (3.1)-(3.2) et après nous prouvons l'explosion de solutions.

Définition 3.2 *Soit* $u_0, v_0 \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $0 < \beta_1, \beta_2 \leq 2$, $0 < \alpha_1 < 1 - \gamma_1$, $0 < \alpha_2 < 1 - \gamma_2$, $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$ *et* $T > 0$. *On dit que* $(u, v) \in L^p((0,T), L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N))$ *est une solution faible de (3.1)-(3.2) si*

$$\begin{array}{l} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_1(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \, {}_t^C D_T^{\alpha_1}\psi_1(x,t)dxdt \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^{\beta_1/2}\psi_1(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u \, {}_t^C D_T^{\alpha_1}\psi_1(x,t)dxdt, \end{array} \tag{3.9}$$

$$\begin{array}{l} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)\psi_2(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} v_0 \, {}_t^C D_T^{\alpha_2}\psi_2(x,t)dxdt \\ = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} v(-\Delta)^{\beta_2/2}\psi_2(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} v \, {}_t^C D_T^{\alpha_2}\psi_2(x,t)dxdt, \end{array} \tag{3.10}$$

pour toute fonction test $\psi_1, \psi_2 \in C^1([0,T], H^\beta(\mathbb{R}^N))$ *avec* $\mathrm{supp}_x(\psi_1, \psi_2) \subset\subset \mathbb{R}^N$ *et* $\psi_1(.,T) = \psi_2(.,T) = 0$.

Nous donnons maintenant le lemme suivant qui prouve que toute solution lisse du problème (3.1)-(3.2) est une solution faible.

Lemme 3.1 *Soit* $u_0, v_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, *et* $(u, v) \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ *une solution lisse de (3.1)-(3.2). Alors* (u, v) *est une solution faible de (3.1)-(3.2), pour tous* $0 < \beta_1, \beta_2 \leq 2$, $0 < \alpha_1 < 1 - \gamma_1$, $0 < \alpha_2 < 1 - \gamma_2$, $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$ *et* $T > 0$.

Preuve. *Supposons que*$(u, v) \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ *est une solution lisse de (3.1)-(3.2), alors nous avons*

$$\begin{array}{rcl} {}_0I_t^{1-\alpha_1}(u - u_0) & = & {}_0I_t^{1-\alpha_1}(P_{\alpha_1,\beta_1}(t)u_0 - u_0) +_0 I_t^{1-\alpha_1}(\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}S_{\alpha_1,\beta_1}(t-s){}_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)ds)). \\ {}_0I_t^{1-\alpha_2}(v - v_0) & = & {}_0I_t^{1-\alpha_2}(P_{\alpha_2,\beta_2}(t)v_0 - v_0) +_0 I_t^{1-\alpha_2}(\int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1}S_{\alpha_2,\beta_2}(t-s){}_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)ds)). \end{array}$$

En utilisant le Lemme 2.4, nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} {}_0I_t^{1-\alpha_1}(u - u_0) & = & {}_0I_t^{1-\alpha_1}(P_{\alpha_1,\beta_1}u_0 - u_0) + \int_0^t P_{\alpha_1,\beta_1}(t-s){}_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)ds. \\ {}_0I_t^{1-\alpha_2}(v - v_0) & = & {}_0I_t^{1-\alpha_2}(P_{\alpha_2,\beta_2}v_0 - v_0) + \int_0^t P_{\alpha_2,\beta_2}(t-s){}_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)ds. \end{array}$$

Alors, pour tout $\psi_1, \psi_2 \in C^1([0,T], H_\beta(\mathbb{R}^N))$ *avec* $\mathrm{supp}_x(\psi_1, \psi_2) \subset\subset \mathbb{R}^N$ *et* $\psi_1(x,T) = \psi_2(x,T) = 0$, *on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_1}(u-u_0)\psi_1 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t P_{\alpha_1,\beta_1}(t-s)_0 I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_1 ds dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_1}(P_{\alpha_1,\beta_1}(t)\, u_0 - u_0)\psi_1 dx \\
&= H_1(t) + H_2(t)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_2}(v-v_0)\psi_2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^t P_{\alpha_2,\beta_2}(t-s)_0 I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)\psi_2 ds dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_2}(P_{\alpha_2,\beta_2}(t)\, v_0 - v_0)\psi_2 dx \\
&= L_1(t) + L_2(t).
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Par le Lemme 2.3, nous obtenons

