République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Etude de quelques problèmes mixtes avec conditions non locale

Présenté Par:
Bouakkaz Soulafa
Devant le jury :

Mme, Mezhoud Rachida	Dr	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr, Ben Zahi Mourad	Dr	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Mme, Mesloub Fatiha	Dr	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 05/06/2023

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Tout d'abord, je remerie *Dieu* le tout puissant, qui nous a donné la force, la courage et la patience d'accomplir ce présent travail.

J'adresse mes sincères remerciement à mon encadreur *Dr.Mesloub Fatiha*, d'avoir accepté d'encadrer ce mémoir avec beaucoups de patience. Je le remercie vivement pour ses conseils, ses corrections et ses orientations.

J'exprime également ma reconnaissance envers les membres du Jury qui ont accepté de présider et d'avoir regard examinateur sur mon travail.

Je remercie également toute ma famille, pour leur soutient moral, leur encouragement.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à:

À l'âme de mon cher frère qui a eu un impact considérable sur mon parcours actuel.

À ma très chère mère.

Quoi que je fasse ou que je dise, je ne saurai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présense à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.

À mon très chère père.

Tu as toujours été à mes côtés pour me soutenir et m'encourage.

Que ce travail traduit ma gratitude et mon affection.

À mon fréré Sami.

À ma soeur Asma et son mari Mohamed.

À ma petite princesse Aline.

À mes copines Bachboucha-Kiti-Misha.

À ma cousine Basma.

À tout les amis " Nihel, Hadil, Wafa, Ibtissem, Hakima, Bouthaina, Imane, Aya , Nour " .

Résumé

Dans ce travail, on étudie deux problèmes mixtes. On commence par un système linéaire de thermo-lasticité avec l'opérateur de Bessel. On prouve l'existence et l'unicité d'une solution forte.

Ensuite, on traite un problème non linéaire et non local pour une équation pseudo-parabolique du second ordre. La preuve est basée sur une estimation a priori et sur la densité de l'image de l'opérateur généré par le problème étudié.

Abstract

In this present work, we study two mixed problems. We start with a linear system of thermolasticity with the Bessel operator. We prove the existence and uniqueness of a strong solution.

Then, we treat a non linear nonlocal problem for a second order pseudoparabolic equation. The proof is based on a priori estimate and on the density of the range of the operator.

ملخص

في هذا العمل، نقوم بدراسة مسألتين مختلطتين، نبدأ بجملة خطية للتمدد الحراري مع مؤثر باسل، نثبت وجود و وحدانية حل قوي.

ثم نناقش مسألة غير خطية و غير محلية لمعادلة شبه مكافئة من الدرجة الثانية.

يعتمد البرهان على تقدير مسبق و كثافة صورة المؤثر الذي يتم توليده من خلال المسألة المدروسة.

Table des matières

Introduction

Les équations différentielles et les systèmes différentiels sont d'une importance fondamentale dans les problèmes pratiques. En effet, un grand nombre de lois et de relations physiques, mécaniques, et thermodynamiques sont traduits mathématiquement sous la forme d'équations différentielles.

Les équations différentielles sont l'une des branches les plus riches des mathématiques, et l'étude de ces équations sont étroitement liés à l'étude des phénomènes naturels.

Les conditions classiques telles que les conditions de Dirichlet, de Neumann, et de Robin, qui sont prescrits ponctuellement ne sont pas toujours suffisantes puisqu'elle dépendent du contexte physique dont les données peuvent être mesurées au bord du domaine physique.

Certains phénomènes physiques peuvent être modélisés et décrits à l'aide des problèmes non locaux, c'est-à-dire comme des problèmes mixtes avec conditions aux limites non locales ou intégrales.

Dans les années soixante, Cannon [5] a utilisé la méthode potentielle pour prouver la bien posée d'une équation homogène parabolique avec une condition classique de Dirichlet et condition intégrale. Les problèmes aux limites avec conditions intégrales ont été principalement étudiés par Samarskii [35].

Le but de la présente mémoire est de prouver l'existence, l'unicité et la dépendance continue de certains problèmes mixtes, en utilisant la méthode de l'analyse fonctionnelle appelée aussi méthode de l'inégalité énergétique ou méthode de l'estimation a priori.Cette méthode est basée sur les idées de Dezin [10] et développée par Ladyzenskaya [20], où elle a été utilisée dans la résolution du problème de Cauchy lié aux équations de type hyperbolique. Le procédé a également été utilisé et mis au point dans les travaux de N.I.Yurchuk [40].

Description de la méthode

D'abord, nous écrivons le problème posé sous une forme appelée forme opérationnelle

$$Lu = \mathcal{F}, \tag{1}$$

où l'opérateur L est un opérateur d'un espace de Banach E dans un espace de Hilbert F bien choisis.

Ensuite, nous établissons une estimation a priori (inégalité d'énergie) pour l'opérateur L

$$\|u\|_E \leq C \|Lu\|_F \quad \forall u \in D(L), \tag{2}$$

où $D(L)$ le domaine de définition de L.

L'estimation (2) peut-être obtenue en choisissant un certain multiplicateur Mu qui est en général un opérateur intégro-différentiel et en utilisant des intégrations par parties appropriées. Nous devons mentionner ici que jusqu'à présent, il n'existe pas de méthode générale pour construire un tel opérateur multiplicateur Mu.

Nous montrons que l'opérateur L est fermable et $\overline{L}$ sa fermeture. Nous définissons une solution forte du problème considéré comme la solution de l'équation de l'opérateur

$$\overline{L}u = \mathcal{F} \quad \forall u \in D(\overline{L}). \tag{3}$$

Nous étendons l'estimation (2) à l'ensemble des solutions $u \in D(\overline{L})$ (solutions fortes) en passant à la limite, nous avons alors l'estimation a priori suivante

$$\|u\|_E \leq C \left\|\overline{L}u\right\|_F \quad \forall u \in D(\overline{L}). \tag{4}$$

Ainsi, on déduit l'unicité d'une solution forte, pour cet opérateur $\overline{L}$ et de l'inégalité (4) , on démontre que

$$R(\overline{L}) = \overline{R(L)}.$$

où $R(\overline{L})$ l'image de l'opérateur $\overline{L}$.

Enfin, la résolvabilité de chaque problème donné, nous prouvons la densité de l'image $R(L)$ de l'opérateur L dans F, et donc l'existence d'une solution forte du problème considéré.

La méthode des inégalités énergétiques est une méthode efficace pour l'étude de beaucoup de problèmes de la physique mathématique, elle est fondée sur un support théorique solide et développée dans un cadre abstrait élégant. Mais dans l'application de cette méthode, on est confronté à difficultés, parmi lesquelles :

* Le choix de l'espace des solutions.
* Le choix du multiplicateur.
* Le choix de l'opérateur de régularisation.

Ce travail est divisés en trois chapitres.

- Le premier chapitre : est un rappelle de notions fondamentaux qui seront utilisés dans la suite.
- Dans le deuxième chapitre, on a étudié l'existence et l'unicité de la solution d'un système de thermo-élasticité linéaire avec l'opérateur de Bessel.
- Dans le troisième chapitre, on a prouvé l'existence et l'unicité d'une solution faible d'un problème pseudo-parabolique du second ordre non linéaire avec condition non locale.

On termine ce travail par une conclusion et une bibliographie.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions générales et préliminaires d'analyse fonctionnelle et quelques inégalités importantes qui seront utilisées dans ce mémoire.
Dans tout ce chapitre $\Bbbk$ est le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

1.1 Espace vectoriel

Définition 1.1 ***(Espace vectoriel)***

On considère un ensemble E muni d'une loi de composition interne + :

$$(x, y) \in E \times E \to x + y \in E,$$

et muni d'une loi de composition externe. (sur le corps $\Bbbk$) :

$$(\alpha, x) \in \Bbbk \times E \to \alpha \cdot x \in E.$$

On dit que E est un espace vectoriel sur $\Bbbk$ si :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif,
2. la loi externe $\cdot$ possède les propriétés suivantes :

* $\forall \alpha \in \Bbbk \; \forall (x, y) \in E^2 : \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$

* $\forall (\alpha, \beta) \in \Bbbk^2 \; \forall x \in E \; : (\alpha +_{\Bbbk} \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$

* $\forall (\alpha, \beta) \in \Bbbk^2 \; \forall x \in E \; : \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \times_{\Bbbk} \beta) \cdot x,$

* $\forall x \in E \; : 1_{\Bbbk} \cdot x = x.$

les éléments de E sont appelés vecteurs et les éléments de $\Bbbk$ sont appelés scalaires.

Définition 1.2 ***(Opérateur linéaire)*** *soit E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{k}$, on dit que l'application ou l'opérateur $A : E \longrightarrow F$ est linéaire si :* $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$

1. $A(x+y) = A(x) + A(y)$,
2. $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

Définition 1.3 *Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire, on definit l'image de l'opérateur A par*

$$\mathrm{Im}\,(A) = R\,(A) = \{Ax,\ x \in E\}\,.$$

Remarque 1.1 *On a un sous-ensemble important du domaine de A est $N\,(A) = \{x \in D(A) : Ax = 0\}$ appelé ensemble des zéros de l'opérateur A.*

Théorème 1.1 *Soit A un opérateur linéaire sur $D(A)$ dans E et $R(A)$ dans F, où E et F sont des espaces vectoriels, Alors A^{-1} existe si et seulement si $N(A) = (0)$. Dans ce cas A^{-1} est un opérateur linéaire.*

Définition 1.4 ***(Fonctionnelle linéaire)*** *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$, et F est un espace vectoriel composé par le champ scalaire associé à E. A un opérateur linéaire sur E dans F est appelé une fonctionnelle.*

1.2 Espace normé

Définition 1.5 ***(Norme)*** *Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$. Une* **norme** *sur E est une application notée $\|.\|$ définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;vérifiant les axiomes suivants :*

1. $\|x\| \geq 0$ pour tout $x \in E$ et $\|x\| = 0$ si seulement si $x = 0$,
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|\,, \forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{k}$,
3. $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|\,.$

Définition 1.6 ***(Espace vectoriel normé)*** *Un espace vectoriel normé est un espace vectoriel muni d'une norme.*

Définition 1.7 ***(Espace vectoriel complet)*** *On dit que l'espace E est complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

1.3 Espace de Banach

Définition 1.8 ***(Espace de Banach)*** *On appelle espace de Banach tout espace normé complet (toute suite de Cauchy de E converge dans E), c'est-à-dire* $\|u_n - u_m\| \to 0$ *quand* $n, m \to \infty, \forall u_n, u_m \in E$ *implique que* $\exists u \in E$ *tel que* $\|u_n - u\| \to 0$ *quand* $n \to \infty$.

1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.9 *On appelle un produit scalaire sur E et on note $(.,.)$ tout forme sesquilinéaire, hermitienne, définie positive définir de $E \times E$ dans $\Bbbk$, vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $(x, x) \geq 0, \forall x \in E.$
2. $(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$ dans E.
3. $(x, y) = \overline{(y, x)}, \forall x, y \in E.$
4. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha (x, z) + \beta (y, z), \forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in \Bbbk.$

Remarque 1.2 *Tout produit scalaire introduit une norme sur l'espace E, noté $\|.\|_E$ et définie par*

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)_E}, \forall x \in E.$$

Définition 1.10 ***(Espace de Hilbert)*** *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.*

Définition 1.11 *Soit E un espace de Hilbert, on dit que x, y deux éléments de E sont orthogonaux si $(x, y) = 0$ pour tout sous-espace M de E, on définit le complément orthogonal par*

$$M^{\perp} = \{x \in E, \ (x, y)_E = 0, \ \forall y \in M\}.$$

Il est clair que $M^{\perp}$ est un sous-espace fermé, si M est aussi fermé, alors E est la somme directe de M et $M^{\perp}$: $E = M \oplus M^{\perp}$.

Théorème 1.2 *Soit M un sous-espace de l'espace de Hilbert E alors M est dense dans E si et seulement si $M^{\perp} = \{0\}$.*

1.5 Espace fonctionnel et espace de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de lebesgue.

Définition 1.12 $L^2(\Omega)$ *est l'espace des fonctions mesurables de carré sommable dans* Ω*. Muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx,$$

et la norme

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}.$$

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.
Plus généralement on définit les espaces $L^p(\Omega)$ où $1 \leq p < +\infty$.

Définition 1.13 $L^p(\Omega)$ *est l'espace des fonctions mesurables de puissance p-iéme integrable sur* Ω*, muni de la norme*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = (\int_\Omega |u(x)|^p\,dx)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Définition 1.14 $L^\infty(\Omega)$ *est l'espace des fonctions mesurables u essentiellement bornées sur* Ω*, c'est-à-dire qu'il existe une constante* $c > 0$*, tell que* $|u(x)| \leq c$ *presque partout dans* Ω*. Muni de la norme*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\left\{c \in \mathbb{R}^+ \text{ telque } |u(x)| \leq c \text{ p.p. dans } \Omega\right\}.$$

$L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.

Définition 1.15 $L^2_\rho(\Omega)$ *est l'espace de Hilbert des fonctions des carrés intégrables avec poids. Muni de la produit scalaire*

$$(u,v)_{L^2_\rho(\Omega)} = (\sqrt{\rho}u, \sqrt{\rho}v)_{L^2(\Omega)},$$

et la norme

$$\|u\|_{L^2_\rho(\Omega)} = \|\sqrt{\rho}u\|_{L^2_\rho(\Omega)} = (\int_\Omega \rho(x)\,|u(x,.)|^2\,dx)^{\frac{1}{2}}.$$

Définition 1.16 *l'espace $W_p^m(\Omega)$ est un espace de Sobolev pour un entier $m \geq 0$ et un réel $1 \leq p \leq +\infty$. Muni de la norme*

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{W_p^m(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\,,\ p<\infty, \\ \|u\|^p_{W_\infty^m(\Omega)} &= \max_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

et pour $p = 2$, on définit le produit scalaire par

$$(u,v)_{W_2^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x)dx.$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = \overline{1,n}$

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i,\ D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \partial^{\alpha_2} x_2 ... \partial^{\alpha_n} x_n}.$$

Pour $W_2^m(\Omega)$ nous utilisons également la notation $H^m(\Omega)$.
Pour $m \in \mathbb{N}$, on a l'inclusion suivante

$$D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) \subset H^k(\Omega) \subset H^{k-1}(\Omega) \subset ... \subset H^1(\Omega) \subset H^0(\Omega) = L^2(\Omega) \subset D'(\Omega).$$

1.6 Opérateurs fermés

Définition 1.17 *Soit E et F deux espaces vectorieles, $A : E \to F$ est un opérateur linéaire, $\Gamma(A)$ est le graphe de l'opérateur A qui est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ définie par :*

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) \,/\, x \in D(A)\}\,.$$

où $D(A)$ est le domaine de définition de A.

Lemme 1.1 *L'opérateur $\widetilde{A}$ est un extension (prolongement) si et seulement si $\Gamma(\widetilde{A}) = \Gamma(A)$.*

Définition 1.18 *On dit qu'un opérateur A est fermé si $\Gamma(A)$ est fermé dans $E \times F$.*

Lemme 1.2 *Un opérateur A est fermé ssi il a la propriétés suivantes. Il existe une suite $u_n \in D(A)$ tel que : $u_n \to u$ et $Au_n \to f$ alors $u \in D(A)$ et $Au = f$.*

Définition 1.19 *On dit qu' un opérateur A est fermable dans E s'il admet une extension fermée.*

Aussi on dit que A est fermable si et seulement si pour toute suite $u_n \subset D(A)$ tel que $u_n \to 0$ et $Au_n \to v$ alors $v = 0$.
Chaque opérateur fermable a une plus petite extension fermée que nous appelons sa fermeture et notée $\overline{A}$.

Corollaire 1.1 *Si A est fermable alors $\Gamma(\overline{A}) = \overline{\Gamma(A)}$.*

1.7 Inégalités importantes

Pour obtenir les estimations a priori, nous avons besoin de quelques inégalités auxiliaires.

1.7.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$, nous avons l'inégalité suivante :

$$\int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx \leq \left(\int_\Omega u^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega v^2(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Preuve. Nous ferons l'hypothèse supplémentaire que la fonction u n'est pas identiquement nulle sur Ω, car sinon le résultat devient évident. Alors, pour tout nombre réel λ, on a :

$$\int_\Omega (\lambda u + v)^2(x)\, dx = \lambda^2 \int_\Omega u^2(x)\, dx + 2\lambda \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx + \int_\Omega v^2(x)\, dx \geq 0.$$

et $\int_\Omega u^2(x)\, dx \neq 0$.
Cette inégalité ayant lieu pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le discriminant de cette équation du second degré en λ est négatif ou nul ; ce qui revient à dire que

$$\left(\int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx\right)^2 - \left(\int_\Omega u^2(x)\, dx\right)\left(\int_\Omega v^2(x)\, dx\right) \leq 0,$$

ou encore

$$\left(\int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx\right)^2 \leq \left(\int_\Omega u^2(x)\, dx\right)\left(\int_\Omega v^2(x)\, dx\right).$$

■

1.7.2 Inégalité de Cauchy et Young

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et $p, q > 1$ vérifiant : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors on a

$$ab \leq \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}|b|^2. \text{ (Inégalité de Cauchy)}$$

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2, \varepsilon > 0. \text{ (Inégalité de Cauchy avec } \varepsilon\text{)}$$

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q. \text{ (Inégalité de Young)}$$

Preuve.

$$(a-b)^2 \geq 0 \implies ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$$

On utilise le dernier résultat

$$\begin{aligned} ab &= \left((2\varepsilon)^{\frac{1}{2}} a\right)\left(\frac{b}{(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\left((2\varepsilon)^{\frac{1}{2}} a\right)^2 + \left(\frac{b}{(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\varepsilon a^2 + \frac{b^2}{2\varepsilon}\right) \\ &= \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= \exp(\log a + \log b) \\ &= \exp\left[\frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{q}\log b^q\right] \\ &\leq \frac{1}{p}\exp[\log a^p] + \frac{1}{q}\exp[\log b^q] \\ &= \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \end{aligned}$$

■

1.7.3 Inégalité de Poincaré

Soit $v \in H_0^1(a,b)$, alors il existe une constante C (en fonction de $(b-a)$) telle que

$$\|u\|_{L^2(a,b)} \leq C\|u'\|_{L^2(a,b)}.$$

Preuve. on a la fonction u' existe et carré sommable.

