République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

L'image numérique et le rayon numérique d'un opérateur lénéaire

Présenté Par:
AZZEDDINE Ihssane

Devant le jury :

Mr, ZRAOULIA Elhadj	Prof	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Mr,TOUALBIA Abdellatif	M.C.B	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Mr, MECHERI Hacene	M.C.A	UnivérsitéLarbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance :05 06 2023

ملخص

ليكن H فضاء هيلبرت مركب, و L(H) جبر المؤثرات الخطية المحدودة على H, نعرف الصورة العددية للمؤثر A من L(H) كما يلي :

$$W(A) = \{\langle Ax.x \rangle,\ x \in H,\ \|x\| = 1\},$$

ونصف القطر العددي للمؤثر A من L(H) كما يلي :

$$w(A) = \{\sup |\lambda|,\ \lambda \in W(A)\}.$$

الهدف من هذا العمل هو دراسة الصورة العددية لمؤثر خطي محدود في محورين, في المحور الثاني من هذا العمل نقدم الخصائص الهندسية للصورة الرقمية في الحالة العامة وبصورة خاصة في الفضاء ذو بعد 2 والصورة العددية لمصفوفة (3×3).

في المحور الثالث ندرس العلاقة بين نصف القطر العددي ومؤثر المشتقة و المشتقة المعممة , طيف مؤثر المشتقة والمشتقة المعممة ثم طيف المؤثر P-symétrique والمؤثر D-symétrique وخصائصه ثم نتطرق لدراسة العلاقة بين الصورة العددية لمؤثر وطيفه.

Abstract

Let H be a complex Hilbert space, and L(H) denote the algebra of all the bounded linear operators on H. We defined the numerical range of an operator A $\in$ L (H), by:

$$W(A) = \{< Ax.x >, x \in H, \ ||x|| = 1\}.$$

And the numerical radius of an operator A $\in$ L(H), by:

$$w(A) = \{\sup |\lambda|, \lambda \in W(A)\}.$$

The objective of this work is study the numerical range of a bounded linear operator in two axes. In the chapter two we present the geometrical properties in the general case and especially in two dimensions and the numerical range of matrixe (3×3).

In the chapter three we study the relationship between the numerical radius of an operator and the derivations operator and the generalized derivations operator, the spectrum of derivations and generalized derivations and spectrum of P-symmetric operator, also we study the relationship between the numerical range of an operator and it's spectrum.

Résumé

Soit H un espace de Hilbert complexe, et L(H) l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H. On définie l'image numérique d'un opérateur $A \in L(H)$
par :

$$W(A) = \{< Ax.x >, x \in H, \ ||x|| = 1\}.$$

Et le rayon numérique d'un opérateur $A \in L(H)$ par :

$$w(A) = \{\sup |\lambda|, \lambda \in W(A)\}.$$

L'objectif de ce travail est étudie l'image numérique d'un opérateur linéaire borné en deux axes. Dans le deuxième chapitre nous présentons les propriétés géométriques de l'image numérique dans le cas général, et en particulier en dimension deux et l'image numérique d'une matrice (3×3).

Dans le troisième chapitre nous étudions la relation entre le rayon numérique d'un opérateur et l'opérateur de dérivation et dérivation généralisée, le spectre de l'opérateur de dérivation et dérivation généralisée puis le spectre de l'opérateur P-symétrique et leur propriété et nous étudions la relation entre l'image numérique d'un opérateur et son spectre.

Remerciement

Avant tout, nous remercions ALLAH le tout-puissant pour nous avoir donné la volonté, la santé et le courage pour réaliser ce travail. *Notre gratitude au*

Dr. MECHERI Hacene, en tant Encadreur de mémoire, pour sa générosité, son enthousiasme, son partage de connaissance, et de la grande patience qu'il a su faire preuve malgré ses charges académique et professionnelle.

Nous remercions chaleureusement Dr. ZERAOULIA Elhadj et Dr. TOUALBIA Abdellatif pour l'honneur qu'ils nous ont fait en présidant notre jury.

Dédicace

A ma chère et adorable mère ‘Dalila’ en témoignage de ma grande
affection.
A ma chère et adorable père ‘Laiche’ en témoignage de ma grande
affection.

A mes frères : Amara, Ahmed, Brahim, Yazide, Ali.
A mes sœurs : Afaf, Rimel, Radia, Khaira, Bouthaina, pour leurs soutiens moraux.
A tous les membres de ma famille surtout Mon grand mère Mbarka.

A tous mes amis : Chadia, Fulla, Hadjer, Choumaissa, Bouthaina, Habiba, Samah, Linda, Zaineb, Dounia.

Surtout : Aya

A tous descendant de la famille.
Mes camarades de la promotion 2022-2023
A tous les personnes que j’aime.
Je dédie ce travail

Table des matières

Introduction

L'analyse fonctionnelle représente une partie trés important dans la mathématiques pures, mais aussi mathématiques appliquées telles que la théorie de l'approximation et la résolution d'équations opératorielles, les spectres des opérateurs et leurs images numériques qui sont des techniques indispensables pour les chercheurs dans plusieurs domaines des sciences et techniques. Soit H un espace de Hilbert complexe, avec le produit scalaire $\langle . \rangle$, et notons $L(H)$ l'algébre des opérateurs linéaires bornés sur H, l'image numérique d'un opérateur $A \in L(H)$ est définie par

$$W(A) = \{\langle Ax.x \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$

Le rayon numérique $w(A)$ de l'opérateur A est défini par

$$w(A) = \{\sup |\lambda|, \lambda \in W(A)\}$$

et est un outils trés important et efficace pour étudier les propriétés des opérateurs. Elle a aidé au développement de la théorie des opérateurs. En 1918, Toéplitz a prouvé que la frontiére $\partial W(T)$ est une courbe convexe puis Hausdorff a donné en 1919 son théoréme, devenue classique sur la convexité de $W(A)$. Dans la physique quantique, il existe une correspondance forte entre les notions de la valeur moyenne d'un observable et l'image numérique d'un opérateur.
Dans le premier chapitre de ce travail, on va exposons quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, rappel sur l'espace de Hilbert, les propriétés fondamentales des opérateur linéaires bornés, les spectres, les résolvantes, et Les commutateurs d'un opérateur.
Le deuxiéme chapitre est une notion de l'image numérique et le rayon numérique d'un opérateur linéaire borné sur un espace de Hilbert. Nous donnons une synthése des définitions et propriétés principales, nous étudions l'image numérique en dimension deux, principalement le théoréme elliptique de l'image numérique et l'image numérique de matrice (3×3), avec quelques exemples et leurs figures. nous démontrons l'éga-

lité $W(A)+W(B)=W(A+B)$, avec A et B deux matrices carrées de dimensions finies.
Au troisiéme chapitre, nous appliquerons les inégalités de le rayon numérique sur l'opérateur de dérivation et l'opérateur de dérivation généralisé avec les preuves. Plus précissement on va étudier des opérateur P-symétrique et des opérateur D-symétrique puis á la présentations du spectre d'opérateur de dérivation et l'opérateur de dérivation généralisé, spectre d'opérateur P-symétrique, et aussi préseté la relation entre l'image numérique et le spectre.

Chapitre 1

Préliminaires

Introduction

Dans ce chapitre nous exposons quelques notions et compléments mathématiques en relation avec ce travail. On citera en particulier, rappel sur l'espace de Hilbert, les propriétés fondamentales des opérateur linéaires bornés, le spectre et la résolvante d'un opérateur.

1.1 Espace de Hilbert

On désigne par H un espace de Hilbert complexe muni d'un produit scalaire noté $\langle . \rangle$.

Proposition 1.1.1 *Le produit scalaire $\langle . \rangle$ définit une norme sur H par*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x.x \rangle}, \forall x \in H.$$

Théorème 1.1.1 *Soit $x, y \in H$ alors :*

1. *(Inégalité de Cauchy-Schwartz)*

$$|\langle x.y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \forall x, y \in H.$$

2. *(Identité du parallélogramme)*

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2, \forall x, y \in H.$$

Lemme 1.1.1 *Soit H un espace de Hilbert de produit scalaire $\langle . \rangle$, alors*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2Re\langle x.y \rangle + \|y\|^2, \forall x, y \in H.$$

Preuve 1 *On a*

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y.x + y \rangle$$
$$= \langle x.x \rangle + \langle x.y \rangle + \langle y.x \rangle + \langle y.y \rangle = \langle x.x \rangle + \langle x.y \rangle + \overline{\langle x.y \rangle} + \langle y.y \rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2Re\langle x.y \rangle + \|y\|^2.$$

Définition 1.1.1 *On dit que x et y deux vecteurs dans H sont orthogonaux si vérifient $\langle x.y \rangle = 0$.*

Définition 1.1.2 *Soit H un espace de Hilbert et H_1, H_2 deux sous-espaces vectoriels . On dit que H est la somme directe orthogonale de $H_1 et H_2$ Si : $H = H_1 + H_2$ et $H_1 \cap H_2 = \{0\}$*
et $\forall x_1 \in H_1, \forall x_2 \in H_2 : \langle x_1.x_2 \rangle = 0$.

