République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Inverse généralisé d'un opérateur borné

Présenté Par:

khenifar mohammed

Devant le jury :

Messaoudene Hadia	Prof	Université de Tébessa	Président
Bouzenada Smail	Prof	Université de Tébessa	Encadreur
GassriAhlam	MCA	Université de Tébessa	Examinateur

Date de soutenance :05 06 2023

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

Dédicaces

Chers Parents et cher Grand-père,

Je tiens à vous exprimer ma profonde gratitude pour tout le soutien inconditionnel que vous m'avez accordé tout au long de mes études. Votre amour, votre encouragement et votre confiance ont été les fondations solides sur lesquelles j'ai construit mon parcours académique.

Maman et Papa, vous avez toujours été mes piliers de force. Vous avez cru en moi lorsque je doutais de moi-même, vous m'avez encouragé à poursuivre mes rêves et vous avez été là pour moi à chaque étape de mon parcours. Votre soutien inébranlable a été un moteur de ma réussite et je vous en suis infiniment reconnaissant.

Grand-père, bien que tu ne sois plus parmi nous physiquement, ton esprit continue de m'inspirer chaque jour. Tu as été une source de sagesse et de conseils précieux, et je suis reconnaissant d'avoir pu bénéficier de tes enseignements pendant les précieux moments passés ensemble. Tu me manques énormément, mais je sais que tu es avec moi, fier de mes accomplissements.

C'est avec une profonde émotion que je dédie ce travail à vous trois, mes parents et mon cher grand-père. Votre amour, votre influence et vos encouragements ont façonné la personne que je suis aujourd'hui. Je sais que mon chemin n'aurait pas été le même sans vous, et je suis honoré de pouvoir partager ce succès avec vous.

Que cette note de fin d'études soit un témoignage de mon amour et de ma reconnaissance envers vous. Je suis fier de porter en moi les valeurs que vous m'avez transmises et je m'efforcerai de continuer à vous rendre fiers à l'avenir.

Avec tout mon amour et ma gratitude sincère,

K.Mohammed

Remerciements

Chère Maman, cher Papa, cher Grand-père nomade, chère famille et chers amis,

Je tiens aujourd'hui à exprimer ma profonde gratitude envers chacun d'entre vous, ainsi qu'envers Monsieur Bouznada Ismail, pour tout l'amour, le soutien et les moments précieux que vous avez partagés avec moi. Votre impact dans ma vie est inestimable et je suis vraiment béni(e) de vous avoir à mes côtés.

Maman, tu es ma première source d'inspiration et de réconfort. Ton amour inconditionnel, ta bienveillance et ta force m'ont donné la confiance nécessaire pour affronter les défis de la vie. Je te remercie du fond du cœur pour tout ce que tu as fait et continues de faire pour moi.

Papa, ta présence et ton soutien indéfectibles ont été un pilier dans ma vie. Ta sagesse, ton dévouement et tes encouragements constants m'ont aidé à grandir et à me surpasser. Je suis profondément reconnaissant(e) pour tous les sacrifices que tu as faits pour moi.

Grand-père nomade, ton esprit aventurier et ton amour pour la liberté ont toujours été une source d'inspiration pour moi. Les histoires que tu racontes et les valeurs que tu transmets ont façonné ma vision du monde. Je te suis infiniment reconnaissant(e) de l'héritage précieux que tu m'as transmis.

À toute ma famille et mes amis, vous êtes les piliers qui soutiennent ma vie. Votre amour inconditionnel, vos encouragements et vos rires partagés ont illuminé mes jours les plus sombres. Je ne pourrais pas demander de meilleurs compagnons de route et je vous remercie de tout mon cœur pour votre présence constante.

Enfin, un merci tout particulier à Monsieur Bouznada Ismail, Je tenais à vous adresser mes sincères remerciements pour l'aide inestimable que vous m'avez apportée tout au long de mon mémoire de fin d'études. Votre soutien et vos conseils éclairés ont été essentiels pour la réussite de ce projet. Votre expertise et votre dévouement en tant qu'encadreur ont joué un rôle clé dans ma compréhension approfondie du sujet et dans la réalisation d'un mémoire de qualité. Votre disponibilité constante pour répondre à mes questions, discuter de mes idées et m'orienter dans la bonne direction ont été d'une valeur inestimable.

Merci à tous pour tout ce que vous avez apporté à ma vie. Je suis profondément reconnaissant(e) de faire partie d'une famille et d'un cercle d'amis aussi merveilleux. Votre amour et votre soutien ont fait de moi la personne que je suis aujourd'hui.

Avec tout mon amour et ma gratitude,

Table des matières

Table des figures

NOTATIONS GÉNÉRALES

H	:	Espace de Hilbert complexe.
$\mathcal{L}(H)$	:	Espace des opérateurs linéaires bornés sur H
$\mathcal{L}(H,K)$	:	Espace des opérateurs linéaires bornés de H dans K.
$\langle .,. \rangle$	:	Signe du produit scalaire.
vect $\{e_i\}_{i=1}^{n}$	:	Sous espace vectoriel engendré par $\{e_i\}_{i=1}^{n}$
A^{-1}	:	Inverse de A.
A^*	:	Adjoint Hilbertien de A.
$A^{\times}$	:	L'inverse de Moore-Penrose de A.
$A\mid_M$	:	La restriction de A au sous espace vectoriel M.
$\mathcal{R}(A)$	:	Image de A.
$\mathcal{N}(A)$	:	Noyau de A.
P_M	:	Projection orthogonale sur M.
$P_{M,\,N}$	:	Projection sur M parallèles N.
$\mathbb{C}^{m,n}(\Bbbk)$	:	L'espace des matrices m $\times$ n sur $\Bbbk$.
$\mathbb{C}_r^{m,n}(\Bbbk)$	:	L'espace des matrices m $\times$ n de rang r sur $\Bbbk$
$M^{\perp}$	:	Complémentaire orthogonal de M.
$\oplus$	:	Signe de somme directe.
$\perp$	:	Signe d'orthogonalité.
$\otimes$	:	Le produit tensoriel

Introduction

L'inversibilité est l'une des disciplines les plus répandues en mathématiques, beaucoup de problèmes sont interprétés par une équation du type $Ax = y$ où A est une transformation linéaire donnée, comme l'analyse numérique, l'optimisation, la théorie de contrôle, théorie de codage, la statistique et les modèles linéaires, . . . etc.

Lorsque nous travaillons avec des équations linéaires de la forme $Ax = b$, l'existence d'une solution unique dépend souvent de la propriété d'inversibilité de la matrice A. Cependant, dans de nombreux cas pratiques, les matrices peuvent être rectangulaires, non surjectives ou non injectives, rendant l'inverse classique impossible à calculer.

L'inverse de Moore-Penrose offre une solution à cette problématique en introduisant un opérateur généralisé qui possède des propriétés similaires à celles de l'inverse, même lorsque celui-ci n'existe pas. Il permet ainsi de trouver une approximation optimale de l'inverse dans ces situations complexes.

La théorie de l'inverse généralisé a connu un développement significatif après les travaux pionniers de Moore en *1920* [18] et ceux de Penrose en *1955* [20]. Ces deux mathématiciens ont apporté des contributions majeures en proposant des définitions explicites d'un inverse généralisé (inverse de Moore-Penrose) et en établissant des résultats théoriques importants. En particulier, en *1956*, Rado a démontré l'équivalence entre les définitions de Moore et de Penrose, ce qui a renforcé la légitimité et l'importance de cet inverse généralisé.

Depuis lors, l'inverse de Moore-Penrose est devenu un outil essentiel dans de nombreux domaines des mathématiques appliquées, tels que l'analyse numérique, l'optimisation, la théorie du contrôle, la théorie de codage, la statistique et les modèles linéaires. Sa flexibilité et sa capacité à fournir des solutions adaptées aux cas non inversibles en font un outil précieux pour résoudre des problèmes complexes du monde réel.

Dans ce mémoire, on contente d'exposer une introduction générale de l'inverse généralisé d'un opérateur linéaire borné, et d'étudier les inverses généralisés de quelques opérateurs et de présenter quelques applications. Ainsi, notre mémoire se compose de quatre chapitres

Le premier chapitre est consacré à rappeler quelques notions de base de la théorie des opérateurs qu'on a utilisés.

Au deuxième chapitre, on a présenté des différents types d'inverse généralisé et étudié quelques propriétés de ces inverses, on a étudié l'inverse de Moore-Penrose, qui est l'inverse généralisé le plus proche de l'inverse s'il existait. On a montrer l'existence et l'unicité de l'inverse de Moore-Penrose, et l'équivalence entre les définitions de Moore et de Penrose, puis on a étudié l'inverse de Moore-Penrose pour certaines classes d'opérateurs.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la résolvabilité des équations d'opérateur en utilisant les inverses généralisés.

Dans le dernier chapitre, on a présenté une méthode simple et efficace pour calculer l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice non inversible avec quelques exemples..

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré à rappeler quelques notions de base de la théorie des opérateurs que nous avons utilisées.
Soient E et F deux espaces de Banach et H, K et G des espaces de Hilbert.

1.1 Opérateurs linéaires bornés

Notation 1.1 *[2]$\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'espace de Banach des opérateurs linéaires bornés de E dans F. Pour $A \in \mathcal{L}(E,F)$, $\mathcal{R}(A)$ (resp. $\mathcal{N}(A)$) désigne l'image (resp. le noyau de A).*

Définition .1 *[2]Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$. On dit qu'un opérateur $B \in \mathcal{L}(E)$ commute avec A si $AB = BA$. L'ensemble de tous les opérateurs commutant avec A est appelé le commutant de A et est noté {A}', et l'ensemble de tous les opérateurs commutant avec les éléments de $\{A\}'$ est appelé le bicommutant de A et est noté $\{A\}''$*

Définition .2 *[2]Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Un sous-espace M de E est dit invariant par A si $A(M) \subset M$. L'ensemble de tous les sous-espaces invariants par A est noté $Lat(A)$.*

Définition .3 *[2]Un sous-espace fermé M de E admet un supplémentaire si et seulement s'il existe un sous-espace fermé N de E tel que $E = M \oplus N$, c'est-à-dire tout vecteur $x \in E$ s'écrit d'une façon unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in M$ et $x_2 \in N$.*

Définition .4 *[2]Soit $A \in \mathcal{L}(H,K)$. L'unique opérateur $A^* \in \mathcal{L}(H,K)$ tel que $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ pour tout $x \in H$ et tout $y \in K$ est appelé l'adjoint de A.*

Définition .5 *[1]Toute paire de vecteurs non nuls a, b d'un espace de H définie un opérateur de $\mathcal{L}(H)$ par le produit tensoriel vectoriel $a \otimes b$, comme suit*

$$(a \otimes b)x = \langle x, a\rangle \, b \; , \forall x \in H \; .$$

Définition .6 *[10]Si $H = H_1 \oplus H_2$ et $K = K_1 \oplus K_2$ et $A \in \mathcal{L}(H, K)$, alors A prend la forme matricielle*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

où $A_{ij} \in \mathcal{L}(H_j, K_i)$ est la restriction de A sur H_j dans K_i.

Définition .7 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que λ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $x \in H$ tel que $Ax = \lambda x$. Dans ce cas, x est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. L'ensemble des valeurs propres de A est noté par $\sigma_p(A)$ est on a*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \; \lambda I - A \text{ n'est pas injectif}\} \, .$$

1.2 Orthogonalité et projections

Définition .8 *[9]Si $E = M \oplus N$, l'opérateur $P \in \mathcal{L}(E)$ défini par $P(x) = x_1$, où $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in M$ et $x_2 \in N$, est appelé la projection de E sur M parallèle à N et est notée $P_{M,N}$. Dans ce cas, $I - P$ est la projection de E sur N parallèle à M et on a*

$$\mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(I - P) = M \;\text{ et }\; \mathcal{N}(P) = \mathcal{R}(I - P) = N.$$

Proposition .1 *[9]Un opérateur linéaire $P \in \mathcal{L}(E)$ est une projection si et seulement si $(I - P)$ est une projection.*

Définition .9 *[9]Un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ est dit indempotent si $A^2 = A$.*

Proposition .2 *[9]Un opérateur $P \in \mathcal{L}(E)$ est une projection si et seulement s'il est indempotent.*

Théorème 1.1 *[9]Si $P \in \mathcal{L}(E)$ est une projection définie , alors E est la somme directe de $\mathcal{R}(P)$ et $\mathcal{N}(P)$.*

Corollaire .1 *[9]Toute projection est à image fermée.*

Définition .10 *[9]Le complémentaire orthogonal d'un sous-ensemble M de H est défini par*

$$M^\perp = \{x \in H, \; \langle x, a\rangle = 0, \forall a \in M\}.$$

Proposition .3 [9]*Si M est un sous-espace fermé de H, alors H se décompose en une somme directe orthogonale*

$$H = M \oplus M^{\perp}$$

Proposition .4 [16] *Si M et N sont deux sous-espaces fermés de H tel que $M \oplus N$ est fermé, alors*

$$(M \cap N)^{\perp} = M^{\perp} \oplus N^{\perp}.$$

Proposition .5 [16] *Soient N et M deux sous-espaces fermés de H. Alors, $H = N \oplus M$ si et seulement si $H = M^{\perp} \oplus N^{\perp}$.*

Corollaire .2 [9]*Un sous-espace M de E admet un supplémentaire si et seulement s'il est l'image d'une projection.*

Définition .11 [9]*Soit M un sous-espace fermé de H. La projection de H sur M parallèle à $M^{\perp}$ (selon la décomposition orthogonale $H = M \oplus M^{\perp}$) est appelée projection orthogonale sur M et notée P_M.*

Proposition .6 [9]*Si $A \in \mathcal{L}(H, K)$, alors*

$$\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}(A^*)^{\perp} \text{ et } \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^*)^{\perp},$$

où $\overline{\mathcal{R}(A)}$ désigne l'adhérence de $\mathcal{R}(A)$.