On peut écrire

$$u(x) = \int_a^x u'(y)dy.$$

Alors, pour tout $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \left(\int_a^x u'(y)dy\right)^2 \\ &\leq \int_a^x (u'(y))^2\, dy \int_a^x dy, \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \int_a^b u^2(x)dx \leq \int_a^b \left[\int_a^x (u'(y))^2\, dy \times (x-a)\right] dx \leq \|u'\|^2_{L^2(a,b)} \times \int_a^b (x-a)\, dx,$$
$$\Longrightarrow \|u\|^2_{L^2(a,b)} \leq \frac{(b-a)^2}{2} \|u'\|^2_{L^2(a,b)} \Longrightarrow \|u\|_{L^2(a,b)} \leq \frac{b-a}{\sqrt{2}} \|u'\|_{L^2(a,b)}.$$

Dans plus qu'une dimension on a

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

■

1.7.4 Lemme de Gronwall

Si a et b sont des fonctions non négatives et intégrables sur $(0,T)$, la fonction b soit non-décroissante sur $(0,T)$, et $\lambda \in L^1(0,T)$, $\lambda > 0$, il s'ensuit à partir de :

$$a(t) \leq b(t) + \int_0^t \lambda(s)\, a(s)\, ds,$$

alors

$$a(t) \leq b(t) \exp(\Lambda(t)),$$

où

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds.$$

Preuve. On met

$$k(t) = \exp(-\Lambda(t)) \int_0^t \lambda(s)\, a(s)\, ds.$$

Alors, pour tout $t \in [0,T]$, l'estimation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} k(t) &= \lambda(t) \exp(-\Lambda(t)) \left(a(t) - \int_0^t \lambda(s)\, a(s)\, ds\right) \\ &\leq \lambda(t)\, b(t) \exp(-\Lambda(t)), \end{aligned}$$

le résulte de la première inégalité et $\lambda(t) > 0$.Avec $k(0) = 0$ par définition, l'intégration sur t conduite à

$$k(t) \leq \int_0^t \lambda(s)\, b(s) \exp(-\Lambda(s))\, ds.$$

Encore, une autre fois on utilise la première inégalité,

$$\begin{aligned}
\exp(-\Lambda(t))(a(t) - b(t)) &\leq \exp(-\Lambda(t)) \int_0^t \lambda(s)\, a(s)\, ds \\
&= k(t) \\
&\leq \int_0^t \lambda(s)\, b(s) \exp(-\Lambda(s))\, ds.
\end{aligned}$$

Donc, on trouve

$$a(t) - b(t) \leq \int_0^t \lambda(s)\, b(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s))\, ds,$$

si b est non décroissante sur $(0, T)$, et en vertu de $\lambda(t) > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
a(t) &\leq b(t) + \int_0^t \lambda(s)\, b(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s))\, ds \\
&\leq b(t) \left[1 + \int_0^t \lambda(s) \exp(\Lambda(t) - \Lambda(s))\, ds\right] \\
&\leq b(t) \left[1 + \exp(\Lambda(t)) \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} [-\exp(-\Lambda(s))]\, ds\right] \\
&\leq b(t) [1 + \exp(\Lambda(t)) [-\exp(-\Lambda(t)) + 1]] \\
&\leq b(t) \exp(\Lambda(t)).
\end{aligned}$$

Qui prouve le lemme.

On conclut si : $f_i(\tau), i = 1, 2, 3$, sont des fonctions non négatives sur $[0.T]$, $f_1(\tau)$ et $f_2(\tau)$ sont des fonctions intégrables, et $f_3(\tau)$ est non décroissante sur $[0.T]$, alors de l'inégalité

$$\int_0^\tau f_1(t)\, dt + f_2(\tau) \leq c \int_0^\tau f_2(t)\, dt + f_3(\tau),$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^\tau f_1(t)\, dt + f_2(\tau) \leq \exp(c\tau) . f_3(\tau).$$

■

1.8 Opérateurs de régularisation

Soit w une fonction de classe C^∞, avec les variables ζ telles que $w(\zeta) \geq 0; w = 0$ si $|\zeta| \geq 1$, et

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(\zeta)\, d\zeta = \int_{-1}^{1} w(\zeta)\, d\zeta = 1.$$

On dénote par :

$$w_{\varepsilon}(x, x') = \frac{1}{\varepsilon} w\left(\frac{x - x'}{\varepsilon}\right).$$

Pour tout $\varepsilon \succ 0$, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} w_{\varepsilon}(x, x')\, dx' = \int_{-\infty}^{\infty} w_{\varepsilon}(x, x')\, dx = 1,$$

et

$$w_{\varepsilon}(x, x') = 0, \quad \text{si} \ |x - x'| \geq \varepsilon.$$

On définit l'opérateur de lissage $\rho_{\varepsilon} : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ par la formule :

$$\begin{aligned} (\rho_{\varepsilon} h)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} w_{\varepsilon}(x, x')\, h(x') dx' \\ &= \int_{|x - x'| \prec \varepsilon} w_{\varepsilon}(x, x')\, h(x') dx', \end{aligned}$$

où $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$ et $h \in L^2(\Omega)$.

Cet opérateur a les propriétés suivantes :

P1 : La fonction $\rho_{\varepsilon} h \in C^{\infty}$ si $h \in L^2(\Omega)$

P2 : Si $h \in L^2(\Omega)$, alors

$$||\rho_{\varepsilon} h - h||_{L^2(\Omega)} \to 0, \quad \text{quand} \ \ \varepsilon \to 0,$$

et

$$||\rho_{\varepsilon} h||_{L^2(\Omega)} \leq ||h||_{L^2(\Omega)},$$

P3 :

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\rho_{\varepsilon} h) = \rho_{\varepsilon}(\frac{\partial^k}{\partial x^k} h), \quad \text{si} \ \ h \in \mathbb{C}^k(\Omega),$$

P4 : Si $\alpha \in C(\Omega)$ et $h \in L^2(\Omega)$, alors

$$||\alpha \rho_{\varepsilon} h - \rho_{\varepsilon}(\alpha h)||_{L^2(\Omega)} \to 0 \ \ \text{quand} \ \ \ \varepsilon \to 0,$$

P5 : Si $\alpha \in C(\Omega)$ et $h \in L^2(\Omega)$, alors

$$||\frac{\partial}{\partial x}\left(\alpha\rho_\varepsilon h - \rho_\varepsilon(\alpha h)\right)||_{L^2(\Omega)} \to 0 \quad \textbf{si} \;\; \varepsilon \to 0.$$

Chapitre 2

Sur un système de thermo-élasticité linéaire avec l'opérateur de Bessel

Dans ce chapitre, on étudie un problème de valeur initiale pour un système unidimensionnel de thermo-élasticité. On montre l'existence et l'unicité d'une solution généralisée, la démonstration est basée sur deux estimations a priori de l'opérateur engendré par le problème considéré.

2.1 Position du problème

Dans le domaine borné $Q = \Omega \times (0,T) = \{(r,t) : 0 < r < 1, 0 < t < T\}$, on considère un système couplé de thermoélasticité de la forme

$$\mathcal{L}_1 u = u_{tt} - \frac{a}{r}\left(ru_r\right)_r + br\theta_r = f\left(r,t\right). \tag{2.1.1}$$

$$\mathcal{L}_2 \theta = \theta_t - \frac{\varkappa}{r}\left(r\theta_r\right)_r + bru_{rt} = g\left(r,t\right). \tag{2.1.2}$$

où u est le déplacement, θ est la différence de températures absolue, f est une force externe, g est un apport de chaleur, et a, b,et $\varkappa$ sont des constantes positives.
On complète $(2.1.1), (2.1.2)$ avec les conditions initiales

$$\ell_1 u = u\left(r,0\right) = u_0\left(r\right), \quad 0 < r < 1. \tag{2.1.3}$$

$$\ell_2 u = u_t\left(r,0\right) = u_1\left(r\right), \quad 0 < r < 1. \tag{2.1.4}$$

$$\ell_3 \theta = \theta\left(r,0\right) = \theta_0\left(r\right), \quad 0 < r < 1. \tag{2.1.5}$$

et les conditions aux limites

$$u\,(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{2.1.6}$$

$$\theta\,(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{2.1.7}$$

où les fonctions de données satisfont, pour la compatibilité,

$$u_0\,(1) = u_1\,(1) = \theta_0\,(1)\,. \tag{2.1.8}$$

2.2 Espace fonctionnel

Pour l'étude du problème posé on a besoin des espaces fonctionnels suivants :
soit $L^2_\rho\,(Q)$ l'espace de Hilbert pondéré $L^2\,(Q)$ des fonctions aux carrés intégrables sur Q avec le produit scalaire

$$(u,\theta)_{L^2_\rho(Q)} = \int_Q ru\theta drdt,$$

et associée à la norme finie

$$\|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} = \int_Q ru^2 drdt.$$

et soit $W^1_{2,\rho}$ l'espace de Hilbert pondéré composé des éléments u de $L^2_\rho\,(Q)$ ayant des dérivées généralisées du premier ordre aux carrés sommables sur Q. $W^1_{2,\rho}$ est muni du produit scalaire

$$(u,\theta)_{W^{1,1}_{2,\rho}(Q)} = (u,\theta)_{L^2_\rho(Q)} + (u_r,\theta_r)_{L^2_\rho(Q)} + (u_t,\theta_t)_{L^2_\rho(Q)}\,,$$

et la norme associée est

$$\|u\|^2_{W^{1,1}_{2,\rho}(Q)} = \|u\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_r\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_t\|^2_{L^2_\rho(Q)}\,.$$

on utilise aussi les espaces pondérés sur $\Omega,$ tels que $L^2_\rho\,(\Omega)$ et $W^1_{2,\rho}\,(\Omega)$, dont les définitions sont analogues aux espaces sur Q.

2.3 Reformulation du probléme

Le problème $(2.1.1) - (2.1.7)$ peut être écrit sous la forme opérationnelle suivante :

$$AU = \mathcal{H}. \tag{2.3.1}$$

où U, AU et $\mathcal{H}$ sont respectivement les couples :

$$U = (u, \theta). \tag{2.3.2}$$

$$AU = (L_1 u, L_2 \theta). \tag{2.3.3}$$

et

$$\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2). \tag{2.3.4}$$

où

$$L_1 u = \{\mathcal{L}_1 u, \ell_1 u, \ell_2 u\}, \quad L_2 \theta = \{\mathcal{L}_2 \theta, \ell_3 \theta\}, \tag{2.3.5}$$

et

$$\mathcal{H}_1 = \{f, u_0, u_1\}, \quad \mathcal{H}_2 = \{g; \theta_0\}. \tag{2.3.6}$$

L'opérateur A est considéré de $B = B_1 \times B_2$ dans $H = H_1 \times H_2$, B est un espace de Banach constitué de tous les fonctions $(u, \theta) \in \left(L^2_\rho(Q)\right)^2$ vérifiant les conditions $(2.1.6) - (2.1.7)$ et muni de la norme

$$\|U\|^2_B = \sup_{0 \leq \tau \leq T} \left(\|u(., \tau)\|^2_{W^{1,1}_{2,\rho}(\Omega)} + \|\theta(., \tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \right) + \|\theta_r\|^2_{L^2_\rho(Q)}. \tag{2.3.7}$$

est finie.
Et l'espace $H = H_1 \times H_2$ est l'espace de Hilbert complété de l'espace $\left\{L^2_\rho(Q) \times W^1_{2,\rho}(\Omega) \times L^2_\rho(\Omega)\right\} \times \left\{L^2_\rho(Q) \times L^2_\rho(\Omega)\right\}$ par rapport à la norme

$$\|\mathcal{H}\|^2_H = \|f\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|u_0\|^2_{W^1_{2,\rho}(\Omega)} + \|u_1\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2_\rho(Q)} + \|\theta_0\|^2_{L^2_\rho(Q)}. \tag{2.3.8}$$

Soit $D(A)$, le domaine de définition de l'opérateur A; défini par ;

$$D(A)=\left\{(u,\theta)\in\left(L_\rho^2(Q)\right)^2/u_t,\theta_t,u_{tt},u_r,\theta_r,u_{rr},\theta_{rr},u_{tr},\theta_{tr}\in L_\rho^2(Q)\right\}.$$

satisfaire aux conditions $(2.1.6)-(2.1.7)$.

2.4 L'unicité de la solution

Dans cette section, nous prouvons un résultat d'unicité pour problème posé, c'est-à-dire nous établissons une estimation a priori à partir de laquelle nous déduisons l'unicité de la solution.

Théorème 2.1 *pour toute fonction $U=(u,\theta)\in D(A)$, on a l'estimation a priori*

$$\|U\|_B\leq C\,\|AU\|_H. \tag{2.4.1}$$

où C est une constante positive indépendante de U.

Preuve. Considérez les produits scalaires

$$(u_t,\mathcal{L}_1u)_{L_\rho^2(Q^\tau)}\ \text{ et }\ (\theta,\mathcal{L}_2\theta)_{L_\rho^2(Q^\tau)}, \tag{2.4.2}$$

où $Q^\tau=(0,\tau)\times\Omega$.

de $(2.4.2)$ nous avons :

$$\begin{aligned}
&(u_t,u_{tt})_{L_\rho^2(Q^\tau)}-a\left((ru_r)_r,u_t\right)_{L^2(Q^\tau)}\\
&+b\,(ru_t,\theta_r)_{L_\rho^2(Q^\tau)}+(\theta,\theta_t)_{L_\rho^2(Q^\tau)}\\
&-\varkappa\left((r\theta_r)_r,\theta\right)_{L^2(Q^\tau)}+b\,(ru_{rt},\theta)_{L_\rho^2(Q^\tau)}\\
=\ &(u_t,\mathcal{L}_1u)_{L_\rho^2(Q^\tau)}+(\theta,\mathcal{L}_1\theta)_{L_\rho^2(Q^\tau)}.
\end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Intégrons par parties séparément chaque terme de $(2.4.3)$ en tenant compte des conditions $(2.1.3)-(2.1.7)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
(u_t, u_{tt})_{L^2_\rho(Q^\tau)} &= \int_{Q^\tau} r u_t u_{tt} drdt \\
&= \int_0^\tau \int_\Omega r u_t u_{tt} drdt \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[r u_t^2 \right]_0^\tau dr \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega r u_t^2 (r,\tau) dr - \frac{1}{2}\int_\Omega r u_t^2 (r,0) dr \\
&= \frac{1}{2}\| u_t (r,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2}\| u_1\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.4.4}$$

$$\begin{aligned}
-a\left((r u_r)_r, u_t\right)_{L^2(Q^\tau)} &= -a \int_{Q^\tau} (r u_r)_r u_t drdt \\
&= -a \int_0^\tau \int_\Omega (r u_r)_r u_t drdt \\
&= -a \int_0^\tau [r u_r u_t]_\Omega \searrow_0 dt + a \int_{Q^\tau} r u_r u_{tr} drdt \\
&= \frac{a}{2}\int_\Omega \left[r u_r^2 \right]_0^\tau dr \\
&= \frac{a}{2}\int_\Omega r u_r^2 (r,\tau) dr - \frac{a}{2}\int_\Omega r u_r^2 (r,0) dr \\
&= \frac{a}{2}\| u_r (r,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{a}{2}\left\| \frac{\partial u_0}{\partial r}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

$$\begin{aligned}
-\varkappa\left((r \theta_r)_r, \theta\right)_{L^2(Q^\tau)} &= -\varkappa \int_{Q^\tau} (r \theta_r)_r \theta drdt \\
&= -\varkappa \int_0^\tau \int_\Omega (r \theta_r)_r \theta drdt \\
&= -\varkappa \int_0^\tau [r \theta_r \theta]_\Omega \searrow_0 dt + \varkappa \int_{Q^\tau} r (\theta_r)^2 drdt \\
&= \varkappa \| \theta_r\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

$$\begin{aligned}
(\theta,\theta_t)_{L^2_\rho(Q^\tau)} &= \int_{Q^\tau} r\theta\theta_t drdt \\
&= \int_0^\tau \int_\Omega r\theta\theta_t drdt \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left[r\theta^2\right]_0^\tau dr \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega r\theta^2(r,\tau)\,dr - \frac{1}{2}\int_\Omega r\theta^2(r,0)\,dr \\
&= \frac{1}{2}\|\theta(r,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\theta_0\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