Notation 1 *On note la somme directe orthogonale par $H = H_1 \oplus H_2$.*

Définition 1.1.3 *La complémentaire orthogonal $F^{\perp}$ d'un sous-espaces $F \subset H$ est :*

$$F^{\perp} = \{x \in H, \forall y \in F : \langle x.y \rangle = 0\}.$$

Définition 1.1.4 *On dit que H est un espace de Hilbert séparable s'il posséde une suite de points qui est dense dans H.*

Définition 1.1.5 *On appelle base orthonormale de l'espace de Hilbert séparable H, tout sous-ensemble fini ou dénombrable $\{e_n\}_n$ qui vérifie :*

1. *$\|e_n\| = 1$ et $\langle e_n.e_m \rangle = 0$ si $n \neq m$.*
2. *le sous-espace vectoriel engendré par $\{e_n\}_n$ (par combinaisons linéaires finies) est dense dans H.*

Définition 1.1.6 *L'espace de Banach est tout espace normé complet pour la norme associée á la distance.*

Définition 1.1.7 *On peut définir une C^*-algébre comme une algébre de Banach munie d'un opération adjoint $A \to A^*$, qui vérifie*

$$\|A^*A\| = \|A\|^2$$

Définition 1.1.8 *Soit H un espace vectoriel normé. Un application linéaire $f : E \to F$ est appelée forme linéaire. l'espace de banach $L(E, F)$ de toute les formes linéaire continues est le dual topologique de H est noté H'.*

Définition 1.1.9 *la topologie faible-* sur le dual topologique H' d'un espace vectoriel normé H est la topologie initiale $\sigma(H', H)$ engendrée par la fammille $i(E)$ oú $i : H \to H''$ est l'inclusion isométrique canonique.*

1.2 Les opérateurs linéaires bornés

Soient E et F deux espaces de Hilbert.

Définition 1.2.1 *Soient un opérateur $A : E \to F$ telle que $E, F \in H$ est dite linéaire , s'il vérifié les conditions suivantes :*

-condition additive : *$\forall \alpha_1, \alpha_2 \in E$ on a : $A(\alpha_1 + \alpha_2) = A(\alpha_1) + A(\alpha_2)$.*

-condition homogéne : *$\forall \alpha \in E, \lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on a*

$$A(\lambda\alpha) = \lambda A(\alpha).$$

Définition 1.2.2 *Soient $A : E \to F$ un opérateur linéaire est dit borné s'il existe un constante strictement positive C , telle que :*

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \forall x \in F.$$

Notation 2 *L'espace d'opérateur linéaire noté par $L(E, F)$.*

Définition 1.2.3 *Soient $A : E \to F$ un opérateur linéaire est dit borné s'il existe un constante strictement positive C , telle que :*

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \forall x \in F.$$

Notation 3 *L'espace d'opérateur linéaire borné noté par $L(E, F)$.*

Définition 1.2.4 *Soit un opérateur $A : E \to F$ on a :*

1. *L'image de A est l'ensemble défini par :*

$$R(A) = \{Ax, x \in H\}. \tag{1.1}$$

2. *le noyau de A est l'ensemble défini par :*

$$Ker(A) = \{x \in H, Ax = 0\}. \tag{1.2}$$

Théorème 1.2.1 *Soit un opérateur $A : E \to F$ on a :*

- Si $Ker(A) = \{0\}$ on dit que A est injectif.

- Si $R(A) = F$ on dit que A est surjectif.

- Si A est injectif et surjectif alors, A est bijectif.

Définition 1.2.5 *Soit A un opérateur linéaire borné dans $L(H)$, on défini la norme d'opérateur par :*

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_H}{\|x\|_H} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|_H, x \in H. \tag{1.3}$$

Théorème 1.2.2 *(L'identité de polarisation généralisée)*
Soit $x, y \in H$ et $A \in L(H)$ on a :

$$4\langle Ax.y\rangle = \sum_{k=0}^{3} i^k \langle A(x + i^k y).x + i^k y\rangle.$$

Définition 1.2.6 *Soit l'opérateur $A \in L(H)$ et $x, y \in H$, on note l'opérateur adjoint de A par A^*, est défini par*

$$\langle Ax.y\rangle = \langle x.A^*y\rangle.$$

Théorème 1.2.3 *Si A et B sont deux opérateurs linéaires bornés définit sur un espace de Hilbert H, alors A^* et B^* est deux opérateurs adjoints sont aussi deux opérateurs linéaires bornés sur H, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $\|A\| = \|A^*\|$.
2. $(A^*)^* = A$.
3. $(AB)^* = A^*B^*$.
4. $(A + B)^* = A^* + B^*$.
5. $(\alpha A)^* = \alpha A^*$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{C}$.
6. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$ *,telle que A est inversible.*

Définition 1.2.7 *Soit A un opérateur dans $L(H)$, et A^* son adjoint, on dit que A est un opérateur auto-adjoint si $A = A^*$.*

Définition 1.2.8 *Soit A un opérateur dans $L(H)$, et A^* son adjoint, on dit que A est un opérateur normal si*

$$AA^* = A^*A. \tag{1.4}$$

Définition 1.2.9 *Un opérateur $A \in L(H)$ est dit :*

.Compact, *si $\langle Ax_n.x_n\rangle \to 0$, pour toute suite orthonormée (x_n) de H.*

.De rang fini n, *si $R(A)$ est de dimension finie n.*

.Positif, *si $\langle Ax.x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$, on note $A \geq 0$.*

.Isométrie, *si $AA^* = I_H$.*

.Unitaire, *si* $T^*T = TT^* = I$.

.Dominant, *si* $(A - \lambda I) \subseteq (A - \lambda I)^*, \forall \lambda \in \mathbb{C}$.

.dissipatife, *si* $Re\langle Ax.x\rangle \leq 0$.

Théorème 1.2.4 *Soit H un espace de Hilbert complexe, si A est un opérateur sur H, on dit que A est normal ssi :*
pour tout

$$x \in H, \|Ax\| = \|A^*x\|. \tag{1.5}$$

Définition 1.2.10 *On dit que $A \in L(H)$ est inversible, s'il existe un opérateur $B \in L(H)$ qui vérifie $BA = AB = I$, telle que I est l'opérateur identité de $L(H)$ et B son inverse de A, on note $B = A^{-1}$.*

Remarque 1.2.1 *Si A un opérateur unitaire, alors $A^{-1} = A^*$.*

Définition 1.2.11 *Soit $A \in L(H)$, on dit que A est coercif s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|\langle Ax.x\rangle| \geq C\|x\|^2, \forall x \in H. \tag{1.6}$$

De même, si $B \in S_2(H)$ est dite coercif (ou elliptique) s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$|B(x, x)| \geq C\|x\|^2, \forall x \in H. \tag{1.7}$$

Proposition 1.2.1 *Soit $A \in L(H)$ est coercif, alors A est inversible dans $L(H)$.*

Définition 1.2.12 *Soit H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$, on dit que A est unitairement diagonalisable s'il existe une base orthonormale $\{e_n\}$ de H constituée par les vecteurs propres de A, i.e. A s'écrit selon cette base sous forme d'une matrice diagonale.*

Proposition 1.2.2 *Tout opérateur normal en dimension finie est unitairement diagonalisable, et plus général tout opérateur normal compact est unitairement diagonalisable.*

Définition 1.2.13 *Soit un sous-espace F de H, on appelle compression de A sur F, et on note $A|F$ la restriction de l'opérateur P_FA sur F, (oú P_F est la projection orthogonale sur F.)*

1.3 Spectre et résolvante d'un opérateur

Définition 1.3.1 *Soit H un espace de Hilbert complexe, $A \in L(H)$:*

a) *Le spectre de A noté par $\sigma(A)$ est donné par*

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I, n'estpasinversible\}. \qquad (1.8)$$

b) *On dit que λ est une valeur propre de A s'il existe $x \in H$, $(x \neq 0)$ $Ax = \lambda x$, l'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre ponctuel de A, noté par $\sigma_p(A)$.*

c) *On dit que $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre approchée de A s'il existe une suite de vecteur de (x_n) dans H telle que $\|x_n\| = 1$ et $(Ax_n - \lambda x_n)$ converge vers 0. l'ensemble de ces valeurs est appelé le spectre approché de A , noté $\sigma_{app}(A)$.*

Exemple 1.3.1 *Soit* $A = I = \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$, *on cherche $\sigma(I)$*

$\sigma(I) = \{\lambda \in \mathbb{C}, I - \lambda I$ *n'est pas inversible* $\}$
$= \{\lambda \in \mathbb{C}, (1-\lambda)I$ *n'est pas inversible* $\}$.
Si $\lambda \in \sigma(I)$ alors

$$det(I - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$$

$$(1-\lambda)^3 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1,$$

donc $\sigma(I) = \{1\}$.

Définition 1.3.2 *Soit $A \in L(H)$, alors*

a) L'ensemble résolvant $\rho(A)$ d'un opérateur $A \in L(H)$ est le complémentaire du spectre, i.e

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I), estinversible\}. \qquad (1.9)$$

b) Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit l'application résolvante R_λ par
$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$.

Définition 1.3.3 *Le rayon spectral d'opérateur $A \in L(H)$ est définit par :*

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|. \qquad (1.10)$$

Théorème 1.3.1 *Soit $A \in L(H)$, alors*

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \qquad (1.11)$$

Remarque 1.3.1 *Soit $A \in L(H)$ l'opérateur adjoint de A est A^*, alors vérifiées :*

a) $r(A^*) = r(A)$.

b) $r(A^n) = r(A)^n$.

Proposition 1.3.1 *Soit $H = H_1 \oplus H_2$, on a $\sigma(A_1 \oplus A_2) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$.*

Théorème 1.3.2 *Soit A est auto-adjoint et $m = \inf\{\langle Ax.x\rangle, \|x\| = 1\}$ et $M = \sup\{\langle Ax.x\rangle, \|x\| = 1\}$, alors*
$\sigma(A) \subset [m, M]$ et $m, M \in \sigma(A)$.