$$\frac{dH_2}{dt} = \int_{\mathbb{R}^N} {}_0^C D_t^{\alpha_1}(P_{\alpha_1,\beta_1}(t)u_0)\psi_1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_1}(P_{\alpha_1,\beta_1}(t)u_0 - u_0)\psi_{1t} dx \tag{3.13}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} A(P_{\alpha_1,\beta_1}(t)u_0)\psi_1 dx + \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_1}(P_{\alpha_1,\beta_1}(t)u_0 - u_0)\psi_{1t} dx.$$

$$\frac{dL_2}{dt} = \int_{\mathbb{R}^N} {}_0^C D_t^{\alpha_2}(P_{\alpha_2,\beta_2}(t)v_0)\psi_2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_2}(P_{\alpha_2,\beta_2}(t)v_0 - v_0)\psi_t dx \tag{3.14}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} A(P_{\alpha_2,\beta_2}(t)v_0)\psi_2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_2}(P_{\alpha_2,\beta_2}(t)v_0 - v_0)\psi_{2t} dx.$$

Soit $h > 0, t \in [0,T)$ *et* $t+h \to T$, *alors on a*

$$\begin{aligned}
\frac{H_1(t+h)-H_1(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha_1,\beta_1}(t+h-s)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_1(x,t+h)dxds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha_1,\beta_1}(t-s)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_1(x,t)dxds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty} \Phi_{\alpha_1}(\theta)T((t+h-s)^{\alpha_1}\theta)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_1(x,t+h)d\theta dxds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty} \Phi_{\alpha_1}(\theta)T((t-s)^{\alpha_1}\theta)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_1(x,t)d\theta dxds \\
&= H_3+H_4+H_5,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{L_1(t+h)-L_1(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha_2,\beta_2}(t+h-s)_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)\psi_2(x,t+h)dxds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha_1,\beta_2}(t-s)_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)\psi_2(x,t)dxds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty} \Phi_{\alpha_2}(\theta)T((t+h-s)^{\alpha_2}\theta)_0I_s^{\gamma_2}(|u|^{q-1}u)\psi_2(x,t+h)d\theta dxds \\
&\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty} \Phi_{\alpha_2}(\theta)T((t-s)^{\alpha_2}\theta)_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)\psi_2(x,t)d\theta dxds \\
&= L_3+L_4+L_5,
\end{aligned}$$

où

$$
\begin{aligned}
H_3 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{t}^{t+h}\int\limits_{0}^{\infty}\Phi_{\alpha_1}(\theta)T((t+h-s)^{\alpha_1}\theta)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\quad\times\psi_1(x,t+h)dx, \\
H_4 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{\infty}\Phi_{\alpha_1}(\theta)\left(T((t+h-s)^{\alpha_1}\theta)-T((t-s)^{\alpha_1}\theta)\right)_0 I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\quad\times\psi_1(x,t)dx, \\
H_5 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{\infty}\Phi_{\alpha_1}(\theta)T((t+h-s)^{\alpha_1}\theta)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\
&\quad\times(\psi_1(x,t+h)-\psi_1(x,t))dx,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
L_3 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{t}^{t+h}\int\limits_{0}^{\infty}\Phi_{\alpha_2}(\theta)T((t+h-s)^{\alpha_2}\theta)_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)d\theta ds \\
&\quad\times\psi_2(x,t+h)dx, \\
L_4 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{\infty}\Phi_{\alpha_2}(\theta)\left(T((t+h-s)^{\alpha_2}\theta)-T((t-s)^{\alpha_2}\theta)\right)_0 I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)d\theta ds \\
&\quad\times\psi_2(x,t)dx, \\
L_5 &= \frac{1}{h}\int\limits_{\mathbb{R}^N}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{0}^{\infty}\Phi_{\alpha_2}(\theta)T((t+h-s)^{\alpha_2}\theta)_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)d\theta ds \\
&\quad\times(\psi_2(x,t+h)-\psi_2(x,t))dx.
\end{aligned}
$$