$$\begin{aligned}
b\,(ru_{rt},\theta)_{L^2_\rho(Q^\tau)} &= b\int_{Q^\tau} r^2 u_{rt}\theta drdt \\
&= b\int_0^\tau \int_\Omega r^2 u_{rt}\theta drdt \\
&= b\int_0^\tau \left[r^2\theta u_t\right]_\Omega \searrow_0 dt - b\int_{Q^\tau}\left(2r\theta + r^2\theta_r\right)u_t drdt \\
&= -b\int_{Q^\tau} r^2 u_t\theta_r drdt - 2b\int_{Q^\tau} ru_t\theta drdt \\
&= -b\,(ru_t,\theta_r)_{L^2_\rho(Q^\tau)} - 2b\,(u_t,\theta)_{L^2_\rho(Q^\tau)}.
\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Substitution les identités $(2.4.4)-(2.4.8)$ dans l'égalité $(2.4.3)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u_t(r,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2}\|u_1\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&+\frac{a}{2}\|u_r(r,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{a}{2}\left\|\frac{\partial u_0}{\partial r}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&+b\,(ru_t,\theta_r)_{L^2_\rho(Q^\tau)} + \frac{1}{2}\|\theta(r,\tau)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&-\frac{1}{2}\|\theta_0\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \varkappa\|\theta_r\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
&-b\,(ru_t,\theta_r)_{L^2_\rho(Q^\tau)} - 2b\,(u_t,\theta)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
= &\ (u_t,\mathcal{L}_1 u)_{L^2_\rho(Q^\tau)} + (\theta,\mathcal{L}_1\theta)_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{2}\left\|u_r(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|u_t(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|\theta(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\varkappa\left\|\theta_r\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
= \; & \frac{1}{2}\left\|u_1\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{a}{2}\left\|\frac{\partial u_0}{\partial r}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|\theta_0\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+2b\left(u_t,\theta\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& +\left(u_t,\mathcal{L}_1 u\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left(\theta,\mathcal{L}_1\theta\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)}.
\end{aligned} \tag{2.4.9}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy Schwarz, nous estimons les trois derniers termes du membre droit de $(2.4.9)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
2b\left(u_t,\theta\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} &= 2b\int_{Q^\tau} r u_t\theta\, dr dt \\
&\leq 2b\int_{Q^\tau}\frac{1}{2}r\left(u_t^2+\theta^2\right)dr dt \\
&\leq b\int_{Q^\tau} r u_t^2 dr dt+b\int_{Q^\tau} r\theta^2 dr dt \\
&\leq b\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+b\left\|\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{2.4.10}$$

$$\begin{aligned}
\left(u_t,\mathcal{L}_1 u\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} &\leq \frac{1}{2}\int_{Q^\tau}\frac{1}{2}r\left(u_t^2+\left(\mathcal{L}_1 u\right)^2\right)dr dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{Q^\tau} r u_t^2 dr dt+\frac{1}{2}\int_{Q^\tau} r\left(\mathcal{L}_1 u\right)^2 dr dt \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\mathcal{L}_1 u\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{2.4.11}$$

$$\begin{aligned}
\left(\theta,\mathcal{L}_1\theta\right)_{L^2_\rho(Q^\tau)} &= \frac{1}{2}\int_{Q^\tau}\frac{1}{2}r\left(\theta^2+\left(\mathcal{L}_2\theta\right)^2\right)dr dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{Q^\tau} r\theta^2 dr dt+\frac{1}{2}\int_{Q^\tau} r\left(\mathcal{L}_2\theta\right)^2 dr dt \\
&\leq \frac{1}{2}\left\|\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\mathcal{L}_2\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned} \tag{2.4.12}$$

En combinant les égalités $(2.4.9)-(2.4.12)$; on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{2}\left\|u_r(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|u_t(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|\theta(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\varkappa\left\|\theta_r\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq\; & \frac{1}{2}\left\|u_1\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{a}{2}\left\|\frac{\partial u_0}{\partial r}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|\theta_0\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+b\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+b\left\|\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& \frac{1}{2}\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\mathcal{L}_1 u\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|\mathcal{L}_2\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
\leq\; & \frac{1}{2}\left\|u_1\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{a}{2}\left\|\frac{\partial u_0}{\partial r}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|\theta_0\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|\mathcal{L}_1 u\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|\mathcal{L}_2\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left(b+\frac{1}{2}\right)\left\|\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& +\left(b+\frac{1}{2}\right)\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}.
\end{aligned} \tag{2.4.13}$$

En vertu de l'inégalité élémentaire

$$\frac{1}{2}\left\|u(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\leq\frac{1}{2}\left\|u_0\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|u\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}. \tag{2.4.14}$$

Si on additionne côte à côte $(2.4.13)$ et $(2.4.14)$ on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{2}\left\|u_r(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|u_t(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|\theta(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\varkappa\left\|\theta_r\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|u(r,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
\leq\; & \frac{1}{2}\left\|u_1\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{a}{2}\left\|\frac{\partial u_0}{\partial r}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|\theta_0\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\frac{1}{2}\left\|\mathcal{L}_1 u\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|\mathcal{L}_2\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\left(b+\frac{1}{2}\right)\left\|\theta\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)} \\
& +\left(b+\frac{1}{2}\right)\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|u_0\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\frac{1}{2}\left\|u\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)}+\frac{1}{2}\left\|u_t\right\|^2_{L^2_\rho(Q^\tau)},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& a\left\|u_r(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|u_t(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|\theta(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 \\
& +2\varkappa\left\|\theta_r\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|u(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 \\
\leq\; & \left\|u_1\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+a\left\|\frac{\partial u_0}{\partial r}\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_0\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|\mathcal{L}_1 u\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
& +\left\|\mathcal{L}_2\theta\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+(2b+1)\left[\left\|\theta\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|u_t\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2\right] \\
& +\left\|u_0\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|u\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|u_t\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left\|u_r(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|u_t(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|u(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 \\
& +\left\|\theta(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_r\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
\leq\; & \frac{\max(a,2b+2)}{\min(a,1,2\varkappa)}\left[\begin{array}{c}
\left\|u_1\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_0\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|u_0\right\|_{W_{2,\rho}^1(\Omega)}^2+\left\|\mathcal{L}_1 u\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
+\left\|\mathcal{L}_2\theta\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|u\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|u_t\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|\theta\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2
\end{array}\right],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \left\|u_r(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|u_t(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|u(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2 \\
& +\left\|\theta(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_r\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
\leq\; & c\left[\begin{array}{c}
\left\|u_1\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_0\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|u_0\right\|_{W_{2,\rho}^1(\Omega)}^2+\left\|\mathcal{L}_1 u\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
+\left\|\mathcal{L}_2\theta\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|u\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|u_t\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|\theta\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2
\end{array}\right].
\end{aligned} \tag{2.4.15}
$$

où $c=\frac{\max(a,2b+2)}{\min(a,1,2\varkappa)}$.

On a

$$
\left\|u(r,\tau)\right\|_{W_{2,\rho}^{1,1}(Q)}^2=\left\|u(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|u_r(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2\left\|+u_t(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2
$$

Alors $(2.4.15)$ devient :

$$
\begin{aligned}
& \left\|u(r,\tau)\right\|_{W_{2,\rho}^{1,1}(Q)}^2+\left\|\theta(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_r\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
\leq\; & c\left[\begin{array}{c}
\left\|u_1\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_0\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|u_0\right\|_{W_{2,\rho}^1(\Omega)}^2+\left\|\mathcal{L}_1 u\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
+\left\|\mathcal{L}_2\theta\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|u\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|u_t\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|\theta\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2
\end{array}\right].
\end{aligned} \tag{2.4.16}
$$

On applique le lemme de Gronwall à $(2.4.16)$, on obtient ;

$$
\begin{aligned}
& \left\|u(r,\tau)\right\|_{W_{2,\rho}^{1,1}(Q)}^2+\left\|\theta(r,\tau)\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_r\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2 \\
\leq\; & c\exp(cT)\left[\begin{array}{c}
\left\|u_1\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|\theta_0\right\|_{L_\rho^2(\Omega)}^2+\left\|u_0\right\|_{W_{2,\rho}^1(\Omega)}^2 \\
+\left\|f\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2+\left\|g\right\|_{L_\rho^2(Q^\tau)}^2
\end{array}\right].
\end{aligned} \tag{2.4.17}
$$

Remplacer le membre de gauche de $(2.4.17)$ par sa borne supérieure par rapport à τ sur $(0,T)$; donne l'estimation recherchée $(2.4.1)$, avec $C=\sqrt{c}\exp\left(\frac{cT}{2}\right)$.
On peut prouver de façon classique que l'opérateur $A:B:B_1\times B_2\rightarrow H:H_1\times H_2$ est fermable. Soit $\overline{A}$ sa fermeture (clôture) ■

Proposition 2.1 *L'opérateur $A:B\rightarrow H$ a une fermeture.*

Preuve. Soit $U_n=(u_n,\theta_n)\in D(A)$ est une suite tell que

$$U_n \underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0 \text{ dans } B, \tag{2.4.18}$$

et

$$AU_n \underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} \mathcal{H}=(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2) \text{ dans } H, \tag{2.4.19}$$

où $\mathcal{H}_1=\{f,u_0,u_1\}$, $\mathcal{H}_2=\{g,\theta_0\}$. Alors il faut montrer que $f\equiv 0, u_0\equiv 0, u_1\equiv 0, g\equiv 0,$ et $\theta_0\equiv 0.$
$(2.4.18)$ signifie que :

$$\|(u_n,\theta_n)\|^2_{B_1\times B_2}=\|u_n\|^2_{B_1}+\|\theta_n\|^2_{B_2} \underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0,$$

mais on a :

$$\|u_n\|^2_{B_1}\leq\|(u_n,\theta_n)\|^2_{B_1\times B_2},$$

et

$$\|\theta_n\|^2_{B_2}\leq\|(u_n,\theta_n)\|^2_{B_1\times B_2},$$

ainsi

$$u_n \underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0 \text{ dans } B_1 \text{ et } \theta_n \underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0 \text{ dans } B_2 .$$

ce qui implique que

$$\begin{cases} u_n \underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0 \text{ dans } D'(Q) \\ \theta_n \underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0 \text{ dans } D'(Q) \end{cases} \tag{2.4.20}$$

Où $D'(Q)$ est l'espace des distributions sur Q.
En vertu de la continuité de dérivation de $D'(Q)$ dans $D'(Q)$, $(2.4.20)$ implique que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1u_n &\underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0 \text{ dans } D'(Q), \\ \mathcal{L}_2\theta_n &\underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} 0 \text{ dans } D'(Q), \end{aligned} \tag{2.4.21}$$

d' après $(2.4.20)$ nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1u_n &\underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} f \text{ dans } L^2(Q), \\ \mathcal{L}_2\theta_n &\underset{n\rightarrow\infty}{\rightarrow} g \text{ dans } L^2(Q), \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 u_n &\underset{n\to\infty}{\to} f \text{ dans } D'(Q), \\ \mathcal{L}_2 \theta_n &\underset{n\to\infty}{\to} g \text{ dans } D'(Q), \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $D'(Q)$, on conclut que $f \equiv 0$ et $g \equiv 0$.
A selon $(2.4.19)$ nous concluons également que

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\to} u_0 \text{ dans } W_2^1(\Omega), \tag{2.4.24}$$

et que la forme d'injection canonique $W_2^1(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$ est continue, donc on déduit que

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\to} u_0 \text{ dans } D'(\Omega), \tag{2.4.25}$$

de plus puisque $(2.4.18)$ tient et

$$\|\ell_1 u_n\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \|u_n\|_{B_1}, \forall n. \tag{2.4.26}$$

on a

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ dans } W_2^1(\Omega), \tag{2.4.27}$$

ainsi

$$\ell_1 u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ dans } D'(\Omega), \tag{2.4.28}$$

En vertu de l'unicité de la limite dans $D'(\Omega)$, on conclut de $(2.4.25)$ et $(2.4.28)$ que $u_0 \equiv 0$.
En utilisant la meme procédure, on peut montrer que $u_1 \equiv 0$ et $\theta_0 \equiv 0$.
Donc $\mathcal{H}$ =0 ; ceci prouve la proposition. ■
L'inégalité $(2.4.1)$ peut être étendue aux solutions fortes après passage à la limite, c'est-à-dire que l'on a

$$\|U\|_B \leq C \left\|\overline{A}U\right\|_H, \ \forall U \in\in D\left(\overline{A}\right). \tag{2.4.29}$$

Par conséquent, l'inégalité ci-dessus conduite aux résultats suivants :

Corollaire 2.1 *Une solution forte de* $(2.1.1)-(2.1.7)$ *est unique et dépend continûment de* $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \in H$ *où* $\mathcal{H}_1 = \{f, u_0, u_1\}$ *et* $\mathcal{H}_2 = \{g, \theta_0\}$.

Corollaire 2.2 *L'ensemble des valeurs* $R\left(\overline{A}\right)$ *de l'opérateur* $\overline{A}$ *est fermé dans* H *et* $R\left(\overline{A}\right) = \overline{R(A)}$.

Preuve. ·Montrons d'abord que $R\left(\overline{A}\right)$ est fermé.
Soit $\mathcal{H} \in \overline{R\left(\overline{A}\right)}$, alors il existe une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D\left(\overline{A}\right)$ telque $\overline{A}U_n \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{H}$ dans H, puisque (**??**) signifie que

$$\|U_n\|_B \leq C \left\|\overline{A}U_n\right\|_H, \ \forall n$$

Alors on déduit que la convergence de $\overline{A}U_n$ dans H implique la convergence de U_n dans B; dison

$$U_n \underset{n\to\infty}{\to} U \text{ dans } B.$$

puisque $\overline{A}$ est fermé, (U_n) est une suite dans $D\left(\overline{A}\right)$ et

$$U_n \underset{n\to\infty}{\to} U \text{ dans } B,$$

$$\overline{A}U_n \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{H} \text{ dans } H,$$

alors $U \in D\left(\overline{A}\right)$ et $\overline{A}U = \mathcal{H}$, c'est $\mathcal{H} \in R\left(\overline{A}\right)$.
ainsi, $R\left(\overline{A}\right)$ est fermé dans H.
Maintenant, nous prouvons que $R\left(\overline{A}\right) = \overline{R\left(A\right)}$.
puisque $\overline{A}$ est une extension de A; alors $\Gamma\left(A\right) \subseteq \Gamma\left(\overline{A}\right)$; où $\Gamma\left(A\right)$ est le graphe de A, $\Gamma\left(A\right) = \left\{\left(U, AU\right); U \in D\left(A\right)\right\}$; ainsi,

$$R\left(A\right) \subseteq R\left(\overline{A}\right),$$

ce qui implique

$$\overline{R\left(A\right)} \subseteq \overline{R\left(\overline{A}\right)},$$

mais $R\left(\overline{A}\right)$ est fermé, ainsi

$$\overline{R\left(A\right)} \subseteq R\left(\overline{A}\right),$$

D'autre part, soit $\mathcal{H} \in R\left(\overline{A}\right)$, c'est-à-dire $\mathcal{H} = \overline{A}U$; pour certains $U \in D\left(\overline{A}\right)$ alors $(U, \mathcal{H}) \in \Gamma\left(\overline{A}\right) = \overline{\Gamma\left(A\right)}$, c'est-à-dire qu' il existe une suite $\left(U_n, AU_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\Gamma\left(A\right)$ tel que

$$\left(U_n, AU_n\right) \underset{n\to\infty}{\to} (U, \mathcal{H}) \text{ dans } B \times H,$$

C'est,

$$\left\|\left(U_n, AU_n\right) - (U, \mathcal{H})\right\|_{B\times H}^2 = \left\|U_n - U\right\|_B^2 + \left\|AU_n - \mathcal{H}\right\|_H^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

ainsi, $AU_n \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{H}$ dans H, mais $U_n \in D\left(A\right), \forall n$, ensuit nous avons $\mathcal{H} \in \overline{R\left(A\right)}$,et donc $R\left(\overline{A}\right) \subseteq \overline{R\left(A\right)}$. ■

2.5 L'existence de la solution

Pour montrer que le problème possède une solution unique, il suffit démontrer la densité de l'ensemble $R(A)$ dans H; pour cela on montre la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Si pour une fonction* $W = (\omega_1, \omega_2) \in \left(L^2_\rho(Q)\right)^2$ *et pour tous les éléments* $U \in D_0(A) = \{U/U \in D(A) : \ell_1 u = \ell_2 u = \ell_3 \theta = 0\}$, *on a*

$$(\mathcal{L}_1 u, \omega_1)_{L^2_\rho(Q)} + (\mathcal{L}_2 \theta, \omega_2)_{L^2_\rho(Q)} = 0. \tag{2.5.1}$$

alors W disparaît presque partout dans Q.

Preuve. puisque la relation $(2.5.1)$ est vraie pour tout élément de $D_0(A)$, alors on prend un élément $U = (u, \theta)$ avec une forme spéciale donnée par

$$U = \begin{cases} (0,0), \quad 0 \leq t \leq s \\ \left(\int_s^t (t-\tau) u_{\tau\tau} d\tau, \int_s^t \theta_\tau d\tau\right), \quad s \leq t \leq T \end{cases} \tag{2.5.2}$$

telque (u_{tt}, θ_t) est une solution du système

$$\begin{cases} r u_{tt} = E_1(r,t) \\ r\theta_t = E_2(r,t) \end{cases} \tag{2.5.3}$$

où $E_1(r,t) = \int_t^T \omega_1(r,\tau) d\tau$ et $E_2(r,t) = \int_t^T \omega_2(r,\tau) d\tau$.
Il est clair que :

$$\begin{cases} \omega_1 = -r u_{ttt} \\ \omega_2 = -r\theta_{tt} \end{cases} \tag{2.5.4}$$

En vertu des relations $(2.5.2)$ et $(2.5.3)$, la fonction $U = (u, \theta) \in \left(L^2_\rho(Q)\right)^2$ en fait U possède un ordre supérieur de douceur.
En utilise le lemme suivant : ∎

Lemme 2.1 *La fonction* $W = (\omega_1, \omega_2)$ *définie par* $(2.5.4)$ *appartient à l'espace* $\left(L^2_\rho(Q)\right)^2$.

Preuve. pour prouver ce lemme, on utilise l'opérateur ρ_ε de la forme :

$$(\rho_\varepsilon G)(r,t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} w\left(\frac{v-t}{\varepsilon}\right) G(r,v) dv,$$

où w$\in C_0^\infty(0,T)$, $w(t) \geq 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt = 1$.