Proposition 1.3.2 *$\partial\sigma(A) \subseteq \sigma_{app}(A)$, oú $\partial\sigma(A)$ dénoté la frontiére de $\sigma(A)$*

(Décomposition spectrale des opérateurs normaux compacts)

Soit $A \in H$ un opérateur normal compact, alors il existe une base orthonormée $(x_n)_{n\geq 1}$ de H et une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ des réels telles que :

$$\forall x \in H; Ax = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle x.x_n\rangle x \qquad (1.12)$$

1.4 Les commutateurs

Définition 1.4.1 **a)** *On appelle $X \in L(H)$ commutateur, s'il existe $A, B \in L(H)$, tels que $X = AB - BA$.*

b) *Le commutant de A est défini par*

$$\{A\}' = \{B \in L(H), \quad AB = BA\}.$$

c) *Le bicommutant de A est défini par*

$$\{A\}'' = \{C \in L(H), \quad CB = BC, \forall B \in \{A\}'\}.$$

1.4.1 Propriétés

Soit $A \in L(H)$, alors

1. $\{A\}'' = \{\{A\}'\}'$.
2. Une sous-algébre de $L(H)$ est $\{A\}'$.
3. Une sous-algébre commutative de $L(H)$ est $\{A\}''$.
4. Tout polynôme de $A \in \{A\}''$.

Chapitre 2

L'image Numérique et le Rayon Numérique d'un opérateur

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons quelques définitions et propriétés de base de l'image numérique et le rayon numérique d'un opérateur dans $L(H)$. Nous allons également proposer plusieurs exemples des images numériques des opérateurs et la somme de deux images numérique de deux opérateurs dans un espace de Hilbert H et espace de Banach $L(H)$ de dimension fini. Plus précissement, on va voir propriétés et inégalités sur le rayon numérique d'un opérateur avec les preuves.

2.1 Propriétés et définitions

Définition 2.1.1 *l'image numérique $W(A)$ de l'opérateure A dans un espace de Hilbert $L(H)$ est defini par*

$$W(A) = \{\langle Ax.x\rangle \quad x \in H, \|x\| = 1\}. \tag{2.1}$$

Définition 2.1.2 *Le rayon numérique $w(A)$ de l'opérateur A est défini par*

$$w(A) = \{\sup |\lambda|, \lambda \in W(A)\}. \tag{2.2}$$

Proposition 2.1.1 *Soient les opérateurs A , B dans $L(H)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. On a les propriétés suivantes*

1. $W(\alpha I + \beta A) = \alpha + \beta W(A)$.
2. $W(A + B) \subset W(A) + W(B)$.
3. $W(A^*) = \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(A)\}$ *oú A^* est l'adjoint de A.*
4. $W(Re(A)) = ReW(A)$ *et* $W(Im(A)) = Im(W(A))$.

Preuve 2 *1) Soit $A \in L(H)$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a*
$W(\alpha I + \beta A) = \{\langle(\alpha I + \beta A)x.x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}$

$$= \{\langle(\alpha I x + \beta A x).x\rangle : \quad x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{\langle\alpha I x.x\rangle + \langle\beta A x.x\rangle : \quad x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{\langle\alpha I x.x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\} + \{\langle\beta A x.x\rangle : \quad x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \alpha W(I) + \beta W(A).$$

3) Soit $A \in L(H)$ on a :
$W(A^*) = \{\langle A^* x.x\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}$

$$= \{\langle x.Ax\rangle : \quad x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{\overline{\langle Ax.x\rangle} : x \in H, |x| = 1\}$$

$$= \{\bar{\lambda}, \lambda \in W(A)\}.$$

Corollaire 2.1.1 *L'image numérique $W(A)$de l'opérateur A est un ensemble convexe dans le plan convexe.*

Preuve 3 *voire [1]*

2.2 L'image numérique des opérateurs dans un espace de dimension deux

Lemme 4 *Soit A un opérateur dans un espace de Hilbert H de dimensions deux. Alors $W(A)$ est une ellipse dont les foyers sont les valeurs propres de A.*

Preuve 4 *Dans ce preuve choisir A comme une matrice triangulaire inférieure*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ a & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Oú $\lambda_1 et \lambda_2$ sont les valeurs propres de A. 1) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ nous avons

$$W(A - \lambda I) = \{\begin{pmatrix} 0\,0 \\ a\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\rangle : x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$W(A-\lambda I)=\{Z, \quad |Z|\leq \frac{|a|}{2}\}.$$

Donc $W(A)$ *est un cercle de centre* 0 *et de rayon* $\frac{|a|}{2}$.

2) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *et* $a=0$ *nous avons*

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$$

$$W(A)=\{(Ax.x): x=(x_1,x_2)\in H, \|x\|=1\}$$

$$=\{\langle\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\rangle : x\in H, \|x\|=1\}$$

$$=\{\langle\begin{pmatrix}\lambda_1 x_1\\ \lambda_2 x_2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\rangle : x\in H, \|x\|=1\}$$

$$=\{\lambda_1|x_1|^2+\lambda_2|x_2|^2 : x\in H, \|x\|=1\}$$

$=\{t\lambda_1+(1-t)\lambda_2$ *oú* $t=|x_1|^2$ *et* $x\in H, \|x\|=1\}$. *Donc* $W(A)$ *est un ensemble convexe (combinaison de* λ_1 *et* λ_2 *est un segment qui joigne* λ_1 *et* λ_2*).*

3) Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ *et* $a\neq 0$ *nous avons*

$$A-\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}=\begin{pmatrix}\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} & a\\ 0 & \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\end{pmatrix}$$

$$e^{-i\theta}\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}=\begin{pmatrix}r & e^{-i\theta}\\ 0 & -r\end{pmatrix}=F,$$

oú

$\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}=re^{i\theta}$. $W(F)$ *est un ellipse de centre* $(0,0)$ *et axe mineur* $|a|$ *et les foyers à* $(r,0)$ *et* $(-r,0)$.

Ainsi $W(A)$ *est une ellipse avec des foyers á* λ_1,λ_2 *et le grand axe a une inclinaison de* θ *avec l'axe réel.*

Exemple 2.2.1 *Soit* A *est une matrice* (2×2) *:*

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

On a

$\lambda_1=\lambda_2=0$

$$W(A)=\{\langle Ax.x\rangle, x=(x_1,x_2)\in H, \|x\|=1,\}$$

et

$$W(A) = \{\langle\begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\rangle, x \in, \|x\| = 1\}$$

$$= \{\langle\begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{x_1 x_2 : x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$|\langle Ax.x\rangle| = |x_1||x_2|$$

$$\leq \frac{1}{2}(|x_1|^2 + |x_2|^2)$$

$$\leq \frac{1}{2}.$$

Alors :

$$W(A) = \{Z \in C, |Z| \leq \frac{1}{2}\},$$

et $W(A)$ *est un disque de center* 0 *et rayon* $\frac{1}{2}$.
voir figure 2.1

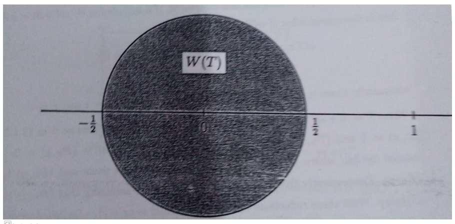

FIGURE 2.1 – disque de center 0 et rayon $\frac{1}{2}$.

Exemple 2.2.2 *Soit A est une matrice (2×2) :*

$$A = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}$$

On a $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $a = 0$

$$W(A) = \{\langle Ax.x\rangle, x = (x_1, x_2) \in H, \|x\| = 1\},$$

$$W(A) = \{\langle \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$
$$= \{\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{|x_1|^2, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Alors, $W(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes de $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 0$ et le segment, donc : $W(A) = [0, 1]$.

Exemple 2.2.3 *Soit A est une matrice (2×2) :*

$$A = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix}$$

On a : $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $a \neq 0$

$$W(A) = \{\langle Ax.x\rangle, x = (x_1, x_2) \in H, \|x\| = 1\},$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle, \quad x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}\}$$

$$= \{x_1 x_2 + x_2^2, x \in H, \|x\| = 1\}\}$$

$$|\langle Ax.x \rangle| = \{|x_1||x_2| + |x_2|^2, x \in H, \|x\| = 1\}\}.$$

Alors, $W(A)$ est le disque elliptique fermé avec des foyers á 0 et 1, petit axe 1 et grand axe $\sqrt{2}$. voire figure 2.2

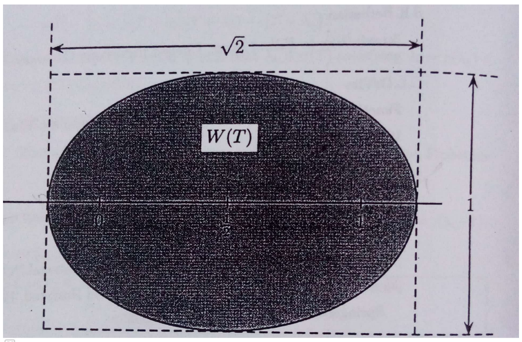

FIGURE 2.2 – disque elliptique fermé avec des foyers á 0 et 1, petit axe 1 et grand axe $\sqrt{2}$.

2.3 L'image numérique d'une matrice (3×3)

Proposition 2.3.1 *L'image numérique d'une matrice (3×3) est :*
1) Enveloppe convexe de ses valeurs propres.
2) Enveloppe convexe d'une ellipse et un point (Ce qui réduit á une ellipse si le point est á l'intérieur).
3) Cône (c'est l'union des segments dans un point avec tout les point d'un disque fermé).
4)Enveloppe convexe d'une ellipse.
5)Triangle equilateral.