Par le théorème de convergence dominée, quand $h\to 0$, *nous concluons que*

$$
\begin{aligned}
H_3 &\to \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_1 dx, \\
H_4 &\to \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^t P_{\alpha_1,\beta_1}(t-s)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)ds\psi_{1t}dx, \\
H_5 &\to \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}S_{\alpha_1,\beta_1}(t-s)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)dsA\psi_1 dx,
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
L_3 &\rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)\psi_2 dx, \\
L_4 &\rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^t P_{\alpha_2,\beta_2}(t-s)_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)ds\psi_{2t}dx, \\
L_5 &\rightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1}S_{\alpha_2,\beta_2}(t-s)_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)dsA\psi_2 dx.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la dérivée droite de H_1, L_1 *sur* $[0,T)$ *est donnée par*

$$\begin{aligned}
\frac{dH_1}{dt} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_1 dx \\
&\quad + \int_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha_1,\beta_1}(t-s)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_{1t}dxds \\
&\quad + \int_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} (t-s)^{\alpha_1-1}S_{\alpha_1,\beta_1}(t-s)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)A\psi_1 dxds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{dL_1}{dt} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)\psi_2 dx \\
&\quad + \int_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha_2,\beta_2}(t-s)_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)\psi_{2t}dxds \\
&\quad + \int_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} (t-s)^{\alpha_2-1}S_{\alpha_2,\beta_2}(t-s)_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)A\psi_2 dxds.
\end{aligned}$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
\frac{dH_1}{dt} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_1 dx \qquad (3.15)\\
&\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_1}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}S_{\alpha_1,\beta_1}(t-s)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)ds\right)\psi_{1t}dx \\
&\quad + \int_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} (t-s)^{\alpha_1-1}S_{\alpha_1,\beta_1}(t-s)_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)A\psi_1 dxds,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{dL_1}{dt} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)\psi_2 dx \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_2}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1}S_{\alpha_2,\beta_2}(t-s){}_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)ds\right)\psi_{2t}dx \\ &+ \int_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} (t-s)^{\alpha_2-1}S_{\alpha_2,\beta_2}(t-s){}_0I_s^{\gamma_1}(|v|^{q-1}v)A\psi_2 dxds,\end{aligned} \tag{3.16}$$

pour $t \in [0,T)$ *. Par* **(??)** *et (3.13)-(3.15) et (3.16), nous avons*

$$\int_0^T \frac{dH_1}{dt} + \frac{dH_2}{dt}dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_1}(u-u_0)\psi_1 dxdt = 0,$$

et

$$\int_0^T \frac{dL_1}{dt} + \frac{dL_2}{dt}dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{1-\alpha_2}(v-v_0)\psi_2 dxdt = 0.$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha_1,\beta_1}(t)u_0(-\Delta)^{\beta_1/2}\psi_1 dxdt - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}(u-u_0){}_0^CD_T^{\alpha_1}\psi_1 dxdt \\ &+ \textstyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_1 dxdt \\ &+ \textstyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t (t-s)^{\alpha_1-1}S_{\alpha_1,\beta_1}(t-s){}_0I_s^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)ds(-\Delta)^{\beta_1/2}\psi_1 dxdt = 0,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha_2,\beta_2}(t)v_0(-\Delta)^{\beta_2/2}\psi_2 dxdt - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}(v-v_0){}_0^CD_T^{\alpha_2}\psi_2 dxdt \\ &+ \textstyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)\psi_2 dxdt \\ &+ \textstyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t (t-s)^{\alpha_2-1}S_{\alpha_2,\beta_2}(t-s){}_0I_s^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)ds(-\Delta)^{\beta_2/2}\psi_2 dxdt = 0.\end{aligned}$$

Enfin, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_1}(|u|^{p-1}u)\psi_1 dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0\,{}_t^CD_T^{\alpha_1}\psi_1 dxdt \\ &= \textstyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^{\beta_1/2}\psi_1 dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\,{}_t^CD_T^{\alpha_1}\psi_1 dxdt,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_2}(|v|^{q-1}v)\psi_2 dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v_0\,{}_t^CD_T^{\alpha_2}\psi_2 dxdt \\ &= \textstyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v(-\Delta)^{\beta_2/2}\psi_2 dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v\,{}_t^CD_T^{\alpha_2}\psi_2 dxdt,\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve du Lemme ■

Maintenant, nous donnons un résultat d'explosion pour les solutions du problème (3.1)-(3.2)

Théorème 3.2 *Soit* $u_0, v_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et* $u_0 \geq 0,\ u_0 \not\equiv 0$. *Si*

$$N \leq \max\left(\frac{2\,(p+1)}{pq-1}, \frac{2\,(q+1)}{pq-1}\right),$$

alors toute solution du problème (3.1)-(3.2) explose en temps fini.