En appliquant les opérateurs ρ_ε et $\frac{\partial}{\partial t}$ à la première équation de (2.5.3) nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(ru_{tt}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\varepsilon\left(ru_{tt}\right) - r\rho_\varepsilon u_{tt}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(E_1\left(r,t\right)\right),$$

Alors

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(ru_{tt}\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} \leq 2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\varepsilon\left(ru_{tt}\right) - r\rho_\varepsilon u_{tt}\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} + 2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(E_1\left(r,t\right)\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)},$$

en utilisant les propriétés de l'opérateur ρ_ε; donne

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(ru_{tt}\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} \leq 2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(E_1\left(r,t\right)\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)},$$

Puisque, $\rho_\varepsilon G \underset{\varepsilon\to 0}{\to} G$ dans $L^2_\rho\left(Q\right)$ et la norme de $\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(ru_{tt}\right)$ est bornée dans $L^2_\rho\left(Q\right)$, on déduit que $\omega_1 \in L^2_\rho\left(Q\right)$.

De même, en appliquant ρ_ε et $\frac{\partial}{\partial t}$ à la deuxiéme équation de (2.5.3), nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(r\theta_t\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\varepsilon\left(r\theta_t\right) - r\rho_\varepsilon\theta_t\right) + \frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(E_2\left(r,t\right)\right),$$

on obtient

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(r\theta_t\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} \leq 2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\varepsilon\left(r\theta_t\right) - r\rho_\varepsilon\theta_t\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} + 2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(E_2\left(r,t\right)\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)},$$

en utilisant les propriétés de l'opérateur ρ_ε, donne

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(r\theta_t\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)} \leq 2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(E_2\left(r,t\right)\right)\right\|^2_{L^2_\rho(Q)}.$$

Puisque, $\rho_\varepsilon G \underset{\varepsilon\to 0}{\to} G$ dans $L^2_\rho\left(Q\right)$ et la norme de $\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon\left(r\theta_t\right)$ est bornée dans $L^2_\rho\left(Q\right)$, on déduit que $\omega_2 \in L^2_\rho\left(Q\right)$.

Par conséquent, $W = (\omega_1, \omega_2) \in \left(L^2_\rho\left(Q\right)\right)^2$.

Maintenant en remplaçant les fonctions ω_1 et ω_2 données par (2.5.1) dans la relation (2.5.4), on obtient

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{L}_1 u, \omega_1\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(\mathcal{L}_2\theta, \omega_2\right)_{L^2_\rho(Q)} &= \left(\mathcal{L}_1 u, -ru_{ttt}\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(\mathcal{L}_2\theta, -r\theta_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&= -\left(u_{tt}, u_{ttt}\right)_{L^2_\rho(Q)} + a\left(u_{ttt}, \left(ru_r\right)_r\right)_{L^2(Q)} \\
&\quad -b\left(r\theta_r, u_{ttt}\right)_{L^2_\rho(Q)} - \left(\theta_t, \theta_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&\quad +\varkappa\left(\theta_{tt}, \left(r\theta_r\right)_r\right)_{L^2(Q)} - b\left(r\theta_{tt}, u_{tr}\right)_{L^2_\rho(Q)} \\
&= 0.
\end{aligned} \qquad (2.5.5)$$

En tenant compte de la forme spéciale de U donnée par $(2.5.2)$ et $(2.5.3)$ en utilisant les conditions $(2.1.6)-(2.1.7)$ et intégrant par parties chaque terme de $(2.5.5)$ on obtient

$$\begin{aligned}
-\left(u_{tt},u_{ttt}\right)_{L^2_\rho(Q)} &= -\int_{Q_s} ru_{tt}u_{ttt}drdt \\
&= -\int_s^T\int_\Omega ru_{tt}u_{ttt}drdt \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega \left[ru_{tt}^2\right]_s^T dr \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega ru_{tt}^2\left(r,T\right)\searrow_0 dr+\frac{1}{2}\int_\Omega ru_{tt}^2\left(r,s\right)dr \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega ru_{tt}^2\left(r,s\right)dr \\
&= \frac{1}{2}\left\|u_{tt}\left(r,s\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.5.6}$$

$$\begin{aligned}
a\left(u_{ttt},\left(ru_r\right)_r\right)_{L^2(Q)} &= a\int_{Q_s} u_{ttt}\left(ru_r\right)_r drdt \\
&= a\int_s^T\int_\Omega u_{ttt}\left(ru_r\right)_r drdt \\
&= a\int_s^T \left[ru_ru_{ttt}\right]_{\Omega\searrow_0} dt-a\int_{Q_s} ru_ru_{tttr}drdt \\
&= -a\int_{Q_s} ru_ru_{tttr}drdt \\
&= -a\int_\Omega \left[ru_ru_{ttr}\right]_s^T\searrow_0 dr+a\int_{Q_s} ru_{rt}u_{ttr}drdt \\
&= \frac{1}{2}a\int_\Omega \left[ru_{rt}^2\right]_s^T dr \\
&= \frac{1}{2}a\int_\Omega ru_{rt}^2\left(r,T\right)dr-\frac{1}{2}a\int_\Omega ru_{rt}^2\left(r,s\right)\searrow_0 dr \\
&= \frac{1}{2}a\int_\Omega ru_{rt}^2\left(r,T\right)dr \\
&= \frac{1}{2}a\left\|u_{rt}\left(r,T\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

$$\begin{aligned}
-b\left(r\theta_r, u_{ttt}\right)_{L^2_\rho(Q)} &= -b\int_{Q_s} r^2\theta_r u_{ttt}drdt \\
&= -b\int_s^T\int_\Omega r^2\theta_r u_{ttt}drdt \\
&= -b\int_\Omega\left[r^2\theta_r u_{tt}\right]_s^T \searrow_0 dr + b\int_{Q_s} r^2\theta_{rt}u_{tt}drdt \\
&= b\int_{Q_s} r^2\theta_{rt}u_{tt}drdt \\
&= b\left(r\theta_{rt}, u_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q)},
\end{aligned} \tag{2.5.8}$$

$$\begin{aligned}
-\left(\theta_t, \theta_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q)} &= -\int_{Q_s} r\theta_t\theta_{tt}drdt \\
&= -\int_s^T\int_\Omega r\theta_t\theta_{tt}drdt \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega\left[r\theta_t^2\right]_s^T dr \\
&= -\frac{1}{2}\int_\Omega r\theta_t^2\left(r,T\right)\searrow_0 dr + \frac{1}{2}\int_\Omega r\theta_t^2\left(r,s\right)dr \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega r\theta_t^2\left(r,s\right)dr \\
&= \frac{1}{2}\left\|\theta_t\left(r,s\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

$$\begin{aligned}
\varkappa\left(\theta_{tt}, \left(r\theta_r\right)_r\right)_{L^2(Q)} &= \varkappa\int_{Q_s}\theta_{tt}\left(r\theta_r\right)_r drdt \\
&= \varkappa\int_s^T\int_\Omega\theta_{tt}\left(r\theta_r\right)_r drdt \\
&= \varkappa\int_s^T\left[r\theta_r\theta_{tt}\right]_\Omega \searrow_0 dt - \varkappa\int_{Q_s} r\theta_r\theta_{ttr}drdt \\
&= -\varkappa\int_\Omega\left[r\theta_r\theta_{tr}\right]_s^T \searrow_0 dr + \varkappa\int_{Q_s} r\theta_{rt}^2 drdt \\
&= \varkappa\int_{Q_s} r\theta_{rt}^2 drdt \\
&= \varkappa\left\|\theta_{rt}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)},
\end{aligned} \tag{2.5.10}$$

$$
\begin{aligned}
-b\left(r\theta_{tt},u_{tr}\right)_{L^2_\rho(Q)} &= -b\int_{Q_s} r^2\theta_{tt}u_{tr}drdt \\
&= -b\int_s^T\int_\Omega r^2\theta_{tt}u_{tr}drdt \\
&= -b\int_s^T \left[r^2 u_{tr}\theta_t\right]_\Omega \searrow_0 dt + b\int_{Q_s} r^2 u_{ttr}\theta_t drdt \\
&= b\int_{Q_s} r^2 u_{ttr}\theta_t drdt \\
&= b\int_s^T \left[r^2\theta_t u_{tt}\right]_\Omega \searrow_0 dt - b\int_{Q_s} u_{tt}\left[r^2\theta_{rt}+2r\theta_t\right] drdt \\
&= -b\int_{Q_s} r^2\theta_{rt}u_{tt}drdt - 2b\int_{Q_s} r\theta_t u_{tt}drdt \\
&= -b\left(r\theta_{rt},u_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q_s)} - 2b\left(r\theta_t,u_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q_s)}.
\end{aligned}
\tag{2.5.11}
$$

En combinant les égalités $(2.5.5)-(2.5.11)$; on obtient ;

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u_{tt}(r,s)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{a}{2}\left\|u_{rt}(r,T)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&+b\left(r\theta_{rt},u_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q)} + \frac{1}{2}\left\|\theta_t(r,s)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&+\varkappa\left\|\theta_{rt}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} - b\left(r\theta_{rt},u_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q_s)} - 2b\left(r\theta_t,u_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q_s)} \\
= \;& 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\theta_t(r,s)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|u_{tt}(r,s)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&+\frac{a}{2}\left\|u_{rt}(r,T)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \varkappa\left\|\theta_{rt}\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} \\
= \;& 2b\left(r\theta_t,u_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q_s)}.
\end{aligned}
\tag{2.5.12}
$$

Où $Q_s=\Omega\times[s,T]$, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en écartant les deux derniers termes du membre de gauche de $(2.5.12)$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\left\|\theta_t(r,s)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \left\|u_{tt}(r,s)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
\leq\; & 2b\int_s^T\left(\int_0^1 r\theta_t^2(r,t)\,dr + \int_0^1 ru_{tt}^2(r,t)\,dr\right)dt \\
\leq\; & 2b\left(\left\|\theta_t(r,t)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)} + \left\|u_{tt}(r,t)\right\|^2_{L^2_\rho(Q_s)}\right),
\end{aligned}
\tag{2.5.13}
$$

car on a :

$$\begin{aligned}
2b\left(r\theta_t, u_{tt}\right)_{L^2_\rho(Q_s)} &= 2b\int_{Q_s} r\theta_t u_{tt}drdt \\
&\leq 2b\int_{Q_s}\frac{1}{2}r\left[\theta_t^2\left(r,t\right)+u_{tt}^2\left(r,t\right)\right]drdt \\
&\leq b\int_{Q_s} r\left[\theta_t^2\left(r,t\right)+u_{tt}^2\left(r,t\right)\right]drdt \\
&\leq b\int_s^T\left[\int_\Omega r\theta_t^2\left(r,t\right)dr+\int_\Omega ru_{tt}^2\left(r,t\right)dr\right]dt.
\end{aligned}$$

Si dans $(2.5.13)$ nous mettons

$$Y\left(s\right)=\left\|\theta_t\left(r,s\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\left\|u_{tt}\left(r,s\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},$$

Ensuite nous avons

$$\frac{-dY\left(s\right)}{ds}\leq 2bY\left(s\right),$$

alors de $(2.5.13)$, en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{-dY\left(s\right)}{ds} &\leq 2bY\left(s\right) \\
\frac{-dY\left(s\right)}{Y\left(s\right)} &\leq 2bds \\
\ln Y\left(s\right) &\geq -2bs \\
Y\left(s\right) &\geq \exp\left(-2bs\right) \\
Y\left(s\right)\exp\left(2bs\right) &\geq 1 \\
\frac{-d\left(Y\left(s\right)\exp\left(2bs\right)\right)}{ds} &\leq 0,
\end{aligned} \tag{2.5.14}$$

En intégrant $(2.5.14)$ sur $[s,T]$ et en tenant compte du fait que $Y\left(T\right)=0.$

$$\frac{-d\left(Y\left(s\right)\exp\left(2bs\right)\right)}{ds}=-\frac{dY\left(s\right)}{ds}\exp\left(2bs\right)-2bY\left(s\right)\exp\left(2bs\right),$$

$$
\begin{aligned}
& -\int_s^T \frac{dY(s)}{ds} \exp(2bs)\, dt - 2b \int_s^T Y(s) \exp(2bs)\, dt \\
= \; & -[Y(s) \exp(2bs)]_s^T + 2b \int_s^T Y(s) \exp(2bs)\, dt \\
& -2b \int_s^T Y(s) \exp(2bs)\, dt \\
= \; & -Y(T) \exp(2bT) + Y(s) \exp(2bs) \\
= \; & \exp(2bs)\, Y(s).
\end{aligned}
$$

Alors on obtient :

$$\exp(2bs)\, Y(s) \leq 0. \tag{2.5.15}$$

Par conséquent, l'inégalité $(2.5.15)$ montrait que $W = (\omega_1, \omega_2) = 0$ presque partout dans Q_{T-s_0}. Ainsi en procédant pas à pas on prouve que $W = 0$ presque partout dans Q. ■

Maintenant, nous prouvons le théorème suivant qui donne l'existence d'une solution forte du problème $(2.1.1) - (2.1.7)$.

Théorème 2.2 *Pour tout* $(f, g) \in \left(L_\rho^2(Q)\right)^2$ *et tout* $u_0 \in W_{2,\rho}^1(\Omega)$, $u_1 \in L_\rho^2(Q)$, $\theta_0 \in L_\rho^2(Q)$ *.Il existe une unique solution forte* $U = \overline{A}^{-1}\mathcal{H} = \overline{A^{-1}}\mathcal{H}$ *de le problème* $(2.1.1) - (2.1.7)$ *où* $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \in H$, $\mathcal{H}_1 = \{f, u_0, u_1\}$, $\mathcal{H}_2 = \{g, \theta_0\}$, $U = (u, \theta)$ *et*

$$\|U\|_B \leq C \|AU\|_H.$$

pour une constante positive C indépendante de U.

Preuve. Pour prouvé que le problème $(2.1.1) - (2.1.7)$ a une unique solution forte pour tout $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \in H$, il suffit de prouve que le range de l'opérateur A est dense en H.

Supposons que pour un élément $\Psi = (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2) = (\{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}, \{\omega_2, \omega_5\}) \in R(A)^\perp$.

Alors on a :

$$
\begin{aligned}
(AU, \Psi)_H &= (\{L_1 u, L_2 \theta\}, \{\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2\})_H \\
&= (\{(\mathcal{L}_1 u, \ell_1 u, \ell_2 u), (\mathcal{L}_2 \theta, \ell_3 \theta)\}, \{(\omega_1, \omega_3, \omega_4), (\{\omega_2, \omega_5\})\})_H \\
&= (\mathcal{L}_1 u, \omega_1)_{L_\rho^2(Q)} + (\ell_1 u, \omega_3)_{W_\rho^1(\Omega)} + (\ell_2 u, \omega_4)_{L_\rho^2(\Omega)} + (\mathcal{L}_2 \theta, \omega_2)_{L_\rho^2(\Omega)} + (\ell_3 \theta, \omega_5)_{L_\rho^2(\Omega)} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.5.16}
$$

Nous devons prouver que $\Psi = 0, (\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0)$.

Mettre $U \in D_0(A)$ dans $(2.5.16)$ on a :

$$\left(\mathcal{L}_1 u, \omega_1\right)_{L^2_\rho(Q)} + \left(\mathcal{L}_2 \theta, \omega_2\right)_{L^2_\rho(\Omega)} = 0 \quad \forall U \in D\left(A\right). \tag{2.5.17}$$

implique que : $\omega_1 = \omega_2 = 0$ (d'après la proposition 2.2)
la relation $(2.5.17)$ implique que :

$$\left(\ell_1 u, \omega_3\right)_{W^1_\rho(\Omega)} + \left(\ell_2 u, \omega_4\right)_{L^2_\rho(\Omega)} + \left(\ell_3 \theta, \omega_5\right)_{L^2_\rho(\Omega)} = 0 \quad \forall U \in D\left(A\right). \tag{2.5.18}$$

Nous devons prouver que $\omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$.
comme les trois termes de $(2.5.18)$ s'annulent indépendamment et que les Ranges $R\left(\ell_1\right), R\left(\ell_1\right)$ et $R\left(\ell_1\right)$ des opérateurs de trace ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont respectivement partout denses dans les espaces $W^1_{2,\rho}\left(\Omega\right), L^2_\rho\left(\Omega\right)$ et $L^2_\rho\left(\Omega\right)$ donc il découle de $(2.5.18)$ que $\omega_3 = \omega_4 = \omega_5 = 0$.
Donc $\Psi = 0$; c'est $R\left(A\right)^\perp = \{0\}$ ainsi $\overline{R\left(A\right)} = H$. ■

Chapitre 3

Sur un problème mixte non linéaire pour une équation pseudo-parabolique du second ordre avec condition non locale

Dans ce chapitre nous étudions un problème mixte non local pour une équation pseudo-parabolique du second ordre non linéaire. Nous prouvons l'existence, l'unicité et la dépendance continue d'une solution forte du problème posé. Tout d'abord nous établissons pour le problème linéaire associé une estimation a priori pour la solution de laquelle on déduit l'unicité de la solution forte du problème linéaire posé. Pour l'existence de la solution, on démontre la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.Ensuite, sur la base des résultats du problème linéaire, nous appliquons un processus itératif pour établir l'existence et l'unicité et la dépendance continue de la solution faible du problème non linéaire.