Exemple 2.3.1 *Soit A une matrice (3×3) :*

$$A = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

On a :

$$W(A) = \{\langle Ax.x\rangle, x = (x_1, x_2, x_3) \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,0\,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{|x_1||x_2| + |x_3|^2, x = (x_1, x_2, x_3) \in H, \|x\| = 1\}.$$

Alors, $W(A)$ est la réunion de tous les segments fermés qui joindre le point 1 et tous les points du disque fermé avec centre 0 et rayon 1 voire figure 2.3

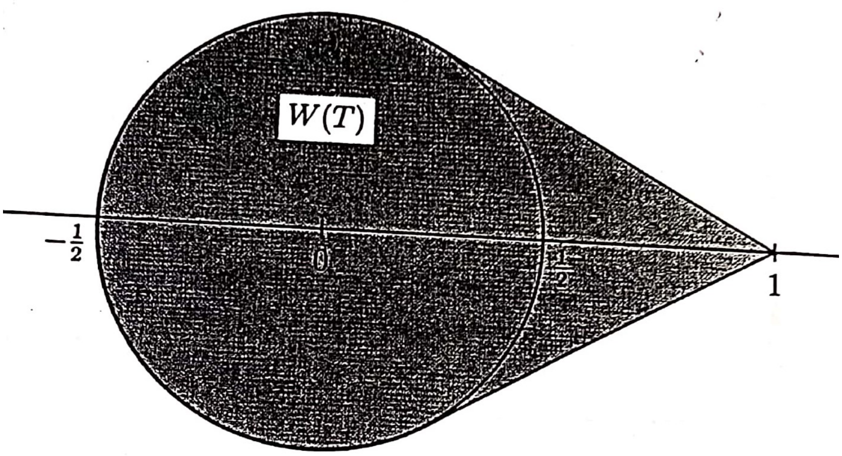

FIGURE 2.3 – Cône de la réunion des segments fermés [0,1] dans le point 1 avec le disque fermé de centre 0 et rayon $\frac{1}{2}$.

Exemple 2.3.2 *Soit A une matrice* (3×3) *:*

$$A = \begin{pmatrix} 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix}$$

On a :

$$W(A) = \{\langle Ax.x\rangle, \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} 0\,0\,1 \\ 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle, x = (x_1, x_2, x_3) \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{|x_3||x_1| + |x_1||x_2| + |x_2||x_3|, x = (x_1, x_2, x_3) \in H, \|x\| = 1\}.$$

Alors, $W(A)$ *est le triangule équilatéral dont les somme dont les trois racines cubiques de* 1*, est* $1, \omega, \omega^2$.

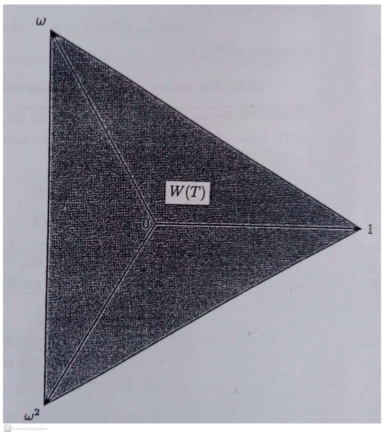

Figure 2.4 – triangule équilatéral

Exemple 2.3.3 *Soit A une matrice (3×3) :*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3+i & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}-i\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

On a :

$$W(A)=\{\langle Ax.x\rangle, x=(x_1,x_2,x_3)\in H, \|x\|=1\}$$

$$=\{\langle\begin{pmatrix}1 & 3+i & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}-i\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\rangle, x=(x_1,x_2,x_3)\in H, \|x\|=1\}$$

$$=\{\langle\begin{pmatrix}x_1+(3+i)x_2\\ (-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2})x_2\\ (-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})x_3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\rangle,\quad x=(x_1,x_2,x_3)\in H, \|x\|=1\}$$

$$=\{|x_1|^2+(-\frac{1}{2}-i\frac{1}{2})|x_2|^2$$

$$+(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})|x_3|^2+(3+i)x_1x_2, x=(x_1,x_2,x_3)\in H, \|x\|=1\}.$$

Alors , $W(A)$ est une ellipse.

Exemple 2.3.4 *Soit A une matrice (3×3) :*

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1+i & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}-i\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$$

On a :

$$W(A) = \{\langle Ax.x\rangle, x = (x_1, x_2, x_3) \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} 1 & 1+i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle, x = (x_1, x_2, x_3) \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} x_1 + (1+i)x_2 \\ (-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})x_2 \\ (-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle, x = (x_1, x_2, x_3) \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{|x_1|^2 + (-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2})|x_2|^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})|x_3|^2 + (1+i)x_1x_2,$$
$$x = (x_1, x_2, x_3) \in H, \|x\| = 1\}.$$

Alors, $W(A)$ est un enveloppe convexe d'une ellipse et un point extérieur à l'ellipse.

2.4 La somme de deux images numérique de deux opérateurs défférent dans un espace de dimension fini

Théorème 2.4.1 *Soit A et B deux opérateurs dans $L(\mathbb{R}^n)$ de dimensions finies n , Alors La somme de l'images numérique W(A) et W(B) est :*

$$W(A) + W(B) = W(A + B) \tag{2.3}$$

telle que : $W(A), W(B)$ et $W(A+B)$ est les images numériques de A, B et $A + B$ respectivement

Preuve 5 *Soient $A, B \in L(\mathbb{R}^n)$ de dimensions finies n, Avec*

$$\{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in R^n, \|x\| = 1\},$$

on pose $n = 2$, soient

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \, a_{12} \\ a_{21} \, a_{22} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_{11} \, b_{12} \\ b_{21} \, b_{22} \end{pmatrix} A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \, a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} \, a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

On calcule $W(A)$

$$W(A) = \{\langle \begin{pmatrix} a_{11} \, a_{12} \\ a_{21} \, a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \, a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 \, a_{22}x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle\}$$
$$= \{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2\}.$$

On calcule $W(B)$

$$W(B) = \{\langle \begin{pmatrix} b_{11} \, b_{12} \\ b_{21} \, b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle\}$$
$$= \{\langle \begin{pmatrix} b_{11}x_1 \, b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 \, b_{22}x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle\}$$
$$= \{b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + (b_{12} + b_{21})x_1x_2\}.$$

On calcule La somme de $W(A)$ *et* $W(B)$
$W(A) + W(B) = \{(a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2) + (b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$

$$+(b_{12} + b_{21})x_1x_2)\}$$

$$= \{(a_{11} + b_{11})x_1^2 + (a_{22} + b_{22})x_2^2 + (a_{12} + a_{21} + b_{12} + b_{21})x_1x_2\}.$$
On calcule $W(A + B)$

$$W(A + B) = \{\langle \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} \, a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} \, a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$\{\langle \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11})x_1 \, (a_{12} + b_{12})x_2 \\ (a_{21} + b_{21})x_1 \, (a_{22} + b_{22})x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle\}$$
$$= \{(a_{11} + b_{11})x_1^2 + (a_{12} + b_{12})x_2x_1 + (a_{21} + b_{21})x_1x_2 + (a_{22} + b_{22})x_2^2\}$$
$$= \{(a_{11} + b_{11})x_1^2 + (a_{22} + b_{22})x_2^2 + (a_{12} + a_{21} + b_{12} + b_{21})x_1x_2\}$$
$$= W(A) + W(B).$$

On pose $n = 3$, *soient*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12}\, b_{13} \\ b_{21}\, b_{22}\, b_{23} \\ b_{31}\, b_{32}\, b_{33} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}\, a_{12} + b_{12}\, a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21}\, a_{22} + b_{22}\, a_{23} + b_{23} \\ a_{21} + b_{21}\, a_{22} + b_{22}\, a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

On calcule $W(A)$

$$W(A) = \{\langle \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$= \{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + (a_{12} + a_{21})x_1x_2 + (a_{13} + a_{31})x_1x_3 + (a_{23} + a_{32})x_2x_3\}.$$

On calcule $W(B)$

$$W(B) = \{\langle \begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12}\, b_{13} \\ b_{21}\, b_{22}\, b_{23} \\ b_{31}\, b_{32}\, b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + b_{23}x_3 \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + b_{33}x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$= \{b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 + (b_{12} + b_{21})x_1x_2 + (b_{13} + b_{31})x_1x_3 + (b_{23} + b_{32})x_2x_3\}.$$

On calcule La somme de $W(A)$ *et* $W(B)$ $W(A) + W(B) = \{(a_{11} + b_{11})x_1^2 + (a_{22} + b_{22})x_2^2 + (a_{33} + b_{33})x_3^2 + (a_{12} + b_{12} + a_{21} + b_{21})x_1x_2 + (a_{13} + b_{13} + a_{31} + b_{31})x_1x_3 + (a_{23} + b_{23} + a_{32} + b_{32})x_2x_3\}$.
On calcule $W(A + B)$

$$W(A + B) = \{\langle \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11}\, a_{12} + b_{12}\, a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21}\, a_{22} + b_{22}\, a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31}\, a_{32} + b_{32}\, a_{33} + b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} (a_{11} + b_{11})x_1 + (a_{12} + b_{12})x_2 + (a_{13} + b_{13})x_3 \\ (a_{21} + b_{21})x_1 + (a_{22} + b_{22})x_2 + (a_{23} + b_{23})x_3 \\ (a_{31} + b_{31})x_1 + (a_{32} + b_{32})x_2 + (a_{33} + b_{33})x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rangle\}$$

$W(A+B)=\{(a_{11}+b_{11})x_1^2+(a_{22}+b_{22})x_2^2+(a_{33}+b_{33})x_3^2+(a_{12}+b_{12}+a_{21}+b_{21})x_1x_2+(a_{13}+b_{13}+a_{31}+b_{31})x_1x_3+(a_{23}+b_{23}+a_{32}+b_{32})x_2x_3\}$

$$=W(A)+W(B).$$

Pour n quelconque, on a

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}.$$

On calcule $W(A)$

$$W(A)=\{\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$=\{\langle \begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$=\{\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j\}.$$

On calcule $W(B)$

$$W(B)=\{\langle \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$=\{\langle \begin{pmatrix} b_{11}x_1+b_{12}x_2+\dots+b_{1n}x_n \\ b_{21}x_1+b_{22}x_2+\dots+b_{2n}x_n \\ \vdots \\ b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\dots+b_{nn}x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$= \{\sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n}(b_{ij}+b_{ji})x_ix_j\}.$$

On calcule La somme de $W(A)$ et $W(B)$

$$W(A)+W(B) = \{(\sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n}(a_{ij}+a_{ji})x_ix_j)$$

$$+(\sum_{i=1}^{n} b_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n}(b_{ij}+b_{ji})x_ix_j)\}$$

$$= \{\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n}(a_{ij}+b_{ij}+a_{ji}+b_{ji})x_ix_j)\}.$$

On calcule $W(A+B)$

$$W(A+B) = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots\vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \dots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} (a_{11}+b_{11})x_1 & (a_{12}+b_{12})x_2 & \dots & (a_{1n}+b_{1n})x_n \\ (a_{21}+b_{21})x_1 & (a_{22}+b_{22})x_2 & \dots & (a_{2n}+b_{2n})x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots\vdots \\ (a_{n1}+b_{n1})x_1 & (a_{n2}+b_{n2})x_2 & \dots & (a_{nn}+b_{nn})x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rangle\}$$

$$= \{\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_{ii})x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=2}^{n}(a_{ij}+b_{ij}+a_{ji}+b_{ji})x_ix_j)\}$$

$$= W(A)+W(B).$$

d'oú $W(A)+W(B) = W(A+B)$.