Proposition .7 [9]*Un opérateur $P \in \mathcal{L}(H)$ est une projection orthogonale si et seulement si $P^2 = P = P^*$.*

1.3 Classes d'opérateurs considérées

Définition .12 [2]*Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit auto adjoint si $A^* = A$.*

Définition .13 [2]*Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit normal, si $A^*A = AA^*$.*

Définition .14 [2]*Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit positif (non négatif) s'il est auto-adjoint et si $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$.*

Définition .15 [2]*Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit unitaire si $A^*A = AA^* = I$.*

Définition .16 [2]*Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit isométrie (co-iométrie, resp) si $A^*A = I$ ($AA^* = I$, resp).*

Définition .17 *[2]Si $A, B \in \mathcal{L}(H)$ sont auto adjoints, alors on écrit $A \leq B$ si $B - A$ est positif.*

Proposition .8 *[2]Tout opérateur positif $A \in \mathcal{L}(H)$ admet une racine carrée unique positive. De plus, $\sqrt{A} \in \{A\}$" .*
En particulier, $M^{\perp} \oplus N^{\perp}$ est fermé. Par conséquent, $M \oplus N$ est fermé si et seulement si $M^{\perp} \oplus N^{\perp}$ est fermé.

Notation 1.2 *[2]Si A est positif et inversible , nous ecrivons $A^{-1} > 0$.*

Définition .18 *[1]Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ est dit de rang fini si la dimension de son image est finie. Si $\dim \mathcal{R}(A) = n$ on dit que A est de rang n et on écrit $rg(A) = n$.*

Proposition .9 *[1]Un opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ de rang un si seulement si $A = a \otimes b$ pour certains vecteurs $a, b \in H$.*

Proposition .10 *[1]Soient a, b, c, d dans H et $A \in \mathcal{L}(H)$. Alors*
(1) $(a \otimes b) \circ (c \otimes d) = \langle d, a\rangle (c \otimes b)$
(2) $A \circ (a \otimes b) = a \otimes (Ab)$
(3) $(a \otimes b) \circ A = (A^{*}a \otimes b)$
(4) $(a \otimes b)^{*} = (b \otimes a)$

Proposition .11 *[1]Soit A un opérateur de rang fini avec $rg(A) = n$. Alors A est de la forme*

$$A = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i,$$

où les vecteurs $\{e_i, i = 1, 2, ..., n\}$ sont orthonormaux, et les vecteurs $\{f_i, i = 1, 2, ..., n\}$ sont linéairement indépendants.

Proposition .12 *[16] Soient $A \in \mathcal{L}(H, K)$ et $B \in \mathcal{L}(G, H)$ avec des images fermées. Alors B a une image fermée si et seulement si $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(B)$ est fermé.*

Théorème 1.2 *[9]Soit M et N deux espaces supplémentaires dans E, Alors il existe une unique projection P d'image M et de noyau N si et seulement si E est la somme directe de M et N.*

Lemme .1 *[10]Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ a image fermée. Alors l'opérateur A a les trois formes matricielles suivantes selon les décompositions orthogonales correspondantes*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^{*}) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^{*}) \end{bmatrix}, \tag{1.1}$$

où A_{11} est inversible.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

où $B = A_{11}A_{11}^* + A_{12}A_{12}^* : \mathcal{R}(A) \to \mathcal{R}(A)$ et $B > 0$.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

où $B = A_{11}A_{11}^* + A_{21}A_{21}^* : \mathcal{R}(A^*) \to \mathcal{R}(A^*)$ et $B > 0$.
Ici, A_i dénote un opérateur différent dans chacun de ces trois cas.

Définition .19 *[2]Soit*

$$H = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C}) = \{x = (x_n)_{n\geq 0}, x \in \mathbb{C}, \sum_{n\geq 0} |x_n|^2 < \infty\}$$

l'espace de Hilbert des suites de nombres complexes de carré sommable. L'opérateur V défini sur H par $V((x_n)_{n\geq 0}) = (x_{n+1})_{n\geq 0}$ est appelé opérateur de décalage à gauche (d'avance) . L'opérateur de décalage à droite S défini sur H par $S((x_n)_{n\geq 0}) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

Proposition .13 *L'opérateur de décalage à gauche V est l'adjoint de l'opérateur de décalage à droite S. De plus $VS = I$, (S est un inverse à droite de V).*

Chapitre 2

Inverse généralisé

Dans ce chapitre, on a présenté des différents types d'inverse généralisé et étudié quelques propriétés de ces inverses. On a étudié l'inverse de Moore-Penrose et montré l'équivalence des déffinitions de Moore et de Penrose, puis on a étudier la recherche de la meilleure solution approximative de l'équation $Ax = b$ où A n'est pas inversible. Enfin on a discuter l'inverse de Moore-Penrose de quelques opérateurs.

2.1 Inverses généralisés

Soient E et F deux espaces de Banach.

Définition .20 *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. S'il existe $B \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $ABA = A$, on dit que B est un inverse généralisé intérieur de A, et l'opérateur A est régulier intérieur. On note $A^{\{1\}}$ l'insomble de tous les inverse généralisé intérieur.*

Exemple .1 *Soit l'opérateur $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On cherche à trouver un inverse généralisé intérieur de A.
On sait que A est régulier intérieur si et seulement si il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $ABA = A$.
Soit

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Alors on a :

$$ABA = A \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i.e $c = 1$
Donc tout opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ *défini par*

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & d \end{bmatrix}.$$

est un inverse généralisé intérieur de A

Exemple .2 *L'opérateur de décalage à gauche* V *est un inverse généralisé intérieur de l'opérateur de décalage à droite* S *défini sur* H *par* $S((x_n)_{n\geq 0}) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.
L'opérateur V

$$\begin{aligned} SVS(x) &= SVS(x_1, x_2, \ldots) \\ &= SV(0, x_1, x_2, \cdots) \\ &= S(x_0, x_1, \ldots) \\ &= S(x). \end{aligned}$$

D'autre part S *est un inverse généralisé intérieur* V *défini sur* H *par* $V((x_n)_{n\geq 0}) = (x_{n+1})_{n\geq 0}$ *est appelé opérateur de décalage à gauche*

$$\begin{aligned} VSV(x) &= VSV(x_0, x_1, \ldots) \\ &= VS(x_1, x_2, \ldots) \\ &= V(0, x_1, x_2, \ldots) \\ &= V(x). \end{aligned}$$

Théorème 2.1 *[10]Soit* $A \in \mathcal{L}(E, F)$. *Si* $B \in \mathcal{L}(F, E)$ *est un inverse généralisé intérieur de* A, *alors* AB *est une projection de* F *sur* $\mathcal{R}(A)$ *et* $I - BA$ *est une projection de* E *sur* $\mathcal{N}(A)$. *Par conséquent,* $\mathcal{R}(A)$ *et* $\mathcal{N}(A)$ *admettent des sous-espaces supplémentaires dans* F *et* E *respectivement.*
Preuve. *on a*

$$(AB)^2 = (ABA)B = AB$$

et

$$(BA)^2 = (BAB)A = BA$$

i.eAB *et* BA *sont deux projections.*
Il est évident que $\mathcal{R}(AB) \subset \mathcal{R}(A)$

Supposons que $y \in \mathcal{R}(A)$. Alors il existe $x \in E$ tel que

$$x = Ay \; = ABAy = ABx.$$

Donc, $y \in \mathcal{R}(AB)$, d'ou $\mathcal{R}(AB) = \mathcal{R}(A)$.
Si $x \in \mathcal{N}(A)$, alors $(I - BA)x = x$. Donc, $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{R}(I - BA)$. Soit $x \in \mathcal{R}(I - BA)$. Comme $I - BA$ est une projection, alors

$$x = (I - BA)x,$$

ce qui implique que

$$BAx = 0.$$

Ainsi,

$$Ax = ABAx = 0,$$

danc $x \in \mathcal{N}(A)$, d'ou $\mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(I - BA)$.
Par conséquent, $\mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{N}(A)$ admettent des sous-espaces supplémentaires dans F et E respectivement et AB est une projection de F sur $\mathcal{R}(A)$ et $I - BA$ est une projection de E sur $\mathcal{N}(A)$. ■

Théorème 2.2 *[10]Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathcal{R}(A)$ et $\mathcal{N}(A)$ sont fermés et admettent des supplémentaires dans F et E respectivement, alors A est régulier intérieur.*
Preuve. *Supposons qu'il existe des sous-ensembles fermés M de E et N de F, tels que $E = M \oplus \mathcal{N}(A)$ et $F \; = \mathcal{R}(A) \oplus N$. En général, l'opérateur A a la forme matricielle suivante selon ces décompositions*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ N \end{bmatrix}.$$

On voit que A_{12} représente la restriction de A sur $\mathcal{N}(A)$ dans $\mathcal{R}(A)$, et A_{22} est la restriction de A sur $\mathcal{N}(A)$ dans N, donc $A_{12} = 0$ et $A_{22} = 0$. De plus, A_{21} est la restriction de A sur M dans N, et N est un sous-espace supplémentaire de $\mathcal{R}(A)$. Ainsi, $A_{21} = 0$. Par conséquent, A a la forme suivante

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ N \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

Comme $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A_{11}) \oplus \mathcal{N}(A)$, alors $\mathcal{N}(A_{11}) = \{0\}$. L'égalité $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A_{11})$ est évidente. Ainsi, A_{11} est un opérateur inversible de M dans $\mathcal{R}(A)$. Soit $B \in \mathcal{L}(F, E)$ arbitraire. Alors B a la forme suivante

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}.$$

Un calcul simple montre que B est un inverse généralisé intérieur de A si et seulement si $B_{11} = A_{11}^{-1}$. Alors il existe des inverses généralisés intérieurs de A et tous ont la forme suivante

$$B = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

où B_{12}, B_{21}, B_{22} sont des opérateurs linéaires bornés arbitraires sur des sous-espaces correspondants.

■

Remarque .1 *Dans la suite, nous allons utiliser les formes précédentes de A et de ses inverses généralisés. Comme corollaire, nous obtenons la caractérisation suivante des opérateurs réguliers intérieurs.*

Corollaire .3 *[10]Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors, A est régulier intérieur, si et seulement si $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$ sont fermés et admettent des supplémentaires dans E et F respectivement.*
Il est intéressant de considérer les inverses généralisés intérieurs liés aux sous-espaces supplémentaires donnés de $\mathcal{N}(A)$ et $\mathcal{R}(A)$.
D'une façon équivalente, si B est un inverse généralisé intérieur de A, nous voulons trouver les formes matricielles de A et B selon les décompositions $E = \mathcal{R}(BA) \oplus \mathcal{N}(A)$ et $F = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(AB)$. Ainsi, nous prouvons le résultat suivant.

Théorème 2.3 *[10]Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ régulier intérieur, et soient M et N deux sous-espaces fermés de E et F respectivement, tels que $E = M \oplus \mathcal{N}(A)$, et $F = \mathcal{R}(A) \oplus N$. Alors A a la forme matricielle suivante*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ N \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

où A_{11} est inversible.
De plus, si B est un inverse généralisé intérieur de A tel que $\mathcal{R}(BA) = M$ et $\mathcal{N}(AB) = N$, alors B est de la forme

$$B= \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

où $W \in \mathcal{L}(N, \mathcal{N}(A))$ est arbitraire.

Preuve. *Pour vérifier que A possède cette forme, voir 2.1. Selon 2.2 nous savons d'après le Theorem 2.2 que B est de la forme :*

$$B = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & U \\ V & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}.$$

Si $\mathcal{R}(BA) = M$, alors BA est la projection de E sur M parallèle à $\mathcal{N}(A)$. Donc,

$$BA = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}.$$

D'autre part,

$$BA = \begin{bmatrix} I & 0 \\ VA_{11} & 0 \end{bmatrix},$$

selon la même décomposition. Ainsi, $V = 0$. De la même raison, AB est la projection de F sur $\mathcal{R}(A)$ parallèle à N. Enfin, nous obtenons que $U = 0$. ■

Définition .21 *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. S'il existe $B \in \mathcal{L}(F, E), B \neq 0$ tel que $BAB = B$, alors B est dit inverse généralisé extérieur de A, et dans ce cas, l'opérateur A est régulier extérieur.*

Exemple .3 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ l'opérateur linéaire défini par la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On cherche à trouver un inverse généralisé extérieur de A.
On sait que A est régulier extérieur si et seulement si il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2); B \neq 0$ tel que $BAB = \ B$.
Soit

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alors on a :

$$BAB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Donc B est un inverse généralisé extérieur de A et A est régulier extérieur.

Exemple .4 *soit $A \in \mathcal{L}(E, F), A \neq 0$ et $B \in \mathcal{L}(F, E)$ est un inverse généralisé intérieur de A, donc A est un inverse généralisé extérieur de B tel que $ABAB = AB = I_F$.*

Remarque .2 *L'ensemble de tous les inverses généralisés extérieurs est noté par $A^{\{2\}}$.*

Remarque .3 *Si B est un inverse généralisé extérieur de A, alors A est un inverse généralisé intérieur de B.*

Définition .22 *Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Un opérateur $B \in \mathcal{L}(F, E)$ est dit inverse généralisé réflexif de A, s'il est un inverse généralisé intérieur et extérieur de A.*

Exemple .5 *Pour déterminer si B est un inverse généralisé réflexif de A, nous devons vérifier s'il est à la fois un inverse généralisé intérieur et extérieur de A.*
Commençons par chercher un inverse généralisé intérieur B. Nous devons trouver une matrice B telle que $ABA = A$. Soit

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi, B est un inverse généralisé intérieur de A.
Ensuite, cherchons un inverse généralisé extérieur B. Nous devons trouver une matrice B telle que :

$$BAB = B.$$

Donc B est également un inverse généralisé extérieur de A.
Puisque B est à la fois un inverse généralisé intérieur et extérieur de A, alors B est un inverse généralisé réflexif de A.