3.1 Position du probléme

Dans le domaine

$$\begin{aligned} D_T &= \Omega \times (0,T) \\ &= \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < l, 0 < t < T\right\}, \end{aligned}$$

Nous considérons l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}\right). \qquad (3.1.1)$$

On associait à l'équation $(3.1.1)$ les conditions initiales

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{3.1.2}$$

Conditions aux limites de Neumann

$$u_x(l,t) = 0, \tag{3.1.3}$$

et la condition intégrale

$$\int_0^l xudx = 0, \tag{3.1.4}$$

avec

$$\frac{\partial u_0(l,t)}{\partial x} = 0, \text{ et } \int_0^l xu_0 dx = 0. \tag{3.1.5}$$

où u_0 et f sont des fonctions données.
on suppose qu'il existe une constante positive d telle que

$$|\, f(x,t,u_1,v_1) - f(x,t,u_2,v_2)| \leq d\left(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|\right). \tag{A}$$

pour tout $(x,t) \in D_T$.
Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section 2, nous commençons d'abord par résoudre le problème linéaire associé à $(3.1.1)-(3.1.4)$ et introduisez également les espaces de fonctionnels utilisés tout au long du chapitre. Ensuite, dans la section 3, nous prouvons l'unicité de la solution du problème linéaire. Dans la section 4, nous montrons l'existence de solutions.
Enfin, dans la section 5, sur la base des résultats du problème linéaire, et en utilisant un processus itératif, nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution du problème non linéaire $(3.1.1)$ $-(3.1.4)$.

3.2 Problème linéaire associé

Pour l'étude du problème posé nous avons besoin de quelques espaces fonctionnels pour étudier le problème mixte non local donné par l'équation

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t). \tag{3.2.1}$$

vérifiant les conditions $(3.1.2)$ $-(3.1.4)$
Pour étudier le problème posé, nous introduisons les espaces fonctionnels nécessaires . Soit $L^2_\rho(\Omega)$ l'espace d' Hilbert avec poids des fonctions définies et de carrée intégrale munie de le produit scalaire:

$$(u,v)_{L^2_\rho(\Omega)} = (xu,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega xu.vdx,$$

et de la norme

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2_\rho(\Omega)} &= \left\|\sqrt{x}u\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &= \left(\int_\Omega x\, u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

Soit X un espace de Banach de norme $\|u\|_X$, et soit $u : (0,T) \to X$ une fonction abstraite. $\|u\,(.,t)\|_X$ est la norme de $u(.,t) \in X$ pour t fixé. Soit $L^2\left(0,\acute{T};X\right)$ l'ensemble de toutes les fonctions abstraites mesurables $u(.,t) : (0,T) \to X$ telles que

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \|u\,(.,t)\|^2_X\, dt < \infty.$$

Si X est un espace d'Hilbert, alors $L^2\left(0,\acute{T};X\right)$ est aussi un espace d'Hilbert. Soit $C\,(0,T;X)$ l'ensemble de toutes les fonctions continues $u : (0,T) \to X$ telles que

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \max_{t\in[0,T]} \|u\,(.,t)\|_X < \infty.$$

et dénotons par $H^1_\rho\,(\Omega)$ l'espace de Sobolev pondéré avec

$$\|u\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} = \|u\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} < \infty.$$

Le problème $(3.2.1), (3.1.2) - (3.1.4)$, peut être considérée comme résolvant l'équation opérateur

$$Lu = (f, u_0)\,,\ \forall u \in D\,(L)\,, \tag{3.2.2}$$

où L est un opérateur donné par $L = (\mathcal{L}, \ell)$,et $D\,(L)$ est le domaine de définition de l'opérateur L; défini par ;

$$D\,(L) = \left\{u \in L^2\left(0,\acute{T};H^1_\rho\,(\Omega)\right) / \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}, \frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} \in L^2\left(0,\acute{T};H^1_\rho\,(\Omega)\right)\right\}$$

satisfaire aux conditions $(3.1.3) - (3.1.4)$.
L est un opérateur défini sur B vers F, où B est un espace de Banach avec la norme associé :

$$\|u\|_B^2 = \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} + \|u\|^2_{C\left(0,T;H^1_\rho(\Omega)\right)} .$$

Les fonctions $u \in B$ sont continues sur $[0,T]$ avec des valeurs dans $H^1_\rho(\Omega)$. D'où la cartographie

$$\ell : u \to \ell u = u(x,0) \in H^1_\rho(\Omega)$$

est définie et continue sur B. Et F est un espace d'Hilbert $L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right) \times H^1_\rho(\Omega)$ muni de la norme

$$\|\mathcal{F}\|_F = (\|f\|^2_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} + \|u_0\|^2_{H^1_\rho(\Omega)})^{\frac{1}{2}},$$

soit $\overline{L}$ la fermeture de l'opérateur L, avec le domaine de définition $D\left(\overline{L}\right)$.

Définition 3.1 *On appelé solution forte du problème* $(3.2.1), (3.1.2) - (3.1.4)$ *,la solution de l'équation d'opérateur*

$$\overline{L}u = \mathcal{F}, \forall u \ \in D\left(\overline{L}\right),$$

on établit la méthode des inégalités de l'énergie pour l'opérateur L, on obtenir une estimation a priori pour l'opérateur $\overline{L}$, Enfin on prouve que le rang $R(L)$ de l'opérateur L est dense dans F.

3.3 L'unicité du problème

Théorème 3.1 *Pour toute fonction* $u \in D(L)$ *on a l'estimation à priori*

$$\|u\|_B \ \le C\|Lu\|_F \ , \tag{3.3.1}$$

où C est une constante positive indépendante de u.

Preuve. D'abord, on observe que $\frac{\partial}{\partial x}\Im_x(f) = f$, et $\frac{\partial}{\partial x}\Im_0(f) = \Im_0^2(f) = 0$,où $\Im_x(f) = \int_0^x f(\xi)\,d\xi$, et $\Im_x^2(\xi f(\xi)) = \Im_x(\Im_\xi(\eta f(\eta)))$.

On prennent le produit scalaire dans $L^2_\rho(\Omega)$ de l'équation $(3.2.1)$ et l'opérateur intégro-différentiel

$$Mu = x\frac{\partial u}{\partial t} - x\Im_x^2(\xi u),$$

$$\begin{aligned}
(Lu, Mu)_{L^2_\rho(\Omega)} &= \left(\frac{\partial u}{\partial t}, x\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{L^2_\rho(\Omega)} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}, x\Im_x^2(\xi u)\right)_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&\quad - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x}), x\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x}), x\Im_x^2(\xi u)\right)_{L^2(\Omega)} \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x}), x\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x}), x\Im_x^2(\xi u)\right)_{L^2(\Omega)} \\
&= \left(f(x,t), x\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{L^2_\rho(\Omega)} - \left(f(x,t), x\Im_x^2(\xi u)\right)_{L^2_\rho(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Puis en intégrant sur $(0,\tau)$, avec $0 \leq \tau \leq T$, avec $\Im_x(f)$ coïncide avec $\Im_x^1(f)$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt - \int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial u}{\partial t}\Im_x^2(\xi u)\,dxdt \\
&- \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x})dxdt + \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x})\Im_x^2(\xi u)\,dxdt \\
&- \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x})dxdt + \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x})\Im_x^2(\xi u)\,dxdt \\
= &\int_0^\tau\int_0^l xf(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt - \int_0^\tau\int_0^l xf(x,t)\Im_x^2(\xi u)\,dxdt.
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

En utilisant les conditions $(3.1.2)-(3.1.4)$,et intégration par parties,on a :

$$\begin{aligned}
-\int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial u}{\partial t}\Im_x^2(\xi u)\,dxdt &= -\int_0^\tau \left[x\Im_x\left(\xi\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Im_x^2(\xi u)\right]_0^l \searrow_0 dt \\
&\quad + \int_0^\tau\int_0^l \Im_x\left(\xi\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Im_x(\xi u)\,dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l \left[(\Im_x(\xi u))^2\right]_0^\tau dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(\xi u(.,\tau)))^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^l (\Im_x(\xi u_0))^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\|\Im_x(\xi u(.,\tau))\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{2}\|\Im_x(\xi u_0)\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

$$
\begin{aligned}
-\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x})dxdt &= -\int_0^\tau\left[x\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^l \searrow_0 dt + \int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}dxdt \\
&= \int_0^l\left[x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_0^\tau dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l x\frac{\partial^2 u\left(.,\tau\right)}{\partial x^2}dx - \frac{1}{2}\int_0^l x\frac{\partial^2 u\left(.,0\right)}{\partial x^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u\left(.,\tau\right)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} - \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|_{L^2_\rho(\Omega)},
\end{aligned}
\tag{3.3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x})\Im^2_x\left(\xi u\right)dxdt &= \int_0^\tau\left[x\frac{\partial u}{\partial x}\Im^2_x\left(\xi u\right)\right]_0^l \searrow_0 dt \\
&\quad -\int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial u}{\partial x}\Im_x\left(\xi u\right)dxdt \\
&= -\int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial u}{\partial x}\Im_x\left(\xi u\right)dxdt,
\end{aligned}
\tag{3.3.5}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x})dxdt &= -\int_0^\tau\left[\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(x\frac{\partial u}{\partial x})\right]_0^l \searrow_0 dt \\
&\quad +\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial}{\partial t}(x\frac{\partial u}{\partial x})dxdt \\
&= \int_0^l\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^\tau \searrow_0 dx - \int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial x}dxdt \\
&= -\int_0^l\left[x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^\tau \searrow_0 dx + \int_0^\tau\int_0^l x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)^2 dxdt \\
&= \int_0^\tau\left\|\frac{\partial^2 u\left(.,t\right)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt,
\end{aligned}
\tag{3.3.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial t\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x})\Im^2_x\left(\xi u\right)dxdt &= \int_0^\tau\left[\frac{\partial}{\partial t}(x\frac{\partial u}{\partial x})\Im^2_x\left(\xi u\right)\right]_0^l \searrow_0 dt \\
&\quad -\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}(x\frac{\partial u}{\partial x})\Im_x\left(\xi u\right)dxdt \\
&= -\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}(x\frac{\partial u}{\partial x})\Im_x\left(\xi u\right)dxdt.
\end{aligned}
\tag{3.3.7}
$$

substitution de $(3.3.3)-(3.3.7)$ dans $(3.3.2)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \left\| \frac{\partial u\left(.,t\right)}{\partial t} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{1}{2} \left\| \Im_x\left(\xi u(.,\tau)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& -\frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi u_0\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\| \frac{\partial u\left(.,\tau\right)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& -\frac{1}{2}\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|_{L^2_\rho(\Omega)} - \int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial u}{\partial x}\Im_x\left(\xi u\right)dxdt \\
& +\int_0^\tau \left\| \frac{\partial^2 u\left(.,\tau\right)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt - \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial}{\partial t}(x\frac{\partial u}{\partial x})\Im_x\left(\xi u\right)dxdt \\
= & \int_0^\tau\int_0^l xf(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt - \int_0^\tau\int_0^l xf(x,t)\Im_x^2\left(\xi u\right)dxdt,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^\tau \left\| \frac{\partial u\left(.,t\right)}{\partial t} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\left\| \frac{\partial u\left(.,\tau\right)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
& +\int_0^\tau \left\| \frac{\partial^2 u\left(.,\tau\right)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\left\| \Im_x\left(\xi u(.,\tau)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
= & \frac{1}{2}\left\| \frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi u_0\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
& + \int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial u}{\partial x}\Im_x\left(\xi u\right)dxdt + \int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\Im_x\left(\xi u\right)dxdt \\
& + \int_0^\tau\int_0^l xf(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt - \int_0^\tau\int_0^l xf(x,t)\Im_x^2\left(\xi u\right)dxdt,
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

En vertu des inégalités élémentaires

$$\begin{aligned}
\int_0^l (\Im_x\left(\xi u\right))^2 dx & \leq \frac{l^3}{2}\left\| u(.,t)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}, \\
\int_0^l (\Im_x^2\left(\xi u\right))^2 dx & \leq \frac{l^2}{2}\left\| \Im_x\left(\xi u\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}, \\
\int_0^l x(\Im_x\left(\xi u\right))^2 dx & \leq l\left\| \Im_x\left(\xi u\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

et en utilisant l'inégalité de Cauchy avec ε, nous estimons les quatres derniers termes du côté droit de $(3.3.8)$ comme suit

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial u}{\partial x}\Im_x(\xi u)\,dxdt &\le \frac{\varepsilon_1}{2}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt \\ &+\frac{1}{2\varepsilon_1}\int_0^\tau\|\Im_x(\xi u(.,t))\|^2_{L^2(\Omega)}dt \\ &\le \frac{\varepsilon_1}{2}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt \\ &+\frac{l}{2\varepsilon_1}\int_0^\tau\|\Im_x(\xi u(.,t))\|^2_{L^2(\Omega)}dt,\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\Im_x(\xi u)\,dxdt &\le \frac{\varepsilon_2}{2}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial^2 u(.,t)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt \\ &+\frac{1}{2\varepsilon_2}\int_0^\tau\|\Im_x(\xi u(.,t))\|^2_{L^2(\Omega)}dt \\ &\le \frac{\varepsilon_2}{2}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial^2 u(.,t)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt \\ &+\frac{l}{2\varepsilon_2}\int_0^\tau\|\Im_x(\xi u(.,t))\|^2_{L^2(\Omega)}dt,\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

$$\int_0^\tau\int_0^l xf(x,t)\frac{\partial u}{\partial t}dxdt \le \frac{\varepsilon_3}{2}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt+\frac{1}{2\varepsilon_3}\int_0^\tau\|f(.,t)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt, \tag{3.3.12}$$

$$\begin{aligned}-\int_0^\tau\int_0^l xf(x,t)\Im_x^2(\xi u)\,dxdt &\le \frac{1}{2\varepsilon_4}\int_0^\tau\|f(.,t)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt \\ &+\frac{\varepsilon_4}{4}\int_0^\tau\|\Im_x(\xi u(.,t))\|^2_{L^2(\Omega)}dt \\ &\le \frac{1}{2\varepsilon_4}\int_0^\tau\|f(.,t)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt+ \\ &\frac{l^3\varepsilon_4}{4}\int_0^\tau\|\Im_x(\xi u(.,t))\|^2_{L^2(\Omega)}dt.\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

En prenant $\varepsilon_1=\varepsilon_3=\varepsilon_4=1, \varepsilon_2=2$, et en combinant $(3.3.8)$ et $(3.3.10)-(3.3.13)$, on obtient :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\ &+\int_0^\tau\left\|\frac{\partial^2 u(.,\tau)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt+\frac{1}{2}\|\Im_x(\xi u(.,\tau))\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \le\ &\frac{1}{2}\int_0^\tau\left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt++\int_0^\tau\left\|\frac{\partial^2 u(.,t)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt \\ &+\left(\frac{3l}{4}+\frac{l^3}{4}\right)\int_0^\tau\|\Im_x(\xi u(.,t))\|^2_{L^2(\Omega)}dt+\int_0^\tau\|f(.,t)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}dt,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi u(.,\tau)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad (3.3.14)\\
\leq\ & \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi u_0\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \int_0^\tau \left\|f(.,t)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt\\
&+\left(\frac{l^3}{4}+\frac{3l}{4}\right)\int_0^\tau \left\|\Im_x\left(\xi u(.,t)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$

il est facile de vérifier que :

$$\frac{1}{4}\left\|u(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \leq \frac{1}{4}\left\|u_0\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{4}\int_0^\tau \left\|u(.,t)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{1}{4}\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt, \qquad (3.3.15)$$

en ajoutant l'inégalité (3.3.15) à (3.3.14) côté à côté, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\\
&+\frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi u(.,\tau)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{4}\left\|u(.,\tau)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\\
\leq\ & \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u_0}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi u_0\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+\frac{1}{2}\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \int_0^\tau \left\|f(.,t)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt\\
&+\left(\frac{l^3}{4}+\frac{3l}{4}\right)\int_0^\tau \left\|\Im_x\left(\xi u(.,t)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{4}\left\|u_0\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\\
&+\frac{1}{4}\int_0^\tau \left\|u(.,t)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{1}{4}\int_0^\tau \left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$

et en utilisant la première inégalité de (3.3.9) et

$$\left\|u\right\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} = \left\|u\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} + \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
&\left\|\Im_x\left(\xi u(.,\tau)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} + \left\|u(.,\tau)\right\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} + \int_0^\tau \left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt \qquad (3.3.16)\\
\leq\ & c\begin{pmatrix} \int_0^\tau \left\|\Im_x\left(\xi u(.,t)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^\tau \left\|u(.,t)\right\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} dt \\ +\left\|u_0\right\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} + \int_0^\tau \left\|f(.,t)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où

$$c = \max\left\{3l + l^3, 4\right\}.$$

Maintenant, En appliquant le lemme de Gronwall à l'inégalité (3.3.16), nous mettons

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}, \\ f_2(\tau) &= \|\Im_x(\xi u(.,\tau))\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(.,\tau)\|^2_{H^1_\rho(\Omega)}, \end{aligned}$$

et

$$f_3(\tau) = c\left(\|u_0\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} + \int_0^\tau \|f(.,t)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt\right).$$

Alors (3.3.16) devient

$$\begin{aligned} &\|\Im_x(\xi u(.,\tau))\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u(.,\tau)\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} + \int_0^\tau \left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt \\ \leq\ & ce^{c\tau}\left(\|u_0\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} + \int_0^\tau \|f(.,t)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt\right). \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Si nous écartons le premier terme du côté gauche de (3.3.17), et puisque la côté droite de (3.3.17) ne dépend pas de τ, en prenant la borne supérieure du coté gauche par rapport à τ sur l'intervalle $[0, T]$.
Alors l'estimation devient

$$\begin{aligned} &\|u(.,\tau)\|^2_{C(0,T;H^1_\rho(\Omega))} + \left\|\frac{\partial u(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} \\ \leq\ & C\left(\|u_0\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} + \int_0^\tau \|f(.,t)\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt\right). \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

où $C = \sqrt{ce^{c\tau}}$.
Puisque nous n'avons aucune information concernant l'image de l'opérateur L, sauf que $R(L) \subset F$, il faut prolonger L pour que l'estimation (3.3.18) est valable pour l'extension et que son image soit toute l'espace F. Alors on établisse la proposition suivante . ■