Exemple 2.4.1 *Soient $A, B \in L(H)$ défini par :*
$A = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$ $A+B = \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}$ *On calcule $W(A)$*

$$W(A) = \{\langle \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$|\langle Ax.x\rangle| = \{|x_1|^2, x \in H, \|x\| = 1\}.$$

On calcule $W(B)$

$$W(B) = \{\langle \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$
$$= \{\langle \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$
$$= \{x_1 x_2 : x \in H, \|x\| = 1\}$$
$$|\langle Bx.x\rangle| = \{|x_1||x_2| : \quad x \in H, \quad \|x\| = 1\}.$$

On calcule la somme de $W(A) + W(B)$

$$W(A) + W(B) = \{|x_1|^2 + |x_1||x_2|, x \in H, \quad \|x\| = 1\}.$$

On calcule $W(A + B)$

$$W(A+B) = \{\langle \begin{pmatrix} 1\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle, x \in H, \quad \|x\| = 1\}$$
$$= \{\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle, x \in H, \|x\| = 1\}$$
$$|\langle (A+B)x.x\rangle| = \{|x_1|^2 + |x_1||x_2|, x \in H, \|x\| = 1\}$$
$$= W(A) + W(B).$$

2.5 Quelques inégalités sur le rayon numérique et la norme :

Théorème 2.5.1 *Soit* $A \in L(H)$ *et* H *est de dimension finie, alors :*

$$\frac{1}{2}\|A\| \leq w(A) \leq \|A\| \tag{2.4}$$

Preuve 6 *Soit* $A \in L(H)$ *et* $x, y \in H$ *oú* $\|x\| = \|y\| = 1$ *, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a :*

$$|\langle Ax.x\rangle| \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|\|x\|\|x\| = \|A\|$$

on obtient $w(A) \leq \|A\|$ *par l'identité de polarisation généralisée on obtient*

$$\langle Ax.x\rangle = \frac{1}{4}\{\langle A(x+y).(x+y)\rangle - \langle A(x-y).(x-y)\rangle$$
$$+ i\langle A(x+iy).(x+iy)\rangle - i\langle A(x-iy).(x-iy)\rangle\}$$

par la définition de $w(A)$ *et l'identité de paralélogram on obtient :*

$$|\langle Ax.y\rangle| \leq w(A)\{\|x\|^2 + \|y\|^2\} = w(A)\{\|x\|^2 + \|y\|^2\}$$

et comme : $\|x\| = \|y\| = 1$ *d'oú :*

$$|\langle Ax.y\rangle| \leq 2w(A) \tag{2.5}$$

Corollaire 5 *Soit $A \in L(H)$, si A est nulpotante d'ordre 2 ($A^2 = 0$) , alors :*

$$\frac{1}{2}\|A\| = w(A). \tag{2.6}$$

Si A un opérateur normal alors :

$$w(A) = \|A\| \tag{2.7}$$

Corollaire 6 *Soit l'opérateur $A \in L(H)$, définit le rayon numérique de A par :*

$$w(A) = sup\|Re \exp^{i\theta} A\|. \tag{2.8}$$

oú : $\theta \in \mathbb{R}$

Proposition 2.5.1 *En remplacent A par iA dans (2.8), on obtient :*

$$w(A) = sup\|Im \exp^{i\theta} A\|. \tag{2.9}$$

oú : $\theta \in \mathbb{R}$

Théorème 2.5.2 *Soit $L(H)$ un espace de Banach linéare ,pour tout $A, X \in L(H)$ on a :*

$$\|Re \exp^{i\theta}(AX + XA^*)\| \leq 2\|A\|w(X). \tag{2.10}$$

telle que : $\theta \in \mathbb{R}$

et

$$\|Re \exp^{i\theta}(AX - XA^*)\| \leq 2\|A\|w(X). \tag{2.11}$$

telle que : $\theta \in \mathbb{R}$

Lemme 7 *Soit $A, X \in L(H)$ alors :*

$$\|Re \exp^{i\theta}(AX + XA^*)\| = \|ARe \exp^{i\theta}(X) + Re \exp^{i\theta} XA^*\|. \tag{2.12}$$

Preuve 7 *En utilisons, le lemme 8 on obtient :*

$$\begin{aligned}\|Re \exp^{i\theta}(AX + XA^*)\| &= \|ARe \exp^{i\theta}(X) + Re \exp^{i\theta} XA^*\| \\ &\leq \|ARe \exp^{i\theta}(X)\| + \|Re \exp^{i\theta} XA^*\| \\ &\leq \|A\|\|Re \exp^{i\theta}(X)\| + \|A\|\|Re \exp^{i\theta}(X)\| \\ &\leq 2\|A\|w(X),\end{aligned}$$

et $$\begin{aligned}\|Re \exp^{i\theta}(AX - XA^*)\| &= \|ARe \exp^{i\theta}(X) - Re \exp^{i\theta} XA^*\| \\ &\leq \|ARe \exp^{i\theta}(X)\| + \|Re \exp^{i\theta} XA^*\| \\ &\leq \|A\|\|Re \exp^{i\theta}(X)\| + \|A\|\|Re \exp^{i\theta}(X)\| \\ &\leq 2\|A\|w(X).\end{aligned}$$

Corollaire 8 *Soient $A, X \in L(H)$ si A positif, alors*

$$W(AX) \leq \frac{1}{2}\|A\|(\|X\| + w(X)) \tag{2.13}$$

$$w(AX) \leq (\|A\| + D_A)w(X) \tag{2.14}$$

Oú

$$D_A = \|A - \lambda_0 I\|$$

$\lambda_0 \in \mathbb{C}$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$

Définition 2.5.1 *Un opérateur A est ditte positif si : $\langle Ax.x\rangle \geq 0$.*

Un opérateur A est ditte dissipatif si : $Re\langle Ax.x\rangle \leq 0$.

Un opérateur A est ditte coarcif si : $ReA \geq 0$ oú $ImA \geq 0$.

Lemme 9 *Si A est coarcif , alors :*

$$\|A\|^2 \leq \|ReA\|^2 + 2\|ImA\|^2 \tag{2.15}$$

Si A est dissipatif ,alors :

$$\|A\|^2 \leq \|ReA\|^2 + \|ImA\|^2 \tag{2.16}$$

Théorème 2.5.3 *Soient $A, X \in L(H)$ si X coarcif alors :*

$$w(AX) \leq \sqrt{3}\|A\|w(X). \tag{2.17}$$

De puis, si X dissipatif , alors :

$$w(AX) \leq \sqrt{2}\|A\|w(X). \tag{2.18}$$

$$w(AX) \leq \|AX\| \leq \|A\|\|X\| \tag{2.19}$$

Preuve 8 *On utilisons l'inégalités (2.15)-(2.19) on trouve :*

$$\begin{aligned} w(AX) &\leq \|A\|\sqrt{\|ReX\|^2 + 2\|ImX\|^2} \\ &\leq \|A\|\sqrt{sup\|ReX\|^2 + 2sup\|ImX\|^2} \\ &= \|A\|\sqrt{3w(X)^2} \\ &= \sqrt{3}\|A\|w(X). \end{aligned}$$

Corollaire 10 *Soit $0 \notin W(X)$ et l'opérateur $A \in L(H)$ on a :*

$$w(AX) \leq \sqrt{3}\|A\|w(X). \tag{2.20}$$

Preuve 9 *Soit $0 \notin W(X)$ alors, $\exp^{i\theta} X$ est coercif. d'ou ,*

$$w(AX) = w(A\exp^{i\theta} X) \leq \sqrt{3}\|A\|w(\exp^{i\theta} X) = \sqrt{3}\|A\|w(X)$$

Chapitre 3

Les opérateurs P-symétriques et les opérateurs D-symétriques

Introduction

Dans ce chapitre nous appliquerons quelques inégalité de le rayon numérique d'un opérateur A dans $L(H)$ oú H espace de Hilbert, sur l'opérateur de dérivation et l'opérateur de dérivation généralisé .Plus précissement on va étudier des opérateur P-symétrique et des opérateur D-symétrique puis á la présentations du spectre d'opérateur de dérivation et l'opérateur de dérivation généralisé et du spectre d'opérateur P-symétrique ,et aussi préseté la relation entre l'image numérique et le spectre.