Remarque .4 *On note l'ensemble de tous les inverses généralisés réflexifs de A par $A^{\{1,2\}}$.*

Exemple .6 *L'opérateur de décalage à gauche V est un inverse généralisé réflexif de l'opérateur de décalage à droite S.*

Corollaire .4 *[10]Supposons que les conditions du Théorème 2.3 sont satisfaites, où A est de la forme (2.3) et B est de la forme (2.4). Alors, B est un inverse généralisé réflexif de A si et seulement si $W = 0$.*
Preuve. *Il s'agit d'une simple conséquence de l'égalité $BAB = A$.* ■

Lemme .2 *[10]Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ régulier intérieur, et soit $\widetilde{P}$ l'ensemble des projections de E sur $\mathcal{N}(A)$, et $\widetilde{Q}$ l'ensemble des projections de F sur $\mathcal{R}(A)$, Alors :*

$$card(\widetilde{P} \times \widetilde{Q}) = card(A^{\{1,2\}}).$$

Preuve. *Chaque projection de $\widetilde{P}$ est déterminée de façon unique par un sous-espace fermé M, qui satisfait $E = M \oplus \mathcal{N}(A)$. De même, chaque projection de $\widetilde{Q}$ est déterminée de façon unique par un sous-espace fermé N qui satisfait $F = \mathcal{R}(A) \oplus N$. Donc, un opérateur régulier intérieur A et une paire de projections $(P, Q) \in (\widetilde{P}, \widetilde{Q})$ déterminent de façon unique un inverse généralisé réflexif*

$$B = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}.$$

de A (voir Corollaire .4).

Ainsi, nous construisons l'application $f : \widetilde{P} \times \widetilde{Q} \to A^{\{1,2\}}$. D'autre part, si $B \in A^{\{1,2\}}$, alors les projections $Q = I - BA \in \widetilde{Q}$ et $P = AB \in \widetilde{P}$ sont déterminées de façon unique. Ainsi, nous construisons l'application $g : A^{\{1,2\}} \to \widetilde{P} \times \widetilde{Q}$. Il est facile de voir que $g = f^{-1}$. ■

Remarque .5 *Les corollaires .3 ou .4 représentent une preuve constructive qu'un inverse généralisé régulier intérieur est déterminé uniquement par son image et son noyau. Nous voyons aussi que c'est une propriété des inverses généralisés extérieurs.*

Théorème 2.4 *[10]Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors, il existe un inverse généralisé extérieur non nul $B \in \mathcal{L}(F,E)$ de A si et seulement si $A \neq 0$.*

Preuve. *Si $BAB = B$ et $B \neq 0$, il est évident que $A \neq 0$. D'autre part, si $A \neq 0$, alors il existe $x_0 \in E$ tel que $Ax_0 = y_0 \neq 0$. Considérons les décompositions : $E = \mathrm{vect}\{x_0\} \oplus M$ et $F = \mathrm{vect}\{y_0\} \oplus N$ pour certains sous-espaces fermés M de E et N de F. Alors A est de la forme matricielle*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathrm{vect}\{x_0\} \\ M \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathrm{vect}\{y_0\} \\ N \end{bmatrix}.$$

Ici, $A_{11}x_0 = Ax_0 = y_0$ et A_{11} est inversible. Considérons l'opérateur

$$B = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathrm{vect}\{y_0\} \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathrm{vect}\{x_0\} \\ M \end{bmatrix}.$$

Évidemment, $B \neq 0$ et il est facile de vérifier que $BAB = B$. ■

Théorème 2.5 *[10]Soit $A \in \mathcal{L}(E,F)$ un opérateur non nul, et soient M et N deux sous-espaces de E et F. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) Il existe un opérateur non nul $B \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que $BAB = B$, $\mathcal{R}(B) = M$ et $\mathcal{N}(B) = N$.

(2) M et N sont des sous-espaces fermés admettant des supplémentaires dans E et F respectivement, $A(M)$ est fermé, $A(M) \oplus N = F$, et la restriction $A|_M : M \to A(M)$ est inversible.

Si (1) ou (2) est satisfait, alors l'opérateur B de (1) est unique.

Preuve. *:*

(2) ⇒ (1) Il existe un sous-espace fermé M_1 de E tel que $E = M \oplus M_1$. De plus, $F = A(M) \oplus N$. Considérons la forme matricielle de A selon ces décompositions

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ A_4 & A_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ M_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A(M) \\ N \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Comme A envoie M sur $A(M)$, on obtient que $A_3 = 0$; et comme la restriction

$$A_1 = A|_M : M \to A(M)$$

est inversible, l'opérateur

$$B_1 = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} A(M) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ M_1 \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

satisfait aux conditions de (1).

Maintenant, considérons un opérateur arbitraire $B \in \mathcal{L}(F, E)$ satisfaisant aux conditions de (1). Alors B a la forme

$$B = \begin{bmatrix} L & U \\ V & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} A(M) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ M_1 \end{bmatrix}.$$

pour certains opérateurs linéaires et bornés L, U, V et W. La condition $\mathcal{R}(B) = M$ implique que $V = 0$ et $W = 0$. Si $\mathcal{N}(B) = N$, alors $U = 0$, et L doit être inversible. Maintenant la condition $BAB = B$ implique que $LA_1L = L$. Comme L est inversible, on obtient $L = A_1^{-1}$. Ainsi, $B = B_1$. Par la construction, B est unique.

■

Théorème 2.6 *Soit $BAB = B \neq 0$, $\mathcal{R}(B) = M$ et $\mathcal{N}(B) = N$. Comme A est un inverse généralisé intérieur de B, alors BA est une projection de E sur $M = \mathcal{R}(B)$, et $I - AB$ est une projection de F sur $N = \mathcal{N}(B)$. Donc $A(M) = \mathcal{R}(AB)$ est un sous-espace fermé supplémentaire de N dans F. Maintenant, on a la restriction : $A|_M : M \to A(M)$ est surjective. Supposons qu'il existe $x \in M$ tel que $Ax = 0$. Alors il existe $y \in F$ tel que $By = x$. Ainsi, nous obtenons $0 = BAx = BABy = By$, ce qui implique que $x = 0$. Il en résulte que $A|_M$ est injectif. Enfin, $A|_M : M \to A(M)$ est inversible.*

Théorème 2.7 *Si les conditions du Théorème 2.5 sont satisfaites, alors il existe un unique inverse généralisé extérieur B de A à l'image M et au noyau N.*

Remarque .6 *On note B par $A^{(2)}_{M,N}$. Nous prouvons la représentation matricielle de A et de son inverse généralisé extérieur $A^{(2)}_{M,N}$ dans le corollaire suivant.*

Corollaire .5 *[10]Supposons que les conditions du Théorème 2.5 sont satisfaites, et que $B = A^{(2)}_{M,N}$ est l'inverse généralisé extérieur correspondant de A. Alors A a la forme matricielle suivante*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(BA) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} A(M) \\ N \end{bmatrix}.$$

où A_1 est inversible. De plus, l'inverse généralisé extérieur $A^{(2)}_{M,N}$ de A a la forme suivante

$$B = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} A(M) \\ N \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(BA) \end{bmatrix}.$$

Preuve. *Prenons $M_1 = \mathcal{N}(BA)$ dans la preuve du Théorème 2.5 et considérons la forme de A donnée dans Théorème 2.5, avec $A_4 = 0$. Aussi, $B = B_1$ a la forme 2.6. Maintenant,*

$$BA = \begin{bmatrix} I & A_1^{-1}A_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(BA) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} M \\ \mathcal{N}(BA) \end{bmatrix}.$$

Comme BA est la projection sur $\mathcal{R}(BA) = \mathcal{R}(B) = M$ parallèle à $\mathcal{N}(BA)$, alors $A_3 = 0$. Le reste découle de la preuve du Théorème 2.5. ■

Lemme .3 *[10]Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$.*

(1) Si A est inversible, alors A^{-1} est le seul inverse généralisé intérieur de A.

(2) Si $B, C \in \mathcal{L}(F, E)$ sont des inverses généralisés intérieurs de A, alors BAC est un inverse généralisé réflexif de A.

(3) Si $B \in \mathcal{L}(F, E)$ est un inverse généralisé intérieur ou extérieur de A, alors AB est une projection de $\mathcal{L}(F)$ et BA est une projection de $\mathcal{L}(E)$.

Preuve. *evidente.* ■

2.2 Inverse de Moore-Penrose

Définition .23 *Soient H et K deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H, K)$ un opérateur à image fermée. Comme tout sous-espace fermé d'un espace de Hilbert admet toujours un supplémentaire, alors A est régulier si et seulement si $A \neq 0$ et $\mathcal{R}(A)$ est fermé. Aussi, l'inverse de Moore-Penrose de A, que nous allons définir, est un opérateur borné si et seulement si $A \neq 0$ et $\mathcal{R}(A)$ est fermé.*
De plus, nous savons que l'inverse réflexif de A est déterminé uniquement par son image et son noyau.
Soit $B \in \mathcal{L}(K, H)$ un opérateur vérifiant les équations

$$ABA = A \quad \text{et} \quad BAB = B,$$

c'est-à-dire B est un inverse réflexif de A et alors A est régulier.
Ensuite, nous pouvons aussi exiger que

$$\mathcal{R}(B) = \mathcal{N}(A)^{\perp} = \mathcal{R}(A^*) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(B) = \mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^*). \tag{2.7}$$

où A^* est l'adjoint de A.

Définition .24 *Un opérateur B avec les propriétés précédentes existe toujours, il est unique et il est appelé l'inverse de Moore-Penrose de A, que l'on note $B = A^{\times}$.*
Dans ce cas, $AA^{\times}$ est la projection de K sur $\mathcal{R}(A)$ parallèle à $\mathcal{N}(A^{*})$, et $A^{\times}A$ est la projection de H sur $\mathcal{R}(A^{*})$ parallèle à $\mathcal{N}(A)$. Donc, d'après la relation 2.7, ces deux opérateurs $AA^{\times}$ et $A^{\times}A$ sont des projections orthogonales.
Ainsi l'éxiistence et l'unicite de l'nverse de Moore-Penrose de A est peut étre décrit par les les equation de Penrose énoncées des terme suivant.

Théorème 2.8 *$A \in \mathcal{L}(H, K)$ un opérateur à image fermée. Alors il existe un unique opérateur $A^{\times} \in \mathcal{L}(K, H)$ satisfaisant les équations (de Penrose) suivantes*

(1) $AA^{\times}A = A.$

(2) $A^{\times}AA^{\times} = A^{\times}.$

(3) $(AA^{\times})^{*} = AA^{\times}.$

(4) $(A^{\times}A)^{*} = A^{\times}A\,.$

Preuve. *:*
L'existence *: L'existence est évidente en utilisant le lemme $(.3)$, (2) et (3).*
l'unicité : *De (2) et (3) on obtient*

$$A^{\times} = A^{\times}(AA^{\times})^{*} = A^{\times}(A^{\times})^{*}A^{*}. \tag{5}$$

De (2) et (4) on obtient

$$A^{\times} = (A^{\times}A)^{*}A^{\times} = A^{*}(A^{\times})^{*}A^{\times}. \tag{6}$$

De (1) et (3) on obtient

$$A = (AA^{\times})^{*}A = (A^{\times})^{*}A^{*}A. \tag{7}$$

En prenant les adjoints, nous avons

$$A^{*} = A^{*}AA^{\times}\,. \tag{8}$$

En utilisant (1) et (4), on obtient

$$A = A(A^{\times}A)^{*} = AA^{*}(A^{\times})^{*}. \tag{9}$$

et donc, en prenant les adjoints, nous avons

$$A^{*} = A^{\times}AA^{*}. \tag{10}$$

Supposons maintenant qu'il existe deux opérateurs X et Y dans $\mathcal{L}(K, H)$ vérifiant les équations de Penrose. Alors,

$$\begin{aligned} X &= XX^*A^* \quad \textit{par } (5) \\ &= XX^*A^*AY \quad \textit{par } (8) \\ &= XAY \quad \textit{par } (7) \\ &= XAA^*Y^*Y \quad \textit{par } (6) \\ &= A^*Y^*Y \quad \textit{par } (10) \\ &= Y \quad \textit{par } (6)\,. \end{aligned}$$

Une autre preuve de l'unicité est la suivante. Supposons que X et Y sont deux inverses de Moore-Penrose de A. Alors, les opérateurs AX, XA, AY, YA sont auto-adjoints. Nous savons que le produit de deux opérateurs auto-adjoints est un opérateur auto-adjoint si et seulement s'ils commutent. Par conséquent, comme

$$AX = (AY)(AX)$$

est auto-adjoint, les opérateurs AX et AY commutent, et donc nous avons

$$AX = AYAX = \; AXAY = \; AY.$$

De même, nous prouvons que $XA = YA$.
Maintenant,

$$X = XAX \quad = XAY \quad = YAY = Y.$$

■

Remarque .7 *Si $X \in \mathcal{L}(K, H)$ satisfaisant l'équation (1), c'est-à-dire $AXA = A$ alors X est appelé aussi $\{1\}$-inverse de A, i.e $X \in A^{\{1\}}$. De même, nous définissons les ensembles d'opérateurs $A^{\{2\}}, A^{\{1,2\}}, A^{\{1,3\}}$, etc.*
Dans le cas où A à une image fermée, $A^{\{1,2,3,4\}} = \{A^\times\}$.