Proposition 3.1 *L'opérateur $L : E \to F$ admet une fermeture $\overline{L}$.*
Preuve. *Soit $u_n \in D(L)$ est une suite telle que*

$$u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } B, \tag{3.3.19}$$

et

$$L\, u_n \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} \mathcal{F} = (f, u_0) \text{ dans } F. \tag{3.3.20}$$

alors il faut montrer que $f \equiv 0, u_0 \equiv 0.$
Puisque $(3.3.19)$ *est verifié, on a :*

$$u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } D'(\Omega), \tag{3.3.21}$$

où $D'(\Omega)$ *est l'espace de distribution sur* Ω.
D'après la continuité de la dérivation de $D'(\Omega)$ *dans* $D'(\Omega)$, $(3.3.21)$ *implique que :*

$$\mathcal{L}u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } D'(\Omega). \tag{3.3.22}$$

Selon $(3.3.20)$, *on a*

$$\mathcal{L}u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } L^2_\rho(\Omega). \tag{3.3.23}$$

Puis

$$\mathcal{L}u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} f \text{ dans } D'(\Omega). \tag{3.3.24}$$

D'après l'unicité de la limite dans $D'(\Omega)$ *,on conclut que* $f \equiv 0$.
Selon $(3.3.20)$, *on conclut également que :*

$$\ell u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} u_0 \text{ dans } H^1_\rho(\Omega). \tag{3.3.25}$$

d'après l'injection canonique de $H^1_\rho(\Omega)$ *dans* $D'(\Omega)$ *est continue, on déduit que :*

$$\ell u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} u_0 \text{ dans } D'(\Omega). \tag{3.3.26}$$

de plus, puisque $(3.3.19)$ *est vérifié et*

$$\|\ell u_n\|_{W^1_\rho(\Omega)} \leq \|u_n\|_B \quad \forall n, \tag{3.3.27}$$

On a

$$\ell u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } H^1_\rho(\Omega). \tag{3.3.28}$$

par conséquence,

$$\ell u_n \underset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0 \text{ dans } D'(\Omega). \tag{3.3.29}$$

d'après l'unicité de la limite dans $D'(\Omega)$, *on conclut de* $(3.3.26)$ *et* $(3.3.29)$ *que* $u_0 \equiv 0$.*Cela prouve la proposition .*
Puisque les points du graphe de l'opérateur $\overline{L}$ *sont des limites de séquence des points du graphe de* L, *puis on prend la limite en* $(3.1.1)$ *pour obtenir une estimation a priori pour l'opérateur* $\overline{L}$, *c'est*

$$\|u\|_B \leq c \left\|\overline{L}u\right\|_F \quad \forall u \in D\left(\overline{L}\right), \tag{3.3.30}$$

à partir de laquelle on conclue les résultats. ■

Corollaire 3.1 *La solution forte du problème* $(3.2.1), (3.1.2) - (3.1.4)$ *est unique et dépend continûement des données* $(f, u_0) \in F$.

Corollaire 3.2 *L'image* $R\left(\overline{L}\right)$ *de l'opérateur* $\overline{L}$ *est fermée dans* F *et égal à la fermeture* $\overline{R\left(L\right)}$ *de* $R\left(L\right)$, *c'est-à-dire :*

$$R\left(\overline{L}\right) = \overline{R\left(L\right)}.$$

Preuve. Montrons d'abord que $R\left(\overline{L}\right)$ est fermé.
Soit $\mathcal{F} \in \overline{R\left(\overline{L}\right)}$, alors il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D\left(\overline{L}\right)$ telque $\overline{L}u_n \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{F}$ dans F, puisque $(3.3.30)$ signifie que

$$\|u_n\|_B \leq c\left\|\overline{L}u_n\right\|_F \ , \ \forall n$$

Alors on déduit que la convergence de $\overline{L}u_n$ dans F implique la convergence de u_n dans B; dison

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} u \text{ dans } B,$$

puisque $\overline{L}$ est fermé, (u_n) est une suite dans $D\left(\overline{L}\right)$ et

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} u \text{ dans } B,$$

$$\overline{L}u_n \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{F} \ \text{ dans } F,$$

alors $u \in D\left(\overline{L}\right)$ et $\overline{L}u = \mathcal{F}$, c'est $\mathcal{F} \in R\left(\overline{L}\right)$.
ainsi, $R\left(\overline{L}\right)$ est fermé dans F.
Maintenant, nous prouvons que $R\left(\overline{L}\right) = \overline{R\left(L\right)}$.
puisque $\overline{L}$ est une extension de L; alors $\Gamma\left(L\right) \subseteq \Gamma\left(\overline{L}\right)$; où $\Gamma\left(L\right)$ est le graphe de L, $\Gamma\left(L\right) = \left\{(u, Lu); u \in D\left(L\right)\right\}$; ainsi,

$$R\left(L\right) \subseteq R\left(\overline{L}\right),$$

ce qui implique

$$\overline{R\left(L\right)} \subseteq \overline{R\left(\overline{L}\right)},$$

mais $R\left(\overline{L}\right)$ est fermé, ainsi

$$\overline{R\left(L\right)} \subseteq R\left(\overline{L}\right),$$

D'autre part, soit $\mathcal{F} \in R\left(\overline{L}\right)$, c'est-à-dire $\mathcal{F} = \overline{L}U$; pour certains $u \in D\left(\overline{L}\right)$ alors $(u, \mathcal{F}) \in \Gamma\left(\overline{L}\right) = \overline{\Gamma(L)}$, c'est-à-dire qu' il existe une suite $(u_n, Lu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\Gamma(L)$ tel que

$$(u_n, Lu_n) \underset{n\to\infty}{\to} (u, \mathcal{F}) \text{ dans } B \times F$$

C'est,

$$\|(u_n, Au_n) - (u, \mathcal{F})\|^2_{B\times F} = \|u_n - u\|^2_B + \|Lu_n - \mathcal{F}\|^2_F \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

ainsi, $Lu_n \underset{n\to\infty}{\to} \mathcal{F}$ dans F, mais $u_n \in D(L), \forall n$, ensuite nous avons $\mathcal{F} \in \overline{R(L)}$,et donc $R\left(\overline{L}\right) \subseteq \overline{R(L)}$. ■

3.4 La solvabilité du problème

Théorème 3.2 *Le problème* $(3.2.1), (3.1.2)-(3.1.4)$, *admet une solution forte unique* $u = L^{-1}(f, u_0) = \overline{L^{-1}}(f, u_0)$, *qui dépend continûment des données, pour tout* $f \in L^2\left(0, T; L^2_\rho(\Omega)\right)$, *et* $u_0 \in H^1_\rho(\Omega)$.

Preuve. D'après le corollaire 3.2 , on en déduit que pour prouver l'existence de la solution forte, il suffit de montrer que $\overline{R(L)} = F$, c'est-à-dire en fin compte d'établir la proposition suivante ■

Proposition 3.2 *soit* $D_\circ(L)$ *l'ensemble de toutes les fonctions* $u \in D(L)$ *s'évanouissant au voisinage de* $t = 0$. *Si pour* $g \in L^2\left(0, T; L^2_\rho(\Omega)\right)$ *et pour tous* $u \in D_\circ(L)$ *,*

on a :

$$(\mathcal{L}u, g)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} = 0, \tag{3.4.1}$$

Alors la fonction g s'évanouit presque partout dans D_T.

Preuve. On définit la fonction $\varphi(x,t)$ par :

$$\varphi(x,t) = \int_t^T g(x, \upsilon)\, d\upsilon. \tag{3.4.2}$$

soit $\frac{\partial u}{\partial t}$ la solution de l'équation

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Im^2_x(\xi u) = \varphi(x,t). \tag{3.4.3}$$

et soit

$$u = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \upsilon, \\ \int_\upsilon^t \frac{\partial u}{\partial \tau} d\tau, & \upsilon \leq t \leq T. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

De $(3.4.2)$ et $(3.4.3)$, on a :

$$g(x,t) = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Im_x^2(\xi u_t), \tag{3.4.5}$$

Nous avons les résultats suivants : ■

Lemme 3.1 *La fonction $g(x,t)$ défini par $(3.4.5)$ est dans $g \in L^2\left(0,T;L_\rho^2(\Omega)\right)$.*

Preuve. *on utilise ρ_ε de la forme*

$$(\rho_\varepsilon u)(x,t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} W\left(\frac{\upsilon - t}{\varepsilon}\right) u(x,\upsilon)\,d\upsilon,$$

où

$$W \in C_0^\infty(0,T), W(t) \geq 0,$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W(t)\,dt = 1.$$

On applique l'opérateur ρ_ε et $\frac{\partial}{\partial t}$ à l' équation $(3.4.3)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Im_x^2(\xi u)\right) \\
= \; &\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Im_x^2(\xi u)\right) - \rho_\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Im_x^2(\xi u)\right)\right\} \\
&+\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \varphi.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Im_x^2(\xi u)\right)\right\|^2_{L^2\left(0,T;L_\rho^2(\Omega)\right)} \\
\leq \; & 2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Im_x^2(\xi u)\right) - \rho_\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Im_x^2(\xi u)\right)\right\}\right\|^2_{L^2\left(0,T;L_\rho^2(\Omega)\right)} \\
&+2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \varphi\right\|^2_{L^2\left(0,T;L_\rho^2(\Omega)\right)}.
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de l'opérateur ρ_ε, on obtient :

$$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Im_x^2(\xi u)\right)\right\|^2_{L^2\left(0,T;L_\rho^2(\Omega)\right)} \leq 2\left\|\frac{\partial}{\partial t}\rho_\varepsilon \varphi\right\|^2_{L^2\left(0,T;L_\rho^2(\Omega)\right)},$$

puisque $\rho_\varepsilon s \longrightarrow s$ comme $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $L^2\left(0,T;L_\rho^2(\Omega)\right)$,et$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \Im_x^2(\xi u)\right)\right\|^2_{L^2\left(0,T;L_\rho^2(\Omega)\right)}$ est borné,on conclue que $g \in L^2\left(0,T;L_\rho^2(\Omega)\right)$.

Puis on remplaçant $g(x,t)$ *dans* $(3.4.1)$ *par sa représentation* $(3.4.5)$ *; on obtient :*

$$\begin{aligned}
&-\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} \\
&+\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}-\left(\frac{\partial u}{\partial t},\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} \\
&+\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right),\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}+\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right),\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} \\
=\;& 0.
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

les condition $(3.1.3)$ *et* $(3.1.4)$, *la forme spéciale du* u *donnée par* $(3.4.3)$*et* $(3.4.4)$ *et une intégration par parties pour chaque terme de* $(3.4.6)$ *donne ;*

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} &= -\int_\upsilon^T\int_0^l x\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^l\left[x\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]_\upsilon^T dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^l\left(x\frac{\partial u(x,T)}{\partial t}\right)^2 dx \searrow_0 +\frac{1}{2}\int_0^l\left(x\frac{\partial u(x,\upsilon)}{\partial t}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u(x,\upsilon)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} &= \int_\upsilon^T\int_0^l\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dxdt \\
&= \int_\upsilon^T\left[x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]_0^l \searrow_0 dt-\int_\upsilon^T\int_0^l x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}dxdt \\
&= -\int_0^l\left[x\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right]_\upsilon^T \searrow_0 dt+\int_\upsilon^T\int_0^l x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)^2 dxdt \\
&= \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)},
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right),\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} &= \int_\upsilon^T\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}dxdt \\
&= \int_\upsilon^T\left[x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right]_0^l \searrow_0 dt-\int_\upsilon^T\int_0^l x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2}dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^l\left[x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)^2\right]_\upsilon^T dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^l x\left(\frac{\partial^2 u(x,T)}{\partial x\partial t}\right)^2\searrow_0 dx+\frac{1}{2}\int_0^l x\left(\frac{\partial^2 u(x,\upsilon)}{\partial x\partial t}\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 u\left(x,\upsilon\right)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

$$\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial u}{\partial t},\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} &= -\int_\upsilon^T\int_0^l\frac{\partial u}{\partial t}\Im_x^2\left(\xi u_t\right)dxdt \\
&= -\int_\upsilon^T\left[\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\Im_x\left(\xi u_t\right)\right]_0^l\searrow_0 dx+\int_\upsilon^T\int_0^l\left[\Im_x\left(\xi u_t\right)\right]^2 dxdt \\
&= \left\|\Im_x\left(\xi u_t\right)\right\|^2_{L^2(\upsilon,T;L^2(\Omega))},
\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right),\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} &= \int_\upsilon^T\int_0^l\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Im_x^2\left(\xi u_t\right)dxdt \\
&= \int_\upsilon^T\left[x\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^l\searrow 0dt-\int_\upsilon^T\int_0^l x\frac{\partial u}{\partial x}\Im_x\left(\xi u_t\right)dxdt \\
&= -\left(\frac{\partial u}{\partial x},\Im_x\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)},
\end{aligned} \tag{3.4.11}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right),\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} &= \int_\upsilon^T\int_0^l\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Im_x^2\left(\xi u_t\right)dxdt \\
&= \int_\upsilon^T\left[\Im_x^2\left(\xi u_t\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]_0^l\searrow_0 dt \\
&\quad -\int_\upsilon^T\int_0^l\frac{\partial}{\partial t}\left(x\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Im_x\left(\xi u_t\right)dxdt \\
&= -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\Im_x\left(\xi u_t\right)\right)_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}.
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Maintenant, en combinant l'égalité $(3.4.7)-(3.4.12)$ *et* $(3.4.6)$,*on a*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial u(x,\upsilon)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} \\
&+\frac{1}{2}\left\|\frac{\partial^2 u(x,\upsilon)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\left\|\Im_x(\xi u_t)\right\|^2_{L^2(\upsilon,T;L^2(\Omega))} \\
=\;&\left(\frac{\partial u}{\partial x},\Im_x(\xi u_t)\right)_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\Im_x(\xi u_t)\right)_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}.
\end{aligned} \tag{3.4.13}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy avec ε *au côté droit de* $(3.4.13)$, *on trouve*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x},\Im_x(\xi u_t)\right)_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}\leq\frac{l}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}+\frac{1}{2}\left\|\Im_x(\xi u_t)\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}, \tag{3.4.14}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t},\Im_x(\xi u_t)\right)_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}\leq\frac{l}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}+\frac{1}{2}\left\|\Im_x(\xi u_t)\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}. \tag{3.4.15}$$

En insérant $(3.4.14)$ *et* $(3.4.15)$ *dans* $(3.4.13)$

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial u(x,\upsilon)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} \\
&+\left\|\frac{\partial^2 u(x,\upsilon)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+2\left\|\Im_x(\xi u_t)\right\|^2_{L^2(\upsilon,T;L^2(\Omega))} \\
\leq\;& l\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}+\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}\right) \\
&+2\left\|\Im_x(\xi u_t)\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial u(x,\upsilon)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\left\|\frac{\partial^2 u(x,\upsilon)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} \\
\leq\;& l\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}\right).
\end{aligned} \tag{3.4.16}$$

Et en appliquant l'inégalité de Poincaré

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}\leq 24T^2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}.$$

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{\partial u(x,\upsilon)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\left\|\frac{\partial^2 u(x,\upsilon)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} \\
\leq\;& l\left(\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}+24T^2\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2\left(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}\right).
\end{aligned}$$

Et en omettant le troisième terme du côté gauche de l'inégalité (3.4.16), *on obtient*

$$\left\|\frac{\partial u(x,\upsilon)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\left\|\frac{\partial^2 u(x,\upsilon)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}\leq l(1+24T^2)\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2(\upsilon,T;L^2_\rho(\Omega))}. \tag{3.4.17}$$

Si l'on note l'intégrale du côté droit de (3.4.17) *par*

$$\theta(\upsilon)=\left\|\frac{\partial u(x,\upsilon)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}+\left\|\frac{\partial^2 u(x,\upsilon)}{\partial x\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)}.$$

Ensuite, nous avons

$$\begin{gathered}-\frac{d\theta(\upsilon)}{d\upsilon}\leq l\left(1+24T^2\right)\theta(\upsilon),\\ -\frac{d\theta(\upsilon)}{\theta(\upsilon)}\leq l\left(1+24T^2\right)d\upsilon,\\ \ln\theta(\upsilon)\geq -l\left(1+24T^2\right)\upsilon,\\ \theta(\upsilon)\geq\exp\left(-l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right),\\ -\frac{d}{d\upsilon}\left(\theta(\upsilon)\exp\left(l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right)\right)\leq 0.\end{gathered} \tag{3.4.18}$$

En tenant compte du fait que $\theta(T)=0$ *,une intégration de* (3.4.18) *par rapport à* υ *sur* $[\upsilon,T]$ *donne*

$$\begin{aligned}-\frac{d}{d\upsilon}\left(\theta(\upsilon)\exp\left(l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right)\right) &= -\frac{d\theta(\upsilon)}{d\upsilon}\exp\left(l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right)\\ &\quad -l\left(1+24T^2\right)\theta(\upsilon)\exp\left(l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\int_\upsilon^T\frac{d\theta(\upsilon)}{d\upsilon}\exp\left(l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right)-l\left(1+24T^2\right)\int_\upsilon^T\theta(\upsilon)\exp\left(l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right)\\ =&-\left[\theta(\upsilon)\exp\left(l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right)\right]_\upsilon^T+l\left(1+24T^2\right)\int_\upsilon^T\theta(\upsilon)\exp\left(l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right)\\ &-l\left(1+24T^2\right)\int_\upsilon^T\theta(\upsilon)\exp\left(l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right)\\ =&\ \theta(\upsilon)\exp\left(l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\theta(\upsilon)\exp\left(l\left(1+24T^2\right)\upsilon\right)\leq 0. \tag{3.4.19}$$

Il découle de l'inégalité (3.4.19) *que* $g=0$ *presque partout sur* $D_{T-\upsilon}=\Omega\times[T-\upsilon,T]$. *Puisque la longueur* υ *est indépendante de l'origine, nous utilisons la même procédure pour montrer que* $g=0$ *dans* D_T *.Ceci complète la preuve de la proposition* 3.2.