3.1 Inégalité entre le rayon numérique et l'opérateur de dérivation et l'opérateur dérivation généralisé

Définition 3.1.1 *Soient H un espace de Hilbert complexe de dimension fini séparable et $L(H)$ l'espace de l'opérateur linéaire bornée et $A \in L(H)$, on définie l'opérateur de dérivation par :*

$$\delta_A : L(H) \longrightarrow L(H)$$

$$\delta_A(X) = AX - XA. \tag{3.1}$$

Définition 3.1.2 *Soient H un espace de Hilbert complexe de dimension fini séparable et $L(H)$ l'espace de l'opérateur linéaire bornée et $A, B \in L(H)$, on définie l'opérateur de dérivation généralisé par :*

$$\delta_{A,B} : L(H) \longrightarrow L(H)$$

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB. \tag{3.2}$$

Théorème 3.1.1 *Soit* $0 \notin W(X)$, *et* $A, B \in L(H)$ *alors :*

$$w(\delta_A(X)) \leq 2\|A\|w(X). \tag{3.3}$$

$$w(\delta_{A,B}(X)) \leq (\|A\| + \|B\|)w(X). \tag{3.4}$$

Preuve 10 *D'aprés (2,8) on a*

$$w(\delta_A(X)) = Sup\|Re\exp^{i\theta}(\delta_A(X))\|,$$

en utilisons (2,10)

$$\begin{aligned} w(\delta_A(X)) &= Sup\|Re\exp^{i\theta}(AX + XA)\| \\ &\leq 2\|A\|w(X), \end{aligned}$$

donc

$$w(\delta_A(X)) \leq 2\|A\|w(X),$$

et d'aprés Corollaire (6) on a

$$w(\delta_{A,B}(X)) = Sup\|Re\exp^{i\theta}(\delta_{A,B}(X))\|,$$

en utilisons théorème (2.5.2)

$$\begin{aligned} w(\delta_{A,B}(X)) &= Sup\|Re\exp^{i\theta}(AX + XB)\| \\ &= (\|A\| + \|B\|)w(X) \end{aligned}$$

donc

$$w(\delta_{A,B}(X)) \leq (\|A\| + \|B\|)w(X).$$

Corollaire 11 *Soient* $X, Y, A, B \in L(H)$, *on a*

$$w(\delta_A(XY)) \leq \|A\|(w(X) + w(Y)) \tag{3.5}$$

et

$$w(\delta_{A,B}(XY)) \leq max\{\|\delta_{A,B}(X)\|, \|\delta_{A,B}(Y)\|\}(w(X) + w(Y)). \tag{3.6}$$

Preuve 11 *on a*

$$\delta_A(XY) = \delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)$$

$$w(\delta_A(XY)) = w(\delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)),$$

et d'aprés (2,10) on obtient :

$$w(\delta_A(XY)) \leq \|\delta_A(X)Y + X\delta_A(Y)\|$$

$$\leq \|\delta_A(X)Y\| + \|X\delta_A(Y)\|$$
$$\leq \|\delta_A(X)\|\|Y\| + \|X\|\|\delta_A(Y)\|$$
$$= \|AX - XA\|\|Y\| + \|X\|\|AY - YA\|$$

donc

$$w(\delta_A(XY)) \leq \|A\|(w(X) + w(Y))$$

et on a

$$\delta_{A,B}(XY) = \delta_{A,B}(X)Y + X\delta_{A,B}(Y),$$

et d'aprés théorème (2.5.2), on obtient :

$$w(\delta_{A,B}(XY)) \leq \|\delta_{A,B}(X)Y + X\delta_{A,B}(Y)\|$$
$$\leq \|\delta_{A,B}(X)Y\| + \|X\delta_{A,B}(Y)\|$$
$$\leq \|\delta_{A,B}(X)\|\|Y\| + \|X\|\|\delta_{A,B}(Y)\|$$
$$\leq max\{\|\delta_{A,B}(X)\|, \|\delta_{A,B}(Y)\|\}(w(X) + w(Y)).$$

•. *On note l'image de δ_A, par $R(\delta_A)$, et en définie les ensembles suivants :*

$$C_0(A) = \{C \in L(H) : CL(H) + L(H)C \subset R(\delta_A)\}. \tag{3.7}$$

$$I_0(A) = \{Z \in L(H) : ZR(\delta_A) + R(\delta_A)Z \subset R(\delta_A)\}. \tag{3.8}$$

$$B_0(A) = \{B \in L(H) : R(\delta_B) \subset R(\delta_A)\}. \tag{3.9}$$

Théorème 3.1.2 *Soit $Z \in I_0(A)$ et $X \in L(H)$ alors*

$$w(\delta_A(ZX)) \leq 2\|A\|w(Z)w(X). \tag{3.10}$$

$$w(\delta_A(ZX)) \leq 2\|Z\|(\|A\|w(X) + \|X\|w(A)). \tag{3.11}$$

Lemme 12 *Soit $A \in L(H)$, alors*

$$I_0(A) = \{Z \in L(H), \delta_Z(A) \in C_0(A)\}. \tag{3.12}$$

Preuve 12 *Si $Z \in I_0(A)$ et $X \in L(H)$, alors,*

$$\delta_Z(A) = Z\delta_A(X) - \delta_A(ZX),$$

et

$$X\delta_Z(A) = \delta_A(X)Z - \delta_A(XZ).$$

On a
$$\delta_Z(A)X \in R(\delta_A),$$
et
$$X\delta_Z(A) \in R(\delta_A),$$
donc $\delta_Z(A) \in C_0(A)$, *et si* $Z \in L(H)$, *alors*
$$Z\delta_A(X) = \delta_A(ZX) + \delta_Z(A)X,$$
et
$$\delta_A(X)Z = \delta_A(XZ) + X\delta_Z(A),$$
donc $Z \in I_0(A)$.

3.1.1 Spectre d'une dérivation et une dérivation généralisée

Définition 3.1.3 *Soit* A *et* B *deux opérateurs dans* $L(H)$, *on définie le spectre de l'opérateur de dérivation généralisé par l'ensemble*
$$\sigma(\delta_{A,B}) = \{\alpha - \beta : \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\}. \tag{3.13}$$

Remarque 3.1.1 *Soit* $A, B \in L(H)$, *on a*
a) $\sigma(\delta_{A,0}) = \{\alpha : \alpha \in \sigma(A)\}$.
b) $\sigma(\delta_{0,B}) = \{-\beta : \beta \in \sigma(B)\}$.

3.2 Les opérateurs P-symétriques

Définition 3.2.1 *Soit* A *un opérateur dans* $L(H)$ *et* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une base orthonormal dans* H, *on dit que* A *est de trace classe si*
$$\|A\| = \sum_{n=0}^{\infty} \langle |A| e_n.e_n \rangle < \infty, \tag{3.14}$$
l'espace d'opérateur de trace classe noté par $C_1(H)$

Définition 3.2.2 *Soit l'opérateur* $A \in L(H)$, *on dit que* A *est P-symétrique, ssi*
$$AT = TA.impliqueA^*T = TA^*.\forall T \in C_1(H) \tag{3.15}$$
(opérateur de classe trace), on note par $F_0(H)$ *l'ensemble de touts les opérateurs P-symétrique.*

Définition 3.2.3 *Soit l'opérateur $\delta_A \in L(H)$, on dit que δ_A est P-symétrique, ssi :*

$$\overline{R(\delta_A)} = R(\delta_{A^*}). \tag{3.16}$$

Définition 3.2.4 *Soient $A, B \in L(H)$ le couple (A, B) est dite opérateurs P-symétrique, ssi :*

$$BT = TA,$$

implique

$$A^*T = TB^* \tag{3.17}$$

$\forall T \in C_1(H)$, on note par $GS(H)$ l'ensemble des couple P-symétriques.

Définition 3.2.5 *Soit $A \in L(H)$, A est un opérateur P-symétrique ssi $\overline{R(\delta_A)}^{W^*}$ est auto-adjoint. Soit $A, B \in L(H)$, alors le couple (A, B) est dite P-symétrique ssi :*

$$\overline{R(\delta_{A,B})} = \overline{R(\delta_{B^*,A^*})}. \tag{3.18}$$

Proposition 3.2.1 *Soit $A \in L(H)$, s'il existe á non zéro vecteurs $f, g \in L(H)$ vérifie*

(1) *$Af = \lambda f$ et $A^*f \neq \overline{\lambda} f$.*

(2) *$A^*g \neq \overline{\lambda} g$.*

Alors, A n'est pas P-symétrique.

Exemple 3.2.1 *Soit $(e_i)_i, i = 1, 2...$, un base orthonormale de H, et*

$$H_0 = vect\{e_1, e_2, e_3\}$$

suppose

$$A = \begin{pmatrix} I & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & I \end{pmatrix} \in L(H_0).$$

On définie l'opérateur A comme suite $A = A_0 \oplus I$, avec $H = H_0 \oplus H_0^{\perp}$, il est facile de voir que $Ae_1 = ie_1, A^*e_1 = -ie_1 + e_2 \neq -ie_1$, et
$A^*(2e_1 + ie_2) = -i(2e_1 + ie_2)$,
d'oú A n'est pas opérateur P-symétrique.