Exemple .7 *L'opérateur de décalage à gauche V est un inverse de Moore-Penrose de l'opérateur de décalage à droite S.*
On a vu précédement que $VSV = V$ et $SVS = S$. D'autre part, on sait que $V^* = S$ et que $VS = I$, donc

$$(SV)^* = (V^*V)^* = V^*V = SV.$$

Définition .25 *[18](Moore 1920) Si $A \in \mathcal{L}(H,K)$ est un opérateur à image fermée, alors $A^\times$ est l'opérateur unique dans $\mathcal{L}(K,H)$ satisfaisant*

$$AA^\times = P_{\mathcal{R}(A)} \quad \text{et} \quad A^\times A = P_{\mathcal{R}(A^*)}.$$

Définition .26 *[20](Penrose 1955) Si $A \in \mathcal{L}(H,K)$ est un opérateur à image fermée, alors $A^\times$ est l'opérateur unique dans $\mathcal{L}(K,H)$ satisfaisant*

(1) $AA^\times A = A$.

(2) $A^\times AA^\times = A^\times$.

(3) $(AA^\times)^* = AA^\times$.

(4) $(A^\times A)^* = A^\times A$.

Théorème 2.9 *Les définitions .25 et .26 sont équivalentes.*

Preuve.

$(.25) \Rightarrow (.26)$ *Si A satisfait la définition .25, alors $AA^\times$ et $A^\times A$ sont auto-adjoints comme projections orthogonales. De plus,*

$$AA^\times A = P_{\mathcal{R}(A)}A = A$$

et

$$A^\times AA^\times = P_{\mathcal{R}(A^\times)}A^\times = A^\times.$$

Ainsi, A satisfait la définition .26.

$(.26) \Rightarrow (.25)$ *Si A satisfait la définition .26, alors*

$$(AA^\times)(AA^\times) = A(A^\times AA^\times) = AA^\times.$$

Par conséquent, l'opérateur $AA^\times$ est un opérateur idempotent auto-adjoint et donc il est la projection sur le sous-espace

$$M = \{x = AA^\times y, y \in K\} = \mathcal{R}(AA^\times).$$

Comme $AA^\times A = A$, alors $\mathcal{R}(A) \subset M$. De plus, si $x \in M$ et pour tout $z \in \mathcal{N}(A^\times)$, alors

$$\langle x, z\rangle = \langle AA^\times y, z\rangle = \langle A^\times y, A^* z\rangle = 0,$$

et donc

$$M \subset \mathcal{N}(A^\times)^\perp = \mathcal{R}(A).$$

Par conséquent, $AA^\times = P_{\mathcal{R}(A)}$.

De même, on obtient que $A^{\times}A = P_{\mathcal{R}(A^{\times})}$.

■

Théorème 2.10 *Soit* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ *i.e* A *est une matrice* $m \times n$ *de rang* r. *Si* $\{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ *est une base de* $\mathcal{R}(A^*)$ *et* $\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}\}$ *est une base de* $\mathcal{N}(A^*)$*, alors*

$$A^{\times} = [u_1, u_2, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0][Au_1, Au_2, \ldots, Au_r, v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}]^{-1}.$$

Preuve. *En utilisons la définition de* $A^{\times}$*, nous trouvons*

$$\begin{aligned} A^{\times}[Au_1, Au_2, \ldots, Au_r, v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}] &= [A^{\times}Au_1, A^{\times}Au_2, \ldots, A^{\times}Au_r, A^{\times}v, A^{\times}v_2, \ldots, A^{\times}v_{n-r}] \\ &= [u_1, u_2, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0] \end{aligned}$$

D'autre part, $\{Au_1, Au_2, \ldots, Au_r, v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}\}$ *est une base de* $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)$*, donc*

$$A^{\times} = [u_1, u_2, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0][Au_1, Au_2, \ldots, Au_r, v_1, v_2, \ldots, v_{n-r}]^{-1}.$$

■

Exemple .8 *Soit* $A \in \mathbb{C}_2^{4\times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculons $A^{\times} \in \mathbb{C}_2^{3\times 4}$.

On a $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *est une base de* $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^{\times})$ *et*

$$A \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \quad , \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$A^{\times} \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{\times} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Nous devons maintenant calculer la base de $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A)^\perp$.

On résout le système $A^*x = 0$. Nous obtenons que $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\right\}$ *est une base de* $\mathcal{N}\left(A^*\right)$,

donc,

$$A^\times \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0 \quad \textit{et} \quad A^\times \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0.$$

Alors

$$A^\times \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 \\ 14 & -4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 5 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\begin{aligned} A^\times &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 & 0 \\ 14 & -4 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 5 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & 2 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{47} \begin{pmatrix} 10 & 28 & 10 & -8 \\ 6 & 18 & 6 & -6 \\ 16 & 46 & 16 & -14 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.3 Équations linéaires

Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. Considérons l'équation linéaire suivante

$$Ax = b. \tag{2.8}$$

(*1*) Si A est inversible, alors la solution unique de (2.8) est donnée par $A^{-1}b$.

(*2*) Si A n'est pas inversible et $b \in \mathcal{R}(A)$, alors il existe une solution (plusieurs solutions possibles) de (2.8).

(*3*) Si $b \notin \mathcal{R}(A)$, alors il n'y a pas de solution de (2.8).

Dans les deux derniers cas, il est possible d'utiliser les inverses généralisés de A pour obtenir des solutions.

Définition .27 *Un vecteur $x_0 \in E$ est la meilleure solution approximative de l'équation (2.8) si et seulement si il vérifie*

$$\|Ax_0 - b\| = \min_{x \in E} \|Ax - b\| .$$

Lemme .4 *[10]Soient M et N deux sous-espaces fermés de E, $E = M \oplus N$, et soit $P_{N,M}$ la projection de E sur N parallèle à M. Alors,*

$$\|v\| \leq \|u + v\| ,$$

pour tout $u \in M$ et tout $v \in N$ si et seulement si $\|P_{N,M}\| = 1$.

Théorème 2.11 *[10]Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ régulier intérieur, et $B \in \mathcal{L}(F, E)$ est un inverse généralisé intérieur de A*

(1) *Si $b \in F$ est donné, et $\|I - AB\| = 1$, Alors $x_0 = Bb$ est la meilleure solution approximative de l'équation $Ax = b$.*

(2) *D'autre part, si $x_0 = Bb$ est la meilleure solution approximative de l'équation $Ax = b$ pour tout $b \in F$, alors $\|I - AB\| = 1$.*

Preuve. *Puisque A est régulier intérieur, A a la décomposition suivante*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(BA) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(AB) \end{bmatrix},$$

où A_{11} est inversible. Comme B est un inverse généralisé intérieur de A, alors B est de la forme

$$B = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(AB) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(BA) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix},$$

où $W \in \mathcal{L}(\mathcal{N}(AB), \mathcal{N}(A))$ est arbitraire (utiliser le Théorème 2.3). Soit

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(AB) \end{bmatrix}.$$

Nous avons $ABb - b = -b_2$. Pour

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \mathcal{R}(BA) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix},$$

nous avons que

$$Ax - b = \begin{bmatrix} A_{11}x_1 - b_1 \\ -b_2 \end{bmatrix}.$$

Maintenant, soit $\|I - \ AB\| = 1$*. Par le lemme .4, on obtient que* $x_0 = Bb$ *est la meilleure solution approximative de l'équation*

$$Ax = b.$$

D'autre part, soit $x_0 = Bb$ *est la meilleure solution approximative de l'équation* $Ax = b$ *pour tout* $b \in F$*. Comme* A_{11} *est inversible, nous savons que l'application*

$$x_1 \mapsto A_1 x_1 - b_1 = z \in \mathcal{R}(A).$$

est inversible. Maintenant, $x_0 = Bb$ *est la meilleure solution approximative de*

$$Ax = b.$$

pour tout $b \in K$ *si et seulement si* $\|b_2\| \leq \left\| \begin{bmatrix} z \\ b_2 \end{bmatrix} \right\|$ *pour* $z \in \mathcal{R}(A)$ *arbitraire et* $b_2 \in \mathcal{N}(AB)$*.*
Par le lemme .4, on obtient que $\|I - AB\| = 1$*.* ∎

Théorème 2.12 *[10]Soit* $A \in \mathcal{L}(H, K)$ *un opérateur à image fermée et soit* $b \in K$*. Alors* $x_0 = A^{\times} b$ *est la meilleure solution approximative de l'équation linéaire* $Ax = b$*, où* $A^{\times}$ *est l'inverse généralisé de Moore-Penrose de* A*.*
De plus, si V *est l'ensemble de toutes les meilleures solutions approximatives de l'équation* $Ax = b$*, alors*

$$\|x_0\| \ = \min\{\|x\|, x \in V\}.$$

Preuve. *Les espaces* H *et* K *ont les décompositions orthogonales suivantes*

$$H = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A), K = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*).$$

Selon ces décompositions, l'opérateur A *a la forme matricielle*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

où A_1 *est inversible. Alors* $A^{\times}$ *a la forme matricielle suivante*

$$A^{\times} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix}.$$

Soit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in H$ *et* $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \in K$*, alors* $Ax = A_1 x_1$ *et* $A^{\times} b = A_1^{-1} b_1$*. Ainsi, si* $x_1 = A_1^{-1} b_1$*, on a*

$$\min_x \|Ax - b\| = \min_{x_1}(\|A_1 x_1 - b_1\|^2 + ||b_2||^2) = ||b_2||^2.$$

Donc toutes les meilleures solutions approximatives de l'équation $Ax = b$ ont la forme

$$\begin{bmatrix} A_1^{-1}b_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

où x_2 est arbitraire.
Aussi, on voit que si $x_2 = 0$, c'est-à-dire $x_0 = A_1^{-1}b_1 = A^{\times}b$, alors

$$\min\{\|x\|^2, x \in V\} = \min\{\left\|A_1^{-1}b_1\right\|^2 + \|x_2\|^2\} = \left\|A_1^{-1}b_1\right\|.$$

■

Remarque .8 *Nous remarquons que le vecteur $Pb \in \mathcal{R}(A)$ (où P est la projection orthogonale de F sur $\mathcal{R}(A)$) est le vecteur le plus proche de b, et il est raisonnable de considérer comme une solution généralisée de l'équation*

$$Ax = b.$$

toute solution $u \in H$ de l'équation

$$Ax = Pb. \tag{2.9}$$

Ensuite, nous pouvons prouver le théorème suivant

Théorème 2.13 *[10]Soit $A \in \mathcal{L}(H, K)$ un opérateur à image fermée et $b \in K$. Les conditions suivantes sur $u \in H$ sont équivalentes*

(1) $Au = Pb$.

(2) $\|Au - b\| \leq \|Ax - b\|$ *pour tout* $x \in H$.

(3) $A^*Au = A^*b$.

Preuve.

(1) ⇒ (2) *Supposons que $Au = Pb$. Alors pour tout $x \in H$, on a par le théorème de Pythagore et comme $Pb \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$,*

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 &= \|Ax - Pb + Pb - b\|^2 \\ &\geq \|Ax - Pb\|^2 + \|Pb - b\|^2 \\ &\geq \|Ax - Pb\|^2 + \|Au - b\|^2 \\ &\geq \|Au - b\|^2. \end{aligned}$$

Donc, $\|Au - b\| \leq \|Ax - b\|$ pour tout $x \in H$.

$(2) \Rightarrow (3)$ *Comme* $Pb \in \mathcal{R}(A)$, *il existe* $x \in E$ *tel que* $Pb = Ax$. *Ainsi, en utilisant le théorème de Pythagore, on a*

$$\begin{aligned} \|Ax - b\|^2 &= \|Au - Pb\|^2 + \|b - Pb\|^2 \\ &\geq \|Au - Pb\|^2 + \|b - Au\|^2, \end{aligned}$$

alors, $Au - Pb = 0$ *i.e,* $Au = Pb$. *Donc*

$$Au - b = Pb - b \in \mathcal{R}(A)^{\perp} = \mathcal{N}(A^*),$$

d'où, $A^*Au = A^*b$.

$(3) \Rightarrow (1)$ *Si* (3) *est vérifiée, alors* $Au - b \in \mathcal{R}(A)^{\perp}$, *et donc*

$$0 = P(Au - b) = Au - Pb.$$

Ainsi , $Au = Pb$. (1) *est vérifiée.*

■

2.4 Inverse de Moore-Penrose de quelques opérateurs

2.4.1 Opérateur adjoint

Soit H de espace de Hilbert.

Théorème 2.14 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$ *et* $A \neq 0$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) $A^{\times}$ *existe.*

(2) $(AA^*)^{\times}$ *existe.*

(3) $(A^*)^{\times}$ *existe.*

(4) $(A^*A)^{\times}$ *existe.*

Preuve.

$(1) \Longleftrightarrow (2)$ *Il est claire que* $\mathcal{R}(AA^*) \subset \mathcal{R}(A)$. *D'autre part,*

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^{\times}A) \subset \mathcal{R}(AA^{\times}) = A(\mathcal{R}(A^{\times})) = A(\mathcal{R}(A^*)) = \mathcal{R}(AA^*).$$

Alors $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(AA^*)$.

(3) $\Longleftrightarrow$ *(4)* *Il est claire que* $\mathcal{R}(A^*A) \subset \mathcal{R}(A^*)$. *D'autre part,*

$$\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^*(A^*)^\times A^*) \subset \mathcal{R}(A^*(A^*)^\times) = A^*(\mathcal{R}((A^*)^\times)) = A^*(\mathcal{R}(A)) = \mathcal{R}(A^*A).$$

Alors $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^*A)$.