Pour compléter la preuve du théorème 3.2*, nous supposons que pour un élément* $G=(g,g_0)\in R(L)^\perp$ *.tel que*

$$(\mathcal{L}u,g)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)}+(\ell u,g_0)_{H^1_\rho(\Omega)}=0. \tag{3.4.20}$$

Nous devons prouver que $G = 0$,*posons* $u \in D_\circ(L)$ *dans l'équation* $(3.4.20)$, *nous obtenons*

$$(\mathcal{L}u, g)_{L^2\left(0,T;L^2_\rho(\Omega)\right)} = 0, \quad u \in D_0(L). \tag{3.4.21}$$

D'après la proposition 3.2, *on en déduit que* $g = 0$.*Ainsi, l'équation* $(3.4.20)$ *devient*

$$(\ell u, g_0)_{H^1_\rho(\Omega)} = 0. \tag{3.4.22}$$

Mais comme l'ensemble $R(\ell)$ *est dense l'espace* $H^1_\rho(\Omega)$, *et la relation* $(3.4.22)$ *implique que* $g_0 = 0$. *Par conséquent* $G = 0$.*Ceci complète la démonstration du théorème* 3.2. ■

3.5 Problème non linéaire

Cette section est consacrée à la preuve de l'existence, l'unicité, et de la dépendance continue de la solution aux données du problème $(3.1.1) - (3.1.4)$.
Considérons maintenant le problème auxiliaire suivant avec l'équation homogène :

$$\mathcal{L}U = \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(x\frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0, \tag{3.5.1}$$

$$\ell U = U(x,0) = u_0(x), \tag{3.5.2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(l,t) = 0, \tag{3.5.3}$$

$$\int_0^l xU dx = 0. \tag{3.5.4}$$

Si u est la solution du problème $(3.1.1) - (3.1.4)$ et U est la solution du problème $(3.5.1) - (3.5.4)$, alors $\omega = u - U$ satisfaisant

$$\mathcal{L}\omega = \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) - \frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(x\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = F\left(x,t,\omega,\frac{\partial \omega}{\partial x}\right), \tag{3.5.5}$$

$$\omega(x,0) = 0, \tag{3.5.6}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(l,t) = 0, \tag{3.5.7}$$

$$\int_0^l x\omega dx = 0. \tag{3.5.8}$$

où

$$F\left(x,t,\omega,\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = f\left(x,t,\omega + U,\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

La fonction F satisfaisant la condition

$$|F(x,t,u_1,\upsilon_1) - F(x,t,u_2,\upsilon_2)| \leq d\left(|u_1 - u_2| + |\upsilon_1 - \upsilon_2|\right). \tag{B}$$

pour tout (x,t) dans D_T.

D'après le théorème 3.2 le problème $(3.5.1) - (3.5.4)$ admet une solution unique dépendant continûment de $u_0 \in H^1_\rho(\Omega)$.
Il reste à résoudre le problème $(3.5.5)-(3.5.8)$. Donc nous allons prouver que le problème $(3.5.5)-(3.5.8)$ admet une solution faible unique.
Soit

$$\widetilde{C}^1(D_T) = \left\{\upsilon \in C^1(D_T), \text{ tel que } \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial t \partial x} \in C(D_T)\right\}.$$

Supposons que $\upsilon, \omega \in C^1(D_T)$ tel que :

$$\upsilon(x,T) = 0,$$

$$\omega(x,0) = 0,$$

$$\int_0^l x\upsilon dx = \int_0^l x\omega dx = 0.$$

Pour tout $\upsilon \in \widetilde{C}^1(D_T)$, nous avons

$$\begin{aligned} -\left(\mathcal{L}\omega, \Im_x(\xi\upsilon)\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} &= -\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}, \Im_x(\xi\upsilon)\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial \omega}{\partial x}\right), \Im_x(\xi\upsilon)\right)_{L^2(D_T)} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(x\frac{\partial \omega}{\partial x}\right), \Im_x(\xi\upsilon)\right)_{L^2(D_T)}. \end{aligned} \tag{3.5.9}$$

On considére séparément les intégrales de chaque terme à droite et à gauche de l'égalité $(3.5.9)$.
En intégrant par parties et en prenant en compte les conditions sur ω et υ :

$$\begin{aligned} -\left(\mathcal{L}\omega, \Im_x(\xi\upsilon)\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} &= -\int_0^T \int_0^l F\Im_x(\xi\upsilon)\, dxdt \\ &= -\int_0^T \left[\Im_x(\xi F)\Im_x(\xi\upsilon)\right]_0^l \searrow_0 dt + \int_0^T \int_0^l \upsilon \Im_x(\xi F)\, dxdt \\ &= \left(\upsilon, \Im_x(\xi F)\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))}, \end{aligned} \tag{3.5.10}$$

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}, \Im_x(\xi\upsilon)\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} &= -\int_0^T\int_0^l \frac{\partial\omega}{\partial t}\Im_x(\xi\upsilon)\,dxdt \\ &= -\int_0^T\left[\Im_x\left(\xi\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\Im_x(\xi\upsilon)\right]_0^l \searrow_0 dt + \int_0^T\int_0^l \upsilon\Im_x\left(\xi\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)dxdt \\ &= \int_0^l\left[\upsilon\Im_x\left(\xi\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)\right]_0^T \searrow_0 dx - \int_0^T\int_0^l \frac{\partial\upsilon}{\partial t}\Im_x(\xi\omega)\,dxdt \\ &= -\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}, \Im_x(\xi\omega)\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))}, \end{aligned} \tag{3.5.11}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}\right), \Im_x(\xi\upsilon)\right)_{L^2(D_T)} &= \int_0^T\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\Im_x(\xi\upsilon)\,dxdt \\ &= \int_0^T\left[x\Im_x(\xi\upsilon)\frac{\partial\omega}{\partial x}\right]_0^l \searrow_0 dt - \int_0^T\int_0^l x\frac{\partial\omega}{\partial x}\upsilon dxdt \\ &= -\int_0^T\int_0^l x\frac{\partial\omega}{\partial x}\upsilon dxdt \\ &= -\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}, \upsilon\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))}, \end{aligned} \tag{3.5.12}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}\right), \Im_x(\xi\upsilon)\right)_{L^2(D_T)} &= \int_0^T\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\Im_x(\xi\upsilon)\,dxdt \\ &= \int_0^T\left[\Im_x(\xi\upsilon)\frac{\partial}{\partial t}\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\right]_0^l \searrow_0 dt - \int_0^T\int_0^l \upsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)dxdt \\ &= -\int_0^l\left[x\upsilon\frac{\partial\omega}{\partial x}\right]_0^T \searrow_0 dx + \int_0^T\int_0^l x\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\upsilon}{\partial t}dxdt \\ &= \left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))}. \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

la substitution de $(3.5.10) - (3.5.13)$ dans $(3.5.9)$ donne

$$H(\omega,\upsilon) = (\upsilon, \Im_x(\xi F))_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))}, \tag{3.5.14}$$

où

$$\begin{aligned} H(\omega,\upsilon) &= \left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\upsilon}{\partial t}\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} - \left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t}, \Im_x(\xi\omega)\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} \\ &\quad - \left(x\frac{\partial\omega}{\partial x}, \upsilon\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))}. \end{aligned} \tag{3.5.15}$$

Définition 3.2 *Une fonction* $\omega \in L^2(0,\acute{T},H^1_\rho(\Omega))$ *est dite solution faible du problème* $(3.5.5)-(3.5.8)$ *si* $(3.5.7)$ *et* $(3.5.14)$*est satisfaite.*

Maintenant, nous construisons une suite d'itérations de la manière suivante. En commençant par $\omega^{(0)}=0$ la suite $\left(\omega^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie comme suit : Étant donné l'élément $\omega^{(n-1)}$, alors pour $n=1,2,...,$ résolvons le problème :

$$\frac{\partial\omega^{(n)}}{\partial t}-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial\omega^{(n)}}{\partial x}\right)-\frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(x\frac{\partial\omega^{(n)}}{\partial x}\right)=F\left(x,t,\omega^{(n-1)},\frac{\partial\omega^{(n-1)}}{\partial x}\right), \tag{3.5.16}$$

$$\omega^{(n)}(x,0)=0, \tag{3.5.17}$$

$$\frac{\partial\omega^{(n)}}{\partial x}(l,t)=0, \tag{3.5.18}$$

$$\int_0^l x\omega^{(n)}(x,t)\,dx=0. \tag{3.5.19}$$

Théorème 3.3 *Affirme que pour tout* n *fixe, chaque problème* $(3.5.16)-(3.5.19)$ *admet une solution unique* $\omega^{(n)}(x,t)$ *.Si on pose* $V^{(n)}(x,t)=\omega^{(n+1)}(x,t)-\omega^{(n)}(x,t)$ *, alors on obtient un nouveau problème*

$$\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)-\frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)=\sigma^{(n-1)}(x,t). \tag{3.5.20}$$

$$V^{(n)}(x,0)=0, \tag{3.5.21}$$

$$\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}(l,t)=0, \tag{3.5.22}$$

$$\int_0^l xV^{(n)}(x,t)dx=0, \tag{3.5.23}$$

où

$$\sigma^{(n-1)}(x,t)=F\left(x,t,\omega^{(n)},\frac{\partial\omega^{(n)}}{\partial x}\right)-F\left(x,t,\omega^{(n-1)},\frac{\partial\omega^{(n-1)}}{\partial x}\right).$$

Lemme 3.2 *Supposons que la condition* (B) *est vérifié, alors pour le problème* $(3.5.20)-(3.5.23)$*, nous avons l'estimation a priori*

$$\left\|V^{(n)}\right\|_{L^2(0,\acute{T},H^1_\rho(\Omega))}\leq K\left\|V^{(n-1)}\right\|_{L^2(0,\acute{T},H^1_\rho(\Omega))}, \tag{3.5.24}$$

où K une constante positive donnée par

$$K=2\sqrt{T}d\exp(k_1\frac{T}{2}),\text{ avec }k_1=\max\left(1,\frac{3l+l^3}{2}\right).$$

Preuve. Prenant le produit scalaire dans $L^2(0,\tau,L^2_\rho(\Omega))$, avec $0 \le \tau \le T$ de l'équation $(3.5.20)$ et l'opérateur intégro-différenrielle

$$MV = x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t} - x\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right).$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}, x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\right)_{L^2(0,\tau,L^2_\rho(\Omega))} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right), \frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\right)_{L^2(0,\tau,L^2_\rho(\Omega))} \\
&- \left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right), \frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\right)_{L^2(0,\tau,L^2_\rho(\Omega))} - \left(\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}, x\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)\right)_{L^2(0,\tau,L^2_\rho(\Omega))} \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right), \Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)\right)_{L^2(0,\tau,L^2_\rho(\Omega))} + \left(\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right), \Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)\right)_{L^2(0,\tau,L^2_\rho(\Omega))} \\
= &\left(\sigma^{(n-1)}(x,t), x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\right)_{L^2(0,\tau,L^2_\rho(\Omega))} - \left(\sigma^{(n-1)}(x,t), x\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)\right)_{L^2(0,\tau,L^2_\rho(\Omega))}
\end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \left\|\frac{\partial V^{(n)}(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt - \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)dxdt \\
&- \int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)dxdt + \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)dxdt \\
&+ \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)dxdt - \int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)dxdt \\
= &\int_0^\tau\int_0^l x\sigma^{(n-1)}(x,t)\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}dxdt - \int_0^\tau\int_0^l x\sigma^{(n-1)}(x,t)\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)dxdt.
\end{aligned} \tag{3.5.25}$$

on aprenons on compte les conditions $(3.5.22)$ et $(3.5.23)$, intégrations successives par parties de chaque terme de $(3.5.25)$ conduit à

$$\begin{aligned}
-\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)dxdt &= -\int_0^\tau\left[x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right]_0^l \searrow_0 dt + \int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x\partial t}\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l\left[x\left(\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)^2\right]_0^\tau dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l x\left(\frac{\partial V^{(n)}(x,\tau)}{\partial x}\right)^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l x\left(\frac{\partial V^{(n)}(x,0)}{\partial x}\right)^2 \searrow_0 dx \\
&= \frac{1}{2}\left\|\frac{\partial V^{(n)}(.,\tau)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)dxdt &= -\int_0^\tau\left[x\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)\Im_x\left(\xi\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\right)\right]_0^l \searrow_0 dt \\
&\quad+\int_0^\tau\int_0^l \Im_x\left(\xi V^{(n)}\right)\Im_x\left(\xi\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\right)dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l\left[\left(\Im_x\left(\xi V^{(n)}\right)\right)^2\right]_0^\tau dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l\left(\Im_x\left(\xi V^{(n)}(x,\tau)\right)^2 dx-\frac{1}{2}\int_0^l\left(\Im_x\left(\xi V^{(n)}(x,0)\right)^2 \searrow_0 dx \\
&= \frac{1}{2}\left\|\Im_x\left(\xi V^{(n)}\left(.,\tau\right)\right)\right\|_{L^2(\Omega)}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)dxdt &= \int_0^\tau\left[x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)\right]_0^l \searrow_0 dt \\
&\quad-\int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\Im_x\left(\xi V^{(n)}\right)dxdt \\
&= -\int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\Im_x\left(\xi V^{(n)}\right)dxdt \\
&= -\left(\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x},\Im_x\left(\xi V^{(n)}\right)\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)dxdt &= \int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)\Im_x^2\left(\xi V^{(n)}\right)\right]_0^\tau \searrow_0 dx \\
&\quad-\int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x\partial t}\Im_x\left(\xi V^{(n)}\right)dxdt \\
&= -\int_0^\tau\int_0^l x\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x\partial t}\Im_x\left(\xi V^{(n)}\right)dxdt \\
&= -\left(\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x\partial t},\Im_x\left(\xi V^{(n)}\right)\right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^\tau\int_0^l \frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}\right)dxdt &= -\int_0^\tau\left[x\frac{\partial V^{(n)}}{\partial t}\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x\partial t}\right]_0^l \searrow_0 dt+\int_0^\tau\int_0^l x\left(\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x\partial t}\right)^2 dxdt \\
&= \int_0^\tau\left\|\frac{\partial^2 V^{(n)}\left(.,t\right)}{\partial x\partial t}\right\|_{L^2_\rho(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Donc $(3.5.25)$ devient

$$\begin{aligned}
&\int_0^\tau \left\| \frac{\partial V^{(n)}(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{1}{2} \left\| \frac{\partial V^{(n)}(.,\tau)}{\partial x} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
&+ \int_0^\tau \left\| \frac{\partial^2 V^{(n)}(.,t)}{\partial x \partial t} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{1}{2} \left\| \Im_x \left(\xi V^{(n)} (.,\tau) \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
= \; & \left(\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}, \Im_x \left(\xi V^{(n)} \right) \right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} + \left(\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x \partial t}, \Im_x \left(\xi V^{(n)} \right) \right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} \\
&+ \left(\sigma^{(n-1)}, \frac{\partial V^{(n)}}{\partial t} \right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} - \left(\sigma^{(n-1)}, \Im_x^2 \left(\xi V^{(n)} \right) \right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{3.5.26}$$

Appliquons les inégalités de Cauchy avec ε et en utilisant la condition (B) , alors chaque terme du côté droit de $(3.5.26)$ peut être estimé comme suit :

$$\left(\frac{\partial V^{(n)}}{\partial x}, \Im_x \left(\xi V^{(n)} \right) \right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} \leq \int_0^\tau \left\| \frac{\partial V^{(n)}(.,t)}{\partial x} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{l}{4} \int_0^\tau \left\| \Im_x \left(\xi V^{(n)} \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt, \tag{3.5.27}$$

$$\left(\frac{\partial^2 V^{(n)}}{\partial x \partial t}, \Im_x \left(\xi V^{(n)} \right) \right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} \leq \int_0^\tau \left\| \frac{\partial^2 V^{(n)}(.,t)}{\partial x \partial t} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{l}{4} \int_0^\tau \left\| \Im_x \left(\xi V^{(n)} \right) \right\|^2_{L^2(\Omega)} dt, \tag{3.5.28}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma^{(n-1)}, \frac{\partial V^{(n)}}{\partial t} \right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega))} \\
\leq \; & d^2 \left(\int_0^T \left\| V^{(n-1)} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \int_0^T \left\| \frac{\partial V^{(n-1)}(.,t)}{\partial x} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt \right) \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial V^{(n)}(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt,
\end{aligned} \tag{3.5.29}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\sigma^{(n-1)}, \Im_x^2 \left(\xi V^{(n)} \right) \right)_{L^2(0,T,L^2_\rho(\Omega)} \\
\leq \; & d^2 \left(\int_0^T \left\| V^{(n-1)} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \int_0^T \left\| \frac{\partial V^{(n-1)}(.,t)}{\partial x} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt \right) \\
&+ \frac{l^3}{4} \int_0^\tau \left\| \Im_x \left(\xi V^{(n)} \right) \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt.
\end{aligned} \tag{3.5.30}$$

Il est facile de vérifie que

$$\frac{1}{2} \left\| V^{(n)}(.,\tau) \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \leq \frac{1}{2} \int_0^\tau \left\| V^{(n)} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + \frac{1}{2} \int_0^\tau \left\| \frac{\partial V^{(n)}(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt. \tag{3.5.31}$$