Preuve. La preuve est par contradiction. Supposons que u et v est une solution globale lisse pour le problème (3.1)-(3.1). En utilisant le Lemme 3.1 et la Définition 3.2, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_1}\left(|u|^{p-1}u\right)\psi_1(x,t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0{}_t^C D_T^{\alpha_1}\psi_1(x,t)\,dxdt\\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\,(-\triangle)^{\frac{\beta_1}{2}}\,\psi_1(x,t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_t^C D_T^{\alpha_1}\psi_1(x,t)\,dxdt,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} {}_0I_t^{\gamma_2}\left(|v|^{q-1}v\right)\psi_2(x,t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v_0{}_t^C D_T^{\alpha_2}\psi_2(x,t)\,dxdt\\ &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v\,(-\triangle)^{\frac{\beta_2}{2}}\,\psi_2(x,t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v_t^C D_T^{\alpha_2}\psi_2(x,t)\,dxdt,\end{aligned}$$

pour tout $\psi_1, \psi_2 \in C^1([0,T], H^\beta(\mathbb{R}^N))$ avec $\mathrm{supp}_x\,(\psi_1,\psi_2) \subset\subset \mathbb{R}^N$ et $\psi_1(.,T) = \psi_2(.,T) = 0$, où $0 < \alpha_1 < 1-\gamma_1$, $0 < \alpha_2 < 1-\gamma_2$ et $0 < \gamma_1, \gamma_2 < 1$.
Soit $\Phi_1, \Phi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\Phi_1(s) = \Phi_2(s) = 1$ pour $|s| \leq 1$, $\Phi_1(s) = \Phi_2(s) = 0$ pour $|s| > 2$ et $0 \leq \Phi_1(s), \Phi_2(s) \leq 1$.
Maintenant, nous prenons

$$\psi_1(x,t) = {}_t^C D_T^{\gamma_1}\varphi(x,t) = {}_t^C D_T^{\gamma_1}\left(\varphi_1^l(x)\,\varphi_2(t)\right),\ l \geq \frac{p}{p-1},$$

et

$$\psi_2(x,t) = {}_t^C D_T^{\gamma_2}\varphi(x,t) = {}_t^C D_T^{\gamma_2}\left(\varphi_1^l(x)\,\varphi_2(t)\right),\ l \geq \frac{q}{q-1},$$

pour tout $\Phi_1, \Phi_2 \in C^1([0,T], H^\beta(\mathbb{R}^N))$ avec $\mathrm{supp}_x\,(\varphi_1,\varphi_2) \subset\subset \mathbb{R}^N$ et $\varphi_1(x,T) = \varphi_2(x,T) = 0$, avec

$$\varphi_1(x) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right),\ \varphi_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^m,\ m \geq \max\left\{\frac{2p}{p-1}, \frac{2q}{q-1}\right\},$$

pour $t \in [0, T]$. Ainsi

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p \varphi dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,{}_t^C D_T^{\alpha_1+\gamma_1}(\varphi_2(t))\,dxdt \\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta_1}{2}}\,\varphi_1^l\,{}_t^C D_T^{\gamma_1}(\varphi_2(t))\,dxdt \\
&+ \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1^l(x)\;{}_t^C D_T^{\alpha_1+\gamma_1}(\varphi_2(t))\,dxdt,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v^q \varphi dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,{}_t^C D_T^{\alpha_2+\gamma_2}(\varphi_2(t))\,dxdt \\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta_2}{2}}\,\varphi_1^l\,{}_t^C D_T^{\gamma_2}(\varphi_2(t))\,dxdt \\
&+ \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v(x,t)\,\varphi_1^l(x)\,{}_t^C D_T^{\alpha_2+\gamma_2}(\varphi_2(t))\,dxdt.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

D'aprés l'inégalité de Ju (voir [1])

$$(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\left(\varphi_1^l\right) \leq l\varphi_1^{l-1}(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p \varphi dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,{}_t^C D_T^{\alpha_1+\gamma_1}(\varphi_2(t))\,dxdt \\
&\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1^{l-1}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1\;{}_t^C D_T^{\gamma_1}(\varphi_2(t))\right| dxdt \\
&+ \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_1^l(x)\;\left|{}_t^C D_T^{\alpha_1+\gamma_1}(\varphi_2(t))\right| dxdt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v^q \varphi dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,{}_t^C D_T^{\alpha_2+\gamma_2}(\varphi_2(t))\,dxdt \\
&\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v(x,t)\,\varphi_1^{l-1}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_1\;{}_t^C D_T^{\gamma_2}(\varphi_2(t))\right| dxdt \\
&+ \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v(x,t)\,\varphi_1^l(x)\;\left|{}_t^C D_T^{\alpha_2+\gamma_2}(\varphi_2(t))\right| dxdt,
\end{aligned}$$