(1) $\Longleftrightarrow$ *(3)* $\mathcal{R}(A)$ *fermée et de plus* $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp \Longrightarrow \mathcal{R}(A^*)$ *fermée et* $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^{**}) = \mathcal{N}(A^*)^\perp \Longleftrightarrow A = (A^\times)^\times$ *exist et* $\mathcal{R}(A^\times) = \mathcal{R}(A^*)$ *fermée* $\Longrightarrow (A^*)^\times$ *existe.*

■

Proposition .14 *Soit* $A \in \mathcal{L}(H)$ *et* $A \neq 0$. *Si* $\mathcal{R}(A)$ *est fermé, alors*

(1) $(A^*)^\times = (A^\times)^*$.

(2) $(A^*A)^\times = A^\times(A^\times)^*$.

(3) $(AA^*)^\times = (A^\times)^*A^\times$.

(4) $A^* = A^\times AA^* = A^*AA^\times$.

(5) $A^\times = (A^*A)^\times A^* = A^*(AA^*)^\times$.

(6) $(A^*)^\times = A(A^*A)^\times = (AA^*)^\times A$.

Preuve. *:*

(1) *D'après la définition de* $A^\times$, *on obtient*

$$\begin{aligned} (A^\times)^*A^*(A^\times)^* &= (A^\times AA^\times)^* = (A^\times)^*, \\ A^*(A^\times)^*A^* &= (AA^\times A)^* = A^*, \\ (A^*(A^\times)^*)^* &= A^\times A = (A^\times A)^* = A^*(A^\times)^*, \end{aligned}$$

et

$$((A^\times)^*A^*)^* = AA^\times = (AA^\times)^* = (A^\times)^*A^*.$$

Donc, $(A^\times)^*$ *est l'inverse de Moore-Penrose de* A^*.

(2) *On a*

$$\begin{aligned} A^*AA^\times(A^\times)^*A^*A &= A^*AA^\times(AA^\times)^*A \\ &= A^*AA^\times AA^\times A \\ &= A^*A, \\ A^\times(A^\times)^*A^*AA^\times(A^\times)^* &= A^\times(AA^\times)^*AA^\times(A^\times)^* \\ &= A^\times AA^\times AA^\times(A^\times)^* \\ &= A^\times(A^\times)^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A^{\times}(A^{\times})^{*}A^{*}A &= A^{\times}(AA^{\times})^{*}A \\ &= A^{\times}(AA^{\times})A \\ &= A^{\times}A \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A^{*}AA^{\times}(A^{\times})^{*} &= A^{*}(AA^{\times})(A^{\times})^{*} \\ &= A^{*}(AA^{\times})^{*}(A^{\times})^{*} \\ &= \big(A^{\times}(AA^{\times})A\big)^{*} \\ &= \big(A^{\times}A\big)^{*} \\ &= A^{\times}A. \end{aligned}$$

Car $A^{\times}A$ est auto-adjoint, Alors $A^{\times}(A^{\times})^{*}A^{*}A$ et $A^{*}AA^{\times}(A^{\times})^{*}$ sout auto-adjoints. Alors $A^{\times}(A^{\times})^{*}$ est l'inverse de Moore-Penrose de $A^{*}A$.

(*3*) *On déduit de* (2) *en remplaçant A par $A^{\times}$.*

(*4*) *Comme $A^{\times}A$ est une projection sur $\mathcal{R}(A^{*})$, on obtient*

$$A^{*} = A^{\times}AA^{*} = (A^{\times}A)^{*}A^{*} = A^{*}(AA^{\times})^{*} = A^{*}AA^{\times}.$$

(*5*) *Il est bien clair que $A^{\times} = A^{\times}(A^{\times})^{*}A^{*}$. Par l'utilisation de* (2)*, on obtient la première égalité. et par même méthode, on peut trouver la deuxième égalité.*

(*6*) *Se déduit de* (5).

■

Proposition .15 *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ à image fermée. Si A est auto-adjoint (resp, normal, positif), alors $A^{\times}$ est auto-adjoint (resp, normal, positif).*

Preuve.

(*i*) $A = A^{*} \Longrightarrow A^{\times} = (A^{*})^{\times} = (A^{\times})^{*}$.

(*ii*) $A^{*}A = AA^{*} \Longrightarrow (A^{*}A)^{\times} = (AA^{*})^{\times} \Longrightarrow A^{\times}(A^{\times})^{*} = (A^{\times})^{*}A^{\times}$.

(*iii*) $\forall x \in H$, $\langle A^{\times}x, x\rangle = \langle A^{\times}AA^{\times}x, x\rangle = \langle AA^{\times}x, (A^{\times})^{*}x\rangle = \langle AA^{\times}x, A^{\times}x\rangle \geq 0$.

■

Remarque .9 *Si A est une isométrie, alors $A^{\times}$ est une co-isométrie. En effet*

$$A^{*}A = I \Longrightarrow A^{\times}(A^{\times})^{*} = (A^{*}A)^{\times} = I^{\times} = I.$$

2.4.2 Opérateurs de rang fini

Soit H un espace de Hilbert.

Théorème 2.15 *[14]Soit $A = e \otimes f$ un opérateur de rang un sur H tel que e et $f \in H$ et soit $A^\times$ son inverse de Moore-Penrose. Alors $A^\times$ est aussi de rang un et admet la représentation*

$$A^\times = f_1 \otimes e, \quad \text{où} \quad f_1 = \|f\|^{-2} \|e\|^{-2} f.$$

Preuve. *Soit $A = f \otimes e$. Comme $\mathcal{R}(A^\times) = \mathcal{R}(A^*)$ et que $A^* = e \otimes f$, nous avons que $A^\times$ est aussi de rang un et il prend la forme $A^\times = f_1 \otimes e_1$. Ainsi, pour déterminer $A^\times$, il suffit de déterminer le vecteur f_1. Nous avons $A^\times Ae = e$, puisque $A^\times A$ est une projection sur $\mathcal{R}(A^*)$. Ainsi,*

$$e = A^\times(\langle e, e\rangle f) = \|e\|^{-2} \langle f, f\rangle\, e,$$

ce qui implique $\langle f, f\rangle = \|e\|^{-2}$. Soit $f_1 = \alpha f + u$, où $u \perp f$. Alors $u \in \mathcal{N}(A^\times) = \mathcal{N}(A^*)$ et si

$$A^\times f_1 = \|f_1\|^2 e = (|\alpha|^2 \|f\|^2 + \|u\|^2)e.$$

Aussi,

$$A^\times f_1 = A^\times(\alpha f + u) = \alpha A^\times f = \alpha\langle f, f_1\rangle e = |\alpha|^2 \|f\|^2 e.$$

Et donc $u = 0$ et $f_1 = \alpha f$. Maintenant, en utilisant la relation $\langle f, f_1\rangle = \|e\|^{-2}$, nous obtenons $\alpha = \|e\|^{-2} \|f\|^{-2}$, donc

$$f_1 = \|f\|^{-2} \|e\|^{-2} f.$$

■

Corollaire .6 *Soit $A = f \otimes e$ un opérateur de rang un. Alors, $\|A^\times\| = \|A\|^{-1}$.*

Preuve. *Il est évident que*

$$\left\|A^\times\right\| = \|f_1\| \|e\| = \frac{1}{\|f\|^2 \|e\|^2} \|f\| \|e\| = \frac{1}{\|f\| \|e\|} = \|A\|^{-1}.$$

Ainsi, on a bien montré que $\|A^\times\| = \|A\|^{-1}$. ■

Proposition .16 *[14]Soient $A_1 = e_1 \otimes f_1$ et $A_2 = e_2 \otimes f_2$ deux opérateurs de rang un. Alors,*

$$(A_1A_2)^\times = A_2^\times A_1^\times$$

si et seulement si e_1 et f_2 sont linéairement dépendants.

Preuve. *Il est clair que*

$$A_1A_2 = \langle f_2, e_1\rangle(e_2 \otimes f_1) \quad \text{et} \quad (\lambda A)^\times = \frac{1}{\lambda}A^\times.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$, pour tout opérateur $A \in \mathcal{L}(H)$ à image fermée. Par le Théorème 2.15, on obtient

$$(A_1A_2)^\times = \frac{f_1 \otimes e_2}{\langle f_2, e_1\rangle \|f_1\|^2 \|e_2\|^2} \qquad \text{et} \qquad A^\times A^\times = \frac{\langle f_2, e_1\rangle f_1 \otimes e_2}{\langle f_2, e_1\rangle \|f_1\|^2 \|e_2\|^2 \|f_2\|^2},$$

Donc, par des calculs simples, il est obtenu que $(A_1A_2)^\times = A^\times A^\times$ si et seulement si $\langle f_2, e_1\rangle = \|e_2\|^2 \|f_2\|^2$.

La dernière égalité est valide si et seulement si les vecteurs e_1 et f_2 sont linéairement dépendants (la condition en vertu de laquelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient égalité). ■

Proposition .17 *[4] Soient A et B deux opérateurs de $\mathcal{L}(H)$ à image fermée, alors $(AB)^\times = B^\times A^\times$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées*

- *(1) L'image de AB est fermée.*
- *(2) $A^\times A$ commute avec BB^*.*
- *(3) $BB^\times$ commute avec A^*A.*

Proposition .18 *[14]Soit $A, B \in \mathcal{L}(H)$ deux opérateurs tels que A est inversible et B a une image fermée. Alors, $(AB)^\times = B^\times A^{-1}$ si et seulement si $\mathcal{R}(B) \in \mathrm{lat}(A^*A)$.*

Preuve. *Nous allons utiliser la Proposition .17. Les deux premières conditions de la Proposition .17 sont faciles à vérifier. Pour que la troisième condition soit valide, nous devons prouver que l'opérateur $BB^\times$ commute avec l'opérateur A^*A. Comme l'opérateur $BB^\times$ est la projection de E sur $\mathcal{R}(B)$ et A^*A est auto-adjoint, cela est équivalent à*

$$\mathcal{R}(B) \in Lat(A^*A).$$

■

Corollaire .7 *Soit $B = e \otimes f$ un opérateur de rang un et $A \in \mathcal{L}(H)$ inversible. Alors,*

$$(AB)^\times = B^\times A^{-1}$$

si et seulement si f est un vecteur propre de A^*A.

Théorème 2.16 *[14]Si $A = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$ est un opérateur de rang n, alors son inverse généralisé est également un opérateur de rang n et il est défini par $A^\times x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) e_i$, où les fonctions λ_i sont les solutions d'un système linéaire convenable $(n \times n)$.*

Preuve. *Si* $A=\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$, *alors*

$$\mathcal{R}(A) = \mathrm{vect}\{f_1, f_2, ..., f_n\} \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{R}(A^{\times}) = \mathcal{R}(A^{*}) = \mathrm{vect}\{e_1, e_2, ..., e_n\},$$

Par conséquent, pour tout $x \in H$, *nous avons* $A^{\times}x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)e_i$. *Ainsi, pour déterminer* $A^{\times}$, *il faut calculer les fonctions* $\lambda_i, i = 1, 2, ..., n$.
En utilisant $A^{\times}x = A^{*}AA^{\times}x$, *on obtient*

$$\sum_{i=1}^{n} \langle x, f_i\rangle e_i = A^{*}x = A^{*}AA^{\times}x = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(x) \langle f_i, f_j\rangle e_i.$$

Cette relation conduit au système linéaire de n *équations à* n *inconnues suivant*

$$\langle x, f_i\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_i(x) \langle f_i, f_j\rangle, \qquad \textit{où} \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

Le déterminant de ce système est le déterminant de Gram des vecteurs linéairement indépendants $f_1, ..., f_n$. *Ainsi, le système admet une solution unique avec inconnues les fonctions* $\lambda_i, i = 1, 2, ..., n$.
■

Remarque .10 *En particulier, l'inverse généralisé* $A^{\times}$ *d'un opérateur de rang* 2

$$A=e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2$$

est l'opérateur

$$A^{\times} = \frac{1}{D_A}\{(\|f_2\|^2 f_1 - \langle f_1, f_2\rangle f_2) \otimes e_1 + (\|f_1\|^2 f_2 - \langle f_2, f_1\rangle f_1) \otimes e_2\}$$

avec

$$D_A = \|f_1\|^2 \|f_2\|^2 - |\langle f_1, f_2\rangle|^2 .$$

Chapitre 3

Équations d'opérateurs

Dans ce chapitre, nous explorons le concept général de solution réduite pour une équation de type Douglas et nous paramétrons ces solutions en utilisant des inverses généralisées. De plus, nous caractérisons différents types d'inverses généralisées en utilisant des solutions d'équations de type Douglas. Nous étudions l'existence d'une solution de l'équation $A^*X + X^*A = B$ pour des opérateurs linéaires bornés sur des espaces de Hilbert. Cette solution est exprimée en fonction de l'inverse de Moore-Penrose de l'opérateur A.

3.1 Équations de Douglas

Cette section est consacrée à expliciter la relation entre les notions de solutions de Douglas pour des équations d'opérateurs comme $AX = B$ et celles d'inverses généralisées d'opérateurs linéaires bornés à image fermé. Ces équations surgissent dans de nombreux problèmes d'ingénierie, de physique et de statistiques. Le théorème suivant, bien connu et dû à R. G. Douglas [7], fournit des conditions équivalentes pour l'existence de solutions.

3.1.1 Solutions réduites

La première partie du théorème suivant est une généralisation du théorème de Douglas. Nous incluons la démonstration, qui est similaire à la démonstration originale de Douglas. La deuxième partie fournit une caractérisation des solutions réduites généralisées en termes d'inverses généralisées.