En combinant $(3.5.27)-(3.5.30)$ dans $(3.5.26)$ et en ajoutant côté à côté l'inégalité obtenue $(3.5.31)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\|V^{(n)}(.,\tau)\right\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} + \left\|\Im_x\left(\xi V^{(n)}\left(.,\tau\right)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & 2\int_0^\tau \left\|\frac{\partial V^{(n)}(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt + l\int_0^\tau \left\|\Im_x\left(\xi V^{(n)}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\
& +4d^2\int_0^T \left\|V^{(n-1)}\right\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} dt + \frac{l^3}{2}\int_0^\tau \left\|\Im_x\left(\xi V^{(n)}\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt \\
& +\int_0^\tau \left\|V^{(n)}\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
& \left\|V^{(n)}(.,\tau)\right\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} + \left\|\Im_x\left(\xi V^{(n)}\left(.,\tau\right)\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & K_1\left(\int_0^\tau \left\|\Im_x\left(\xi V^{(n)}\right)\right\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^\tau \left\|V^{(n)}\right\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} dt\right) \\
& +4d^2\int_0^\tau \left\|V^{(n-1)}\right\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} dt,
\end{aligned} \tag{3.5.32}$$

où

$$K_1 = \max\left\{1, \frac{3l+l^3}{2}\right\},$$

Maintenant, en appliquant le lemme de Gronwall à $(3.5.32)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\|V^{(n)}(.,\tau)\right\|^2_{H^1_\rho(\Omega)} + \left\|\Im_x\left(\xi V^{(n)}\left(.,\tau\right)\right)\right\|^2_{L^2_\rho(\Omega)} \\
\leq\ & 4Td^2\exp(K_1T)\int_0^T \left\|V^{(n-1)}\right\|^2_{H^1(\Omega)} dt.
\end{aligned} \tag{3.5.33}$$

Après avoir écarté le deuxième terme du côté gauche de $(3.5.33)$, en intégre le résultat obtenu sur l'intervalle $(0,T)$, on obtient l'estimation a priori souhaitée $(3.5.24)$ qui est :

$$\left\|V^{(n)}\right\|^2_{L^2(0,T;H^1_\rho(\Omega))} \leq 4Td^2\exp\left(K_1T\right)\left\|V^{(n-1)}\right\|^2_{L^2(0,T;H^1_\rho(\Omega))}.$$

À partir des critères de convergence des séries ; il résulte que la série $\sum_{n=1}^{\infty} V^{(n)}$ converge si $4Td^2\exp\left(K_1T\right) < 1$, c'est-à-dire que si $d < \frac{1}{2\sqrt{T}}\exp(\frac{-K_1T}{2})$. Comme $V^{(n)}\left(x,t\right) = \omega^{(n+1)}\left(x,t\right) - \omega^{(n)}\left(x,t\right)$ alors il s'ensuit que la suite $\left(\omega^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned}
\omega^{(n)}\left(x,t\right) &= \sum_{K=0}^{n-1} V^{(k)} + \omega^{(0)}\left(x,t\right) \\
&= \sum_{K=0}^{n-1}\left(\omega^{(k+1)}\left(x,t\right) - \omega^{(k)}\left(x,t\right)\right) + \omega^{(0)}\left(x,t\right), \quad k = 1,2,...
\end{aligned}$$

converge vers un élément $\omega \in L^2(0,T;H^1_\rho(\Omega))$.

Maintenant, pour prouver que cette fonction limite ω est une solution du problème considéré $(3.5.20)-(3.5.23)$, nous devons montrer que ω satisfait $(3.5.7)$ et $(3.5.14)$ comme mentionné dans la définition 3.2.

Pour le problème $(3.5.16)-(3.5.19)$, nous avons

$$H\left(\omega^{(n)},\upsilon\right)=\left(\upsilon,\Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega^{(n-1)},\frac{\partial\omega^{(n-1)}}{\partial\xi}\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}. \tag{3.5.34}$$

De $(3.5.34)$, nous avons

$$\begin{aligned} H\left(\omega^{(n)}-\omega,\upsilon\right)+H\left(\omega,\upsilon\right) &= \left(\upsilon,\Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega^{(n-1)},\frac{\partial\omega^{(n-1)}}{\partial\xi}\right)\right)\right. \\ &\quad \left.-\Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega,\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\ &\quad +\left(\upsilon,\Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega,\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}. \end{aligned} \tag{3.5.35}$$

Maintenant, à partir de l'équation différentielle partielle $(3.5.16)$, nous avons

$$\begin{aligned} H\left(\omega^{(n)}-\omega,\upsilon\right) &= \left(\upsilon,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\ &\quad -\left(\upsilon,\Im_x\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\ &\quad -\left(\upsilon,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}. \end{aligned} \tag{3.5.36}$$

En utilisant les conditions sur υ et ω, après quelques intégrations par parties de chaque terme à droite de $(3.5.36)$ on obtient :

$$\begin{aligned} &\left(\upsilon,\frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\ &= -\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial t},\Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}, \end{aligned} \tag{3.5.37}$$

$$\begin{aligned} &-\left(\upsilon,\Im_x\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\ &= -\left(x\upsilon,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}, \end{aligned} \tag{3.5.38}$$

$$
\begin{aligned}
&-\left(\upsilon, \frac{\partial}{\partial t}\Im_x\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\
&= \left(x\frac{\partial \upsilon}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}.
\end{aligned}
\tag{3.5.39}
$$

Substituons $(3.5.37)-(3.5.39)$ dans $(3.5.36)$, on obtient :

$$
\begin{aligned}
H\left(\omega^{(n)}-\omega, \upsilon\right) &= -\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}, \Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\
&\quad -\left(x\upsilon, \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\
&\quad +\left(x\frac{\partial \upsilon}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}.
\end{aligned}
\tag{3.5.40}
$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur les termes du côté droit de $(3.5.40)$. On obtient

$$
\begin{aligned}
-\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}, \Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} &\leq \left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}\cdot\left\|\Im_x\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\
&\leq 2l\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}\cdot\left\|\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))},
\end{aligned}
$$

$$
-\left(x\upsilon, \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \leq l\left\|\upsilon\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}\cdot\left\|\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))},
$$

$$
\left(x\frac{\partial \upsilon}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \leq l\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}\cdot\left\|\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\omega^{(n)}-\omega\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}.
$$

Alors

$$
H\left(\omega^{(n)}-\omega, \upsilon\right) \leq C\left\|\omega^{(n)}-\omega\right\|_{L^2(0,T;H^1_\rho(\Omega))}\left(\left\|\upsilon\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}+\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}\right)
\tag{3.5.41}
$$

où

$$
C = \frac{l^2}{\sqrt{2}} + l.
$$

En d'autre part on a :

$$\begin{aligned}
&\left(\upsilon, \Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega^{(n-1)},\frac{\partial\omega^{(n-1)}}{\partial\xi}\right)\right)-\Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega,\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\
\leq\; & \sqrt{l}\,\|\upsilon\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}\left\|\Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega^{(n-1)},\frac{\partial\omega^{(n-1)}}{\partial\xi}\right)\right)-\Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega,\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\
\leq\; & \frac{l^2}{\sqrt{2}}\|\upsilon\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}\left\|F\left(x,t,\omega^{(n-1)},\frac{\partial\omega^{(n-1)}}{\partial x}\right)-F\left(x,t,\omega,\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))} \\
\leq\; & \frac{l^2 d}{\sqrt{2}}\|\upsilon\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}\left(\left\|\left(\omega^{(n-1)}-\omega\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}+\left\|\left(\frac{\partial\omega^{(n-1)}}{\partial x}-\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)\right\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}\right) \\
\leq\; & \frac{ld}{\sqrt{2}}\|\upsilon\|_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}\left\|\omega^{(n)}-\omega\right\|_{L^2(0,T;H^1_\rho(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{3.5.42}$$

prenons en compte $(3.5.41)$ et $(3.5.42)$, et par passage à la limite quand $n\to\infty$ dans $(3.5.40)$ nous obtenons

$$H(\omega,\upsilon)=\left(\upsilon,\Im_x\left(\xi F\left(\xi,t,\omega,\frac{\partial\omega}{\partial\xi}\right)\right)\right)_{L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))}.$$

Ainsi, nous avons prouvé ce qui suit ; ■

Théorème 3.4 *Supposons que la condition (B) est satisfaite, et telque $d<\frac{1}{2\sqrt{T}}\exp\left(-\frac{k_1T}{2}\right)$, alors le problème $(3.5.5)-(3.5.8)$ admet une solution faible unique appartient à $L^2(0,T;H^1_\rho(\Omega))$.*

Il reste maintenant à prouver l'unicité de la solution du problème $(3.5.5)-(3.5.8)$.

Théorème 3.5 *Si la condition (B) est satisfaite, alors le problème $(3.5.5)-(3.5.8)$ admet une solution unique.*

Preuve. On suppose que $\omega_1,\omega_2\in L^2(0,T;H^1_\rho(\Omega))$ sont deux solutions du problème $(3.5.5)-(3.5.8)$, alors $V=\omega_1-\omega_2\in L^2(0,T;H^1_\rho(\Omega))$ et satisfait

$$\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial V}{\partial x}\right)-\frac{1}{x}\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(x\frac{\partial V}{\partial x}\right)=\sigma(x,t). \tag{3.5.43}$$

$$V(x,0)=0, \tag{3.5.44}$$

$$\frac{\partial V(l,t)}{\partial x}=0, \tag{3.5.45}$$

$$\int_0^l xV(x,t)dx=0, \tag{3.5.46}$$

où

$$\sigma(x,t)=F\left(x,t,\omega_1,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\right)-F\left(x,t,\omega_2,\frac{\partial\omega_1}{\partial x}\right).$$

Considérons le produit scalaire dans $L^2(0,T;L^2_\rho(\Omega))$ de l'équation différentielle $(3.5.43)$ et l'opérateur intégro-différentielle

$$MV = x\frac{\partial V}{\partial t} - x\Im_x^2\left(\xi V\right),$$

Nous suivons la même procédure utilisée pour démontrer le lemme 3.2, on a :

$$\|V\|_{L^2(0,\acute{T};H^1_\rho(\Omega))} \leq K\|V\|_{L^2(0,\acute{T};H^1_\rho(\Omega))}, \tag{3.5.47}$$

D'où

$$K = 2\sqrt{T}d\exp\left(\frac{k_1T}{2}\right),$$

avec

$$k_1 = \max\left\{1, \frac{3l+l^3}{2}\right\},$$

comme $k < 1$, on déduit de $(3.5.47)$ que

$$(1-K)\|V\|_{L^2(0,T;H^1_\rho(\Omega))} = 0$$

ceci implique que $V = \omega_1 - \omega_2 = 0$, par conséquent $\omega_1 = \omega_2 \in L^2(0,T;H^1_\rho(\Omega))$.
Ceci termine la démonstration du théorème 3.5 . Ainsi, nous avons prouvé l'unicité de la solution du problème $(3.5.5) - (3.5.8)$. ■

Conclusion

Dans ce travail on a étudié l'existence et l'unicité de deux problèmes suivants :

- Un système de thermo-élasticité linéaire avec l'opérateur de Bessel.
- Un problème mixte non linéaire pour une équation pseudo-parabolique du second ordre non linéaire avec condition non locale.

La méthode utilisée est l'une des méthodes d'analyse fonctionnelle les plus efficaces pour résoudre les équations aux dérivées partielles linéaires avec des conditions intégrales, elle dite la méthode des inégalités énergétiques, malgré la complexité des calculs techniques des méthodes utilisés, on a établi l'existence, l'unicité, et la dépendance continue de la solution.

Il semble très intéressant d'utiliser cette méthode pour obtenir des résultets de même type de conditions que celles utilisées dans ce mémoire pour des équations semi-linéaires, quasi-linéaires, et non-linéaires.

Bibliographie

[1] S.A. Beilin, Existence of solutions for one-dimensional wave equation with nonlocal conditions, Electron. J. Differential Equations 76 (2001) 1–8.

[2] G.I. Barenblatt, Iv.P. Zheltov, I.N. Kochina, Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks, J. Appl. Math. Mech. 24 (1960) 1286–1303.

[3] A. Bouziani, Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation, J. Appl. Math. Stochastic Anal. 9 (1996) 323–330.

[4] A. Bouziani, Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with nonlocal boundary condition, Nonlinear Anal. 55 (2003) 883–904.

[5] J.R. Cannon, The solution of heat equation subject to the specification of energy, Quart. Appl. Math. 21(1963) 155–160.

[6] P.J. Chen, M.E. Gurtin, On a theory of heat conduction involving two temperatures, Z. Angew. Math.Phys. 19 (1968) 614–627.

[7] B.D. Coleman, R.J. Duffin, V.J. Mizel, Instability, uniqueness and non-existence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip, Arch. Rational Mech. Anal. 19 (1965) 100–116.

[8] J.H. Cushmand, T.R. Ginn, Nonlocal dispersion in porous media with continuously evolving scales of heterogeneity, Transp. Porous Media 13 (1993) 123–138.

[9] J.H. Cushmand, H. Xu, F. Deng, Nonlocal reactive transport with physical and chemical heterogeneity : localization error, Water Resources Res. 31 (1995) 2219–2237.

[10] A. A.Dezin, Existence and uniqueness theorems for solutions of boundary problems for partial differential equations in function spaces. Uspekhi Mat. Nauk, 14 :3(87). 21-73. 1959.

[11] E. DiBenedetto, M. Pierre, On the maximum principle for pseudoparabolic equations, Indiana Univ. Math. J. 30 (1981) 821–854.

[12] E. DiBenedetto, R.E. Showalter, Implicit degenerate evolution equations and applications, SIAM J. Math. Anal. 12 (1981) 731–751.

[13] G. Fairweather, R.D. Saylor, The reformulation and numerical solution of certain nonclassical initialboundary value problems, SIAM J. Sci. Statist. Comput. 12 (1991) 127–144.

[14] L. Garding, Cauchy Problem for Hyperbolic Equations, Lecture notes, University of Chicago 1957.

[15] D.G. Gordeziani, G.A. Avalishvili, On the constructing of solutions of the nonlocal initial-boundary value problems for one-dimensional oscillation equations, Mat. Model. 12 (2000) 94–103.

[16] Brezis, Haïm. "Analyse fonctionnelle." Théorie et applications (1983).

[17] N.I. Ionkin, Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonclassical boundary conditions, Differ. Uravn. 13 (1977) 1177–1182.

[18] N.I. Kamynin, A boundary value problem in the theory of heat conduction with non classical boundary condition, Th. Vychisl. Mat. Fiz. 43 (1964) 1006–1024.

[19] A. V. Kartynnik, Three-point boundary value problem with an integral space-variable condition for a second order parabolic equation, Diff. Equations 26 (1990), 1160–1162.

[20] O. A. Ladyzhenskaya, Mixed problem for hyperbolic equations, Edition Mir nauka, 1974.

[21] S. Mesloub, On a nonlocal problem for a pluriparabolic equation, Acta Sci. Math. (Szeged) 67 (2001) 203–219.

[22] S. Mesloub, A. Bouziani, Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with Bessel operator, J. Appl. Math. Stochastic Anal. 15 (2002) 291–300.

[23] S. Mesloub and A. Bouziani, Problème mixte avec conditions aux limites intègrales pourune classe d'èquations paraboliques bidimensionnelles, Bull. de la classe des sciences, Acad. Royale de Belgique 6 (1998), 59–69.

[24] S. Mesloub, A. Bouziani and N. Kachekar, A strong solution of an evolution problem with integral conditions, Georgian Math. Journal 9 (2002), 1–9.

[25] S. Mesloub and A. Bouziani, On a class of singular hyperbolic equation with a weighted integral condition, Internat. J. Math. & Math. Sci. 22, 3 (1999), 511–519.

[26] S. Mesloub and A. Bouziani, Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations, J.A.M 1 : 3 (2001), 107–116.

[27] S. Mesloub, N. Lekrine, On a nonlocal hyperbolic mixed problem, Acta Sci. Math. (Szeged) (2004) 13–23.

[28] S. Mesloub and A. Bouziani, Mixed problem with integral conditions for a certain class of hyperbolic equations, J.A.M 1 : 3 (2001), 107–116.

[29] L.A. Muravei, A.V. Philinovskii, On a certain nonlocal boundary value problem for hyperbolic equation, Mat. Zametki 54 (1993) 98–116.

[30] A.M. Nakhushev, On a certain approximate method for boundary-value problems for differential equations and their applications in ground waters dynamics, Differ. Uravn. 18 (1982) 72–81.

[31] B.P. Paneiah, On certain nonlocal boundary problems for linear differential operators, Mat. Zametki 35(1984) 425–434.

[32] P. Shi, Weak solution to an evolution problem with a nonlocal constraint, SIAM. J. Math. Anal. 24, 1 (1993), 46–58.

[33] L.S. Pulkina, A nonlocal problem with integral conditions for hyperbolic equations, Electron. J. Differential Equations 45 (1999) 1–6.

[34] L. S. Pulkina, On solvability in L2 of nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation, Differents. Uravn. 2 (2000).

[35] A.A. Samarskii, Some problems in differential equations theory, Differ. Uravn. 16 (1980) 1221–1228.

[36] A.L. Skubachevski, G.M. Steblov, On spectrum of differential operators with domain nondense in L2, Dokl. Akad. Nauk USSR 321 (1991) 1158–1163.

[37] R.E. Showalter, T.W. Ting, Pseudo-parabolic partial differential operators, SIAM J. Math. Anal. 1 (1970)1–26.

[38] T.W. Ting, A cooling process according to two temperature theory of heat conduction, J. Math. Anal. 45(1974) 23–31.

[39] V.A. Vodakhova, A boundary-value problem with Nakhushev nonlocal condition for a certain pseudoparabolic water transfer equation, Differ. Uravn. 18 (1982) 280–285.

[40] N.I. Yurchuk, Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations, Differential Equations 22 (1986) 1457–1463.