Exemple 3.2.2 *Soit $H = H_0 \oplus H_0 \oplus H_0$ et défini l'opérateur*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I & I \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on pose

$$T = \begin{pmatrix} B\,C\,D \\ 0\;B\,C \\ 0\;\;0\;B \end{pmatrix} \in C_1(H)$$

d'oú $B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$ *par simple calcule on a* $A^3 = 0$ *et* $AT = TA$ *mais*

$$A^*T - TA^* = \begin{pmatrix} -D - C & -D & 0 \\ -C & 0 & D \\ B & C & D + C \end{pmatrix} \neq 0$$

d'ou A *n'est pas P-symétrique.*

Théorème 3.2.1 *Soit* $A \in L(H)$*, si* A *est un opérateur nilpotente d'ordre* n $(A^n = 0)$ *alors,* A *n'est pas P-symétrique.*

Lemme 13 *Soit* $H = \oplus_{i=1}^{\infty} H_i$ *(somme direct orthogonale) et si* $A = \oplus_{i=1}^{\infty} A_i$ *sur* H *alors, tout opérateur positif dans* $\overline{R(\delta_A)}^W$ *est nul.*

Théorème 3.2.2 *Si* $A \in C_0(H)$*, alors les assertions suivent sont équivalente*

1. *A est diagonalisable.*
2. *Tout opérateur positif dans* $\overline{R(\delta_A)}^W$ *est nul.*
3. $\overline{R(\delta_A)}^W$ *ne contient pas aucune projection orthogonale.*

Preuve 13
$1) \Rightarrow 2)$ *est consequence de lemme 13.*
$2 \Rightarrow 3)$ *évedente.*
$3 \Rightarrow 1)$ *on suppose que* A *n'est pas diagonalisable, c.á.d* $\delta_p(A) = \phi$ *la conclusion donnée par lemme 13.*

3.3 Proprietés et discription de l'ensemble $C_0(A), I_0(A),$ et $B_0(A)$

Théorème 3.3.1 *Soit A est P-symétrique, alors*

1. $C_0(A), I_0(A) et B_0(A)$ *sont* C^**-algébres (algébres de Von Neumann).*
2. $C_0(A)$ *est un idéal bilétéral de* $I_0(A)$.
3. $R(\delta_B) \subset \overline{R(\delta_A)}^{W^*}$ $\forall_B \in C^*(A)$.

Preuve 14 1. *Il est claire que* $C_0(A), I_0(A), B_0(A)$*, sont* C^**-algebre fermmé par la topologie faible, donc*
$\overline{R(\delta_A)}^{W^*} = \overline{R(\delta_{A^*})}^{W^*}$*, et*
$(\delta_A)^* = \delta_{A^*}$*, donc sont* C^**-algébres.*

2. *on démontre que* $C_0(A)$ *est un idéal bilétéral de* $I_0(A)$, *pour* $Z \in I_0(A)$ *et* $C \in C_0(A)$, *alors* $\forall_X \in L(H)$, *on a* $X(CZ) = (XC)Z \in \overline{R(\delta_A)}^{W^*} Z \subset \overline{R(\delta_A)}^{W^*}$ *et* $(CZ)X = C(ZX) \in \overline{R(\delta_A)}^{W^*}$, *donc* δ_A *est idéal de droite est comme* $C_0(A)$ *est un* C^**-algébre on trouve que* $C_0(A)$ *est un idéal bilétéral de* $I_0(A)$.

3. *Si* $B_0(A)$ *est un* C^**-algébres contient* A *et* I, *alors il contient* $C^*(A)$.

Lemme 14 *Soit* $A \in L(H)$, *alors*

$$I_0(A) = \{Z \in L(H), \delta_Z(A) \in C_0(A)\}. \tag{3.19}$$

Preuve 15 *Soit* $A \in L(H)$, *alors,*

$$\delta_Z(A)X = Z\delta_A(X) - \delta_A(ZX),$$

et

$$X\delta_Z(A) = \delta_A(X)Z - \delta_A(XZ)$$

$$\Rightarrow \delta_Z(A)X \in \overline{R(\delta_A)}^{W^*},$$

et

$$X\delta_Z(A) \in \overline{R(\delta_A)}^{W^*},$$

donc on a

$$\delta_Z(A) \in C_0(A),$$

Posons $Z \in L(H)$, *tel que*

$$\delta_Z(A) \in C_0(A),$$

donc

$$Z\delta_A(X) = \delta_A(ZX) + \delta_Z(A)X,$$

et

$$\delta_A(X)Z = \delta_A(XZ) = X\delta_Z(A),$$

donc

$$\delta_Z(A) \in I_0(A).$$

Théorème 3.3.2 *Soit* $A \in L(H)$, *alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est P-symétrique.*

2. $A^*A - AA^* \in C_0(A)$.
3. $A^*R(\delta_A) + R(\delta_A)A^* \subset \overline{R(\delta_A)}^{W^*}$.

Corollaire 3.3.1 *Soit A est un opérateur P-symétrique et $X \in L(H)$, et si $AX - XA \in C_0(A)$, alors*

$$AX^* - X^*A \in C_0(A). \tag{3.20}$$

Lemme 3.3.1 *Soit $A \in L(A)$, si $\overline{R(\delta_A)}^{W^*}$ ne contient aucun opérateur positif non nul, alors*

$$C_0(A) = \{0\}. \tag{3.21}$$

$$I_0(A) = \{A\}^{'}. \tag{3.22}$$

3.4 Spectre des opérateurs P-symétriques

Lemme 3.4.1 *Soit A un opérateur dans $L(H)$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. $\exists x \in H$, $x \neq 0$ *avec* $Ax = \lambda x$, $A^*x = \overline{\lambda}x$.
2. $\exists y \in H$, $y \neq 0$ *avec* $A^*y = \overline{\lambda}y$, *alors* $\overline{R(\delta_A)}^{W^*}$ *est auto-adjoint.*

Remarque 3.4.1 *Si $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$, alors A est P-symétrique.*

Théorème 3.4.1 *Soit $A, B \in L(H)$ opérateurs P-symétriques, Si $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \{0\}$, alors $A \oplus B$ est P-symétrique.*

Corollaire 3.4.1 *Soit A un opérateur P-symétrique á spectre dénombrable, alors les propriétées suivantes sont équivalentes*

1. $C_0 = \{0\}$.
2. *A est diagonalisable.*
3. $I_0(A) = \{A\}^{'}$.

Preuve 16 1) $\Rightarrow$ 2) *: Supposons que $C_0(A) = \{0\}$. Compte tenu du théorème (3.3.2), on en déduit que $A^*A - AA^* = 0$ i.e. A est normal. Puisque le spectre de A est dénombrable, il s'ensuit que A est diagonalisable.*

2) $\Rightarrow$ 3) *: En vertu du théorème (3.3.2) et du lemme (5.5)[14], le résultat est immédiat.*

3) $\Rightarrow$ 1) *: Supposons que $I_0(A) = \{A\}^{'}$. Il suit du théorème (3.3.1) que $I_0(A)$ est une C^*-algébre et du théorème (3.3.2) que $A^* \in I_0(A)$ i.e. A est normal. Comme $\sigma(A)$ est dénombrable, alors A est diagonalisable. Compte tenu du théorème (4.2)[14] et du lemme (5.5)[14] on obtient le résultat.*

3.5 Les opérateurs D-symétriques

Définition 3.5.1 *On appelé un opérateur $A \in L(H)$ D-symétrique si*

$$\overline{R(\delta_A)} = \overline{R(\delta_{A*})}. \tag{3.23}$$

L'ensemble des opérateurs D-symétrique noté par $D(H)$.

Corollaire 3.5.1 *Tout opérateur normal est D-symétrique.*

Remarque 3.5.1 *Si A est un opérateur normal alors $A^* \in \ker(\delta_A)$.*

Définition 3.5.2 *Soit A un opérateur dans $L(H)$, on dit que A est opérateur isométrie si*

$$A^*A = I. \tag{3.24}$$

Corollaire 3.5.2 *Tout opérateur isométrie est D-symétrique.*

Définition 3.5.3 *Soit A un opérateur dans $L(H)$, on dit que A est opérateur essentiellement normal si $A^*A - AA^*$. est compact.*

Corollaire 3.5.3
1. *A un opérateur essentiellement normal est D-symétrique si*

$$AB = BA, etimplique AB^* = B^*A, \forall B \in C_1(H). \tag{3.25}$$

2. *$B \in C_1(H)$ (la classe de trace), B on dit que D-symétrique ssi B est normal.*

Théorème 3.5.1 *Soit A et B deux opérateur dans $L(H)$, si A et B sont des spectres disjoints avec des opérateurs D-symétriques, alors $A \oplus B$ est D-symétriques.*

3.6 Relation entre le spectre et l'image numérique d'un opérateur

Proposition 3.6.1 *Soit $A \in L(H)$, et H un espace de Hilbert complexe on a*

$$\sigma_p(A) \subset W(A). \tag{3.26}$$

Preuve 17 *Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$ et $x \in H, \|x\| = 1, Ax = \lambda x$.*
Alors

$$\langle (A - \lambda)x.x \rangle = 0 \Rightarrow \langle Ax.x \rangle = \lambda$$

d'oú $\lambda \in W(A)$.

Théorème 3.6.1 *(Inclusion spectral) Soit $A \in L(H)$, on note la fermeture de l'image numérique de l'opérateur A par $\overline{W(A)}$, on a toujours*

$$\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}. \tag{3.27}$$

Preuve 18 *Soit $\lambda \in \sigma_{app}(A)$ et soit (x_n) une suite de vecteurs unitaires telle que*

$$\|(A - \lambda I)x_n\| \longrightarrow 0.$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$|\langle (A - \lambda I)x_n . x_n \rangle| \leq \|(A - \lambda I)x_n\| \longrightarrow 0,$$

donc $\langle Ax_n . x_n \rangle \longrightarrow \lambda$ et par suite $\lambda \in \overline{W(A)}$, alors $\sigma_{app}(A) \subseteq \overline{W(A)}$.

Ainsi, d'aprés la proposition (1.3.2), on a $\partial\sigma(A) \subseteq \sigma_{app}(A) \subset \overline{W(A)}$. De la convexité de $\overline{W(A)}$, il s'en suit que $\sigma(A) \subseteq \overline{W(A)}$.