Soient H, K et G des espaces de Hilbert

Théorème 3.1 *[16]Soit $A \in \mathcal{L}(H, K)$, $B \in \mathcal{L}(G, K)$ tels que $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A)$ et soit M un sous-espace fermé de H tel que $\mathcal{N}(A) \oplus M = H$. Alors il existe une solution unique X_M de l'équation $AX = B$*

telle que $\mathcal{R}(X_M) \subset M$*. L'opérateur* X_M *sera appelé la solution réduite de l'équation* $AX = B$ *pour le sous-espace* M*. De plus, si* $A \in \mathcal{L}(H,K)$ *à image fermée et* $Y \in \mathcal{L}(G,H)$*, alors* Y *est la solution réduite de* $AX = B$ *pour* M *si et seulement si* $Y = A'B$ *pour un* $A' \in A^{\{1,2\}}$*.*

Preuve. *Puisque* $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A)$*, pour chaque* $x \in G$*, il existe* $x_M \in M$ *tel que* $Bx = Ax_M$*. Ce* x_M *est unique. En effet, s'il existe* $\widetilde{x}_M \in M$ *tel que* $Bx = A\widetilde{x}_M$*, alors* $A(x_M - \widetilde{x}_M) = 0$*.*
Ainsi,

$$x_M - \widetilde{x}_M \in \mathcal{N}(A) \cap M = \{0\},$$

et donc $x_M = \widetilde{x}_M$*. Par conséquent, l'application*

$$\begin{aligned} X_M : \ & G \to H \\ & x \longmapsto x_M \end{aligned}$$

est bien définie et linéaire. De plus, $X_M \in \mathcal{L}(G,H)$ *car son graphe, noté* Γ_{X_M}*, est fermé. En effet, si* $(x_n, x_{M_n}) \in \Gamma_{X_M}$ *tel que* $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ *et* $x_{M_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_M$*, alors*

$$Ax_M = \lim_{n\to\infty} Ax_{M_n} = \lim_{n\to\infty} Bx_n = Bx,$$

et donc $(x, x_M) \in \Gamma_{X_M}$*. Par la définition de l'opérateur* X_M*, il est clair que* $AX_M = B$ *et que* $\mathcal{R}(X_M) \subset M$*. Il ne reste plus qu'à prouver l'unicité de* X_M*.*
Supposons qu'il existe $D \in \mathcal{L}(G,H)$ *tel que* $AD = B$ *et* $\mathcal{R}(D) \subset M$*. Alors,*

$$B^* = D^*A^* = X_M^*A^*,$$

c'est-à-dire que

$$(D^* - X_M^*)A^* = 0.$$

Cela donne $D^* = X_M^*$ *dans* $\mathcal{N}(A)^{\perp}$*.*
Maintenant, puisque

$$H = \mathcal{N}(A) \oplus M \ = \mathcal{N}(A)^{\perp} \oplus M^{\perp},$$

il suffit de prouver que X_M^* *et* D^**coïncident sur* $M^{\perp}$*. Soit* $z \in M^{\perp}$*, comme*

$$M^{\perp} \subset \mathcal{R}(X_M)^{\perp} = \mathcal{N}(X_M^*) \quad \text{ et } \quad \mathcal{R}(D)^{\perp} = \mathcal{N}(D^*),$$

alors $X_M^*z = D^*z = 0$*, et donc* $X_M = D$*.*
Maintenant, considérons $A \in \mathcal{L}(H,K)$ *à image fermée. Soit* X_M *la solution réduite de l'équation*

$$AX = B,$$

pour un supplémentaire M *de* $\mathcal{N}(A)$*. Nous devons prouver qu'il existe* $A' \in A^{\{1,2\}}$ *tel que*

$$X_M = A'B.$$

Maintenant, puisque $\mathcal{N}(A) \oplus M = H$, nous pouvons prendre l'unique $Q \in \mathcal{Q}_M$, $\mathcal{Q}_M$ désigne l'ensemble des projections avec image M tel que $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{N}(A)$. D'autre part, soit $Q' \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$. Alors,

$$A' = QA^{\times}Q \in A^{\{1,2\}} \qquad \textit{et} \qquad A'B = A'AX_M = QX_M = X_M.$$

Réciproquement, soit $A' \in A^{\{1,2\}}$, Alors, $AA' \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$ et $A'A \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$. Par conséquent,

$$AA'B = B,$$

c'est-à-dire que $A'B$ est une solution de l'équation $AX = B$.
Montrons maintenant qu'il existe un sous-espace fermé M de H tel que

$$\mathcal{R}(A'B) \subset M \qquad \textit{et} \qquad \mathcal{N}(A) \oplus M = H.$$

Tout d'abord, remarquons que puisque AA' a une image fermée, alors, par la Proposition .12, $\mathcal{R}(A') \oplus \mathcal{N}(A)$ est fermé.
De plus, $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A') = \{0\}$. En effet, si $x \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A')$, alors $Ax = 0$ et donc

$$x = A'Ax = 0.$$

Ainsi, $N = \mathcal{R}(A') \oplus \mathcal{N}(A)$ est fermé. Maintenant, considérons $M = \mathcal{R}(A') \oplus N^{\perp}$. Alors, comme $\mathcal{R}(A')^{\perp} \oplus N = H$, selon la Proposition .4, M est fermé. D'autre part, $M \cap \mathcal{N}(A) = \{0\}$ puisque $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A) = \{0\}$ et $\mathcal{N}(A) \subset N$. Ainsi,

$$M \oplus \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A) \oplus N^{\perp} \oplus \mathcal{N}(A) = N \oplus N^{\perp} = H.$$

Par conséquent, M vérifie la condition requise et ainsi $A'B = X_M$. ∎

Corollaire .8 *[16]Si $A \in \mathcal{L}(H, K)$ à image fermée, $B \in \mathcal{L}(G, K)$ et $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A)$, alors $A^{\times}B$ est la solution de Douglas de $AX = B$.*

Corollaire .9 *[16]Sous les mêmes hypothèses du Théorème 3.1, toute solution $\widetilde{X}$ de $AX = B$ peut être écrite sous la forme*

$$\widetilde{X} = X_0 + X_M,$$

où X_0 est une solution quelconque de l'équation homogène $AX = 0$ et X_M est la solution réduite pour un certain M comme précédemment.
Le résultat suivant montre la relation entre les différentes solutions réduites par des projections.

Théorème 3.2 *[16]Soit $A \in \mathcal{L}(H,K)$ à image fermée, $B \in \mathcal{L}(G,K)$ tels que $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(A)$ et soit M un sous-espace fermé de H tel que $M \oplus \mathcal{N}(A) = H$. Alors X_M est la solution réduite pour M de l'équation $AX = B$ si et seulement si*

$$X_M = Q_{M,\,\mathcal{N}(A)} X_{\mathcal{R}(A^*)}.$$

Preuve. *Supposons que X_M est la solution réduite pour M de l'équation $AX = B$. Alors, comme cela a été montré dans la preuve du Théorème 3.1, il existe $Q' \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$ tel que*

$$A' = Q_{M,\,\mathcal{N}(A)} A^{\times} Q' \in A^{\{1,2\}} \qquad \text{et} \qquad X_M = A'B.$$

Ainsi,

$$X_M = A'B = Q_{M,\,\mathcal{N}(A)} A^{\times} Q' B = Q_{M,\,\mathcal{N}(A)} A^{\times} B = Q_{M,\,\mathcal{N}(A)} X_{\mathcal{R}(A^*)}.$$

La troisième égalité tient car $\mathcal{R}(B) \subset \mathcal{R}(Q')$.
Réciproquement, soit $\widetilde{X} = Q_{M,\,\mathcal{N}(A)} X_{\mathcal{R}(A^*)}$. Puisque

$$A(X_{\mathcal{R}(A^*)} - \widetilde{X}) = A(I - Q_{M,\,\mathcal{N}(A)}) X_{\mathcal{R}(A^*)} = A Q_{\mathcal{N}(A),\,M} X_{\mathcal{R}(A^*)} = 0$$

alors $A\widetilde{X} = B$ et donc $\widetilde{X} = X_M$. ■

3.1.2 Inverses généralisées et équation de Douglas

Dans cette section, nous étudions les équations $AB = Q$, où Q est une projection sur l'image de A, et la relation entre leurs solutions avec les ensembles $A^{\{1\}}$, $A^{\{1,i\}}$, $A^{\{1,i,j\}}$ et $A^{\{1,i,j,k\}}$.
Soient H, K deux espaces de Hilbert

Théorème 3.3 *[16]Soit $A \in \mathcal{L}(H,K)$ à image fermée, Alors*

- (i) $A^{\{1\}} = \{X \in \mathcal{L}(K,H), AX = Q$ *pour un certain* $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}\}$.
- (ii) $A^{\{1,2\}} = \{X \in \mathcal{L}(K,H), AX = Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$ *et* $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(Q)\}$.
- (iii) $A^{\{1,3\}} = \{X \in \mathcal{L}(K,H), AX = P_{\mathcal{R}(A)}\}$.
- (iv) $A^{\{1,4\}} = \{X \in \mathcal{L}(K,H), XA = P_{\mathcal{R}(A^*)}\}$.
- (v) $A^{\{1,2,3\}} = \{X \in \mathcal{L}(K,H), AX = P_{\mathcal{R}(A)}$ *et* $\mathcal{N}(X) = \mathcal{R}(A)^{\perp}\}$.
- (vi) $A^{\{1,2,4\}} = \{X \in \mathcal{L}(K,H), XA = P_{\mathcal{R}(A^*)}$ *et* $\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A^*)\}$.
- (vii) $A^{\{1,3,4\}} = \{X \in \mathcal{L}(K,H), AX = P_{\mathcal{R}(A)}$ *et* $XA = P_{\mathcal{R}(A^*)}\}$.
- $(viii)$ $A^{\{1,2,3,4\}} = \{$*solution de Douglas de* $AB = P_{\mathcal{R}(A)}\}$.

Preuve. *:*

(i) *Soit* $X \in A^{\{1\}}$, *i.e* $AXA = A$. *Ainsi,* $AXAX = AX$ *et* $\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(AX) \subset \mathcal{R}(A)$. *Alors* $AX \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$. *Réciproquement, soit* $X \in \mathcal{L}(K,H)$ *tel que* $AX = Q$ *pour un certain* $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$, *alors* $AXA = QA = A$.

(ii) *Considérons* $X \in A^{\{1,2\}}$. *Alors, par* (i), $AX = Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$ *et donc* $\mathcal{N}(X) \subset \mathcal{N}(Q)$. *D'autre part, puisque* $X = XAX = XQ$, $\mathcal{N}(Q) \subset \mathcal{N}(X)$. *Ainsi,* $\mathcal{N}(X) = \mathcal{N}(Q)$. *En sens inverse, choisissons* $X \in \mathcal{L}(K,H)$ *tel que* $AX = Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$ *et* $\mathcal{N}(X) = N(Q)$, *Alors, par* (i), $X \in A^{\{1\}}$. *Pour prouver que* $X \in A^{\{1,2\}}$, *il suffit de remarquer que* $XAX = XQ = X$, *où la dernière égalité est vraie car* $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{R}(I-Q) = \mathcal{N}(X)$.

(iii) *La preuve est immédiate, par* (i), *tout* $X \in A^{\{1,3\}}$ *satisfait* $AX = Q$ *pour un certain* $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$ *et* $(AX)^* = AX$, *Alors,* $Q^* = Q$, *et il doit être* $Q = P_{\mathcal{R}(A)}$. *La réciproque est évidente.*

(iv) *Soit* $X \in A^{\{1,4\}}$, *Alors* $A^*X^*A^* = A^*$ *et donc* $A^*X^* \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A^*)}$. *Maintenant, puisque* $X \in A^{\{4\}}$, $A^*X^* = XA = P_{\mathcal{R}(A^*)}$. *Réciproquement, si* $XA = P_{\mathcal{R}(A^*)} = A^*B^*$, *alors* $A^*X^*A^* = A^*$ *et donc* $X \in A^{\{1,4\}}$.

(v) *Soit* $X \in A^{\{1,2,3\}}$, *Alors, par* (ii), $AX = Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$ *et* $\mathcal{N}(X) = N(Q)$. *De plus, puisque* $X \in A^{\{3\}}$, $Q^* = (AX)^* = AX = Q$, *donc* $Q = P_{\mathcal{R}(A)}$ *et* $\mathcal{N}(X) = \mathcal{R}(A)^\perp$. *Pour prouver l'inverse, nous prenons* X *tel que* $AX = P_{\mathcal{R}(A)}$ *et* $\mathcal{N}(X) = \mathcal{R}(A)^\perp$, *Alors, par* (ii), $X \in A^{\{1,2\}}$ *et* $AX = (AX)^*$. *Cela prouve que* $X \in A^{\{1,2,3\}}$.

(vi) *Soit* $X \in A^{\{1,2,4\}}$. *Par* (iv), $XA = P_{\mathcal{R}(A^*)}$. *Alors* $X = XAX = P_{\mathcal{R}(A^*)}X$ *et donc* $\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$. *Réciproquement, par* (iv), *il suffit de montrer que* $X \in A^{\{2\}}$. *Maintenant,* $XAX = P_{\mathcal{R}(A^*)}X = X$, *où la dernière égalité est vraie car* $\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A^*)$.

(vii) *Il découle de* (iii) *et* (iv).

$(viii)$ *Il suffit de montrer que* $A^\times$ *est la solution réduite de Douglas de* $AX = P_{\mathcal{R}(A)}$, *mais cela découle immédiatement de* (iii) *et* (vi).