pour une constante positive C indépendante de T. Ensuite, par l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\psi_1 dxdt + CT^{1-\alpha_1-\gamma_1}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx\\
&\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\varphi^{\frac{1}{p}}\varphi^{-\frac{1}{p}}\varphi_1^{l-1}\left|\left(-\triangle^{\frac{\beta_1}{2}}\right)\varphi_1{}_t^C D_T^{\gamma_1}(\varphi_2(t))\right| dxdt\\
&+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\varphi^{\frac{1}{p}}\varphi^{-\frac{1}{p}}\varphi_1^l(x)\left|{}_t^C D_T^{\alpha_1+\gamma_1}(\varphi_2(t))\right| dxdt\\
&\leq \frac{1}{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt + \frac{2^{q-1}}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^{l-q}\varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta_1}{2}}\varphi_1^l\right|^q\left|{}_t^C D_T^{\gamma_1}(\varphi_2(t))\right|^q dxdt\\
&+\frac{1}{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt + \frac{2^{q-1}}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^l\varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left|{}_t^C D_T^{\alpha_1+\gamma_1}(\varphi_2(t))\right|^q dxdt,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v^q\psi_2 dxdt + CT^{1-\alpha_1-\gamma_2}\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx\\
&\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v\,\varphi^{\frac{1}{q}}\varphi^{-\frac{1}{q}}\varphi_1^{l-1}\left|\left(-\triangle^{\frac{\beta_2}{2}}\right)\varphi_1\,{}_t^C D_T^{\gamma_2}(\varphi_2(t))\right| dxdt\\
&+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v\,\varphi^{\frac{1}{q}}\varphi^{-\frac{1}{q}}\varphi_1^l(x)\,\left|{}_t^C D_T^{\alpha_2+\gamma_2}(\varphi_2(t))\right| dxdt\\
&\leq \frac{1}{2q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v^q\varphi dxdt + \frac{2^{p-1}}{p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^{l-p}\varphi_2^{\frac{-1}{q-1}}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta_2}{2}}\varphi_1^l\right|^p\left|{}_t^C D_T^{\gamma_2}(\varphi_2(t))\right|^p dxdt\\
&+\frac{1}{2q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v^q\varphi dxdt + \frac{2^{p-1}}{p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^l\varphi_2^{\frac{-1}{q-1}}\left|{}_t^C D_T^{\alpha_2+\gamma_2}(\varphi_2(t))\right|^p dxdt.
\end{aligned}$$

Dans cette étape, on introduit le changement de variables suivant

$$\tau = \frac{t}{T},\ \xi = \frac{x}{T^{\frac{\alpha_i}{\beta i}}}, i = (1,2)$$

nous obtenons

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt + T^{1-\alpha_1-\gamma_1}\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx \leq CT^{1+\frac{\alpha_1 N}{\beta_1}-\frac{p(\alpha_1+\gamma_1)}{p-1}}. \tag{3.19}$$

$$\left(1-\frac{1}{q}\right)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} v^q\varphi dxdt + T^{1-\alpha_2-\gamma_2}\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx \leq CT^{1+\frac{\alpha_2 N}{\beta_2}-\frac{q(\alpha_2+\gamma_2)}{q-1}}. \tag{3.21}$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx \leq CT^{\frac{\alpha_1 N}{\beta_1}-\frac{(\alpha_1+\gamma_1)}{p-1}},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_0(x)\,\varphi_1^l(x)\,dx \leq CT^{\frac{\alpha_2 N}{\beta_2}-\frac{(\alpha_2+\gamma_2)}{q-1}}.$$

Donc, si une solution de (3.1)-(3.2) existe globalement, alors en prenant $T \to +\infty$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0 \varphi_1^l dx = 0 \Rightarrow u_0 \equiv 0, \tag{3.21}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_0 \varphi_1^l dx = 0 \Rightarrow v_0 \equiv 0, \tag{3.22}$$

ce qui est une contradiction. Donc la solution de (3.1)-(3.2) explose en temps fini. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons abordé la théorie des équations différentielles fractionnaires avec des non-linéarités de croissance polynomiale. Nous avons d'abord introduit les concepts essentiels du calcul fractionnaire. Nous avons utilisé l'approche de Caputo pour la dérivation par rapport au temps et le Laplacien fractionnaire comme opérateur de dérivation agissant sur l'espace. Nous avons étudié l'existence locale et la non-existence globale de solutions pour une équation et un système d'évolution fractionnaires. En conclusion, nous pensons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations différentielles fractionnaires, en ouvrant de nouvelles perspectives pour la recherche scientifique dans ce domaine.