Exemple 3.6.1 *Soit A une matrice (2×2) dans $H = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ définit par*

$$A = \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, x = (x_1, x_2)$$

$$\begin{aligned} \langle Ax.x \rangle &= \langle \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle \\ &= \langle \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \rangle \\ &= x_2 x_1 \end{aligned}$$

alors,

$$W(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq \frac{1}{2}\},$$

et

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 = 0.$$

Alors $\sigma(A) = \{0\}$.

Théorème 3.6.2 *Soit $A \in L(H)$ un opérateur unitairement diagonalisable, alors l'image numérique de A est l'enveloppe convexe de son spectre ponctuel.*

Preuve 19 *Soit A un opérateur unitairement diagonalisable dans $L(H)$, alors il existe une base orthonormale $\{e_n\}$ de H et une suite $\{\lambda_n\}$ des nombres complexes tels que $Ae_n = \lambda_n e_n$. Pour tout entier positif n, on a*

$$W(A) = \{\langle Ax.x \rangle : x \in H, \|x\| = 1\}$$

$$= \{\langle A\sum_{i=0}^{\infty}\langle x.e_i\rangle e_i.\sum_{j=0}^{\infty}\langle x,e_j\rangle e_j\rangle : x\in H, \|x\|=1\}$$

$$= \{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n|\langle x.e_i\rangle|^2 : x\in H, \|x\|=1\}$$

$$= \{\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n a_n : a_n \geq 0, \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1\}.$$

Donc $W(A)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons convexes des valeurs propres de A, i.e $W(A) = co\sigma_p(A)$.

Exemple 3.6.2 *Soit $A \in L(H)$ un opérateur unitairement diagonalisable définit par*

$$A = diag(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...),$$

et on a Les valeurs propres de A est $\lambda = \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$, alors

$$\sigma_p(A) = \{\frac{1}{n}; n \geq 1\}.$$

Comme A est normal et compact (unitairement diagonalisable), alors

$$W(A) = co\sigma_p(A) =]0,1].$$

Théorème 3.6.3 *Siot $\overline{W(A)} = [m, M]$, alors $m, M \in \sigma(A)$.*

Preuve 20 *On a $m \in \overline{W(A)}$, alors il existe une suite de vecteur unitaire $\{x_n\}$ tel que $\langle Ax_n.x_n\rangle \longrightarrow m$, donc*

$$\|\langle (A - mI)x_n.x_n\rangle\| = \|(A - mI)^{\frac{1}{2}}x_n\|^2 \longrightarrow 0$$

alors, $\|(A - mI)x_n\| \longrightarrow 0$, et donc $m \in \sigma_{app} \subseteq \sigma(A)$.

Théorème 3.6.4 *Si $\lambda \in W(A)$, avec $|\lambda| = \|A\|$, alors*

$$\lambda \in \sigma_p(A). \tag{3.28}$$

Preuve 21 *Siot $\lambda \in \langle Ax.x\rangle$, $\|x\| = 1$, alors*

$$\|A\| = |\lambda| = |\langle Ax.x\rangle| \leq \|Ax\| \leq \|A\|.$$

Identiquement, $|\langle Ax.x\rangle| = \|Ax\|\|x\|$, donc $\exists\mu \in \mathbb{C}, Ax = \mu x$.

D'oú $\langle Ax.x\rangle = \langle \mu x.x\rangle = \mu$. Ainsi, $Ax = \lambda x$, et par conséquent, $\lambda \in \sigma_p(A)$.

3.7 L'image numérique et l'opérateur auto-adjoints et normaux

Théorème 3.7.1 *soit $A \in L(H)$ est un opérateur auto-adjoint ssi $W(A)$ est une intervalle de $\mathbb{R}$.*

Preuve 22 *Si A est auto-adjoint, alors pour tout $x \in H$*

$$\langle Ax.x\rangle = \langle x.Ax\rangle = \overline{\langle Ax.x\rangle},$$

on a donc $W(A) \subset \mathbb{R}$.

Inversement, si $W(A) \subset \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in H$ $\langle Ax.x\rangle$, est un réel on a

$$\langle Ax.x\rangle - \langle x.Ax\rangle = 0 \Longleftrightarrow \langle (A - A^*)x.x\rangle = 0$$

donc

$$(A - A^*) = 0 \Longleftrightarrow A = A^*$$

Alors A est auto-adjoint.

Théorème 3.7.2 (1) *Si A est un opérateur est auto-adjoint. Alors*

$$r(A) = W(A) = \|A\|. \tag{3.29}$$

Théorème 3.7.3 (1) *Si $A \in L(H)$ est un opérateur normal, alors*

$$\|A^n\| = \|A\|^n \ \ \textit{pourtout} \ \ n \geq 1. \tag{3.30}$$

De plus,

$$r(A) = W(A) = \|A\|. \tag{3.31}$$

Preuve 23 *On a*

$$r(A) \leq W(A) \leq \|A\|.$$

pour tout $x \in H$, on a

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax.x\rangle = \langle A^*Ax.x\rangle \leq \|A^*Ax\|\|x\| = \|A^2x\|\|x\| \leq \|A^2\|\|x\|^2,$$

d'aprés (1,5)on a $\|Ax\| = \|A^*x\|$.

Il découle donc que $\|A\|^2 \leq \|A^2\|$. Comme l'inégalité $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ est toujours vraie, on a $\|A\|^2 = \|A^2\|$.

De plus

$$\|A^n x\|^2 = \langle A^n x.A^n x\rangle = \langle A^*A^n x.A^{n-1}x\rangle$$
$$\leq \|A^*A^n x\|\|A^{n-1}x\| = \|A^{n+1}x\|\|A^{n-1}x\|, \forall n \geq 2.$$

Donc

$$\|A^n\|^2 \leq \|A^{n+1}\|\|A^{n-1}\|, \forall n \geq 2,$$

supposons que $\|A\|^k \leq \|A^k\|$ *pour tout* $k \in \{1, 2, ..., n\}$ *et* $\forall n \geq 2$. *On a*

$$\|A\|^{2n} \leq \|A^n\|^2 \leq \|A^{n+1}\|\|A^{n-1}\| \leq \|A^{n+1}\|\|A\|^{n-1}.$$

Ainsi

$$\|A\|^{n+1} \leq \|A^{n+1}\|.$$

On déduit par induction que $\|A^n \leq \|A\|^n, \forall n \geq 1$. *Finalement, la formule du rayon spectral entraîne que* $r(A) = \|A\|$, *et on a donc* $r(A) = w(A) = \|A\|$.

References

[1] A. Mansour, Halima. Brahimi et Naouel. Sobti, Master Academique Mathématiques fondamentales, Université Hamma Lakhdar D'Eloued, 2016.

[2] Amer. Abu-Omar, Numerical Radius Inequalities for Products of Hilbert Space Operators II, Numerical Functional Analysis and Optimization, VOL. 41, NO. 2, 127133, 2020.

[3] Dragoljub. J. Keckic, Gâteaux derivative of B(H) norm, Proceedings of the american Mathematical socity Volume 133, Number 7, Pages 2061–2067 S 0002-9939(05)07746-4 January 25, 2005.

[4] F. Kittaneh, Operators that are orthogonal to the range of a derivation, J. Math. Anal. Appl 203(1996), 863-873.

[5] F. Kittaneh, Normal derivations in norm ideals, Proc. Amer. Math. Soc

[6] J. H. Anderson, On normal derivations, Proc. Amer. Math. Soc, 38 (1973), 135-140.

[7] J. H. Anderson, J.W. Bunce, J.A. Deddens and J.P. Williams, C*-algebras and derivation ranges, Acta. Sci. Math., 40 (1978), 211-227.

[8] H. Mecheri, The numerical range and numerical radius of derivation operator δ_A and generalized derivation operator $\delta_{A,B}$, Transylvanian Review, vol 29, No. 1, March 2021.

[9] H. Mecheri and Ibrahim .Omer Ahmed, Some Properties P-Symmetric Operators, Transylvanian Review, Vol XXVII, No. 47, 2020. 504-506.

[10] H. Mecheri, Maifi Khedidja et Sellat Ouafa, Spectre d'un opérateur, Master mathématiques appliquées, Université de Larbi Tébessi Tébessa, 2016.

[11] H. Mecheri and Rebiai. Belgacem, BirkhoffJames Orthogonality and Best Approximent In L1(X), The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 15, Issue 1, Article xx, pp. 1-6, 2018

[12] S. Mecheri and H. Mecheri, The Gâteaux derivative and orthogonality in C_∞, An. St. Univ. Ovidius Constanta, Vol. 20(1), 2012, 275–284.

[13] S. Mecheri and A. Bachir, Generalized derivation modulo the ideal of all compact operators, Int.J. Math. Math. Science. 32(2002), 504-506.

[14] S. Bouali et J. Charles, Extention De la Notion D'Opérateur D-symétrique. II^*, Université Montpellier Il Institut de Mathématiques Place Eugéne Bataillon 34095 Montpellier, France Submitted by Rejendra Bhatia.

[15] S. Bouali and Y. Bouhafsi, p-symmetric operators and the range of a subnormal derivation, Acta. Sci. Math(Szeged), 72 (2006), 701-708.

[16] S. Bouali and M. Ech-chad, Generalized d-symmetric operators, II, Canad. Math. Bull., 54 (2011), 21-27.

[17] S. Bouali1, M. Ech-Had1, A. Zouaki, Y. Bouhafsi, A note On P-symmetric operators, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 110 No. 1 2016, 71-82.

[18] S. Bouzenada, Kebbouci Salma, Kamache Houria, l'image numérique d'un opérateur linéaire borné, Mathématiques appliquées, Université de Larbi Tébessi, Tébessa, 2016.

[19] T. R. Harris, M. Mazzella, L. J. Patton, D. Renfrew, I. M. Spitkovsky, Numerical ranges of cube roots of the identity, Linear algebra and its applications 435, United States, Juin 2011.