■

Remarque .11 *Si* $A \in \mathcal{L}(H,K)$ *à image fermée, alors l'équation* $AX = P_{\mathcal{R}(A)}$ *a une solution. De plus, la solution de Douglas est l'inverse de Moore-Penrose de A. C'est le sens du dernier élément du théorème ci-dessus. Par conséquent, les conditions nécessaires et suffisantes pour que* $D \in \mathcal{L}(K,H)$ *soit l'inverse de Moore-Penrose de A sont* $AD = P_{\mathcal{R}(A)}$ *et* $\mathcal{R}(D) \subset \mathcal{N}(A)^\perp$.

Remarque .12 *Bien sûr, l'équation* $XA = B$ *est équivalente à* $A^*X^* = B^*$ *Par conséquent, les ensembles* $\left(A^{\{1\}}\right)^*$, $\left(A^{\{1,i\}}\right)^*$, $\left(A^{\{1,i,j\}}\right)^*$ *et* $\left(A^{\{1,i,j,k\}}\right)^*$ *sont liés aux solutions des équations* $XA = Q$, *où* $Q^* \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A^*)}$.

Proposition .19 *[16]Si $A \in \mathcal{L}(H,K)$ à image fermée et $A' \in \mathcal{L}(K,H)$, alors $A' \in A^{\{1,2\}}$ si et seulement si $A' = QA^{\times}\widetilde{Q}$, où $I - Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}(A)}$ et $\widetilde{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$.*

Preuve. *Soit $A' \in A^{\{1,2\}}$. Comme $AA^{\times}A = A$, alors $A'AA^{\times}AA' = A'$, et l'affirmation suit en prenant $Q = A'A$ et $\widetilde{Q} = AA'$. Remarquons que $Q = \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A'),\mathcal{N}(A)}$. En effet, $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(A')$ et $\mathcal{N}(Q) = \mathcal{R}(Q^*)^{\perp} = \mathcal{R}(A^*)^{\perp} = \mathcal{N}(A)$. La réciproque suit simplement en vérifiant que $QA^{\times}\widetilde{Q} \in A^{\{1,2\}}$.* ■

Remarque .13 *Soit $A \in \mathcal{L}(H,K)$ à image fermée et*

$$\mathcal{X}_{\mathcal{R}(A^*)} = \{X \in \mathcal{L}(K,H), AX = Q \text{ pour un certain } Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)} \text{tel que} \mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(A^*)\},$$

c'est-à-dire, $\mathcal{X}_{\mathcal{R}(A^*)}$ est l'ensemble des solutions de Douglas des équations $AB = Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$. Remarquons que $\mathcal{X}_{\mathcal{R}(A^*)} \subsetneq A^{\{1,2\}}$. En fait,

$$\mathcal{X}_{\mathcal{R}(A^*)} = \{A^{\times}Q, Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}\}$$

et par la dernière proposition,

$$A^{\{1,2\}} = \{\widetilde{Q}A^{\times}Q, I - \widetilde{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{N}(A)} \quad \text{et} \quad Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}\}.$$

Ensuite, pour tout $Q \in \mathcal{Q}_{\mathcal{R}(A)}$, on a $A^{\times}Q = P_{\mathcal{N}(A)^{\perp}}A^{\times}Q \in A^{\{1,2\}}$, ce qui prouve l'inclusion. Pour voir que c'est une inclusion stricte, nous présentons l'exemple suivant. Dans ce qui suit, pour un $A \in \mathcal{L}(H,K)$ à image fermée fixé, nous utilisons la représentation matricielle 2×2 selon les décompositions $H = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A)$ et $K = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)$.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

observez que $a : \mathcal{R}(A^*) \to \mathcal{R}(A)$ est un isomorphisme. Maintenant, soit $x \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(A^*), \mathcal{N}(A))$, $x \neq 0$. Définissons

$$\widetilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(H) \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{L}(K).$$

Alors

$$\widetilde{Q}A^{\times}Q = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ ba^{-1} & 0 \end{bmatrix} \in A^{\{1,2\}} \quad \text{et} \quad \mathcal{R}(\widetilde{Q}A^{\times}Q) = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{R}(b) \nsubseteq \mathcal{R}(A^*).$$

Par conséquent, $\widetilde{Q}A^{\times}Q \notin \mathcal{X}_{\mathcal{R}(A^*)}$.

3.2 Équation $A^*X + X^*A = B$

Définition .28 *Soient H, K deux espaces de Hilbert, Pour deux opérateurs donnés $A \in \mathcal{L}(H, K)$ et $B \in \mathcal{L}(H)$, nous nous intéressons à trouver la solution $X \in \mathcal{L}(H, K)$ de l'équation*

$$A^*X + X^*A = B, \tag{3.1}$$

Nous mentionnons des équations matricielles similaires qui ont des applications en théorie du contrôle. Ces équations sont étudiées pour des matrices sur des corps, principalement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'équation $CX - XA^\top = B$ est l'équation de Sylvester [15]. Une équation plus générale $AX - XF = BY$ est considérée dans [22]. Un cas particulier et important est l'équation de Lyapunov $AX + XA^\top = B$ [21]. De plus, l'équation de Sylvester généralisée [8] $AV + BW = EVJ + R$ avec les matrices inconnues V et W a de nombreuses applications en théorie des systèmes linéaires .

Définition .29 *Soit $A \in \mathcal{L}(H, K)$ à une image fermée. Alors, $AA^\times$ est la projection orthogonale de K sur $\mathcal{R}(A)$ (parallèle à $\mathcal{N}(A^\times) = \mathcal{N}(A^*)$), et $A^\times A$ est la projection orthogonale de H sur $\mathcal{R}(A^\times) = \mathcal{R}(A^*)$ (parallèle à $\mathcal{N}(A)$). Il en résulte que A a la forme matricielle suivante*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

où A_1 est inversible. Maintenant, l'opérateur $A^\times$ a la forme suivante

$$A^\times = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix},$$

En utilisant ces formes matricielles d'opérateurs avec des images fermées et les propriétés de l'inverse de Moore-Penrose, nous résolvons l'équation (3.1).
Tout d'abord, nous résolvons l'équation (3.1) dans le cas où A est inversible.

Théorème 3.4 *[11]Soit $A \in \mathcal{L}(H, K)$ inversible et $B \in \mathcal{L}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) Il existe une solution $X \in \mathcal{L}(H, K)$ de l'équation (3.1).

(2) $B = B^*$.

Si (1) ou (2) est satisfait, alors toute solution de l'équation (3.1) a la forme suivante

$$X = \frac{1}{2}(A^*)^{-1}B + ZA, \tag{3.2}$$

où $Z \in \mathcal{L}(K)$ satisfait $Z^* = -Z$.

Preuve. (1)$\Longrightarrow$(2) *Évident.*

(2)$\Longrightarrow$(1) *Il est facile de voir que tout opérateur X de la forme (3.2) est une solution de l'équation (3.1). D'autre part, soit X une solution de (3.1). Alors*

$$X = (A^*)^{-1}B - (A^*)^{-1}X^*A \quad \text{et} \quad (A^*)^{-1}X^* = (A^*)^{-1}BA^{-1} - XA^{-1}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(A^*)^{-1}B + (\frac{1}{2}(A^*)^{-1}BA^{-1} - (A^*)^{-1}X^*)A \\ &= \frac{1}{2}(A^*)^{-1}B + (\frac{1}{2}[(A^*)^{-1}X^* + XA^{-1}] - (A^*)^{-1}X^*)A \\ &= \frac{1}{2}(A^*)^{-1}B + \frac{1}{2}(XA^{-1} - (A^*)^{-1}X^*)A. \end{aligned}$$

En posant $Z = \frac{1}{2}(XA^{-1} - (A^*)^{-1}X^*)$, nous obtenons $Z^* = -Z$.
Maintenant, résolvons l'équation (3.1) dans le cas où A a une image fermée. ■

Théorème 3.5 *[11]Soit $A \in \mathcal{L}(H, K)$ a image fermée et $B \in \mathcal{L}(H)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *Il existe une solution $X \in \mathcal{L}(H, K)$ de l'équation (3.1).*

(2) $B = B^*$ *et* $(I - A^\times A)B(I - A^\times A) = 0$.

Si (1) ou (2) est satisfait, alors toute solution de l'équation (3.1) a la forme suivante

$$X = \frac{1}{2}(A^*)^\times BA^\times A + (A^*)^\times B(I - A^\times A) + (I - AA^\times)Y + AA^\times ZA, \tag{3.3}$$

où $Z \in \mathcal{L}(K)$ satisfait $A^*(Z + Z^*)A = 0$ et $Y \in \mathcal{L}(H, K)$ est arbitraire.

Preuve. :

(1) $\Longrightarrow$ (2) *Évidemment, $B^* = B$. De plus,*

$$\begin{aligned} (I - A^\times A)B(I - A^\times A) &= (I - A^\times A)(A^*X + X^*A)(I - A^\times A) \\ &= (A^* - (AA^\times A)^*)X(I - A^\times A) + (I - A^\times A)X^*A(I - A^\times A) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2) $\Longrightarrow$ (1) *Remarquons que la condition*

$$(I - A^\times A)B(I - A^\times A) = 0$$

équivaut à

$$B = A^\times AB + BA^\times A - A^\times ABA^\times A.$$

Tout opérateur X de la forme (3.3) est une solution de l'équation (3.1).

D'autre part, supposons que X soit une solution de l'équation (3.1). Puisque $\mathcal{R}(A)$ est fermée, nous avons $H = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A)$ et $K = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)$. Maintenant, A a la forme matricielle

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

où A_1 est inversible. Les conditions $B = B^*$ et $(I - A^\times A)B(I - A^\times A) = 0$ impliquent que B a la forme suivante

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2^* & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

où $B_1^* = B_1$. Soit X de la forme suivante

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

Alors, $A^*X + X^*A = B$ implique $A_1^*X_{11} + X_{11}^*A_1 = B_1$ et $A_1^*X_{12} = B_2$. Par conséquent, $X_{12} = (A_1^*)^{-1}B_2$. Étant donné que A_1 est inversible, selon le Théorème 3.4, on en déduit que X_{11} a la forme $X_{11} = \frac{1}{2}(A_1^*)^{-1}B_1 + Z_1A_1$, pour un certain opérateur $Z_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{R}(A))$ satisfaisant $Z_1^* = -Z_1$. Ainsi,

$$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_1^*)^{-1}B_1 + Z_1A_1 & (A_1^*)^{-1}B_2 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

X_{21} et X_{22} peut être pris arbitrairement.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A^*) \\ \mathcal{N}(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

et

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_{12} \\ -Z_{21}^* & Z_{22} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathcal{R}(A) \\ \mathcal{N}(A^*) \end{bmatrix},$$

où Y_{11}, Y_{12} et Z_2 sont arbitraires. Remarquez que $A^*(Z + Z^*)A = 0$.

Ensuite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(A^*)^\times BA^\times A &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(A_1)^{-1}B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ (A^*)^\times B(I - A^\times A) &= \begin{bmatrix} 0 & (A_1^*)^{-1}B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ (I - AA^\times)Y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et

$$AA^{\times}ZA = \begin{bmatrix} Z_1 A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

par conséquente, X *a la forme* (*3.3*).

■

Chapitre 4

Calcul d'inverse de Moore-Penrose

Le but de ce chapitre est de donner une méthode simple et efficace pour calculer l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice non inversible. Cette méthode basée sur une décompostion matricielle importante, dite la décomposition en valeurs singulières (SVD).
Cette métode la plus célèbre pour le calcul de l'inverse de Moore-Penrose des matrices, dans Matlab par exemple on peut décomposer une matrice en valeurs singulières directement par la commande "svd" et calculer leur inverse de MoorePenrose a l'aide de la commande "pinv".

4.1 Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières, indique que pour toute matrice A $\in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ avec les valeurs singulières $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_r\}$ qui sont les racines carrés des valeurs propres de A^*A, il existe deux

matrices unitaires $U \in U^{m\times m}$ ($U^{m\times m}$ estl'ensemble des matrices unitaires $m \times m$) et $V \in U^{n\times n}$ telles que la matrice $m \times n$

$$\Sigma = U^*AV = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & 0 \\ & & \sigma_r & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

est diagonalisable. Donc, toute matrice $m\times n$ complexe est unitairement équivalente à une matrice diagonalisable

$$A = U\Sigma V^*$$

Pour toute transformation linéaire $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ avec $\dim \mathcal{R}(A) = \mathrm{r}$, il existe deux bases orthogonales $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$ et $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de $\mathbb{C}^m$ et $\mathbb{C}^n$, respectivement, telles que la matrice correspondante représentative $A_{\{U,V\}}$ est diagonalisable,

$$A_{\{U,V\}} = diag(\sigma_1, ..., \sigma_r, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

c.à.d,

$$\begin{cases} Av_j = \sigma_j u_j & , \quad 1 \le j \le r \\ Av_j = 0 & , \quad r+1 \le j \le n \end{cases} .$$

L'expression

$$A = U\Sigma V^* \ , \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & 0 \\ & & \sigma_r & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & & \vdots & 0 \end{bmatrix} , \quad U \in U^{m\times m} \text{ et } V \in U^{n\times n}$$

est appelée la décomposition en valeurs singulières (SVD abrégé) de A. La SVD est d'une importance fondamentale dans la théorie et le calcul des inverses généralisés, spécialement l'inverse de Moore-Penrose. elle est la base d'une théorie spectrale généralisée pour les matrices rectangulaires, et une extension de la théorie classique du spectre pour les matrices normales.