Bibliographie

[1] A. Alsaedi, B. Ahmad and M. Kirane, A survey of useful inequalities in fractional calculus, Calc. Appl. Anal. 20,. 2017.

[2] A. Bekkai,B.Rebiai,M.Kirane,On local existence and blow up of solutions for a time-space fractional difusion equation with exponential nonlinearity,Math.Meth.Appl.Sci.2019

[3] E.G. Bazhlekova, Subordination principle for fractional evolution equations, Fract. Calc. Appl. Anal. 3,. 2000.

[4] K. Bouguetof, K. Haouam, and B. Rebiai, Non existence results of global solutions for fractional order integral equations and systems, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, 44,. 2020.

[5] H. Brezis, Analyse fonctionnelle théorie et application, Masson Pris New york Barcelone Milan Mexico Sao Paulo,. 1987.

[6] T. Cazenave, F. Dickstein and F.B. Weissler, An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling, Non linear Anal. 68,. 2008.

[7] J. Charles, M. bekhta et H.Queffélec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, Dunod, Paris,. 2010.

[8] S. Chandrasekhar, Stochastic problems in physics and astronomy, Rev. Modern Phys. 15,. 1943.

[9] S. Dipierro and E. Valdinoci, A simple mathematical model inspired by the Purkinje cells : from delayed travelling waves to fractional diffusion, Bull. Math. Biol. 80., 2018.

[10] J. Droniou, T. Gallouët and J. Vovelle, Global solution and smoothing effect for a non-local regularization of an hyperbolic equation, J. Evol. Equ. 3., 2003.

[11] J. Droniou and C. Imbert, Fractal first order partial differential equations, Arch. Ration. Mech. Anal. 182,. 2006.

[12] M. Escobedo and M.A. Herrero, Boundedness and blow up for a semilinear reaction–diffusion system, J. Differential Equations 89 ,. 1991.

[13] A. Fino and M.Kirane, Qualitative properties of solutions to a non locale evolution system, Math.Meth.Appl.Sci,. 2011

[14] A. Fino and M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation, Quart. Appl.Math. 70,. 2012.

[15] H. Fujita, On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for $u_t = \Delta u + u^{\alpha+1}$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. 13,. 1966.

[16] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, Theory and application of fractional differential equation,. 2006.

[17] M. Kirane, Y. Laskri and N.E. Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl.312,. 2005.

[18] J.L.Lions, Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non lineaires, Dunod ,Gaulthier-villars,Pris,. 1969.

[19] F. Mainardi, On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, in : S. Rionero, T. Ruggeri (Eds.), Waves and Stability in continuous Media, World Scientific, Singapore,. 1994.

[20] A.Nabti. Life span of blowing-up solutions to the Cauchy problem for a time-space fractional diffusion equation. Comput. Math. 78,. 2019.

[21] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers,. 1987.

[22] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, Fractional integrals and derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach Science Pub-lishers, Yverdon,. 1993.

[23] P. Souplet, Blow-up in nonlocal reaction–diffusion equations, SIAM J. Math. Anal. 29,.1998.

[24] F. Sun and P. Shi, Global existence and non-existence for a higher-order parabolic equation with time-fractional term, Non linear Analysis, 75,. 2012.

[25] R.N. Wang, D.H. Chen and T.J. Xiao, Abstract fractional Cauchy problems with almosectorial operators, J. Differential Equations 252,. 2012.

[26] Xu, Y. Qiang and T. Zhong, Blow-up of solutions for a time-space fractional evolution system, Acta Mathematica Sinica, English Series. Vol. 29,. 2013.

[27] G.Q. Zhang and H.R. Sun, The blow-up and global existence of solutions of Cauchy problems for a time fractional diffusion equation , Topol. Meth. Nonlinear.Anal. 46,. 2015.

[28] G.Q. Zhang and H.R. Sun, The blow-up and global existence of solutions of Cauchy problems for a time fractional diffusion System , Elsevier Ltd. All rights reserved.78,. 2019.

[29] Y. Zhou, Basic Theory of Fractional Differential Equations, World Scientific, Singapore,. 2014.

[30] Y. Zhou and L. Peng, On the time-fractional Navier–Stokes equations, Comput. Math. Appl. 73,. 2017.

[31] Y. Zhou and L. Peng, Weak solutions of the time-fractional Navier–Stokes equations and optimal control, Comput. Math. Appl. 73, 2017.