Remarque .14 *A et A^* ont le mêmes valeurs singulières.*

Proposition .20 *Les matrices unitairement équivalentes ont les mêmes valeurs singulières.*

Preuve. Soit $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, et soit $U \in U^{m\times m}$ et $V \in U^{n\times n}$ deux matrices unitairement. Alors la matrice

$$(UAV)(UAV)^* = UAVV^*A^*U^* = UAA^*U^*$$

■

Exemple .9 ***Preuve.*** *est similaire à AA^*, donc ont les mêmes valeurs propres. Par conséquent, les matrices UAV et A ont les mêmes valeurs singulières. Donc UAV est la décomposition en valeurs singulières.* ■

Théorème 4.1 *[1]Soit $0 \ne A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$, et soient σ_i, $1 \le i \le r$ les valeurs singulières de A, telles que*

$$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \cdots \ge \sigma_r > 0 \tag{4.1}$$

Soit $\{u_1, u_2, ..., u_r\}$ *un système orthonormé des vecteurs propres de* AA^**correspondant à ses valeurs propres non nulles*

$$AA^*u_i = \sigma_i^2 u_i \quad 1 \leq i \leq r \tag{4.2}$$

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq r \tag{4.3}$$

et soient les vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ *définis par*

$$v_i = \frac{1}{\sigma_i} A^* u_i \quad 1 \leq i \leq r \ . \tag{4.4}$$

Alors $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ *est un système orthonormé des vecteurs propres de* A^*A*correspond à ses valeurs propres non nulles*

$$AA^*v_i = \sigma_i^2 v_i \quad 1 \leq i \leq r \tag{4.5}$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq r \ . \tag{4.6}$$

De plus,

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A^* v_i \quad 1 \leq i \leq r \tag{4.7}$$

Preuve. *Soit* $\{v_i, \, i \in 1 \leq i \leq r\}$ *donné par* (*4.4*). *Alors*

$$\begin{aligned} AA^*v_i &= \frac{1}{\sigma_i} A^*AA^*u_i \\ &= \sigma_i A^* u_i \quad \textit{par } (4.2) \\ &= \sigma_i^2 v_i \quad \textit{par } (4.4) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle A^* u_i, A^* u_j \rangle \\ &= \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} \langle AA^* u_i, u_j \rangle \\ &= \frac{\sigma_i}{\sigma_j} \langle u_i, u_j \rangle \quad \textit{par } (4.2) \\ &= \delta_{ij} \quad \textit{par } (4.3). \end{aligned}$$

Les équations (*4.7*) *découlent de* (*4.4*) *et* (*4.2*).*Une conséquence facile du* (*Theorem 4.1*) *est la suivante.* ■

Théorème 4.2 *[1] (Décomposition en valeurs singulières). Soit* $0 \neq A \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$*, et soient*

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0 \tag{4.8}$$

les valeurs singulières de A.

Alors il existe deux matrices unitaires $U \in U^{m\times m}$ *et* $V \in U^{m\times m}$ *telles que la matrice*

$$\Sigma = U^*AV = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \vdots & \\ & \ddots & & \vdots & 0 \\ & & \sigma_r & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & & \vdots & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.9}$$

soit diagonalisable.

Preuve. *Pour une matrice donnée* $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$*, nous construisons deux matrices* U *et* V *comme suit. Soit les vecteurs* $\{u_1, ..., u_r\}$ *de* $\mathbb{C}^m$ *vérifiant* (4.2) *et* (4.3)*, et forment ainsi une base orthonormée de* $\mathcal{R}(AA^*) = \mathcal{R}(A)$*. Soit* $\{u_{r+1}, ..., u_m\}$ *une base orthonormée de* $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$*. Alors l'ensemble* $\{u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ..., u_m\}$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{C}^m$ *satisfaisant* (4.2) *et*

$$A^*u_i = 0, \quad r+1 \le i \le m \ . \tag{4.10}$$

La matrice U définie par

$$U = [u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ..., u_m] \tag{4.11}$$

est donc une matrice unitaire $m \times m$*.*

Soit maintenant les vecteurs $\{v_1, ..., v_r\}$ *dans* $\mathbb{C}^n$ *définis par* (4.4)*. Alors ces vecteurs satisfont* (4.5) *et* (4.6)*, et forment donc une base orthonormée de* $\mathcal{R}(A^*A) = \mathcal{R}(A^*)$*. Soit* $\{v_{r+1}, ..., v_n\}$ *une base orthonormée de* $\mathcal{R}(A^*)^\perp = \mathcal{N}(A)$*. Alors l'ensemble* $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ *est une base orthonormée de* $\mathbb{C}^n$ *satisfaisant* (4.5) *et*

$$A^*v_i = 0, \quad r+1 \le i \le m \ . \tag{4.12}$$

La matrice V *définie par*

$$V = [u_1, ..., u_r, u_{r+1}, ..., u_m] \tag{4.13}$$

est donc une matrice unitaire $n \times n$*.*

Avec U *et* V *données ci-dessus, la matrice*

$$\Sigma = U^*AV = (\Sigma[i,j]), \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$$

satisfait

$$\Sigma[i,j] = u_i^*Av_j = 0 \ \ \textit{si } i > r \ \ \text{ou } j > r, \ \ \textit{par } (4.10) \textit{ et } (4.11),$$

et pour $i, j = 1, ..., r$

$$\begin{aligned}
\Sigma[i,j] &= u_i^* A v_j \\
&= \frac{1}{\sigma_j} u_i^* A A^* u_j \text{ par } (4.4) \\
&= \sigma_j u_i^* u_j \text{ par } (4.2) \\
&= \sigma_j \delta_{ij} \text{ par } (4.3).
\end{aligned}$$

■

4.2 Calcul de l'inverse de Moore-Penrose

Lemme .5 *[1]Si* U *et* V *sont deux matrices unitaires, Alors*

$$(UAV)^{\times} = V^* A^{\times} U^*$$

pour toute matrice A *pour laquelle le produit* UAV *est défini.*

Corollaire .10 *[1]Soient* A, Σ, U *et* V *vérifiant les conditions du Théorème 4.2. Alors*

$$A^{\times} = V \Sigma^{\times} U^* \tag{4.14}$$

où

$$\Sigma^{\times} = diag(\frac{1}{\sigma_1}, \cdots, \frac{1}{\sigma_r}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^{n \times m} \tag{4.15}$$

Preuve. *L'equation* (4.14) *est satisfaite par le lemme precedent, et la formule* (4.15) *est evidente.* ■

Exemple .10 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de $A^*A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ *sont* 9 *et* 4 *donc les valeurs singulières de* A *sont* 3 *et* 2.

Les vecteurs propres normalisés de A^*A *sont* $v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Alors

$$u_1 = \frac{1}{3} A v_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \quad et \quad u_2 = \frac{1}{2} A v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

L'application du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs u_1,u_2 *et* $e_1 = (1,0,0)^t$ *donne*

$$u_3 = \frac{e_1 - (\sum_{i=1}^{2} e_1^t u_i)u_i}{\left\|e_1 - (\sum_{i=1}^{2} e_1^t u_i)u_i\right\|} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}.$$

On obtient donc

$$U = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2\sqrt{5} \\ 2 & 6 & -\sqrt{5} \\ 4 & -3 & -2\sqrt{5} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A^{\times} &= \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -3 \\ -2\sqrt{5} & -\sqrt{5} & -2\sqrt{5} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple .11 *Soit la matrice*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a

$$A^*A = V\Sigma^*U^*U\Sigma V^* = V(\Sigma^*\Sigma)V^* \text{ et } AA^* = U\Sigma V^*V\Sigma^*U^* = U(\Sigma\Sigma^*)U^*$$

donc les colonnes de U (vecteurs singuliers à gauche) sont vecteurs propres pour AA^* *et les colonnes de* V *(vecteurs singuliers à droite) sont vecteurs propres pour* A^*A
Par l'utilisation du Matlab on obtient

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.236 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } V^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.447 & 0 & 0 & 0 & 0.894 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.894 & 0 & 0 & 0 & 0.447 \end{bmatrix}.$$

Mais les valeurs exactes sont

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \textit{et } V^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

On vérifie que Σ ne possède que des valeurs non nulles sur sa diagonale. De plus, comme montré ci-dessous, multiplions les matrices U et V^* par leurs transposées, on obtient la matrice identité

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et de même

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

puisque les deux matrices U et V sont unitaires.

Maintenant on calcule $A^{\times} = V\Sigma^{\times}U^{*}$

$$
\begin{aligned}
A^{\times} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Bibliographie

[1] A.Ben-Israel et T.N.E.Greville, *Generalized inverses Theory and Applications*, New York, (2003).

[2] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6).

[3] S. K. Berberian, *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*, Springer, New York, 1974

[4] R. Bouldin : *The pseudo-inverse of a product*. SIAM J. Appl. Math. 24 (4) (1973), 489–495.

[5] S. R. Caradus, *Generalized Inverses and Operator Theory*, Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics. 50. Queen's University, Kingston, Ont., 1978

[6] R. G. Douglas, *On the operator equation S*XT=X and related topics*, Acta Sci. Math. (Szeged) 30 (1969), 19-32.

[7] R. G. Douglas, *On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. 17 (1966) 413-416.

[8] G.R. Duan, *The solution to the matrix equation $AV + BW = EV J + R$*, Appl. Math. Lett. 17 (2004) 1197–1202.

[9] W. Rudin, *FUNCTIONAL ANALYSIS* , International Editions 1991.

[10] D.S.DjordjeviÈ, and V.Racocevic, *Lectures on Generalized Inverses*, Fac-ulty of Sciences and Mathematics, Univ of Nis, 2008.

[11] D. S. Djordjevic, *Explicit solution of the operator equation A*X+X*A=B*. J. Comput. Appl. Math. 200 (2007), no. 2.701-704

[12] P. A. Fillmore and J. P. Williams, *On operator ranges*, Advances in Mathematics 7 (1971), 254-281.

[13] T. N. E. Greville : *Note on the generalized inverse of a matrix product*. SIAM Rev. 8 (1966), 518–521.

[14] S. Karanasios and Dimitrios Pappas, *Generalized inverses and special type operator algebras*, facta universitatis (NIS) Ser. Math. Inform. 21 (2006), 41–48

[15] P. Kirrinnis, *Fast algorithms for the Sylvester equation* $AX - XB = C$, Theoret. Comput. Sci. 259 (2001) 623–638

[16] M. Laura Arias, G. Corach, and M. Celeste Gonzalez, *Generalized inverses and Douglas equations*, Amr. Math. Soc. 136, 9, (2008), 3177–3183.

[17] S. lzumino : *The product of operators with closed range and an extension of the reverse order law*. Tohoku Math. J. 34 (1982), 43–52.

[18] E. H. Moore, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Bull. Amer. Math. Soc. 26 (1920), 394-395.

[19] M. Z. Nashed, *Inner, outer, and generalized inverses in Banach and Hilbert spaces,* Numer. Funct. Anal. Optim. 9 (1987), 261-325.

[20] R. A. Penrose, *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 51 (1955), 406-413.

[21] D.C. Sorensen, A.C. Antoulas, *The Sylvester equation and approximate balanced reduction*, Linear Algebra Appl. 351–352 (2002) 671–700.

[22] B. Zhou, G.R. Duan, *An explicit solution to the matrix equation* $AX - XF = BY$, Linear Algebra Appl. 402 (2005) 345–366.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة المعكوس المعمم لمؤثر خطي محدود . درسنا في البداية خصائص المعكوس المعمم الداخلي والخارجي والإنعكاسي وصولا لمعكوس Moore-Penrose والذي يمثل أقرب معكوس معمم للمعكوس الحقيقي في حالة وجوده ، بينا وجود ووحدانية معكوس Moore-Penrose و تكافؤ تعريفي Moore و Penrose ثم درسنا معكوس Moore-Penrose لبعض صفوف المؤثرات. في جزء آخر عرضنا بعض تطبيقات المعكوس المعمم على المعادلات الخطية وبعض معادلات المؤثرات. في الأخير قدمنا طريقة لحساب معكوس Moore-Penrose لمصفوفة غير قابلة للقلب مع بعض الإمثلة.

الكلمات المفتاحية :

المعكوس المعمم , معكوس Moore-Penrose , مؤثر خطي محدود والتفكيك حسب القيم الشاذة .

Abstract

The aim of this work is studied the generalized inverse of a bounded linear operator. At the beginning we studied the properties of the inner, outer and reflexive generalized inverse, we defined the Moore-Penrose inverse, which is the closest generalized inverse to the inverse if it exists. We have shown the existence and uniqueness of the Moore-Penrose inverse, and the equivalence between the definitions of Moore and Penrose, then we have studied the Moore-Penrose inverse for certain classes of operators. In another part, we presented some applications of the generalized inverse to linear equations and some operator equations. Finally, we presented a method for calculating the Moore-Penrose inverse of a non-invertible matrix with some examples.

Keywords: Generalized inverse, Moore-Penrose inverse, bounded linear operator and singular value decomposition.

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier l'inverse généralisé d'un opérateur linéaire borné. Au début on a étudié les propriétés de l'inverse généralisé interne, externe et réflexif, on a défini l'inverse de Moore-Penrose, qui est l'inverse généralisé le plus proche de l'inverse s'il existait. On a montrer l'existence et l'unicité de l'inverse de Moore-Penrose, et l'équivalence entre les définitions de Moore et de Penrose, puis on a étudié l'inverse de Moore-Penrose pour certaines classes d'opérateurs. Dans une autre partie, on a présenté quelques applications de l'inverse généralisé aux équations linéaires et quelques équations opératorielles. Enfin, On a présenté une méthode de calcul de l'inverse de Moore-Penrose d'une matrice non inversible avec quelques exemples.

Mots-clés : Inverse généralisé, inverse de Moore-Penrose, opérateur linéaire borné et décomposition en valeurs singulières.